UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ENSEÑANZA A TRAVES DE PROBLEMAS: UN EXPERIMENTO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

MARTIN MANRIQUE MANSOUR

DIRECTOR: M. en C. FRANCISCO DE JESUS STRUCK CHAVEZ

2004

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

VNIVERSDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Enseñanza a través de problemas: un experimento.

realizado por Martín Manrique Mansour

con número de cuenta 09355104-7 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M en C Francisco de Jesús Struck Chávez
Propietario	Mat. Julieta del Carmen Verdugo Díaz
Propietario	M en C María del Pilar Adela Martínez Téllez
Suplente	Dra. Ana Margarita Guzmán Gómez
Suplente	Dra. María de la Paz Alvarez Scherer

Consejo Departamental de Matemáticas

M en C José Antonio Gómez Ortega

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

A mis hermanos,

que han sido como unos hermanos para mí.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todos mis familiares y amigos por estar y haber estado siempre cerca de mí. Doy gracias a mis sinodales Paz Álvarez, Ana Guzmán, Pilar Martínez y Julieta Verdugo, y especialmente a mi director de tesis Francisco Struck, por toda su ayuda, sus correcciones y sus oportunos comentarios. Agradezco también a los profesores Norma Amirante, Emilio Cabrera, Patricia Casado, Catalina Castillo, José Luis Chaires, Guillermo Díaz (Güili), Alberto Francis, Elizabeth García, Selene Ruiz, Mauricio Santana, Jesús Santos y Araceli Valdivia, que me permitieron experimentar con sus grupos, y a todo el personal de las Escuelas Secundarias 48, 172, 199 y 472, del Instituto Zumárraga, del plantel Coyoacán del IEMS y de la Escuela Primaria Herminio Almendros, que lo hicieron posible. En particular quiero agradecer a mis padres Jorge Alberto Manrique y Mónica Mansour, por su apoyo técnico y económico y por su cooperación, y a mis hermanos Julián y Lorenza, por su apoyo moral y económico. Menciono de manera especial a Cécile Acosta, por su apoyo a todos los niveles, su cooperación y su aguante, y a Pablo López, por su apoyo técnico y moral y por las frecuentes, amenas y enriquecedoras conversaciones acerca de la escuela y la educación en general.

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN

1. PLANTEAMIENTO BÁSICO

La idea que está atrás de todo este trabajo y de mi interés en la enseñanza de las matemáticas es que la única manera de que ésta tenga algún sentido es permitir que los estudiantes descubran por sí mismos los conceptos, de ser posible guiados por alguien que maneje el tema.

Lograr esto presenta varias dificultades. Para empezar, si hay alguien que guíe el aprendizaje, es necesario que conozca muy bien la materia, pues sólo así será capaz de seguir por cualquier dirección que el grupo tome y de regresar de manera natural a otros temas que quiera tratar. También se necesita que tenga la sensibilidad para no permitir que la discusión caiga sin decir tampoco más de lo necesario, así como un manejo adecuado del grupo, para conseguir que todos vayan descubriendo y no que dos o tres se sigan de largo y dejen a los demás atrás.

En contraste, un profesor que expone puede dar una clase sobre un tema sin conocerlo plenamente, habiendo entendido (o habiéndose aprendido) solamente una forma de considerarlo; así es poco probable que alguna pregunta se salga de su radio de alcance. De ninguna manera afirmo que sea ésta una manera adecuada de exponer: sólo menciono la plausibilidad. Por otra parte, si el grupo no participa de manera activa es mucho más fácil manejarlo bien, basta con que preste atención.

Otra de las dificultades es el tiempo. Permitir que los estudiantes descubran por sí mismos los conceptos matemáticos toma mucho más tiempo que explicárselos con calma y usando varios ejemplos ilustrativos, construyendo un razonamiento, por no mencionar todo el tiempo adicional que se ahorra si se les dan como receta.

Enseñar de esta manera también requiere el diseño de materiales y actividades que permitan generar una dinámica adecuada para observar el comportamiento de un fenómeno y descubrir los conceptos que se quiera, además de mucha energía por parte de los estudiantes y de la persona que guía el aprendizaje. Otra vez: no estoy diciendo que una exposición no pueda ser muy creativa ni utilizar materiales creativos ni requerir mucha energía por parte del profesor y de los estudiantes, sino que también puede ser de otra manera.

Si tiene tantas exigencias, ¿cuál es el interés en que los estudiantes aprendan los conceptos descubriéndolos por sí mismos? Una razón es que los conceptos que uno aprende de esa manera quedan arraigados de manera mucho más profunda que los que uno entendió explicados por otro, por muy bien que hayan sido entendidos. A fin de cuentas, nadie experimenta en cabeza ajena. Desde el punto de vista del aprendizaje concreto, del manejo de conceptos, ¿qué es preferible: que los programas cubran muchos temas pero que los conceptos permanezcan en la cabeza de los estudiantes un promedio de dos semanas y que la única utilidad de esos conceptos para sus vidas sea una calificación aprobatoria, o que los programas sean más pequeños pero los estudiantes lleguen realmente a comprender los temas de manera profunda?

Esto nos conduce a la cuestión más importante de todas: ¿Qué es lo que buscamos con la enseñanza de las matemáticas en los niveles básico y medio? Yo creo que para la gran mayoría de los seres humanos, la parte de las matemáticas que resulta útil en la vida es ínfima, y que el sentido de enseñar algo más que las operaciones aritméticas básicas y algunos conceptos de geometría es fomentar una forma de razonamiento que sí puede ser útil en situaciones muy diversas. Si Enrique descubre que el cierre de su tienda de campaña se descompuso, hay que enredar mucho las cosas para que tenga que averiguar la longitud del cierre que debe comprar utilizando el teorema de Pitágoras (puede, por ejemplo, no tener cinta métrica pero conocer las otras longitudes por estar escritas en la caja o en la etiqueta). Lo que yo creo que debemos fomentar es que a Enrique se le ocurra medir el cierre con un hilo e ir con la medida a la mercería, si es que no quiere o no puede simplemente llevarle la tienda a un sastre.

Considerando esto la prioridad, el que los estudiantes aprendan a razonar de manera lógica, queda claro lo que para mí es la ventaja principal de aprender los conceptos matemáticos descubriéndolos uno mismo, pues definitivamente para aprender a pensar es mucho mejor pensar que entender razonamientos ya hechos y masticados, ya no digamos que tomar dictado de recetas sin explicación alguna.

Regresando al tema de qué tantas matemáticas debe saber un egresado del bachillerato, yo sostengo que no es necesario que maneje mucho más que las operaciones aritméticas básicas, algunos conceptos de geometría y un poco de álgebra. Lo que es importante es que pueda razonar de manera lógica y reconocer cuándo ese razonamiento es útil para resolver un problema determinado. No creo que debamos empecinarnos en encontrarle utilidad en la vida cotidiana a conceptos matemáticos que no la tienen. Resulta tan artificial que tiende a dar la impresión de que las matemáticas "no sirven para nada" en lugar de fomentar el aprendizaje.

Surge necesariamente la cuestión de qué sucedería entonces con aquéllos que quisieran estudiar alguna carrera relacionada con las matemáticas. Dichos estudiantes no sólo necesitan saber razonar (aunque no deje de ser esto lo más importante) sino también estar familiarizados con diversos conceptos matemáticos. Si se dejara el aprendizaje de dichos conceptos para los primeros años de la carrera, bajaría mucho el nivel de los egresados, al menos en cuanto a la cantidad de material que manejaran. Mi opinión es que, si se ha fomentado el razonamiento lógico en los cuando menos nueve años que lleva en la escuela, un estudiante puede adquirir una preparación matemática sólida en los tres años del bachillerato, donde las materias necesarias para lograrlo podrían ser optativas.

2. EL SEMINARIO DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Casi todas las clases que recibí durante la primaria, la secundaria y el bachillerato fueron conferencias impartidas por mis profesores. Por fortuna, algunas veces se trató de conferencias espectaculares. Donde más discusión hubo fue en las materias humanísticas, como literatura, ética y algunas clases de psicología, pero casi nunca en temas de tipo matemático.

Como era de esperarse, crecí creyendo que una buena clase era sinónimo de una buena exposición. Empecé a dar clases particulares de matemáticas, química y biología desde bastante joven, y lo que hice siempre fue tratar de explicar el tema lo mejor posible, de manera que el estudiante llegara a entender realmente lo que sucedía (hasta donde yo lo entendiera, por supuesto). Una excepción notable era el algoritmo para obtener la raíz cuadrada. Cuando tuve el examen de raíz cuadrada en 2° de secundaria no me enteré con anticipación y no manejaba el algoritmo. Aproximé por tanteo y sólo me dio tiempo de resolver una de cinco. Justo después lo aprendí, pero se me olvidó en un par de semanas. A partir de ese momento, siempre que alguno de mis alumnos necesitaba aprenderlo, iba yo con la mamá de un amigo que era profesora de primaria y ella me daba la receta, misma que yo pasaba al costo a mi alumno, aceptando sin más que no entendía por qué funcionaba y que por lo tanto no se lo podía explicar. Después del examen de mi alumno, bastaban un par de días para que se me volviera a olvidar, y no creo que para él las cosas fueran muy distintas. No deja de ser curioso cómo nunca se me ocurrió anotarla.

Tuve tres experiencias dando clase a grupos de primaria rurales en los estados de Oaxaca, Chiapas y San Luis Potosí, alrededor de un mes en cada ocasión. En ningún caso hubo un plan previo. Se trató de acomodos naturales debidos a estar yo viviendo en un lugar donde no había maestro. Fueron muy buenas experiencias y siento que de provecho para todos, pero en las tres ocasiones mi papel fue el de profesor expositor.

Mi primer contacto con el método de aprender matemáticas descubriendo uno los conceptos fue en la Facultad de Ciencias. Desde los primeros semestres tuve profesores que lo utilizaban, y desde que lo conocí me atrajo muchísimo. A pesar de eso, pasó bastante tiempo antes de que lo asimilara, y durante años seguí exponiendo cada vez que daba clase. De hecho, cuando fungí como maestro en Chiapas y en San Luis Potosí llevaba ya tres años y medio en la facultad.

Cuando realmente empecé a vivir esa dinámica desde el otro lado, es decir, desde el lado de quien guía, fue en un seminario sobre enseñanza de las matemáticas impartido por Francisco Struck y Julieta Verdugo. En dichos seminarios (pues al final fueron cuatro, los últimos dos a cargo sólo de Julieta) se trabajó a fondo y de manera práctica esta forma de aprender y de enseñar.

El objetivo de esos seminarios de enseñanza era crear material para aprender matemáticas por cuenta propia, en apoyo al proyecto Posprimaria. El proyecto Posprimaria era una iniciativa del CONAFE dirigida principalmente a comunidades rurales donde no hubiera secundaria (ni telesecundaria). Consistía básicamente en convocar a gente que tuviera secundaria o de preferencia bachillerato terminados y quisiera seguir estudiando. Se les daba un curso sobre cómo llevar a cabo una investigación en general y se les contrataba durante dos años con un sueldo simbólico, a cambio de becarlos durante todo el ciclo siguiente de aprendizaje: bachillerato, carrera técnica o licenciatura, según fuera el caso.

Teóricamente, dichos instructores enseñarían a investigar a quien quisiera el tema que quisiera. Hubo varias investigaciones interesantes: desde las que podían reportar una utilidad práctica muy clara, como beneficios a la agricultura o el aprovechamiento básico de las energías eólica y solar sin necesidad de tecnología avanzada y cara, hasta algunas dudas de toda la vida, como el caso de un señor de setenta años que siempre había querido saber cómo se mueven los planetas y la razón de que haya estaciones, sin olvidar los temas cuyo conocimiento hace merecedor de respeto, como el algoritmo para obtener la raíz cuadrada: cualquiera sabe dividir con decimales, pero ser capaz de obtener la raíz cuadrada, ya es otro cantar. De cualquier manera, la mayoría de los interesados eran gente que quería obtener su certificado de secundaria y que investigaba los temas del plan abierto para después presentar los exámenes.

La idea del proyecto era muy bonita. Como ya mencioné, hubo casos en los que realmente se aprovechó. El proyecto se apoyaba mucho en Internet, pues si había teléfono sólo hacía falta una computadora, y es mucho más fácil hacerse de una computadora que de una biblioteca aceptable. En gran parte fue eso lo que lo hizo viable, y creo que uno de sus aportes principales fue hacer ver que es posible recabar información sobre algún tema si uno se lo propone. Sin embargo, en muchos casos se cayó en la dinámica vertical tradicional, donde el instructor daba clase y explicaba los temas de la secundaria abierta. Esto sucedió no sólo porque los instructores hubieran aprendido de esa manera, sino también porque en muchos casos tenían interés en seguir estudiando pero no en enseñar, así que se iban por el camino más fácil.

Donde más problemas hubo en el programa Posprimaria fue en el área de matemáticas. El esquema de investigación no funcionaba muy bien porque era difícil saber qué buscar y en dónde. Además, la preparación de los instructores en el área de matemáticas no solía ser muy buena. Se concibió entonces la idea del seminario de enseñanza de las matemáticas como un espacio dirigido a diseñar material para aprender matemáticas por cuenta propia.

Teníamos tres sesiones semanales de dos horas en las que discutíamos temas de matemáticas que fueran parte del temario de secundaria. Se consideraban las posibilidades y dificultades para enseñar algo en particular y se buscaban problemas adecuados y materiales concretos que pudieran ser de utilidad. Después, íbamos por parejas o tríos a comunidades donde estuviera funcionando el proyecto Posprimaria y aplicábamos un taller que hubiéramos diseñado o adaptado para aprender algún tema determinado. Al regresar escribíamos un reporte de lo que habíamos hecho y una evaluación del resultado. Como trabajo final había que hacer una guía para aplicar el taller sin manejar previamente el tema, que pudiera también utilizarse para aprender por cuenta propia.

Para algunos temas había talleres que nuestros profesores habían aplicado ya varias veces y conocían bien. En esos casos nosotros vivíamos el taller primero como alumnos y después podíamos adaptarlo para que sirviera para aprender sin maestro. Otros temas estaban menos trabajados, como la raíz cuadrada. Aquí tengo que mencionar que desde el día en que analizamos en clase el algoritmo clásico para obtener la raíz cuadrada y entendimos por qué funcionaba, no se me ha vuelto a olvidar, o más bien digamos que me tardo muy poco en "volverlo a deducir". Sobra decir que ese memorable día, al comenzar la clase, sólo una de las alrededor de veinte personas presentes recordaba el algoritmo, y también sobra decir que esa persona no era Francisco Struck.

3. CASILLEROS

Un día se mencionó en clase este taller, conocido generalmente como "casilleros", pero no lo vivimos como tal. A los pocos días, un compañero y yo íbamos rumbo a la comunidad de Los Hormigueros para aplicar otro taller que teníamos preparado y que ya no recuerdo cuál era. En el camino decidimos no aplicar ese taller sino éste. Compramos cartulina de dos colores y recortamos tarjetas. Al día siguiente aplicamos el taller en dos sesiones de unas tres horas cada una, mañana y tarde. Funcionó muy bien y se llegó realmente muy lejos, lo que me convenció de lo útil que resultaba la dinámica. No sólo se vieron muchos temas de divisibilidad, incluyendo la conclusión de que la descomposición en factores primos es única, sino que también se exploró la estructura de los números cuadrados y la relación de un número natural con su raíz cuadrada. Por supuesto que tuvimos mucha suerte en cuanto al grupo, donde había desde una niña de nueve hasta una señora de más de setenta años (aunque hay que aceptar que justo ellas dos como que no entendieron muy bien de qué se trataba), pero de cualquier manera me permitió ver que el taller servía para abordar muchos temas importantes.

Ese semestre, como trabajo final, presenté "casilleros" adaptado para ser utilizado en Posprimaria. Después de ser criticado y corregido, quedó listo para su publicación. En los semestres subsiguientes preparé dos talleres más, diseñados para entender el funcionamiento del sistema decimal, también con el fin de que fueran publicados y utilizados en el proyecto Posprimaria. Finalmente ninguno llegó a la prensa y el proyecto Posprimaria ya no existe. Sin embargo, el haber diseñado y adaptado talleres con el enfoque de permitir que los estudiantes descubrieran los conceptos matemáticos por sí mismos sirvió de experiencia.

Descripción del taller

La actividad consiste en lo siguiente: hay un cierto número de puertas numeradas y la misma cantidad de personas también numeradas. Al empezar están todas las puertas cerradas (o abiertas, es equivalente). Primero pasa la persona 1 y abre todas las puertas. Después pasa la persona 2 y cierra las puertas con numeración par. Luego pasa la persona 3 y modifica todas las puertas numeradas con múltiplos de tres: si encuentra una puerta cerrada la abre y si la encuentra abierta la cierra. Así pasan tantas personas como puertas haya (las que uno quiera), modificando cada una las puertas numeradas con sus múltiplos.

Como cada persona modifica las puertas numeradas con sus múltiplos y cada puerta es modificada por las personas numeradas con sus divisores, es claro que el taller sirve para tratar varios temas de divisibilidad. Sin embargo, hay otros asuntos relacionados con los números naturales a los que se puede llegar de manera muy natural. En particular, como las puertas que quedan abiertas son las numeradas con cuadrados perfectos, es común hablar de ellos y de la raíz cuadrada en general.

La pregunta natural es cómo quedarán las puertas después de que pasen todas las personas. Después de ver si hay alguna idea, se realiza la actividad y se observa el resultado. La siguiente pregunta también es muy directa: ¿por qué quedaron abiertas esas puertas? Para responderla, independientemente de si se ha notado o no que se trata de cuadrados perfectos, surge la cuestión de qué personas modifican cuáles puertas. En realidad estas son dos preguntas: qué personas modifican una puerta determinada y qué puertas son modificadas por una persona determinada.

Como la pregunta inicial es por qué quedaron algunas puertas abiertas y otras cerradas, es común ver primero qué personas modifican una puerta fija. A partir de ahí hay varios caminos o líneas de razonamiento que pueden seguirse.

4. LA PRIMERA GUÍA

Como trabajo final para el seminario de enseñanza de las matemáticas IV, que fue el segundo que tomé, preparé una guía para que se utilizara como material para aprender matemáticas en el proyecto Posprimaria.

Idealmente, la guía podría utilizarse de dos maneras distintas. Explicaba cómo aplicar el taller a un grupo, haciendo énfasis en que quien lo dirigía permitiera que los conceptos surgieran en el grupo y se aguantara las ganas de explicar, pero pretendía también ser útil para que una o varias personas descubrieran por sí mismas varios temas de divisibilidad sin necesidad de un profesor.

En la práctica, y sobre todo viéndolo ahora a la distancia, es probable que no cumpliera muy bien con ninguno de sus dos fines. Digo cumpliera porque finalmente esa guía como tal nunca llegó a ser utilizada. Aunque creo que fue un buen intento, la guía tiene varias limitaciones, que comentaré brevemente:

Para empezar, cuando la diseñé sólo había aplicado una vez el taller. No lo conocía bien. No estaba consciente de todos los temas y caminos posibles a partir de la dinámica inicial. Consideraba en cierta manera que el camino seguido por el grupo de Los Hormigueros era el más "natural" y, aunque en la guía se trataban algunos temas básicos de divisibilidad que no habían surgido con ese grupo, yo suponía que casi siempre aparecerían de manera lateral a partir de una discusión similar a la que se dio en esa primera ocasión. Por lo tanto, la primera parte de la guía estaba diseñada de manera lineal y sólo al final podía irse uno por varios caminos.

Otro problema es que el proyecto era demasiado ambicioso para las limitaciones de espacio y tiempo. La limitación de tiempo consistía en que era un trabajo semestral y yo había empezado a hacerlo tarde, y la de espacio en los requerimientos para que fuera publicado por CONAFE. Tomando esto en cuenta, era un tanto ingenuo suponer que lograría hacer una guía que resultara realmente útil para dos fines no tan cercanos: que alguien conociera el taller y lo pudiera aplicar, y que uno o varios estudiantes aprendieran ciertos temas de matemáticas sin necesidad de otro material. Probablemente el resultado habría sido mejor de haber intentado cumplir uno solo de esos objetivos.

Una dificultad de base era que si alguien aplicaba el taller, debía conocer el tema, mientras que estudiantes que lo aprendieran por sí solos claramente no lo manejarían. Explicar todo al principio habría sido una tentación excesiva para el segundo grupo de interesados potenciales. Ni siquiera hacerlo al final habría cambiado mucho las cosas, además del problema de espacio que ya mencioné. La salida que encontré fue sugerir que si alguien planeaba aplicar el taller, lo utilizara primero como un estudiante que aprende por cuenta propia. Si la guía para aprender por cuenta propia estaba bien hecha, quien fuera a aplicar el taller aprendería (descubriría) bien el tema y lo manejaría para cuando lo aplicara. Además, ¿hay mejor manera de aprender a aplicar un taller permitiendo que los conceptos se vayan descubriendo que vivirlo uno primero desde el otro lado, es decir, descubrir uno los conceptos? Cuando menos, así es como aprendí yo.

En la práctica, no habría sido tan probable que muchos de los instructores se tomaran el trabajo de descubrir los conceptos para después aplicar el taller. Tampoco creo que todos los que lo intentaran lo consiguieran, pues si uno no está acostumbrado, es difícil de repente ponerse a descubrir conceptos matemáticos a partir de una dinámica, y el problema no se soluciona con una guía de treinta páginas.

La guía hace énfasis en aprender descubriendo. Me pareció más importante recalcar la importancia de este método que cubrir una gran cantidad de material. El razonamiento reproduce fielmente la discusión que se dio en Los Hormigueros. Sigue un modelo lineal de razonamiento que ahonda cada vez más en la estructura de los números cuadrados y en la relación de un número con su raíz, donde los conceptos de divisibilidad van apareciendo de manera casi mágica "a un ladito". Se llegó muy pronto a la respuesta de la pregunta inicial (¿Qué puertas quedan abiertas?) y después, de manera muy natural, a la estructura de los números de acuerdo a sus divisores y al concepto de número primo. Se observó que la estructura de los divisores de un natural depende por completo de sus factores primos y se llegó a que la descomposición en primos es única, todo a partir de buscar la razón de que los números cuadrados, y sólo ellos, tengan una cantidad impar de divisores.

La crítica principal que se me hizo fue que no se trataba en ningún momento de divisores comunes y por lo tanto no se mencionaban los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo, clásicos del programa de secundaria. Se me pidió que los incluyera, pero tratar esos temas con el mismo detalle que el resto de la guía requería un espacio igual o incluso mayor, lo que no era posible. De todas maneras lo hice, pensando que en un momento dado podría partirse en dos de ser necesario. El resultado fue que quedó como parchada. Se nota que la segunda parte es un añadido forzado al que se brinca de manera muy artificial.

Escribir un programa que por sí solo baste para aprender descubriendo uno mismo los temas más importantes de divisibilidad es un trabajo muy complejo que tomaría años, si es que llegara a lograrse. Creo que uno de los errores fundamentales de esa primera guía fue no darme cuenta del tamaño del objetivo que me estaba proponiendo.

Creo que el otro error fundamental es consecuencia de mi poco conocimiento del taller, y consiste en que se sigue un razonamiento lineal, sin considerar los múltiples caminos que pueden tomarse.

5. EL PROYECTO DE TESIS Y SU FINALIDAD

Considerando las características y limitaciones de ese primer modelo pero conociendo el potencial del taller, me quedé siempre con la idea de escribir una guía que fuera más útil. Me pareció un proyecto adecuado para obtener el título de matemático por su tamaño y sus características, y justamente porque implicaba para mí una primera investigación seria sobre la enseñanza de las matemáticas.

Mi primera idea consistía en aplicar el taller a varios grupos de niveles básico, medio y medio superior y, de acuerdo a lo que se observara, diseñar una nueva guía. De entrada, me quedaba muy claro que debía dirigirla a profesores que conocieran el tema y tuvieran posibilidad de repasarlo antes de aplicar el taller. El énfasis debe ponerse en la manera de llevar la dinámica para permitir que los estudiantes vayan descubriendo los conceptos por sí mismos. Al limitar el objetivo del trabajo aumentaban las posibilidades de poder hacerlo bien y de que la guía tuviera una utilidad práctica real. También me había convencido de que la línea que se seguía en la primera guía les parecía muy artificial a varias personas y de que tenía que haber desde el principio la posibilidad de irse por varios caminos.

Cuando les platiqué el proyecto a Francisco Struck y Julieta Verdugo, me sugirieron que no tomara el primer trabajo como punto de partida sino que aplicara la dinámica y permitiera que el grupo siguiera su propia dirección. Basarme en la primera guía podría influir en los resultados, mientras que dejar libertad completa permitiría ver qué caminos son los más naturales. Desde el primer momento estuve de acuerdo y fue así como hice el trabajo.

También se trató el tema de si convendría limitar la investigación a un nivel educativo o a todos los grupos de una escuela. Al hacerlo se eliminarían algunas variables, lo que en cierta forma permitiría evaluar mejor la utilidad del taller. Restringirse a una escuela elimina la variable sociocultural (a nivel grupo, no a nivel individuo) pero tiene el problema de que la noticia se va difundiendo y al aplicar el taller a los últimos grupos mucha gente ya lo conocerá. Limitarse a un solo tipo de escuelas, que sería una alternativa, no es tan sencillo debido a la dificultad de encontrar maestros y directores con ganas de prestar sus grupos para experimentos científicos. Lo que sí podría haberse hecho era limitar el proyecto sólo a un nivel educativo. Sin embargo, una de las hipótesis que sostengo es que en la gran mayoría de los casos el aprovechamiento real de los años y años de clases de matemáticas que ha padecido un egresado de bachillerato es ínfimo, así que había un interés particular en aplicar el taller en diversos niveles educativos. Después de platicarlo un rato se decidió que la dinámica se aplicaría en los grupos que se consiguieran, de las escuelas y niveles educativos que fueran.

Podría parecer que se trata otra vez de un proyecto demasiado ambicioso para su tamaño. Yo espero que no sea así. Aunque cubrir varios niveles educativos y marcos socioculturales con un número relativamente reducido de grupos resta fuerza a las conclusiones, el propósito principal de la tesis es diseñar una guía que permita aplicar el taller fomentando que los estudiantes descubran los conceptos por sí mismos, y creo que para ese fin lo mejor es tener una muestra general, aunque sea pequeña.

II. PLANTEAMIENTO

1. EXPERIMENTO

Como ya dije, la dinámica consiste en que hay una serie de puertas numeradas y van pasando unos niños que las abren o cierran, según las encuentren. Yo empecé con todas las puertas cerradas pero es equivalente empezar con todas abiertas. Entonces el primer niño que pasa abre todas las puertas. El segundo niño cierra todas las pares. El tercero modifica las numeradas con múltiplos de tres, el cuarto las numeradas con múltiplos de cuatro y así sucesivamente. Hay el mismo número de niños que de puertas, aunque para algunos temas tiene sentido preguntarse cómo van las cosas después de que ha pasado algún niño que no sea el último.

Después de plantear la dinámica y ver qué ideas hay, se representa la situación haciendo pasar un número determinado de niños por el mismo número de puertas. Yo utilicé treinta niños y treinta puertas, pues me pareció que con ese número podía observarse un comportamiento sin que la dinámica fuera demasiado larga, pues podía resultar tediosa y además yo sabía que probablemente no fuera a tener mucho tiempo con cada grupo. Se puede trabajar por equipos, individualmente o de manera grupal. No creo que sean convenientes equipos de más de cinco para que todos los estudiantes puedan tomar parte activa en la dinámica.

Se puede representar la situación de varias maneras. Lo ideal (aunque en este caso no lo hice por falta de tiempo) es que el grupo o cada equipo diseñe la actividad como se le ocurra. Las formas clásicas de representar las puertas son con personas (y otras personas desempeñan el papel de los niños), que pueden voltearse o alzar la mano cuando son cerradas; con tarjetas que tengan lados diferentes para saber si la puerta está abierta o cerrada, o con puertas dibujadas y fichas de algún tipo (clásico: frijoles, se recomiendan granos de maíz porque ruedan menos) que se ponen y quitan de la puerta cuando alguien la cierra o la abre. Estos dos últimos modos son adecuados cuando se trabaja por equipos, pero se prestan a equivocaciones.

La idea es que el material sea sencillo y barato, que pueda construirse con facilidad en casi cualquier lugar, para que esto no sea un impedimento. Por otra parte, me resulta difícil imaginarme un material caro o complejo que funcione bien para esta actividad, pues según lo que quiera verse el número de puertas varía y puede llegar a ser grande (unas cien puertas).

Grabé las sesiones en video para tener un registro y poder comparar qué había pasado en cada ocasión. La cámara llamó un poco la atención al principio pero como estaba fija se les olvidaba pronto su existencia.

2. HIPÓTESIS

Marco sociocultural

La primera hipótesis, nada novedosa por cierto, que se esperaba corroborar es que el marco sociocultural de los estudiantes tendría un efecto muy importante en cuanto a su capacidad de interesarse por la actividad y de aprovecharla.

En cuanto a nivel económico no se esperaba encontrar grandes diferencias a partir de cierto límite y sí una disminución considerable en la capacidad general de los estudiantes por debajo de él. Si un alumno de bachillerato tiene las necesidades básicas resueltas y no tiene que trabajar más de diez horas semanales, no tiene por qué haber diferencia en cuanto a su capacidad por interesarse en un tema determinado y dedicarle tiempo y energía si pasa los fines de semana en París o en Chapultepec. Sin embargo sí es de esperarse que estas capacidades se vean mermadas en gran medida si la persona no come bien, no tiene con qué vestirse, pasa frío, vive hacinada o tiene que trabajar jornadas largas. También es lógico suponer que su rendimiento general disminuya conforme cualquiera de esas situaciones se agudice.

Respecto al marco cultural, es de creerse que los hijos de padres preparados tengan un mejor desempeño debido a su entorno. Sin embargo, pienso que es de más peso la dedicación de los padres que su preparación cultural o educativa. La mente humana es muy maleable durante los primeros años de la vida y esa etapa tiene una influencia decisiva en la capacidad cognoscitiva y el interés por aprender que el individuo tenga en etapas futuras. Se puede afirmar que, en general, si los padres son gente preparada hay más opciones de dónde elegir y el individuo está en contacto con temas más variados y con distintos enfoques y maneras de tratarlos. Es claro que estas opciones pueden aprovecharse mucho mejor si los padres son gente dedicada que tiene ganas y tiempo para ocuparse de sus hijos. Cuando los progenitores son gente preparada pero no dedicada a la educación de sus hijos el resultado no es tan bueno. Muchas veces el entorno familiar y el hecho de tener un acceso amplio a la cultura en la niñez dejan mal que bien su marca, pero el interés por buscar, aprender y hacer uno mismo no se desarrolla más que en otros casos. En el otro extremo, si los padres se interesan en la educación de sus hijos y le dedican tiempo y esfuerzo, éstos recibirán una buena preparación a pesar de que los progenitores no la tengan. A veces, debido al ambiente y escuelas no muy buenas, la preparación general de esos individuos será regular, pero se fomenta la búsqueda constante y las ganas de entender. Este parámetro queda desgraciadamente fuera de los alcances del presente estudio.

Respecto a cultura urbana y cultura rural, las experiencias que he tenido en cuanto a enseñanza en medios rurales han sido casi siempre muy fructíferas. Yo creo que esto se explica porque en comunidades alejadas suele haber pocos maestros y muchas ganas de aprender. En general la proporción de jóvenes es alta y, aunque depende mucho de la zona y el clima, el ambiente suele ser sano en cuanto a espacio y comida. Por esta razón, y tomando en cuenta mis experiencias, tiendo a esperar siempre mejores resultados en el ámbito rural que en el urbano. El estudio estaba planteado para hacerse en escuelas de la Ciudad de México, pero una de ellas, la secundaria 172, situada en un pueblo cercano a San Juan Teotihuacan, resultó ser prácticamente rural.

Utilización de lo aprendido

Basado en mi experiencia como alumno (seis años de primaria, tres de secundaria y tres de bachillerato) y como profesor, creo que la enseñanza a niveles básico, medio y medio superior, tal y como está planteada, funciona muy mal. Tengo la impresión de que esto se agudiza en el área matemática. Recuerdo haber visto al inicio de casi todos los años escolares diagramas de Venn para aprender teoría de conjuntos. Recuerdo lo aburrido que era y el casi ningún sentido que cualquiera de nosotros le encontraba. También recuerdo que cuando aprendí un poco sobre conjuntos en la carrera me di cuenta de que lo que me habían dicho en esas primeras tres semanas de casi todos los cursos era en gran parte mentira.

Tiendo a creer que no tuve tan mala suerte con mis maestros de matemáticas. La mayoría explicaba mal que bien por qué funcionaba la receta, e incluso algunos mencionaban cuál era la utilidad del tema, cuando llegaba a tenerla. Sin embargo, aunque algunas veces algunos entendiéramos la explicación, de todas maneras lo que quedaba era la receta, que había que aprenderse. Nunca se fomentó que pudiéramos descubrir o deducir los algoritmos ni se nos dieron herramientas para hacerlo. El resultado es que las recetas se nos olvidaban al poco tiempo y sólo quedaban las que se usaban mucho, como las operaciones aritméticas básicas (y ni siquiera esas siempre). Había algunas recetas, o "fórmulas", que permanecían por un cierto tiempo, como la "chicharronera" para resolver ecuaciones de segundo grado, con una vida media de tres a cuatro meses en el cerebro de los alumnos de cuarto año de bachillerato, o algunas de física e incluso de trigonometría.

Lo que sí no quedaba era siquiera la idea de ponerse a pensar cómo debería ser un algoritmo. Una vez olvidado no había nada que hacer más que preguntar. No existía el concepto de considerar qué se estaba haciendo o cómo se debería hacer. Recuerdo a compañeros míos hacia el final del bachillerato que habían olvidado cómo multiplicar cantidades con cifras significativas a la derecha del punto decimal: no recordaban cuántos espacios había que recorrer el punto en el resultado final y no tenían manera de averiguarlo. Nunca se les ocurrió considerar qué quería decir multiplicar, etc. Otro ejemplo muy claro es mi relación con la raíz cuadrada, que aprendí un sinnúmero de veces como receta para enseñarla como receta y que olvidé siempre dos días después, hasta que finalmente un día razoné el procedimiento.

Durante años trabajé dando clases particulares a estudiantes de bachillerato. En general, quienes buscan clases particulares son personas a las que se les dificulta la materia. De todas maneras, lo que observé fue lo mismo: algunas recetas y normalmente ni siquiera el mínimo fomento a las capacidades de raciocinio del estudiante. En la mayoría de los casos mis alumnos no fueron gente con problemas reales de aprendizaje ni de capacidad mental, sino personas que no le veían ningún sentido a aprender recetas complicadas que no servían para nada. En algunas ocasiones se trató de alumnos muy inteligentes e incluso con facilidad e interés por las matemáticas pero con un maestro que no se dignaba a explicar siquiera lo mínimo.

Tomando esto en cuenta, creo que en la mayoría de los casos la preparación que se recibe durante la primaria y el bachillerato en el área de matemáticas es muy pobre, incluso diría que casi nula. Esta afirmación, que por supuesto tampoco es nada nuevo, constituye la segunda de las hipótesis del estudio presente. Si en efecto la enseñanza de las matemáticas en los niveles básico y medio tiene en la mayoría de los casos un efecto mínimo, no debería de observarse gran diferencia en la rapidez y claridad con que se descubren los conceptos en un grupo de 5° de primaria y uno de 5° de bachillerato. Esto supone que los conceptos básicos de divisibilidad no son manejados por la mayoría de los alumnos que salen del bachillerato, mientras que según los programas deberían de haberlos aprendido seis años antes. También supone que no se ha fomentado el razonamiento lógico, pues aunque uno no se vuelva "más inteligente", la práctica hace al maestro y una persona acostumbrada a razonar lógicamente lo hace mejor que un individuo que lo intenta por primera vez.

3. FINALIDAD

Aunque se pretende comprobar las hipótesis, eso constituye en realidad un objetivo secundario. Por un lado, han sido ambas muy estudiadas desde hace tiempo, y por el otro, los alcances de este trabajo no son suficientes para aportar datos significativos. La muestra es demasiado pequeña y al mismo tiempo variada. La mayoría de los parámetros se deja al azar y se consideran muy pocos. Tomando en cuenta la gran cantidad de estudios concienzudos que se han hecho respecto a estos dos temas (la influencia de los factores socioculturales en la educación y la situación de la enseñanza de las matemáticas en general) es claro que el aporte del presente trabajo será, si acaso, mínimo.

Cabría entonces preguntarse la razón de un estudio así. ¿Por qué no fijar algunos parámetros y prestar más atención a las variaciones? Básicamente porque no es la finalidad principal. El propósito de la tesis es proponer una guía para aplicar la actividad a grupos de estudiantes fomentando que descubran los conceptos por sí mismos. Prefiero que el resultado del trabajo tenga una utilidad práctica a escribir una disertación teórica sobre cómo deberían de ser las cosas. Creo que una guía que explique la manera de aplicar esta actividad de manera constructiva puede resultar de mucho provecho, pues permitirá a quien la utilice enseñar prácticamente cualquier tema de matemáticas que conozca de acuerdo a la misma dinámica. Como no es un texto que deba seguirse al pie de la letra sino todo lo contrario, pues para permitir que los estudiantes descubran los conceptos por sí mismos debe uno seguir la dirección que ellos propongan, creo que el mejor procedimiento para darse una idea de cómo hacer una guía que sirva realmente es aplicar el taller en grupos tan diversos como sea posible y simplemente observar.

Lo que intenté percibir fue si había caminos que se siguieran con mucha frecuencia o temas que resultaran particularmente fáciles o difíciles. Lo que vi fue muy distinto de lo que esperaba.

III. TRABAJO DE CAMPO

Apliqué el taller a quince grupos en total: cuatro de primaria, ocho de secundaria, dos de bachillerato y uno de la Facultad de Ciencias. El trabajo de campo puede dividirse en dos fases muy claras con unos dos meses entre ellas. La diferencia entre una y otra radica en el método de aplicación del taller.

1. PRIMERA FASE

Las sesiones de la primera fase fueron con los ocho grupos de secundaria y uno de bachillerato. Con casi todos los grupos utilicé rectángulos de cartulina de unos cinco por tres centímetros, verdes por un lado y blancos por el otro, para representar puertas abiertas y cerradas. En el único caso en que no se utilizaron las tarjetas les pedí que dibujaran treinta puertas y les di frijoles para que marcaran las que estaban cerradas o abiertas, pero sucedió lo que tenía que suceder: guerra de frijolazos.

Observaciones generales

Fue muy notorio en todos los casos que el método de aplicación del taller tenía varios bemoles. Para empezar, tanto con los rectángulos de cartulina como con los frijoles sobre puertas dibujadas es muy fácil confundirse y voltear una tarjeta (o poner o quitar un frijol) en lugar de otra. En general no hubo problemas para entender qué debía hacerse, porque además lo hacíamos todos juntos al principio con diez puertas pintadas en el pizarrón; lo que sucedía era que cuando pasaba, por ejemplo, el niño 6, como ya habían entendido la dinámica simplemente volteaban las tarjetas 6, 12, 18, 24 y 30, pero casi siempre se confundían y volteaban la 17 en lugar de la 18 o la 25 en lugar de la 24. Cuando simplemente contaban de seis en seis el resultado no era mejor, pues no contaban de uno en uno hasta llegar a seis sino directamente en bloques de seis y sucedía lo mismo. Además, ambos métodos son muy vulnerables al caos natural que rodea a un grupo: una manga o un extremo de bufanda pueden hacer que se pierda toda la información justo cuando iba a pasar el niño de 30. Aunque el método de los frijoles es más susceptible, el de las tarjetas no demostró ser mucho mejor.

La consecuencia directa de tantas confusiones es que llevar a cabo la dinámica, aún con treinta tarjetas, resulta muy largo y tedioso. En casi todos los grupos hubo que repetirla después de que todos hubieran terminado porque de siete resultados sólo dos eran iguales, de cinco todos eran diferentes y estaban equivocados, etc. Ésta fue definitivamente la peor falla y por eso recomiendo que se numeren las tarjetas si es que se quieren utilizar.

Otro inconveniente es que al trabajar por equipos unos avanzan mucho más rápido que otros. Esto se agrava con el problema de la confusión que acabo de mencionar, pero es una característica intrínseca del trabajo por equipos. Como unos ya habían terminado cuando otros estaban prácticamente empezando, lo que hice fue irles pidiendo a los que acababan que hicieran pasar a los niños en el orden inverso: cada niño hace lo mismo que antes pero el primero que pasa es el 30, después el 29, etc. Los que acababan así hacían pasar a los niños un orden cualquiera, pues el desfase en general era grande. Esta dinámica podría haber sido muy provechosa de no ser por las confusiones, que hacían que se obtuvieran resultados muy variados.

También sucedió que al explicar la actividad sonaba muy tediosa y sin chiste. Como los primeros niños que pasan modifican muchas puertas, parece que hacer pasar a los treinta niños va a tomar una eternidad. Además, no se entiende bien cuál es el sentido de la dinámica. No logré que se despertara realmente una curiosidad por saber cómo quedarían las puertas si fueran treinta y pasaran treinta niños ni siquiera después de ver que con diez niños y diez puertas quedaban abiertas sólo la 1, la 4 y la 9. Siento que en cierta manera la dinámica sonaba como "impuesta" o artificial, pues no esperé a que representar las puertas surgiera como una necesidad para ver qué pasa cuando aumenta el número de puertas.

Al preguntar al principio de todo (es decir, justo después de explicar la dinámica sólo con palabras) cómo quedarían las diez puertas después de que pasaran diez niños, la respuesta más común fue que todas quedarían cerradas, aunque como es de esperarse más bien no tenían mucha idea. Después de hacerlo con diez, al preguntar cómo quedarían treinta puertas después de que pasaran treinta niños, la única respuesta que recibí fue que quedarían abiertas las puertas 1, 4, 9, 11, 14, 19, 21, 24, 29. Esta idea surgió en la mitad de los grupos, en los otros no hubo ninguna propuesta.

Como ya mencioné, a pesar de todas mis advertencias había muchas equivocaciones al abrir y cerrar las puertas; se modificaban unas por otras y cada equipo tenía un resultado distinto. En los dos primeros grupos (3°-C y 3°-A de la secundaria 48) hubo varios resultados donde las primeras diez puertas quedaban distintas de como habían quedado al hacerlo con diez niños y diez puertas. Les pregunté si era posible y llegaron a la conclusión de que no. En todos los demás grupos, después de hacerlo con diez niños y diez puertas en el pizarrón y antes de que ellos lo hicieran con treinta, les preguntaba cómo quedarían las primeras diez. Siempre (salvo en un caso) se llegó más o menos pronto a que tendrían que quedar iguales. Yo pensé que hacer eso ayudaría a que ellos detectaran resultados equivocados. En algunos casos fue así, pero también generó confusión, pues algunos equipos colocaban las primeras diez puertas como habían quedado después de que pasaran diez niños y empezaban con el niño 11, de manera que los primeros diez niños no modificaban ninguna puerta después de la 10, lo que cambiaba por completo el resultado.

Me llamó un tanto la atención que nadie reconociera de entrada a las puertas abiertas como cuadrados perfectos. No pensaba que muchos lo fueran a hacer, sobre todo porque es un resultado que uno no se espera, pero me imaginaba que no tardaría tanto en surgir. En todos los casos fue hasta después de analizar con cuidado los divisores de varios números que se notó el patrón.

Como dije, los equipos que iban terminando hacían que pasaran los niños al revés (en el orden inverso). Antes de que lo hicieran, les preguntaba que cómo pensaban que iban a quedar. La mayoría opinaba que las puertas que habían quedado abiertas quedarían cerradas y viceversa, aunque en algunos casos me dijeron que quedarían iguales y me explicaron la razón: si pasan los mismos niños y cada niño modifica las mismas puertas, deben quedar iguales. La mayoría insistía en que si pasaban al revés las puertas quedarían al revés y no hacían caso del argumento del que proponía que no cambiarían. Después de hacerlo al revés y ver que quedaban iguales, cuando les preguntaba que cómo quedarían las puertas si los niños pasaban en un orden cualquiera, insistían en que en ese caso sí quedarían distintas. Hay que considerar que como cada equipo iba a su ritmo, a los que terminaban de hacerlo al revés les pedía que hicieran pasar a los niños en un orden cualquiera y les preguntaba que cómo pensaban que quedarían pero sin una discusión previa de por qué al hacerlo al revés había quedado igual que al hacerlo al derecho.

Una idea que siempre surgió y en algunos casos se sostuvo con firmeza fue que quedaban cerradas las puertas cuyos números tenían muchos divisores y abiertas las que tenían pocos. Esto da pie a llevar la discusión hacia los números primos, pues son ejemplos de números con pocos divisores que quedan cerrados. En algunos grupos, aún después de hablar de los primos y de discutir que una puerta queda abierta o cerrada según la paridad del número de sus divisores, había quien insistía en que la cantidad tenía que tener algo que ver.

En todos los grupos la mayoría de los equipos acomodó las tarjetas en tres hileras de diez, aunque algunos las acomodaron en dos hileras de quince o en una sola hilera. En dos casos (en grupos distintos) acomodaron las tarjetas formando un cuadrado, lo que aumentó la confusión porque era más difícil contar y no quedaba claro cuál era la primera puerta. También en dos ocasiones me preguntaron que cuál lado representaba las puertas abiertas y cuál cerradas (blanco y verde).

Descripción

Con casi todos los grupos trabajé dos horas. Las excepciones fueron 3°-A de la secundaria 172, con quienes la actividad duró tres, y un grupo de cinco estudiantes del bachillerato del Instituto de Educación Media Superior del DF (IEMS), plantel Coyoacán, con quienes sólo trabajamos alrededor de una hora y cuarto.

Secundaria 48

Los primeros cuatro grupos fueron 3°-A, 3°-C, 2°-D y 2°-E de la secundaria diurna 48, que queda en el barrio de San Bartolo Atepehuacan en la delegación Gustavo A. Madero, cerca de la central camionera del Norte. Es una secundaria de gobierno en una zona de clase media donde los alumnos no sufren de pobreza ni tienen que trabajar. En los cuatro casos la maestra sólo estuvo presente en una de las dos horas. Esto resultó muy inconveniente porque mis cualidades policiacas no están muy desarrolladas, aspecto que un grupo de secundaria capta de manera casi inmediata. Trabajé con los cuatro grupos en dos días consecutivos, dos grupos cada día.

3°-A

Fue el primer grupo con el que trabajé. De entrada les pedí que formaran equipos, que fueron de entre tres y cinco personas. Describí la dinámica pintando la calle y algunas puertas en el pizarrón y, una vez entendida, le di treinta tarjetas a cada equipo y les pedí que hicieran pasar a treinta niños por treinta puertas. Por primera vez me enfrenté al desfase entre los equipos y a la gran cantidad de resultados diferentes ocasionados por errores al voltear las tarjetas.

Finalmente, después de unos cuarenta minutos, se llegó al resultado. Tres equipos ya lo habían hecho al revés; a dos les había quedado el mismo resultado y al otro un resultado distinto. Concluimos que si a dos equipos les había quedado un mismo resultado que además coincidía con el obtenido al hacer pasar a los niños al derecho, ése debería ser el correcto. Un equipo había terminado de hacerlo en desorden y les habían quedado abiertas las puertas 1, 4, 9, 16, 22 y 25.

Pedí que me dijeran por qué quedaban abiertas las mismas puertas al pasar los niños al derecho o al revés. Rápidamente alguien dijo que porque eran los mismos niños y hacían lo mismo pero al revés. Entonces pregunté de qué dependía que una puerta quedara abierta o cerrada y me dijeron que del número de niños.

En lugar de insistir en qué del número de niños es lo que cuenta, pregunté qué puertas eran modificadas por el niño número 3. Casi automáticamente me dijeron que las numeradas con múltiplos de 3, las que estaban en la tabla del 3. Manejaban el concepto de múltiplo y lo repasamos sin problemas. Pasamos entonces a ver qué niños modificaban una puerta determinada. Casi de inmediato me dijeron que sus divisores. También conocían el concepto de divisor. Vimos que 1 es divisor de cualquier natural y la relación que hay entre múltiplo y divisor.

Entonces regresamos a la pregunta: "¿De qué depende que una puerta quede abierta o cerrada?". Como ya la habían respondido, fue instantáneo: "Del número de sus divisores". Ahora sí insistí en qué del número de sus divisores es lo que importa. Relativamente rápido se llegó a que lo determinante es la paridad de la cantidad de divisores. Hubo cierta confusión acerca de qué era lo que tenía que ser par: el número en sí o la cantidad de sus divisores.

Hablamos entonces de divisores comunes. Había problemas al encontrar en concreto los divisores de un natural dado (durante algunos minutos se sostuvo que el niño 3 toca la puerta 16). Para ver cómo son los divisores de un número pasamos a la descomposición de un natural en sus factores primos. Conocían el procedimiento pero muy como receta. Tomó mucho tiempo concluir que si un natural no puede dividirse entre 2, tampoco entre 4, y si no puede dividirse entre 3, tampoco entre 6 ni entre 9. Seguimos trabajando mucho tiempo en divisores comunes relacionados con números primos, y finalmente se llegó a que los factores primos de un divisor común de dos naturales deben ser parte de la descomposición en factores primos de ambos.

3°-C

Para empezar formamos equipos de cinco personas. Describí la dinámica y les pedí que la hicieran con treinta puertas y treinta niños utilizando las tarjetas. Como ya había pasado, cada equipo obtuvo un resultado distinto y terminaban unos mucho antes que otros, así que algunos equipos lo hicieron al revés y en desorden. Después de un tiempo largo logramos un consenso. Como ya varios equipos lo habían hecho al revés y en desorden, sabían que el resultado no cambiaba. Al preguntarles la razón, respondieron que cada niño hacía lo mismo sin importar el orden.

Pasamos entonces a ver los conceptos de divisor y múltiplo, que se confundían un poco. Después analizamos los divisores de algunos naturales y les pregunté qué hacía que una puerta quedara abierta o cerrada. De inmediato me dijeron que la cantidad de sus divisores y después de no mucho se concluyó que lo determinante era la paridad de la cantidad de divisores. Traté de que se dieran cuenta de que 1, 4, 9, 16 y 25 son cuadrados perfectos, pero no se logró y cambiamos de tema.

Hablamos sobre divisores comunes. Estaban familiarizados con ellos y con el concepto de máximo común divisor. Al ver los divisores comunes de un par de números surgió: "Si no se puede dividir entre 3, ¿se va a poder dividir entre 6?". Pronto me respondieron que no porque 6 es múltiplo de 3.

Para ver cuáles son los divisores comunes de dos naturales pasamos al tema de la descomposición en factores primos. Lo conocían pero no lo entendían bien y hubo algunos problemas. A pesar de lo que acababa de suceder (párrafo anterior) alrededor de la mitad del grupo pensaba que era necesario intentar dividir entre 4 aunque no se hubiera podido dividir entre 2. Durante el resto de la sesión se continuó con esta discusión. Se profundizó menos que con el grupo anterior.

2º-D

Con este grupo ya no formé equipos desde un principio. Empecé describiendo la dinámica y llevándola a cabo con diez puertas y diez niños en el pizarrón. Entonces les pregunté cómo quedarían las primeras diez puertas si fueran treinta y pasaran treinta niños. Rápidamente concluyeron que quedarían iguales porque cada niño hace lo mismo.

Les pedí que formaran equipos de tres personas y les di tarjetas para que hicieran pasar treinta niños por treinta puertas. Para cuando se logró llegar al resultado correcto, había pasado una hora y la maestra se fue. Empezó un caos tremendo, en medio del cual se logró ver el concepto de divisor y se habló un poco sobre divisores comunes. A partir de ahí fue imposible seguir trabajando a nivel grupal y la discusión siguió con unos ocho estudiantes que se acercaron al pizarrón. Con ellos hablamos sobre la relación entre múltiplo y divisor, el concepto de número primo y la descomposición en factores primos. Al final se concluyó que la descomposición en factores primos de un natural dado es única.

2°-E

Con este grupo hubo la ventaja de que la hora en que la maestra no estuvo presente fue la primera. Marcó una diferencia con los tres grupos anteriores porque al principio los alumnos no saben cómo va a reaccionar uno si se portan mal. Empecé describiendo la dinámica y haciéndola con diez puertas y diez niños en el pizarrón. Les pregunté que cuáles puertas quedarían abiertas si fueran treinta niños y treinta puertas. Hubo varias propuestas, entre ellas la clásica: 1, 4, 9, 11, 14, 19, 21, 24, 29. Entonces pregunté que cómo quedarían las primeras diez. Alrededor de la mitad del grupo pensaba que sí cambiarían. Después de cierto tiempo hice que vieran lo que sucedía con el niño 11, cuál era la primera puerta que tocaba y si podía o no modificar alguna de las primeras diez. A pesar de que se discutió un rato, no todos quedaron convencidos de que las primeras diez puertas tendrían que permanecer iguales.

Se acomodaron en equipos de tres personas que hicieron pasar treinta niños por treinta puertas utilizando las tarjetas. Tomó mucho tiempo llegar a un consenso y, como en los casos anteriores, para entonces algunos equipos ya habían visto que si los niños pasan al revés y en desorden el resultado no se modifica. Pregunté la razón de que el orden no importara y nadie me supo responder. Entonces pregunté qué hacía que una puerta quedara abierta o cerrada y tampoco surgió ninguna idea, aunque ya todos estaban convencidos de que si fueran cien puertas y cien niños las primeras treinta puertas quedarían iguales después de que pasaran todos.

Vimos entonces algunos casos concretos (18, 24, 16, 25, 2) y volví a plantear la cuestión de por qué una puerta quedaba cerrada o abierta. Me respondieron: "Depende de los números". Al preguntarles de qué números dependía me respondieron que de los múltiplos. A partir de ahí vimos los conceptos de múltiplo y divisor.

Insistí después nuevamente: "¿De qué depende cómo queda una puerta?" y me dijeron que de sus divisores. Les pregunté de qué de los divisores y nadie tenía idea. Sugerí: "¿De cómo son, de cuántos son?". Después de un rato alguien sugirió que del máximo común divisor (¿de quién?). A partir de ahí hablamos de divisores comunes y máximo común divisor. No manejaban los conceptos pero sí los captaron con rapidez.

Al preguntar cómo averiguar cuáles son los divisores comunes de dos naturales, alguien respondió: "Haces su factorización y luego de ahí los sacas". La alumna que lo había dicho pasó a hacerlo al pizarrón. Tenían más idea respecto a esto que los dos grupos de tercero donde también había surgido.

Después hablamos sobre múltiplos comunes y más tarde regresamos a la cuestión de qué hacía que una puerta quedara abierta o cerrada. Finalmente se llegó a que dependía de la paridad de la cantidad de divisores, aunque casi al final de la discusión alguien insistía en que quedaban cerradas las que tenían más de ocho divisores.

Pasamos entonces a ver qué números tienen una cantidad impar de divisores. Surgió la relación entre múltiplo y divisor, y después de haberla discutido introduje el tema de las parejas de divisores. Terminaron concluyendo que quedan abiertas las puertas cuyos números tienen raíz cuadrada entera ("exacta", según me dijeron).

Secundaria 172, 3°-A

La secundaria 172 está en Maquixco, cerca de San Juan Teotihuacan. Aunque no quede muy lejos del centro urbano (San Juan), el medio es semi-rural y hay milpas junto a la escuela. El nivel económico no es muy alto. Para tener mesas amplias adecuadas al trabajo por equipos el taller se aplicó en un laboratorio, así que no había pizarrón y utilizamos hojas grandes de papel pegadas a la pared. Trabajé con el grupo de 3°-A y se dio una discusión muy buena. Hubo la ventaja de que la actividad duró tres horas, pero no deja de ser notorio que se haya avanzado tanto a pesar de que la preparación de los alumnos fuera un tanto deficiente (por ejemplo, nadie sabía qué era un número primo). Se notó mucho interés por parte de los participantes.

Empecé describiendo la dinámica. Después la hicimos en el "pizarrón" con diez puertas y diez niños. Les pregunté qué tenían de particular los números de las puertas que habían quedado abiertas y alguien dijo que eran primos, pero no lo sostuvo. Lo dejé pasar y pregunté cómo quedarían las primeras diez puertas si hubiera treinta y pasaran treinta niños. Algunos pensaban que quedarían iguales pero otros sostenían que las cerradas quedarían abiertas y viceversa. Pregunté cuál era la primera puerta que tocaba el niño 11 y relativamente rápido se concluyó que las primeras diez puertas no cambiarían independientemente del número de niños y puertas que hubiera.

Los equipos ya estaban formados (como de unas cinco personas) y trabajaron sobre mesas grandes. Supuse que el tamaño de las mesas facilitaría trabajar con las tarjetas, pero no fue así. Le di un juego de treinta tarjetas a cada equipo y les pedí que hicieran pasar a treinta niños. Como siempre, cada equipo obtuvo un resultado diferente y les pedí que lo volvieran a hacer. También se dio el desfase, aunque menos que en otros grupos, y algunos equipos hicieron pasar a los niños al revés. Finalmente se llegó al resultado. Tres equipos ya lo habían hecho al revés. A dos les había quedado igual que al derecho y al otro equipo le había quedado al revés (1, 4, 9, 16 y 25 cerradas y las demás abiertas). Desde un principio, cuando le pedí a los integrantes de ese equipo que hicieran pasar a los niños en el orden inverso, me dijeron que no tenía caso porque las puertas quedarían al revés, y aunque insistí en que lo probaran, se ve que decidieron no hacerlo.

Pasamos entonces a analizar las razones posibles de que quedaran iguales o al revés. Unos creían que quedarían iguales porque pasan los mismos niños y hacen lo mismo. Otros afirmaban que deberían quedar al revés porque "es cada múltiplo tal y como quedó pero al final pasa el 1 y las cambia todas". Finalmente se concluyó que sí quedan iguales.

Entonces pregunté de qué depende que una puerta quede cerrada o abierta. Me respondieron que de sus múltiplos pero rápidamente corrigieron a divisores. Repasamos los conceptos de múltiplo y divisor, que no manejaban bien pero captaron rápidamente. Volvimos a la razón de que una puerta quede abierta o cerrada. Pronto salió que tiene que ver con la cantidad de divisores pero tardamos mucho en llegar a que lo importante es la paridad de dicha cantidad. En esa discusión se habló también de los divisores de los divisores de un natural.

A la pregunta "¿Qué números tienen una cantidad impar de divisores?" me respondieron que los primos. Nadie tenía la menor idea de qué quería decir "primo". Se propuso que podía ser equivalente a par, non, dígito y "los que se multiplican". Finalmente di la definición. Pasamos a ver cuál es la menor cantidad de divisores que puede tener un número natural. Rápidamente salió que 1 tiene un solo divisor, pero tardó un poco más llegar a que cualquier otro natural tiene cuando menos dos y cuáles son. Discutimos los números primos. Muy pronto me dijeron que el único primo par es 2. A pesar de todo lo que se había hablado, no fue directo que los primos quedan cerrados.

Después vimos que dividir un número natural entre algún divisor suyo resulta en otro de sus divisores y les hablé de las parejas de divisores. Costó algo de trabajo. En algún momento alguien sugirió que si un número era par entonces sus divisores podían acomodarse por parejas y ninguna otra persona del grupo protestó ni apoyó. De repente alguien se dio cuenta de que al acomodar los divisores de 9 por parejas sobraba uno y a partir de ahí se llegó con facilidad a que tener una cantidad impar divisores y ser un cuadrado perfecto son equivalentes.

Entonces escribí "$16 = 4x4 = 4^2$ (porque habíamos estado trabajando con 16), $9 = 3x3 = ?$" y me dijeron que $3x3 = 3^3$ y que $5x5 = 5^5$. A partir de eso pasamos a hablar de potencias. Recordaron rápido qué eran y cómo funcionaban. Después una alumna afirmó que hay cuadrados perfectos cuya raíz no es entera. Su argumento era el siguiente: "no, porque $\sqrt{144}$, como es de izquierda a derecha, se toma el 44 y el 1 queda solo". La convencieron sin demasiada batalla.

Entonces pregunté cuántas puertas quedarían abiertas si hubiera cien y pasaran cien niños. Me dijeron que diecisiete o entre diecisiete y dieciocho, pensando que si de treinta puertas quedaban cinco la proporción debería guardarse. Escribí "$\sqrt{100} = ?$" y automáticamente me dijeron que quedarían abiertas diez puertas. Vimos que para cualquier natural n, la cantidad de puertas que quedan abiertas si hay n puertas y pasan n niños es la parte entera de $\sqrt{n}$.

Ya casi no quedaba tiempo y vimos muy superficialmente divisores comunes.

Secundaria 472, 2°-A

La secundaria 472 queda en Las Huertas, Naucalpan. Es una zona de bajo nivel económico localizada en las afueras de la ciudad. Ahí trabajé con el grupo de 2°-A.

Comencé haciendo la dinámica con diez puertas y diez niños en el pizarrón. Se notó poca participación. Pregunté cómo quedarían las primeras diez si hubiera treinta y pasaran treinta niños. Varios opinaron que abiertas y varios otros que cerradas. Como no había argumentos, decidí ver qué pasaba con quince puertas y quince niños en el pizarrón. Después de cierto tiempo se concluyó que en efecto las anteriores ya no se modifican.

Formaron equipos de unas cinco personas y les di tarjetas para que realizaran la actividad con treinta puertas y treinta niños. Resultó que la dinámica no se había entendido bien y la volví a explicar. La maestra les dijo que apuntaran en su cuaderno las que quedaban abiertas y cerradas, pues sería su calificación.

Como siempre, hubo resultados muy variados, e incluso en algunos las primeras diez puertas habían cambiado a pesar de que se había hablado más de veinte minutos sobre el tema. También se dio el desfase entre equipos. Las integrantes de un equipo pegaron las tarjetas con pritt en un cartón, de manera que no podían voltearlas. Les di otro juego de tarjetas pero no les interesó y prefirieron seguir divirtiéndose pegándolas en el cartón. Cuando finalmente llegamos al resultado ya se había acabado el tiempo.

Con un equipo se dio cerca del final una discusión interesante donde se trató el concepto de divisor y se llegó a que una puerta queda abierta o cerrada dependiendo de la paridad de la cantidad de sus divisores. Esta última parte fue prácticamente sólo con una de las integrantes del equipo, pero decidí seguir porque no qudaban más que cinco minutos y eran los únicos que se habían interesado realmente.

Secundaria 199, 3°

La secundaria 199 queda en una zona recientemente poblada en los límites de la zona conurbada sobre la carretera que va a Pachuca. La escuela era nueva y no había pizarrones ni pupitres, lo que dificultó mucho la actividad. Los estudiantes se sentaron en sillas y utilicé hojas de papel pegadas a la pared para escribir. Además, el director insistió en juntar a los dos grupos de tercer año, lo que resultó en unas ochenta personas apiñadas en un salón. A pesar de la buena disposición de varios estudiantes, la dinámica resultó un caos y no se pudo llegar muy lejos. Para colmo, en esa ocasión fue cuando decidí probar el método de los frijoles, lo que empeoró todavía más las cosas.

Al principio describí la dinámica y la hicimos en el "pizarrón". Al preguntarles cómo quedarían las primeras diez si fueran treinta puertas y treinta niños, pasó bastante tiempo hasta que alguien afirmó que cambiarían. Nadie lo apoyó ni protestó. Pregunté cuál era la primera puerta que modifica el niño 4, después el 7 y después el 11. A partir de ahí se llegó a que las primeras diez puertas ya no cambiarían aunque fueran treinta o cien en total.

Entonces formaron equipos de unas cinco personas que hicieron pasar treinta niños por treinta puertas utilizando puertas pintadas en un cuaderno y frijoles para marcar si una puerta estaba abierta o cerrada. Como siempre, desfase entre los equipos y mucha confusión, acrecentada por la falta de pupitres (los estudiantes estaban sentados en sillas).

Después de un buen rato llegamos al resultado. Algunos equipos ya lo habían hecho al revés y sabían que quedaba igual. Les pregunté por la razón de que no hubiera diferencia y alguien mencionó que era lo mismo pero al revés. Varios sostenían que deberían quedar al revés. Al final fueron convencidos pero tardó.

Vimos entonces el concepto de divisor y, una vez entendido, salieron rápidamente los conceptos de divisores comunes y máximo común divisor, múltiplos comunes y mínimo común múltiplo. Pasamos a ver qué puertas quedaban abiertas y sólo se llegó a que las numeradas con primos quedaban cerradas.

Bachillerato plantel Coyoacán

El plantel Coyoacán del bachillerato del IEMS está en la esquina de Calzada de Tlalpan y Avenida Acoxpa enfrente del Estadio Azteca. Forma parte de un nuevo proyecto educativo impulsado por el Gobierno del Distrito Federal y tiene dos años y medio de existencia. Trabajé con cinco alumnos que habían terminado el quinto semestre y aún no aprobaban el tema de divisibilidad, que es de primero. La sesión duró una hora y cuarto.

Describí la dinámica y les pregunté que cómo quedarían las puertas si fueran diez y pasaran diez niños. No surgió ninguna idea y lo hicimos en el pizarrón. Les pregunté la razón de que las puertas 1, 4 y 9 quedaran abiertas y las demás cerradas, pero tampoco surgió nada.

Les di treinta tarjetas y les pedí que las utilizaran para representar puertas y que hicieran pasar a treinta niños. Lo hicieron una vez y se equivocaron. Les pedí que lo repitieran con cuidado. Iban a equivocarse otra vez, se los hice notar y finalmente lo hicieron bien.

No surgió prácticamente ninguna idea ni se les notó con muchas ganas o algo de interés. Al ver que sucedía eso y el tiempo estaba a punto de acabarse, expuse los conceptos de múltiplo, divisor, divisores y múltiplos comunes, máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Instituto Zumárraga

El instituto Zumárraga queda en los límites de la colonia Roma. Es una escuela privada que, según entiendo, cubre desde jardín de niños hasta bachillerato. Aún siendo una escuela particular, el nivel económico es más bien clase media. Sigue el sistema tradicional de enseñanza, se usa uniforme y los estudiantes se levantan de sus asientos cuando entra algún profesor. Trabajé con un grupo de primer año (1°-A). Los estudiantes estaban mejor preparados y mucho más interesados que en cualquiera de los otros grupos de la primera fase. Constantemente surgían ideas y en general había poca reticencia a expresar lo que uno pensaba, lo que permitió que se diera una discusión muy adecuada. No reporto la sesión porque incluyo la transcripción textual en un apéndice al final del texto.

2. SEGUNDA FASE

Observaciones generales

Al ver que no funcionaba bien, abandoné el método de las tarjetas (y de los frijoles) y el trabajo por equipos. Representé las puertas con personas o en el pizarrón (sólo en un caso) y trabajé siempre con todo el grupo junto. Esto tuvo varias ventajas: se eliminaron la confusión y el caos casi por completo y al no haber equipos no había desfase entre ellos, además de que la dinámica no sonaba tediosa ni tan larga. Sin embargo, al trabajar con todo el grupo es más fácil que queden algunos estudiantes rezagados y fuera de la jugada. Me parece importante recalcar que tanto el trabajo por equipos como el uso de material concreto son muy útiles para la enseñanza, en particular para la enseñanza de las matemáticas, pero que requieren más tiempo. En el caso de "casilleros" no funcionan bien para sesiones de dos o incluso tres horas que no vayan a tener continuidad.

Otra modificación que considero muy benéfica fue empezar a preguntar cómo quedarían las puertas antes de hacer la actividad, justo después de explicar la dinámica. Los estudiantes hacen primero mentalmente que pasen los niños y se imaginan cómo van quedando las puertas. Aparecen desde un principio resultados como que la puerta 1 queda abierta porque sólo la toca un niño y otros similares, y entonces representar las puertas y hacer que pasen los niños surge como una necesidad y tiene sentido. Así se va despertando el interés poco a poco y la dinámica no resulta tediosa ni aburrida.

Al no haber equipos, no era imprescindible ver qué pasaba si el orden de los niños se invertía o cambiaba de cualquier manera, y debo reconocer que con los tres primeros grupos se me olvidó y no tratamos el tema. Después me di cuenta y en los últimos tres sí lo vimos.

Descripción

En esta segunda fase trabajé con seis grupos: los grados 6°, 5°, 4° y 3° de la escuela primaria Herminio Almendros, un grupo de estudiantes del plantel Coyoacán del bachillerato del IEMS que habían terminado el primer semestre y reprobado el tema de divisibilidad y un grupo de alumnos que estudiaban el primer semestre de carreras relacionadas con las matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Con los tres primeros grupos trabajé dos horas; con 3° la actividad duró dos horas y media; con el grupo de bachillerato hubo dos sesiones de dos horas cada una, y con el grupo de la Facultad de Ciencias trabajé sólo una hora.

Herminio Almendros

La escuela primaria Herminio Almendros es privada y de corte progresista. Con esto me refiero a que se tiende a reprimir menos a los alumnos y a fomentar que razonen y que expresen sus ideas. Está cerca de Huipulco. Trabajé con los grupos de 6°, 5°, 4° y 3°, en ese orden. Fue ellos que se obtuvieron los mejores resultados de toda la muestra. En general razonaban con mayor rapidez y claridad que los otros grupos y en algunos casos utilizaron conceptos que habían aprendido antes. En general hubo mucho interés y participación.

6° grado

Empecé explicando la dinámica y pregunté cómo quedarían las puertas si fueran diez y pasaran diez niños. De inmediato me dijeron que la puerta 1 quedaría abierta porque sólo la tocaba un niño. Probaron varios ejemplos concretos y me dijeron cómo quedaban, y rápidamente salió (así, antes de realizar la dinámica) que lo importante era la paridad de la cantidad de niños que tocaran la puerta.

Hicimos la dinámica con diez puertas y diez niños representando las puertas con personas. Pregunté la razón de que quedaran así las puertas y me volvieron a decir que dependía de la paridad de la cantidad de niños que tocaran cada puerta. Pedí que me dijeran qué pasaría con las primeras diez puertas si fueran treinta y pasaran treinta niños. Discutieron entre sí y muy pronto llegaron a la conclusión de que quedarían iguales. Manejaban bien los conceptos de múltiplo y divisor. Alguien mencionó los primos y llegamos a la definición.

Después los estudiantes y el profesor representaron las treinta puertas y yo desempeñé el papel de los niños. Pasé primero como el niño 1 y toqué a todos; luego pasé como el niño 2 y fui tocando uno no y uno sí; luego pasé como el niño 3 y fui tocando dos no y uno sí, etc. Como 24 tiene muchos divisores, quien representaba la puerta 24 se confundió y quedó abierta. Buscamos los divisores de 24 y concluyeron que como eran una cantidad par, la puerta debería quedar cerrada, es decir, que nos habíamos equivocado. Pregunté la razón de que las puertas 1, 4, 9, 16 y 25 quedaran abiertas y me respondieron otra vez que no habían sido tocadas por una cantidad par de niños. Cuando quise saber si esos números tenían algo en especial, de repente alguien notó que $1+3 = 4$, $1+3+5 = 9$, $1+3+5+7 = 16$, $1+3+5+7+9 = 25$ (hay que notar que no había nada sugerente escrito en el pizarrón).

Mientras veíamos si los números obtenidos sumando los nones quedaban en efecto abiertos, alguien dijo que ningún niño tocaría una puerta numerada con un primo. Rápidamente el grupo lo corrigió y le explicó que a una puerta siempre la tocan cuando menos el niño que tiene el mismo número que ella y el niño 1. Automáticamente surgió que las puertas numeradas con primos quedan cerradas. Pasamos a los conceptos de múltiplo y divisor y a la relación entre ellos. Entre otras cosas se llegó a que todo número natural tiene una cantidad infinita de múltiplos y es múltiplo y divisor de sí mismo y múltiplo de 1. Aunque algunos participaban más, todo el grupo seguía la discusión e intervenía. Intenté generalizar a los enteros pero no manejaban números negativos y no se pudo. Finalmente escribí las definiciones de múltiplo y divisor en el pizarrón utilizando literales, que al principio les movieron un poco el tapete pero a las que se acostumbraron rápido.

Pasamos entonces a ver el concepto de múltiplo común. Los resultados salieron con bastante rapidez. Sin problemas se llegó a que no hay uno que sea el mayor pero sí uno que es el menor, y tampoco hubo dificultades para obtener el mínimo común múltiplo de 13 y 4 ni de 12 y 4.

Hablamos entonces de divisores comunes. De inmediato concluyeron que el mínimo común divisor de cualquier conjunto de naturales es 1, pues los divide a todos, pero al ver si había uno que fuera el mayor una alumna argumentaba que podría ser que no, pues "si sólo coinciden en el 1, el 1 es el más grande, pero, ¿más grande que qué?". Le puse como ejemplo que si ella estaba sola en un cuarto, ¿cuál sería la niña más chiquita y cuál la más grande del cuarto? Después de eso concordó con los demás en que siempre existe el máximo común divisor. También se llegó a que el máximo común divisor de dos números naturales no puede ser mayor que el menor de esos dos.

Regresamos entonces a la cuestión de por qué quedan abiertas las puertas. Surgió que si se divide un natural entre algunos de sus divisores el cociente también es divisor de ese natural. Se discutió cómo mostrar que algo siempre se cumple (mostrar para el caso general) y cómo mostrar que no es cierto que algo siempre se cumpla (contraejemplo). También se habló de la conmutatividad del producto.

De repente a alguien se le ocurrieron las parejas de divisores. A partir de ahí se llegó con rapidez a que los números cuadrados son los que tienen una cantidad impar de divisores. En el camino se habló de la raíz cuadrada. Intenté nuevamente generalizar a los enteros pero no se pudo. También quedó pendiente ver si en efecto sumando los impares se obtienen los cuadrados. Se comprobó hasta 121 pero no se vio en general.

5° grado

Comencé describiendo la dinámica y de inmediato me preguntaron cuántas puertas eran. Les dije que la calle era muy larga y que había puertas hasta donde quisiéramos. Entendieron la dinámica y empezaron a participar, diciendo qué puertas iba cambiando cada niño. Cuando les pregunté cómo quedarían las puertas si fueran diez y pasaran diez niños, rápidamente surgió que la puerta 1 quedaría abierta porque sólo la tocaba el niño 1. Poco después, analizando el caso de la puerta 4, se concluyó que queda abierta. Alguien supuso entonces que sólo ésas. De repente un alumno afirmó que también la puerta 9 queda abierta. Como había trabajado con 6° grado dos días antes, es posible que se haya filtrado información, pues el resultado apareció rapidísimo y de manera un tanto rara.

Hicimos entonces pasar a diez niños por diez puertas representadas con personas. Vimos que en efecto quedaban abiertas las puertas 1, 4 y 9. Pregunté la razón. Me dijeron que la cantidad de niños que tocaban cada puerta. Entonces pedí que me dijeran qué pasaría si eran muchos. Inmediatamente contestaron que lo importante era la paridad de la cantidad de niños que tocaran cada puerta.

Pregunté cómo quedarían las puertas 1, 4 y 9 si fueran treinta y pasaran treinta niños. Todos concordaron en que quedarían abiertas. Insistí en que si estaban seguros de que las puertas 1, 4 y 9 quedarían abiertas. Un alumno dijo que las primeras diez puertas sólo eran tocadas por los primeros diez niños, el segundo conjunto de diez puertas por el segundo conjunto de diez niños (con esas palabras) y así sucesivamente. Le pregunté por las puertas que toca el niño número 2 e inmediatamente se dio cuenta de que estaba equivocado. Alguien más dijo que las primeras diez puertas quedarían iguales porque "el 11 empieza en la 11" y todos estuvieron de acuerdo.

Alguien propuso que de las treinta puertas sólo quedarían abiertas 1, 4 y 9 porque a las demás las toca una cantidad par de niños. Decidimos hacer la dinámica con treinta puertas y treinta niños pero faltaba una persona para que fueran 30 puertas. Igual que en 6°, yo desempeñé el papel de los niños. Mientras llamaban a alguien para completar las puertas se analizaron algunos casos concretos (20 y 30).

Se hizo la actividad y se obtuvo el resultado. Nadie encontró algo especial en los números de las puertas que quedan abiertas. Pasamos a los conceptos de múltiplo y divisor y a la relación que hay entre ellos. De repente alguien dijo que aunque en efecto 1 y 2 tienen una cantidad infinita de múltiplos, 1 tiene el doble que 2. A partir de ahí la discusión derivó hacia el tema de los infinitos y a qué le pasa a un conjunto infinito si lo duplicamos y, con ese pretexto, qué le pasa a un conjunto infinito si le sumamos, restamos, multiplicamos o lo dividimos entre cantidades finitas. Con bastante rapidez y mucha participación se llegó a que no le pasa nada y se discutió si había infinitos mayores que otros. Concluyeron que no. Entonces les dije que sí había pero que no lo veríamos, y les platiqué de Cantor, que terminó en el manicomio por andar diciendo esas cosas. Vimos que aunque hay la misma cantidad de múltiplos de cualquier número natural, la probabilidad de obtener uno tomando cualquier número natural al azar varía. La discusión fue muy buena pero los dejó exhaustos. Cuando terminó volvimos a la relación entre múltiplo y divisor, pero ya estaban cansados y confundidos. Aunque este último concepto quedó claro, sólo se llegó hasta ahí.

4º grado

Al principio describí la dinámica pintando seis puertas en el pizarrón. La entendieron y participaron diciéndome qué puertas iba modificando cada niño. Pregunté cómo quedarían las puertas si fueran diez y pasaran diez niños. Hubo varias teorías: todas cerradas, una y una, sólo 2, 4 y 6 cerradas. Alguien propuso que sólo quedaría cerrada la puerta 1. Les pregunté si la puerta 1 podía quedar cerrada y rápidamente concluyeron que no: queda abierta porque sólo la toca un niño. Con ese resultado, surgió la idea de que quedarían abiertas las puertas numeradas con nones. Al insistir en si estaban seguros de que la puerta 1 quedaría abierta, todos respondieron que sí porque sólo la tocaba el niño 1.

Hicimos entonces la dinámica con diez niños y diez puertas representadas con personas. Pregunté la razón de que la puerta 4 quedara abierta. Rápidamente me respondieron "El 1 abrió, el 2 cerró y el 4 abrió". Vimos qué pasaba con las puertas 2, 8 y 9, y me explicaron que lo importante era la paridad de la cantidad de niños que tocan cada puerta.

Pedí entonces que me dijeran qué puertas quedarían abiertas si fueran treinta y pasaran treinta niños. No surgieron ideas pero se concluyó que las primeras diez puertas quedan iguales así sean treinta o mil, pues nadie más vuelve a tocarlas. Alguien dijo que "cada quién pasa por su tabla de multiplicar". Alguien más dijo que sí, que "cada niño toca sus múltiplos". Vimos el concepto de múltiplo y rápidamente salió "que está multiplicado por un número entero, bueno, sin punto". Definí entero y natural.

Hicimos la dinámica con treinta puertas y treinta niños. Alumnos y maestra eran las puertas y yo iba pasando y los iba tocando, como en 5° y 6°. Hubo confusión y fue necesario repetir la representación, a pesar de lo cual quedaron abiertas las puertas 1, 4, 9, 16, 24 y 25. Analizamos el caso de 24 y resultó que en efecto tiene una cantidad impar divisores, pues los encontramos por tanteo y faltó contar a 3 entre ellos. Pregunté si había números de la tabla del 6 que no estuvieran en la tabla del 3. Discutimos hasta dónde se terminan las tablas y si es lo mismo "estar en la tabla de" y "ser múltiplo de". Terminamos concluyendo que la puerta 24 debe quedar cerrada.

Utilizando el caso de 24 tratamos el concepto de divisor y la relación que hay entre múltiplo y divisor. Surgió la discusión de si es posible o no dividir un número impar entre uno par o un número par entre uno impar sin que sobre nada. Se trataron a fondo los conceptos de par y non. Vimos que los múltiplos de los múltiplos de un número natural dado son también múltiplos suyos. Surgió que "El 2 es el primer par así que tiene todos los pares integrados, así que todos los pares se pueden dividir entre 2". Alguien propuso que cualquier número natural podía dividirse entre 2 porque "todos son sus múltiplos". Inmediatamente el grupo le hizo ver que no, que el que "funciona con todos" los naturales es 1 (todos son múltiplos suyos). Entonces otro propuso que "0.1 sí funciona con todos de todos [refiriéndose a "todos los números"], porque mira: 0.1 x 10 = 1, y ya es entero". Puse el ejemplo 0.1 x 8 = ? (ellos me dijeron "= 0.8") y vio que estaba equivocado. Le explicaron otra vez que el que "se lleva con todos" es 1 y discutimos si los conceptos de múltiplo y divisor tienen o no sentido para números que no sean enteros.

Pasamos a hablar sobre múltiplos comunes y surgió el tema de la multiplicación. Me dijeron que multiplicar era "sumar rápido un número muchas veces" y que "multiplicar por 9 es agarrar la cantidad 9 veces". Seguimos con múltiplos comunes y sin problemas me dijeron que 21x10 = 7x30 porque 7x3 = 21, por ejemplo. Llegamos a que no hay un múltiplo mayor de un natural dado ni un máximo común múltiplo de dos naturales. Vimos que siempre hay un mínimo común múltiplo.

3° grado

Con el grupo de tercero trabajé dos horas y media, mientras que con los tres anteriores había trabajado dos horas. Originalmente sólo tenía pensado trabajar con 4°, 5° y 6°, pero la maestra de tercero me pidió que también estuviera con su grupo y por supuesto acepté. Es difícil hablar de divisibilidad con niños que todavía no saben dividir, pero aunque la forma de abordar los temas fue menos formal y más intuitiva, la dinámica funcionó bien y creo que nos gustó a todos.

Al principio me hicieron algunas preguntas, como: "¿Todavía vas en secundaria o ya en universidad?". Después describí la dinámica. Al empezar diciendo "hay una calle" y pintarla en el pizarrón, una alumna dijo: "con líneas paralelas". Le contesté que más o menos paralelas, como todas las calles. Menciono esto para dar una idea de las ganas de participar y porque fue uno de los pocos casos en que alguien trató de utilizar algo que ya supiera.

Comencé a describir la dinámica. Desde un principio todos concordaron en que el niño 2 cierra la puerta 212. Sin dibujo, sólo calculando mentalmente, llegaron a que la puerta 6 queda cerrada y la 9 abierta. Les pregunté cómo quedarían las puertas si fueran diez y pasaran diez niños y surgieron varias teorías, así que decidimos realizar la actividad representando las puertas con personas.

Al ver que quedaban abiertas las puertas 1, 4 y 9 algunos protestaron. Alguien sostenía que la puerta 4 debería quedar cerrada, pero él mismo vio quiénes la tocaban y se corrigió. Otro dijo que todas deberían quedar abiertas. Rápidamente salió que el niño 1 toca todas las puertas y que la puerta 2 queda cerrada porque "el 1 la abre y el 2 la cierra". Discutimos un poco y se llegó a la conclusión de que lo importante es la paridad de la cantidad de niños que pasen.

Pedí que me dijeran qué sucedería si los niños vinieran en el orden inverso. Algunos dijeron que quedaría igual. Otro, entusiasmado por el descubrimiento: "¡Oye, sí, es lo mismo pero al revés!". Se discutió un poco; la mitad del grupo pensaba que quedarían iguales y la otra mitad opinaba que cambiarían. Alguien dijo: "Ya lo comprobé porque... Analiza el caso del 10". Pregunté si en efecto eso servía como demostración y concluyeron que no. Él insistió en que no creía que si el diez quedaba igual las demás fueran a cambiar. Revisamos nuevamente el concepto: hay motivos para suponer que quedarán iguales pero no se ha comprobado.

Llevamos a cabo la dinámica con los niños pasando en el orden inverso, otra vez diez puertas y diez niños. Los alumnos que habían representado puertas ahora las modificaron y viceversa. Al ver que el resultado es el mismo pasamos a analizar las razones. La mitad del grupo entendía que todo depende de la paridad de la cantidad de niños pero tardó un poco en convencer a la otra mitad.

Pregunté qué sucedería si fueran treinta puertas y treinta niños. Rápidamente se llegó a que las primeras diez quedarían iguales si fueran treinta o mil puertas, pues ya nadie las toca. La mayoría pensaba que quedarían abiertas 1, 4, 9, 11, 14, 19, 21, 24, 29. Llevamos a cabo la dinámica con veintiocho puertas (el total de alumnos, maestra e hija de la maestra; yo representé el papel de los niños, como en los grupos anteriores).

Pasamos al concepto de múltiplo. Rápidamente me dijeron que un niño toca las puertas que están en su tabla. Seguimos con que las tablas nunca se acaban (no hay un múltiplo que sea el mayor) y les pregunté la razón de que sólo las aprendiéramos hasta 10. Rápidamente salió que sólo es necesario sabérselas hasta 9 (porque "el 10 ya está formado por dos") para poder hacer cualquier multiplicación utilizando el algoritmo. Hablamos entonces sobre el algoritmo de la multiplicación y vimos por qué funciona, apenas lo estaban conociendo pero lo entendían bien.

Surgió la pregunta de si "par" y "múltiplo de 2" significan lo mismo. Varios sostenían que no. Pasamos cierto tiempo buscando pares que no fueran múltiplos de 2 y vimos que dos "grupos de cosas" son iguales si cada cosa que está en un grupo está también en el otro y cada cosa que está en el otro está también en el uno. Llegaron a la conclusión de que ser par y ser múltiplo de 2 eran "equivalentes pero no iguales". Era un concepto que estaban acostumbrados a manejar en clase. Dos de las mesas son equivalentes porque sirven para lo mismo, pero no son iguales porque una tiene una manchita. Después me dijeron que 1/2 es equivalente a 2/4 pero no igual, lo que me hizo brincar. Hablamos un poco más sobre el tema de equivalencia e igualdad y terminó la sesión.

Bachillerato plantel Coyoacán

Como dije, trabajé con estudiantes del bachillerato del IEMS, plantel Coyoacán, que habían terminado el primer semestre y reprobado el tema de divisibilidad. El taller se aplicó en dos sesiones de dos horas cada una. En la primera sesión había como quince personas y en la segunda seis. No sólo fue el grupo donde salieron menos resultados de la segunda fase sino que incluso fue más lento y hubo más problemas que en la mayoría de los grupos de secundaria, a pesar de las modificaciones en la dinámica. En general hubo poca participación.

Primera sesión

Empecé describiendo la dinámica y les pregunté cómo quedarían las puertas si fueran diez y pasaran diez niños. Alguien dijo que la 1 quedaría cerrada y las demás abiertas. Otro corrigió diciendo que la 7 quedaría cerrada porque sólo la tocaban dos. Le pregunté por la puerta 1 y explicó que quedaría abierta porque la tocaba sólo un niño. Entonces le pedí que me dijera de qué dependía que una puerta quedara abierta o cerrada. No pudo explicarlo. Finalmente, después de un rato en el que se mencionaron los conceptos de divisor y de múltiplo, llegaron a que dependía del número de divisores, pero por más que insistí no llegaron a decirme que lo importante era la paridad de la cantidad de divisores.

Encaminado hacia el concepto de número primo, pregunté qué puertas eran tocadas por un solo niño. Una alumna respondió que la 1 y argumentó que no había otra porque si partimos 1 a la mitad no queda entero. Cuando vio que no era esa la respuesta que yo esperaba se desdijo. Pregunté entonces por los divisores obligados de un entero (1 y él mismo). Nadie sabía a pesar de que acabábamos de tocar el tema. Después de verlo nuevamente y de que aparentemente lo hubieran entendido pregunté otra vez qué puertas eran tocadas por un solo niño y alguien respondió "1 y la que le corresponda". Después de darle vueltas al tema media hora más (!) pareció quedar más o menos claro.

Empecinado en llegar al concepto de número primo, pregunté cuántos niños tocan la puerta 7 y cómo podíamos saber que no había más. Me dijeron que no había más porque no había un número que multiplicado por sí mismo diera 7. Esto abrió el tema de la raíz cuadrada y de la recta numérica, y de que para que no existiera $\sqrt{7}$ tendría que haber un agujero en la recta. Después de un tiempo se llegó a la conclusión de que sí existe $\sqrt{7}$ aunque no podamos saber exactamente cuál es, pero la mayoría no quedó muy convencida.

Regresé al tema de qué hace que una puerta quede abierta o cerrada. Como no surgían ideas hicimos la dinámica con diez puertas y diez niños representando las puertas con personas. Fue dificilísimo lograr que diez alumnos se dignaran a representar una puerta, pero finalmente se consiguió. Yo desempeñé el papel de los niños, como en los grupos de primaria. Entonces volvimos a ver por qué las puertas 1, 4 y 9 quedan abiertas y las demás cerradas. Analizamos caso por caso y discutimos bastante acerca del tema pero finalmente no se llegó a que lo importante era la paridad de la cantidad de divisores.

Pasamos entonces al concepto de divisor pero sólo unos pocos entendieron. Después de hablar quince minutos sobre eso y teniendo la definición escrita en el pizarrón, la mayoría era incapaz de explicar qué es un divisor. Tardamos muchísimo en concluir que el divisor más grande de un entero es él mismo. Como surgió "divisor es el que divide", pasamos a tratar el concepto de división, donde pronto saltó que todos creían que 1/100 > 1/10. Después resultó que nadie sabía qué querían decir 1/100 ni 1/10, e incluso había problemas con el significado de 1/3. Repasamos los conceptos de división y de fracción, y después de discutir bastante se concluyó que 1/100 < 1/10, aunque acto seguido alguien argumentó que "en pedacitos sí funciona pero en números no". Se repasó nuevamente el concepto de fracción y de para qué se habían inventado los números (para representar cantidades). Después hablamos de división entre cantidades pequeñas y vimos intuitivamente por qué no puede dividirse entre 0.

Repasamos el concepto de divisor común y definimos máximo común divisor. Después vimos múltiplos y todos pensaban que debía haber uno que fuera el más grande. Les mostré que si suponemos que tenemos al mayor, podemos encontrar uno más grande que él. A una alumna, recordando el caso de $\sqrt{7}$, se le ocurrió que entonces sí existe pero no podemos saber cuál es. A pesar de que insistí en mi argumento no pude sacarla de ahí.

Segunda sesión

Sólo los pocos que habían entendido algo regresaron. Esto me dio esperanzas pero resultaron infundadas.

Empezamos repasando el concepto de múltiplo y recordaban que no había uno que fuera el mayor. Pasamos entonces a discutir divisores comunes. Todos insistían en que no había uno que fuera el mayor y tardamos mucho en concluir lo contrario. Pregunté entonces por la menor cantidad de niños por los que puede ser tocada una puerta. No se acordaban. Analizando casos concretos surgió el tema de los divisores de los divisores de un natural dado, pero no funcionó y regresé a la pregunta anterior. Después de discutir largo rato concluimos nuevamente que todo natural puede dividirse entre 1 y entre sí mismo. El resultado aparecía pero de alguna manera se esfumaba y la persona que lo había dicho argumentaba en sentido contrario un minuto después (literal). Finalmente se llegó a la definición de número primo y se vio que 1 no es primo.

Batallamos con la pregunta de si todo natural tiene divisores primos. Había problemas al dividir y con los conceptos que acababan de verse. Todo el grupo sostuvo durante cinco minutos que 9 es primo, por poner un ejemplo.

Pasamos a hablar de la relación entre múltiplo y divisor. Otra vez afirmaban que primos eran los números que podían dividirse entre 1 y entre sí mismos, y que había naturales que no podían.

Regresé al tema de "divisores de divisores", que ya se había tratado antes, y de divisores primos. La verdad no salieron resultados.

Facultad de Ciencias

Trabajé con un grupo de Álgebra Superior I, materia de primer semestre de las carreras de Matemáticas, Actuaría y Ciencias de la Computación. Empecé describiendo la dinámica y les pregunte cómo quedarían las puertas si fueran diez y pasaran diez niños. No hubo ideas. Pregunté cómo quedaría la puerta 1. Me dijeron que abierta y me dieron la razón de que así fuera. Pregunté por la puerta 2 y sucedió lo mismo. Nadie tenía idea de cómo quedarían las demás, así que hicimos la dinámica con diez puertas y diez niños en el pizarrón.

Al pedirles que me dijeran qué tienen de particular las puertas que quedan abiertas (1, 4 y 9) automáticamente me dijeron que son cuadrados, sus raíces son enteras y las de los demás no. Pregunté entonces qué hacía que una puerta quedara abierta o cerrada y tomó cierto tiempo llegar a que lo importante es la paridad de la cantidad de niños que tocan cada puerta.

No manejaban los conceptos de múltiplo ni divisor a pesar de haberlos visto en esa materia, según comentó el ayudante. Escribí "Un entero a es divisor de un entero b si..." y una alumna completó "...si $b = ka$". Pregunté: "¿Con k en los reales?" y varios respondieron que sí. El ayudante comentó que entonces 3 sería múltiplo de 2. La alumna corrigió: "Entonces no es k, es n". Vimos entonces que lo importante es en qué conjunto la tomamos, no qué letra utilizamos, y que en los conjuntos de los números racionales y reales no tiene caso hablar de múltiplos ni de divisores. Un poco al margen, salió con facilidad que no puede dividirse entre 0. Después de discutir cierto tiempo se llegó a las definiciones de múltiplo y divisor y a la relación que hay entre ellos.

No hubo problemas para ver que sólo la puerta 1 es tocada por un niño y que todas las demás son tocadas cuando menos por dos. También fue inmediato que los números con sólo dos divisores se llaman primos y que quedan cerrados. Fue directo que la primera puerta que toca el niño n es la puerta n, pero cuando pregunté cuál era la última se quedaron pensando un rato y finalmente alguien concluyó que tendría que ser n^n, con lo que prácticamente todos concordaron. Pasó un tiempo más hasta que a alguien se le ocurrió que la cantidad de múltiplos de un natural dado es infinita. No hubo problema para generalizar a los enteros, pero después de hacerlo volví a preguntar por el múltiplo más grande de un natural dado y varios seguían pensando que la última puerta que tocaba el niño n tendría que ser n^n.

Pedí entonces que me dijeran qué números tienen una cantidad impar de divisores. Alguien sugirió que "1 y los que no son primos". Vimos que no y entonces propusieron a los cuadrados. Les pedí que me explicaran la razón y surgió una idea extraña que nunca llegué a entender bien pero que más o menos era la siguiente: como 9 es 3×3, se tienen por un lado 1 y 3, que son los divisores de un 3, y por el otro también 1 y 3, que son los divisores del otro 3, como además tenemos a 9, que se divide a sí mismo, en total son cinco que es una cantidad impar. Les expliqué que 1 y 3 no se repiten y vimos que 9 tiene tres divisores: 1, 3 y 9. A pesar de eso insistían. Una alumna opinaba que si lo raro es que una puerta quede abierta entonces hay un niño que les hace algo de más o algo de menos.

Vimos que dividir un natural entre alguno de sus divisores resulta en otro de sus divisores. Introduje el tema de las parejas de divisores con el caso concreto del número 30. Después analizamos a 42 y tuvieron problemas para averiguar sus divisores. Aún después de trabajar con parejas de divisores, tanto de números cuadrados como de otros naturales, no había ninguna propuesta de por qué los cuadrados perfectos tienen una cantidad impar de divisores. Alguien propuso que si un natural es par entonces la cantidad de sus divisores es impar. El argumento era que si el número es par "la cantidad de sus divisores es par, le sumamos el 1 que divide a todos y el resultado es impar". Le pregunté qué sucedía con 2 y vio que estaba equivocada.

Pasamos al tema de los números primos para averiguar la estructura de los divisores de un natural. Surgió la cuestión de si hay primos tan grandes como queramos o no. Alguien conocía la demostración y la revisamos. Pregunté si bastaba comprobar que un número no puede dividirse entre los primos menores que él para asegurar que es primo. Una alumna sugirió que si no es primo puede descomponerse en factores primos. Vimos el algoritmo y tomó tiempo concluir que siempre tiene fin.

Aprovechando el algoritmo de la factorización en primos regresé a la estructura de los divisores. Después de un rato se llegó a que la descomposición en factores primos de un divisor de *n* forma parte de la descomposición en factores primos de *n*.

El tiempo se había acabado y pedí preguntas, comentarios o sugerencias. La primera pregunta fue: "¿En qué acaba?". Le expliqué que no acaba. Después me preguntaron por el título y el objetivo de mi tesis.

3. FRECUENCIA CON QUE SE TRATARON LOS TEMAS

A continuación presento un cuadro donde se ve qué temas fueron tratados en qué grupos. Cuando hay un asterisco significa que el tema se vio. Las columnas "Total prim.", "Total secu." y "Total bach." indican en cuántos grupos de primaria, secundaria y bachillerato (respectivamente) se trató ese tema. La columna "Total" muestra la cantidad total de grupos de la muestra donde se habló de él.

	primaria					secundaria									bachillerato			Fac. Cien-cias	To-tal
						48				472	199	172	Zumá-rraga	Tot. sec.					
	3°	4°	5°	6°	Tot. prim.	3°C	3°A	2°D	2°E	2°A	3°	3°A	1°A		1er gpo.	2° gpo.	Tot. bach.		
divisores	*	*	*	*	4	*	*	*	*	*	*	*	*	8	*	*	2	*	15
múltiplos	*	*	*	*	4	*	*	*	*	*	*	*	*	8	*	*	2	*	15
orden en que pasan los niños	*				1	*	*	*	*	*	*	*	*	8	*	*	2	*	12
paridad del #de divs.	*	*	*	*	4	*	*	*	*	*	*	*	*	8	*	*	2	*	15
parejas de divs.		*	*	*	3				*			*	*	3			0	*	7
división		*	*	*	3							*	*	2		*	1		6
algoritmo multipli-cación	*	*	*		3									0			0		3
números cuadrados		*	*	*	3				*			*	*	3			0	*	7
suma de impares				*	1									0			0		1
concepto de primo		*	*	*	3	*	*	*	*			*	*	6	*	*	2	*	12
factori-zación en primos				*	1	*	*	*	*			*	*	6		*	1	*	9
teorema funda-mental aritmética				*	1							*	*	2		*	1	*	5
hay infinitos primos					0								*	1			0	*	2
raíz cuadrada		*	*	*	3							*	*	2		*	1	*	7
potencias		*	*	*	3							*	*	2		*	1	*	7
infinitos			*		1									0			0		1
divisores comunes		*	*	*	3	*	*	*	*		*	*	*	7	*	*	2	*	13
múltiplos comunes	*	*	*	*	4	*	*	*	*					4	*	*	2	*	11
divs. de divs. / múls. de múls.		*	*	*	3							*	*	2		*	1	*	7
Total de temas por grupo	6	13	14	15		8	8	8	10	4	5	14	14		7	13		15	

IV CONCLUSIONES

1. LOS RESULTADOS Y SU INTERPRETACIÓN

Desde la primera aplicación pude notar que la dinámica de las tarjetas y el trabajo por equipos no eran adecuados para sólo dos horas de taller. De cualquier manera, insistí en utilizar dicho método en los ocho grupos de secundaria y el primero de bachillerato. Trabajar con todo el grupo y hacer la dinámica representando a las puertas con personas, como lo hice en primaria y en el segundo grupo de bachillerato, o en el pizarrón, como lo hice en el grupo de la Facultad de Ciencias, resulta mucho más adecuado para sesiones cortas. Insisto nuevamente en que creo que la dinámica de las tarjetas y el trabajo por equipos sí funcionan, y muy bien, cuando se dispone del tiempo suficiente.

Sin embargo, trabajar con todo el grupo junto también tiene desventajas, pues es mucho más fácil que algunos se queden rezagados y fuera de la discusión. Creo que un profesor que quiera ver el tema con su grupo y pueda ocupar varias clases puede comenzar trabajando con todos y representando las puertas con personas (en la primera sesión, digamos) y después hacer que los estudiantes trabajen por equipos utilizando tarjetas algunas sesiones más; tal vez convenga que al final trabaje de nuevo con todo el grupo junto. Insisto en la conveniencia de numerar las tarjetas si es que se usan. Aunque yo no lo intenté, creo que reduciría mucho la confusión al voltearlas. Es importante también que el uso de material surja como una necesidad y no sea "impuesto". Así, cada quién ideará sus métodos para representar las puertas: si en un momento se ocurren las tarjetas, se usan; si después resulta necesario (o conveniente) numerarlas, se numeran. Esto da pie a que aparezcan varias maneras distintas de representarlas y después ver las ventajas y desventajas de cada una.

Otra cosa, que ya sabía pero corroboré, es que dos horas es muy poco tiempo para aplicar este taller, aún si se trabaja con todos juntos. Cuando los estudiantes están empezando a entender realmente la situación, se termina. Además, surgen tantas cosas y hay tantos caminos que son muchas más las preguntas que quedan sin respuesta que las que llegan a aclararse. De cualquier manera no tuve opción, pues no resulta tan fácil conseguir grupos "prestados" ni siquiera para una sesión de dos horas, ya no digamos para más; recomiendo que si quiere tratarse el tema se consideren cuando menos cuatro horas y de preferencia más, dependiendo de la profundidad a la que quiera llegarse y de la preparación previa de los estudiantes.

También pude darme cuenta de que por más que quisiera mantenerme al margen y tratara de seguir hasta sus últimas consecuencias todas las líneas de razonamiento que fueran surgiendo, mi influencia en el curso que tomaba la discusión era mucha. A fin de cuentas uno hace las preguntas que considera adecuadas y enfatiza los puntos que le parecen importantes de lo que se dice. En un principio yo creía actuar de manera neutral y seguir los caminos que se iban dando, pero al ver la grabación de las sesiones pude observar que lo que decía era determinante y que sí proponía yo cierta dirección. En las últimas ocasiones lo hice adrede y comprobé que en efecto quien aplica el taller puede guiarlo prácticamente hacia donde quiera. Esto es a fin de cuentas una ventaja, pues si no hay mucho tiempo puede utilizarse para tratar sólo ciertos temas, aunque hago énfasis en que deben explorarse tanto como sea posible todas las líneas de razonamiento que surjan.

Algo que resultó muy notorio y que yo no esperaba para nada fue que los estudiantes de primaria se mostraron mucho más interesados y llegaron en general mucho más rápido a los resultados que los de secundaria y bachillerato e incluso que el grupo de la Facultad de Ciencias. Mi hipótesis era que no habría mucha diferencia entre los niveles educativos, pero lo que quería decir con “no mucha diferencia” era que los alumnos de bachillerato lo harían sólo un poco mejor que los de primaria. Muchos alumnos de secundaria y bachillerato trataban de adivinar o deducir qué era lo que yo esperaba que dijeran en lugar de pensar en el tema. Parecía que estaban “entrenados” para hacer eso y que no podían concebir que algo que tenía que ver con la escuela pudiera ser de algún interés. Eso en la primaria no se dio para nada.

Un ejemplo muy claro es: “La manera en que queda una puerta depende únicamente de si el número de niños que la tocan es par o non”. Darse cuenta de eso fue algo casi inmediato en los cuatro grupos de primaria y en cambio costó mucho trabajo en todos los de secundaria y bachillerato. En el grupo de la Facultad de Ciencias no fue muy directo pero tampoco creó problema mayor, y cuando apliqué por primera vez el taller, en la comunidad de Los Hormigueros, también surgió casi al principio.

Aunque además de la edad y del tiempo que se ha pasado en la escuela hay muchos otros factores que influyen y por lo tanto no puede concluirse nada definitivo, no deja de ser realmente interesante este resultado.

Debe tomarse en cuenta que todos los grupos de secundaria y bachillerato, exceptuando uno, pertenecían a escuelas gratuitas, mientras que los de primaria eran todos de una escuela particular de corte progresista. El grupo de secundaria que no pertenecía a una escuela gratuita era de una escuela particular de tipo tradicional. Aunque fue el grupo de secundaria y bachillerato donde hubo mejores resultados, también fue el único de 1° de secundaria, así que no sirve para dilucidar las razones. Sería muy interesante ver qué sucede con grupos de primaria de escuelas de tipo tradicional, tanto gratuitas como privadas, y de secundaria y bachillerato de escuelas particulares, tanto tradicionales como de corte progresista. Desgraciadamente es algo que queda fuera del alcance de este trabajo por falta de tiempo, pero que definitivamente haré para completar los resultados y poder discernir qué tanto se debe al nivel educativo y qué tanto a la realidad sociocultural y a las escuelas mismas.

Otro punto a considerar es que los dos grupos de bachillerato donde se aplicó el taller estaban formados por estudiantes que habían reprobado la materia. Ambos grupos eran del plantel Coyoacán del bachillerato del

IEMS. Uno de ellos eran cinco personas que acababan de terminar el quinto semestre y aún no habían aprobado el tema de divisibilidad, de primer semestre. Siempre habían tenido un problema especial con las matemáticas y además sólo pudimos trabajar un poco más de una hora. El otro grupo eran estudiantes que salían de primer semestre y habían reprobado el tema. Sin embargo, todos los grupos de secundaria fueron regulares y la diferencia no fue tan grande, aunque sí notoria.

Una razón que puede explicar cuando menos en parte que el taller haya funcionado mejor en primaria que en bachillerato es la edad. Durante la niñez el papel principal del individuo es crecer. El aprendizaje durante esta etapa es indiscriminado y el niño tiende a acumular toda la información posible sobre los temas que se le presenten. Por eso es más fácil que se interese por temas académicos.

Durante la adolescencia el interés se vuelca hacia temas sociales o interiores: los amigos, las fiestas, la pareja o los conflictos existenciales. En esta etapa uno aprende principalmente a relacionarse a nivel social como un individuo independiente y se cuestiona el sentido de la vida. En general los temas académicos no resultan muy atractivos, parecen sosos y menores. Esto, aunado a la rebeldía contra la autoridad que surge naturalmente de la toma de independencia, hace que la escuela se perciba como una entidad restrictiva y que no se disfrute mucho, lo que naturalmente provoca que el aprovechamiento disminuya.

A pesar de los factores que acabo de mencionar, que seguramente influyeron en el resultado, éste parece sugerir que la escuela no ayuda a desarrollar las capacidades de imaginar, crear, razonar u opinar del individuo, sino todo lo contrario. Evidencia a favor de esta hipótesis es la experiencia con el grupo de primer semestre de alumnos de la Facultad de Ciencias. Aunque no puede concluirse nada definitivo porque se trata de un único grupo, debe tenerse en cuenta que está conformado por estudiantes de carreras relacionadas todas estrechamente con las matemáticas, lo que permite suponer que es un tema que de alguna manera les gusta o les interesa, y que a pesar de ser su primer semestre, no faltaban más que dos semanas de clases para que terminara. También debe considerarse que trabajamos sólo una hora, que es muy poco tiempo. Sin embargo, aunque manejaban literales con más facilidad, los resultados salieron menos rápido que en el grupo de sexto de primaria y los estudiantes no parecían estar mucho mejor preparados. Mostraron más interés que la mayoría de los grupos de nivel medio y medio superior, pero no quedaron siquiera cerca de cualquiera de los grupos de primaria, a quienes les pareció muy digno de atención ver qué puertas quedaban abiertas y por qué razón. También he pensado que el planteamiento puede parecer infantil y que otras formas de abordar el tema resultarían más adecuadas para personas más grandes, pero debo admitir que cuando conocí el taller me pareció buenísimo y me lo sigue pareciendo.

2. COMPROBACIÓN DE LAS HIPÓTESIS

Marco sociocultural

Una de las hipótesis planteadas era que a partir de un cierto nivel económico que permite al estudiante serlo de tiempo completo teniendo satisfechas sus necesidades básicas, no debería haber una diferencia significativa en la capacidad de aprendizaje de personas de diversos estratos sociales. Lo observado coincide básicamente con esta propuesta, pues el grupo donde más problemas tuve fue el único donde probablemente varios de los estudiantes vivían en la pobreza. De cualquier manera, según mencioné al plantear las hipótesis, la muestra es demasiado pequeña como para sacar conclusiones. En los grupos de escuelas particulares se observaron mejores resultados que en los de escuelas gratuitas, aunque hay que tomar en cuenta que también se trata de los de menor edad y que todos menos uno pertenecen a una escuela de corte no tradicional. Además, después del grupo de estudiantes de la Facultad de Ciencias, el mejor resultado en escuelas gratuitas fue un grupo formado por estudiantes de escasos recursos de un ámbito semi-rural. En resumen, de los grupos de escuelas gratuitas destacan claramente dos: el de la única situada en una zona de escasos recursos, con un desempeño particularmente pobre, y el de la única situada en un entorno semi-rural, con resultados especialmente buenos a pesar de estar menos preparados que la media.

Algo que aparentemente tiene mucho más peso que el que yo había supuesto es el entorno cultural. No sólo se aprenden de manera inconsciente los modelos de razonamiento y se experimenta una realidad cotidiana a veces más variada, sino que la elección de la escuela tiene que ver con el nivel cultural (y con el económico). La elección de la escuela es crucial en el desarrollo de las capacidades creativas y de razonamiento del individuo.

Utilización de lo aprendido

La otra hipótesis que propuse es que la enseñanza de las matemáticas tal y como funciona hoy en día no sirve para mucho. Supuse que no habría mucha diferencia entre los grupos de primaria y bachillerato y que los estudiantes utilizarían muy poco los conceptos que supuestamente deberían manejar según el grado que estuvieran cursando.

Los resultados obtenidos concuerdan con que casi nunca se utiliza algo que ya se sepa, y sugieren que hay un detrimento en la capacidad cognoscitiva de los estudiantes proporcional al tiempo que llevan asistiendo a la escuela.

No se notó una mejora en cuanto a la capacidad de razonar lógicamente, lo que sugiere que no se ha fomentado en absoluto. Más bien parecía que los estudiantes de grados avanzados tenían arraigada con más fuerza la costumbre de recibir todo masticado y de tratar de realizar el menor esfuerzo posible, por lo que tendió a resultarles más difícil ponerse a pensar. Trataban más bien de adivinar qué quería yo escuchar.

Prácticamente no se utilizaron conceptos previamente aprendidos, salvo operaciones aritméticas y en los grupos de primaria los conceptos básicos de divisibilidad. Menciono algunos ejemplos ilustrativos: en el grupo de la Facultad de Ciencias nadie recordaba el concepto de divisor a pesar de que había sido visto en esa misma materia (Álgebra Superior I). Me imagino que el tema se habrá tratado superficialmente, pues no está en el temario, pero de cualquier forma resulta notorio que estudiantes de carreras con una relación tan estrecha con las matemáticas no tuvieran bien claros conceptos que están en el temario de primaria y secundaria y que habían sido recordados ese semestre. En muchos grupos de nivel medio, incluyendo todos los de bachillerato, nadie tenía idea de qué era un número primo. En algunos casos todos concordaron con que primo era sinónimo de par o de impar. También varios estudiantes de nivel medio, en algunos grupos la mayoría, tenían problemas con los algoritmos de la multiplicación y la división.

Insisto nuevamente en que la muestra es muy pequeña y varios factores afectan los resultados obtenidos, pero a fin de cuentas en los once grupos que no fueron de primaria se observaron lagunas grandes en los temas que supuestamente deberían conocer y prácticamente en ningún caso se utilizó lo que se sabía para resolver el problema. En cuanto a la capacidad de razonar lógicamente, más que un desarrollo se percibió una merma.

3. VIABILIDAD DEL TALLER

Aunque los resultados fueron muy variados y también el nivel de interés mostrado por los distintos grupos, el taller funcionó bien en general y en todos los casos se avanzó en el tema de divisibilidad. Siempre hubo cuando menos algunos estudiantes que permanecieron interesados hasta el final y en nueve de quince grupos se trató de casi todos. En los grupos donde no casi todos mantuvieron el interés hasta el final se utilizaron tarjetas o frijoles, que presentan las desventajas de que ya hablé y propician el tedio y el caos. En cuatro de ellos la maestra no estuvo presente todo el tiempo, que no es lo más recomendable para un grupo de secundaria; otro pertenecía a una escuela situada en un barrio marginal, y otro más eran ochenta estudiantes apretados en un salón y sin pupitres.

Creo que el principal problema fue en realidad el tiempo. Estoy casi seguro de que con más sesiones puede aprovecharse mucho mejor el taller. Dos horas es prácticamente el tiempo mínimo para aplicarlo; en realidad deben considerarse de cuatro a diez horas o más. A pesar de que con en el grupo de la Facultad de Ciencias trabajé sólo una hora y además de aprovecharse el taller a varios les gustó mucho, estoy convencido de que otra hora habría permitido que se profundizara mucho más. El otro grupo con el que trabajé menos de dos horas, formado por estudiantes del plantel

Coyoacán del sistema de bachillerato del IEMS, en efecto tuvo un aprovechamiento casi nulo.

Sigo pensando que el taller es una herramienta magnífica para tratar casi todos los temas de divisibilidad e incluso para abrir las puertas a varios otros. Hay que considerar que la materia es muy extensa y que aprender descubriendo uno mismo los conceptos toma más tiempo que simplemente entender una explicación, así que el taller sólo resulta útil si se le dedica el tiempo necesario. La dinámica debe planearse con cuidado de acuerdo a las condiciones del grupo, al tiempo de que se disponga y a los temas que se quiera tratar, pero teniendo siempre en mente que puede modificarse si uno lo considera adecuado. Creo que con suficiente tiempo es recomendable el uso de tarjetas de dos colores para representar las puertas, pero insisto en que es una dinámica que se presta mucho a la confusión y en que, de usarse tarjetas, deben estar numeradas. Considero mejor representar al principio las puertas con personas o en el pizarrón y sólo en sesiones posteriores trabajar por equipos con tarjetas, cuando surja la necesidad de hacerlo.

La idea del taller es muy sencilla, lo que permite tomar el rumbo de prácticamente cualquier tema de divisibilidad. Por otra parte, por mucho que se haya trabajado y por más que se haya profundizado, siempre se puede regresar a las puertas y los niños para ver de manera más concreta qué está sucediendo. Además, el material necesario es muy barato y fácil de conseguir, así que considero que es una actividad ideal para tratar casi cualquier tema relacionado con la divisibilidad.

V. ENSEÑAR A PESCAR Y ENCENDER LLAMAS:

Reflexión sobre las posibilidades reales de mejorar la educación

Hay un proverbio chino que dice: "Si quieres ayudar al pobre, no le regales pescados sino enséñale a pescar". Yo creo que es la idea que debe tenerse al enseñar. Pienso que más que impartir conocimientos debe enseñarse a los estudiantes cómo adquirirlos ellos mismos. Otra afirmación que rescata la misma idea se atribuye a Sócrates: "La educación no se trata de llenar ánforas sino de encender llamas".

Por supuesto que hay ciertas cosas que deben saberse, como por ejemplo las operaciones aritméticas, pero creo que si se les enseña a pensar y descubrir los conocimientos por sí mismos se gana mucho más, además de que dichos temas pueden utilizarse como pretexto para aprender a razonar. Los temarios oficiales para los cursos de educación básica, media y media superior están llenos de información. Para poder cubrirlos, los temas tienen que verse de manera rápida y superficial. Esto representa para el estudiante un beneficio realmente ínfimo, además de que no propicia que se interese por temas en los que no puede profundizar. Creo que es mejor utilizar temarios más reducidos pero profundizar en las materias que se traten.

En nuestra sociedad se le da demasiada importancia a la academia en general. Los títulos académicos juegan un papel cada vez más importante a nivel laboral. Esto ha provocado que más y más personas quieran tenerlos, lo que necesariamente conduce a que el nivel de las escuelas disminuya. Por un lado, no es posible satisfacer la demanda con profesores de calidad, y por el otro, muchos de los estudiantes buscan el título más que el conocimiento. Es verdad que el hecho de que una persona tenga un título garantiza un mínimo de preparación, pero el problema es que casi siempre no es más que eso: un mínimo. Si se aplicaran pruebas que midieran las capacidades de los aspirantes a los puestos laborales sin considerar sus títulos académicos, perdería el sentido "estudiar" sólo para obtener un título y es probable que el nivel subiera en todos los grados, desde primaria hasta posgrado. La mayoría de la gente que estudiara lo haría con gusto y motivado por las ganas de aprender, incluso no siempre dirigido a su actividad laboral presente o futura. No creo que esté mal que un taxista o un taquero ganen más que un profesor de matemáticas, siempre y cuando éste último tenga un ingreso suficiente, y tampoco creo que haya ninguna desventaja en que una persona con doctorado venda tacos, si lo que quiere es hacerse rico. Considero que ni el doctor en cuestión ni el país pierden nada. No creo que haya desperdicio en educar a quien lo desee, sino al contrario: pienso que entre mejor preparado esté un pueblo, más probable es que tome decisiones convenientes. Por otra parte, quienes estudiaran para ejercer, lo harían para estar bien preparados, pues el título en sí no significaría nada.

Esto nos lleva a la cuestión de qué queremos decir con preparación. Insisto en que considerar a la preparación como equivalente a la acumulación de conocimientos es una visión muy limitada. Yo llamaría preparación (desde el punto de vista académico) a la capacidad de adquirir conocimientos, es decir, de plantear y llevar a cabo una investigación, y a la capacidad de razonar lógicamente y de discernir en qué casos es provechoso hacerlo. Me parece importante recalcar que no en todas las situaciones que la vida nos presenta es útil el razonamiento lógico y en algunas lo es sólo en parte.

La repercusión de los títulos académicos en el mundo laboral es sólo una de las razones de que cada vez más personas quieran estudiar. La otra razón importante es que cada vez somos más gente, así que aunque no aumentara la proporción aumentaría de todas maneras la cantidad de estudiantes. Tampoco es sólo la enorme demanda la causa de que baje el nivel académico del profesorado, sino también lo bajo de los salarios. Hay mucha gente bien preparada con cualidades para enseñar y ganas de hacerlo, pero que vende tacos o maneja un taxi porque tiene que sostener una familia. En la mayoría de los casos, quien se dedica a la docencia es o por amor al arte en detrimento de su economía o porque no puede conseguir un trabajo mejor. Así, dos medidas básicas para mejorar la educación son la planificación familiar y el aumento del salario de los profesores hasta un nivel aceptable. Por desgracia, estas son medidas que quedan fuera de nuestro alcance inmediato y que irán cambiando, si acaso, muy lentamente.

Otro factor que actúa en detrimento de la educación es la gran cantidad de tiempo que se pasa en la escuela. Considero que siete horas es demasiado para un día, cinco días es demasiado para una semana, cuarenta y dos semanas es demasiado para un año y de doce a quince años (con o sin jardín de niños) es demasiado para alcanzar el derecho de estudiar una carrera universitaria.

Pasar tanto tiempo diario en la escuela impide que se mantenga la concentración y hace que el trabajo para hacer en casa se vea como una carga excesiva. La consecuencia es que desde sus pininos el estudiante se amolda a la ley del menor esfuerzo: hacer lo menos posible para obtener la calificación deseada. Desgraciadamente, una vez que alguien se acostumbró a operar según la ley del menor esfuerzo es dificilísimo convencerlo de que hay otras maneras de existir que incluso pueden ser más útiles para disfrutar la vida.

Cinco días por semana impide viajes cortos o campamentos fuera de los periodos de vacaciones. Esto deja fuera otras áreas de experiencia y aprendizaje sin razón alguna, pues mucho del tiempo pasado en la escuela se dedica al aburrimiento inútil. De la misma manera, cuarenta y dos semanas anuales impiden que haya una realidad cotidiana sin escuela, lo que no favorece el desarrollo de una disciplina propia, no impuesta por otros. Finalmente, tener que pasar de doce a quince años en la escuela para poder comenzar una carrera universitaria convierte al sistema educativo en un trámite larguísimo que, básicamente, hay que soportar más que aprovechar. Muchos de los que desisten de estudiar una carrera lo hacen más por cansancio que por falta de capacidad o interés. Además, provoca que los estudiantes lleguen a la facultad cansados y hartos de tanta escuela, con ganas de obtener su título con la mayor facilidad y no con la mejor preparación posible.

Creo que además de cambiar el enfoque de la enseñanza de tipo académico y de dar más importancia a otros tipos de aprendizaje, como educación física y desarrollo de la creatividad, una de las reformas más necesarias en la educación a todos los niveles pero sobre todo durante la adolescencia es reducir en mucho el tiempo que se asiste a la escuela. Por un lado, insisto en que acumular conocimientos sirve de muy poco. Por otro, creo que si los estudiantes pasan menos tiempo en la escuela estarán más interesados en lo que hagan en ella, lo que les ayudará a aprender mejor. También considero que unos seis años son más que suficientes para preparar a cualquier individuo para cualquier carrera universitaria de buen nivel, no como muchas que hay ahora, y que después de esa preparación el estudiante llegará a la facultad con energía y ganas de aprender, no como ahora. La idea es que la escuela funcione para preparar a la gente, no para contenerla.

En conclusión, sostengo que al educar lo que sirve es enseñar a pescar, es decir, enseñar a razonar de manera lógica y a llevar a cabo una investigación para poder aprender los temas que uno quiera.

Es mucho más fácil enseñar así a los niños chicos, que son más maleables, y particularmente difícil hacerlo con adultos, que pueden llevar a veces muchísimos años funcionando según la ley del menor esfuerzo. Sin embargo, resulta que son justamente los adultos quienes enseñan a los niños, empezando por sus propios hijos. Entonces es necesario difundir la idea a todos los niveles: entre profesores y alumnos de cualquier grado y entre los padres de familia.

Siglos de tradición no se modifican de la noche a la mañana ni en el transcurso de un par de décadas, pero la perseverancia trae ventura y estoy convencido de que insistir en esta idea y dedicar esfuerzo a enseñar a pescar terminará redituando en favor de todos.

VI. GUÍA PARA APLICAR "CASILLEROS"

Este manual pretende ser de ayuda para que un profesor trate el tema de divisibilidad con un grupo de alumnos utilizando el taller de los casilleros. Como el tema es muy amplio y el taller sirve como apoyo para tratarlo casi en su totalidad, el manual no está dirigido a ningún nivel educativo en particular.

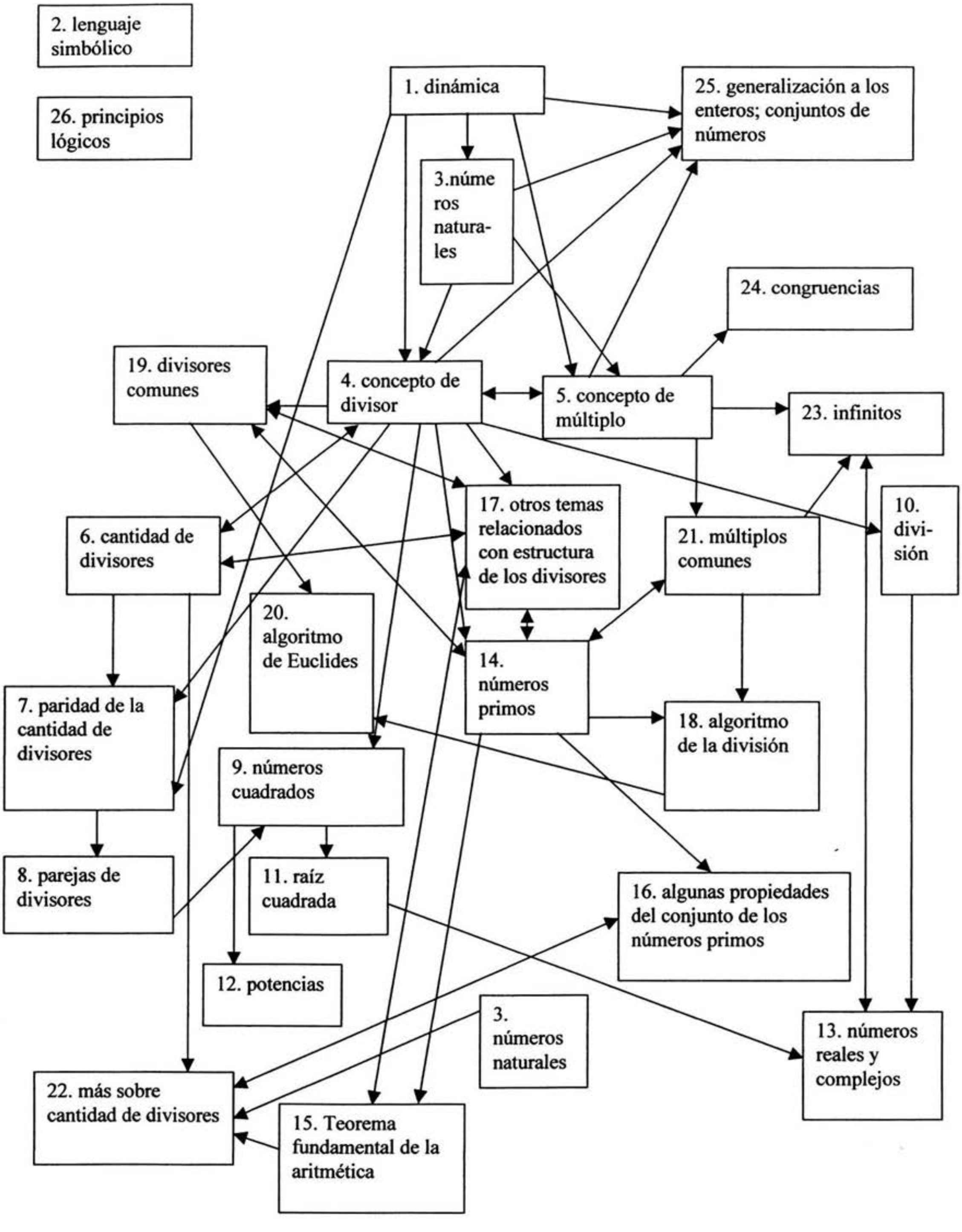
Se supone que el profesor maneja el tema de divisibilidad y puede repasarlo si es necesario. El manual de ninguna manera pretende ser un libro de texto, de los cuales ya hay muchos. Está planteado como una miscelánea de temas ("temas" en el sentido amplio de la palabra, no me refiero necesariamente a "temas matemáticos"), relacionados entre sí según pueden ir surgiendo unos de otros de acuerdo a mi experiencia. Se esbozan las ideas generales de cada tema pero no se explican con detalle.

En algunos se incluye un ejemplo de cómo podría darse la discusión. Los ejemplos están estructurados como secuencias de preguntas, separadas con tres asteriscos (* * *) que sugieren los momentos de reflexión e intercambio de ideas. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que hay muchos caminos posibles y a varios temas puede llegarse casi al principio o después de una discusión rica y extensa sobre asuntos relacionados. Es claro que esto influye mucho en la forma en que se trata, y debe tenerse siempre en mente de qué se ha hablado antes a la hora de guiar la discusión sobre algún tema determinado. Consideremos por ejemplo los números primos. Puede suceder que "la puerta 2 queda cerrada porque sólo la tocan dos niños", que puede surgir casi empezando, conduzca a preguntarse cuál es el menor número de veces que puede ser modificada una puerta, que lleva directamente al tema de los números primos. En ese caso, se discute cómo son los primos y cómo se relacionan con los demás naturales y a partir de ahí puede pasarse a la estructura de los divisores de un natural dado y a la estructura de los divisores comunes de dos naturales. Por otro lado, también puede darse que se discutan divisores y múltiplos, divisores y múltiplos comunes, cantidad de divisores, paridad de la cantidad de divisores, acomodo de divisores por parejas, estructura de los números cuadrados, divisores de los divisores de un natural dado, y sólo entonces se llegue al concepto de número primo. Es claro que siguiendo este camino, cuando se discuten los primos se hace desde una perspectiva mucho más amplia y cuando se habla, por ejemplo, de divisores comunes, no se tiene el concepto de número primo para apoyar.

Es importante recalcar que la idea detrás de todo el trabajo es que lo útil en la enseñanza de las matemáticas es el ejercicio en el razonamiento lógico. Considerando esto, queda clara la importancia de que los estudiantes descubran los conceptos por sí mismos y de que se les permita en lo posible seguir toda línea de razonamiento que surja. Aunque el profesor guía el taller y propone caminos haciendo preguntas y rescatando o haciendo énfasis en lo que le parezca adecuado de la discusión que se dé, a veces se sigue una línea que diverge considerablemente de la que uno quería sugerir y debe continuarse lo más que se pueda por ahí, incluso en esos casos clásicos en que a punto de llegar a una conclusión importantísima los estudiantes derivan hacia otro tema. En tales situaciones hay que seguir con ellos y tratar de caer en otro momento de manera natural en el tema que se estaba tratando. También es capital abstenerse de explicar uno los conceptos aún cuando el grupo lleve algún tiempo dándole vueltas muy de cerca.

Recomiendo que después de que surja un resultado se recapitule qué se hizo y cómo se llegó a él. Creo que ver desde afuera y como un todo el razonamiento seguido es muy útil: ser conscientes de cómo pensamos nos ayuda a ver dónde hay dificultades, incongruencias o errores lógicos. También es importante recalcar los conceptos que se hayan descubierto, definido y demostrado; ver explícitamente qué se encontró y cómo; concretar cuáles son definiciones (lo que bautizamos), cuáles conjeturas (lo que suponemos) y cuáles resultados demostrados (de lo que estamos convencidos que se cumple y podemos convencer a otros).

Incluyo un cuadro que muestra las maneras en que yo he observado que unos temas pueden llevar a otros. Los temas "lenguaje simbólico" y "principios lógicos" no están conectados con ninguno porque se relacionan con todos (se pueden usar para tratar cualquier tema de matemáticas) y pueden aparecer en cualquier momento. El tema "números naturales" aparece dos veces por necesidad, por la estructura del cuadro.


2. lenguaje simbólico
26. principios lógicos
1. dinámica
25. generalización a los enteros; conjuntos de números
3.núme ros natura-les
24. congruencias
19. divisores comunes
4. concepto de divisor
5. concepto de múltiplo
23. infinitos
17. otros temas relacionados con estructura de los divisores
10. divi-sión
6. cantidad de divisores
21. múltiplos comunes
20. algoritmo de Euclides
14. números primos
7. paridad de la cantidad de divisores
18. algoritmo de la división
9. números cuadrados
8. parejas de divisores
11. raíz cuadrada
16. algunas propiedades del conjunto de los números primos
12. potencias
3. números naturales
13. números reales y complejos
22. más sobre cantidad de divisores
15. Teorema fundamental de la aritmética

TEMAS

1. Dinámica

La idea es que hay una calle con puertas numeradas de un solo lado y van pasando niños que las abren o las cierran, según las encuentren. Al principio todas las puertas están cerradas. Pasa el primer niño y las abre todas. Después pasa el segundo y las va cerrando de dos en dos: cierra la puerta 2, la 4, etc. Luego el niño 3 va de tres en tres y las modifica según las encuentre: cierra la 3, abre la 6, etc. Así siguen pasando los niños abriendo y cerrando las puertas: el cuarto niño va de cuatro en cuatro, el quinto de cinco en cinco... Es importante no utilizar los conceptos de múltiplo ni de tabla de multiplicar al explicar la dinámica. Simplemente se dice: "El niño 1 va de una en una, el 2 va de dos en dos, etc."

Sugiero que la primera pregunta que se haga después de plantear la dinámica sea "Si tenemos diez puertas y diez niños, ¿cómo quedan las puertas después de que pasen todos los niños?". Creo que es bueno ver qué ideas surgen y sólo después llevar a cabo la actividad como tal. En muchas ocasiones conviene, después de discutir otro rato, representar la situación con treinta puertas y treinta niños.

Si no se ocurre nada sobre la razón de que hayan quedado las puertas como quedaron después de hacer la dinámica, puede preguntarse qué sucedería si los niños pasaran en el orden inverso o en cualquier otro. Esto puede hacer que surja la idea de que lo único que influye es cuántos niños pasan.

2. Lenguaje simbólico

En matemáticas es necesario con frecuencia utilizar un lenguaje que represente lo que estamos haciendo. Esto surge como una necesidad cuando se quiere transmitir algo que se haya descubierto y también para facilitar el razonamiento, para **representar** lo que está sucediendo.

Al tratar casi cualquier tema de matemáticas, esta necesidad aparece tarde o temprano si se profundiza lo suficiente. Hay que tomar en cuenta que una vez que se maneja, el lenguaje simbólico parece "natural": la mejor manera de expresar lo que está pasando; sin embargo, cuando uno se lo encuentra por primera vez puede resultar oscuro y difícil.

Por eso es importante permitir que el lenguaje simbólico surja como una necesidad al resolver problemas. En el caso de este taller, esperar hasta que sea imprescindible representar la situación en general o para un número muy grande de puertas y haya que utilizar símbolos para números que no sabemos cuáles son (el niño n, la puerta m). De otra manera no se entiende el por qué de ese lenguaje; sólo parece una complicación sin sentido.

Tomando esto en cuenta, el lenguaje simbólico puede darse casi en cualquier momento, de acuerdo a las condiciones del grupo. En algunos casos estarán acostumbrados a manejarlo y surgirá pronto de manera espontánea. En otros no llegará a aparecer. Quien guía el taller puede (y en general debe) sugerirlo cuando observe que hace falta.

3. Números naturales

Como toda la discusión de divisibilidad tiene lugar con números naturales, es conveniente hablar cerca del principio sobre los conceptos de número natural y número entero, cuya diferencia no suele estar muy clara. El tema surge muchas veces por sí solo y es fácil llamarlo si no aparece.

Definición: Desde una perspectiva intuitiva, decimos que un número es **natural** si es el resultado de sumar 1 una determinada cantidad de veces.

El concepto existe desde hace muchísimo, pues son los números que se usan para contar cosas, y por eso se llaman así.

Desde un punto de vista más formal, podemos considerar al **conjunto de los números naturales** como un conjunto que tiene las siguientes características: una es que tiene un primer elemento; otra es que cumple lo siguiente: para cada elemento del conjunto hay otro elemento del conjunto que es "el que le sigue". Es importante notar que para poder hablar de un "siguiente", o **sucesor**, tiene que haber un orden en el conjunto (tenemos que poder decir quién está después de quién), pero que puede haber conjuntos ordenados donde no haya un "siguiente", como por ejemplo los números de la recta numérica. ¿Qué número es el siguiente de 0.13? ¿Qué número es el siguiente de π? Estas dos propiedades implican que el conjunto es **infinito numerable**: podemos decir cuál es el primero, el segundo, etc.

Definimos al conjunto de los números naturales con estas dos propiedades y dos operaciones **que respetan el orden**: la suma y la multiplicación.

Veamos qué pasa con los enteros: también cumplen que cada uno de sus elementos tiene sucesor, y se definen la suma y la multiplicación de manera que respeten el orden, pero no tienen primer elemento. ¿Entonces qué pasa? ¿No son numerables?

Podemos numerar al conjunto de los enteros de la siguiente manera: el primero es 0, el segundo es 1, el tercero es –1, el cuarto es 2, el quinto es –2, el sexto es 3, etc. Así que el conjunto de los enteros también es infinito numerable. Pero entonces, ¿son equivalentes los conjuntos de números naturales y enteros?

Notemos que al numerar a los enteros como lo hicimos (o de cualquier otra manera) resulta que las operaciones no respetan el "nuevo orden". Por ejemplo, 1 + 4 está después de 1 + 3, pero 1 + (-4) también está después de 1 + (-3). Entonces los enteros son un conjunto numerable y ordenado, con las operaciones de los naturales "extendidas", y esas operaciones respetan el orden, pero **no tiene un primer elemento**. Podemos acomodarlo de manera que sí lo tenga (es numerable), pero las operaciones dejan de respetar el orden.

Otro punto importante es que cualquier subconjunto de los naturales tiene un primer elemento.

Hablar de los números naturales es una buena oportunidad para comenzar a introducir lenguaje simbólico.

4. Concepto de divisor

El concepto central de la divisibilidad, aparece casi siempre muy pronto a partir de la pregunta "¿Qué niños modifican una puerta determinada?". A veces surge inmediatamente como respuesta a la pregunta original (¿Qué puertas quedan abiertas?) la idea de que depende de qué niños toquen cada puerta y la discusión toma el rumbo de ver cuáles son esos niños. Por otra parte, en el momento en que uno lo considere oportuno puede simplemente hacer la pregunta.

Definición: Decimos que un natural a es **divisor** de un natural b si el cociente b/a es natural. Se escribe $a|b$ y se lee "a divide a b". Por ejemplo, 2 es divisor de cualquier número par, 5 es divisor de 5, 10, 15,... y así.

Como es un concepto central, a partir de él puede tomarse casi cualquier rumbo.

5. Concepto de múltiplo

Este concepto también es básico. Se puede llegar directamente a él con la pregunta "¿Qué puertas modifica un niño dado?", que también surge a veces de manera natural casi al principio o que puede uno hacer prácticamente en el momento que quiera.

Definición: Decimos que un natural b es **múltiplo** de un natural a si existe algún natural c tal que $b = a \cdot c$. Por ejemplo, todo número par es múltiplo de 2; 5, 10, 15,... son múltiplos de 5.

Si a, b, c son naturales, las expresiones b/a = c y $b = a \cdot c$ son equivalentes. Tenemos entonces que $a|b$ si y sólo si b es múltiplo de a, así que es común pasar del concepto de múltiplo al de divisor y viceversa, aunque debe tenerse en cuenta que los estudiantes suelen confundirlos y hay que dejar uno muy claro antes de pasar al otro.

6. Cantidad de divisores

Este tema puede aparecer en momentos muy diversos. A veces surge aún antes de trabajar el concepto de divisor como tal, al observar cuántos niños modifican una puerta dada, y otras veces no se toca explícitamente sino hasta después de discutir ampliamente la estructura de los divisores de un natural. Conduce directamente al concepto de número primo y en general se regresa a él constantemente.

Para estudiar los divisores de un natural y las relaciones que hay entre ellos casi siempre es necesario conocerlos todos. ¿Cómo podemos asegurar que tenemos todos los divisores de un número natural dado si aún no se ha hablado del teorema fundamental de la aritmética ni de los números primos? Lo que puede hacerse cuando se empiece a dificultar encontrarlos por simple y llano tanteo, es hallar máximos tanto para la cantidad de divisores como para su valor.

En cuanto al valor, es fácil ver que dado un natural n ninguno de sus divisores, exceptuando a n mismo, puede ser mayor que $n/2$, pues al hacer la división nos tiene que quedar cuando menos 2. Ningún divisor de 317, excepto 317 mismo, puede ser mayor que 158.5, y ningún divisor de 42, excepto 42 mismo, puede ser mayor que 21. Si tenemos $n/a = b$ con n, a, b números naturales y $a \neq n$, entonces $b \neq 1$ y tenemos que $b \geq 2$.

Siguiendo un razonamiento similar, exceptuando a n y, si n es par, también a $n/2$, ningún divisor de n puede ser mayor que $n/3$, Entonces un natural dado n tiene sólo un divisor mayor o igual que n, y no puede tener más que 2 divisores mayores o iguales que $n/2$, 3 divisores mayores o iguales que $n/3$, y en general i divisores mayores o iguales que n/i, donde i es cualquier número natural.

Veamos un ejemplo concreto: los divisores de 45. Sabemos que $45|45$ y $1|45$. Ningún otro divisor de 45 puede ser mayor que 22.5, que ni siquiera es entero así que no es divisor. Entonces los divisores de 45 que faltan no son mayores que 45/3. En este caso $45/3=15$, que es natural y por lo tanto es divisor. Ahora no falta ningún divisor mayor que 45/4, etc.

Como otro ejemplo, hagamos lo mismo con 84. Sabemos que $84|84$ y $1|84$. Como 84 es par, 84/2 divide a 84, es decir, $42|84$. El siguiente divisor no puede ser mayor que 84/3. Vemos que en efecto $28|84$. De la misma manera, el siguiente divisor no puede ser mayor que 84/4. En este caso también se tiene que $21|84$. Ahora sabemos que no falta ningún divisor que sea mayor que 84/5, etc. Cuando los números son más grandes, este método reduce rápidamente el valor máximo de los divisores que no se han encontrado.

Quiero recalcar que no estoy sugiriendo buscar los divisores de un número por tanteo empezando por los más grandes, sino dando cotas que nos permitan afirmar que ya tenemos a todos los divisores de un natural dado si no se ha hablado de primos.

En cuanto a la cantidad de divisores sucede lo mismo: como sólo hay un divisor del natural n mayor que $n/2$, ningún natural tiene más de $n/2 + 1$ divisores.

En un momento determinado surge que una vez encontrados los divisores menores o iguales que $\sqrt{n}$ es fácil hallar los que faltan formando parejas de divisores (ver 8.).

7. Paridad de la cantidad de divisores

De eso depende que una puerta quede cerrada o abierta después de que han pasado todos los niños. Casi siempre se nota después de haber discutido sobre divisores y tal vez parejas de divisores, pero a veces se ve desde un principio que la puerta 1 queda abierta porque sólo la toca el niño número 1. Si esto sucede, es fácil conducir la discusión a la paridad de la cantidad de niños que tocan una puerta dada como determinante de la forma en que queda la puerta después de que han pasado todos (abierta o cerrada) aún antes de que se vea cuál es la relación entre los niños y las puertas que tocan.

A partir de aquí se puede ver qué niños modifican una puerta determinada (concepto de divisor) y, como ya se sabe que quedan abiertas las puertas con una cantidad impar de divisores, se puede llegar a que esos números son los cuadrados perfectos (ver 8. y 9.) o tomar el camino de los primos (ver 14.).

8. Parejas de divisores

Podemos acomodar a los divisores de un natural b por parejas: si $a|b$ entonces hay un natural c tal que $b = a \cdot c$. Entonces c también es divisor de b y podemos relacionar a con c respecto a b en el sentido de que $b/a = c$ y $b/c = a$. Surge al ver cuáles son los números que tienen una cantidad non de divisores y conduce a que son los números cuadrados. En el ejemplo se supone que ya se vio que al dividir a un número natural entre uno de sus divisores el resultado es otro de sus divisores.

Ejemplo:

Tenemos que $12 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$, así que $3 = 12/4$ y $4 = 12/3$. Podemos entonces relacionar al 4 con el 3 (o al 3 con el 4) respecto al 12, en el sentido de que al dividir 12 entre uno de ellos el resultado es el otro. ¿Hay algún otro número que se relacione con el 3 respecto al 12 de esa manera? ¿Por qué?

* * *

¿Qué otros números pueden relacionarse entre sí respecto al 12 de esa forma, es decir que al dividir 12 entre uno de ellos nos dé el otro?

* * *

¿Hay alguno que pueda relacionarse con el 1 respecto al 12?

* * *

Podemos entonces acomodar por parejas a todos los divisores de 12 de la siguiente manera, de modo que al dividir 12 entre uno de ellos obtenemos el otro:

$1 \leftrightarrow 12$

$2 \leftrightarrow 6$

$3 \leftrightarrow 4$

¿Podrán acomodarse los divisores de cualquier número de esa forma? Prueba con otros, como 8, 15, 24, 27, etc.

* * *

Consideremos la pareja 6, 4 de divisores de 24. Observa que 2 es divisor de 6, así que 6 / 2 es natural.

Si hacemos $6 / \underline{2} = 3$, $4 \cdot \underline{2} = 8$, tenemos 3, 8, que es otra pareja de divisores de 24 relacionados entre sí.

Lo que hicimos fue tomar una pareja relacionada de divisores de 24, dividir uno de ellos entre alguno de sus propios divisores, para que el resultado fuera natural, y multiplicar al otro número de la pareja relacionada por el número entre el cual dividimos. Como otro ejemplo, consideremos la pareja 8, 3 de divisores de 24. Si dividimos 8 entre 4, que es uno de sus divisores, y multiplicamos 3 por 4, tenemos $8 / \underline{4} = 2$, $3 \cdot \underline{4} = 12$ y llegamos a otra pareja relacionada de divisores de 24: 2, 12. ¿Pasa lo mismo con otras parejas de divisores de 24?

* * *

Habrás visto que en efecto si tenemos una pareja relacionada de divisores de 24, dividimos uno de ellos entre alguno de sus divisores y multiplicamos al otro por ese mismo número, llegamos siempre a otra pareja relacionada de divisores de 24. ¿Qué sucede con los otros números que probaste?

* * *

¿Podemos afirmar que mediante este procedimiento parejas relacionadas de divisores de un número fijo conducen siempre a parejas relacionadas de divisores de ese mismo número? Piénsale. Usa lápiz y papel.

* * *

Acomoda ahora los divisores de 36 por parejas. ¿Qué pasa? ¿Por qué?

* * *

¿Cuántos divisores tiene 12? ¿Cuántos tiene 36? ¿Qué sucede? ¿Cuántos divisores tienen 14, 21, 25, etc?

* * *

Volviendo a las puertas, ¿cómo quedan las casas 12, 36, 14, 21, 25?

* * *

¿Qué pasa con los números que tienen una cantidad impar de divisores?

* * *

¿Qué pasa con el divisor que queda solo? ¿Por quién hay que multiplicarlo para obtener el número original, o dicho de otro modo, con quién se relaciona respecto al número original?

* * *

¿Qué relación hay entre el número original y ese divisor?

* * *

Entonces, ¿qué números podemos asegurar que tienen una cantidad impar de divisores?

* * *

Recapitulemos lo que hicimos: vimos que al dividir un número natural entre uno de sus divisores el resultado es otro de sus divisores. Entonces asociamos esos dos divisores entre sí, de manera que formen una pareja. Como esto sucede siempre, podemos acomodar todos los divisores de un natural dado por parejas. A partir de aquí se siguen dos líneas de razonamiento: primero vimos al dividir un número de una pareja entre alguno de **sus** divisores y multiplicar al otro miembro de la pareja por el mismo número, llegamos a otra pareja de divisores del número original. Después vimos qué pasa con un número que tenga una cantidad impar de divisores: al acomodarlos por parejas hay uno que queda solo, pero al dividir al número original entre ese divisor el cociente es otro divisor, así que ese tiene que relacionarse consigo mismo y entonces la raíz cuadrada del número original es ese divisor. En otras palabras, si n, m, r son números naturales y se tiene $n / m = r$, entonces también $n / r = m$, pues $n = m \cdot r$. Así que la cantidad de divisores de un número dado es impar si y sólo si hay un divisor de ese número que se corresponda a sí mismo, o lo que es lo mismo, si y sólo si hay un número natural que multiplicado por sí mismo dé como resultado el número original ($n = m \cdot m = m^2$), es decir, si el número original es un cuadrado perfecto.

9. Números cuadrados

Como las puertas que quedan abiertas (si empezamos con todas cerradas) son las numeradas con cuadrados perfectos, es un tema que suele aparecer tarde o temprano. El tema puede conducir a raíces (11) y potencias (12). Muchas veces surge a partir de las parejas, pero también es común que al buscar relaciones entre los números de las puertas que quedan abiertas se observe el siguiente resultado:

A 1	C 2	C 3	A 4	C 5	C 6	C 7	C 8	A 9	C 10
C 11	C 12	C 13	C 14	C 15	A 16	C 17	C 18	C 19	C 20
C 21	C 22	C 23	C 24	A 25	C 26	C 27	C 28	C 29	C 30
C 31	C 32	C 33	C 34	C 35	A 36	C 37	C 38	C 39	C 40

Donde se ve que entre las primeras dos puertas que quedan abiertas hay dos cerradas, entre la segunda y la tercera puertas que quedan abiertas hay cuatro cerradas, entre la tercera y la cuarta puertas que quedan abiertas hay seis cerradas, etc.

A| CCA| CCCCA| CCCCCCA| CCCCCCCCA| CCCCCCCCCCA| ...

Entonces:

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

y en general un número natural k al cuadrado es la suma de los primeros k impares. Al trabajar representando las puertas con tarjetas o en el pizarrón recomiendo que no se use un número de puertas que sea cuadrado perfecto, a menos que se trate de 100, para que este resultado no sea tan obvio. Sería muy sospechoso llevar a cabo la dinámica con, digamos, 36 puertas.

Para demostrar que un número natural k al cuadrado es la suma de los primeros k impares, consideremos lo siguiente: el k-ésimo impar es de la forma $2k-1$. Por ejemplo: el primer impar es $1=(2\cdot 1)-1$, el segundo impar es $3=(2\cdot 2)-1$, el tercer impar es $5=(2\cdot 3)-1$, etc. Entonces la suma de los primeros k impares es $1 + 3 +\ldots+ [2(k-1)-1] + [2k-1]$. ¿Cómo podemos obtener una expresión general para la suma de los primeros k impares? Veamos que

$$[2k-1] +1 = 2k$$

$$[2(k-1)-1]+3 = [2k-2-1]+3 = 2k-3+3 = 2k,$$

$$[2(k-2)-1]+5 = [2k-4-1]+5 = 2k-5+5 = 2k, \text{ etc.}$$

Lo que estamos haciendo es considerar todos los sumandos y agrupar el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo, etc., pues esas sumas por parejas dan siempre como resultado $2k$. Veámoslo gráficamente. Tenemos la suma:

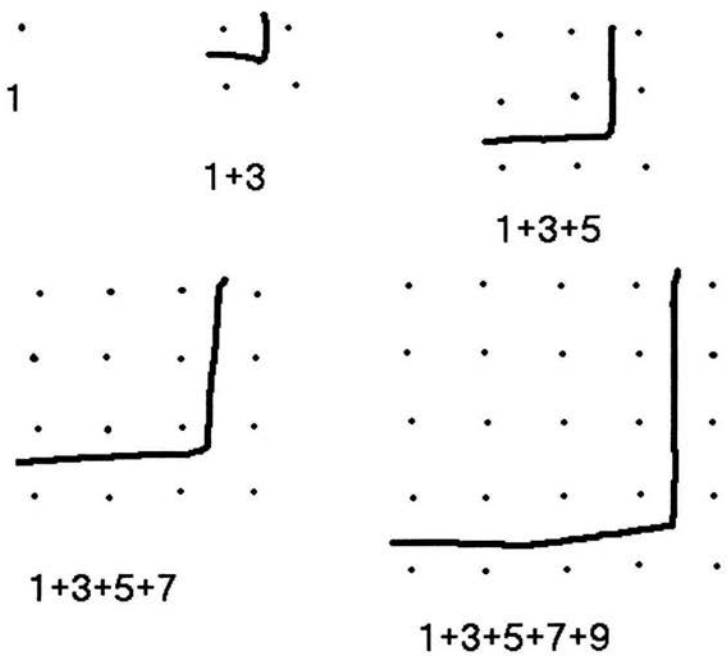
$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + [2(k-3)-1] + [2(k-2)-1] + [2(k-1)-1] + [2k-1]$$

Si acomodamos los sumandos por parejas:

$$\begin{array}{cccc} 1 + & 3 + & 5 + & 7 + \\ [2k\text{-}1] = 2k, & [2(k\text{-}1)\text{-}1] = 2k, & [2(k\text{-}2)\text{-}1] = 2k, & [2(k\text{-}3)\text{-}1] = 2k, \text{ etc.} \end{array}$$

Después de sumar todos así, ¿cuántas veces aparecerá $2k$? Consideremos por separado los dos casos posibles: que el número k sea par y que sea impar. Si k es par tenemos $k/2$ sumandos que valen todos $2k$, pues eran k impares y los sumamos de dos en dos, así que el resultado final es $(2k)\cdot(k/2) = 2k^2/2 = k^2$. Si k es impar y vamos sumando por parejas, al final queda uno que no tiene pareja: el de en medio. Entonces tenemos $(k-1)/2$ sumandos que valen $2k$ y uno, el que queda en medio, que vale k, pues es $\sqrt{k^2}$. De esta manera, el resultado de la suma es $[(2k)\cdot(k-1)/2] + k = (2k^2-2k)/2] + k = (k^2-k) + k = k^2$.

Otra forma muy bonita de verlo es la siguiente:



10. División

A la pregunta "¿Qué quiere decir divisor?" los estudiantes responden a veces con "Que se puede dividir", de donde se puede seguir a repasar el concepto de división, ver que cualquier número real se puede dividir entre cualquier otro que no sea 0 y dar una idea intuitiva de por qué no puede dividirse entre 0. Aunque no es un tema muy relacionado con la divisibilidad como tal, creo que vale la pena repasarlo si no está lo suficientemente claro.

11. Raíz cuadrada

El tema surge en ocasiones a partir de los números cuadrados. Si uno quiere introducir el tema después de que se haya trabajado bastante con la dinámica y se hayan tratado a fondo los números cuadrados, puede preguntar: "Si hay, por ejemplo, 573 niños y 573 puertas, ¿cuántas puertas quedarán abiertas después de que hayan pasado todos?" y "Si vamos incrementando uno a uno el número de niños y puertas, ¿en qué momento se incrementa el número de puertas que quedan abiertas?".

A veces, a la pregunta "¿Qué naturales tienen una cantidad impar de divisores?" se responde con "Aquéllos para los que hay un número que multiplicado por sí mismo da ése". Entonces pregunta uno: "¿No hay un número que multiplicado por sí mismo dé 2?", y se discute la raíz cuadrada. A partir de la raíz cuadrada y de para qué números existe, se puede derivar a la discusión de algunas propiedades de los números reales y complejos (ver 13).

12. Potencias

Directamente a partir de los números cuadrados o después de discutir la raíz cuadrada se puede pasar a hablar de las potencias en general y de la relación que hay entre suma, producto y potencia. Este tema también da pie a que se discutan los números reales y complejos (ver 13).

13. Números reales y complejos

No es ni el tema que surge con mayor facilidad ni el que puede tratarse mejor usando este taller. De hecho, el taller no está diseñado para trabajarlo, pero aún así llega a aparecer y opino que uno debe tratar en general de seguir los caminos que surjan en la discusión. El tema puede ser consecuencia de "¿Podemos dividir a cualquier número entre cualquier otro?" y de "¿Qué números tienen raíz cuadrada?", y puede conducir a hablar del infinito o de los distintos infinitos (cardinalidad).

14. Números primos

Otro concepto central de la divisibilidad. Puede surgir a partir de muchos temas y llevar a muchos otros. Suele estar presente hasta el final una vez que aparece. En el ejemplo que sigue se supone que se maneja el concepto de divisor.

Ejemplo:

Vimos que distintos números tienen cantidades de divisores distintas. ¿Podremos encontrar números con grandes cantidades de divisores?

* * *

Vemos que si multiplicamos una gran cantidad de números naturales, el resultado es un número natural, y todos los números que multiplicamos serán sus divisores. Podemos entonces encontrar naturales con tantos divisores como queramos.

Fijémonos en lo opuesto: ¿cuál es el mínimo número de divisores que puede tener un natural?

* * *

Vemos que todo natural es divisible entre 1 (el niño 1 abre todas las puertas), así que no hay naturales que no tengan divisores. ¿Hay algún número que no pueda dividirse más que entre 1?

* * *

¿Entre quiénes puede dividirse al 1?

* * *

¿Hay algún otro natural que sólo pueda dividirse entre 1?

* * *

Todo número puede dividirse entre sí mismo y entre 1, así que todo natural tiene cuando menos dos divisores, excepto el 1, que sólo se puede dividir entre 1, pues él mismo es 1. ¿Hay otros números que no puedan dividirse más que entre sí mismos y entre 1? Búscale.

* * *

Definición: Los números naturales que tienen únicamente dos divisores se llaman **números primos**.

Como todo natural puede dividirse entre sí mismo y entre 1, podemos decir que los primos son los números naturales distintos de 1 que sólo pueden dividirse entre sí mismos y entre 1.

Los primos desempeñan un papel muy importante en el tema de la divisibilidad. El 1, que no tiene más que un divisor, no se considera primo. Los números naturales que tienen tres o más divisores distintos se llaman **compuestos.**

15. Teorema fundamental de la aritmética

Es el teorema básico de la divisibilidad. Surge a partir de discutir números primos y estructura de los divisores.

Ejemplo:

¿Hay números que tengan como divisor a algún número primo?

* * *

Si tomamos un número primo y lo multiplicamos por cualquier natural, el resultado es un número natural. El número primo que consideramos en un principio es divisor de él. Así vemos que sí existen números con divisores primos.

¿Hay números cuyos divisores sean sólo números primos?

* * *

Vimos que todo natural puede dividirse entre 1, así que no hay números cuyos divisores sean sólo números primos.

Entonces, ¿hay números cuyos divisores distintos de 1 sean sólo números primos?

* * *

Un número primo es un natural que sólo puede dividirse entre sí mismo y entre 1, así que los divisores distintos de 1 de un número primo son primos: sólo hay uno, él mismo, que es primo.

¿Hay números que no sean primos cuyos divisores distintos de 1 sean todos primos?

* * *

Un número natural es siempre divisor de sí mismo, así que si él mismo no es primo, no pueden ser primos todos sus divisores distintos de 1.

¿Hay algún natural cuyos divisores, exceptuando a 1 y a sí mismo, sean todos primos? Busca.

* * *

Si consideramos dos números primos y los multiplicamos entre sí, el resultado es un número *n* cuyos divisores, exceptuando a 1 y a *n*, son todos primos.

Ahora podemos preguntarnos lo contrario: ¿hay algún número natural que no tenga divisores primos? ¿Por qué? Recordemos que 1 no es primo.

* * *

Entonces, ¿hay algún número natural distinto de 1 que no tenga divisores primos? ¿Por qué?

* * *

Si hubiera un número natural distinto de 1 que no tuviera divisores primos, ninguno de sus divisores los tendría, ni ninguno de los divisores de esos divisores, y así indefinidamente, pero eso no es posible porque dado un natural *n*, cualquiera de sus divisores que no sea *n* mismo tiene menos divisores que *n*, así que al considerar los divisores de *n*, los divisores de esos divisores, etc., por fuerza llegaremos a uno que tenga sólo dos divisores, es decir, a un divisor primo de *n*. Otra forma de verlo es considerar al divisor más chico de *n* que sea distinto de 1. Cualquier divisor de ese número es divisor de *n*, pues él mismo es divisor de *n*, pero no hay un divisor de *n* que sea menor que él, así que sólo puede dividirse entre sí mismo y entre 1, es decir, es primo.

Hemos descubierto algo muy importante acerca de la estructura de los números naturales. Vimos que **cualquier número natural distinto de 1 tiene al menos un divisor primo**. Entonces, si n es un número natural, existe un número primo p tal que $n = p \cdot r$, donde r es un número natural. Como r es natural, tiene al menos un divisor primo, es decir, existen un primo q y un natural s tales que $r = q \cdot s$. Como s es natural... ¿Qué pasa?

* * *

Si empezamos con un número natural cualquiera y llevamos a cabo el procedimiento que se describió en el párrafo anterior (considerar un divisor suyo que sea primo y dividir al número entre él, hacer lo mismo con el número que nos quede como cociente, etc.), ¿terminamos siempre en algún momento o existe la posibilidad de que sigamos indefinidamente? ¿Qué quiere decir "terminar"? ¿Cuándo no podemos continuar?

* * *

Tenemos que si $n = p \cdot r$, entonces n es mayor o igual que p y que r. Si p es primo, entonces n es estrictamente mayor que r. ¿Por qué?

* * *

Si p es primo, entonces p es mayor o igual a 2, así que $n = p \cdot r$ es estrictamente mayor que r.

¿Qué pasa si n es un número primo? ¿Termina el procedimiento? ¿Cuánto tarda en terminar?

* * *

¿Cuántos divisores tiene un número primo? Nuevamente, ¿cuánto tarda en terminar el procedimiento?

* * *

Resulta que, como los divisores de un número primo son sólo él mismo y 1, tenemos que si n es primo y $n = p \cdot r$, donde p es un número primo, entonces por fuerza $n = p$ y $r = 1$. Por lo tanto, si n es primo el procedimiento no puede continuar.

* * *

Si tomamos un número natural cualquiera n y buscamos un divisor suyo que sea primo, al que llamaré p_1, tenemos que existe un número natural r_1 que cumple la relación $n = p_1 \cdot r_1$. Si continuamos con el procedimiento, como lo hicimos arriba, tenemos que $r_1 = p_2 \cdot r_2$, donde p_2 es un primo que divide a r_1 y r_2 es un número natural. ¿Termina el procedimiento o podría seguir indefinidamente?

* * *

Entonces observamos que este procedimiento siempre tiene fin, pues si p_1 es primo entonces n es mayor que r_1, si p_2 es primo entonces r_1 es mayor que r_2, etc. Supongamos que terminamos después de un número k de pasos, es decir, que llegamos a $r_{k-1} = p_k \cdot r_k$. Si $r_k = 1$, en realidad $r_{k-1} = p_k$ y habíamos terminado en el paso anterior. Así, podemos suponer que $r_k \neq 1$. Entonces, ¿cómo es r_k? ¿Cuántos divisores tiene?

* * *

Vemos que r_k es primo, pues si no lo fuera, tendría un divisor primo distinto de sí mismo y podríamos continuar con el procedimiento. Entonces tenemos que p_1, p_2, p_3, ... p_k y r_k son todos primos. ¿Qué pasa si los multiplicamos a todos? ¿Cuál es el resultado?

* * *

Observamos que si multiplicamos todos esos primos el resultado es n. ¿Quiere decir eso que todo número natural es un producto de números primos?

* * *

Los comentarios que hemos estado haciendo sirven para cualquier número natural. Los hemos hecho de manera totalmente general. Vemos así que en efecto todo número natural es un producto de números primos. A la expresión de n como producto de números primos se le llama la **descomposición en factores primos** de n.

* * *

Veamos primero cómo es la descomposición en factores primos de un natural cualquiera. Por ejemplo: los primos que multiplicados entre sí dan como resultado un número natural n, ¿tienen que ser todos distintos o pueden repetirse? Busca ejemplos.

* * *

Tenemos que $4 = 2 \cdot 2$. Vemos así que la descomposición en factores primos de 4 tiene dos veces a 2 y no tiene a ningún otro primo. ¿Cuáles serían descomposiciones en factores primos de 24 y 64, por ejemplo?

* * *

Para familiarizarnos, descompongamos en factores primos a los siguientes números: 10, 12, 13, 27, 30, 49, 50.

* * *

Otra cuestión interesante: un número natural dado (digamos 312), ¿tiene una descomposición en factores primos que es única o puede tener varias?

* * *

Para ver lo que sucede, consideremos dos descomposiciones en factores primos de un número natural n. Podemos escribirlo en términos matemáticos como sigue: $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$, donde todas las p y q son números primos. Es importante notar que ambas descomposiciones podrían tener un número distinto de factores, razón por la que una termina en k y la otra en m.

Fijémonos en un factor de la primera descomposición, digamos p_1. Como p_1 divide a n, divide al producto $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$, pues son iguales. Como la multiplicación es asociativa, podemos ver el producto anterior como $q_1 \cdot (q_2 \cdot \ldots \cdot q_m)$, así que p_1 divide o bien a q_1 o bien al producto $q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$. Si p_1 divide a q_1, tenemos que $p_1 = q_1$, pues ambos son primos. Si

p_1 no divide a q_1, tenemos que p_1 divide al producto $q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$, y entonces continuamos con el procedimiento: tenemos que p_1 divide al producto $q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_m$, así que divide o bien a q_2 o bien al producto $q_3 \cdot \ldots \cdot q_m$. Nuevamente, si p_1 divide a q_2, se tiene $p_1 = q_2$, y si no es así, continuamos con el procedimiento. ¿Terminaremos algún día o existe la posibilidad de continuar por siempre?

* * *

¿Cuál es el máximo número de pasos que puede haber?

* * *

Vemos entonces que siempre terminamos en menos de n pasos, así que p_1 es igual a alguna de las q. De esta manera, podemos dividir ambas descomposiciones entre p_1 y los dos productos de primos resultantes seguirán siendo iguales entre sí. ¿Cómo seguimos?

* * *

Hacemos lo mismo con p_2. Como p_2 es igual a alguna de las q, podemos dividir ambas descomposiciones entre p_2 y los dos productos de primos resultantes seguirán siendo iguales entre sí. Después hacemos lo mismo con p_3 ... ¿Qué pasa?

* * *

¿Puede darse que una de las descomposiciones tenga más factores que la otra?

* * *

¿Puede suceder que ambas descomposiciones en factores primos del mismo natural *n* sean diferentes en algo que no sea el orden de los factores?

* * *

Así, dos descomposiciones en factores primos de un número natural son iguales salvo por el orden de sus factores. ¿Las hace esto diferentes?

* * *

El orden de los factores no altera el producto. Intuitivamente podemos pensar que hay la misma cantidad de manzanas en tres canastas con cinco manzanas cada una que en cinco canastas con tres manzanas cada una. Entonces, la descomposición en factores primos de un natural dado es única. Hemos demostrado entonces el:

Teorema fundamental de la aritmética: Todo número natural distinto de 1 puede descomponerse en factores primos de manera única, salvo por el orden de los factores.

Veamos la forma en que procedimos: primero establecimos que todo número natural distinto de 1 tiene cuando menos un divisor primo; con base en ese resultado, llegamos a que todo número natural distinto de 1 se puede expresar como un producto de números primos; después demostramos que la descomposición en factores primos de cualquier número natural distinto de 1 es única salvo por el orden de los factores (que no altera el producto), y para terminar **enunciamos** el resultado explícitamente y le pusimos nombre: Teorema fundamental de la aritmética.

16. Algunas propiedades del conjunto de los números primos

Podemos preguntarnos cómo es el conjunto de los números primos. Dos preguntas básicas son: "¿Podemos encontrar primos tan grandes como queramos?" y "¿Podemos encontrar primos tan alejados entre sí como queramos?". La respuesta a ambas preguntas es afirmativa. Veamos cómo mostrarlo.

Para hacer evidente que hay primos tan grandes como se quiera, sólo hace falta suponer que no, que hay uno que es el más grande de todos. Vemos que si hay un primo que es el más grande, como también hay uno que es el más chico (2), el conjunto de los números primos es finito. Entonces hacemos el producto de todos los números primos y le sumamos 1. El producto de números naturales positivos es mayor o igual que cualquier factor, y al sumarle 1 aseguramos que el resultado es un natural mayor que cualquiera de los factores. Además, al dividirlo entre cualquiera de los primos que teníamos queda 1 de residuo, así que no es múltiplo de ninguno de ellos. Entonces por fuerza hay un primo que no habíamos considerado.

Hay que notar que el número que construimos no es necesariamente primo, sino que sus factores primos no habían sido considerados. Como ejemplo, si suponemos que todos los primos son 2 y 7, tenemos $(2\cdot 7)+1=15$, que no es primo, pero que no es divisible ni entre 2 ni entre 7, así que sus factores primos (3 y 5) no habían sido considerados. Por lo tanto **el conjunto de los números primos es infinito,** así que **no hay un primo que sea el mayor de todos**.

Utilizando lenguaje simbólico, podemos escribir la demostración de la siguiente manera:

Sean $p_1, p_2, \ldots p_n$ todos los primos. Consideremos $q = (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$. Si dividimos $[(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1] / p_i$, donde i está entre 1 y n, tenemos $[(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1] / p_i = [(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) / p_i] + [1 / p_i]$, pero p_i es factor de $(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n)$, así que lo divide, de manera que p_i no divide a q.

Para ver que hay conjuntos de naturales consecutivos tan grandes como queramos de los cuales ninguno es primo, hacemos lo siguiente: se define $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ A este número se le llama ***n* factorial**. Entonces el siguiente conjunto $A = \{(n+1)!+2, (n+1)!+3, \ldots, (n+1)!+n+1\}$ es un conjunto de n naturales compuestos, pues para toda $1 \leq m \leq n+1$ se tiene que m divide a $(n+1)! + m$. Para ver esto último, observemos que si m está entre 1 y n, es factor de $(n+1)!$, por la manera en que se definió la expresión. Entonces m divide a $(n+1)!$ y m también divide a m, así que m divide a $(n+1)!+m$.

¿Por qué escogimos al conjunto $A = \{(n+1)!+2, (n+1)!+3, \ldots, (n+1)!+n+1\}$ y no al conjunto $B = \{n!+1, n!+2, n!+3, \ldots, n!+n\}$, que también tiene n elementos? Acabamos de ver que si $1 \leq m \leq n$ se tiene que m divide a $n!+m$. ¿Qué pasa? Recordando los conceptos de divisor y número primo, ¿quién podemos asegurar que divide a $n!+1$? ¿Quién es m en este caso? Entonces, ¿podemos asegurar que $n!+1$ no es primo?

Como para cualquier n natural se tiene que el conjunto A=$\{(n+1)!+2, (n+1)!+3, ..., (n+1)!+n+1\}$ tiene como elementos únicamente números compuestos, concluimos que hay conjuntos de números compuestos consecutivos tan grandes como se quiera. De hecho, la manera en que lo demostramos fue **construyendo** el conjunto, así que podemos **mostrar explícitamente** un conjunto tan grande como queramos de números compuestos consecutivos.

Con estos ejemplos, podría parecer que es fácil en general encontrar números primos y comprobar si un natural determinado es primo o no. Me parece importante aclarar que no es así. Hay muchos problemas abiertos en matemáticas relacionados con el conjunto de los números primos. Uno de ellos es justamente la manera en que están distribuidos. Otro es la famosa **conjetura de Goldbach**: todo número par mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos números primos. No se ha encontrado ninguno que no se pueda, pero tampoco se ha podido demostrar que se puede para todos.

17. Otros temas relacionados con la estructura de los divisores

A lo que me refiero con este título es a lo que no se trata por separado. En realidad casi todo el tema de divisibilidad se relaciona estrechamente con la estructura de los divisores de números naturales, como cabría esperar.

Notar que los divisores de los divisores de un natural dado son también sus divisores ayuda mucho a entender lo que pasa si no se ha hablado de primos. En el ejemplo se supone que sí.

Ejemplo:

Consideremos un número natural n y fijémonos en sus divisores, a los que llamaré $d_1, d_2, \ldots , d_k$. Sabemos que n es un producto de números primos, y que todos ellos son divisores de n. ¿Puede haber algún divisor de n que no sea producto de algunos de los primos cuyo producto es n?

* * *

Observemos con cuidado qué pasa. Ya vimos que al menos uno de los divisores de n tiene que ser primo, pues todo número natural distinto de 1 tiene cuando menos un divisor primo. Si hay alguno que no sea primo, digamos d_1, tenemos que como es un número natural, es un producto de primos, y cada uno de esos números primos es divisor de d_1. Entonces, como d_1 es divisor de n, tenemos que dichos primos son también divisores de n. ¿Quiere esto decir que los primos que multiplicados entre sí dan como resultado d_1 son parte del grupo de los primos que multiplicados entre sí dan como resultado n? ¿Por qué?

* * *

Consideremos otro divisor de n que no sea 1. Es un número natural distinto de 1 y, por lo tanto, es un producto de números primos (si él mismo es primo entonces es un producto con un solo factor, pero sigue siendo un producto de primos). Como vimos, la descomposición en primos de cualquier divisor de n es parte de la descomposición en primos de n.

Observemos entonces qué está pasando: n puede descomponerse en factores primos, y cada uno de esos factores es divisor de n. n puede tener divisores que no sean primos, pero la descomposición en factores primos de cualquiera de ellos es siempre parte de la descomposición en factores primos de n. Entonces tenemos que la descomposición en factores primos de n nos dice mucho acerca de todos sus divisores. Para empezar, vimos que los factores primos de n son divisores suyos. Ahora, ¿qué pasa si multiplicamos dos de ellos entre sí? ¿El resultado es divisor de n, o no lo es, o a veces sí y a veces no? ¿Por qué?

* * *

¿Y qué pasa si multiplicamos varios de ellos entre sí? ¿Y si hacemos el producto de todos ellos? ¿El resultado es siempre divisor de n? ¿Por qué?

* * *

Ahora, ¿hay algún divisor de n que no sea producto de algunos (o todos) los factores primos de n?

* * *

Entonces tenemos que los factores primos de n nos dan una descripción completa de sus divisores: exceptuando a 1, que no es primo ni producto de primos y que divide a cualquier número natural, todo divisor de n es producto de uno o más de los factores primos de n, así como todo producto de uno o más de los factores primos de n es divisor de n.

Veamos el resultado de manera formal. Queremos ver que dados dos naturales d y n, es equivalente decir que $d|n$ y que la descomposición de d en factores primos está contenida en la descomposición de n en factores primos. Tenemos entonces que demostrar dos cosas: que si $d|n$ entonces todos los factores primos de d son también factores de n, y que si todos los factores primos de d son también factores de n entonces $d|n$.

Consideremos dos números naturales d, n y supongamos que $d|n$. Sabemos que ambos números pueden descomponerse en factores primos de manera única. Tenemos entonces que $d=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ y $n=q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ (Es importante notar que no necesariamente son todas las p diferentes entre sí ni todas las q diferentes entre sí. Si d=8, entonces $d= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$, con $p_1 = p_2 = p_3 = 2$).

Dividamos n entre d. Tenemos $(q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m) / (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k)$. Como n/d es natural, todos los factores primos de d tienen que corresponder a algún q_i para que el denominador de la fracción n/d sea 1. Entonces todos los factores primos de d son también factores de n.

Ahora veamos lo contrario: supongamos que tenemos dos números naturales, d y n. Sabemos que ambos números pueden descomponerse en factores primos de manera única, así que $d=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ y $n=q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$. Si suponemos que todos los factores primos de d son también factores de n, entonces $n/d = (q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m) / (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k)$ es un número natural, que es lo mismo que decir $d|n$.

18. Algoritmo de la división

El tema no surge a partir de la dinámica, pero puede ser necesario si se profundiza lo suficiente.

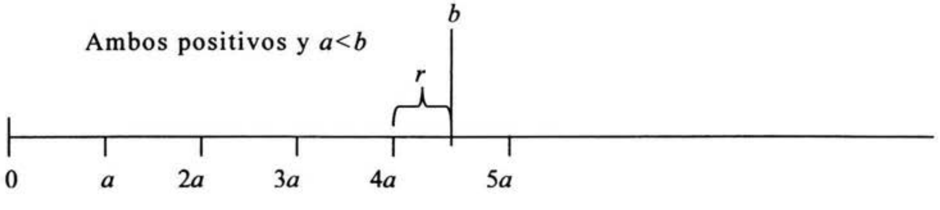
Algoritmo de la división: Dados dos números enteros (positivos o negativos) a, b con $a \neq 0$, existen números enteros q, r con $0 \leq r < |a|$ tales que $b = qa+r$.

Para ver intuitivamente que se cumple, supongamos primero $a > 0$, $b \geq 0$ y consideremos segmentos de tamaño a y de tamaño b. Si $b \geq a$, añadiendo segmentos de tamaño a llegamos al segmento de tamaño b o exactamente o faltándonos menos que un segmento de tamaño a. Si $b < a$, tomamos $q = 0$ (ningún segmento de tamaño a) y lo que falta es b, que es menor que a. En el segundo caso, sabemos que b es entero, pues así lo tomamos; sin embargo, surge la duda de si el segmento que sobra en el primer caso es entero. Para ver que sí, sólo hace falta considerar que el producto de dos enteros es entero (qa es entero) y la resta de dos enteros es también un número entero ($b-qa=r$ es entero).

Para ver el resultado si ambos números son negativos, hacemos lo mismo hacia la izquierda del 0.

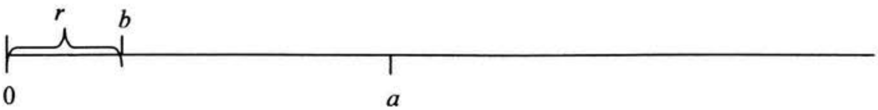
Si uno de los números es negativo y el otro positivo, tomando $q < 0$ hacemos que las dos cantidades "corran" en el mismo sentido.

Ambos positivos y $a<b$



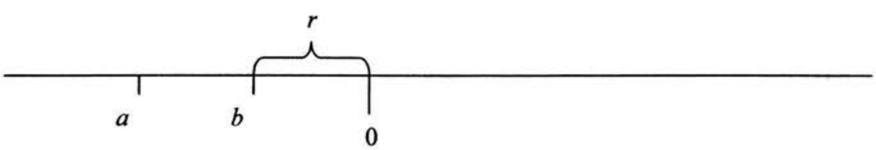
$b= 4a+r$

Ambos positivos y $a>b$



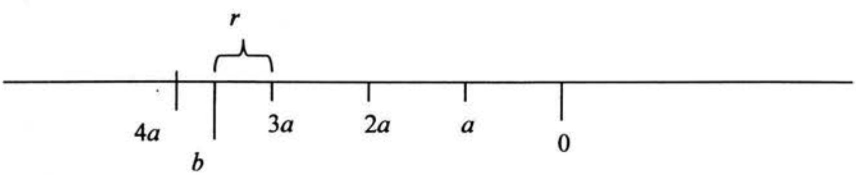
$b = 0a + r$

Ambos negativos y $a<b$



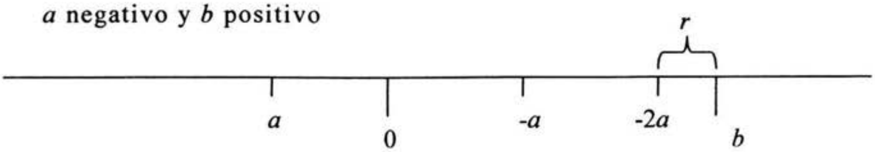
$b = 0a + r$

Ambos negativos y $a>b$



$b = 3a + r$

a negativo y *b* positivo



$b = -2a + r$

19. Divisores comunes

Es un tema al que puede llegarse por varios caminos y tratarse a diversos niveles. Puede introducirse directamente con la pregunta "¿Qué niños tocan tanto la puerta *m* como la puerta *n*?". En el ejemplo que sigue se supone que se ha discutido el teorema fundamental de la aritmética.

Ejemplo:

¿Qué niños modifican tanto la puerta 6 como la puerta 9?

* * *

Sabemos que el 1 modifica todas las puertas, que el 1 es divisor de todos los números, en particular de 6 y 9. Probando con todos los naturales hasta 6, vemos que el único que divide tanto a 6 como a 9 es el 3. ¿Por qué no hace falta ensayar con números mayores que 6?

* * *

De hecho, ¿hasta qué número hace falta ensayar para encontrar los números que dividen tanto a 6 como a 9? ¿Cuál es el número máximo de divisores que puede tener un natural dado?

* * *

Un resultado es que la cantidad de divisores de un natural dado n, sin contar ni a 1 y ni a n mismo, es siempre menor o igual que $n/2$. ¿Por qué?

* * *

Vimos entonces que los números que dividen a 6 y a 9 son 1 y 3. Se les llama divisores comunes de 6 y 9. ¿Cuáles son los divisores comunes de 12 y 24?

* * *

Notamos que 24 es múltiplo de 12, así que todo divisor de 12 es divisor de 24 (¿por qué?). Por otro lado, ningún número mayor que 12 puede ser divisor de 12, así que los divisores comunes de 12 y 24 son los divisores de 12.

* * *

Dada cualquier cantidad de números naturales, no necesariamente dos, podemos preguntarnos por sus divisores comunes. Por ejemplo, ¿cuáles son los divisores comunes de 12, 20 y 30?

* * *

Buscamos números que dividan a 12, a 20 y a 30, así que podemos fijarnos en los divisores del menor de ellos (en este caso 12) y ver cuáles de ellos dividen a los demás.

Como un número natural tiene una cantidad finita de divisores, la cantidad de divisores comunes de cualquier conjunto de números es finita. De hecho, vemos que la cantidad de divisores comunes de un conjunto dado de números no puede ser mayor que la cantidad de divisores de cualquiera de esos números, pues los divisores comunes los dividen a todos.

Supongamos que queremos encontrar los divisores comunes de 120, 312 y 432. Como puedes ver, si el tamaño de los números aumenta, se vuelve un tanto tedioso buscar por tanteo los divisores del menor y ver si dividen o no a los otros dos. Ya investigamos la relación que hay entre la descomposición en factores primos de un natural y sus divisores. ¿Nos podrá servir esto para aligerar el trabajo?

* * *

Vimos que todo divisor de un natural dado n es producto de algunos de los factores de la descomposición en primos de n. Entonces, si tomamos la descomposición en factores primos de n, tenemos como el "esqueleto" de todos sus divisores, pues cualquiera de ellos es producto de algunos de esos primos. Además, lo contrario también sucede: cualquier producto de algunos de los primos de la descomposición de *n* es divisor de *n*. ¿Por qué? Recuerda la importancia del número de veces que aparece un primo en la descomposición de un natural dado. ¿Cómo podemos usar esto para encontrar los divisores comunes de un conjunto de números?

* * *

Veamos, por ejemplo, lo que sucede con los números 120, 312 y 432. $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $312 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$ y $432 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^4$.

Los divisores de cada uno de esos números son productos de los primos de su descomposición. ¿Cuáles serán los divisores comunes, los que dividen a todos?

* * *

Los divisores comunes son los productos de los primos que están en la descomposición de todos. En este caso, todos los productos posibles usando de ninguna a tres veces al 2 y una o ninguna vez al 3. ¿Cuál es el mayor de ellos?

* * *

El mayor de los divisores comunes de un conjunto de números naturales, llamado **máximo común divisor** de esos naturales, es el producto de todos los primos compartidos por ellos. En el caso de 120, 312 y 432 es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24$. Entonces el máximo común divisor de dos o más naturales nos dice cómo es la parte de la descomposición en primos que todos ellos comparten. Es importante notar que esto nos proporciona un **método** para encontrar el máximo común divisor de un conjunto de naturales: descomponerlos en factores primos y considerar la parte del producto que es común a todos ellos. Al máximo común divisor de dos naturales n y m se le denota mcd(n,m). ¿Cuál es el mcd(15,25)? ¿Cuál es el último niño que modifica tanto a la puerta 15 como a la puerta 25?

* * *

¿Cuál es el mcd(12,24)? ¿Cuál es el mcd(30,48)? Busca otros ejemplos: toma parejas de naturales al azar y calcula su máximo común divisor a partir de sus descomposiciones en factores primos.

* * *

Lo que hicimos fue ver cómo son los divisores comunes a un conjunto de naturales, los números que los dividen a todos, y que siempre hay uno que es el mayor de todos. Entonces definimos máximo común divisor y vimos que el máximo común divisor de dos naturales corresponde a la parte de la descomposición en primos que comparten. Después notamos que esto nos proporciona un método para encontrarlos: descomponer en factores primos y observar qué factores son comunes a ambos.

20. Algoritmo de Euclides

Cuando los números son muy grandes, puede ser muy difícil encontrar el máximo común divisor de tan pocos como dos naturales descomponiéndolos en primos. Por ejemplo, ¿cuál es el mcd(1457,3901)? ¿Y el mcd(16027, 88877)? Entonces surge la necesidad de métodos para encontrar el máximo común divisor que sean menos tediosos que comparar sus descomposiciones en factores primos.

Hay un procedimiento muy ingenioso para obtener el máximo común divisor de dos naturales a y b conocido como **algoritmo de Euclides**. Surgió a partir del problema de encontrar una medida común para dos segmentos de longitudes dadas, es decir, un segmento que quepa una cantidad entera de veces en los dos que queremos medir.

La primera cuestión es si esto es siempre posible. Dado cualquier par de segmentos, ¿siempre habrá un tercero que quepa una cantidad entera de veces en ambos? La respuesta es un rotundo **no**. Sin ir más lejos, si la longitud de uno de los segmentos es un número irracional y la longitud del otro es 1, no hay ningún segmento que quepa una cantidad entera de veces en ambos.

Si las longitudes de los dos segmentos son números racionales, sí hay siempre un tercero con el que podemos medir a ambos. Al sumar fracciones hacemos exactamente eso: encontrar una tercera fracción que quepa un número entero de veces en las dos que originalmente queríamos sumar. 1/12 es la fracción mayor que cabe una cantidad entera de veces en 1/3 y 1/4, así que para sumar 2/3 + 5/4 tenemos que ver cuántos doceavos tenemos en total.

En este trabajo sólo consideraremos el caso en que las longitudes de los dos segmentos originales son números naturales. Si es así, es claro que el segmento de longitud 1 cabe una cantidad entera de veces en ambos (1 es divisor de cualquier natural). Lo que buscamos es encontrar el segmento de mayor longitud que cabe un número entero de veces en los dos que queremos medir, es decir, el número más grande que divide a ambas longitudes.

Por ejemplo, si nuestros segmentos miden 18 y 3, al repetir el segmento de longitud 3 seis veces vemos que no sobra nada: con el segmento de longitud 3 podemos medir al de longitud 18. Es claro que a cualquier segmento lo podemos medir con él mismo: cabe una vez. Entonces el segmento de longitud 3 es el más grande con el que podemos medir a los de longitudes 18 y 3.

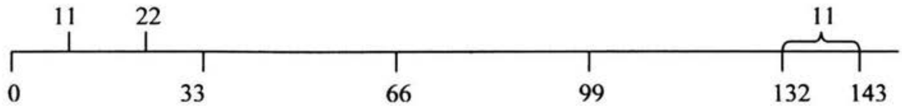
Sin embargo, no siempre es así. Si nuestros segmentos miden 33 y 143, ¿cuál será el segmento de mayor tamaño que quepa una cantidad entera de veces en los dos? Medimos 143 con 33, es decir, dividimos 143 entre 33:

$143 = (33 \cdot 4)+11$

Vemos que nos sobra 11. Entonces una regla de longitud 33 no nos sirve para medir a un segmento de longitud 143, pero ¿qué pasaría si el segmento de longitud 11 cupiera una cantidad entera de veces en el de longitud 33? Como 143 es cuatro veces 33 más 11, si el segmento de longitud 11 cupiera una cantidad entera de veces en el de longitud 33 también cabría un número entero de veces en 143. Entonces medimos 33 con 11:

$33 = (11 \cdot 3) + 0$

Entonces 11 sirve para medir tanto a 143 como a 33. ¿Cómo podemos asegurar que no hay ninguno más grande que también sirva? Como $143 = (33 \cdot 4) + 11$, cualquier longitud que quepa una cantidad entera de veces en 143 y en 33, también tiene que caber un número entero de veces en 11:



Así, podemos asegurar que 11 es el mayor natural que cabe una cantidad entera de veces tanto en 143 como en 33, es decir $11 = \text{mcd}(33,11) = \text{mcd}(143,33)$. Si encontramos los factores primos de ambos vemos que en efecto $143 = 11 \cdot 13$ y $33 = 11 \cdot 3$.

Al medir 18 con 3 vimos que cabe una cantidad entera de veces, así que 3 es el mayor segmento que cabe un número entero de veces tanto en 18 como en 3. Esto no sucede siempre: en el caso de 143 y 33, al medir 143 con 33 sobra 11. En ese caso 11 sirve para medir tanto a 143 como a 33, al dividir 143/33 sobró un residuo y ése fue la longitud que buscábamos; pero esto tampoco tiene por qué pasar. Veamos el caso de los números 1457 y 3901:

Primero medimos 3901 con 1457:

$3901 = (1457 \cdot 2) + 987$

Sobra 987. Como 3901 = (1457·2)+987, cualquier longitud que quepa una cantidad entera de veces en 3901 y en 1457, también tiene que caber un número entero de veces en 987. Entonces medimos 1457 con 987:

1457 = (987·1)+470

Sobra 470. Si 470 cabe una cantidad entera de veces en 987, es la mayor longitud que cabe un número entero de veces en 1457 y en 987, pues 1457 = (987·1)+470. Si es así, 470 también es la mayor longitud que cabe un número entero de veces en 3901 y 1457, pues cualquier longitud que quepa una cantidad entera de veces en 3901 y en 1457, también tiene que caber un número entero de veces en 987. Medimos 987 con 470:

987 = (470·2)+47

Sobra 47. Hacemos el mismo razonamiento: cualquier longitud que quepa una cantidad entera de veces en 987 y en 470, también tiene que caber un número entero de veces en 47, pues 987 = (470·2)+47. Además, cualquier longitud que quepa una cantidad entera de veces en 987 y en 470, también tiene que caber un número entero de veces en 1457, y cualquier longitud que quepa una cantidad entera de veces en 1457 y en 987, también tiene que caber un número entero de veces en 3901. Medimos entonces 470 con 47:

470 = (47·10)+0

No sobra nada, así que 47 es la mayor longitud con que podemos medir 470 y 47, así que es la mayor longitud con que podemos medir 3901 y 1457, es decir, mcd(3901,1457) = 47.

Para que sea más claro, veamos que:

$470 = (47 \cdot 10)+0$

$987 = (470 \cdot 2)+47 = [(47 \cdot 10) \cdot 2]+47 = (47 \cdot 20)+47 = 47 \cdot 21$

$1457 = (987 \cdot 1)+470 = [(47 \cdot 21) \cdot 1]+[47 \cdot 10] = 47 \cdot 31$

$3901 = (1457 \cdot 2)+987 = [(47 \cdot 31) \cdot 2]+[47 \cdot 21] = (47 \cdot 62)+(47 \cdot 21) = 47 \cdot 83$

Si los segmentos miden 88877 y 16027, tenemos:

$88877 = (16027 \cdot 5)+8742$

$16027 = (8742 \cdot 1)+7285$

$8742 = (7285 \cdot 1)+1457$

$7285 = (1457 \cdot 5)+0$

Así que mcd(88877,16027)=1457

Yéndonos "de regreso" vemos que:

$7285 = (1457 \cdot 5)+0$

$8742 = (7285 \cdot 1)+1457 = 1457 \cdot 6$

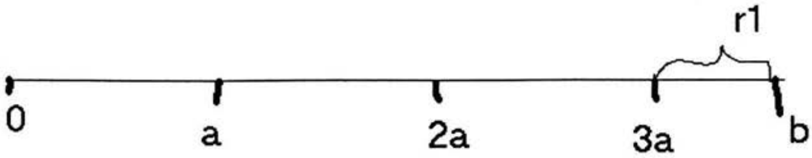
$16027 = (8742 \cdot 1)+7285 = 1457 \cdot 11$

$88877 = (16027 \cdot 5)+8742 = 1457 \cdot 61$

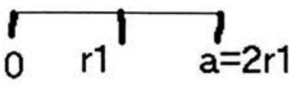
Para apreciar la utilidad del algoritmo, imaginémonos lo que nos podríamos haber tardado en encontrar la descomposición en factores primos de esos números probándolos en orden, mientras que con este procedimiento cuatro divisiones nos han permitido averiguar cuál es su máximo común divisor. El algoritmo resulta tan práctico porque reduce constantemente el valor de los números utilizados, muchas veces de manera drástica.

Tratemos ahora el caso general, para cualesquiera dos naturales. Supongamos que tenemos dos segmentos de longitudes a y b y que $b>a$. Medimos b con a. Si a cabe una cantidad entera de veces en b (si a es divisor de b), entonces a es el segmento de longitud mayor que cabe una cantidad entera de veces en a y en b (a es el máximo común divisor de a y b).

Si no es así, sobra un segmento de longitud r_1 que es más chico que los dos originales ($b=q_0 \cdot a+r_1$, con $0 \leq r_1<a$; ver 18). Entonces medimos el segmento de longitud a con un segmento de longitud r_1. Tanto a como r_1 son menores que b, así que estamos en la misma situación que al principio pero con números más pequeños. Si r_1 cupiera una cantidad entera de veces en a, también cabría una cantidad entera de veces en b. En lenguaje formal, si $a=q_1 \cdot r_1$, tenemos que $b=q_0(q_1 \cdot r_1)+r_1=r_1(q_0 q_1+1)$, así que b es múltiplo de r_1.

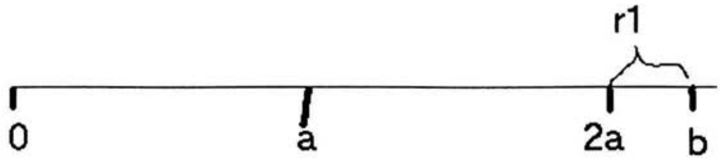


$b=7(r1)$

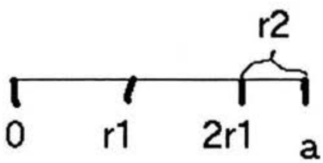


$a=2(r1)$

Si r_1 no cabe una cantidad entera de veces en a, sobra un segmento cuya longitud r_2 es menor que a y que r_1. Dejamos entonces de ocuparnos del segmento de longitud a y medimos el segmento de longitud r_1 con el segmento r_2 que acabamos de obtener. Si r_2 cabe un número entero de veces en r_1, también cabe una cantidad entera de veces en a, pues $a=q_1 \cdot r_1+r_2$ y entonces si $r_1=q_2 \cdot r_2$ tenemos que $a=q_1(q_2 \cdot r_2)+r_2=r_2(q_1 q_2+1)$. Según el párrafo anterior, como r_2 cabe un número entero de veces tanto en r_1 como en a, también cabe una cantidad entera de veces en b. Si seguimos así hasta que no nos sobre nada, el segmento de menor longitud que hayamos utilizado cabrá un número entero de veces en a y en b.

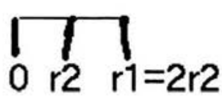


$b=12(r2)$



$a=5(r2)$

$r1=2(r2)$



Como *a* y *b* son naturales, el procedimiento siempre tiene fin, pues el segmento sobrante obtenido siempre es menor que los dos segmentos involucrados en la medición (ver 18), y sabemos que cuando menos hay un segmento de longitud entera con el que podemos medir *a* y *b*: el de longitud 1.

Por la forma en que lo encontramos, no sólo sabemos que el menor segmento utilizado (al que llamaré *d*) cabe tanto en *a* como en *b*, sino también que no puede haber un segmento que sea mayor que *d* y quepa una cantidad entera de veces en los segmentos *a* y *b*, pues cuando los medimos al principio sobró un segmento de longitud r_1, entonces cualquier segmento que quepa una cantidad entera de veces en *a* y en *b* tiene que caber también una cantidad entera de veces en r_1. Supongamos que en la segunda medición nos sobra un segmento r_2; en dicha medición se utilizaron los segmentos *a* y r_1, así que cualquier segmento que quepa en *a* y en *b*, como también cabe en r_1, tiene que caber una cantidad entera de veces en r_2. Si seguimos así llegamos a que cualquier segmento que quepa una cantidad entera de veces en *a* y en *b* tiene que caber también una cantidad entera de veces en *d*.

Hemos visto intuitivamente cómo funciona el algoritmo de Euclides, pero para establecer el resultado hay que hacer una **demostración**. La idea es la siguiente: supongamos que tenemos dos naturales distintos *a* y *b*, con $b \geq a$. Por el algoritmo de la división, hay números enteros *q* y *r* que cumplen $b = aq+r$, donde $0 \leq r < a$. Como $b \geq a$ y $a > r$, tenemos que $b > r$. Entonces aplicamos el algoritmo de la división varias veces de la siguiente manera:

$b = aq_0+r_1$, con $0 \leq r_1 < a$;

$a = r_1q_1+r_2$, con $0 \leq r_2 < r_1$;

$r_1 = r_2q_2+r_3$, con $0 \leq r_3 < r_2$;

....

$r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1}+r_k$, con $0 \leq r_k < r_{k-1}$;

$r_{k-1} = r_kq_k+0$

hasta que el residuo sea 0. Si r_k es el menor residuo mayor que 0, tenemos que:

$r_{k-1} = r_k q_k$, así que $r_k | r_{k-1}$,

$r_{k-2} = (r_{k-1} \cdot q_{k-1}) + r_k$, así que $r_k | r_{k-2}$, pues $r_k | r_{k-1}$,

$r_{k-3} = (r_{k-2} \cdot q_{k-2}) + r_{k-1}$, así que $r_k | r_{k-3}$, pues $r_k | r_{k-2}$ y $r_k | r_{k-1}$, etc.

Continuando de este modo, llegamos a que $r_k | a$ y $r_k | b$, así que r_k es divisor común de a y b.

Para ver que r_k es el mayor divisor común de a y b procedemos en el orden inverso: si m es el máximo común divisor de a y b, la ecuación $b = aq_0 + r_1$ implica que $m | r_1$, pues $m | a$ y $m | b$. Esto junto con la ecuación $a = r_1 q_1 + r_2$ implica que $m | r_2$. Si procedemos de esta manera llegamos a que $m | r_k$, así que $m = r_k$, pues sabemos que r_k es divisor y que m es el máximo común divisor.

Entonces podemos concluir que si comenzamos con dos naturales a, b y llevamos a cabo el procedimiento que se acaba de describir, el menor residuo mayor que 0 es el máximo común divisor de a y b.

21. Múltiplos comunes

Este tema también puede tratarse a varios niveles. Corresponde a "¿Qué puertas son modificadas por el niño tal y el niño cual?". Creo que es importante insistir en preguntar cuál es el mayor múltiplo común de dos o más naturales aunque ya se haya visto que no hay un múltiplo de un natural que sea el mayor. En el ejemplo que sigue se supone que se han visto el teorema fundamental de la aritmética y el concepto de máximo común divisor.

Ejemplo:

Dado un conjunto de naturales, podemos hablar de sus múltiplos comunes, de los números que son múltiplos de todos ellos. ¿Cuáles son? ¿Qué comparten todos?

* * *

¿Cómo es la descomposición en factores primos de cualquier múltiplo común de un conjunto de naturales? ¿Qué tiene que ver con las descomposiciones de esos números? Podemos empezar con unos ejemplos. ¿Cómo es la descomposición en factores primos de cualquier múltiplo común de 2 y 3? ¿Y de 12 y 16?

* * *

Entonces, ¿en qué se parecen las descomposiciones en factores primos de todos los múltiplos comunes de un conjunto dado de naturales? ¿Cuál es el menor?

* * *

Si un número *m* es múltiplo común de algunos naturales, quiere decir que todos esos naturales son divisores suyos. Entonces, ¿cómo es la descomposición en factores primos de esos números?

* * *

Vimos que la descomposición en factores primos de esos números es parte de la descomposición en factores primos de *m*. Así, un número *m* es múltiplo común de un conjunto de naturales si en su descomposición en factores primos están contenidas las descomposiciones de todos esos naturales. Otra vez, ¿cuál es el menor?

* * *

El más chico de los múltiplos comunes de un conjunto de naturales, llamado **mínimo común múltiplo**, es el menor número cuya descomposición en factores primos contiene a las descomposiciones de todos los naturales del conjunto. Al mínimo común múltiplo de dos naturales n y m se le denota $\mathrm{mcm}(n,m)$ ¿Cuál sería el mcm(8,12)?

* * *

Si hacemos $8 \cdot 12 = 96$, llegamos a un múltiplo común. ¿Es el más chico?

* * *

Veamos las descomposiciones en factores primos de esos números: $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$. ¿Cómo es el mínimo común múltiplo? ¿Cuántas veces tiene que multiplicarse al 2 y cuántas al 3?

* * *

El natural más chico que es múltiplo de 8 y de 12 es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24$. $24 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) = 2 \cdot 12$. ¿Cuál es el mcm(12,16)? ¿El mcm(12,30)? Busca otros ejemplos.

* * *

Consideremos ahora dos naturales cualesquiera, n y m. ¿Cómo se relacionan el mcm(n,m) y el mcd(n,m)? Vimos que la descomposición en factores primos del mcd(n,m) es la parte de la descomposición en factores primos que es igual en n y m. La descomposición en factores primos del mcm(n,m) es la mínima que incluye a las descomposiciones de n y de m. Como en el caso de 8 y 12, el mcm(n,m) puede ser más chico que $n \cdot m$. ¿Qué le falta para ser igual?

* * *

Veamos el caso de 42 y 63. $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$. ¿Cuál es el mcd(42,63)? ¿Cuál es el mcm(42,63)? ¿Qué le falta al mcm(42,63) para ser igual que $42 \cdot 63$?

* * *

Lo que le falta es la "repetición" de la parte de la descomposición en factores primos que comparten 42 y 64. Lo que le falta es entonces justamente el mcd(42,64). Así, tenemos que para cualesquiera naturales n y m, $n \cdot m = \text{mcm}(n,m) \cdot \text{mcd}(n,m)$.

* * *

Si n, m, k son naturales y conocemos el mcm(n,m) ¿qué podemos decir del mcm(kn,km)?

* * *

Vimos que la descomposición en factores primos del mcm(n,m) es la mínima que incluye a las descomposiciones de n y de m. La descomposición en factores primos de kn tiene a todos los factores de n y a todos los factores k. De la misma manera, la descomposición en factores primos de km tiene a todos los factores de m y a todos los factores k. Entonces la descomposición en factores primos del mcm(kn,km), la mínima que incluye a las descomposiciones de kn y de km, tiene a los primos de la descomposición de k y a los de la descomposición del mcm(n,m), así que mcm(kn,km) = k · mcm(n,m).

Consideremos un ejemplo concreto: sabemos que mcm(8,12) = 24. ¿Cómo será mcm(40,60)? Como 40 = 5 · 8 y 60 = 5 · 12, el factor 5 sólo aparece una vez en la descomposición de mcm(40,60). Los factores que faltan son los del mcm(8,12), así que mcm(40,60) = 5 · mcm(8,12) = 5 · 24 = 120.

Como mcm(20,30) = 60, mcm(140,210) = 420, pues 140 = 7 · 20 y 210 = 7 · 30.

Pensemos ahora en la relación que hay entre mcd(n,m) y mcd(kn,km). Sabemos que mcd(n,m) es el producto de los primos que están en las descomposiciones de n y de m. ¿Qué es entonces el mcd(kn,km)? Es el producto de los primos que están en las descomposiciones de kn y de km. Como la descomposición en factores primos de k está contenida en las de kn y km, tenemos que la descomposición en factores primos de k está contenida en la de mcd(kn,km). ¿Qué primos faltarán para completarla? Pues los que están en las descomposiciones tanto de n como de m, es decir, los factores primos de mcd(n,m). Entonces tenemos que mcd$(kn,km) = k \cdot$ mcd(n,m).

Como ejemplos tenemos que mcd(8,12) = 4, así que mcd(40,60) = 5 · mcd(8,12) = 5 · 4 = 20. De manera similar, como mcd(20,30) = 10, mcd(140,210) = 70, pues 140 = 7 · 20 y 210 = 7 · 30.

La manera en que procedimos fue la siguiente: primero vimos cómo son los múltiplos comunes de dos naturales dados y notamos que no hay uno que sea el mayor pero que siempre hay uno que es el menor. Definimos entonces mínimo común múltiplo. A partir de ahí y utilizando lo que sabíamos sobre divisores comunes y máximo común divisor, vimos de qué manera se relacionan el mcm y el mcd de dos números dados y cómo son el mcm(kn,km) en términos del mcm(n,m) y el mcd(kn,km) en términos del mcd(n,m).

22. Más sobre cantidad de divisores

Después de ver el teorema fundamental de la aritmética, puede verse con detalle cuántos y cómo son los divisores de cualquier natural. Si p es primo, p^n tiene $n+1$ divisores: p^0, p^1, p^2, ..., p^n. $8 = 2^3$; sus divisores son 1, 2, 4 y 8. $25 = 5^2$; sus divisores son 1, 5 y 25.

Si $q = p_1^{n1} \cdot p_2^{n2} \cdot ... \cdot p_r^{nr}$, donde los p_i son primos para $1 \leq i \leq r$, la cantidad total de sus divisores es $(n_1+1) \cdot (n_2+1) \cdot ... \cdot (n_r+1)$. Para ver este resultado, vemos las combinaciones posibles: si $q = p_1^{n1}$, estamos en el primer caso, que se sigue directamente del teorema fundamental de la aritmética. Si $q = p_1^{n1} \cdot p_2^{n2}$, los divisores de q son todas las combinaciones posibles de p_1^i y p_2^j, donde i varía de 0 a n_1 y j varía de 0 a n_2. Veamos cuántas son: de entrada, tenemos los n_1+1 divisores de p_1^{n1}; después tenemos los que son de la forma $p_1^i \cdot p_2$, donde i varía de 0 a n_1, lo que nos da otro lote de n_1+1 divisores. Luego consideramos los que son de la forma $p_1^i \cdot p_2^2$, que constituyen otro lote de n_1+1 divisores. Si seguimos así hasta llegar a los que son de la forma $p_1^i \cdot p_2^{n2}$, donde i varía de 0 a n_1, tenemos n_2+1 lotes de n_1+1 divisores cada uno, así que en total encontramos $(n_1+1) \cdot (n_2+1)$ naturales distintos que son todos divisores de q. Para asegurarnos de que hemos contado todos, consideremos un divisor cualquiera de q. Ese divisor es de la forma $p_1^i \cdot p_2^j$, donde i varía de 0 a n_1 y j varía de 0 a n_2. Dado un divisor $p_1^x \cdot p_2^y$, vemos que está en el lote número y, formado por los números de la forma $p_1^i \cdot p_2^y$, donde i varía de 0 a n_1, pues $0 < x < n_1$.

Para ver el resultado en general, veamos cómo aumentan los divisores de un número natural si lo multiplicamos por alguna potencia de un primo. Si un natural a tiene una cantidad k de divisores, ¿cuántos divisores tendrá $a \cdot p^m$, donde p es primo y m es natural? Los divisores de $a \cdot p^m$ son todas las combinaciones posibles de productos de divisores de a por divisores de p^m. Podemos contarlas como en el párrafo anterior: p^m tiene $m + 1$ divisores, que son las potencias de p desde p^0 hasta p^m; entonces tenemos $m + 1$ lotes de k divisores cada uno, resultado de multiplicar cada uno de los k divisores de a por los $m + 1$ divisores de p^m, es decir, $k \cdot (m + 1)$ divisores en total. De esta manera, si $q = p_1^{n1}$, q tiene n_1+1 divisores; si $q = p_1^{n1} \cdot p_2^{n2}$, entonces tiene $(n_1+1) \cdot (n_2+1)$ divisores, y seguimos así hasta concluir que si $q = p_1^{n1} \cdot p_2^{n2} \cdot \ldots \cdot p_r^{nr}$, donde los p_i son primos para $1 \leq i \leq r$, la cantidad total de sus divisores es $(n_1+1) \cdot (n_2+1) \cdot \ldots \cdot (n_r+1)$.

Consideremos a $12 = 2^2 \cdot 3$. Tenemos primero a los tres divisores de 2^2: 1, 2, 4, y también a los que resultan de multiplicar a cada uno de ellos por 3: 3, 6, 12. Entonces 12 tiene seis divisores, que son 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

23. Infinitos

A partir de "¿Cuál es la última puerta que toca el niño tal?" (si la calle sigue indefinidamente) o "¿Cuál es el mayor múltiplo de tal natural?" surge la idea del infinito. No es raro "Todos los niños tocan una cantidad infinita de puertas, pero el niño 1 toca el doble que el niño 2". Esto da pie para hablar de qué le pasa a un conjunto infinito si le sumamos o lo multiplicamos por una cantidad finita, de cardinalidad, de subconjuntos propios con la misma cardinalidad e incluso de probabilidad a nivel intuitivo, pues si yo escojo una puerta al azar, ¿qué tan probable es que la haya tocado el niño 7?

24. Congruencias

A partir del concepto de múltiplo aparece el de congruencia de manera muy natural, pues los múltiplos de un número natural n dividen a los enteros en

n grupos: los que al dividirse entre n dejan como residuo 0, los que al dividirse entre n dejan como residuo 1, los que al dividirse entre n dejan como residuo 2, etc., hasta llegar a los que al dividirse entre n dejan como residuo n-1.

El tema aparece en "casilleros" sólo si se profundiza mucho, pero hay que tomarlo en cuenta porque sí puede llegar a darse.

Definición: Dados tres números enteros a, b, c, decimos que ***a* es congruente con *b* módulo *c*** si $c|a-b$. Se escribe $a \equiv b \pmod{c}$. Se define congruencia de manera más natural para todos los enteros que sólo para naturales, pues así no hay que preocuparse de que a sea mayor que b. Además, cualquier múltiplo de c es congruente con 0 (mod c).

Utilizando el algoritmo de la división es fácil ver que si $c|a-b$ entonces a/c y b/c dejan el mismo residuo y viceversa: si a/c y b/c dejan el mismo residuo entonces $c|a-b$.

Si a/c y b/c dejan el mismo residuo, es decir si

$a=c \cdot q_1+r$ y $b=c \cdot q_2+r$

entonces

$$a-b = (c \cdot q_1+r)-(c \cdot q_2+r) = [(c \cdot q_1)-(c \cdot q_2)]+r-r = (c \cdot q_1)-(c \cdot q_2) = c \cdot (q_1-q_2),$$

que es múltiplo de c. De manera que $c|a-b$.

Para ver el resultado inverso podemos usar otra vez el algoritmo de la división. Suponemos que $c|a-b$, como

$a=c \cdot q_1+r_1$ y $b=c \cdot q_2+r_2$

tenemos que

$a\text{-}b = (c\cdot q_1+r_1)\text{-}(c\cdot q_2+r_2) = [(c\cdot q_1)\text{-}(c\cdot q_2)]+r_1\text{-}r_2 = (c\cdot q_1)\text{-}(c\cdot q_2)+r_1\text{-}r_2 = c\cdot(q_1\text{-}q_2)+r_1\text{-}r_2$,

como r_1 y r_2 son positivos y menores que c, entonces $r_1\text{-}r_2<c$, de manera que $a\text{-}b$ sólo puede ser múltiplo de c si $r_1\text{-}r_2 = 0$, es decir, si $r_1 = r_2$.

25. Generalización a los enteros. Conjuntos de números.

El taller sólo muestra lo que sucede con números naturales, pues no hay puerta 0 ni puertas negativas. La idea de divisibilidad tiene sentido para números enteros en general, pero hay muchos resultados que sólo se cumplen para naturales, como el teorema fundamental de la aritmética (2·3 = 6 = [-2]·[-3]). Por esta razón suele hacerse el análisis considerando sólo a los naturales. Sin embargo, hay algunos resultados que requieren que los números involucrados puedan valer 0, como el algoritmo de la división, que además se enuncia de manera más "natural" para enteros en general que para el conjunto cuyos elementos son 0 y los números naturales. Recomiendo tratar el tema restringiéndose a naturales y en algún momento generalizar y ver que muchos resultados se cumplen para cualesquiera números enteros.

Tratar el conjunto de los números enteros da pie a hablar de conjuntos de números en general. No es un tema que aparezca directamente a partir de la dinámica pero no surge con tanta dificultad.

26. Principios lógicos

Es importante recalcar conceptos como definición, conjetura y demostración, y hacer énfasis en cuándo un resultado está demostrado y cómo se demostró. Dependiendo del grupo, esto puede convenir desde cerca del principio hasta casi hasta al final, o incluso puede que no se llegue a hacer explícitamente.

En términos matemáticos, **definir** quiere decir nombrar. Si vamos a estar mencionando constantemente las "prendas de vestir de forma rectangular, mucho más largas que anchas, que se usan para cubrir al cuello del frío" es recomendable convenir en llamarlas "bufandas". Un ejemplo más relacionado con el tema es, digamos, "los números naturales que tienen exactamente dos divisores". Como son básicos para los temas de divisibilidad y se habla de ellos todo el tiempo, definimos: "Un número primo es un número natural que tiene exactamente dos divisores." A partir de ahí podemos referirnos a ellos con ese nombre ("primos") en lugar de dar toda la explicación cada vez que se mencionen.

Una **demostración** es algo (un razonamiento o a veces sólo una figura) que nos convence de manera definitiva de que algo se cumple y que nos permite convencer a otros de lo mismo.

Desde el punto de vista de la lógica formal, hay afirmaciones que consideramos verdaderas y llamamos **axiomas**, y hay reglas para construir resultados a partir de lo que tengamos: axiomas y resultados a los que ya se haya llegado. Un resultado demostrado es aquél al que puede llegarse a partir de los axiomas o de resultados ya demostrados usando las reglas.

En la práctica las cosas funcionan de otro modo. Pocas veces regresamos hasta los axiomas para probar que algo se cumple, sino que nos basamos en resultados ya existentes. Tampoco tenemos presentes explícitamente las reglas lógicas cuando las utilizamos. La intuición y la manera de descubrir los conceptos siguen a veces otros caminos, y en ocasiones eso mismo sirve ya como demostración. Entonces, ¿cuándo podemos afirmar que un resultado está demostrado y cuándo no? Básicamente hay que ver, directamente, si lo que estamos diciendo **implica** que el resultado es válido. Sé que suena confuso pero así es, y por eso ha habido casos (no tantos) de demostraciones aceptadas durante siglos a las que de repente alguien les encuentra un error.

A continuación menciono algunos esquemas típicos de demostración:

Para demostrar que algo **siempre se cumple** tenemos que representar la situación en general y ver el resultado. Por ejemplo, para ver que todo natural mayor que 1 puede descomponerse de manera única como un producto de primos tenemos que mostrar que sucede para **un natural cualquiera**.

Para demostrar que algo **no siempre se cumple** basta con exhibir un caso en el que no se cumpla, un **contraejemplo**. Si queremos ver que no todo número natural es primo, basta mostrar $4 = 2 \cdot 2$, que es natural y no es primo.

Para demostrar que algo **siempre se cumple** hay varios caminos, que resultan más o menos convenientes de acuerdo con la situación. Podemos considerar dos esquemas básicos. El primero y más natural es seguir un razonamiento que nos conduzca directamente al resultado general. Sin embargo, a veces no resulta tan fácil hacer una demostración **directa**. Entonces puede seguirse el esquema conocido como **contrapuesta** o **reducción al absurdo**, que consiste en suponer que **no** se cumple el resultado que queremos demostrar y mediante un razonamiento llegar a una contradicción. Así, si al suponer que el resultado **no** se cumple llegamos a una contradicción, el resultado **tiene que** ser verdad.

Cada uno de estos métodos generales puede aplicarse de varias maneras, pero no me extenderé aquí más. Sólo me gustaría mencionar las demostraciones "¡mira!", donde una figura (o un par) nos dejan convencidos del resultado. Por supuesto que hay un razonamiento, previo o automático (o generalmente ambos), que hace que quedemos convencidos, pero eso no disminuye ni un poquito la elegancia de una demostración así. Este tipo de demostraciones son más comunes en geometría, como cabría esperar, pero también se dan en otras ramas de la matemática. En el tema Números cuadrados (p 106) hay una demostración "¡mira!" de que la suma de los primeros n impares es n^2.

Para demostrar que dos afirmaciones son equivalentes tenemos que ver que una lleva necesariamente a la otra y la otra lleva necesariamente a la una. Esto se conoce como una demostración de **ida y vuelta**.

Una **conjetura** es algo que creemos que es cierto pero que no hemos demostrado, algo que se basa en la intuición o la observación, o generalmente en ambas, pero que no hemos visto que suceda siempre.

VII. APÉNDICE:

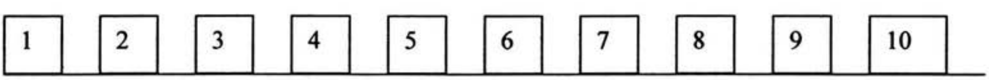
Transcripción textual de la sesión con el grupo 1°-A del Instituto Zumárraga

Considero importante incluir la transcripción textual de alguna sesión para que pueda verse cómo trabajé. Por otra parte, más de una resultaría demasiado repetitivo. Decidí que la experiencia en el Instituto Zumárraga era la adecuada porque puede considerarse una sesión "tipo" desde tres puntos de vista: para empezar, es la última de la primera fase, lo que la sitúa más o menos a la mitad del proceso; en segundo lugar, fue el único grupo de 1° de secundaria, de manera que los participantes eran menores que los de los otros grupos de nivel medio y medio superior pero mayores que los de primaria; además, los resultados obtenidos fueron también mejores que los de cualquier otro grupo de nivel medio o medio superior y no tan buenos como los de ninguno de los grupos de primaria.

TRANSCRIPCIÓN:

Yo: Éste es un tema de matemáticas, a ver qué tal.

Aquí hay una calle bordeada de casas y cada casa tiene su puerta. Entonces van pasando unos niños por la calle y lo que hacen los niños es que si se encuentran una puerta cerrada la abren y si la encuentran abierta la cierran. Nada más que los niños tienen números. El niño 1 va de una en una, el niño 2 va de dos en dos, el niño 3 va de tres en tres, el niño 4 va de cuatro en cuatro. Entonces vamos a ver primero qué sucedería con 10 niños y 10 puertas. Empezamos con todas las puertas cerradas. [las dibujo en el pizarrón y las marco con un tache para indicar que están cerradas] Entonces pasa el primer niño, el primer niño va de una en una, ¿qué es lo que hace el primer niño?



Todos: Abre todas. [borro los taches de todas las puertas]

Yo: Luego viene el segundo niño, que va de dos en dos, entonces ¿qué hace el segundo niño?

Todos: Cierra los pares.

Yo: Cierra los pares.[tacho las puertas numeradas con pares] Luego viene el tercer niño, el tercer niño ¿qué hace?

Varios: Va de tres en tres.

Yo: La 3 es la primera que toca ¿verdad?

Todos: Sí.

Yo: ¿Qué le hace?

Todos: La cierra. [sigo marcando en el pizarrón las puertas que se van abriendo o cerrando]

Yo: ¿Y luego?

Todos: La 6 la abre.

Yo: ¿Y luego?

Todos: La nueve la cierra.

Yo: Luego viene el niño #4, ¿qué hace?

Todos: Abre la 4.

Yo: ¿Y ya?

Todos: Abre la 8.

Yo: Luego viene el niño 5.

Todos: Cierra la 5, abre la 10.

Yo: Luego viene el niño 6.

Varios: Abre la 6.

Otros: La cierra.

Yo: La cierra. Luego el niño 7...

Todos: Cierra la 7.

Yo: El 8...

Todos: Cierra la 8.

Yo: El 9...

Todos: Abre la 9.

Yo: El 10...

Todos: Cierra la 10.

¿Qué puertas quedaron abiertas?

Todos: La 1, la 4, la 9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	C	A	C	C	C	C	A	C

Yo: Ahora vamos a suponer que tenemos 100 niños y 100 puertas.

La 1, la 10, la 11, la 12, y seguimos ¿no? [dibujo las puertas 11 y 12]

Entonces pasa el niño 1, las abre todas.

Pasa el niño 2, cierra todos los pares.

Pasa el niño 3... bueno, ya vamos en el 10. Éstas [la 11 y la 12] no sabemos cómo están, pero éstas [las primeras diez] ya estaban así. Ahora viene el niño 11, ¿cuál es la primera puerta que toca el niño 11?

Varios: La 11.

Yo: Luego el niño 12, ¿cuál es la primera puerta que toca el niño 12?

Todos: La 12.

Yo: Entonces después de que pasan 100 niños y 100 puertas, las primeras diez ¿cómo van a quedar? [silencio] ¿Ya no van a cambiar de como están?

Alguien: Sí.

Varios: No.

Yo: ¿Sí van a cambiar?

Todos: No.

Yo: ¿Por qué no?

Alguien: Porque son los mismos niños, digo, los mismos números.

Alguien: Porque ya no va a haber un niño con el mismo número.

Alguien: Ya no va a haber un niño 1, un niño 4, un niño 9.

Yo: Los niños tienen un número. Cada niño, el niño 17, ¿cuál es la primera puerta que toca?

Todos: La 17.

Yo: Entonces después de que pasó el niño 10, ya nadie va a tocar las primeras 10 puertas.

Todos: No.

Yo: Entonces esas puertas ya van a quedar igual.

Todos: Sí.

Yo: ¿Cuántos son? [en el grupo]

Todos: 40.

El maestro: Si quieres podemos hacer equipos de...

Yo: De cinco.

Entonces primero cuenten sus tarjetas.

Van a colocar 30 puertas y hacer que pasen 30 niños, a ver cómo quedan las puertas.

Las primeras 10 ¿cómo van a quedar?

Alguien: 1, 4, 9 abiertas, y las otras cerradas.

Yo: Las otras, ¿cómo creen que vayan a quedar?

Varios: 11, 14, 19, 21, 24, 29.

Yo: ¿Ésas cómo van a quedar?

Todos: Abiertas.

Yo: Abiertas, ¿y las demás cerradas?

Todos: Sí.

Yo: Bueno, Háganlo a ver qué tal. Las tarjetas tienen dos colores, cerrado y abierto, y van a ir volteándolas según pasen los niños. Tengan mucho cuidado porque es fácil confundirse, voltear una tarjeta que no es y así.

El maestro: A ver, ¿ya se acomodaron?

Yo: ¿Terminaron? [Había pasado una media hora. Algunos equipos habían terminado y habían hecho pasar a los niños en el orden inverso y después en un orden cualquiera; los equipos más lentos acababan de terminar de hacer pasar a los niños en orden creciente]

Vamos a ver, a ustedes ¿qué resultados les quedaron? ¿Cuáles quedaron abiertas?

El equipo: 1, 4, 9, 16, 25, 29, 30.

Yo: A ustedes ¿cuáles?

El equipo: 1, 4, 9, 16, 26, 27, 28.

Yo: A ver a ustedes.

El equipo: 1, 4, 9, 16, 25.

Yo: ¿Y a ustedes?

El equipo: Lo mismo.

Yo: ¿A ustedes?

El equipo: 1, 4, 9, 16, 21, 22, 25.

Yo: ¿A ustedes?

El equipo: 1, 4, 9, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 29.

Yo: ¿A ustedes?

El equipo: 1, 4, 9, 26, 30.

Yo: Todos hicieron el mismo ejercicio, ¿verdad?

Todos: Sí.

Yo: Entonces ¿qué opinan? ¿sí puede haber resultados diferentes?

Todos: No.

Yo: No, ¿verdad? Pero quedaron 6 distintos. Éste se repite [1, 4, 9, 16, 25], dos equipos lo tienen. Yo les recomendaría que lo volvieran a hacer con cuidado.

Un equipo: Nosotros también tenemos ese resultado. [1, 4, 9, 16, 25]

Yo: Bueno, a ver, ya cambió un poco la cosa porque 3 equipos tienen este resultado y 4 equipos tienen un resultado diferente. Y en los resultados diferentes, estos cuatro números [1, 4, 9, 16] siempre aparecen, menos en éste. Bueno, háganlo otra vez, con mucho cuidado.

Yo [después de un cuarto de hora]: ¿Ya terminaron todos de hacerlo otra vez?

Varios: No.

Yo: [5 minutos después] ¿Quiénes ya terminaron?

Todos: Ya.

[pregunto los resultados y 5 de 7 equipos tienen 1, 4, 9, 16, 25]

Yo: Bueno, varios equipos ya tenían esto y otros lo tienen ahora, así que podemos concluir que en efecto éstas son las que quedan abiertas. Es muy fácil confundirse en qué tarjetas voltea uno.

Bueno, varios equipos lo hicieron también al revés, o sea, el primer niño que pasa es el 30, después pasa el niño 29, después pasa el niño 28, luego pasa el niño 27, y así.

Cada niño hace lo mismo que hacía antes, es decir modificar las puertas que le tocan, o sea el niño 7 de 7 en 7, el niño 4 de 4 en 4... Si la encuentra abierta la cierra, si la encuentra cerrada la abre.

Cada niño hace lo mismo, pero el primero que pasa es el niño 30 y el último que pasa es el niño 1. Bueno, algunos ya lo hicieron. Los que no lo hicieron, ¿cómo creen que vaya a quedar al revés, si lo hacemos empezando con el niño 30? ¿No se les ocurre?

Algunos: Iguales.

Yo: ¿Por qué iguales?

Algunos: Los mismos niños abren las mismas puertas.

Yo: ¿Están de acuerdo con lo que dice su compañera?

Varios: Sí.

Yo: Además, algunos equipos ya hicieron la prueba y, en efecto, les quedó igual.

Bueno, si los niños pasan en desorden ¿qué va a pasar?

Algunos: Distinto.

Yo: ¿Cómo ven lo que dice su compañera, que si los niños pasan en desorden entonces sí va a quedar distinto?

Algunos: Sí.

Otros: No.

Alguien: No, porque los mismos niños van a modificar las mismas puertas.

Yo: ¿Cómo ven?

Varios: Sí. [se ponen a discutir]

Yo: A ver, a la puerta 6 ¿qué niños tocan la puerta 6?

Todos: El 1, el 2, el 3, el 6.

Alguien: El 18.

Yo: A ver, ¿el niño 18 toca la puerta 6?

Todos: No.

Yo: No ¿verdad? ¿El niño 6 toca la puerta 18?

Todos: Sí.

Yo: Entonces esos 4 niños tocan la puerta 6.

La puerta está cerrada ¿verdad? Si primero pasa el 3, la abre, luego pasa el 1, la cierra, luego pasa el 6 la abre, luego el 2 la cierra. ¿Cómo quedó?

Todos: Cerrada.

Yo: Y si pasan en orden, primero pasa el 1, la abre, luego el 2 la cierra, el 3 la abre, el 6 la cierra, ¿cómo quedó?

Todos: Cerrada.

Yo: Y si pasa primero el 6, la abre, el 3 la cierra, el 2 la abre, el 1 la cierra, ¿cómo quedó?

Todos: Igual.

Yo: Entonces, ¿Importa el orden en que pasan?

Todos: No.

Yo: ¿Qué es lo que importa?

Alguien: El número de los niños.

Yo: El número de los niños. A ver, para la puerta 6, esos niños, esos números, ¿qué son del 6?

Varios: Múltiplos.

Yo: ¿Múltiplos?

Varios: Sí.

Yo: A ver, ¿qué quiere decir múltiplo?

Alguien: Que se puede multiplicar por ese número.

Alguien: Que si se multiplica puede dar esa cantidad.

Yo: A ver, entonces, ¿18 es múltiplo de 6?

Algunos: No.

Algunos: Sí.

Yo: ¿Sí o no?

Casi todos: Sí.

Alguien: No.

Yo: ¿Por qué sí?

Varios: Porque 6 por 3 es 18.

Yo: Porque 6 por 3 es 18. ¿Y 6 es múltiplo de 18?

Algunos: Sí.

Yo: ¿Por qué?

Alguien: Porque 6 por 3 es 18.

Otros: No, no es.

Yo: ¿18 es múltiplo de 6?

Todos: Sí.

Yo: Entonces, ¿qué es 6 de 18?

Todos: Divisor.

Yo: Es muy fácil. A todos nos pasa: confundir múltiplo con divisor, porque son como lo mismo pero al revés.

Entonces estos números ¿qué son del 6?

Varios: Divisores.

Yo: Un múltiplo de este número es si voy multiplicando éste por distintos números naturales, bueno, o enteros, para el caso.

Aquí vamos a trabajar nada más con números naturales, que son la mitad de los enteros ¿verdad? [aquí me refiero a "mitad" en el sentido de "al lado derecho de 0", no a que sean la mitad en cantidad] Son los enteros positivos: el 1, el 2, el 3, el 4...

Un múltiplo de este número [señalo al 6 que está escrito en el pizarrón] es éste multiplicado por algún natural, ¿verdad? Y un divisor de este número, ¿cuál es?

Alguien: 2.

Yo: Por ejemplo.

Alguien: Es el resultado de un número del múltiplo.

Yo: ¿Cómo?

La misma: El 6 es el resultado de un múltiplo.

Yo: ¿Cómo ven?

Alguien: No.

Yo: ¿Entonces cómo sería?

El mismo: Sería al revés: que los divisores se multiplican para dar ese número.

Yo: Sí. Creo que ella quería decir más o menos lo mismo.

Un divisor de 6 es un número, por ejemplo en este caso 3, que multiplicado por alguien nos da 6. Si 3 es divisor de 6 entonces 6 es múltiplo de 3, ¿sí?

Varios: Sí.

Yo: Entonces, a la puerta 6, ¿quiénes la tocan?

Todos: 1, 2, 3, 6.

Yo: Bueno, a una puerta, la que sea, ¿quiénes la tocan? [silencio]

Alguien: ¿Perdón?

Yo: A una puerta, la que sea, ¿quiénes la tocan?

Todos: el 1.

Una niña: Sus divisores.

Yo: Sus divisores. ¿Cómo ven?

Varios: Sí.

Yo: Entonces, ¿de qué depende si una puerta queda abierta o queda cerrada?

Unos: De sus múltiplos.

Yo: ¿De sus múltiplos?

Otros: De sus divisores.

Yo: ¿De sus divisores?

Todos: Sí.

Yo: ¿De qué de sus divisores? ¿De cuáles son?

Varios: Sí.

Yo: Entonces, si el 2 es divisor, ¿cómo queda, abierta o cerrada? ¿O qué es lo que importa en realidad, cuáles son sus divisores?

Unos: Cuántos.

Yo: ¿Cuáles o cuántos? ¿O las dos?

Algunos: Las dos.

Otro: No, cuántos.

Yo: ¿Cuántos? ¿No importa cuáles sean?

El mismo: No, pero que sean sus divisores.

Yo: Sí, que sean divisores.

El mismo: El número, pues, es lo que importa.

Yo: El número de divisores. ¿Cuáles sean no importa?

Varios: No.

Yo: ¿Cómo ven? ¿Tú qué opinas?

Esa niña: Depende de que los divisores sean pares o nones.

Yo: ¿Los divisores pares o nones o la cantidad de divisores?

La misma: No, los divisores pares o nones.

Yo: A ver, este tiene 2 divisores nones y 2 divisores pares, ¿por eso queda cerrado?

La misma: Sí, porque si es uno par y uno non, uno queda cerrado y uno abierto.

Yo: ¿De los divisores?

La misma: Sí, por ejemplo, el 3. Si es non queda abierto, si es par queda cerrado.

Yo: Pero a ver, ¿cuáles son los divisores de 3?

Todos: 1 y 3.

Yo: Los dos son nones, ¿verdad?

Todos: Sí.

Yo: ¿Y cómo va a quedar?

Varios: Abierto.

Yo: ¿Abierto?

Varios: No, cerrado.

Todos: Sí, cerrado.

Alguien: No importa si son nones o pares, es el número lo que importa. Por ejemplo, si son 5 queda abierto.

Yo: Entonces, ¿si tiene que ver con nones y pares o no?

Varios: No.

Yo: O sea, no importa si el divisor es non o par.

Todos: No.

Yo: Entonces ¿qué importa?

Varios: El número.

Yo: Cuántos son. Pero, ¿qué importa del número de divisores, si son muchos o pocos?

La misma de hace poquito: Es que retomando lo que dije: por ejemplo el 3, si tiene dos nones, dos veces se abre, y si tiene dos pares, dos veces se cierra. Y si empezamos con que se abre, va a acabar con que se cierra, porque es uno sí y uno no, uno sí y uno no.

Yo: Pero, ¿cómo dos veces se abre? El 1 la abre y el 3 la cierra.

La misma: Si es non, se abre; si es par, se cierra.

Alguien: El 3 no tiene par.

Yo: Por eso no se va a abrir dos veces, porque el 1 la abrió una vez, entonces el 3 se la encuentra abierta y la cierra.

Alguien: Yo creo que también importa el número de puertas, porque si son 30 números pero muy pocas puertas, no va a quedar bien.

Yo: Ah, eso sí, siempre son el mismo número de niños que de puertas. Podemos jugar con un millón de puertas, pero entonces hay un millón de niños; podemos jugar con 5 puertas, pero entonces hay 5 niños. Si son 30 puertas y menos niños, entonces va a quedar diferente.

¿Es cierto que si son 30 puertas pero son menos niños va a quedar diferente?

Todos: Sí.

Yo: Sí, ¿verdad? Si son 30 puertas y nada más un niño, pues todas van a quedar abiertas ¿no?

Lo que dice su compañero es cierto, pero como funciona el juego es siempre con el mismo número de niños que de puertas.

Entonces ¿qué es lo que importa?

Alguien: El número de divisores.

Yo: Cuáles son ¿no importa?,

Algunos: No.

Yo: No importa cuáles sean, importa cuántos sean. Entonces si son muchos, ¿cómo quedan?

¿O no importa que sean muchos o pocos?

Alguien: No, no importa.

Yo: Entonces ¿qué es lo que importa?

Vamos a ver. El 3 ¿cuántos divisores tiene?

Varios: Dos.

Yo: ¿Y cómo quedó?

Varios: Cerrada.

Yo: Vamos a ver el 24, ¿cuáles son los divisores de 24?

Todos: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. [los escribo]

Yo: ¿El 1 de quiénes es divisor?

Todos: De todos.

Alguien: Por ejemplo del 6 son cuatro divisores y entonces se cierra, y el 3 tiene dos divisores, entonces se cierra.

Yo: Entonces ¿qué importa?

El mismo: El par o non.

Yo: ¿Si los divisores son pares o nones o el número de divisores?

El mismo: El número de divisores.

Yo: ¿Cómo ven?

Todos: Sí.

Yo: ¿Y no importa si son muchos o pocos?

Todos: No.

Yo: ¿No tiene nada que ver?

Todos: No.

Yo: ¿Seguros?

Todos: Seguros.

Yo: Entonces sí importa si la cantidad de divisores es par o non.

Todos: Sí.

Yo: ¿Están todos de acuerdo?

Todos: Sí.

Yo: Sí ¿verdad?, porque el primer divisor es el 1, la abre, el segundo la cierra, el tercero la abre, el cuarto la cierra, el quinto, el sexto...

Entonces las que quedan abiertas son las que tienen una cantidad non de divisores. Muy bien. Y ¿qué números tienen una cantidad non de divisores?

Alguien: ¿Qué, perdón?

Yo: Non es lo mismo que impar. Entonces las puertas que quedan abiertas son aquéllas que tienen un número impar de divisores, ¿sí?

Todos: Sí.

Yo: Entonces, ¿qué números tienen una cantidad impar de divisores?

Alguien: Los que quedaron abiertos: 1, 4, 9, 16 y 25.

Yo: Del 1 al 30, pero ¿del 1 al 1000? Podemos jugar con 1000 tarjetas. Lo que nos tardamos en sacar el resultado bien con 30 tarjetas... con 1000 se va a poner divertido.

¿Cómo podemos saber, en general, cómo son los números que tienen una cantidad impar de divisores? [silencio]

A ver, mírenlos, ¿no les ven nada en particular?

Alguien: ¿Que son números primos?

Yo: ¿Son primos?

Todos: No.

Yo: A ver, ¿qué es un número primo?

Alguien: Que se divide entre uno y entre sí mismo. [lo escribo en el pizarrón]

Yo: ¿Qué opinan de la definición que dio su compañero?

Algunos: No, está mal.

Yo: A ver, ¿hay algún número que no se divida entre 1?

Varios: No.

Yo: Todos, ¿verdad?. Todos se dividen entre 1. ¿Hay algún número que no se divida entre sí mismo?

Varios: No.

Yo: Todos se pueden dividir entre sí mismos. Entonces serían todos los números.

Alguien: ¿Los que tienen 2 divisores distintos?

Yo: ¿Los que tienen 2 divisores distintos?

El mismo: ¿Los que al dividirlos sacan 2 resultados distintos?

Yo: ¿Cómo, cómo? [discusión]

Yo: A ver, aquí alguien dijo algo. ¿Tú qué dijiste?

Esa niña: Los que nada más tienen dos divisores.

Yo: ¿Los que nada más tienen dos divisores?

Alguien: No sería posible, porque si se dividen entre 2 tendrían más de 2 divisores.

Yo: A ver. ¿El 2 es primo o no es primo? ¿Cuál es la definición de primo? Que tiene exactamente dos divisores distintos. ¿Cómo ven esta definición? ¿Estará bien?

Alguien: Sí.

Varios: No.

Yo: ¿Por qué está mal?

Alguien: Porque el 9 tiene más de dos divisores.

Yo: ¿Y es primo?

El mismo: Este...no.

Yo: ¿Y entonces?

Alguien: No, sí está bien la definición.

Algunos: Sí, sí está bien.

Alguien: Yo pienso que ninguna está peleada con la otra porque la segunda dice que tiene exactamente dos divisores distintos y la primera ["que se divide entre 1 y entre sí mismo"] dice cuáles son.

Yo: Está bien, le falta el "sólo". Todos los enteros se dividen entre 1 y entre sí mismos. Primos son los que sólo se dividen entre 1 y entre sí mismos. Bueno, es lo mismo que decir que tiene exactamente dos divisores distintos. Bueno, es casi lo mismo. A ver, el 1 ¿es primo?

Todos: No.

Yo: ¿Por qué no?

Todos: Porque no tiene dos divisores.

Yo: ¿Cuántos tiene?

Todos: Uno.

Yo: A ver, ¿se divide entre 1?

Todos: Sí.

Yo: ¿Se divide entre sí mismo?

Todos: Sí.

Yo: Entonces el 1 no es primo porque no tiene dos divisores, pero sí cumple con esto [señalo la primera definición], sólo que el 1 y sí mismo son el mismo. Entonces quedaría: "Un número es primo si sólo se divide entre 1 y entre sí mismo y es distinto de 1". Yo por eso prefiero esta definición ["Un número es primo si tiene exactamente dos divisores"].

Alguien: Pero tampoco se toma como compuesto.

Yo: No, se le dice unitario, es el único número que tiene un solo divisor.

Entonces, los números primos ¿cómo quedan, abiertos o cerrados?

Algunos: Abiertos.

Otros: Cerrados.

Otros: No importa que sean primos.

Yo: ¿No importa que sean primos? ¿Cuántos divisores tiene un número primo?

Todos: Dos.

Yo: Entonces ¿cómo queda?

Alguien: Cerrado.

Yo: Los que tienen una cantidad par de divisores, ¿cómo quedan?

Todos: Cerrados.

Yo: Entonces, los números primos, ¿cómo quedan?

Todos: Cerrados.

Yo: Entonces, ¿éstos son primos? [señalo los que quedaron abiertos]

Todos: No.

Yo: No, ¿verdad?, quedaron abiertos, tienen una cantidad impar de divisores. Entonces, ¿quiénes son los que tienen una cantidad impar de divisores? ¿Los compuestos?

Varios: No.

Yo: ¿Hay compuestos que tengan una cantidad par de divisores?

Varios: Sí.

Yo: ¿Por ejemplo?

Varios: El 24.

Yo: ¿Y el 25 tiene una cantidad par de divisores?

Varios: No.

Yo: Entonces, ¿cuáles son los números que tienen una cantidad impar de divisores?

Alguien: Los que son números primos.

Yo: Los primos tienen una cantidad par de divisores ¿no?

El mismo: Ah, sí, es al revés.

Yo: Vamos a ver los divisores del 24. [ya teníamos en el pizarrón 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24] ¿Cuántos son?

Todos: Ocho.

Yo: ¿Cómo queda?

Varios: Cerrado.

Yo: A ver, si yo divido 24 entre 3 ¿cuánto queda?

Varios: 6.

Yo: ¿Queda 6?

Todos: No, queda 8.

Yo: Y resulta que 8 también es divisor, ¿verdad?.

Varios: Sí.

Yo: ¿Si divido 24 entre 4?

Varios: 6

Yo: Y 6 también es divisor. ¿Si divido 24 entre 2?

Varios: 12,

Yo: Y 12 también es divisor. ¿Si divido 24 entre 1?

Varios: 24.

Yo: Que también es divisor. ¿Siempre pasa eso: si yo divido un número entre uno de sus divisores, el resultado siempre va a ser otro de sus divisores?

Casi todos: Sí.

Yo: ¿Por qué? ¿Qué quiere decir que sea divisor?

Algunos: Que se puede dividir entre el número.

Yo: Que se puede dividir entre el número y no sobre nada ¿no? Queda exacto.

Varios: Sí.

Si yo tengo: "a es divisor de x" (¿les molesta esto, que ponga números con letritas?) ¿eso qué quiere decir? Que existe un número b, un número entero b, tal que b por a es x. [escribo "a es divisor de x" y "$b \cdot a = x$"]

Pero bueno, la multiplicación es conmutativa, ¿verdad?

Todos: Sí.

Yo: Entonces b por a es lo mismo que a por b. [escribo "$b \cdot a = a \cdot b = x$"]

Todos: Sí.

Yo: Bueno, entonces quiere decir que *b* es divisor de *x*.

Todos: Sí.

Yo: Porque existe un número *a* tal que *a* por *b* es *x*.

Todos: Sí.

Yo: Entonces, siempre que yo tengo un número y lo divido entre uno de sus divisores ¿qué me queda?

Alguien: Otro divisor.

Yo: Entonces podemos acomodar los divisores por parejas.

Si yo divido 24 entre 3 ¿qué va a quedar?

Todos: 8.

Yo: Entonces puedo relacionar el 3 con el 8, porque si divido 24 entre 8 ¿qué va a quedar?

Todos: 3.

Yo: 3 ¿verdad? Es lo mismo. Así tenemos que *a* por *b* es lo mismo que *b* por *a*, o si queremos 3 por 8 es lo mismo que 8 por 3, que es 24.

El resultado de una división es único, ¿están de acuerdo?

Todos: Sí.

Yo: Si yo parto un pastel en un determinado número de pedazos, el tamaño del pedazo no puede cambiar. Bueno, a la hora del pastel sí ¿verdad?, si yo parto un pedazo más chiquito.

Entonces puedo relacionar estos dos divisores así. [trazo una línea que une a 3 con 8] El 2, ¿con quién lo relaciono?

Alguien: Con el 4.

Varios: Con el 12.

Yo: ¿Por qué el 4? ¿Y por qué el 12?

Alguien: Porque 24 entre 2 me queda 12.

Yo: ¿Cómo ven?

Todos: Sí.

Yo: Así es como estamos estableciendo la relación. Si yo tengo que a por b es x, entonces respecto a x, o sea respecto al 24, a lo relaciono con b, porque cuando yo divido x entre uno de ésos me queda el otro. ¿Sí están de acuerdo?

Todos: Sí.

Yo: Entonces el 2, ¿con quién lo relaciono?

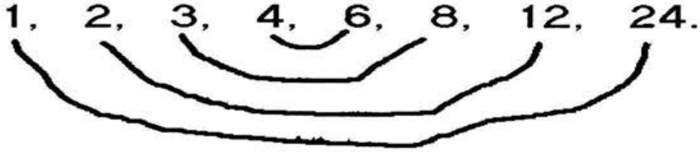
Todos: Con el 12.

Yo: Sí, porque si divido 24 entre 12, queda 2, y si divido 24 entre 2, queda 12. El 1, ¿con quién lo relaciono?

Todos: Con 24.

Yo: ¿Y el 4?

Todos: Con 6. [uno los divisores de 24 que están escritos en el pizarrón por parejas de la siguiente manera:



Yo: Y si yo tomo cualquier número, ¿cuál les gusta?, el 60, ¿voy a poder relacionar sus divisores?

Varios: Sí.

Yo: ¿Seguros?

Todos: Sí.

Yo: A ver, ¿hacemos la prueba con 60 o ya no hace falta?

Varios: Sí.

Yo: A ver, divisores de 60.

[por tanteo encuentran que son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Los escribo en el pizarrón en orden creciente]

A ver, al 4 ¿con quién lo voy a relacionar?

Alguien: Con el 15. [los uno con una línea como en el caso anterior]

Yo: ¿Y al 2?

Todos: Con el 30. [también los conecto y así sigo con todas las parejas]

Yo: ¿Y al 5?

Todos: Con el 12.

Yo: ¿Y al 3?

Todos: Con el 20

Yo: ¿Y al 1?

Todos: Con el 60

Yo: ¿Y al 6?

Todos: Con el 10.

Yo: Bueno, ya se vio. Ahora, ¿qué pasa con un número que tiene un número impar de divisores? ¿Cómo los voy a relacionar por parejas? Vamos a ver, el 16, ¿cuáles son los divisores del 16?

Todos: 1, 2, 4, 8, 16. [los escribo en el pizarrón en orden creciente y los voy uniendo por parejas conforme me las van diciendo, como hice con los divisores de 24 y 60]

Yo: Entonces, al 1 ¿con quién lo voy a relacionar?

Todos: El 16.

Yo: ¿Al 2?

Todos: Con el 8.

Yo: ¿Al 4?

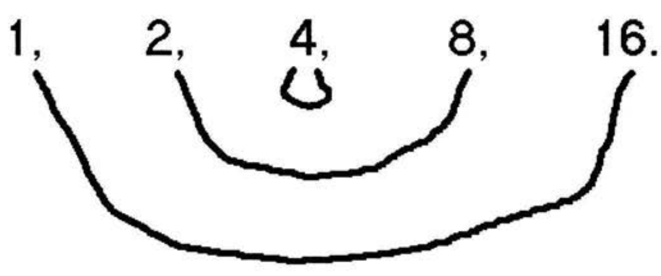
Todos: Con el 4, pero es el mismo número.

Yo: ¿Por qué con el 4?

Todos: Porque 4 por 4 da 16.

Yo: ¿Cómo ven?

Todos: Sí.



Yo: Si tomamos otro, el 25 por ejemplo, ¿cuáles son los divisores de 25?

Todos: El 1, el 5, el 25. [también los escribo en el pizarrón en orden creciente y los voy uniendo por parejas conforme me los van diciendo]

Yo: ¿Y ya?

Todos: Sí.

Yo: Entonces al 1, ¿con quién lo relaciono?

Todos: Con el 25.

Yo: ¿Y al 5?

Todos: Con el 5.

Yo: 5 por 5 es 25 ¿verdad?

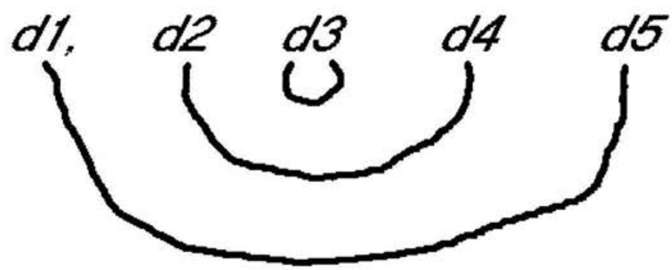
Todos: Sí.

Yo: Entonces, si yo tengo un número *a* y tengo sus divisores, les voy a llamar d_1, d_2, d_3, ¿sí? [escribo en el pizarrón "divisores de *a*: d_1, d_2, d_3,..."]

Todos: Sí.

Yo: Y yo los voy relacionando. Y aquí hay uno que se queda solito. ¿A fuerzas se relaciona con sí mismo, o no?

[en el pizarrón está el siguiente dibujo]



Todos: Sí.

Yo: Entonces ¿todo número que tenga una cantidad impar de divisores va a cumplir eso: que el que queda en medio se va a relacionar con él mismo?

Todos: Sí.

Yo: ¿A fuerzas se tiene que relacionar con alguien?

Varios: No.

Yo: Si yo les digo el 16, 16 entre 4...

Varios: Ah, sí, sí.

Yo: ...me tiene que quedar algo ¿verdad?

Todos: Sí.

Yo: Y eso que queda ¿tiene que ser divisor?

Todos: Sí.

Yo: Entonces sí se tiene que relacionar con alguien. Si ya no le queda nadie, se tiene que relacionar con él mismo, ¿sí?

Varios: Sí.

Yo: En este caso *a* sería d_3 por d_3. [señalo el dibujo del pizarrón]

Yo: Entonces ¿qué números...? A ver, el 4 se relaciona consigo mismo respecto al 16 ¿verdad?

Todos: Sí.

Yo: 25 es...

Varios: 5 por 5

Yo: Entonces ¿qué cumplen todos los números que tienen una cantidad impar de divisores?

Alguien: Que su resultado va a ser un divisor de 16.

Yo: En el caso del 16, pero en cualquier caso en que los divisores sean una cantidad impar, ¿cuál va a ser ese divisor tan particular que nos va a quedar?

Alguien: Él mismo.

Yo: Él mismo. Entonces, ¿qué quiere decir? Que hay un número que multiplicado por él mismo nos da éste, ¿verdad? ¿Eso pasa siempre?

Alguien: Bueno, que cuando los divisores son un número impar, entonces el de en medio se relaciona consigo mismo, o sea que él por él nos da este número.

Yo: ¿Eso pasa con todos? [los naturales]

Varios: No.

Yo: ¿No?

Otros: Sí.

Yo: ¿Por qué dices que sí?

Ese niño: Porque usted dijo que un número multiplicado por otro da ése, por sí mismo.

Yo: Por él mismo.

Alguien: Cuando es impar el número de divisores, el de en medio, como no se relaciona con ninguno, multiplicado por él mismo da ese número.

Yo: Pero en otros números, por ejemplo éste [escribo 48], que tiene una cantidad par de divisores, ¿no hay un número que multiplicado por sí mismo dé éste?

Algunos: Sí.

Otros: No.

Yo: No hay un número entero ¿verdad? Sí hay un número ¿no?

Conocen este signo ¿verdad? [escribo $\sqrt{48}$] ¿Conocen este símbolo?

Todos: Sí.

Yo: La raíz cuadrada de 48. Es justo lo que quiere decir: la raíz cuadrada de 48, si la multiplico por la raíz cuadrada de 48, da justamente 48. [escribo $\sqrt{48}\cdot\sqrt{48}=48$] Es lo que quiere decir esto. Pero quién sabe cuánto valga este número [señalo$\sqrt{48}$]. No es un número entero.

Entonces si tiene una cantidad impar de divisores ¿qué pasa?

Alguien: Que se tiene que hacer una potencia.

Yo: ¿Una potencia?

El mismo: Por el número que no es relacionado con otro.

Yo: Pero ¿qué potencia?

El mismo: Al cuadrado.

Yo: ¿Cómo ven lo que dice él?

Varios: Sí.

Yo: Si un número tiene una cantidad impar de divisores, entonces hay un número entero, en particular el divisor que queda aquí en medio [acomodados en orden creciente], que multiplicado por sí mismo nos da éste, o sea la raíz cuadrada de este número es entero, ¿si?

Varios: Sí.

Yo: La raíz cuadrada de 16 es 4 ¿sí?

Varios: Sí.

Siempre que pase esto, que la raíz cuadrada de un número sea entero, ¿puedo saber que tiene una cantidad impar de divisores?

Algunos: Sí.

Yo: ¿Por qué?

Alguien: Porque ya sacamos la raíz cuadrada.

Algunos: No.

Yo: Sacamos la raíz cuadrada y me queda un número entero, y ¿ya con eso yo puedo asegurar que el número de divisores es impar?

Varios: No.

Yo: ¿Porque este número que es raíz cuadrada es divisor de aquél?

Varios: Sí.

Yo: Sí ¿no? Entonces a la hora en que yo acomodo los divisores por parejas... ¿siempre los puedo acomodar por parejas?

Todos: Sí.

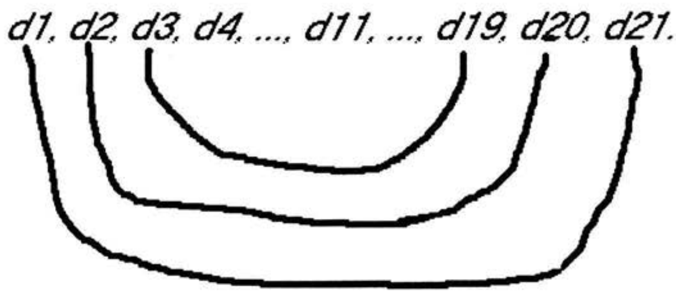
Yo: A la hora en que yo acomodo los divisores por parejas, ¿va a quedar uno en medio o no?

Varios: A veces.

Yo: ¿A veces? O sea, sí puede ser que yo tenga $d_1, \ldots, d_n$. [escribo $d_1, \ldots, d_n$] Los voy relacionando [los uno por parejas]. Éste [señalo el de enmedio] ¿con quién se relaciona? [silencio]

Yo: Supongamos que los divisores de un número son de 1, de 2, de 3, de 4, de 20, de 21 [escribo $d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots, d_{11}, \ldots, d_{20}, d_{21}$]

Relaciono el primero con el último, éste con el que siga para atrás, éste [d_{11}] ¿con quién lo voy a relacionar?



Varios: Con sí mismo.

Yo: Sí, a fuerzas se relaciona consigo mismo, porque éste por éste nos da el número a. [$d_{11} \cdot d_{11} = a$]

Entonces, el que sigue aquí juntito de éste, ¿con quién se va a relacionar?

Algunos: Con el que sigue para acá.

Yo: ¿Y qué va a pasar con éste [d_{11}]?

Alguien: Se va a hacer una potencia al cuadrado.

Yo: Al cuadrado para dar éste [a]. Entonces, ¿queda solito o no?

Varios: Sí.

Yo: La cantidad de divisores ¿es impar o no?

Varios: Sí.

Yo: Entonces el primer resultado que vemos es ése: los números que tienen una cantidad impar de divisores son los que se llaman cuadrados perfectos. Los números cuya raíz cuadrada es un número entero también.

Entonces ¿cuántos cuadrados perfectos hay entre 1 y 30?

Alguien: Cinco.

Yo: ¿Y cuántos cuadrados perfectos hay entre 1 y 100?

El mismo: Veinte.

Yo: ¿Sí?

Alguien: Sí.

Otro: No.

Yo: ¿Por qué 20?

Alguien: No, hay 10.

Alguien: No, hay 20.

Yo: ¿Por qué 20? ¿Por qué 10?

Alguien: Porque es la cantidad de divisores que se necesita para la cantidad de puertas.

Yo: ¿Cómo?

El mismo: Sí, porque había 5 antes, y esa cantidad se hace 4 veces más grande.

Yo: Entonces ¿cuánto sale?

El mismo: Se multiplican los divisores por 4.

Yo: Entonces ¿cuántas puertas hay abiertas?

Varios: Veinte.

Yo: ¿Seguros? ¿Qué opinan los demás?

Varios: Sí.

Yo: Sí ¿no? Si en las primeras 30 hay 5 en las primeras 100 hay 20, por lógica.

Varios: Sí.

Yo: ¿Seguros?

Varios: Sí.

Yo: A ver, ¿cuál es la raíz cuadrada de 100?

Varios: 10.

Yo: Entonces, ¿cuántas puertas quedan abiertas del 1 hasta el 100?

Varios: 10.

Yo: ¿Cuáles?

Todos: 1, 4...

Yo: Que es lo mismo que 2 al cuadrado, ¿verdad? [en el pizarrón escribo $1=1^2$, $4=2^2$ uno debajo del otro]

Todos: 9.

Yo: La 9, y 9 es lo mismo que...

Algunos: 3 al cuadrado.

Otros: 3 al cubo.

Yo: ¿9 es 3 al cubo o 3 al cuadrado?

Casi todos: 3 al cuadrado.

Yo: ¿Qué quiere decir al cuadrado? Que se multiplica por sí mismo cuántas veces?

Casi todos: 2.

Yo: Y entonces 3 al cubo ¿cuánto sería?

Alguien: Serían 27.

Yo: ¿Por qué?

Otro: Porque 3 por 3 es 9 y 9 por 3 es 27.

Yo: Entonces, al cubo ¿qué quiere decir? Que el 3 se multiplica por sí mismo ¿cuántas veces?

Casi todos: 3 veces.

Yo: Y si yo tengo 3 a la *n*, ¿qué quiere decir?

Casi todos [después de unos segundos]: ¿A la qué?

Yo: A la *n*, cualquier número.

Casi todos: Ah.

Alguien: Como 3 a la 4.

Yo: 3 a la 4 ¿qué quiere decir?

Casi todos: 3 multiplicado 4 veces.

Yo: 3 por 3 por 3 por 3, 4 veces. 3 a la *n*, en general, ¿qué quiere decir?

Algunos: Por cualquier número.

Yo: Es 3 por 3 por 3 por 3... *n* veces.

Entonces, 9 ¿qué es: 3 al cuadrado o 3 al cubo?

Casi todos: 3 al cuadrado. [escribo $9=3^2$ debajo de los otros]

Yo: 16 ¿qué es?

Casi todos: 4 al cuadrado. [escribo $16=4^2$ debajo de los otros y continúo así con los demás]

Yo: ¿Y 25?

Casi todos: 5 al cuadrado.

Yo: ¿36?

Casi todos: 6 al cuadrado. [escribo 49=...]

Casi todos: 7 al cuadrado. [escribo 64=...]

Casi todos: 8 al cuadrado. [escribo 81=...]

Casi todos: 9 al cuadrado. [escribo 100=...]

Casi todos: 10 al cuadrado.

Yo: Muy bien, si tenemos 10,000 puertas y 10,000 niños, una vez que han pasado todos los niños, ¿cuántas puertas quedan abiertas?

Casi todos: 100.

Yo: ¿Por qué 100?

Alguien: Porque 100 al cuadrado es 1000.

Yo: ¿100 al cuadrado es 1000?

Algunos: Sí.

Otros: No, no, no.

Alguien: Un millón.

Yo: ¿100 al cuadrado es 1000,000? ¿Qué quiere decir 100 al cuadrado?

Casi todos: 100 por 100.

Yo: ¿Y cuánto es 100 por 100?

Algunos: 1000.

Yo: ¿100 por 100 es 1000?

Otros: No, 10,000.

Yo: Sí, 10,000. Entonces ¿cuántas puertas quedan abiertas de las 10,000?

Casi todos: 100.

Yo: ¿Por qué 100?

Alguien: Porque 100 por 100 da 10,000.

Yo: Y supongamos que tenemos 56,782 puertas y 56,782 niños, luego que pasan todos ¿cuántas puertas quedan abiertas?

Alguien: Quién sabe.

Yo: Claro, quién sabe, pero ¿cómo harían para saberlo?

Alguien: Nos ponemos a ver sus divisores.

Yo: ¿Los divisores o la raíz cuadrada?

Varios: Sí, eso, la raíz cuadrada.

Yo: Sacamos la raíz cuadrada. Vamos a suponer que nos queda... ¿Qué les gusta?

Alguien: 792.

Yo: No, está muy alto.

Otros: 230, 160, 81, 288.

Yo: 231.26

Entonces ¿cuántas puertas quedan abiertas?

Alguien: 231.26

Yo: ¿.26? ¿Quedó emparejada? Pasan todos los niños, ¿cuántas quedan abiertas?

Algunos: 200.

Otros: 231.

Yo: ¿200 nada más?

Casi todos: No, 231.

Yo: 231. ¿Y qué le pasa al .26?

Alguien: Se eleva al cuadrado.

Yo: A ver, si elevamos este número al cuadrado nos da éste. (No es cierto, ¿eh? Nada más estoy diciendo para explicarlo...) Si elevamos este número al cuadrado queda la cantidad total de puertas y la cantidad total de niños. Luego, ya que pasaron todos, quedaron abiertas 231, y ¿qué pasa con el .26?

Alguien: Como no está la cantidad exacta, se redondea.

Yo: Más que redondear, cada niño cuando pasa cambia su puerta, y si no pasa ya no cambia ¿no? Entonces 232 al cuadrado ya es más grande y ya no alcanza ¿no? Entonces pasan 231.

Yo: Ahora vamos a ver otra cosita rápido nada más.

Si tenemos la puerta 36 y la puerta 48, ¿cuáles son los niños que van a modificar la puerta 36 y también la 48?

Todos: 1, 2, 3, 4, 6, 8. Sí, no. [los voy apuntando en el pizarrón]

Yo: ¿El 8 le pega a la puerta 48?

Todos: Sí.

Yo: ¿Y le pega a la 36?

Algunos: No.

Otros: Sí.

Yo: ¿Y a cuánto toca?

Casi todos: No.

Yo: Entonces el 8 no porque no le pega a las dos. [lo borro]

Alguien: 36

Yo: ¿36 toca a la 48?

Casi todos: No.

Yo: Necesitamos los que tocan a las dos.

Entonces ¿éstos qué son? [señalo 1, 2, 3, 4, 6] ¿Son divisores de 36?

Casi todos: Sí.

Yo: ¿Son divisores de 48?

Casi todos: Sí.

Yo: Entonces, ¿cómo se les dice?

Alguien: Divisores.

Yo: Divisores comunes ¿no? O sea, son divisores de los dos.

Y el más grande ¿cuál es?

Casi todos: 12.

Yo: ¿Y cómo se llama? Máximo común divisor.

Si tomamos dos números y vemos sus divisores comunes, los divisores de los dos, ¿siempre va a haber uno que va a ser el más grande?

Casi todos: Sí.

Algunos: No podemos saber.

Yo: ¿Por qué no podemos saber?

Si tomamos un número, un número solito, ¿cuál les gusta? 526, vamos a sacar sus divisores: 1, 2... ¿va a haber uno que sea el más grande?

Casi todos: Sí.

Yo: ¿Por qué? ¿Cuál es el más grande?

Casi todos: 526.

Alguien: Tiene que haber 2 divisores para que no sea... o sea para que el otro...

Yo: Claro, para que haya divisores comunes tiene que haber dos números. Pero ahorita vamos a ver un solo número.

[Se interrumpe la grabación pero es casi al final. Sólo terminamos de ver divisores comunes]

BIBLIOGRAFÍA

- Para un enfoque de divisibilidad y otros temas pensado para secundaria y con la idea de que los estudiantes descubran los conceptos por sí mismos, recomiendo:

  Álvarez, Briseño, Martínez, Palmas, Struck, Verdugo. Descubre y aprende matemáticas. (3 vols.) Pearson Educación. Se reimprime anualmente.

- Para un tratamiento formal pero relativamente fácil de seguir de divisibilidad, construcción de los conjuntos de números y propiedades de los números reales y complejos sugiero:

  Cárdenas, Lluis, Raggi, Tomás. Álgebra superior. Trillas. Segunda edición, 1990. Hay varias reimpresiones.

- Se habla de divisibilidad de manera formal y profunda, aunque sucinta, en el primer capítulo de:

  Niven, Zuckerman. Introducción a la teoría de los números. Limusa. 1969. También hay varias reimpresiones.

- Para propiedades de los números reales y complejos puede verse:

  Courant y John. Introducción al cálculo y al análisis matemático. Vol I. Limusa. 1998.

  Se necesitan ciertos conocimientos previos (no muchos) y, aunque es claro, va muy rápido.

- Se tratan varios temas interesantes de diversas ramas de las matemáticas, como divisibilidad, los naturales como conjunto, construcción de los conjuntos de números, etc. en:

  Courant y Robbins, ¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales. (Prefacio y capítulo *Avances recientes* de Ian Stewart). Fondo de Cultura Económica. 2002.

  No se necesita manejar mucha herramienta matemática pero sí hacen falta ganas de ponerse a pensar y algo de tiempo para hacerlo.

- Un tratamiento formal de la construcción de los números naturales a partir de la teoría de conjuntos puede verse en:

  Amor, José Alfredo. Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias. Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la UNAM. 1997.

- Sobre metodología de la enseñanza de las matemáticas existe el texto clásico y muy bueno:

  Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. 1989.

  Son también muy recomendables los artículos de Paul Halmos. En Internet puede encontrarse mucho material escrito por estos dos autores, pero generalmente está sólo en inglés.

- Para un tratamiento ameno de temas variados de matemáticas son muy buenos:

  Malba Tahan. El hombre que calculaba. Limusa. 1988.

  Enzenberger, Hans Magnus. El diablo de los números. Ediciones Siruela. 1997.

- Una página de Internet que trata muchas ramas de la matemática de manera accesible y correcta es:

  http://es.wikipedia.org

- Hay varias curiosidades matemáticas en:

  http://www.geocities.com/Athens/Acropolis/4329/cumat.htm