

01185



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERIA

## EL PROBLEMA DE LA PROBABILIDAD DE RUINA Y ESTIMADORES DE MONTE CARLO

### TESIS

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERIA  
(INVESTIGACION DE OPERACIONES)

Presenta

**LUIS FERNANDO HOYOS REYES**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. MIGUEL ANGEL GUTIERREZ ANDRADE**



CIUDAD UNIVERSITARIA

2004

332007



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Luis Fernando Hoyos Reyes

FECHA: 25/05/04

FIRMA: 

## Resumen

En este trabajo extendí el modelo de riesgo clásico y utilicé diversas técnicas de simulación para construir estimadores de Monte Carlo con la finalidad de resolver problemas relacionados con la probabilidad de ruina, lo que resulta en aplicaciones inéditas de los modelos de riesgo. Las aportaciones son las siguientes: empleando procesos conjugados resolví el caso Poisson/Uniforme, tanto en horizonte finito como infinito, diseñé algoritmos específicos para simular modelos extendidos de riesgo con llegadas distribuidas Poisson no estacionario con medida de intensidad continua, con llegadas Poisson no estacionario con medida de intensidad discontinua, con llegadas de acuerdo a un proceso de renovación y finalmente riesgo en ambiente semi-Markov, además formulé un modelo actuarial de riesgo para pólizas contra incendios con llegadas Poisson no estacionario con medida de intensidad discontinua y montos de reclamaciones con distribución exponencial mixta, un modelo de renovación para análisis de riesgo en el sector productivo y un modelo de descargas contaminantes en un sistema acuífero cerrado bajo ambiente semi-Markov.

## Abstract

In this thesis the classical risk reserve model was extended and simulation techniques were used to construct Monte Carlo estimators with the objective to solve problems related with the ruin probability, this allows us to formulate innovative applications for the risk models. The main results include: the solution of the Poisson/Uniform case within finite and infinite time horizons, the design of specific simulation algorithms for extended risk reserve models, as non stationary Poisson arrives with continuous intensity measure, non stationary Poisson arrives with discontinuous intensity measure, a renewal process as arrival process and finally risk in semi-Markov environment, moreover an insurance fire risk model with non stationary Poisson arrival process with discontinuous intensity measure and mixed exponentially distributed claims was proposed, also a renewal based model for industry risk analysis and a discharge pollution model for a closed aquatic system under semi-Markov environment were formulated.

# INDICE

	página
Introducción	1
1.Marco General: estimación de la probabilidad de ruina y métodos de Monte Carlo	3
1.1 Hipótesis y definiciones del modelo de riesgo	4
1.2 Preliminares	5
2.Simulación de procesos conjugados	9
2.1 Marco teórico de los procesos conjugados	9
2.2 Construcción de estimadores conjugados de Monte Carlo	12
2.3 Algoritmos y Resultados	17
3.Probabilidad de ruina bajo procesos de Poisson no estacionarios	22
3.1 Marco teórico de los procesos de Poisson no estacionarios	22
3.2 Construcción de estimadores de Monte Carlo con medida de intensidad continua	25
3.3 Aplicaciones con medida de intensidad continua	27
3.4 Construcción de estimadores de Monte Carlo con medida de intensidad discontinua	29
3.5 Formulación de un modelo de riesgo para pólizas contra incendio y Resultados	31
4.Procesos de renovación y probabilidad de ruina	33
4.1 Marco teórico de los procesos de renovación	33
4.2 Construcción de estimadores de Monte Carlo	39
4.3 Formulación de modelos de renovación para análisis de riesgo en el sector productivo y Resultados	41
5.Simulación de procesos en ambiente semi-Markov	45
5.1 Marco teórico de los procesos semi-Markov	45
5.2 Construcción de estimadores de Monte Carlo	47
5.3 Formulación de un modelo de descargas contaminantes en un sistema acuífero bajo ambiente semi-Markov y Resultados	49
Conclusiones	53
Agradecimientos	54
Referencias	55
Apéndice I. Programas en Visual Basic	58
Apéndice II. Prueba de Anderson-Darling	76

## Introducción

La Teoría de Riesgo es fundamental en el análisis de problemas en negocios, ingeniería y actuariales [27], trata esencialmente de formular modelos estocásticos con la finalidad de evaluar probabilidades que en términos prácticos determinan la supervivencia o ruina de una compañía [21].

El cálculo de la probabilidad de ruina es uno de los principales problemas de la Teoría de Riesgo [2-5,7,17,20,21,27], que incide directamente en aplicaciones actuariales[5,17] y por supuesto financieras[6,9,13,14,16,23]. Son bastante conocidos los resultados teóricos cuando consideramos un proceso de riesgo clásico y la distribución de los montos de las reclamaciones es exponencial, sin embargo basta considerar alguna otra distribución o un proceso de llegadas distinto al de Poisson, para requerir el empleo de herramientas de simulación para estimar la probabilidad de ruina.

Los Métodos de Monte Carlo son técnicas de muestreo que generan soluciones aproximadas a una enorme variedad de problemas tanto deterministas como aleatorios, simulando experimentos en una computadora [1,22]. Es importante recalcar que dichos métodos requieren de un generador de números pseudoaleatorios con distribución uniforme en  $(0,1]$  y un periodo grande entre ciclos que permita considerar muestras de buen tamaño sin tener problemas de ciclaje.

A partir de diversos modelos de riesgo construiremos estimadores de probabilidades de eventos relevantes empleando Monte Carlo, a dichos estimadores les llamamos estimadores de Monte Carlo (EMC).

El objetivo general de esta tesis consiste en extender el problema de la probabilidad de ruina de riesgo clásico.

Los objetivos específicos son:

- ( i ) Emplear procesos conjugados para resolver el problema Poisson/Uniforme.
- (ii) Generalizar el proceso de llegada a un proceso de Poisson no estacionario y construir EMC bajo horizonte finito.

(iii) Extender resultados a procesos de renovación y construir EMC bajo horizonte finito.

(iv) Trabajar con un proceso de Poisson condicional en ambiente semi-Markov

(v) Formular aplicaciones basadas en modelos de riesgo.

El desarrollo de este trabajo es como sigue:

En el capítulo 1 se plantean los resultados preliminares del estado del arte bajo el modelo clásico de riesgo.

En el capítulo 2 se emplean procesos conjugados, esta técnica desarrollada por Asmussen [2-5] permite simular en un número finito de pasos, procesos de riesgo con cualquier horizonte, para resolver el caso Poisson/Uniforme bajo ambos horizontes, infinito (Hoyos-Reyes [29]) y finito.

En el capítulo 3 se formula un proceso de riesgo donde el proceso de llegada es Poisson no estacionario y se construyen EMC para la probabilidad de ruina en ambos casos: medida de intensidad continua y discontinua, como aplicación se modela el proceso de riesgo de un seguro contra incendio empleando una distribución exponencial mixta de acuerdo con estudios de Wikstad [37] y Cramér [15].

En el capítulo 4 se trabaja con procesos de riesgo donde los tiempos entre llegadas se pueden distribuir en forma bastante general (procesos de renovación), se construyen EMC y se formulan dos ejemplos, el primero consiste de un modelo de riesgo para el volumen de facturación de una empresa de bienes o servicios (González-Trejo, Gutiérrez-Andrade y Hoyos-Reyes [25]), el segundo ilustra el proceso de modelado y análisis de resultados basados en datos reales.

Finalmente en el capítulo 5, se considera un proceso de riesgo basado en un proceso de Poisson condicional en ambiente semi-Markov, de nuevo se construyen EMC y se formula un modelo de riesgo para analizar la supervivencia de un ecosistema acuático bajo descargas contaminantes (González-Trejo, Gutiérrez-Andrade y Hoyos-Reyes [26]).

Si bien existen modelos y resultados conocidos en el ámbito específico de las aplicaciones presentadas, es novedosa la aplicación de modelos estocásticos de riesgo a dichos contextos.

La formulación de los modelos estocásticos se ha realizado con la rigurosidad de aplicaciones ya publicadas (Hernández-Lerma y Hoyos-Reyes [28], González-Trejo, Hernández-Lerma y Hoyos-Reyes [24]).

Asimismo se presentan dos apéndices, el **I** con la implementación en Visual Basic de los algoritmos desarrollados, y el **II** con la validación del generador de números pseudoaleatorios mediante la prueba de Anderson-Darling [1].

# 1. Marco general: estimación de la probabilidad de ruina y métodos de Monte Carlo

Consideremos una compañía de seguros con un capital inicial  $u$  que recibe una tasa constante de ingresos  $c$  por cierto tipo de póliza, si observamos un intervalo de tiempo digamos  $[0, T]$ , ocurrirán un número aleatorio de reclamaciones amparadas por la póliza, donde el monto de cada reclamación también es aleatorio. De esta forma el capital acumulado en un intervalo de tiempo es la diferencia entre los ingresos y la suma de los montos de las reclamaciones, más el capital inicial, a este proceso se le llama proceso de riesgo.

Uno de los problemas fundamentales de la teoría de riesgo [2-5,7,17,20,21,27] consiste en analizar la probabilidad de ruina, es decir la probabilidad de que el capital acumulado (incluyendo el capital inicial) sea negativo.

En ocasiones no es factible calcular la probabilidad de ruina [27], por lo que es necesario construir estimadores. Existen dos enfoques el primero (que no será objeto de discusión de esta tesis) consiste en aproximar el proceso de riesgo con un proceso de Wiener, los trabajos realizados por Beekman [8], De Vylder [18] y Lindvall [31] son las piedras angulares de este enfoque conocido como aproximación por difusión. Su fundamento matemático es la convergencia débil de las medidas de probabilidad y la principal desventaja consiste en que requiere que el proceso de reclamaciones  $N$  converja en distribución a  $\sigma_N \cdot W$ , donde  $W$  es un proceso estándar de Wiener.

El segundo enfoque, que es el objeto de este trabajo, está basado en simular el proceso de ruina y construir estimadores de la probabilidad de ruina con métodos de Monte Carlo, dichos métodos son básicamente una técnica de muestreo cuyo fundamento matemático descansa en la ley fuerte de los grandes números [11,19] y el teorema central del límite [11,19]. La descripción del método no es complicada: simularemos  $n$  réplicas de un proceso de riesgo  $Y_i$  y estimaremos la probabilidad de ruina como el cociente del número de experimentos en que se presenta la ruina entre  $n$  (el total de experimentos). Es importante recalcar que la implementación de esta técnica requiere un generador de números pseudoaleatorios con un periodo grande entre ciclos [22] y distribución uniforme en  $(0,1]$ .

## 1.1 Hipótesis y definiciones del modelo de riesgo

### Hipótesis 1.1

- (a) Las reclamaciones ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  con tasa de llegada  $\lambda$  y tiempos entre reclamaciones  $\{T_i\}_{i \geq 1}$ .
- (b) Los montos de las reclamaciones  $X_1, X_2, \dots$  son variables aleatorias no negativas con esperanza finita  $\mu$ .
- (c)  $X_i$  y  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  son independientes.

**Definición 1.2** Llamamos el proceso de reclamaciones acumuladas a  $Z_t := \sum_{n=0}^{N_t} X_n$  para  $t \geq 0$  con  $X_0 := 0$ .

**Definición 1.3** Sea  $u$  el capital inicial y  $c > 0$  la tasa de ingresos constante. Definimos el proceso de riesgo clásico

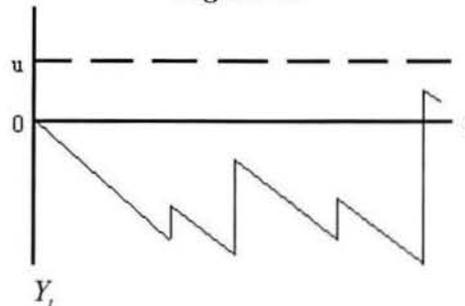
$$Y_t := Z_t - ct, \quad t \in (0, \infty),$$

y el tiempo para la ruina

$$\tau := \inf\{t > 0 : Y_t > u\}.$$

Cuando no hay reclamaciones el proceso de riesgo  $Y_t$  se comporta como una recta con pendiente  $-c < 0$ , las reclamaciones se van acumulando y puede llegar el momento en que el capital total  $u - Y_t$  sea negativo, ese es el momento de la ruina. En la figura 1.1 se muestra la realización de un proceso de riesgo donde la ruina no sucede.

Figura 1.1



**Definición 1.4** Bajo las Hipótesis 1.1, la probabilidad de ruina en tiempo finito es

$$\Psi(u, T) := P(\tau < T),$$

y la probabilidad de ruina bajo horizonte infinito es

$$\Psi(u) := P(\tau < \infty).$$

Usualmente calculamos la tasa constante de ingresos de acuerdo a

$$c = (1 + \rho)EZ_t / t,$$

como  $Z_t$  es un proceso de Poisson compuesto,  $c$  es independiente del tiempo  $t$ . El número  $\rho$  es el factor de recargo y es usualmente positivo, la idea consiste en que ingrese un capital mayor que la pérdida esperada por cada unidad de tiempo, es decir

$$(1 + \rho) \frac{EZ_t}{t} > \frac{EZ_t}{t}.$$

Ahora presentaremos dos resultados conocidos pero fundamentales en capítulos posteriores.

## 1.2 Preliminares

**Teorema 1.5** Consideremos un proceso de riesgo clásico, entonces la probabilidad de ruina cuando el capital inicial es cero y  $c > \lambda\mu$  es

$$\Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1 + \rho},$$

donde  $\mu = EX_1$  y  $\lambda$  es la tasa de llegada.

*Demostración:* Consideremos la probabilidad de no ruina  $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$ , sea  $W_1$  el momento de la primera reclamación, entonces el capital acumulado es  $u + cW_1 - X_1$ . Como el proceso de Poisson es un proceso de renovación y la ruina no ocurre en  $(0, W_1)$  tenemos

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= E(\Phi(u + cW_1 - X_1)) \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda w} \int_0^{u+cw} \Phi(u + cw - x) dF(x) dw, \end{aligned}$$

al hacer el cambio de variable  $s = u + cw$

$$\Phi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \int_u^\infty e^{-\lambda s/c} \int_0^s \Phi(s - x) dF(x) ds,$$

esto significa que  $\Phi$  es diferenciable.

Ahora bien, si consideramos  $Y_t$  en un intervalo de tiempo pequeño  $(0, \Delta]$  uno de cuatro casos posibles ocurre:

- i) no hay reclamaciones en  $(0, \Delta]$ ,
- ii) ocurre una reclamación en  $(0, \Delta]$ , pero su monto no causa ruina,
- iii) una reclamación ocurre en  $(0, \Delta]$  y el monto pagado causa ruina y

iv) más de una reclamación ocurre en  $(0, \Delta]$ .

Del hecho de que  $Y_t$  tiene incrementos estacionarios e independientes y de que  $\Phi(u)$  es diferenciable,

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= (1 - \lambda\Delta + o(\Delta))\Phi(u + c\Delta) + (\lambda\Delta + o(\Delta)) \int_0^{u+c\Delta} \Phi(u + c\Delta - x) dF(x) + (\lambda\Delta + o(\Delta)) \cdot 0 + o(\Delta) \\ &= (1 - \lambda\Delta)\Phi(u + c\Delta) + \lambda\Delta \int_0^{u+c\Delta} \Phi(u + c\Delta - x) dF(x) + o(\Delta) \\ &= \Phi(u) + c\Delta\Phi'(u) - \lambda\Delta\Phi(u) + \lambda\Delta \int_0^u \Phi(u - x) dF(x) + \lambda\Delta \int_0^u \Phi(u - x) dF(x) + o(\Delta)\end{aligned}$$

despejando  $\Phi'(u)$  y tomando el límite cuando  $\Delta \rightarrow 0$

$$\Phi'(u) = \frac{\lambda}{c} \Phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Phi(u - x) dF(x) \quad (1-1)$$

integrando (1-1) sobre  $(0, t)$

$$\begin{aligned}\Phi(t) - \Phi(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \Phi(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u \Phi(u - x) d(1 - F(x)) du \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \Phi(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \left[ \Phi(0)(1 - F(u)) - \Phi(u) + \int_0^u \Phi'(u - z)(1 - F(x)) dx \right] du \\ &= \frac{\lambda}{c} \Phi(0) \int_0^t (1 - F(u)) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t (1 - F(x)) dx \int_x^t \Phi'(u - x) du \\ &= \frac{\lambda}{c} \Phi(0) \int_0^t (1 - F(u)) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t (1 - F(x)) (\Phi(t - x) - \Phi(0)) dx\end{aligned}$$

luego

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Phi(u - x)(1 - F(x)) dx$$

por convergencia monótona cuando  $u \rightarrow \infty$

$$\Phi(\infty) = \Phi(0) + \frac{\lambda\mu}{c} \Phi(\infty). \quad (1-2)$$

Recordemos que  $EZ_t = \lambda\mu t$ , de la ley de los grandes números

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{ct - Z_t}{t} = c - \lambda\mu,$$

con probabilidad 1.

Como hemos visto anteriormente si  $\rho > 0$  entonces  $c > \lambda\mu$ , luego existe una variable aleatoria  $T$ , tal que  $ct - Z_t > 0$  para  $t > T$ . Como sólo pueden ocurrir un número finito de reclamaciones antes de  $T$ , el  $\inf_{t>0} \{ct - Z_t\}$  es finito con probabilidad 1 y por tanto

$$\Phi(\infty) = 1,$$

sustituyendo en (1-2)

$$1 = (1 - \Psi(0)) + \frac{\lambda\mu}{c},$$

de aquí que

$$\Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\rho}. \quad \square$$

**Corolario 1.6** Sea  $Y_t$  un proceso de riesgo clásico con reclamaciones distribuidas  $\exp(1/\mu)$  y  $\rho > 0$ , entonces

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}}.$$

*Demostración:* Como  $X_i \sim \exp(1/\mu)$ , (1-1) se reduce a

$$\begin{aligned} \Phi'(u) &= \frac{\lambda}{c} \Phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu} \int_0^u \Phi(u-x) e^{-x/\mu} dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \Phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu} \int_0^u \Phi(x) e^{-(u-x)/\mu} dx, \end{aligned}$$

derivando tenemos

$$\begin{aligned} \Phi''(u) &= \frac{\lambda}{c} \Phi'(u) + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\lambda}{\mu} \Phi(u) - \Phi'(u) \right) - \frac{\lambda}{c\mu} \Phi(u) \\ &= \left( \frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu} \right) \Phi'(u) = -\frac{\rho}{\mu(1+\rho)} \Phi'(u), \end{aligned}$$

al integrar la expresión anterior

$$\Phi(u) = C_1 - C_2 e^{-\rho u / (\mu(1+\rho))}.$$

Por el Teorema 1.5, si  $\rho > 0$   $\Phi(\infty) = 1$  y  $\Phi(0) = 1 - \frac{1}{1+\rho}$ , luego

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= 1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\rho u / (\mu(1+\rho))} \\ \Psi(u) &= \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}}. \quad \square \end{aligned}$$

Observe que el Teorema 1.5 implica robustez en el sentido de que la probabilidad de ruina cuando no hay capital inicial depende solamente del factor de recargo y de la esperanza de la distribución de los montos de las reclamaciones.

También llama la atención la dificultad en los cálculos para el caso más simple del problema de ruina, el proceso de riesgo clásico.

## 2. Simulación de procesos conjugados

En este capítulo resolveremos el caso Poisson/Uniforme [29], es decir estimaremos la probabilidad de ruina de un proceso de riesgo clásico con distribución uniforme de los montos de las reclamaciones, usando un método de simulación desarrollado por Asmussen [2-5] llamado procesos conjugados por emplear familias de distribuciones conjugadas y basado en una versión de la identidad fundamental de Wald.

La principal ventaja sobre la simulación tradicional consiste en que es posible simular en un número finito de pasos un proceso de riesgo con horizonte infinito y de esta forma construir estimadores de Monte Carlo.

En todos los ejemplos se determinará el número máximo de números pseudoaleatorios empleados durante las simulaciones en cada tabla de resultados para garantizar que no se supere el límite entre ciclos que en Visual Basic 3.0 es de  $2^{24} - 1$ , es decir de 16,777,216 números pseudoaleatorios partiendo de cualquier semilla [36].

### 2.1 Marco teórico de los procesos conjugados

**Definición 2.1** Una familia  $(F_\theta)_{\theta \in \Theta}$  de distribuciones en  $\mathfrak{R}$  es llamada una familia conjugada si las  $F_\theta$  son mutuamente equivalentes con densidades de la forma

$$\frac{dF_\theta}{dF_{\theta_0}}(x) = \exp\{(\theta - \theta_0)x - h_{\theta_0}(\theta)\} \quad (2-1)$$

y si para algún valor fijo  $\theta_0 \in \Theta$  el conjunto de parámetros  $\Theta$  contiene todos los  $\theta \in \mathfrak{R}$  para los cuales (2-1) define una función de densidad de probabilidad para alguna función  $h_{\theta_0}(\theta)$ .

Entonces por definición  $P_{\theta_0} := P$  es la ley de probabilidad del proceso  $Y_t$ . Además  $\mathcal{G}_0 < 0$  es la solución de

$$\phi'_x(-\theta_0) = c / \lambda$$

donde  $\phi_X(\beta) := E(e^{\beta X})$  es la función generadora de momentos de  $X$ . Esta definición de  $\theta_0$  nos permite escoger el signo de  $E_{\theta} Y_t$  como probaremos más adelante (Proposición 2.4).

Observe que  $\phi_{\theta_0}(\beta) = E_{\theta_0}(e^{\beta X}) = \phi_X(\beta)$ .

La ecuación (2-1) implica que  $h_{\theta_0}(\theta)$  es la función generadora acumulativa de  $F_{\theta_0}$

$$h_{\theta_0}(\theta) := \log E_{\theta_0} e^{(\theta - \theta_0) X}.$$

El proceso de reclamaciones acumuladas  $Z_t$  es un proceso de Poisson compuesto, luego su correspondiente función generadora de momentos [4] es

$$\phi_{Z_t}(\beta) = e^{\lambda t (\phi_X(\beta) - 1)} \quad (2-2)$$

**Proposición 2.2** Sean  $\theta, \theta_0 \in \Theta$  con  $\theta \neq \theta_0$ . Entonces

$$\phi_{\theta}(\beta) = \frac{\phi_{\theta_0}(\beta + \theta - \theta_0)}{\phi_{\theta_0}(\theta - \theta_0)}.$$

*Demostración:* De (2-1)

$$\begin{aligned} \phi_{\theta}(\beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x} dF_{\theta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x} \frac{e^{(\theta - \theta_0)x}}{E_{\theta_0} e^{(\theta - \theta_0)x}} dF_{\theta_0}(x) \\ &= \frac{\phi_{\theta_0}(\beta + \theta - \theta_0)}{\phi_{\theta_0}(\theta - \theta_0)}. \quad \square \end{aligned}$$

**Proposición 2.3**

$$\frac{1}{t} \log E e^{\beta Y_t} = \lambda (\phi_X(\beta) - 1) - \beta c.$$

*Demostración:* Por la definición de  $Y_t$  podemos ver que

$$E e^{\beta Y_t} = \phi_{Z_t}(\beta) / e^{\beta c t},$$

entonces por (2-2) tenemos

$$E e^{Y_t} = e^{\lambda t (\phi_X(\beta) - 1) - \beta c t},$$

basta aplicar la función logaritmo a ambos lados y dividir entre  $t$ .  $\square$

Ahora de la Proposición 2.2

$$E_{\theta} e^{\beta Z_t} = e^{\lambda t \phi_{\theta_0}(\theta - \theta_0) (\phi_{\theta}(\beta) - 1)}$$

lo que implica que bajo  $P_\theta$ ,  $Z_t$  también es un proceso de Poisson compuesto con tasa de llegada  $\lambda_\theta := \lambda\phi_\theta(\theta - \theta_0)$  y distribución de reclamaciones  $F_\theta$ . Luego reemplazando  $E$  por  $E_\theta$  en la Proposición 2.3 tenemos

$$\frac{\log E_\theta e^{\beta Y_t}}{t} = \lambda_\theta(\phi_\theta(\beta) - 1) - \beta c = \lambda\phi_{\theta_0}(\theta - \theta_0)(\phi_\theta(\beta) - 1) - \beta c. \quad (2-3)$$

**Proposición 2.4** Si existe  $\phi_X''$  en un intervalo  $I$  que contiene  $-\theta_0$ , entonces

$$\mu_\theta := E_\theta Y_t > 0 \text{ cuando } \theta > 0$$

y

$$\mu_\theta < 0 \text{ cuando } \theta < 0.$$

*Demostración:* Sea  $\chi_\theta(\beta) := \frac{1}{t} \log E_\theta e^{\beta Y_t}$ , de (2-3)

$$\chi_\theta(\beta) = \lambda_\theta(\phi_\theta(\beta) - 1) - \beta c,$$

en particular si  $\theta = \theta_0$

$$\chi_{\theta_0}(\beta) = \lambda_{\theta_0}(\phi_{\theta_0}(\beta) - 1) - \beta c,$$

al derivar ambos lados y tomar  $\beta = -\theta_0$

$$\chi'_{\theta_0}(-\theta_0) = \lambda\phi'_{\theta_0}(-\theta_0) - c.$$

Recuerde que  $\phi_{\theta_0}(\beta) = \phi_X(\beta)$ , luego

$$\phi'_{\theta_0}(-\theta_0) = c / \lambda = \phi'_X(-\theta_0),$$

lo que implica

$$\chi'_{\theta_0}(-\theta_0) = 0.$$

Derivando nuevamente

$$\chi''_{\theta_0}(\beta) = \lambda\phi''_X(\beta) = \lambda E_{\theta_0}(X^2 e^{\beta X}) > 0,$$

entonces  $-\theta_0$  es un mínimo local y  $\chi_{\theta_0}(\cdot)$  es convexa en  $I$ .

Ahora sea  $\theta \in \Theta$ . La Proposición 2.2 implica

$$\chi_\theta(\beta) = \chi_{\theta_0}(\beta + \theta - \theta_0) - \chi_{\theta_0}(\theta - \theta_0),$$

y por tanto

$$\chi'_\theta(0) = \chi'_{\theta_0}(\theta - \theta_0) \quad (2-4)$$

además

$$\chi'_{\theta}(\beta) = \lambda \phi'_x(\beta + \theta - \theta_0).$$

Por otra parte

$$\chi'_{\theta}(\beta) = \frac{E_{\theta}(Y_i e^{\beta Y_i})}{E_{\theta} e^{\beta Y_i}},$$

luego

$$\chi'_{\theta}(0) = E_{\theta} Y_i = \mu_{\theta}.$$

Empleando (2-4)

$$\mu_{\theta} = \chi'_{\theta_0}(\theta - \theta_0)$$

y

$$\mu_0 = \chi'_{\theta_0}(-\theta_0) = 0.$$

De las últimas dos igualdades y la convexidad de  $\chi_{\theta_0}(\cdot)$  obtenemos la conclusión deseada.  $\square$

## 2.2 Construcción de los estimadores conjugados de Monte Carlo

**Proposición 2.5** Si  $\theta > 0$ , entonces

$$P_{\theta}(\tau < \infty) = 1.$$

*Demostración:* Bajo la ley  $P_{\theta}$ ,  $Z_t$  es un proceso de Poisson compuesto con  $N_i \sim \text{Poisson}(\lambda_{\theta})$  y montos de reclamaciones  $X_i \sim F_{\theta}$ . Entonces

$$E_{\theta}(Z_t) = \lambda_{\theta} t E_{\theta} X.$$

Aplicando la ley fuerte de grandes números al proceso de reclamaciones acumuladas

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (Z_t - \lambda_{\theta} t E_{\theta} X) = 0 \quad \text{c.s.} \quad (2-5)$$

Ahora de la Proposición 2.4 tenemos  $E_{\theta}(Z_t - ct) > 0$ , luego  $\rho < 0$  y usando (2-5)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (Z_t - \lambda_{\theta} t E_{\theta} X - \rho \lambda_{\theta} t E_{\theta} X) = -\rho \lambda_{\theta} E_{\theta} X > 0 \quad \text{c.s.}$$

Esto implica

$$Z_t - \lambda_\theta t(1 + \rho)E_\theta X \rightarrow +\infty \quad \text{c.s.}$$

lo que completa la demostración.  $\square$

Consideramos una familia conjugada  $(F_\theta)_{\theta \in \Theta}$  sobre una caminata aleatoria  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  en tiempo discreto o continuo. Definimos  $\mathfrak{F}_t := \sigma(S_r; r \leq t)$  y si  $\tau$  es un tiempo de paro respecto a  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ , sea  $\mathfrak{F}_\tau := \left\{ G \in \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathfrak{F}_t\right) : G \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t, t \geq 0 \right\}$ . A continuación la identidad fundamental de Wald.

**Teorema 2.6** Sea  $\tau$  un tiempo de paro respecto a  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  y  $G \in \mathfrak{F}_\tau$ ,  $G \subseteq \{\tau < \infty\}$ . Entonces para cada  $\theta_0, \theta \in \Theta$

$$P_{\theta_0} G = E_\theta \left[ \left( \exp\{(\theta_0 - \theta)S_\tau - \tau\chi_\theta(\theta_0 - \theta)\} \right) \cdot I_G \right],$$

donde  $\chi_\theta(\beta) = \frac{1}{t} \log E_\theta e^{\beta S_t}$  e  $I_G$  es la función indicadora del evento  $G$ .

*Demostración:* Sean  $\theta, \theta_0 \in \Theta$ . Consideremos una caminata aleatoria discreta

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

usando (2-1) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\theta_0}}{dP_\theta}(x_1, \dots, x_n) &= \exp\{(\theta_0 - \theta)s_n - \log E_{\theta_0} e^{(\theta_0 - \theta)S_n}\} \\ &= \exp\left\{(\theta_0 - \theta)s_n - \log \prod_{i=1}^n E_{\theta_0} e^{(\theta_0 - \theta)X_i}\right\} \\ &= \exp\{(\theta_0 - \theta)s_n - n \log E_{\theta_0} e^{(\theta_0 - \theta)X}\}. \end{aligned}$$

En particular si  $G \in \mathfrak{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  e integramos sobre  $G$

$$P_{\theta_0} G = E_\theta \left[ \left( \exp\{(\theta_0 - \theta)S_n - n \log E_{\theta_0} e^{(\theta_0 - \theta)X}\} \right) \cdot I_G \right].$$

Ahora extenderemos el resultado a una caminata aleatoria continua  $\{S_t\}_{t \geq 0}$ . Sea  $\mathfrak{F}_T^n := \sigma(S_{kT/n}; k = 1, \dots, n)$ .

$\{S_{kT/n}\}$  es una caminata aleatoria discreta con incrementos con función generadora acumulativa  $\chi_\theta(\cdot)/n$  y tenemos  $n$  incrementos, luego para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{dP_{\theta_0}}{dP_\theta} = \exp\{(\theta_0 - \theta)S_{kT/n} - T\chi_\theta(\theta_0 - \theta)\},$$

generamos  $\mathfrak{F}_T$  a partir de las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_T^n$ , es decir

$$\mathfrak{F}_T := \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_T^n\right),$$

luego

$$\frac{dP_{\theta_0}}{dP_{\theta}} = \exp\{(\theta_0 - \theta)S_T - T\chi_{\theta}(\theta_0 - \theta)\} \quad (2-6)$$

Sea  $G \in \mathfrak{F}_T$  y supongamos que  $G \subset \{\tau < T\}$ , posteriormente extenderemos el resultado a  $G \subset \{\tau < \infty\}$  empleando convergencia monótona.

Claro que  $G \in \mathfrak{F}_T$ , luego al emplear (2-6)

$$P_{\theta_0}G = E_{\theta}[(\exp\{(\theta_0 - \theta)S_T - T\chi_{\theta}(\theta_0 - \theta)\}) \cdot I_G],$$

considere  $T = T - \tau + \tau$  y  $S_T = S_T - S_{\tau} + S_{\tau}$ , al sustituir en la expresión anterior

$P_{\theta_0}G = E_{\theta}[(\exp\{(\theta_0 - \theta)S_{\tau} - \tau\chi_{\theta}(\theta_0 - \theta)\})I_G \exp\{(\theta_0 - \theta)(S_T - S_{\tau}) - (T - \tau)\chi_{\theta}(\theta_0 - \theta)\}]$ , observe que  $(\exp\{(\theta_0 - \theta)S_{\tau} - \tau\chi_{\theta}(\theta_0 - \theta)\}) \cdot I_G$  es  $\mathfrak{F}_{\tau}$ -medible y al condicionar respecto a  $\mathfrak{F}_{\tau}$ ,  $P_{\theta_0}G$  es igual a

$$= E_{\theta}[\exp\{(\theta_0 - \theta)S_{\tau} - \tau\chi_{\theta}(\theta_0 - \theta)\}I_G E_{\theta}(\exp\{(\theta_0 - \theta)(S_T - S_{\tau}) - (T - \tau)\chi_{\theta}(\theta_0 - \theta)\} | \mathfrak{F}_{\tau})] \quad (2-7)$$

Por otra parte  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  cumple la propiedad fuerte de Markov, entonces

$$\begin{aligned} E_{\theta}[\exp\{(\theta_0 - \theta)(S_T - S_{\tau}) - (T - \tau)\chi_{\theta}(\theta_0 - \theta)\} | \mathfrak{F}_{\tau}] &= \\ E_{\theta}[\exp\{(\theta_0 - \theta)(S_{T-\tau} - 0) - (T - \tau)\chi_{\theta}(\theta_0 - \theta)\}] & \end{aligned} \quad (2-8)$$

Como

$$E_{\theta} \exp\{(\theta_0 - \theta)S_{T-\tau}\} = E_{\theta} \exp\{(T - \tau)\chi_{\theta}(\theta_0 - \theta)\},$$

entonces (2-8) es igual a 1.

Sustituyendo en (2-7)

$$P_{\theta_0}G = E_{\theta}[(\exp\{(\theta_0 - \theta)S_{\tau} - \tau\chi_{\theta}(\theta_0 - \theta)\}) \cdot I_G].$$

Para extender el resultado a  $G \subset \{\tau < \infty\}$ , sea  $\{T_k\}$  una sucesión creciente no acotada de números reales.

Sean

$$G_k := G \cap \{\tau \leq T_k\} \in \mathfrak{F}_{T_k}$$

y

$$f_k := (\exp\{(\theta_0 - \theta)S_\tau - \tau\chi_\theta(\theta_0 - \theta)\}) \cdot I_{G_k},$$

al tomar límites

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k := (\exp\{(\theta_0 - \theta)S_\tau - \tau\chi_\theta(\theta_0 - \theta)\}) \cdot I_G.$$

Sea  $f := (\exp\{(\theta_0 - \theta)S_\tau - \tau\chi_\theta(\theta_0 - \theta)\}) \cdot I_G$ , entonces por convergencia monótona cuando  $k \rightarrow \infty$

$$E_\theta f_k \rightarrow E_\theta f. \quad \square$$

Al aplicar el Teorema 2.6 al proceso de riesgo clásico  $Y_\tau$  en el momento de la ruina tenemos

$$\frac{dP_{\theta_0}}{dP_\theta} = \exp\{(\theta_0 - \theta)Y_\tau - \tau\chi_\theta(\theta_0 - \theta)\} \quad (2-9)$$

Integrando (2-9) sobre  $\{\tau < \infty\}$  se puede expresar la probabilidad de ruina con horizonte infinito como

$$\Psi(u) = E_\theta [(\exp\{(\theta_0 - \theta)Y_\tau - \tau\chi_\theta(\theta_0 - \theta)\}) \cdot I\{\tau < \infty\}] \quad (2-10)$$

**Proposición 2.7** Sea  $\theta > 0$ . Si realizamos  $n$  simulaciones del proceso conjugado

$$R_\theta := \exp\{(\theta_0 - \theta)Y_\tau - \tau\chi_\theta(\theta_0 - \theta)\},$$

entonces con probabilidad 1 cuando  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_\theta^i \rightarrow \Psi(u),$$

donde  $R_\theta^i$  es el valor final de la realización del proceso conjugado después de la  $i$ -ésima simulación. ( $i = 1, \dots, n$ )

*Demostración:* Por la Proposición 2.5 la ruina ocurre c.s., por lo que cada una de las  $n$  simulaciones de  $R_\theta$  se puede llevar a cabo en un número finito de pasos.

Además usando (2-10) y tomando en consideración que bajo la ley  $P_\theta$  la ruina ocurre casi seguramente

$$E_\theta R_\theta = \Psi(u),$$

luego por la ley fuerte de los grandes números, se sigue con probabilidad 1 que cuando  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_\theta^i \rightarrow \Psi(u). \quad \square$$

Llamamos a  $\hat{\Psi}(u) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_\theta^i$  un estimador conjugado de Monte Carlo (ECMC) de  $\Psi(u)$ .

Si integramos (2-9) sobre  $\{\tau < T\}$  se puede escribir la probabilidad de ruina en horizonte finito como

$$\Psi(u, T) = E_\theta \left[ \left( \exp\{(\theta_0 - \theta)Y_\tau - \tau\chi_\theta(\theta_0 - \theta)\} \right) \cdot I\{\tau < T\} \right].$$

Entonces el proceso conjugado correspondiente es

$$R_{\theta, T} := \exp\{(\theta_0 - \theta)Y_\tau - \tau\chi_\theta(\theta_0 - \theta)\} \cdot I\{\tau < T\} \quad (2-11)$$

De esta forma podemos construir análogamente un ECMC para  $\Psi(u, T)$ ,

$$\hat{\Psi}(u, T) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{\theta, T}^i.$$

### Observaciones 2.8

- (a) Si  $\theta = \theta_0$  entonces de (2-11)  $R_{\theta, T} = I\{\tau < T\}$ , lo que significa que simular  $R_{\theta, T}$  es equivalente a simular el proceso original  $Y_t$ , lo que en terminología actuarial se llama simulación cruda [21].
- (b) Podemos simplificar  $R_{\theta, T}$  tomando  $\theta$  como el valor de Lundberg  $\theta_1 := \gamma + \theta_0$ , donde  $\gamma$  es la solución no trivial de la ecuación de Lundberg  $\chi_{\theta_1}(\gamma) = 0$ . En este caso  $R_{\theta_1, T}$  es llamado el proceso de Lundberg [3]. De la Proporción 2.4 se puede ver que  $\chi_{\theta_1}(\theta_0 - \theta_1) = 0$ , lo que implica que

$$R_{\theta_1, T} = \left( \exp\{-\gamma Y_\tau\} \right) \cdot I\{\tau < T\}.$$

Luego al tomar  $\Delta > 0$ ,  $\theta = (1 + \Delta)\theta_1$  y empleando el Teorema 2.6 obtenemos

$$R_{\theta_1(1+\Delta), T} = \exp\{-(\gamma + \theta_1\Delta)Y_\tau + \tau\chi_{\theta_1}(\theta_1\Delta)\} \cdot I\{\tau < T\} \quad (2-12)$$

y en el caso de horizonte infinito

$$R_{\theta_1(1+\Delta)} = \exp\{-(\gamma + \theta_1\Delta)Y_\tau + \tau\chi_{\theta_1}(\theta_1\Delta)\}.$$

(c) La varianza  $\sigma_\theta^2 := \text{Var}_\theta R_{\theta,T}$  cuando  $\theta = (1 + \Delta)\theta_1$  es

$$\sigma_{\theta_1(1+\Delta)}^2 = E_{\theta_1} [\exp\{-2(\gamma + \theta_1)Y_\tau + \tau\chi_{\theta_1}(\theta_1, \Delta)\} \cdot I\{\tau < T\}] - \Psi^2(u, T)$$

y en el caso de horizonte infinito

$$\sigma_{\theta_1(1+\Delta), \infty}^2 = E_{\theta_1} \exp\{-2(\gamma + \theta_1)Y_\tau + \tau\chi_{\theta_1}(\theta_1, \Delta)\} - \Psi^2(u).$$

## 2.3 Algoritmos y Resultados

A continuación los algoritmos de simulación de procesos conjugados en notación de G.S. Fishman [22].

**Algoritmo 2.9** Estimación de la probabilidad de ruina con horizonte infinito.

**Objetivo:** Generar las  $n$  realizaciones del proceso conjugado  $R_\theta^i$  para construir  $\hat{\Psi}(u)$  el ECMC de  $\Psi(u)$ .

**Entrada:**  $n, u, c, \theta, \phi_{\theta_0}, F_\theta$ .

**Salida:**  $\hat{\Psi}(u)$ .

**Método:**

Escoja  $\theta > 0$ .

Si toma  $\theta_1$ , resuelva la ecuación de Lundberg.

$i \leftarrow 1$ .

Hasta que  $i > n$  haz:

$Y \leftarrow 0$ .

$t \leftarrow 0$ .

Mientras  $Y \leq u$  haz:

Generamos  $W \sim \exp(\lambda\phi_{\theta_0}(\theta - \theta_0))$ .

Generamos  $X \sim F_\theta$ .

$Y \leftarrow Y + X - cW$ .

$t \leftarrow t + W$ .

$R_\theta^i \leftarrow \exp\{(\theta_0 - \theta)Y - t\chi_\theta(\theta_0 - \theta)\}$ .

$i \leftarrow i + 1$ .

$$\hat{\Psi}(u) \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_\theta^i.$$

**Algoritmo 2.10** Estimación de la probabilidad de ruina con horizonte finito  $T$ .

**Objetivo:** Generar las  $n$  realizaciones del proceso conjugado  $R_{\theta,T}^i$  para construir

$\hat{\Psi}(u, T)$  el ECMC de  $\Psi(u, T)$ .

**Entrada:**  $n, T, u, c, \theta, \phi_{\theta_0}, F_\theta$ .

**Salida:**  $\hat{\Psi}(u, T)$ .

**Método:**

Escoja  $\theta > 0$ .

Si toma  $\theta_1$ , resuelva la ecuación de Lundberg.

$i \leftarrow 1$ .

Hasta que  $i > n$  haz:

$Y \leftarrow 0$ .

$t \leftarrow 0$ .

Mientras  $(Y \leq u)$  y  $(t < T)$  haz:

Generamos  $W \sim \exp(\lambda \phi_{\theta_1}(\theta - \theta_0))$ .

Generamos  $X \sim F_\theta$ .

$Y \leftarrow Y + X - cW$ .

$t \leftarrow t + W$ .

Si  $(Y > u)$  y  $(t \leq T)$  entonces  $R_{\theta,T}^i \leftarrow \exp\{(\theta_0 - \theta)Y - t\chi_\theta(\theta_0 - \theta)\}$ .

$i \leftarrow i + 1$ .

$$\hat{\Psi}(u, T) \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{\theta,T}^i.$$

**Ejemplo 2.11** El caso Poisson/ exponencial (P/E).

Este caso donde el proceso de llegadas es Poisson y los montos de las reclamaciones se distribuyen exponencialmente, ha sido estudiado extensivamente [7,21,27], de hecho se conoce la probabilidad de ruina para tiempo infinito (Corolario 1.6), esto lo hace un excelente candidato para evaluar el desempeño y precisión de los Algoritmos 2.9 y 2.10.

Consideremos un proceso de riesgo P/E con  $\mu := EX = 1$ ,  $\lambda = 0.8$ ,  $\rho = 0.1$  y  $T = \infty$ . Si fijamos un valor para  $\Psi(u)$  empleando el Corolario 1.6, despejamos el capital inicial requerido para ese nivel de riesgo, consideramos en la Tabla 2.1 dos valores para  $\Psi(u)$ : un nivel bajo de riesgo de 0.04 y un nivel de alto riesgo de 0.30. Realizaremos la simulación de Lundberg, es decir cuando  $\theta_1 := \gamma + \theta_0$ . Es fácil ver que  $\gamma = 0.0909$ .

Para determinar el grado de precisión emplearemos el error estándar:

$$\varepsilon_R := \left| 1 - \hat{\Psi}(u) / \Psi(u) \right|$$

A continuación presentamos resultados.

Tabla 2.1: Caso P/E, horizonte infinito

$u$	$n$	$\Psi(u)$	$\hat{\Psi}(u)$	$\varepsilon_R$
34.359	1	0.04	0.03913	$2.1 \times 10^{-2}$
34.359	10	0.04	0.03973	$6.5 \times 10^{-3}$
34.359	$10^2$	0.04	0.03985	$3.5 \times 10^{-3}$
34.359	$10^4$	0.04	0.03998	$5.4 \times 10^{-4}$
12.195	10	0.30	0.29473	$1.7 \times 10^{-2}$
12.195	$10^2$	0.30	0.29783	$7.2 \times 10^{-3}$
12.195	$10^4$	0.30	0.29990	$3.2 \times 10^{-4}$

El cuarto renglón de la Tabla 2.1 produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 7,148,487 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

Es notable la precisión de los resultados, aún con un número bajo de simulaciones, como el tiempo de ejecución del Algoritmo 2.9 es proporcional al número  $n$  de simulaciones, el desempeño es bastante bueno.

En el caso de horizonte finito no conocemos el valor exacto de la probabilidad de ruina, lo que nos obliga a emplear la desviación estándar del ECMC,  $S_{ECMC}$  como medida de precisión e incrementar el número de simulaciones, utilizando el Algoritmo 2.10.

La precisión puede apreciarse mejor considerando el radio del intervalo de confianza del ECMC, si pensamos en un intervalo de confianza como un instrumento de medición el radio equivaldría a la tolerancia del instrumento. Definimos

$$Tolerancia_{\alpha} := \pm z_{\alpha/2} \cdot S_{ECMC},$$

para determinar que tan grande es, basta dividir la  $Tolerancia_{\alpha}$  entre el ECMC y al multiplicar el resultado por 100 obtenemos el porcentaje de variación  $\%Tol$  alrededor de  $\hat{\Psi}(u)$ . Un porcentaje de menos del 5% se considera bueno y menor al 2.5% excelente [11], los ejemplos en negritas tienen un valor menor al 2.5%.

Ahora para evaluar la consistencia asintótica del algoritmo 2.10, fijamos ahora el capital inicial, primero en 31.9 que corresponde a una probabilidad de ruina a tiempo infinito de 0.05, por lo que al crecer el horizonte de tiempo  $T$ , el ECMC se acerca a 0.05. El capital inicial de 16.7 en el segundo caso de la Tabla 2.2, corresponde a  $\Psi(16.7) = 0.20$  por lo que el ECMC debe converger a 0.20.

Tabla 2.2: Caso P/E, horizonte finito

$u$	$n$	$T$	$\hat{\Psi}(u, T)$	$S_{ECMC}$	$Tolerancia_{0.01}$	$\%Tol$
31.9	$1 \times 10^3$	200	0.0173	$7.5 \times 10^{-4}$	$1.94 \times 10^{-3}$	11.25
31.9	$3 \times 10^4$	200	0.0169	$1.4 \times 10^{-4}$	$3.54 \times 10^{-4}$	<b>2.1</b>
31.9	$1 \times 10^3$	500	0.0378	$6.9 \times 10^{-4}$	$1.78 \times 10^{-3}$	4.70
31.9	$3 \times 10^4$	500	0.0383	$1.2 \times 10^{-4}$	$3.21 \times 10^{-4}$	<b>0.84</b>
31.9	$1 \times 10^4$	20000	0.0499	$4.6 \times 10^{-5}$	$1.19 \times 10^{-4}$	<b>0.24</b>
16.7	$1 \times 10^3$	200	0.1344	$2.9 \times 10^{-3}$	$7.66 \times 10^{-3}$	5.70
16.7	$3 \times 10^4$	200	0.1356	$5.4 \times 10^{-4}$	$1.39 \times 10^{-3}$	<b>1.03</b>
16.7	$1 \times 10^3$	500	0.1822	$1.9 \times 10^{-3}$	$4.82 \times 10^{-3}$	2.64
16.7	$3 \times 10^4$	500	0.1817	$3.4 \times 10^{-4}$	$8.79 \times 10^{-4}$	<b>0.48</b>
16.7	$1 \times 10^4$	20000	0.1989	$1.8 \times 10^{-4}$	$4.73 \times 10^{-4}$	<b>0.24</b>

Observe que cuando el horizonte de tiempo es de 20000, los ECMC están cerca de los valores asintóticos de 0.05 y 0.20.

El cuarto renglón de la Tabla 2.2 produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 15,801,929 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

**Ejemplo 2.12** El caso Poisson/Uniforme (P/U).

Ahora las reclamaciones se distribuyen uniformemente, no es posible aplicar el Corolario 1.6 pero sí el Teorema 1.5 lo que nos permite validar el método, bajo la restricción de no tener capital inicial.

Consideremos  $\lambda = 1$ ,  $c = 0.508$ ,  $\gamma = 0.05$  y  $X \sim U(0,1)$ . Aplicando el Teorema 1.5

$$\Psi(0) = 0.9834,$$

lo que nos permitirá calcular el error estándar.

Tabla 2.3: Caso P/U, horizonte infinito

$n$	$\hat{\Psi}(0)$	$\varepsilon_R$
1	0.9891	$5.89 \times 10^{-3}$
10	0.9802	$3.28 \times 10^{-3}$
$10^2$	0.9853	$1.93 \times 10^{-3}$
$10^3$	0.9832	$2.23 \times 10^{-4}$
$10^4$	0.9834	$2.29 \times 10^{-5}$

De nuevo el Algoritmo 2.9 es bastante preciso, aún con pocas simulaciones.

El quinto renglón de la Tabla 2.3 produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 652,552 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

Ahora podemos estimar la probabilidad de ruina para diversos niveles de capital inicial y observar que existe consistencia entre los resultados: a mayor capital inicial menor probabilidad de ruina y a mayor número de simulaciones mayor precisión.

Tabla 2.4: Caso P/U, horizonte infinito diversos valores de  $u$ .

$u$	$n$	$\hat{\Psi}(u)$	$S_{ECMC}$	$Tolerancia_{0.01}$	%Tol
40	$10^3$	0.1336	$4.12 \times 10^{-5}$	$1.06 \times 10^{-5}$	<b>0.08</b>
20	$10^3$	0.3633	$3.52 \times 10^{-5}$	$9.08 \times 10^{-5}$	<b>0.02</b>
10	$10^2$	0.5990	$5.61 \times 10^{-3}$	$1.44 \times 10^{-3}$	<b>0.24</b>
0	$10^2$	0.9853	$1.18 \times 10^{-3}$	$3.04 \times 10^{-3}$	<b>0.31</b>
0	$10^3$	0.9836	$3.68 \times 10^{-4}$	$9.49 \times 10^{-4}$	<b>0.09</b>

El primer renglón de la Tabla 2.4 produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 9,876,769 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

Tabla 2.5: Caso P/U, horizonte finito,  $u = 20$ ,  $n = 10^3$ .

$T$	$\hat{\Psi}(u, T)$	$S_{ECMC}$	$Tolerancia_{0.01}$	%Tol
2000	0.2467	$5.37 \times 10^{-3}$	$1.38 \times 10^{-2}$	5.60
4000	0.3091	$4.09 \times 10^{-3}$	$1.05 \times 10^{-2}$	3.41
8000	0.3426	$4.82 \times 10^{-3}$	$6.87 \times 10^{-3}$	2.00
40000	0.3632	$1.12 \times 10^{-4}$	$2.89 \times 10^{-4}$	0.08

El Algoritmo 2.10 fue empleado para generar la Tabla 2.5. Observe la convergencia de  $\hat{\Psi}(u, T)$  conforme el horizonte de tiempo  $T$  crece. ( $\hat{\Psi}(20) = 0.3633$ , ver Tabla 2.4)

El cuarto renglón de la Tabla 2.5 produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 5,152,506 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

### 3. Probabilidad de ruina bajo procesos de Poisson no estacionarios

La extensión del problema de estimar la probabilidad de ruina a un modelo que permita fluctuaciones en la intensidad de las reclamaciones resulta natural y describe con precisión ciertas aplicaciones como el seguro de automóviles y el seguro contra incendios [27].

El modelo que aplicaremos generaliza el proceso de Poisson a uno donde la tasa de llegada es función del tiempo, bajo ciertas hipótesis a este tipo de proceso de conteo le llamamos proceso de Poisson no estacionario, el objetivo de este capítulo consiste en construir estimadores de Monte Carlo (EMC) de la probabilidad de ruina, primero considerando una medida de intensidad  $a(t)$  continua para posteriormente extender los resultados a medidas de intensidad discontinuas.

#### 3.1 Marco teórico de los procesos de Poisson no estacionarios

**Definición 3.1** Un proceso estocástico  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de conteo si:

- (i)  $N_t \geq 0$ .
- (ii)  $N_t$  toma valores enteros.
- (iii) Si  $s < t$ , entonces  $N_s \leq N_t$ .
- (iv) Para  $s < t$ ,  $N_t - N_s$  es el número de eventos que ocurrieron en el intervalo  $(s, t]$ .

**Definición 3.2** El proceso conteo  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson no estacionario con función de intensidad  $\lambda(t) > 0$ ,  $t \geq 0$  si:

- (i)  $N_0 = 0$ .
- (ii)  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  tiene incrementos independientes.
- (iii)  $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$ .
- (iv)  $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t)h + o(h)$ .

Sea

$$a(t) := \int_0^t \lambda(s) ds ,$$

la medida de intensidad de  $\{N_t\}_{t \geq 0}$ .

**Teorema 3.3** Sea  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Poisson no estacionario y sean  $t, s \geq 0$ , entonces  $N_{t+s} - N_s$  se distribuye Poisson con esperanza  $a(t+s) - a(t)$ .

*Demostración:* Sea

$$P_n(s) := P(N_{t+s} - N_t = n).$$

Entonces

$$\begin{aligned} P_0(s+h) &= P(N_{t+s+h} - N_t = 0) \\ P_0(s+h) &= P(N_{t+s} - N_t = 0, N_{t+s+h} - N_{t+s} = 0), \end{aligned}$$

aplicando la definición 3.2(ii) al lado derecho tenemos

$$P_0(s+h) = P(N_{t+s} - N_t = 0)P(N_{t+s+h} - N_{t+s} = 0),$$

luego de la definición 3.2(iii) y (iv)

$$P_0(s+h) = P_0(s)[1 - \lambda(t+s)h + o(h)] ,$$

de aquí que

$$\frac{P_0(s+h) - P_0(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_0(s) + \frac{o(h)}{h}.$$

Hacemos  $h \rightarrow 0$ , luego

$$P_0'(s) = -\lambda(t+s)P_0(s)$$

es decir

$$\begin{aligned} \log P_0(s) &= - \int_0^s \lambda(t+u) du \\ P_0(s) &= e^{-[a(t+s) - a(t)]}. \end{aligned} \tag{3-13}$$

Análogamente para  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} P_n(s+h) &= P(N_{t+s+h} - N_t = n) \\ &= P(N_{t+s} - N_t = n, N_{t+s+h} - N_{t+s} = 0) \\ &\quad + P(N_{t+s} - N_t = n-1, N_{t+s+h} - N_{t+s} = 1) \\ &\quad + P(N_{t+s+h} - N_t = n, N_{t+s+h} - N_{t+s} \geq 2) \\ P_n(s+h) &= P_n(s)(1 - \lambda(t+s)h) + P_{n-1}(s)(\lambda(t+s)h) + o(h). \end{aligned}$$

De aquí

$$\frac{P_n(s+h) - P_n(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_n(s) + \lambda(t+s)P_{n-1}(s) + \frac{o(h)}{h},$$

haciendo  $h \rightarrow 0$ ,

$$P_n'(s) = -\lambda(t+s)P_n(s) + \lambda(t+s)P_{n-1}(s),$$

multiplicando ambos lados por  $e^{[a(t+s)-a(t)]}$

$$e^{[a(t+s)-a(t)]}(P_n'(s) + \lambda(t+s)P_n(s)) = \lambda(t+s)e^{[a(t+s)-a(t)]}P_{n-1}(s).$$

De aquí

$$\frac{d}{dt}(e^{[a(t+s)-a(t)]}P_n(s)) = \lambda(t+s)e^{[a(t+s)-a(t)]}P_{n-1}(s). \quad (3-14)$$

Cuando  $n = 1$  y al usar (3-13)

$$\frac{d}{dt}(e^{[a(t+s)-a(t)]}P_1(s)) = \lambda(t+s)$$

equivalentemente

$$P_1(s) = ([a(t+s) - a(t)] + c)e^{-[a(t+s)-a(t)]}. \quad (3-15)$$

Evaluamos en  $s = 0$  para calcular la constante

$$P_1(0) = P(N_{t+0} - N_t = 1) = 0.$$

Sustituyendo en (3-15)

$$(a(t+0) - a(t) + c)e^0 = 0,$$

es decir

$$c = 0.$$

Luego

$$P_1(s) = [a(t+s) - a(t)]e^{-[a(t+s)-a(t)]}.$$

Para demostrar que  $P_n(t) = e^{-[a(t+s)-a(t)]}[a(t+s) - a(t)]^n / n!$  se usará inducción matemática. Asumimos que la fórmula anterior vale para  $n-1$ , entonces al emplear (3-14)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{[a(t+s)-a(t)]}P_n(s)) &= \lambda(t+s)e^{[a(t+s)-a(t)]}e^{-[a(t+s)-a(t)]}[a(t+s) - a(t)]^{n-1} / (n-1)! \\ &= \frac{\lambda(t+s)[a(t+s) - a(t)]^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

que implica

$$e^{[a(t+s)-a(t)]} P_n(s) = \frac{[a(t+s)-a(t)]^n}{n!} + c.$$

Pero

$$P_n(0) = P(N_{t+0} - N_t = n) = 0,$$

entonces

$$P_n(t) = e^{-[a(t+s)-a(t)]} [a(t+s)-a(t)]^n / n!. \quad \square$$

Es importante resaltar que el teorema implica que  $E(N_t) = E(N_t - N_0) = a(t)$ .

**Proposición 3.4**  $a(t)$  es una función no decreciente y continua por la derecha.

*Demostración:* Como  $N_{t+s} \geq N_t$  entonces  $EN_{t+s} \geq EN_t$ , es decir

$$a(t+s) \geq a(t).$$

Sea  $t_n$  una sucesión tal que  $t_n \downarrow t$ , entonces  $N_{t_n} \downarrow N_t$  porque  $N$  es continua por la derecha. Por el teorema de convergencia monótona

$$\lim_{t_n \downarrow t} a(t_n) = a(t). \quad \square$$

**Definición 3.5** La inversa de la medida de intensidad es

$$a^{-1}(t) := \sup\{s \mid a(s) \leq t\}.$$

Observe que  $a^{-1}$  es continua por la derecha. Si además  $a$  es continua,  $a^{-1}$  es creciente y

$$a \circ a^{-1}(t) := a(a^{-1}(t)) = t, \quad t < a(\infty).$$

### 3.2 Construcción de estimadores de Monte Carlo con medida de intensidad continua

Análogamente a la construcción de los ECMC en el capítulo anterior, desarrollamos un algoritmo para simular bajo horizonte finito  $T$  el proceso de riesgo  $Y_t$  donde el proceso de llegadas es Poisson no estacionario, para posteriormente efectuar  $n$  realizaciones de  $Y_t$  y contar el número de veces  $R$  que ocurrió la ruina (denotemos por  $A$  el evento: ocurre la ruina).

Por la ley fuerte de los grandes números [11],  $R/n$  converge a la esperanza  $EI_A$  de la función indicadora del evento ruina  $A$ , pero

$$EI_A = P(\text{ ocurre la ruina } ) = \Psi(u, T),$$

luego el estimador de Monte Carlo (EMC) de  $\Psi(u, T)$  que buscamos es  $\hat{\Psi}(u, T) := R/n$ .

**Proposición 3.6** Sea  $N$  un proceso de Poisson no estacionario con medida de intensidad  $a$  continua con  $a(\infty) = \infty$ . Entonces el proceso de conteo  $\tilde{N} := N \circ a^{-1}$  es un proceso de Poisson estacionario con  $\lambda = 1$ .

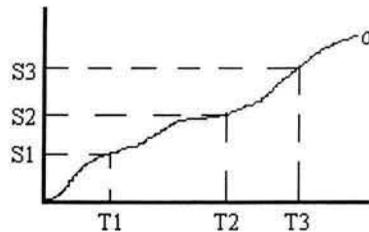
*Demostración:* Como  $a^{-1}$  es creciente  $\tilde{N}$  tiene incrementos independientes.

Por otra parte el teorema 3.3 implica que  $\tilde{N}_t - \tilde{N}_s = N_{a^{-1}(t)} - N_{a^{-1}(s)}$  se distribuye Poisson con esperanza

$$a(a^{-1}(t)) - a(a^{-1}(s)) = t - s. \quad \square$$

Observe en la figura 3.1 que si  $S_1, S_2, \dots$  son los tiempos de arribo de un proceso de Poisson con  $\lambda = 1$ ,  $T_1, T_2, \dots$  forman un proceso de Poisson no estacionario con esperanza  $a(\cdot)$ .

**Figura 3.1**



**Algoritmo 3.7** Estimación de la probabilidad de ruina con horizonte finito  $T$ , bajo un proceso de Poisson no estacionario con medida de intensidad  $a$  continua.

**Objetivo:** Generar las  $n$  realizaciones del proceso de riesgo  $Y_t$ , donde el proceso de llegada de las reclamaciones es Poisson no estacionario, para construir  $\hat{\Psi}(u, T)$  el estimador de Monte Carlo (EMC) de  $\Psi(u, T)$ .

**Entrada:**  $n, T, u, \rho, a, F_X$ .

**Salida:**  $\hat{\Psi}(u, T)$ .

**Método:**

$i \leftarrow 1$ .

$R \leftarrow 0$ .

Hasta que  $i > n$  haz:

$Y \leftarrow 0$ .

$t \leftarrow 0$ .

$Z \leftarrow 0.$   
 $W \leftarrow 0.$   
 Mientras  $(Y \leq u)$  y  $(t < T)$  haz:  
     Generamos  $S \sim \exp(1).$   
     Generamos  $X \sim F_X.$   
      $W \leftarrow W + S.$   
      $t \leftarrow a^{-1}(W).$   
      $Z \leftarrow Z + X.$   
      $Y \leftarrow Z - (1 + \rho) \cdot EX \cdot a(t).$   
 Si  $t > T$  entonces  $Z \leftarrow Z - X.$   
      $t \leftarrow T.$   
 $Y \leftarrow Z - (1 + \rho) \cdot EX \cdot a(t).$   
 Si  $Y > u$  entonces  $R \leftarrow R + 1.$   
 $i \leftarrow i + 1.$

$$\hat{\Psi}(u, T) \leftarrow R/n.$$

A continuación se presentan tres ejemplos basados en la implementación computacional del algoritmo 3.7.

### 3.3 Aplicaciones con medida de intensidad continua

**Ejemplo 3.8** Proceso de riesgo con llegadas Poisson no estacionario con reclamaciones distribuidas  $U(1,10)$ .

En este ejemplo consideramos una medida de intensidad  $a(t) = t^2$ , por lo que  $\lambda(t) = 2t$ . El ejemplo está organizado en tres tablas, en la primera (Tabla 3.1) se observa el comportamiento de la probabilidad de ruina estimada bajo diferentes valores de capital inicial, en la segunda (Tabla 3.2) se modifica el horizonte de tiempo y en la última (Tabla 3.3). Todos los valores del EMC se calcularon con  $n = 5 \times 10^4$ .

Tabla 3.1: Caso no estacionario / Uniforme,  $\rho = 0.01$

$u$	$\hat{\Psi}(u,10)$	$S_{EMC}$	$Tolerancia_{0,01}$	%Tol
25	0.6276	$2.16 \times 10^{-3}$	$5.57 \times 10^{-3}$	0.89
50	0.3673	$2.15 \times 10^{-3}$	$5.55 \times 10^{-3}$	1.51
100	0.0906	$1.28 \times 10^{-3}$	$3.30 \times 10^{-3}$	3.65
150	0.0141	$5.27 \times 10^{-4}$	$1.36 \times 10^{-3}$	9.64

Observe en la Tabla 3.1 la consistencia respecto al capital inicial  $u$ , a mayor capital inicial menor probabilidad de ruina.

El cuarto renglón de la Tabla 3.1 produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 10,059,741 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

Tabla 3.2: Caso no estacionario / Uniforme,  $u = 25$

$T$	$\hat{\Psi}(25, T)$	$S_{EMC}$	$Tolerancia_{0.01}$	%Tol
10	0.6276	$2.16 \times 10^{-3}$	$5.57 \times 10^{-3}$	0.89
15	0.7328	$1.97 \times 10^{-3}$	$5.09 \times 10^{-3}$	0.69
20	0.7876	$1.83 \times 10^{-3}$	$4.71 \times 10^{-3}$	0.59

La Tabla 3.2 es consistente con el hecho de que a mayor horizonte de tiempo mayor probabilidad de ruina; el tercer renglón produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 13,502,893 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

Tabla 3.3: Caso no estacionario / Uniforme

$\rho$	$\hat{\Psi}(25, 10)$	$S_{EMC}$	$Tolerancia_{0.01}$	%Tol
0.01	0.6276	$2.16 \times 10^{-3}$	$5.57 \times 10^{-3}$	0.89
0.05	0.5269	$2.23 \times 10^{-3}$	$5.75 \times 10^{-3}$	1.09
0.10	0.4122	$2.20 \times 10^{-3}$	$5.66 \times 10^{-3}$	1.38
0.20	0.2321	$1.89 \times 10^{-3}$	$4.86 \times 10^{-3}$	2.09

En la Tabla 3.3 se observa que a mayor factor de recargo es menor la probabilidad de ruina; el cuarto renglón produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 8,197,712 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

**Ejemplo 3.9** Caso no estacionario / Pareto( $\alpha, \beta$ ).

La intensidad de llegada es la misma del ejemplo 3.8, pero los montos de las reclamaciones se distribuyen Pareto. Para simular los montos de las reclamaciones se emplea el método de la transformada inversa [22,33,34]. Esta distribución resulta bastante útil en algunas aplicaciones actuariales [21]. Se realizaron  $n = 10^4$  simulaciones en cada realización del EMC.

Tabla 3.4: Caso no estacionario / Pareto

$\rho$	$u$	$\alpha$	$\beta$	$T$	$\hat{\Psi}(u, T)$	$S_{EMC}$	$Tol_{0.01}$	%Tol
0.01	10	3	0.5	10	0.2114	$4.08 \times 10^{-3}$	$1.05 \times 10^{-2}$	4.97
0.01	10	3	0.5	20	0.4872	$4.99 \times 10^{-3}$	$1.29 \times 10^{-2}$	2.64
0.05	10	3	0.5	20	0.2851	$4.51 \times 10^{-3}$	$1.16 \times 10^{-2}$	4.07
0.01	20	4	2	10	0.4251	$4.94 \times 10^{-3}$	$1.27 \times 10^{-2}$	2.99
0.05	20	4	2	10	0.3220	$4.67 \times 10^{-3}$	$1.20 \times 10^{-2}$	3.74
0.05	20	4	2	30	0.4865	$4.99 \times 10^{-3}$	$1.28 \times 10^{-2}$	2.64

El último renglón de la Tabla 3.4 produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 10,433,499 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

**Ejemplo 3.10** Caso no estacionario / Weibull( $\alpha, \beta$ )

La distribución de Weibull resulta interesante porque no existe la función generadora de momentos si  $\alpha < 1$  [11]. Para simular los montos de las reclamaciones se emplea el

método de la transformada inversa [22,33,34]. Se realizaron  $n = 10^4$  simulaciones en cada realización del EMC.

Tabla 3.5: Caso no estacionario / Weibull

$\rho$	$u$	$\alpha$	$\beta$	$T$	$\hat{\Psi}(u, T)$	$S_{EMC}$	$Tol_{0.01}$	%Tol
0.01	10	0.5	1	10	0.7082	$4.55 \times 10^{-3}$	$1.17 \times 10^{-2}$	1.65
0.01	10	0.5	1	50	0.9221	$2.68 \times 10^{-3}$	$6.90 \times 10^{-3}$	0.75
0.03	20	0.5	1	50	0.8325	$3.73 \times 10^{-3}$	$9.62 \times 10^{-3}$	1.15
0.01	50	2	3	20	0.1102	$3.13 \times 10^{-3}$	$8.06 \times 10^{-3}$	7.31
0.03	40	2	3	20	0.1223	$3.27 \times 10^{-3}$	$8.43 \times 10^{-3}$	6.89
0.03	40	2	3	30	0.2127	$4.09 \times 10^{-3}$	$1.05 \times 10^{-2}$	4.95

El último renglón de la Tabla 3.5 produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 15,780,413 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

### 3.4 Construcción de estimadores de Monte Carlo con medida de intensidad discontinua

Ahora procederemos de la misma forma que en la sección 3.2 desarrollamos un algoritmo para simular bajo horizonte finito  $T$  el proceso de riesgo  $Y_t$  donde el proceso de llegadas es Poisson no estacionario con medida de intensidad discontinua, para posteriormente efectuar  $n$  realizaciones de  $Y_t$  y contar el número de veces  $R$  que ocurrió la ruina, luego el EMC de  $\Psi(u, T)$  que buscamos es  $\hat{\Psi}(u, T) := R/n$ .

Hemos encontrado que  $a$  es necesariamente no decreciente y continua por la derecha (Proposición 3.4). Como es no decreciente el límite por la izquierda

$$a(t^-) := \lim_{s \uparrow t} a(s),$$

existe para toda  $t$ . Supongamos ahora que para un punto particular  $t$ ,

$$a(t^-) \neq a(t)$$

y sea  $\alpha := a(t) - a(t^-)$ . Entonces el número de arribos  $N_t - N_{t^-}$  tiene por el Teorema 3.3 esperanza  $\alpha$ . Por los axiomas 3.2 (iii) y (iv)  $N_t - N_{t^-}$  es 0 o 1, luego

$$\begin{aligned} E(N_t - N_{t^-}) &= 0 \cdot P(N_t - N_{t^-} = 0) + 1 \cdot P(N_t - N_{t^-} = 1) \\ &= P(N_t - N_{t^-} = 1) = a(t) - a(t^-) = \alpha. \end{aligned}$$

Podemos pensar en el punto  $t$  como el momento en que un arribo está programado y que puede llegar con probabilidad  $\alpha$  y no llegar con probabilidad  $1 - \alpha$ .

Si  $a$  tiene saltos de magnitudes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  en los tiempos fijos  $t_1, t_2, \dots$ , entonces el análisis anterior significa que habrá un arribo exactamente en  $t_i$  con probabilidad  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

En general un proceso de Poisson no estacionario  $N_t$  es la suma de dos procesos de conteo,

$$N_t = N_t^f + N_t^c, \quad t \geq 0. \quad (3-16)$$

Los tiempos de salto de  $N^f$  son fijos, estos son los puntos de discontinuidad de  $a$  y la probabilidad de que ocurra un salto en el momento fijo  $t$  es  $a(t) - a(t^-)$ . Si definimos  $a^f(t)$  como la suma de todos los saltos de  $a$  en  $[0, t]$ , es decir

$$a^f(t) := \sum_{s \leq t} [a(s) - a(s^-)],$$

entonces

$$a^c(t) = a(t) - a^f(t), \quad t \geq 0,$$

es una función continua no decreciente y el segundo componente  $N^c$  en la descomposición (3-16) es un proceso de Poisson no estacionario con medida de intensidad  $a^c$ . Esto nos permite construir un algoritmo para estimar la probabilidad de ruina bajo un proceso no estacionario con  $a$  discontinua y además, nos facilita la interpretación de modelos como veremos en el Ejemplo 3.12.

**Algoritmo 3.11** Estimación de la probabilidad de ruina bajo un proceso de Poisson no estacionario con medida de intensidad  $a$  con  $k$  discontinuidades.

**Objetivo:** Generar las  $n$  realizaciones del proceso de riesgo  $Y_t$  donde el proceso de llegada de las reclamaciones es Poisson no estacionario, para construir  $\hat{\Psi}(u, T)$  el estimador de Monte Carlo (EMC) de  $\Psi(u, T)$ .

**Entrada:**  $n, T, u, \rho, a^c, F_X, \alpha_1, \dots, \alpha_k, t_1, \dots, t_k$ .

**Salida:**  $\hat{\Psi}(u, T)$ .

**Método:**

$i \leftarrow 1$ .

$R \leftarrow 0$ .

Hasta que  $i > n$  haz:

$Y \leftarrow 0$ .

$t \leftarrow 0$ .

$Z \leftarrow 0$ .

$W \leftarrow 0$ .

$SUM \leftarrow 0$ .

$X_{Memoria} \leftarrow 0$ .

$Flag_1 \leftarrow 0, \dots, Flag_k \leftarrow 0$ .

Mientras  $(Y \leq u)$  y  $(t < T)$  haz:

Generamos  $S \sim \exp(1)$ .

Generamos  $X \sim F_X$ .

$W \leftarrow W + S$ .

$t \leftarrow (a^c)^{-1}(W)$ .

$j \leftarrow 1$ .

$X_{\text{Memoria}} \leftarrow X$ .

$Z \leftarrow Z + X$ .

Hasta que  $j > k$  haz:

Si  $(t \geq t_j)$  y  $(Flag_j = 0)$  y  $(t \leq T)$  entonces

$SUM \leftarrow SUM + \alpha_j$ .

$a(t) \leftarrow a^c(t) + SUM$ .

$Flag_j \leftarrow 1$ .

Generamos  $D \sim U(0,1)$ .

Si  $U \leq \alpha_j$  entonces  $X \sim F_X$ .

$Z \leftarrow Z + X$ .

$Y \leftarrow Z - (1 + \rho) \cdot EX \cdot a(t)$ .

Si  $t > T$  entonces  $Z \leftarrow Z - X_{\text{Memoria}}$ .

$t \leftarrow T$ .

$Y \leftarrow Z - (1 + \rho) \cdot EX \cdot a(t)$

Si  $Y > u$  entonces  $R \leftarrow R + 1$ .

$i \leftarrow i + 1$ .

$\hat{\Psi}(u, T) \leftarrow R/n$ .

### 3.5 Formulación de un modelo de riesgo para pólizas contra incendio y Resultados

**Ejemplo 3.12** Caso no estacionario,  $a$  discontinua / exponencial mixta.

En zonas de cultivo eventualmente se programan quemas, que tienen por finalidad limpiar las parcelas, sin embargo algunas de estas zonas están cerca de zonas residenciales y existe el riesgo de que algún incendio salga de control y se propague a la zona habitacional. Asimismo puede en cualquier momento estallar un incendio en la zona habitacional por muy diversas causas.

En este ejemplo suponemos que existen 3 incendios programados en los momentos 1.1, 1.2 y 3, considerando un horizonte de 4 semanas (1 mes). La probabilidad de que la primera quema se propague y genere una reclamación es  $\alpha_1 = 0.2$ , la probabilidad de la segunda es  $\alpha_2 = 0.3$  y  $\alpha_3 = 0.7$  es la probabilidad de la última.

Asumimos que la medida de intensidad de  $N^c$  es  $a^c(t) = t^2$  y que los montos de las reclamaciones se distribuyen exponencial mixta de acuerdo con estudios realizados por Wikstad [37] y Cramér [15] sobre pólizas contra incendio en Suecia que no incluyen instalaciones industriales.

La distribución considerada es

$$F_X(x) = 1 - 0.0039793e^{-0.014631x} - 0.1078392e^{-0.190206x} - 0.8881815e^{-5.514588x}.$$

Para simular los montos de las reclamaciones se usó el método de la transformada inversa, resolviendo la ecuación  $F_X(x) = c$  mediante Newton-Raphson [10].

Tabla 3.6: Caso no estacionario  $a$  discontinua,  $T = 4$

$n$	$\rho$	$u$	$\hat{\Psi}(u, T)$	$S_{EMC}$	$Tolerancia_{0.01}$	%Tol
$10^3$	0.01	5	0.3470	$1.51 \times 10^{-2}$	$3.89 \times 10^{-2}$	11.18
$10^4$	0.01	5	0.3236	$4.68 \times 10^{-3}$	$1.20 \times 10^{-2}$	3.72
$10^5$	0.01	5	0.3264	$1.48 \times 10^{-3}$	$3.82 \times 10^{-3}$	1.17
$10^5$	0.01	10	0.2033	$1.27 \times 10^{-3}$	$3.28 \times 10^{-3}$	1.61
$10^5$	0.05	10	0.1987	$1.26 \times 10^{-3}$	$3.25 \times 10^{-3}$	1.64
$10^5$	0.05	20	0.0911	$9.1 \times 10^{-4}$	$2.34 \times 10^{-3}$	2.57

Interpretamos la Tabla 3.6 de la siguiente forma, en los primeros tres renglones se observa como aumenta la precisión del EMC conforme aumenta  $n$ ; al comparar los renglones 3 y 4 notamos que la probabilidad estimada de ruina disminuye al aumentar el capital inicial; en los renglones 4 y 5 se aprecia la disminución del EMC cuando  $\rho$  el factor de recargo aumenta y finalmente en los renglones 5 y 6 se observa la diferencia en precisión de los valores estimados debido a la magnitud de los mismos, es decir para el mismo número de simulaciones un valor estimado menor tiene una precisión menor.

El último renglón de la Tabla 3.6 produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 3,235,776 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

## 4. Procesos de renovación y probabilidad de ruina

Una generalización natural del problema de ruina, consiste en debilitar la hipótesis de que el proceso de llegada de las reclamaciones sea Poisson (estacionario a no-estacionario) y considerar procesos con tiempos entre llegadas no necesariamente exponencialmente distribuidos. En este capítulo construiremos EMC para la probabilidad de que el proceso de reclamaciones acumuladas  $Z_t$  supere cierto nivel  $\theta$  considerando que el proceso de llegadas es un proceso de renovación, lo que nos permitirá modelar tiempos entre llegadas con diversas distribuciones, asimismo formularemos un modelo de renovación compuesto para analizar el volumen de facturación de empresas de bienes o servicios [25].

### 4.1 Marco teórico de los procesos de renovación

**Definición 4.1** Sea  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias no negativas independientes con distribución común  $F$ , con  $F(0) = P(T_n \leq 0) < 1$ . Sean

$$S_0 := 0, \quad S_n := \sum_{i=1}^n T_i, \quad n \geq 1,$$

$S_n$  es el tiempo del  $n$ -ésimo arribo y sea

$$N_t := \sup\{n | S_n \leq t\}$$

el número de arribos hasta el momento  $t$ , al proceso  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  le llamamos proceso de renovación.

Observe que

$$\mu := ET_n,$$

**Proposición 4.2** El número de llegadas de un proceso de renovación en un horizonte finito es finito.

*Demostración:* Por la ley fuerte de los grandes números con probabilidad 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$S_n / n \rightarrow \mu.$$

Pero como  $\mu > 0$ ,  $S_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Esto implica que  $S_n \leq t$  para a lo más un número finito de valores de  $n$ .  $\square$

La proposición anterior implica que  $N_t$  es finito y entonces podemos escribir

$$N_t = \max\{n | S_n \leq t\}.$$

**Definición 4.3** Llamamos función de renovación a

$$m(t) := EN_t.$$

La relación entre  $m(t)$  y la distribución de los tiempos entre llegadas  $F$ , es establecida por la siguiente proposición.

**Proposición 4.4**

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

*Demostración:* Si  $T_i \sim F$  entonces  $S_n = \sum_{i=1}^n T_i \sim F_n$ , es decir  $S_n$  se distribuye como la  $n$ -ésima convolución de  $F$  consigo misma.

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} I_n,$$

donde

$$\begin{aligned} I_n &= 1 && \text{si la } n\text{-ésima renovación ocurre en } [0, t], \\ I_n &= 0 && \text{en cualquier otro caso.} \end{aligned}$$

Luego,

$$EN_t = E \left[ \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right],$$

como  $I_n \geq 0$

$$\begin{aligned}
EN_t &= \sum_{n=1}^{\infty} EI_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(I_n = 1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \quad \square
\end{aligned}$$

**Proposición 4.5**

$$m(t) < \infty \quad \text{para toda } 0 \leq t \leq \infty.$$

*Demostración:* Como  $P(T_n = 0) < 1$ , por la propiedad de continuidad de la probabilidad existe  $\alpha > 0$  tal que  $P(T_n \geq \alpha) > 0$ . Ahora definimos el proceso de renovación relacionado  $\bar{N}_t$ ,

$$\begin{aligned}
\bar{T}_n &:= 0 && \text{si } T_n < \alpha, \\
\bar{T}_n &:= \alpha && \text{si } T_n \geq \alpha.
\end{aligned}$$

Sea

$$\bar{N}_t := \sup\{n \mid \bar{T}_1 + \dots + \bar{T}_n \leq t\}.$$

En el proceso de renovación relacionado  $\bar{N}_t$  las llegadas se efectúan en los tiempos  $t = n\alpha$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  y el número de renovaciones en cada uno de esos momentos es una variable aleatoria independiente con distribución geométrica y media  $1/P(T_n \geq \alpha)$ .

Entonces,

$$E\bar{N}_t \leq \frac{(t/\alpha) + 1}{P(T_n \geq \alpha)} < \infty$$

y se sigue el resultado ya que  $\bar{T}_n \leq T_n$  implica

$$\bar{N}_t \geq N_t. \quad \square$$

**Proposición 4.6** *Ley fuerte para procesos de renovación.*  
Con probabilidad 1

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

*Demostración:* Como  $S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$

$$\frac{S_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{S_{N_t+1}}{N_t}. \quad (4-17)$$

Pero  $S_{N_t} / N_t$  es el promedio de los  $n$  primeros tiempos entre llegadas, luego de la ley fuerte de los grandes números  $S_{N_t} / N_t \rightarrow \mu$  cuando  $N_t \rightarrow \infty$ . Como  $N_t \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{S_{N_t}}{N_t} \rightarrow \mu \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Más aún, escribiendo

$$\frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \frac{N_t+1}{N_t},$$

tenemos por el mismo razonamiento

$$\frac{S_{N_t+1}}{N_t} \rightarrow \mu \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

El resultado se sigue de (4-17).  $\square$

**Definición 4.7** Una variable aleatoria que toma valores enteros  $N$  es un tiempo de paro para la sucesión  $T_1, T_2, \dots$  si el evento  $\{N = n\}$  es independiente de  $T_{n+1}, T_{n+2}, \dots$  para toda  $n = 1, 2, \dots$

**Teorema 4.8 Ecuación de Wald.**

Si  $T_1, T_2, \dots$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza finita, y si  $N$  es un tiempo de paro para  $T_1, T_2, \dots$  tal que  $EN$  es finita, entonces

$$E\left[\sum_{n=1}^N T_n\right] = EN \cdot ET.$$

*Demostración:* Sea

$$\begin{aligned} I_n &:= 1 && \text{si } N \geq n, \\ I_n &:= 0 && \text{si } N < n, \end{aligned}$$

tenemos que

$$\sum_{n=1}^N T_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n I_n.$$

Luego usando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue [19]

$$E\left[\sum_{n=1}^N T_n\right] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} T_n I_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[T_n I_n]. \quad (4-18)$$

Sin embargo  $I_n = 1$  sí y solo sí no nos hemos detenido después de observar  $T_1, \dots, T_{n-1}$ , entonces  $I_n$  está determinada por  $T_1, \dots, T_{n-1}$  y es por tanto independiente de  $T_n$ .

De (4-18) obtenemos

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{n=1}^N T_n\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} ET_n \cdot EI_n \\ &= ET \sum_{n=1}^{\infty} EI_n \\ &= ET \sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n) \\ &= ET \cdot EN. \quad \square \end{aligned}$$

**Corolario 4.9** Si  $\mu < \infty$ , entonces

$$ES_{N_t+1} = \mu \cdot (m(t) + 1).$$

*Demostración:* Recuerde que  $N_t \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$ .

Sean  $T_1, T_2, \dots$  los tiempos entre llegadas de un proceso de renovación y detengámonos en la primer renovación después de  $t$ , es decir en la llegada  $N_t + 1$ . Para verificar que  $N_t + 1$  es un tiempo de paro para  $T_1, T_2, \dots$ , note que

$$\begin{aligned} N_t + 1 = n &\Leftrightarrow N_t = n - 1 \\ &\Leftrightarrow T_1 + \dots + T_{n-1} \leq t \\ &\Leftrightarrow T_1 + \dots + T_n > t. \end{aligned}$$

Entonces el evento  $\{N_t + 1 = n\}$  depende sólo de  $T_1, \dots, T_n$  y es independiente de  $T_{n+1}, \dots$ ; luego  $N_t + 1$  es un tiempo de paro. Del Teorema 4.8 obtenemos que cuando  $ET < \infty$

$$E(T_1 + \dots + T_{N_t+1}) = ET \cdot E(N_t + 1),$$

pero

$$E(N_t + 1) = EN_t + 1 = m(t) + 1$$

y

$$\mu = ET. \quad \square$$

**Teorema 4.10** *El Teorema elemental de renovación.*

$$\frac{m(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (\text{Donde } \frac{1}{\infty} := 0)$$

*Demostración:* Supondremos primero que  $\mu < \infty$ . Ahora

$$S_{N_t+1} > t.$$

Tomando esperanzas y usando el Corolario 4.9

$$\mu \cdot (m(t)+1) > t,$$

lo que implica

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}. \quad (4-19)$$

Para el limsup, fijemos una constante  $M$  y definimos un nuevo proceso de renovación haciendo

$$\begin{aligned} T_n &:= T_n & \text{si } T_n \leq M, \quad n = 1, 2, K \\ T_n &:= M & \text{si } T_n > M. \end{aligned}$$

Sean  $\bar{S}_n := \sum_{i=1}^n T_i$ , y  $\bar{N}_t := \sup\{n | \bar{S}_n \leq t\}$ . Como los tiempos entre llegadas para este proceso de renovación truncado están acotados por  $M$ , obtenemos

$$\bar{S}_{\bar{N}_t+1} \leq t + M,$$

por el Corolario 4.9

$$(\bar{m}(t)+1)\mu_M \leq t + M,$$

donde  $\mu_M = ET_n$ . Luego

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_M}.$$

Ahora bien, como  $\bar{S}_n \leq S_n$ , se sigue que  $\bar{N}_t \geq N_t$  y  $\bar{m}(t) \geq m(t)$ , entonces

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_M}. \quad (4-20)$$

Haciendo  $M \rightarrow \infty$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}, \quad (4-21)$$

y la conclusión sigue de (4-19) y (4-21).

Cuando  $\mu = \infty$ , consideraremos de nuevo el proceso de renovación truncado, como  $\mu_M \rightarrow \infty$  cuando  $M \rightarrow \infty$ , la conclusión sigue de (4-20).  $\square$

**Definición 4.11** Una variable aleatoria no negativa  $T$  es *látice* si existe  $d \geq 0$  tal que  $\sum_{n=0}^{\infty} P(T = nd) = 1$ . Esto es,  $T$  es *látice* si solamente toma valores múltiplos de un número no negativo  $d$ . Al valor máximo de  $d$  con esta propiedad le llamamos el *periodo* de  $T$ . Si  $T$  es *látice* con distribución  $F$ , decimos que  $F$  es *látice*.

## 4.2 Construcción de estimadores de Monte Carlo

Ahora procederemos en forma análoga a las secciones 3.2 y 3.4, desarrollamos un algoritmo para simular bajo horizonte finito  $T$  el proceso de reclamaciones acumuladas  $Z_t$  donde el proceso de llegadas es de renovación, para posteriormente efectuar  $n$  realizaciones de  $Z_t$  y contar el número de veces  $R$  que se superó o alcanzó el umbral  $\theta$ , luego el EMC de  $P(Z_T \geq \theta)$  que buscamos es  $\hat{P}(Z_T \geq \theta) := R/n$ .

El siguiente teorema nos proporciona las bases para validar las simulaciones.

**Teorema 4.12** Si los montos de las reclamaciones y los tiempos entre llegadas tienen esperanzas finitas  $EX$  y  $ET$  respectivamente, entonces (i) con probabilidad 1,

$$(ii) \quad \begin{aligned} Z_t / t &\rightarrow EX / ET && \text{cuando } t \rightarrow \infty, \\ EZ_t / t &\rightarrow EX / ET && \text{cuando } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

*Demostración:* Para probar (i) escribimos

$$\begin{aligned} Z_t / t &= \sum_{i=1}^{N_t} X_i / t \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N_t} X_i}{N_t} \cdot \frac{N_t}{t}. \end{aligned}$$

Por la ley fuerte de grandes números

$$Z_t / N_t \rightarrow EX \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

y por la Proposición 4.6

$$N_t / t \rightarrow 1/ET \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Queda demostrado (i).

Para demostrar (ii) observe que como  $N_t + 1$  es un tiempo de paro para  $T_1, T_2, \dots$ , también es un tiempo de paro para  $X_1, X_2, \dots$ . Entonces por el Teorema 4.8

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{N_t+1} X_i\right] - EX_{N_t+1} \\ &= (m(t)+1)EX - EX_{N_t+1}, \end{aligned}$$

dividiendo entre  $t$  ambos lados

$$\frac{EZ_t}{t} = \frac{(m(t)+1)}{t} EX - EX_{N_t+1},$$

y del Teorema 4.10 obtenemos el resultado si demostramos que  $EX_{N_t+1}/t \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Sea  $g(t) := EX_{N_t+1}$ , al condicionar respecto a  $S_{N_t}$  y tomando  $F(t) := 1 - F(t)$

$$g(t) = E(X_{N_t+1} | S_{N_t} = 0)F(t) + \int_0^t E(X_{N_t+1} | S_{N_t} = s)F(t-s)dm(s).$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} E(X_{N_t+1} | S_{N_t} = 0) &= E(X_1 | T_1 > t), \\ E(X_{N_t+1} | S_{N_t} = s) &= E(X_n | T_n > t-s), \end{aligned}$$

sustituyendo

$$g(t) = E(X_1 | T_1 > t)F(t) + \int_0^t E(X_n | T_n > t-s)F(t-s)dm(s). \quad (4-22)$$

Sea

$$h(t) := E(X_1 | T_1 > t)F(t) = \int_t^\infty E(X_1 | T_1 = r)HF(r),$$

y note que

$$E|X_1| = \int_0^\infty E(X_1 | T_1 = r)HF(r) < \infty,$$

se sigue que  $h(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $h(t) \leq E|T_1|$  para toda  $t$ , luego podemos escoger  $\tau$  tal que  $|h(t)| < \varepsilon$  siempre que  $t \geq \tau$ . De (4-22)

$$\begin{aligned}
\frac{|g(t)|}{t} &\leq \frac{|h(t)|}{t} + \int_0^{t-\tau} \frac{|h(t-x)|}{t} dm(x) + \int_{t-\tau}^t \frac{|h(t-x)|}{t} dm(x) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{t} + \frac{\varepsilon m(t-\tau)}{t} + EX_1 \frac{(m(t) - m(t-\tau))}{t}, \\
&\rightarrow \frac{\varepsilon}{ET} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

por el Teorema 4.10. Como  $\varepsilon$  es arbitrario,

$$g(t)/t \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad \square$$

Este teorema nos proporciona una aproximación para la tasa de ingresos  $c = (1 + \rho)EZ_t/t$  y del resultado anterior

$$c = (1 + \rho)EX/ET.$$

**Algoritmo 4.13** Estimación de  $P(Z_T \geq \theta)$  bajo un proceso de renovación.

**Objetivo:** Generar las  $n$  realizaciones del proceso de riesgo  $Y_t$  donde el proceso de llegada de las reclamaciones es un proceso de renovación, para construir  $\hat{P}(Z_T \geq \theta)$  el estimador de Monte Carlo (EMC) de  $P(Z_T \geq \theta)$ .

**Entrada:**  $n, T, \theta, F, F_X$ .

**Salida:**  $\hat{P}(Z_T \geq \theta)$ .

**Método:**

$i \leftarrow 1$ .

Hasta que  $i > n$  haz:

$Z \leftarrow 0$ .

$t \leftarrow 0$ .

Mientras  $(Z < \theta)$  y  $(t < T)$  haz:

Generamos  $W \sim F$ .

Generamos  $X \sim F_X$ .

$Z \leftarrow Z + X$ .

$t \leftarrow t + W$ .

Si  $(Z \geq \theta)$  y  $(t \leq T)$  entonces  $R \leftarrow R + 1$ .

$i \leftarrow i + 1$ .

$\hat{P}(Z_T \geq \theta) \leftarrow R/n$ .

### 4.3 Formulación de modelos de renovación para análisis de riesgo en el sector productivo y Resultados

**Ejemplo 4.14** Análisis de volumen de facturación para empresas de bienes o servicios. El proceso de reclamaciones acumuladas  $Z_t$  se puede emplear para modelar y analizar riesgo en el sector productivo. El valor de cada contrato es una variable aleatoria  $X$  con distribución  $F_X$ , supongamos que los tiempos entre facturación se distribuyen  $F$ , el

volumen de facturación para un intervalo de tiempo futuro  $[0, t]$  es  $Z_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i$ , donde

$N_t$  es el proceso de renovación asociado a la distribución de los tiempos entre facturación. Ahora podemos plantear y resolver problemas tales como: estimar la probabilidad de que el volumen de facturación para el año próximo exceda cierta meta específica  $\theta$ , estimar la probabilidad de que la empresa sobreviva e identificar la meta de facturación asociada a cierto nivel de riesgo.

Para efectos de ilustrar el modelo formulado anteriormente, supondremos que los tiempos entre facturación  $T$  son Erlang(3,1) y que  $X \sim \exp(0.1)$ .

De acuerdo al Teorema 4.12 (ii),

$$\frac{EZ_t}{t} = \frac{EX}{ET} = \frac{1/0.1}{1} = 10 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Ahora empleando Monte Carlo estimaremos  $EZ_t/t$  la ganancia esperada por unidad de tiempo, realizando  $n = 10^4$  simulaciones para cada horizonte de tiempo considerado.

Tabla 4.1: Velocidad de convergencia

$t$	$\hat{EZ}_t/t$
12	9.71
50	9.93
100	9.97
400	9.99

Observe que con un horizonte de tiempo pequeño  $t = 12$ , tenemos un valor bastante aproximado (9.71) al valor límite (10), lo que significa una rápida convergencia, que nos es útil ya que consideraremos un horizonte de 12 meses.

El último renglón de la Tabla 4.1 produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 16,028,321 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

De la Tabla 4.1, el volumen de facturación esperado para el próximo año es

$$EZ_{12} = 12 \cdot (9.71) = 116.52 \text{ u.m.},$$

donde u.m. son unidades monetarias.

Ahora podemos estimar la probabilidad de que el volumen de facturación  $Z_{12}$  supere la ganancia esperada  $EZ_{12}$ , y considerar además dos escenarios, uno pesimista con una atenuación en un 10% de la ganancia esperada y otro optimista con un crecimiento adicional del 10%. (Ver Tabla 4.2, renglones 1, 2 y 3)

Además se desea manejar un nivel de riesgo aceptable para un volumen de facturación meta es decir, para qué volumen aproximado de ganancia la probabilidad de superar dicho volumen meta es por lo menos 0.9. (Ver Tabla 4.2, renglón 4)

Y finalmente podemos estimar la probabilidad de supervivencia de la firma, si el volumen de facturación anual mínimo para evitar la ruina es del 50% de la ganancia esperada para el año próximo. (Ver Tabla 4.2, renglón 5)

Tabla 4.2: Estimación de la probabilidad de alcanzar la meta ( $n=10^5$ )

Volumen de facturación meta $\theta$	$\hat{P}(Z_{12} \geq \theta)$	$S_{EMC}$	Tolerancia	%Tol
104.87	0.5817	$1.56 \times 10^{-3}$	$4.02 \times 10^{-3}$	0.69
116.52	0.4627	$1.58 \times 10^{-3}$	$4.06 \times 10^{-3}$	0.88
128.17	0.3502	$1.51 \times 10^{-3}$	$3.88 \times 10^{-3}$	1.11
69.000	0.9009	$9.44 \times 10^{-4}$	$2.43 \times 10^{-3}$	0.27
58.260	0.9523	$6.74 \times 10^{-4}$	$1.74 \times 10^{-3}$	0.18

Observe que aún en el caso pesimista (ganancias por 104.87 u.m.), la probabilidad de alcanzar la meta es solamente de alrededor de 0.58, si se desea un nivel de riesgo de 10%, el volumen meta debe ser de 69 u.m., por último la probabilidad de que la compañía quiebre es menor al 5%.

El tercer renglón de la Tabla 4.2 produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 54,628,857 que es menor que  $2^{24} - 1$ , lo que garantiza que no existe ciclaje.

**Ejemplo 4.15** Formulación de un modelo de riesgo para una compañía automotriz con información real.

La compañía Porsche AG, distribuye automóviles de lujo en México, colocando durante el año 2003 un total de 347 unidades en ventas al menudeo, de acuerdo con la Asociación Mexicana de la Industria Automotriz (AMIA) [38]. Esta cifra significa un incremento de 23% respecto al total de unidades vendidas en 2002, que fue de 282. (Ver Tabla 4.3, fuente: AMIA [38])

Tabla 4.3: Total de unidades vendidas mes a mes durante 2003

Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	03	02
22	15	25	26	35	33	28	30	32	28	28	45	347	282

De acuerdo con Thomas Stärtzel, Director de Porsche Latinoamérica, son tres las claves en el incremento de ventas: calidad de los productos, imagen y servicio personalizado.

Cuando se cierra una operación se le dedica parte del día al cliente, es decir se pueden cerrar un máximo de 3 operaciones al día: una por la mañana, una por la tarde y otra por la noche.

Stärtzel afirma que las condiciones del mercado en México permitirán un incremento de 44% en las ventas mensuales durante 2004.

El objetivo del problema consiste en estimar el mínimo volumen de unidades que se venderán en el año 2004 con un nivel de riesgo del 5%, es decir buscamos un nivel de unidades con una probabilidad de ser alcanzado o superado de 0.95.

El primer paso consiste en formular un modelo de riesgo con un proceso de llegada de acuerdo a un proceso de renovación; cada llegada representa una unidad vendida. Es importante establecer el horizonte y las unidades de tiempo, debido a la forma en que opera la empresa nos conviene considerar cada día laborable como 3 unidades de tiempo y contar los días hábiles de acuerdo con el calendario de 2003, tomando en cuenta que la empresa no abre los domingos.

Es decir en enero de 2003 se trabajaron 26 días, 23 en febrero, 24 en marzo y abril, 26 en mayo, 25 en junio, 27 en julio, 26 en agosto, 25 en septiembre, 27 en octubre, 25 en noviembre y 26 en diciembre. En total 304 días, es decir 912 unidades de tiempo.

En este modelo el tiempo transcurre en forma discreta, es decir pasamos del instante 1 (donde puede haber una venta con probabilidad  $p$ ) al 2 (donde puede haber una venta con probabilidad  $p$ ) y luego al 3 (donde puede haber una venta con probabilidad  $p$ ) y así sucesivamente, lo que implica que si  $T_k = j$ ,  $T_k$  es entero y además  $j \geq k$ .

El momento de la  $k$ -ésima venta es

$$S_k := \sum_{i=1}^k T_i,$$

y el total de ventas hasta el momento  $t$  es el proceso de renovación  $N_t$ ,  $0 \leq t \leq 912$ .

Debido a que el volumen de ventas varía con los meses debido a diversas condiciones económicas (por ejemplo en diciembre se recibe el aguinaldo), es conveniente condicionar  $p$  a cada mes.

De esta forma la probabilidad de vender un automóvil por unidad de tiempo en enero de 2004 considerando el incremento esperado del 44% es

$$p_1 = \frac{22}{3(26)}(1.44) = 0.4062,$$

aplicando el mismo razonamiento para cada mes, tenemos  $p_2 = 0.313$ ,  $p_3 = 0.5$ ,  $p_4 = 0.52$ ,  $p_5 = 0.6462$ ,  $p_6 = 0.6336$ ,  $p_7 = 0.4978$ ,  $p_8 = 0.5539$ ,  $p_9 = 0.6144$ ,  $p_{10} = 0.4978$ ,  $p_{11} = 0.5376$  y  $p_{12} = 0.8308$ .

Al efectuar 15,000 simulaciones del modelo propuesto tenemos que

$$\hat{P}(N_{912} \geq 476) = 0.9504,$$

con

$$S_{EMC} = 1.773 \times 10^{-3}, \text{ Tolerancia} = 4.565 \times 10^{-3} \text{ y } \%Tol = 0.4803.$$

Es decir Porsche venderá en 2004 al menos 476 unidades con una probabilidad de 0.95.

En la simulación se emplearon 13,680,000 números pseudoaleatorios, cantidad menor que  $2^{24} - 1$ , lo que implica que no existe ciclaje.

## 5. Simulación de procesos en ambiente semi-Markov

Un proceso semi-Markov es a grandes rasgos, aquel donde los estados cambian de acuerdo a una cadena de Markov pero el tiempo entre cambios de estado es aleatorio.

Un proceso de este tipo resulta útil para construir modelos donde el proceso de llegada depende de un conjunto de estados  $\{1,2,\dots,k\}$  y el estado actual cambia en el tiempo.

Estos procesos resultan útiles para formular modelos donde en función del clima cambia la distribución de los montos de las reclamaciones y en análisis de confiabilidad [30].

En este capítulo se construye un algoritmo para simular el proceso acumulado de reclamaciones  $Z_t$  y obtener un EMC para la probabilidad de que  $Z_t$  no rebase cierto nivel  $\theta$  en un intervalo de tiempo  $[0, T]$  y se formula un modelo de supervivencia de un ecosistema sometido a descargas contaminantes [26].

### 5.1 Marco teórico de los procesos semi-Markov

**Definición 5.1** Considere un proceso estocástico con estados  $0,1,\dots$ , tal que cuando estamos en el estado  $i, i \geq 0$ :

(i) La probabilidad de llegar al estado  $j$  es  $P_{ij}, i, j \geq 0$ .

(ii) Dado que el siguiente estado al que llegaremos es  $j$ , el tiempo de transición de  $i$  a  $j$  se distribuye  $F_{ij}$ .

Si denotamos  $Q_t$  al estado en el tiempo  $t$ , llamamos a  $\{Q_t\}_{t \geq 0}$  un proceso semi-Markov.

Observe que un proceso semi-Markov no tiene la propiedad de Markov de que dado el estado presente, el futuro es independiente del pasado, ya que para predecir el futuro necesitamos no sólo el estado presente, sino además la longitud del tiempo que permanecemos en dicho estado.

Una cadena de Markov es un proceso semi-Markov donde

$$F_{ij} = 0 \quad \text{si } t < 1$$

Una cadena de Markov es un proceso semi-Markov donde

$$\begin{aligned} F_{ij} &= 0 & \text{si } t < 1 \\ F_{ij} &= 1 & \text{si } t \geq 1. \end{aligned}$$

Es decir, todos los tiempos de transición son idénticamente 1.

Sea  $H_i$  la distribución del tiempo que el proceso semi-Markov permanece en  $i$  antes de cambiar de estado condicionando con el estado siguiente,

$$H_i(t) = \sum_j P_{ij} F_{ij}(t),$$

y sea

$$\mu_i := \int_0^{\infty} x dH_i(x).$$

**Definición 5.2** Si denotamos  $A_n$  el  $n$ -ésimo estado visitado, entonces  $\{A_n\}_{n \geq 0}$  es una cadena de Markov con probabilidades de transición  $P_{ij}$ . Se le llama cadena de Markov subyacente del proceso semi-Markoviano.

**Definición 5.3** Una cadena de Markov  $\{A_n\}_{n \geq 0}$  con conjunto de estados  $C$  es irreducible si para todo  $i, j \in C$ , existe algún  $n \geq 0$  tal que  $P_{ij}^n > 0$ , donde  $P_{ij}^n$  es la probabilidad de transición del estado  $i$  al  $j$  en el  $n$ -ésimo paso.

Diremos que  $\{Q_t\}_{t \geq 0}$  es irreducible si su cadena de Markov subyacente es irreducible.

**Definición 5.4** Sea  $T_{ii}$  el tiempo entre transiciones sucesivas al estado  $i$  y sea  $\mu_{ii} = ET_{ii}$ .

**Definición 5.5** Sean  $i, j \in C$  dos estados cualesquiera, definimos  $f_{ij}^n$  como la probabilidad de que empezando en  $i$  la primera transición a  $j$  ocurra en el paso  $n$ . Es decir

$$\begin{aligned} f_{ij}^0 &= 0, \\ f_{ij}^n &= P\{A_n = j, A_k \neq j, k = 1, \dots, n-1 \mid A_0 = i\}. \end{aligned}$$

Sea

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^n,$$

el estado  $j$  es recurrente si  $f_{ij} = 1$ .

diremos que  $j$  es recurrente positivo si  $\nu_{jj} < \infty$  y recurrente nulo si  $\nu = \infty$ .

Una cadena de Markov es recurrente positiva si sus estados son recurrentes positivos.

Recordemos [33] que si  $\{A_n\}_{n \geq 0}$  es irreducible y recurrente positiva, sus probabilidades estacionarias  $\pi_j, j \geq 0$  son la única solución de

$$\begin{aligned}\pi_j &= \sum_i \pi_i P_{ij}, \\ \sum_j \pi_j &= 1,\end{aligned}$$

e interpretamos  $\pi_j$  como la proporción de los  $A_n$ 's que son iguales a  $j$ .

Empleando resultados de procesos de renovación podemos obtener una expresión para las probabilidades límite

$$P_i := \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Q_t = i | Q_0 = j\},$$

de un proceso semi-Markov.

## 5.2 Construcción de estimadores de Monte Carlo

Ahora procederemos en forma análoga a las secciones 3.2, 3.4 y 4.2, desarrollamos un algoritmo para simular bajo horizonte finito  $T$  el proceso de reclamaciones acumuladas  $Z_t$  bajo ambiente semi-Markov con  $k$  estados, para posteriormente efectuar  $n$  realizaciones de  $Z_t$  y contar el número de veces  $R$  que se superó el umbral  $\theta$ , luego el EMC de  $P(Z_T > \theta)$  que buscamos es  $\hat{P}(Z_T > \theta) := R/n$ .

El siguiente teorema nos proporciona las bases para validar las simulaciones.

**Teorema 5.7** Si  $\{Q_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso semi-Markov irreducible,  $T_{ii}$  tiene una distribución no lártice con esperanza finita y la cadena de Markov subyacente  $\{A_n\}_{n \geq 0}$  es recurrente positiva, entonces

$$P_i = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_j \pi_j \mu_j},$$

*Demostración:* Emplearemos la notación siguiente

$W_i(j) :=$  tiempo de permanencia en el estado  $i$  durante la  $j$ -ésima visita al estado  $i$ ,  
 $N_i(m) :=$  número de visitas al estado  $i$  en las primeras  $m$  transiciones de  $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ .

Luego la proporción del tiempo en  $i$  durante las primeras  $m$  transiciones,  $P_{i=m}$  es

$$\begin{aligned}
P_{i=m} &= \frac{\sum_{j=1}^{N_i(m)} W_i(j)}{\sum_i \sum_{j=1}^{N_i(m)} W_i(j)} \\
&= \frac{\frac{N_i(m)}{m} \sum_{j=1}^{N_i(m)} \frac{W_i(j)}{N_i(m)}}{\sum_i \frac{N_i(m)}{m} \sum_{j=1}^{N_i(m)} \frac{W_i(j)}{N_i(m)}}. \tag{5-23}
\end{aligned}$$

Ahora como  $N_i(m) \rightarrow \infty$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , se sigue de la ley fuerte de grandes números que

$$\sum_{j=1}^{N_i(m)} \frac{W_i(j)}{N_i(m)} \rightarrow \mu_i,$$

y por la ley fuerte para procesos de renovación (Proposición 4.6)

$$\frac{N_i(m)}{m} \rightarrow (E[\text{número de transiciones entre visitas a } i])^{-1} = \pi_i.$$

Entonces haciendo  $m \rightarrow \infty$  en (5-23)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{i=m} = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_j \pi_j \mu_j}. \quad \square$$

**Algoritmo 5.8** Estimación de  $P(Z_T > \theta)$  en ambiente semi-Markov con  $k$  estados bajo las hipótesis del Teorema 5.2.

**Objetivo:** Generar las  $n$  realizaciones de  $Y_T$  para construir  $\hat{P}(Z_T > \theta)$  el EMC de  $P(Z_T > \theta)$ .

**Entrada:**  $n, T, \theta, F_X, k, P_{11}, P_{12}, \dots, P_{kk}, F_{11}, F_{12}, \dots, F_{kk}, i_0, \lambda, m$ .

**Salida:**  $\hat{P}(Z_T > \theta)$ .

**Método:**

$R \leftarrow 0$ .

$i \leftarrow 0$ .

Hasta que  $i > n$  haz:

$Z \leftarrow 0$ .

$t \leftarrow 0$ .

$A \leftarrow i_0$ .

Mientras  $(t < T)$  y  $(Z \leq \theta)$  haz:

Generamos  $U \sim U[0,1]$ .

Si  $(U \geq 0)$  y  $(U < P_{A,1})$  entonces  $B \leftarrow 1$ .

Si  $(U \geq P_{A,j,1})$  y  $(U < P_{A,j,1} + P_{A,j,2})$  entonces  $B \leftarrow 2$ .

$\vdots$

Si  $(U \geq \sum_{i=1}^{k-1} P_{A,j,i})$  y  $(U \leq \sum_{i=1}^k P_{A,j,i})$  entonces  $B \leftarrow k$ .

Generamos  $S \sim F_{AB}$ .

$\Delta t \leftarrow 0$ .

$t \leftarrow t + S$ .

Si  $(t > T)$  entonces  $S = T - (t - S)$ .

Si  $(A = m)$  entonces Mientras  $(\Delta t < S)$  haz:

Generamos  $\Delta t_1 \sim \exp(\lambda)$ .

Generamos  $X \sim F_X$ .

$Z \leftarrow Z + X$ .

$\Delta t \leftarrow \Delta t + \Delta t_1$ .

Si  $(A = m)$  y  $(\Delta t > S)$  entonces  $Z \leftarrow Z - X$ .

Si  $(t > T)$  entonces  $t \leftarrow T$ .

$A \leftarrow B$ .

Si  $(Z > \theta)$  y  $(t \leq T)$  entonces  $R \leftarrow R + 1$ .

$i \leftarrow i + 1$ .

$\hat{P}(Z_T > \theta) \leftarrow R/n$ .

### 5.3 Formulación de un modelo de descargas contaminantes en un sistema acuífero bajo ambiente semi-Markov y Resultados

**Ejemplo 5.4** Análisis del nivel crítico de descargas en un ecosistema acuífero.

Consideremos un sistema acuífero cerrado sujeto a descargas de contaminantes ilegales donde predominan metales pesados. Estos metales como el plomo se precipitan en el lecho de sistemas acuíferos como lagos y ríos donde contaminan especies de moluscos y crustáceos de los que se alimentan los peces degradando las cadenas alimenticias de los ecosistemas.

El enfoque clásico para la construcción de modelos de descarga se basa en sistemas de ecuaciones diferenciales parciales [32].

El modelo propuesto está basado en un proceso semi-Markov, donde el volumen de descarga depende del clima, que puede estar en uno de tres estados: 1 buen clima, 2 lluvia moderada o 3 mal clima. Al estado inicial le llamaremos  $i_0$ .

Suponemos que existen industrias con desperdicios pesados en la periferia de un lago, donde está prohibido descargar dichos contaminantes, sin embargo cuando llueve (estado 2) la vigilancia se debilita y es posible que tanques cisterna descarguen en el lago.

Si el clima es demasiado lluvioso, los tanques cisterna corren el riesgo de quedar atascados y cuando el clima es bueno la visibilidad también lo es, por lo que el riesgo de ser descubiertos es bastante alta.

La matriz de transiciones de la cadena de Markov subyacente es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí que la distribución estacionaria es

$$\Pi = (0.2863436123, 0.3524229075, 0.3612334802).$$

Consideremos que

$$\begin{aligned} F_{11} = F_{12} = F_{13} &\sim U(0,3), \\ F_{21} = F_{22} = F_{23} &\sim U(0,4), \\ F_{31} = F_{32} = F_{33} &\sim U(0,2). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} H_1 &= 0.6F_{12} + 0.4F_{13}, \\ H_2 &= 0.3F_{21} + 0.7F_{23}, \\ H_3 &= 0.5F_{31} + 0.5F_{32}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \int_0^\infty x dH_1(x) = \int_0^3 x/3 dx = 1.5, \\ \mu_2 &= \int_0^\infty x dH_2(x) = \int_0^4 x/4 dx = 2, \\ \mu_3 &= \int_0^\infty x dH_3(x) = \int_0^2 x/2 dx = 1. \end{aligned}$$

Ahora calcularemos las probabilidades límite empleando el Teorema 5.7

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\pi_1 \mu_1}{\pi_1 \mu_1 + \pi_2 \mu_2 + \pi_3 \mu_3} = 0.2871870397, \\ P_2 &= 0.471281296, \\ P_3 &= 0.2415316643. \end{aligned}$$

Empleando el algoritmo 5.8 simulamos el proceso semi-Markov, con resultados satisfactorios acordes con el Teorema 5.7:

Tabla 5.1: Estimación de probabilidades límite ( $T = 5000, n = 10^3$ )

		$\varepsilon_R$	$i_0$
$\hat{P}_1$	0.2876	$1.59 \times 10^{-3}$	1
$\hat{P}_2$	0.4709	$8.37 \times 10^{-4}$	1
$\hat{P}_3$	0.2415	$2.57 \times 10^{-4}$	1
$\hat{P}_1$	0.2869	$9.34 \times 10^{-4}$	2
$\hat{P}_2$	0.4714	$1.87 \times 10^{-4}$	2
$\hat{P}_3$	0.2417	$7.46 \times 10^{-4}$	2
$\hat{P}_1$	0.2875	$9.87 \times 10^{-4}$	3
$\hat{P}_2$	0.4709	$7.82 \times 10^{-4}$	3
$\hat{P}_3$	0.2416	$3.53 \times 10^{-4}$	3

El caso cuando  $i_0 = 2$  produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 11,407,887 que es menor que  $2^{24} - 1$ , por lo que no existe ciclaje.

Consideremos que los tiempos entre descargas se distribuyen exponencialmente con tasa  $\lambda$  y que los volúmenes de descarga se distribuyen  $U(10,30)$ . Analizaremos el modelo de descargas a lo largo de un año (365 días) y durante año y medio (548 días). Supongamos que el nivel de polución que puede soportar el ecosistema antes de un daño irreversible es  $\theta$ , luego la contaminación acumulada en el lago en el intervalo  $(0, T)$  es  $Z_T$ .

Tabla 5.2: Probabilidad de supervivencia

$i_0$	$1/\lambda$	$\theta$	$T$	$\hat{P}(Z_T > \theta)$	$S_{EMC}$	Tolerancia	%Tol	$n$
1	2.0	1800	365	0.3330	$3.33 \times 10^{-3}$	$8.58 \times 10^{-3}$	2.56	$2 \times 10^4$
2	2.0	1800	365	0.3566	$3.39 \times 10^{-3}$	$8.72 \times 10^{-3}$	2.45	$2 \times 10^4$
3	2.0	1800	365	0.3417	$3.35 \times 10^{-3}$	$8.63 \times 10^{-3}$	2.53	$2 \times 10^4$
1	2.0	1900	365	0.1920	$2.79 \times 10^{-3}$	$7.17 \times 10^{-3}$	3.74	$2 \times 10^4$
2	2.0	1900	365	0.2022	$2.84 \times 10^{-3}$	$7.31 \times 10^{-3}$	3.62	$2 \times 10^4$
3	2.0	1900	365	0.1935	$2.79 \times 10^{-3}$	$7.19 \times 10^{-3}$	3.72	$2 \times 10^4$
1	2.0	1900	548	0.9967	$5.74 \times 10^{-4}$	$1.47 \times 10^{-3}$	0.15	$1 \times 10^4$
1	2.0	1800	548	0.9995	$2.23 \times 10^{-4}$	$5.76 \times 10^{-4}$	0.06	$1 \times 10^4$
1	1.8	1800	365	0.6659	$3.34 \times 10^{-3}$	$8.59 \times 10^{-3}$	1.29	$2 \times 10^4$
1	1.5	1800	365	0.9736	$1.13 \times 10^{-3}$	$2.92 \times 10^{-3}$	0.30	$2 \times 10^4$

Observe que si  $\theta = 1800$  la probabilidad de que el ecosistema sobreviva un año es de alrededor de  $2/3$ , dependiendo del estado inicial  $i_0$ , pero si  $\theta = 1900$  las probabilidades

de supervivencia aumentan a alrededor de  $8/10$ . Sin embargo si no se toman medidas restrictivas efectivas el lago desaparecerá como ecosistema en tan sólo año y medio. Por otra parte si la esperanza de los tiempos entre descargas disminuye de 2 a 1.8, es decir la intensidad de descarga aumenta, la probabilidad de que el ecosistema se arruine casi se duplica (de 0.3330 a 0.6659); si la esperanza de los tiempos entre descargas disminuye a 1.5, el ecosistema no sobrevivirá un año más.

El quinto renglón de la Tabla 5.2 produjo el máximo de números pseudoaleatorios con 16,477,589 que es menor que  $2^{24} - 1$ , por lo que no existe ciclaje.

## Conclusiones

Los modelos de riesgo formulados originalmente en contextos actuariales son una herramienta importante en la solución de problemas en diversos campos de la ingeniería.

Sin embargo se requiere desarrollar modelos cercanos a planteamientos reales, lo que origina la necesidad de extender el modelo de riesgo clásico debilitando la hipótesis de que el proceso de llegada sea un proceso de Poisson estacionario. Primero considerando el proceso de llegada como un proceso de Poisson no estacionario con medida de intensidad continua, para luego trabajar con medidas de intensidad discontinuas, sin descuidar las aplicaciones.

Es precisamente la retroalimentación de los resultados teóricos con este enfoque aplicado lo que motiva el empleo de técnicas de simulación, con la enorme ventaja de contar con soluciones numéricas aproximadas, enriqueciendo nuestra capacidad de analizar los problemas no sólo desde una perspectiva puramente cualitativa.

Posteriormente se generaliza el proceso de llegada a un proceso de renovación y finalmente se construye un modelo de riesgo en ambiente semi-Markov, en ambos se formulan modelos inéditos en los contextos de aplicación.

Es importante recalcar que las estimaciones realizadas empleando métodos de Monte Carlo dieron origen al desarrollo de algoritmos propios, en los capítulos 3, 4 y 5. Únicamente en el Capítulo 2 como parte de la exposición del estado del arte se emplearon algoritmos ya desarrollados (por Asmussen).

Los modelos de riesgo ofrecen una amplia perspectiva de investigación a la que pueden incorporarse problemas reales de las más diversas disciplinas, como se ha demostrado en este trabajo en la formulación de un modelo de riesgo para pólizas contra incendio (Capítulo 3), en el modelo de renovación para análisis de riesgo en el sector productivo (Capítulo 4) y en el modelo semi-Markov de descargas contaminantes en un sistema acuífero (Capítulo 5), que representan aportaciones importantes de este trabajo.

## Agradecimientos

Agradezco a mi Director de Tesis, Dr. Miguel Angel Gutiérrez Andrade su paciencia y atinados comentarios que hicieron posible este trabajo.

Mi reconocimiento al Dr. Onésimo Hernández Lerma por su desinteresada ayuda y comentarios.

Agradezco especialmente las atenciones de los miembros de mi Comité Doctoral:

Dr. José Jesús Acosta Flores.

Dr. Sergio Gerardo De los Cobos Silva.

Dr. Sergio Fuentes Maya.

Dra. Idalia Flores de la Mota.

Dr. Manuel Ordorica Mellado.

Dr. Francisco Venegas Martínez.

## Referencias

- [1] Allen, Arnold O., *Probability, Statistics, and Queueing Theory*, Academic Press, USA, 1990.
- [2] Asmussen, S., *Approximations for the probability of ruin within finite time*, Scandinavian Actuarial Journal **20** (1984), 31-57.
- [3] Asmussen, S., *Conjugate processes and the simulation of ruin problems*, Stochastic Processes and their Applications **20** (1985), 213-229.
- [4] Asmussen, S., *Applied Probability and Queues*, Wiley, Chichester, U.K., 1987.
- [5] Asmussen, S. and Rolski, T., *Computational methods in risk theory: A matrix-algorithmic approach*, Insurance: Mathematics and Economics **10** (1991), 259-274.
- [6] Bäverle, Nicole, *Risk management in credit risk portfolios with correlated assets*, Insurance: Mathematics and Economics **30** (2002), 187-198.
- [7] Beard, R.E., Pentikainen, T. and Pessonen, E., *Risk Theory*, Chapman and Hall, New York, 1984.
- [8] Beekman, J., *A ruin function approximation*, Trans. of the Soc. of Actuaries **21** (1969), 41-48 y 275-279.
- [9] Bladt, M., González, A. and Lauritzen, S.L., *The estimator of phase-type related functionals using Markov chain Monte Carlo Methods*. Scandinavian Actuarial Journal, Volume 2003, **4** (2003), 280-300.
- [10] Burden, R.L. and Faires, J.D., *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1985.
- [11] Casella, G. and Berger, R.L., *Statistical Inference*, Duxbury Advanced Series, USA, 2002.

- [12] Cinlar, Erhan, Introduction to Stochastic Processes, Prentice Hall, New Jersey, 1975.
- [13] Cossette, H., Gaillardetz, P., Marceau, E. and Rioux, J., *On two dependent individual risk models*, Insurance: Mathematics and Economics **30** (2002), 153-166.
- [14] Cossette, H., Landriault, D. and Marceau, E., *Ruin Probabilities in the Compound Markov Binomial Model*, Volume 2003, **4** (2003), 301-323.
- [15] Cramér, H., Collective Risk Theory, Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1955.
- [16] Cvitanic, J. and Karatzas, I., *On Dynamics Measures of Risk*. Finance and Stochastics, Vol. **3**, issue 4 (1999).
- [17] Dassios, A. and Embrechts, P., *Martingales and insurance risk*, Commun. Statist.-Stochastic Models **5** (1989), 181-217.
- [18] De Vylder, *Martingales and ruin in a dynamical risk process*, Scandinavian Actuarial Journal (1977), 217-225.
- [19] Dudley, Richard M., Real Analysis and Probability, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, California, 1989.
- [20] Embrechts, P., *Stochastic Modelling in insurance*, CLAPEM-IV Proceedings, Mexico City, 1990.
- [21] Embrechts, P. and Wouters, P., *Simulating risk solvency*, Insurance: Mathematics and Economics **9** (1990), 141-148.
- [22] Fishman, George S., Monte Carlo. Concepts, Algorithms, and Applications, Springer Series in Operations Research, USA, 1997.
- [23] Gaier, J. and Grandits, P., *Ruin probabilities in the presence of regularly varying tails and optimal investment*. Insurance: Mathematics and Economics **30** (2002), 211-217.
- [24] González-Trejo, J., Hernández-Lerma, O., and Hoyos-Reyes, L.F., Minimax control of discrete-time stochastic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*. (2003), Vol.41, No.5, pp. 1626 – 1659.
- [25] González-Trejo, J., Gutiérrez-Andrade, M.A., and Hoyos-Reyes, L.F., Goal profits analysis based on a renewal risk model. En preparación.
- [26] González-Trejo, J., Gutiérrez-Andrade, M.A., and Hoyos-Reyes, L.F., Semi-Markov risk model for reservoir pollution analysis. En preparación.
- [27] Grandell, Jan, Aspects of Risk Theory, Springer-Verlag, USA, 1991.

- [28]Hernández-Lerma, O., and Hoyos-Reyes, L.F., A multiobjective control approach to priority queues. *Mathematical Methods of Operations Research*. Springer-Verlag (2001) 53:265-277.
- [29]Hoyos-Reyes, L.F., Monte Carlo approach to insurance ruin problems using conjugate processes. *Morfismos* (2001). Vol. 5, No.2, pp. 37-50.
- [30]Limnios, G. and Oprisan, G., Semi-Markov processes and reliability, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [31]Lindvall, T., *Weak convergence of probability measures and random functions in the function space  $D[0, \infty)$* . J. Appl. Prob. **10** (1973), 109-121.
- [32]Murthy, D.N.P., Page, N.W. and Rodin, E.Y., Mathematical Modelling, Pergamon Press, U.K., 1990.
- [33]Ross, S.M., Stochastic Processes, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, USA, 1983.
- [34]Ross, S.M., A Course in Simulation, Macmillan, New York, 1990.
- [35]Tijms, H.C., Stochastic Models, An Algorithmic Approach , Wiley, U.K., 1998.
- [36]Visual Basic<sup>TM</sup>, Programming System for Windows<sup>TM</sup> Version 3.0, Language Reference, Microsoft Corporation, USA, 1993.
- [37]Wikstad, N., *Exemplification of ruin probabilities*. Astin Bulletin **VI** (1971), 147-152.
- [38]4 ruedas, No.113 febrero (2004), NOTMUSA, p. 12.

## Apéndice I

### Programas en Visual Basic.

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 2.11 TABLA 2.1'
Dim G, C, U, T, Y, S, Q, W, X, Z, V, SECMC, TOL, TPERCENT, ER
Randomize
MSG = "¿CUAL ES EL NUMERO DE SIMULACIONES <= 10000?"
TITLE = "TABLA 2.1"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
N = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE LA PROBABILIDAD DE RUINA"
TITLE = "TABLA 1"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
PROB = Cdbl(ENTRADA)
Static R(10000)
G = .09090909
C = .88
U = -(1.1 / .1) * Log(1.1 * PROB)
Print "U="; U
Z = 0
For I = 1 To N
    Y = 0
    T = 0
    While Y <= U
        S = Rnd
        Q = Rnd
        While S = 0
            S = Rnd
        Wend
        While Q = 0
            Q = Rnd
        Wend
        W = -1.136363636 * Log(S)
        X = -1.1 * Log(Q)
        Y = Y + X - C * W
        T = T + W
    Wend
    R(I) = Exp(-G * Y)
    Z = Z + R(I)
Next I
P = Z / N
Print "P="; P
V = 0
For J = 1 To N
    V = V + ((R(J) - P) ^ 2)
Next J
V = V / (N - 1)
SECMC = Sqr(V / N)
Print "SECMC="; SECMC
TOL = 2.575 * SECMC
Print "TOL="; TOL
TPERCENT = 100 * TOL / P
Print "%TOL="; TPERCENT
ER = Abs((PROB - P) / PROB)
Print "ERROR RELATIVO="; ER
End Sub

```

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 2.11 TABLA 2.2'
Static R(30000)
Dim G, C, T, Y, S, Q, W, X, Z, V, SECMC, TOL, TPERCENT
Randomize
MSG = "¿CUAL ES EL NUMERO DE SIMULACIONES <= 30000?"
TITLE = "TABLA 2.2"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
N = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL CAPITAL INICIAL U"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
U = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL HORIZONTE DE TIEMPO"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
HORIZON = Cdbl(ENTRADA)
G = .09090909
C = .88
Z = 0
For K = 1 To N
R(K) = 0
Next K
For I = 1 To N
Y = 0
T = 0
  While Y <= U And T < HORIZON
    S = Rnd
    Q = Rnd
    While S = 0
      S = Rnd
    Wend
    While Q = 0
      Q = Rnd
    Wend
    W = -1.136363636 * Log(S)
    X = -1.1 * Log(Q)
    Y = Y + X - C * W
    T = T + W
  Wend
  If Y > U And T <= HORIZON Then R(I) = Exp(-G * Y)
  Z = Z + R(I)
Next I
P = Z / N
Print "P="; P
V = 0
For J = 1 To N
  V = V + ((R(J) - P) ^ 2)
Next J
V = V / (N - 1)
SECMC = Sqr(V / N)
Print "SECMC="; SECMC
TOL = 2.575 * SECMC
Print "TOL="; TOL
TPERCENT = 100 * TOL / P
Print "%TOL"; TPERCENT
End Sub

```

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 2.12 TABLAS 2.3 y 2.4'
Static R(10000)
Dim G, C, U, T, Y, S, Q, W, X, Z, V, SECMC, TOL, TPERCENT
Randomize
MSG = "¿CUAL ES EL NUMERO DE SIMULACIONES <= 10000?"
TITLE = "TABLAS 2.3 y 2.4"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
N = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL CAPITAL INICIAL U"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
U = Cdbl(ENTRADA)
G = .05
C = .5084385
Z = 0
For I = 1 To N
  Y = 0
  T = 0
  While Y <= U
    S = Rnd
    Q = Rnd
    While S = 0
      S = Rnd
    Wend
    While Q = 0
      Q = Rnd
    Wend
    W = -.9752083242 * Log(S)
    X = (1 / G) * Log(1 - Q * (1 - Exp(G)))
    Y = Y + X - C * W
  T = T + W
  Wend
  R(I) = Exp(-G * Y + T * (.025421928 - G * C))
  Z = Z + R(I)
Next I
P = Z / N
Print "P="; P
V = 0
For J = 1 To N
  V = V + ((R(J) - P) ^ 2)
Next J
V = V / (N - 1)
SECMC = Sqr(V / N)
Print "SECMC="; SECMC
TOL = 2.575 * SECMC
Print "TOL="; TOL
TPERCENT = 100 * TOL / P
Print "%TOL"; TPERCENT
End Sub

```

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 2.12 TABLA 2.5"
Const N = 10000
Static R(N)
Dim G, C, U, T, Y, S, Q, W, X, Z, V, SECMC, TOL, TPERCENT
Randomize
MSG = "TECLEE EL HORIZONTE DE TIEMPO"
TITLE = "TABLA 2.5"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
HORIZON = CDb1(ENTRADA)
G = .05
C = .5084385
U = 40
Z = 0
For K = 1 To N
R(K) = 0
Next K
For I = 1 To N
Y = 0
T = 0
While Y <= U And T < HORIZON
S = Rnd
Q = Rnd
While Q = 0
Q = Rnd
Wend
While S = 0
S = Rnd
Wend
W = -.9752083242 * Log(S)
X = (1 / G) * Log(1 - Q * (1 - Exp(G)))
Y = Y + X - C * W
T = T + W
Wend
If Y > U And T <= HORIZON Then R(I) = Exp(-G * Y + T * (.025421928 - G * C))
Z = Z + R(I)
Next I
P = Z / N
Print "P="; P
V = 0
For J = 1 To N
V = V + ((R(J) - P) ^ 2)
Next J
V = V / (N - 1)
SECMC = Sqr(V / N)
Print "SECMC="; SECMC
TOL = 2.575 * SECMC
Print "TOL="; TOL
TPERCENT = 100 * TOL / P
Print "%TOL"; TPERCENT
End Sub

```

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 3.8 TABLAS 3.1,3.2 y 3.3'
Dim N, M2, G, Y, S, Q, W, X, V, SEMC, TOL, TPERCENT, Z, ACUM
Randomize
N = 100000
MSG = "TECLEE EL CAPITAL INICIAL. ("
TITLE = "TABLAS 3.1,3.2 y 3.3"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
U = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL HORIZONTE DE TIEMPO"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
HORIZON = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL FACTOR DE RECARGO"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
RO = Cdbl(ENTRADA)
Z = 0
For I = 1 To N
ACUM = 0
Y = 0
G = 0
M2 = 0
While Y <= U And M2 < HORIZON
S = Rnd
Q = Rnd
While Q = 0
Q = Rnd
Wend
While S = 0
S = Rnd
Wend
W = -Log(S)
X = 1 + 9 ^ Q
G = G + W
M2 = Sqr(G)
ACUM = ACUM + X
Y = ACUM - (1 + RO) ^ 5.5 * (M2 ^ 2)
Wend
If M2 > HORIZON Then ACUM = ACUM - X
If M2 > HORIZON Then M2 = HORIZON
Y = ACUM - (1 + RO) ^ 5.5 * (M2 ^ 2)
If Y > U Then Z = Z + 1
Next I
P = Z / N
Print "P="; P
V = ((N - Z) * (P ^ 2) + Z * ((1 - P) ^ 2)) / (N - 1)
SEMC = Sqr(V / N)
Print "SEMC="; SEMC
TOL = 2.575 * SEMC
Print "TOL="; TOL
If P > 0 Then TPERCENT = 100 * TOL / P
Print "%TOL="; TPERCENT
End Sub

```

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 3.9 TABLA 3.4'
Dim N, M2, G, Y, S, Q, W, X, V, SECMC, TOL, TPERCENT, Z, ACUM
Randomize
N = 100000
MSG = "TECLEE EL FACTOR DE RECARGO"
TITLE = "TABLA 3.4"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
RO = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL CAPITAL INICIAL"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
U = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL PARAMETRO ALFA"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
ALPHA = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL PARAMETRO BETA"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
BETA = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL HORIZONTE DE TIEMPO"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
HORIZON = Cdbl(ENTRADA)
Z = 0
For I = 1 To N
  ACUM = 0
  Y = 0
  G = 0
  M2 = 0
  While Y <= U And M2 < HORIZON
    S = Rnd
    Q = Rnd
    While Q = 0
      Q = Rnd
    Wend
    While S = 0
      S = Rnd
    Wend
    W = -Log(S)
    X = BETA / (Q ^ (1 / ALPHA))
    G = G + W
    M2 = Sqr(G)
    ACUM = ACUM + X
    Y = ACUM - (1 + RO) * (ALPHA * BETA / (ALPHA - 1)) * (M2 ^ 2)
  Wend
  If M2 > HORIZON Then ACUM = ACUM - X
  If M2 > HORIZON Then M2 = HORIZON
  Y = ACUM - (1 + RO) * (ALPHA * BETA / (ALPHA - 1)) * (M2 ^ 2)
  If Y > U Then Z = Z + 1
Next I
P = Z / N
Print "P="; P
V = ((N - Z) * (P ^ 2) + Z * ((1 - P) ^ 2)) / (N - 1)
SECMC = Sqr(V / N)
Print "SECMC="; SECMC
TOL = 2.575 * SECMC
Print "TOL="; TOL
If P > 0 Then TPERCENT = 100 * TOL / P
Print "%TOL"; TPERCENT
End Sub

```

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 3.10 TABLA 3.5'
Dim N, M2, G, Y, S, Q, W, X, V, SECMC, TOL, TPERCENT, Z, ACUM, EWW
Randomize
N = 100000
MSG = "TECLEE EL FACTOR DE RECARGO"
TITLE = "TABLA 3.5"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
RO = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL CAPITAL INICIAL"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
U = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL PARAMETRO ALFA"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
ALPHA = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL PARAMETRO BETA"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
BETA = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL HORIZONTE DE TIEMPO"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
HORIZON = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE LA ESPERANZA DE LA DIST. DE WEIBULL"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
EWW = Cdbl(ENTRADA)
Z = 0
For I = 1 To N
  ACUM = 0
  Y = 0
  G = 0
  M2 = 0
  While Y <= U And M2 < HORIZON
    S = Rnd
    Q = Rnd
    While Q = 0
      Q = Rnd
    Wend
    While S = 0
      S = Rnd
    Wend
    W = -Log(S)
    X = (-BETA * Log(Q)) ^ (1 / ALPHA)
    G = G + W
    M2 = Sqr(G)
    ACUM = ACUM + X
    Y = ACUM - (1 + RO) * (M2 ^ 2) * EWW
  Wend
  If M2 > HORIZON Then ACUM = ACUM - X
  If M2 > HORIZON Then M2 = HORIZON
  Y = ACUM - (1 + RO) * (M2 ^ 2) * EWW
  If Y > U Then Z = Z + 1
Next I
P = Z / N
Print "P="; P
V = ((N - Z) * (P ^ 2) + Z * ((1 - P) ^ 2)) / (N - 1)
SECMC = Sqr(V / N)
Print "SECMC="; SECMC
TOL = 2.575 * SECMC
Print "TOL="; TOL
If P > 0 Then TPERCENT = 100 * TOL / P
Print "%TOL"; TPERCENT
End Sub

```

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 3.12 TABLA 3.6'
Const HORIZON = 4
Const K = 3
Static FLAG(K)
Static ALFA(K)
Static T(K)
Dim R, Y, T1, Z, W, SUM, R1, R2, R3, S, N, U1, J, VAR, X1, A1, A2, A3, B1, B2, B3
Randomize
MSG = "¿CUAL ES EL NUMERO DE SIMULACIONES?"
TITLE = "TABLA 3.6"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
N = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL FACTOR DE RECARGO"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
RO = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL CAPITAL INICIAL"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
U = Cdbl(ENTRADA)
A1 = .0039793
A2 = .1078392
A3 = .8881815
B1 = -.014631
B2 = -.190206
B3 = -.514588
ALFA(1) = .2
ALFA(2) = .3
ALFA(3) = .7
T(1) = 1.1
T(2) = 1.2
T(3) = 3#
For I = 1 To K
FLAG(I) = 0
Next I
R = 0
For I = 1 To N
Y = 0
T1 = 0
Z = 0
W = 0
SUM = 0
J = 0
While T1 < HORIZON And Y <= U
R1 = Rnd
If R1 = 0 Then R1 = Rnd
If R1 = 0 Then R1 = Rnd
If R1 = 0 Then R1 = Rnd
S = -Log(R1)
GoSub RUTINAX
W = W + S
T1 = Sqr(W)
Z = Z + X
XMEM = X
If T1 >= T(1) And FLAG(1) = 0 Then GoSub RUTINA1
If T1 >= T(2) And FLAG(2) = 0 Then GoSub RUTINA1
If T1 >= T(3) And FLAG(3) = 0 Then GoSub RUTINA1
Y = Z - (1 + RO) * (T1 ^ 2 + SUM)
Wend
If T1 > HORIZON Then Z = Z - XMEM
If T1 > HORIZON Then Y = Z - (1 + RO) * (HORIZON ^ 2 + SUM)
If Y > U Then R = R + 1
Next I

```

```

P = R / N
Print "P="; P
VAR = ((N - R) * (P ^ 2) + R * ((1 - P) ^ 2)) / (N - 1)
SECMC = Sqr(VAR / N)
Print "SECMC="; SECMC
TOL = 2.575 * SECMC
Print "TOL="; TOL
If P > 0 Then TPERCENT = 100 * TOL / P
Print "%TOL"; TPERCENT
GoTo FINAL

```

```

RUTINA1:
X = 0
J = J + 1
SUM = SUM + ALFA(J)
FLAG(J) = 1
U1 = Rnd
If U1 <= ALFA(J) And T1 <= HORIZON Then GoSub RUTINAX
If U1 <= ALFA(J) And T1 <= HORIZON Then Z = Z + X
Return

```

```

RUTINAX:
X = 0
R2 = Rnd
If R2 = 0 Then R2 = Rnd
If R2 = 0 Then R2 = Rnd
If R2 = 0 Then R2 = Rnd
For H = 1 To 20
AA = X + (1 - (A1 * Exp(B1 * X) + A2 * Exp(B2 * X) + A3 * Exp(B3 * X) + R2))
X = X + (AA / (A1 * B1 * Exp(B1 * X) + A2 * B2 * Exp(B2 * X) + A3 * B3 * Exp(B3 * X)))
Next H
Return

```

```

FINAL:
End Sub

```

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 4.14 TABLA 4.1'
Dim C1, C2, C3, W, T, N, U, R, P, V, SEMC, TOL, TPERCENT
Const LAMBDA = .1
Const META = 1000
N = 1000
Randomize
MSG = "TECLEE EL HORIZONTE DE TIEMPO"
TITLE = "TABLA 4.1"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
HORIZON = Cdbl(ENTRADA)
R = 0
SY = 0
For I = 1 To N
  Y = 0
  T = 0
  While T < HORIZON
    C1 = Rnd
    C2 = Rnd
    C3 = Rnd
    While C1 = 0
      C1 = Rnd
    Wend
    While C2 = 0
      C2 = Rnd
    Wend
    While C3 = 0
      C3 = Rnd
    Wend
    U = Rnd
    While U = 0
      U = Rnd
    Wend
    T1 = (-1 / 3) * Log(C1)
    T2 = (-1 / 3) * Log(C2)
    T3 = (-1 / 3) * Log(C3)
    W = T1 + T2 + T3
    T = T + W
    X = (-1 / LAMBDA) * Log(U)
    Y = Y + X
  Wend
  If Y >= META And T <= HORIZON Then R = R + 1
  If T > HORIZON Then Y = Y - X
  SY = SY + Y
Next I
ESPERANZA = SY / (HORIZON * N)
Print "EY/T="; ESPERANZA
End Sub

```

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 4.14 TABLA 4.2'
Dim C1, C2, C3, W, T, N, U, R, P, V, SEMC, TOL, TPERCENT
Const HORIZON = 12
Const LAMBDA = .1
Randomize
MSG = "¿CUAL ES LA META?"
TITLE = "TABLA 4.2"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
META = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "¿CUAL ES EL NUMERO DE SIMULACIONES?"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
N = Cdbl(ENTRADA)
R = 0
For I = 1 To N
  Y = 0
  T = 0
  While Y < META And T < HORIZON
    C1 = Rnd
    C2 = Rnd
    C3 = Rnd
    While C1 = 0
      C1 = Rnd
    Wend
    While C2 = 0
      C2 = Rnd
    Wend
    While C3 = 0
      C3 = Rnd
    Wend
    U = Rnd
    While U = 0
      U = Rnd
    Wend
    T1 = (-1 / 3) * Log(C1)
    T2 = (-1 / 3) * Log(C2)
    T3 = (-1 / 3) * Log(C3)
    W = T1 + T2 + T3
    T = T + W
    X = (-1 / LAMBDA) * Log(U)
    Y = Y + X
  Wend
  If Y >= META And T <= HORIZON Then R = R + 1
Next I
P = R / N
Print "P( Y >"; META; ")="; P
V = ((N - R) * (P ^ 2) + R * ((1 - P) ^ 2)) / (N - 1)
SEMC = Sqr(V / N)
TOL = 2.575 * SEMC
If P > 0 Then TPERCENT = 100 * TOL / P
Print "SEMC="; SEMC
Print "TOL="; TOL
Print "%TOL="; TPERCENT
End Sub

```

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 5.4 TABLA 5.1'
Dim N, R, PROB, V, SEMC, TOL, TPERCENT, DT1, DT, INICIO, T, A, B, C1, C2, C3, U
ReDim P(1 To 3, 1 To 3)
Const LAMBDA = 2#
Const TETHA = 100000000
Randomize
MSG = "TECLEE EL ESTADO INICIAL: 1, 2 o 3"
TITLE = "TABLA 5.1"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
INICIO = CDb1(ENTRADA)
MSG = "¿CUAL ES EL NUMERO DE SIMULACIONES?"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
N = CDb1(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL HORIZONTE DE TIEMPO"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
HORIZON = CDb1(ENTRADA)
R = 0
P(1, 1) = 0
P(1, 2) = .6
P(1, 3) = .4
P(2, 1) = .3
P(2, 2) = 0
P(2, 3) = .7
P(3, 1) = .5
P(3, 2) = .5
P(3, 3) = 0
R1 = 0
R2 = 0
R3 = 0
For I = 1 To N
Z = 0
T = 0
T1 = 0
T2 = 0
T3 = 0
A = INICIO
While T < HORIZON And Z <= TETHA
C1 = Rnd
U = Rnd
While C1 = 0
C1 = Rnd
Wend
While U = 0
U = Rnd
Wend
If U >= 0 And U < P(A, 1) Then B = 1
LIM1 = P(A, 1) + P(A, 2)
If U >= P(A, 1) And U < LIM1 Then B = 2
LIM2 = LIM1 + P(A, 3)
If U >= LIM1 And U <= LIM2 Then B = 3
If A = 1 Then S = 3 * C1
If A = 2 Then S = 4 * C1
If A = 3 Then S = 2 * C1
DT = 0
T = T + S
If T > HORIZON Then S = HORIZON - (T - S)

```

```

If A = 2 Then While DT < S
  C2 = Rnd
  While C2 = 0
    C2 = Rnd
  Wend
  D0 = (-LAMBDA) * Log(C2)
  C3 = Rnd
  While C3 = 0
    C3 = Rnd
  Wend
  X = 10 + (20 * C3)
  Z = Z + X
  DT = DT + D0
Wend
If A = 2 And DT > S Then Z = Z - X
If T > HORIZON Then T = HORIZON
If A = 2 Then T2 = T2 + S
If A = 1 Then T1 = T1 + S
If A = 3 Then T3 = T3 + S
A = B
Wend
If Z > TETHA And T <= HORIZON Then R = R + 1
T1 = T1 / T
T2 = T2 / T
T3 = T3 / T
R1 = R1 + T1
R2 = R2 + T2
R3 = R3 + T3
Next I
R11 = R1 / N
R12 = R2 / N
R13 = R3 / N
PROB = R / N
Print "P1="; R11
Print "P2="; R12
Print "P3="; R13
SUMA = R11 + R12 + R13
Print "P1+P2+P3="; SUMA
End Sub

```

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 5.4 TABLA 5.2'
Dim N, R, PROB, V, SEMC, TOL, TPERCENT, DT1, DT, INICIO, T, A, B, C1, C2, C3, U
ReDim P(1 To 3, 1 To 3)
Randomize
MSG = "TECLEE EL ESTADO INICIAL: 1, 2 o 3"
TITLE = "TABLA 5.2"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
INICIO = CInt(DEFVAL)
MSG = "TECLEE LA ESPERANZA DE LOS TIEMPOS ENTRE DESCARGAS: 1/LAMBDA"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
LAMBDA = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL LIMITE TEORICO DEL NIVEL DE CONTAMINACION"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
TETHA = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL HORIZONTE DE TIEMPO"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
HORIZON = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "¿CUAL ES EL NUMERO DE SIMULACIONES?"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
N = Cdbl(ENTRADA)
R = 0
P(1, 1) = 0
P(1, 2) = .6
P(1, 3) = .4
P(2, 1) = .3
P(2, 2) = 0
P(2, 3) = .7
P(3, 1) = .5
P(3, 2) = .5
P(3, 3) = 0
For I = 1 To N
  Z = 0
  T = 0
  A = INICIO
  While T < HORIZON And Z <= TETHA
    C1 = Rnd
    U = Rnd
    While C1 = 0
      C1 = Rnd
    Wend
    While U = 0
      U = Rnd
    Wend
    If U >= 0 And U < P(A, 1) Then B = 1
    LIM1 = P(A, 1) + P(A, 2)
    If U >= P(A, 1) And U < LIM1 Then B = 2
    LIM2 = LIM1 + P(A, 3)
    If U >= LIM1 And U <= LIM2 Then B = 3
    If A = 1 Then S = 3 * C1
    If A = 2 Then S = 4 * C1
    If A = 3 Then S = 2 * C1
    DT = 0
    T = T + S
    If T > HORIZON Then S = HORIZON - (T - S)
  Wend
Next I

```

```

If A = 2 Then While DT < S
  C2 = Rnd
  While C2 = 0
    C2 = Rnd
  Wend
  D0 = (-LAMBDA) * Log(C2)
  C3 = Rnd
  While C3 = 0
    C3 = Rnd
  Wend
  X = 10 + (20 * C3)
  Z = Z + X
  DT = DT + D0
Wend
If A = 2 And DT > S Then Z = Z - X
If T > HORIZON Then T = HORIZON
A = B
Wend
If Z > TETHA And T <= HORIZON Then R = R + 1
Next I
PROB = R / N
Print "P( Z >"; TETHA; ")="; PROB
V = ((N - R) * (PROB ^ 2) + R * ((1 - PROB) ^ 2)) / (N - 1)
SEMC = Sqr(V / N)
TOL = 2.575 * SEMC
If PROB > 0 Then TPERCENT = 100 * TOL / PROB
Print "SEMC="; SEMC
Print "TOL="; TOL
Print "%TOL="; TPERCENT
End Sub

```

```

Sub Command1_Click ()
'EJEMPLO 4.15 '
Dim N, SEMC, TOL, TPERCENT, Z, CONTADOR, PROB, CONT
Static P(1 To 12)
Static H(1 To 12)
Randomize
MSG = "TECLEE EL NUMERO DE SIMULACIONES<=15000"
TITLE = "EJEMPLO 4.15"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
N = Cdbl(ENTRADA)
MSG = "TECLEE EL VOLUMEN DE VENTAS A SUPERAR"
ENTRADA = InputBox(MSG, TITLE, DEFVAL)
VENTAS = Cdbl(ENTRADA)
P(1) = (22 / 78) * 1.44
P(2) = (15 / 69) * 1.44
P(3) = (25 / 72) * 1.44
P(4) = (26 / 72) * 1.44
P(5) = (35 / 78) * 1.44
P(6) = (33 / 75) * 1.44
P(7) = (28 / 81) * 1.44
P(8) = (30 / 78) * 1.44
P(9) = (32 / 75) * 1.44
P(10) = (28 / 81) * 1.44
P(11) = (28 / 75) * 1.44
P(12) = (45 / 78) * 1.44
H(1) = 78
H(2) = 69
H(3) = 72
H(4) = 72
H(5) = 78
H(6) = 75
H(7) = 81
H(8) = 78
H(9) = 75
H(10) = 81
H(11) = 75
H(12) = 78
CONTADOR = 0
CONT = 0
For I = 1 To N
    Z = 0
    For INDICE = 1 To 12
        For J = 1 To H(INDICE)
            Q = Rnd
            CONTADOR = CONTADOR + 1
            If Q <= P(INDICE) Then Z = Z + 1
        Next J
    Next INDICE
    If Z >= VENTAS Then CONT = CONT + 1
Next I
PROB = CONT / N
Print "P(N(912)>="; VENTAS; ")="; PROB
V = ((N - CONT) * (PROB ^ 2) + CONT * ((1 - PROB) ^ 2)) / (N - 1)
SEMC = Sqr(V / N)
Print "SEMC="; SEMC
TOL = 2.575 * SEMC
Print "TOL="; TOL
If PROB > 0 Then TPERCENT = 100 * TOL / PROB
Print "%TOL"; TPERCENT
Print "TOTAL DE # PSEUDOALEATORIOS="; CONTADOR
End Sub

```

```

Sub Command1_Click ()
'PRUEBA DE ANDERSON-DARLING'
Dim MX, A2
Static A(1 To 200, 1 To 200)
Static B(1 To 200, 1 To 200)
Randomize
N = 200
FLAG = 0
M = N * N
For I = 1 To N
For J = 1 To N
A(I, J) = Rnd
Next J
Next I
C1 = 0
C2 = 1
For K = 1 To M
MX = 0
VX = 0
For I = 1 To N
For J = 1 To N
If A(I, J) > MX Then VX = A(I, J)
If A(I, J) > MX Then CORDX = I
If A(I, J) > MX Then CORDY = J
MX = VX
Next J
Next I
A(CORDX, CORDY) = -1
C1 = C1 + 1
If C1 = N + 1 Then C2 = C2 + 1
If C1 = N + 1 Then C1 = 1
B(C2, C1) = MX
Next K
S1 = N + 1
For I = 1 To N
For J = 1 To N
A(I, J) = B(S1 - I, S1 - J)
Next J
Next I
K = 0
A2 = 0
For I = 1 To N
For J = 1 To N
K = K + 1
A2 = A2 + (((2 * K) - 1) * (Log(A(I, J)) + Log(1 - B(I, J))))
Next J
Next I
ANDERSON = -M - ((1 / M) * A2)
Print "ESTIMADOR DE ANDERSON-DARLING="; ANDERSON
If ANDERSON > 1.933 Then Print "LA DISTRIBUCION NO ES UNIFORME"
If ANDERSON <= 1.933 Then Print "LA DISTRIBUCION SI ES UNIFORME"
End Sub

```

## Apéndice II

### Prueba de Anderson-Darling.

Debido al empleo del generador de números pseudoaleatorios de Visual Basic es importante aplicar alguna prueba estadística sobre la distribución uniforme de los mismos, existen pruebas de bondad de ajuste que son más potentes y sofisticadas que la prueba ji-cuadrada. Estas pruebas se denominan de función de distribución empírica ( EDF por sus siglas en inglés Empirical Distribution Function ), la más conocida es la prueba de Kolmogorov-Smirnov ( K-S ) basada en estadísticos de supremo, sin embargo existen otros estadísticos llamados estadísticos cuadráticos con los que se obtienen pruebas EDF más potentes [1].

Anderson y Darling definieron el estadístico cuadrático  $A^2$ ,

$$A^2 := -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \{ \ln(z_i) + \ln(1-z_{n+1-i}) \} - n,$$

donde dada una muestra de  $n$  números pseudoaleatorios, se genera una sucesión no decreciente de dichos números  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  y definimos para  $1 \leq i \leq n$

$$z_i := F(x_i),$$

con  $F(\cdot)$  la función de distribución sobre la que hacemos la prueba en nuestro caso una distribución uniforme en  $[0,1)$ .

Aplicamos la prueba con una muestra de 40,000 números pseudoaleatorios contrastando las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \text{La distribución es } U[0,1).$$

$$H_a : \text{La distribución no es } U[0,1).$$

Aplicando el Programa de la página 73 ( Apéndice I ),

$$A^2 = 1.13703,$$

lo que es menor que 1.933 el valor umbral de la región de rechazo para  $\alpha = 0.1$  y por lo tanto también cae fuera de la región de rechazo para cualquier valor de  $\alpha \leq 0.1$ . De acuerdo con Allen [1], esto implica que debe aceptarse  $H_0$ .