



*UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO*

---

---

*FACULTAD DE INGENIERÍA*

CALIBRACIÓN ABSOLUTA DE UN INTERFERÓMETRO  
FIZEAU MEDIANTE UN PLANO LÍQUIDO

TESIS PROFESIONAL  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERO MECÁNICO  
**PRESENTA:**  
Adrián Gamboa Moreno

DIRECTOR: Ing. Gerardo Ruíz Botello  
CO-DIRECTOR: M. en I. Rigoberto Nava Sandoval



México D.F., mayo de 2004  
Ciudad Universitaria

---

---



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A toda mi familia con cariño y admiración.*

## *AGRADECIMIENTOS*

### *A mis Padres*

*Guillermo y Consuelo, que por su esfuerzo, dedicación,  
y sus sabios consejos que sembraron en mí, formando  
una personas comprometida con sus ideales y principios.  
Por eso hoy se cumple con éxito el último de sus objetivos personales,  
al darme la oportunidad de superarme personal y profesionalmente,  
depositando en mí sus ganas de seguir escalando peldaños.  
Dejándome la más grande herencia que cualquier  
padre puede dejar a sus hijos, el conocimiento.*

### *A mis hermanos*

*Claudia, Mónica y Enrique, que por su ejemplo y apoyo incondicional,  
me enseñaron a dar siempre lo mejor de mí y conseguir todo  
aquello que uno se propone en la vida.*

### *A Vanessa*

*Por estar conmigo en todo momento, sin importar las carencias;  
inyectándome día a día esas ganas de seguir luchando por los  
sueños que ayer tuve y que hoy se están convirtiendo en realidad,  
dejándome soñar aun más.*

*GAMVA*

### *A Ariadna*

*Por la gran alegría que medio en esta vida,  
que me ha hecho ver lo simple y maravillosa que es la vida,  
gracias nena.*

*GAMVA*

### *A la familia Moreno Díaz*

*Por la confianza que siempre me tuvieron, dándome  
un aliciente para seguir luchando por todo aquello  
que uno anhela en la vida.*



*A mi asesor, el Ing. Gerardo Ruiz Botello, por la paciencia, compromiso y apoyo incondicional que me dió para terminar mi tesis.*

*Al M. en I. Benjamín Valera Orozco, por su colaboración en la obtención de interferogramas y su excelente participación en el procesamiento de imágenes.*

*Al M. en I. David Palomino Merino, por su revisión y comentarios realizados en el capítulo II, enriqueciendo el presente trabajo.*

*Al Laboratorio de Metrología del CCADET de la UNAM, por facilitarnos sus instalaciones para que se llevará a cabo el desarrollo de ésta tesis..*

*A todos mis compañeros de la FI, por brindarme su amistad sincera.*

*Al departamento de Ingeniería de WEG México S.A. de C.V., por su apoyo y comprensión para terminar éste trabajo.*

*A la Universidad Nacional Autónoma de México por mostrarme el fascinante mundo del conocimiento.*

## CONTENIDO

<i>Introducción</i> .....	1
<b>1. Antecedentes y conceptos básicos</b> .....	5
<b>1.1. Óptica</b> .....	6
1.1.1. <i>Reflexión</i> .....	7
1.1.2. <i>Refracción</i> .....	8
1.1.3. <i>Interferencia y difracción</i> .....	10
1.1.4. <i>Desarrollo matemático del experimento de Young, para patrones de interferencia</i> .....	13
1.1.5. <i>Interferencia de dos rayos</i> .....	14
<b>1.2. Interferometría</b> .....	17
1.2.1. <i>Algunos interferómetros</i> .....	17
1.2.1.1. <i>Interferómetro de Michelson</i> .....	17
1.2.1.2. <i>Interferómetro de Fizeau</i> .....	18
1.2.2. <i>Interferómetro Fizeau Davison Optronics D305</i> .....	21
<b>1.3. Medición de planitud mediante un interferómetro</b> .....	22
1.3.1. <i>Procedimiento de medición de planitud en un Interferómetro Fizeau Davison Optronics D305</i> .....	22
1.3.2. <i>Inspección y diagnóstico de la superficie bajo prueba</i> .....	24
1.3.3. <i>Método relativo de medición de planitud</i> .....	26
1.3.4. <i>Método absoluto de medición de planitud</i> .....	26
<b>2. Diseño del Sistema Espejo Líquido (SEL)</b> .....	28
<b>2.1. Sistema Espejo Líquido (SEL)</b> .....	29
2.1.1. <i>Partes del SEL</i> .....	29
2.1.2. <i>Propiedades de los líquidos utilizados en el SEL</i> .....	30
2.1.3. <i>Consideraciones para montaje del SEL</i> .....	32
<b>2.2. Superficie libre de un fluido como plano físico ideal</b> .....	33
2.2.1. <i>Curvatura del PL</i> .....	33
2.2.2. <i>Efectos por aristas debido a la capilaridad</i> .....	36
<b>2.3. Plano Líquido (PL) ó Líquido Espejo(LE)</b> .....	38
2.3.1. <i>Ondas en la superficie de un fluido</i> .....	39
2.3.2. <i>Ondas de pequeña amplitud</i> .....	44
2.3.3. <i>Velocidad de propagación de las ondas en la superficie libre</i> .....	46
2.3.4. <i>Ondas en recipientes cilíndricos(sloshing in tanks)</i> .....	50
<b>2.4. Líquido Amortiguador (LA)</b> .....	54
2.4.1. <i>Cantidad de LA</i> .....	55
2.4.2. <i>Vibraciones</i> .....	58
2.4.2.1. <i>Sistema masa-resorte-amortiguador</i> .....	59
2.4.2.2. <i>Vibraciones en objetos flotantes</i> .....	61
<b>2.5. Parámetros de selección del SEL</b> .....	64
2.5.1. <i>Frecuencia de resonancia</i> .....	64
2.5.2. <i>Cantidad de LA y tamaño del recipiente del LA</i> .....	66
2.5.3. <i>Gráficas de selección del SEL</i> .....	67
2.5.4. <i>Programa de selección del SEL</i> .....	71

<b>3. Aplicación del SEL para una Calibración Absoluta del Interferómetro Fizeau Davison Optronics D305</b> .....	73
<b>3.1. Consideraciones de prueba.</b> .....	74
3.1.1. <i>Equipo y material necesario</i> .....	74
3.1.2. <i>Requisitos para la medición.</i> .....	75
<b>3.2. Medición de planitud.</b> .....	76
<b>3.3. Interferogramas.</b> .....	77
3.3.1. <i>Obtención de interferogramas del PL</i> .....	78
3.3.2. <i>Procesamiento de los interferogramas del PL.</i> .....	78
3.3.2.1. <i>Digitalización del interferograma</i> .....	78
3.3.2.2. <i>Conversión de imagen de color a imagen en niveles de gris</i> ...	79
3.3.2.3. <i>Erosión</i> .....	79
3.3.2.4. <i>Dilatación de la erosión.</i> .....	80
3.3.2.5. <i>Resta del fondo.</i> .....	81
3.3.2.6. <i>Umbralización</i> .....	81
3.3.2.7. <i>Apertura-cierre.</i> .....	82
<b>3.4. Procedimiento de medición.</b> .....	85
3.4.1. <i>Instrucciones para realizar las mediciones de los interferogramas obtenidos del PL</i> .....	85
3.4.2. <i>Trazos auxiliares</i> .....	86
3.4.3. <i>Trazos de medición</i> .....	88
3.4.4. <i>Cálculo de la desviación de planitud</i> .....	90
<b>3.5. Procedimiento de calibración.</b> .....	90
<b>3.6. Medición de los interferogramas</b> .....	92
<b>3.7. Procesamiento de datos</b> .....	98
<b>3.8. Determinación de la desviación de planitud</b> .....	102
<b>4. Cálculo de la Incertidumbre</b> .....	104
4.1. <i>Conceptos fundamentales de medición</i> .....	106
4.2. <i>Tipos de incertidumbre.</i> .....	107
4.2.1. <i>Incertidumbre Tipo A</i> .....	108
4.2.2. <i>Incertidumbre Tipo B</i> .....	109
4.2.3. <i>Incertidumbre Combinada</i> .....	112
4.2.4. <i>Incertidumbre Expandida</i> .....	115
4.3. <i>Cálculo de la incertidumbre del Interferómetro Fizeau.</i> .....	118
<b>5. Conclusiones</b> .....	121
<i>Apéndices</i> .....	125
<i>Apéndice A: Glosario.</i> .....	126
<i>Apéndice B: Propiedades de los fluidos</i> .....	127
<i>Apéndice C: Dinámica de fluidos.</i> .....	130
<i>Apéndice D: Solución de ecuaciones diferenciales</i> .....	134
<i>Apéndice E: Estadística descriptiva</i> .....	140
<i>Referencias.</i> .....	144
<i>Bibliografía de consulta</i> .....	146

---

---

## *Introducción*

---

---

---

## Introducción

---

Ante la necesidad de mejorar los patrones de referencia para la calibración de planitud de superficies, se ha buscado mejorar el proceso en la manufactura de planos físicos con materiales sólidos, como el cuarzo, el vidrio, etc. Esto hace que los procesos por los cuales se obtienen superficies planas, sean de un alto grado de precisión, ocasionando que su precio en general sea elevado, motivo por el cual pocos laboratorios de metrología puedan realizar calibraciones de planitud en superficies con un instrumento (interferómetro) que mida planitud mediante el uso de un plano físico.

Los laboratorio que llegan a contar con un interferómetro y que ofrecen servicios de calibración de planitud en superficies, necesitan realizar la calibración del plano patrón que posee el interferómetro, lo cual genera una serie de gastos ya que es necesario mantener su trazabilidad, obteniendo una calibración relativa, o sea, que es referida al grado de planitud del patrón utilizado para este fin. Una manera de prescindir de la referencia a un patrón de exactitud superior, es a través de la calibración absoluta del instrumento.

Por lo tanto, se hace necesario contar con un patrón de planitud ó un método de medición absoluto. Así pues, para obtener en forma absoluta la planitud de un plano, se han estudiado dos posibilidades:

- a) Intercomparación de tres planos: aquí se propone un modelo matemático en el que al obtener los diferentes valores provenientes de las tres combinaciones en la comparación entre tres planos, se puedan relacionar entre sí y obtener una medición con muy buena exactitud de la planitud de cada uno de los planos.
- b) Plano líquido: se propone utilizar la superficie libre de un líquido, ya que éste al ser derramado sobre la superficie de la tierra o depositado en cualquier recipiente, tiene la propiedad de esparcirse hasta obtener una superficie plana, o sea, que todos los puntos que componen su superficie se encuentra en un mismo plano y físicamente define que todos los puntos de la superficie poseen una misma energía potencial, o un mismo potencial gravitacional

En este trabajo se utiliza un *plano líquido*, como patrón para realizar una calibración del Interferómetro Fizeau Davidson Optronics D305 del Laboratorio de Metrología del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET) de la UNAM.

El Interferómetro, es un instrumento que permite medir el valor de la desviación de planitud de una superficie comparándola con su plano patrón, utilizando franjas de interferencia producidas por rayos de luz (en este caso producidos por una lámpara láser de Helio-Neón). Estas franjas se producen al ser reflejados y refractados los rayos de luz sobre ambas superficies, generando un patrón de franjas claras y oscuras, que se utilizan para determina el estado de una superficie (por ejemplo que sea cóncava, convexa, que tenga aristas, o que presente algún defecto superficial), todo esto con la ayuda de un arreglo óptico montado en el interferómetro.

Su aplicación en ingeniería permite conocer mediante una inspección visual el estado de una superficie que requiera de un grado de planitud controlado, en piezas tales como sellos mecánicos, paralelas ópticas, bloques patrón, planos ópticos, etc.

Al utilizar un *plano líquido* para realizar la calibración del interferómetro Fizeau, es necesario considerar algunos factores que pueden afectar el funcionamiento del sistema diseñado para esta aplicación. A continuación se mencionan los más importantes:

- Al utilizar un *plano líquido* se considera que éste se perturba fácilmente ante la presencia de fuerzas y vibraciones externas que actúan sobre él, por lo que hay que proveerlo de un sistema especial de amortiguamiento para reducir las al máximo.
- Considerando que un líquido posee ondas en la superficie que son inherentes a éste, debidas a la fuerza de gravedad; hay que dotar al sistema de aislamiento de vibraciones con base en su frecuencia natural de oscilación.
- Al aplicarle esfuerzos cortantes (por pequeños que sean), el plano líquido se perturba fácilmente provocando que la superficie oscile, lo que hace necesario protegerlo para evitar que corrientes de aire exciten la superficie libre del líquido y provoque ondas en ella. Además de protegerlo contra partículas de polvo o de cualquier otra índole que puedan distorsionar el patrón de interferencia que se genere.
- El líquido utilizado como *plano líquido*, debe ser un líquido que tenga la propiedad de esparcirse rápidamente sobre toda su extensión, y que pueda estabilizarse rápidamente ante la presencia de perturbaciones externas. Además debe poseer un excelente contraste ante los rayos del láser He-Ne utilizado.

Así pues, el Sistema Espejo Líquido (SEL) que se estudia en este proyecto, cumple con los factores ya mencionados, y se compone de lo siguiente:

- a) *Plano Líquido*: superficie libre de un aceite
- b) *Líquido Amortiguador*: aceite que provee de aislamiento de vibraciones externas al *plano líquido*.
- c) *Funda protectora*: funda de plástico que protege al *plano líquido* de corrientes de aire y partículas de polvo.

En el capítulo I se revisan los conceptos básicos de *óptica e interferometría* que ayudan a entender la formación de las franjas de interferencia y como se aplican en favor de la metrología para realizar mediciones de planitud utilizando el interferómetro. Así mismo, se dan a conocer los antecedentes que sustentan el desarrollo de este proyecto de investigación, que toman como base las investigaciones realizadas por Grigor'ev (1986) y Bunnagel (1968), respectivamente, las cuales proponen utilizar la superficie de un líquido para realizar la calibración de superficies planas e interferómetros.

En el capítulo II, se realiza el análisis de las ondas en la superficie libre de un líquido dispuesto sobre la superficie de la tierra. Mediante la dinámica de fluidos se modela la forma cómo se desplazan las ondas en la superficie del *plano líquido* dentro de un recipiente cilíndrico y se determina la *frecuencia natural de oscilación* del *plano líquido*, para que con la ecuación que evalúa ésta se determinen las dimensiones de los recipientes a utilizar y conocer la cantidad necesaria de

*líquido amortiguador* que evite que vibraciones producidas por el interferómetro Fizeau, distorsionen la superficie libre del *plano líquido*. Así pues, el conocer la frecuencia natural de oscilación del *plano líquido* permite obtener el *SEL óptimo*.

El capítulo III propone una serie de consideraciones que ayudan a evitar al máximo todos aquellos factores indeseables para realizar mediciones con el *plano líquido*, además de proponer un método de medición utilizando una cámara de video y una computadora, con la finalidad de evitar que se generen errores por apreciación debidos al análisis subjetivo de diferentes operarios. Al seguir los pasos del procedimiento de medición, se obtienen lecturas precisas que permiten determinar, con muy buena exactitud, la desviación de planitud que presenta el interferómetro Fizeau.

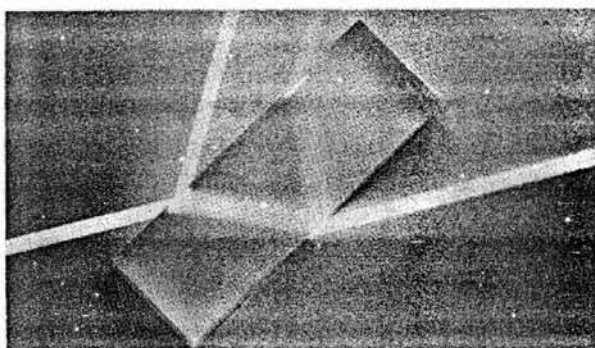
Con los datos de las mediciones realizadas en los interferogramas obtenidos en el capítulo III, en el capítulo IV se determina la desviación de planitud asociada al interferómetro Fizeau al realizar una calibración con el *SEL*. Utilizando el método reconocido por normas internacionales, conocido como Guide to the expression of Uncertainty in Measurement (GUM), se realizan un análisis minucioso de todos los errores que afectan el resultado de ésta medición, asignándoles un incertidumbre a cada uno para de esta manera poder determinar la correspondiente incertidumbre expandida.

Por último, el capítulo V muestra los datos más importantes que resultaron del presente trabajo, cumpliendo las expectativas del proyecto de analizar y diseñar un dispositivo para realizar una calibración absoluta de un interferómetro Fizeau y comprobar la hipótesis manejada durante el desarrollo del presente, validando la idea de utilizar un *plano líquido* como patrón de planitud.

---

---

## ***CAPITULO I***



***Antecedentes y conceptos básicos***

---

---



## 1. Antecedentes y conceptos básicos

### 1.1. Óptica

La Óptica, es la parte de la Física que trata de los fenómenos luminosos<sup>1</sup>, es decir, es el estudio del comportamiento y naturaleza corpuscular y ondulatoria de la luz.

Así pues, uno de los hechos más importantes observados en el comportamiento de la luz, es que cuando se transmite en un medio homogéneo, su **propagación es rectilínea**<sup>2</sup>.

Al observar una fuente luminosa se observa que emite luz en todas direcciones, que gráficamente se representa mediante segmentos de líneas direccionados (**rayos de luz**).

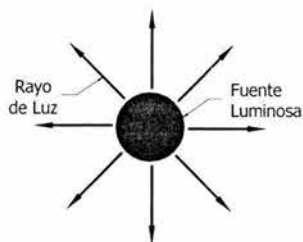


FIGURA 1-1. Representación gráfica de rayos de luz.

Un conjunto de rayos de luz constituye un **haz luminoso**; en la figura 1-1 se muestra un haz luminoso divergente, esto es, todo haz de luz emitido por una fuente luminosa es **divergente** y dependiendo del proceso al cual se vea sometido, se puede obtener un haz de luz convergente, paralelo, dirigido, etc.

También es importante destacar la independencia que se observa en la propagación de rayos o haces luminosos, ya que cuando se cruzan dos haces, cada uno sigue la misma trayectoria; como si no se hubieran cruzado. Un haz no perturba la propagación de otro<sup>3</sup>.

Como se mencionó anteriormente, la naturaleza de la luz es dual, lo que permite que presente propiedades de partícula y de onda; esto a su vez produce fenómenos importantes tales como: reflexión, refracción, **interferencia** y difracción.

<sup>1</sup> HECHT, Eugene: Optics. USA, Ed. Addison Wesley Publishing Company, 1989, p. 79.

<sup>2</sup> *Ibid.* p.79.

<sup>3</sup> *Ibid.* p.85.

## 1.1.1. Reflexión

Para poder explicar el fenómeno de reflexión, se necesita un haz luminoso y una placa de vidrio lisa. El haz luminoso se propaga en el aire e incide en la superficie de la placa de vidrio (figura 1-2). El hecho que ocurre es bien conocido por experiencia: como el vidrio es transparente, parte de la luz penetra la placa y la otra vuelve a propagarse en el aire. Así pues, la porción del haz que sigue a través del aire en otra dirección experimenta una **reflexión**<sup>4</sup>, lo que demuestra que parte de la luz se *refleja* al llegar a la superficie lisa de la placa de vidrio.

Así pues, el haz luminoso que se dirige hacia la superficie de vidrio recibe el nombre de **haz incidente**, y el que se aleja de la superficie de vidrio es el **haz reflejado** (figura 1-2).



FIGURA 1-2. Reflexión que sufre un haz luminoso al incidir sobre una superficie lisa

Cuando el haz incide sobre una superficie pulida o lisa, el haz reflejado está bien definido, como lo muestra la figura 1-2. Cuando dicho fenómeno ocurre, se dice que la reflexión es especular, porque dicho fenómeno se observa comúnmente cuando la luz se refleja en un espejo.

Pero cuando el haz luminoso incide en una superficie irregular, como lo muestra la figura 1.3, cada rayo del haz reflejado sale de la superficie irregular en determinada dirección, por lo cual el haz reflejado no queda bien definido y se puede observar el esparcimiento o dispersión de la luz en todas direcciones. Entonces, se produce una **reflexión difusa**, o en otras palabras, hay una **difusión o dispersión** de la luz por parte de la superficie áspera<sup>5</sup>. La mayoría de los cuerpos reflejan difusamente la luz que incide sobre ellos, así que, cuando ésta penetra a nuestros ojos se percibe la imagen del objeto mirado.

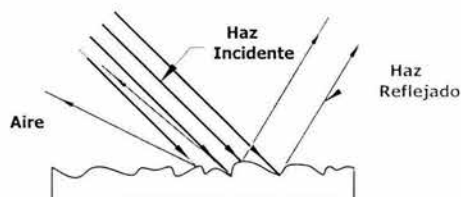


FIGURA 1-3. Reflexión que sufre un haz luminoso al encontrarse con una superficie irregular.

<sup>4</sup> Ibid. p.83.

<sup>5</sup> Ibid. p.87.

Para determinar cómo es la reflexión de un haz de luz con respecto a una superficie cualquiera, se tienen las **leyes de la reflexión**, que son:

1ª. El rayo incidente, la normal a la superficie reflejante en el punto de incidencia, y el rayo reflejado, se hallan en un mismo plano.

2ª. El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión ( $\alpha = \beta$ ).

donde el **ángulo de incidencia** ( $\alpha$ ), está formado por el rayo incidente y la normal, y el **ángulo de reflexión** ( $\beta$ ), es formado por la normal y el rayo de reflexión (figura 1-4).

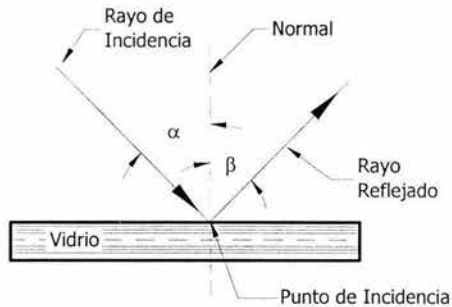


FIGURA 1-4. El ángulo de incidencia, es igual al ángulo de reflexión.

### 1.1.2. Refracción

En la parte anterior se definió la porción del haz de luz que se refleja al entrar en contacto con una superficie; pero ¿qué pasa con la porción del haz de luz que penetra en la superficie de la placa de vidrio? La parte del haz luminoso que se propaga en la placa de vidrio, experimentalmente se propaga en una dirección diferente de la del haz incidente; lo que arroja como dato importante, que la dirección del haz luminoso se altera al pasar del aire al vidrio. Cuando sucede esto, la luz experimenta una **refracción** (figura 1-5).

El fenómeno de la refracción consiste en el cambio de la dirección de propagación de un haz de luz al pasar de un medio a otro. Esto sólo puede suceder cuando la luz se propaga con velocidades distintas en los dos medios<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> *Ibid.* p.84.

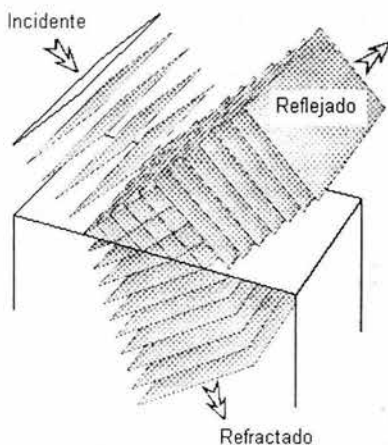


FIGURA 1-5. Refracción y reflexión que sufre un haz luminoso al incidir en una superficie lisa.

También tenemos que el ángulo formado por el rayo incidente y la normal, es el **ángulo de incidencia** ( $\theta_1$ ). El ángulo formado por la normal y el rayo refractado, es el **ángulo de refracción** ( $\theta_2$ ), (figura 1-6). De igual forma que las leyes de reflexión, el rayo incidente, la normal y el rayo refractado se encuentran en un mismo plano. Pero la diferencia es que  $\theta_1$  es diferente de  $\theta_2$ .

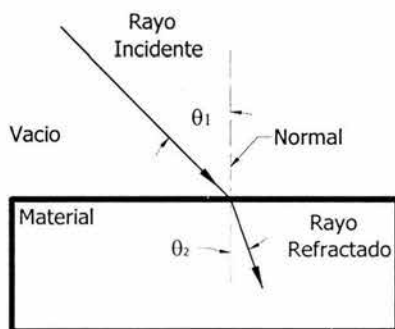


FIGURA 1-6. Refracción de la luz en un medio material

Por lo tanto, cuando la luz sufre refracción al pasar de un medio 1, en el cual su velocidad es  $v_1$ , a otro medio 2, en el cual se propaga con velocidad  $v_2$ , según Snell<sup>7</sup>, se tiene:

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \text{constante} \quad \dots (1.1)$$

<sup>7</sup> W. Snell (1591-1626). Matemático y astrónomo holandés, descubridor de la ley de la refracción. A pesar de haberla descubierto en 1620, sólo se divulgó ampliamente a través de la obra *Dioptrika*, publicada hasta 1730 por el físico holandés, C. Huyghens.

Por lo que tenemos que el índice de refracción,  $n$ , de un medio material es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ , y la velocidad de la luz,  $v$ , en este medio.<sup>8</sup>

$$\boxed{n = \frac{c}{v}} \dots (1.2)$$

La expresión (1.1) se arregla de la forma siguiente;

$$\frac{1}{v_1} \text{sen}\theta_1 = \frac{1}{v_2} \text{sen}\theta_2$$

Si se multiplican ambos lados por  $c$ , se tiene

$$\frac{c}{v_1} \text{sen}\theta_1 = \frac{c}{v_2} \text{sen}\theta_2$$

Pero de (1.2) se sabe que,  $n = \frac{c}{v}$  por lo tanto,

$$\boxed{n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2} \dots (1.3)$$

Ecuación que se aplica cuando la luz pasa de un medio a otro, con índices de refracción diferentes.

### 1.1.3. Interferencia y difracción.

La naturaleza de la luz es dual, ya que en algunas ocasiones muestra propiedades de partícula y en otras tantas se comporta como onda. Las pruebas que demuestran que la luz tiene naturaleza ondulatoria, se derivan de los fenómenos de interferencia y difracción.

Los fenómenos de interferencia y difracción, son los más característicos de las **ondas** y no están presentes en la dinámica de las partículas. Por esta razón desempeñan un papel central en las discusiones sobre la naturaleza ondulatoria de la luz.

Para poder explicar el fenómeno de difracción de la luz, se utilizará la ayuda de la figura 1-7.

Cuando ondas de luz pasan por el borde de un obstáculo se deflectan un poco hacia la región que no está expuesta directamente a la fuente de luz (figura 1-7); a dicho fenómeno se le conoce como **difracción**; esto es, la capacidad de las ondas para deflectarse o cambiar de dirección alrededor de obstáculos en su trayectoria<sup>9</sup>.

<sup>8</sup> HECHT, Eugene: *obr. Cit.*, p. 84.

<sup>9</sup> TIPPENS, Paul E.: *Física 2*, México, Mc Graw Hill, 1992, vol. 2, p.131.

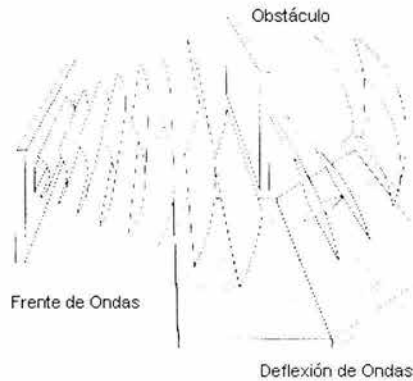


FIGURA 1-7. Cuando un frente de ondas encuentra un obstáculo, su propagación deja de ser rectilínea.

La figura anterior muestra que el radio del frente de onda aumenta conforme la distancia del frente de onda se incrementa respecto a la fuente que lo emite; por lo cual cuando el radio tiende a ser muy grande, el frente de onda comienza a tornarse plano, considerándose un **frente de onda plano**, ya que los rayos son perpendiculares al frente de onda y paralelos entre sí.

Pero la primera evidencia contundente de la difracción fue demostrada por Thomas Young<sup>10</sup>, quien realizó un experimento (que lleva su nombre), para poder demostrar el fenómeno de interferencia.

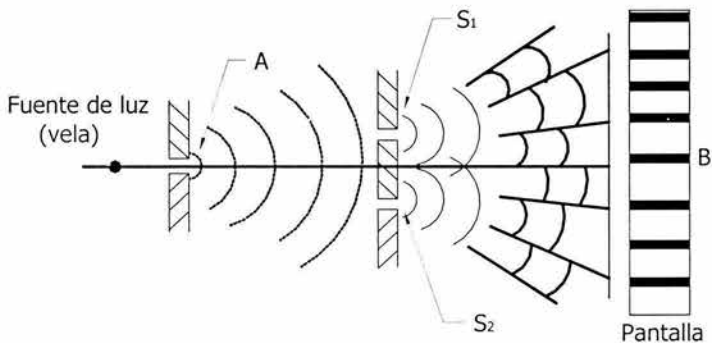


FIGURA 1-8. Experimento de Young.

Young construyó un aparato con la configuración que se muestra en la figura 1-8. Una fuente de **luz monocromática** incide sobre una rendija A (figura 1-8), que actúa como una fuente de ondas secundarias; dos rendijas más  $S_1$  y  $S_2$  se encuentran en una placa paralela

<sup>10</sup> Thomas Young (1773-1829). Médico y físico inglés, conocido sobre todo por el hecho de haber logrado obtener la interferencia de las ondas de luz. Fue el primero en proponer que las ondas luminosas debían ser transversales y no longitudinales, como creían otros científicos.

y equidistante de A. La luz que proviene de A pasa a través de  $S_1$  y  $S_2$ , y de allí se proyecta sobre una pantalla; esto sucede si la luz se difracta. Así que, uno de los cuestionamientos que se hizo Young, fue: que si la luz tenía un comportamiento corpuscular y por tanto una propagación o movimiento rectilíneo, entonces lo más probable era que no pasara luz por las rendijas y por lo tanto no se observara nada en la pantalla B.

Pero gracias a este experimento se pudo comprobar que se ilumina el punto B ubicado detrás de la barrera y en línea recta con la rendija A, además de formarse franjas claras y oscuras. Este resultado permite reforzar la *teoría ondulatoria* y entender el origen del fenómeno de la **interferencia** de la luz, en el cual se utiliza el *principio de superposición*, que establece que *cuando dos o más ondas existen simultáneamente en el mismo medio, la amplitud resultante en cualquier punto es la suma de las amplitudes de las ondas compuestas en dicho punto*.

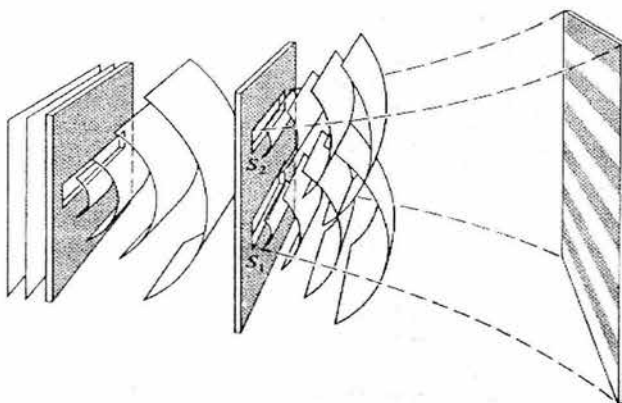


FIGURA 1-9. Fenómeno de interferencia de la luz.

La figura anterior muestra una serie de franjas claras y oscuras, que se conocen como **franjas de interferencia**.

Pero, ¿cómo se producen las franjas de interferencia? Se dice que cuando dos ondas **interfieren constructivamente** (se suman), la amplitud de la onda resultante es mayor que la amplitud de cualquiera de sus ondas componentes produciendo una franja de luz. Por el contrario, cuando la amplitud resultante es menor que cualquiera de sus ondas componentes, se produce **interferencia destructiva** (se restan), esto es, ausencia de luz (figura 1-10).

En el experimento de Young, las ondas secundarias salientes de  $S_1$  y  $S_2$ , están en **fase**, ya que provienen de la abertura A y se originan en una única fuente y a un mismo tiempo.

La interpretación teórica del experimento de Young, de la doble rendija, se analizará en el siguiente apartado.

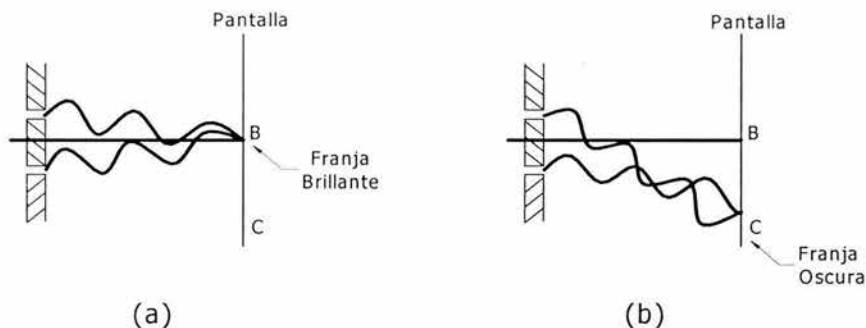


FIGURA 1-10. Origen de las franjas oscuras y claras de un patrón de interferencia.

#### 1.1.4. Desarrollo matemático del experimento de Young, para patrones de interferencia.

De acuerdo a 1.1.3 y con ayuda de la figura 1-11, se puede explicar el desarrollo matemático que sustenta el experimento de la doble rendija, realizado por Young.

La luz que llega al punto  $D$  está a una distancia  $y$  del eje  $AB$ . La separación de las dos rendijas se representa por  $d$ , y la pantalla se localiza a una distancia  $x$  de la rendija. El punto  $D$  sobre la pantalla forma un ángulo  $\theta$  con el eje del sistema. Se dibuja la línea  $S_2C$  de tal modo que las distancias  $CD$  y  $P_2$  sean iguales. En la figura 1-11, la distancia  $x$  a la pantalla es mucho mayor que la distancia  $d$  de separación de las rendijas, se supone que  $P_1$ ,  $P_2$  y  $DA$  son aproximadamente perpendiculares a la línea  $S_2C$ . Así que, el ángulo  $S_1S_2C$  es igual al ángulo  $\theta$ , y la diferencia  $\Delta P$  en las longitudes de las trayectorias de la luz que provienen de  $S_1$  y  $S_2$  está dada por

$$\Delta P = P_1 - P_2 = d \sin \theta \quad \dots (1.4)$$

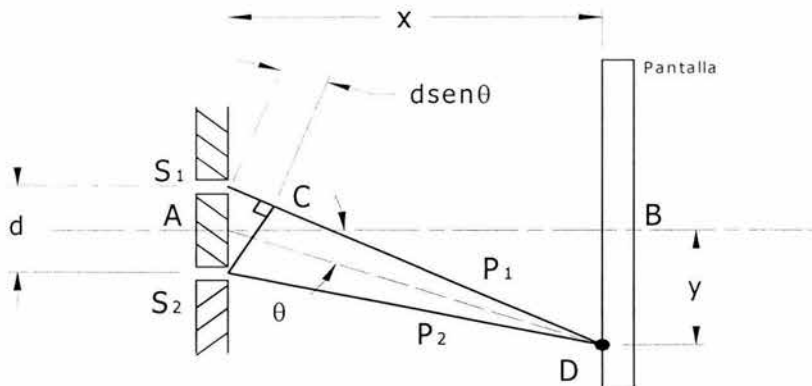


FIGURA 1-11. Esquema del experimento de doble rendija.



Ocurrirá *interferencia constructiva* en  $D$  cuando la diferencia en la longitud de las trayectorias  $\Delta P$ , sea igual a  $0\lambda, 1\lambda, 2\lambda, \dots, n\lambda$ ; donde  $\lambda$  es la *longitud de onda de la luz*. Por lo tanto, las condiciones necesarias para las **franjas brillantes** son:

$$d \sin \theta = n\lambda; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \dots (1.5)$$

Las condiciones requeridas para la formación de **franjas oscuras** en  $D$  se satisfarán cuando la diferencia en la trayectoria sea

$$\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots$$

En esta condición, la interferencia es **destructiva**, y se cancelarán las ondas. Así pues, se producirán franjas oscuras cuando

$$d \sin \theta = n \frac{\lambda}{2}; \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad \dots (1.6)$$

Expresando las ecuaciones 1.5 y 1.6 en términos de las distancias medibles  $x$  e  $y$ , para **ángulos pequeños**, se tiene que

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \dots (1.7)$$

La sustitución de  $\frac{y}{x}$  para  $\sin \theta$  en 1.5 y 1.6 conduce a

$$\text{Franjas brillantes: } \frac{yd}{x} = n\lambda; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{máximos}) \quad \dots (1.8)$$

$$\text{Franjas oscuras: } \frac{yd}{x} = n \frac{\lambda}{2}; \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{mínimos}) \quad \dots (1.9)$$

Así pues para obtener un máximo en  $D$ , los rayos deben llegar en fase, y por lo tanto la distancia  $S_1C = d \sin \theta$ , contiene un número entero de longitudes de onda, ver ecuación (1.8). Cada máximo por encima del punto  $B$ , tiene un máximo simétrico por debajo del punto  $B$ .

Los mínimos en el punto  $B$ , difieren en fase por un múltiplo impar de  $\lambda/2$  para lo cual  $S_1C = d \sin \theta$ , contiene un número semi-entero de longitudes de onda.

### 1.1.5. Interferencia de dos rayos

Este método es muy utilizado para producir patrones de interferencia; ya que este método sólo ocupa una fuente de luz para producir dos o más rayos de luz, que al recombinarse producen

franjas de interferencia, por lo que es usado en muchos interferómetros como base de su arreglo óptico.

Para muchas aplicaciones es necesario tener un arreglo óptico en el cual los dos rayos de interferencia viajen por caminos separados antes de que se recombinen. Para lograrlo, se utiliza alguno de los dos métodos siguientes: *división del frente ondas* y el más utilizado *división de amplitud*.

División del frente ondas<sup>11</sup>: Para obtener dos rayos de una misma fuente, se usan dos porciones separadas del frente de ondas original, lo cual al superponer efectos se produce interferencia.

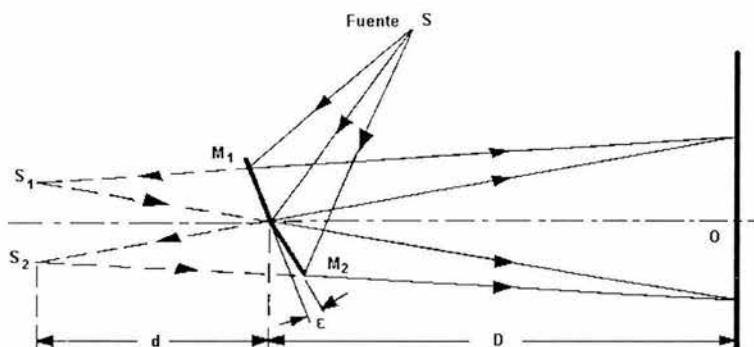


FIGURA 1-12. Sistema óptico para producir interferencia por división de un frente de ondas

El arreglo óptico sencillo, mostrado en la figura 1-12, se conoce como espejos de Fresnel, donde la luz emitida por una fuente  $S$  incide en los espejos  $M_1$  y  $M_2$  los cuales tienen un pequeño ángulo de inclinación entre sí; parte de la luz se refleja hacia la pantalla del punto  $O$  y la otra porción se refracta y se transmite al punto donde se encuentran las fuentes secundarias  $S_1$  y  $S_2$ . Las franjas de interferencia se observan en la región donde los dos rayos reflejados y refractados se traslapan en la pantalla del punto  $O$ . La interferencia se produce a partir de los dos rayos de luz que provienen de las dos fuentes secundarias  $S_1$  y  $S_2$ , y de los rayos reflejados de  $S$  en los espejos  $M_1$  y  $M_2$ , donde  $d$  es la distancia de las fuentes secundarias  $S_1$  y  $S_2$  a la intersección de los espejos  $M_1$  y  $M_2$ , y  $D$  es el camino que recorren los rayos reflejados en  $M_1$  y  $M_2$  a la pantalla en  $O$ .

División de amplitud: Existen dos métodos comunes para obtener dos rayos por el método de *división de amplitud*, básicamente se utiliza una superficie que refleja parte de la luz incidente y la parte restante la transmite.

#### a. Interferencia en una placa plana-paralela.<sup>12</sup>

Considerando una placa plana transparente y con caras paralelas entre sí; iluminada por una fuente de luz monocromática  $S$ ; en el punto  $P$  inciden los dos rayos de igual amplitud que son reflejados y refractados desde la superficie superior e inferior de la placa plana-paralela, lo que

<sup>11</sup> HARIHARAN, P.: Optical Interferometry, Australia, Ed. Academic Press Inc., 1985, p.13.

<sup>12</sup> Ibidem, p.14.

permite que se observe una distancia equidistante entre franjas de interferencia generadas en la placa plana-paralela y que se observan en el plano de los puntos  $O'$  y  $P$ , donde el patrón de interferencia formado son círculos concéntricos, con centro en  $O$ .

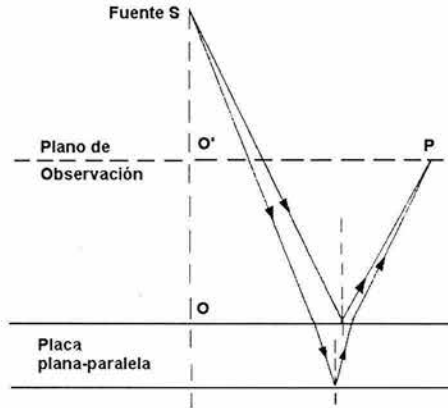


FIGURA 1-13. Formación de franjas de interferencia por reflexión en una placa plana-paralela  
 b. Interferencia en una placa de espesor variable: Franjas de Fizeau.<sup>13</sup>

Si se considera una placa con una pequeña variación en su espesor, iluminada con rayos de luz como se muestra en la figura 1-14, los dos rayos incidentes paralelos siguen la trayectoria  $S_1ABCL_1P$  y  $S_2CL_2P$ , respectivamente, aunque se observa que las trayectorias  $CL_1P$  y  $CL_2P$  son iguales, cada rayo de luz recorre una trayectoria diferente en longitud, lo que permite considerar la diferencia en el camino óptico entre  $C$  y la fuente. Gracias éste efecto se producen franjas de interferencia, que determinan el grado de planitud de la placa bajo prueba. Así pues, entre más cercanos estén los puntos  $A$  y  $C$  entre sí, se puede despreciar la variación del espesor entre estos puntos y se asume que la placa tiene un espesor bien definido en toda la región.

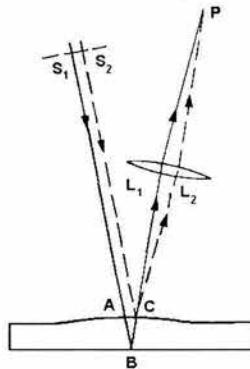


FIGURA 1-14. Formación de franjas de interferencia de igual espesor (Franjas de Fizeau) por reflexión

<sup>13</sup> Ibidem, p.17.

## 1.2. Interferometría

Como se vió en la sección anterior, la interferencia ocurre por la superposición de los rayos de luz emitidos por una fuente, los cuales siguen trayectorias diferentes. Así pues, en cada punto coincidente, se pueden producir franjas claras u oscuras; produciendo franjas de interferencia.

La interferencia da inicio a las técnicas de interferometría, que hoy en día es uno de los métodos físicos experimentales de medición más importantes, con extensas aplicaciones en el ancho campo de la ciencia y la tecnología. El padre de la visibilidad de la interferometría fue Michelson (1902-1927), quien ganó en 1907 el Premio Nobel de física por sus instrumentos ópticos de precisión y espectroscópicos, además de realizar investigaciones en el área de la metrología.

Al llegar a este punto, cabe realizar la pregunta ¿qué es un interferómetro? "Un interferómetro es un aparato que puede emplearse para medir longitudes o cambios de longitud con gran precisión por medio de franjas de interferencia".<sup>14</sup>

### 1.2.1. Algunos interferómetros

#### 1.2.1.1. Interferómetro de Michelson<sup>15</sup>

El interferómetro de Michelson, es probablemente el instrumento en interferometría que se utiliza más y es un ejemplo ideal para describir las propiedades generales de un interferómetro.

Así pues, el interferómetro de Michelson (figura 1-15), consiste básicamente en una fuente de luz que sale del punto  $S$  e incide sobre el espejo semiplatedado  $B$ , llamado **divisor de haz**, y  $C$  es otro divisor de haz, utilizado para compensar  $B$ . Este espejo tiene un recubrimiento de plata apenas lo suficientemente grueso como para transmitir la mitad de la luz incidente y reflejar la otra mitad; se supone por conveniencia que el espesor del espejo es despreciable. En  $B$  la luz se divide en dos rayos. Uno continúa por transmisión hacia el espejo  $M_2$ ; el otro viaja por reflexión hacia  $M_1$ . Las ondas se reflejan en cada uno de estos espejos de tal modo que retornan a lo largo de sus direcciones de incidencia, entrando finalmente cada onda al ojo  $O$ . Ya que las ondas son coherentes por provenir del mismo punto en la fuente, interfieren en efecto.

Si  $M_1$  se mueve hacia adelante (hacia la posición  $M_2$ ), el efecto es un cambio en el espesor de la película de aire equivalente. Suponiendo que el centro del patrón de franjas aparece brillante y que  $M_2$  se mueve apenas lo suficiente para causar que la primera franja circular brillante se desplace hacia el centro del patrón, la trayectoria o camino del haz de luz que viaja de ida y vuelta a  $M_2$  cambia en una longitud de onda. Lo que significa que la luz pasa dos veces a través de la película equivalente de aire, por lo que el espejo se desplaza a una distancia de  $0,5\lambda$ .

<sup>14</sup> HECHT, Eugene: *obr. Cit.*, p. 408

<sup>15</sup> HECHT, Eugene: *Obr. Cit.*, p.p. 354-357.

El interferómetro se emplea para medir cambios de longitud al contar el número de franjas de interferencia que pasan por el campo de visión conforme se mueve el espejo  $M_1$ . Las mediciones de longitud realizadas de esta manera pueden ser exactas si se cuenta un número de franjas bien definido.

Michelson midió la longitud del metro patrón, conservado en París, en términos de la longitud de onda de cierta luz monocromática roja emitida de una fuente de luz conteniendo cadmio. Demostró que el metro patrón era equivalente a 1 553 163,3 longitudes de onda de la luz roja del cadmio.

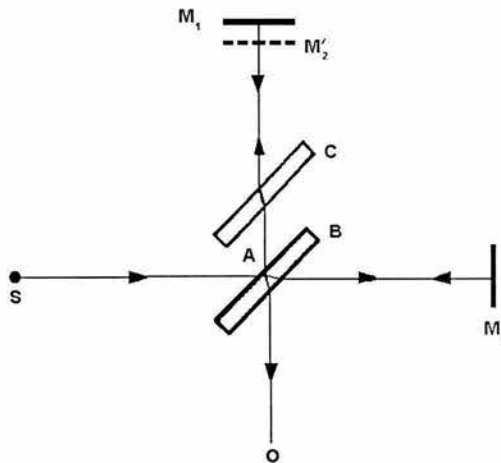


FIGURA 1-15. Esquema del interferómetro de Michelson.

### 1.2.1.2. Interferómetro de Fizeau<sup>16</sup>

El principio del funcionamiento del interferómetro Fizeau se basa en la interferencia en películas delgadas como burbujas de jabón, manchas de aceite, etc., que se da por la reflexión que las ondas de luz tienen con la superficie anterior y posterior en dicha película delgada. El espesor de las películas es del orden de magnitud de la longitud de onda de la luz. Dependiendo del espesor de película delgada puede ser perfectamente reflejante o perfectamente transmisora de la luz para una longitud de onda determinada.

Así pues, al tomar una película transparente de espesor uniforme  $d$ , iluminada por una fuente con luz monocromática de longitud de onda  $\lambda$ , el rayo incidente, después de reflejarse en la superficie anterior de la película, viaja en la película como rayo refractado y se refleja en la superficie posterior de la película; emergiendo de la superficie anterior de la película como rayo de luz que puede ser observado por el ojo.

Al originarse de la misma fuente puntual, los rayos reflejados son coherentes y por lo tanto capaces de interferir. Pero existe una diferencia de fases entre ellos, porque han viajado caminos de longitudes diferentes, ya que han atravesado medios diferentes.

<sup>16</sup> Ibidem, p.551

Para una incidencia normal, donde el ángulo de incidencia es  $0^\circ$ , la diferencia de la trayectoria geométrica entre los dos rayos que parten de la fuente puntual de luz se aproxima a  $2d$ . Entonces se espera que el haz resultante que se refleja de la parte posterior de la película sea un máximo de interferencia cuando la distancia  $2d$  es un número entero de la longitud de onda.

Existen dos razones por las cuales esto no puede modificarse:

Primera, la longitud de onda debe referirse a la longitud de onda  $\lambda_n$  en la película y no a su longitud de onda  $\lambda$  en el aire; es decir, se tiene un *camino óptico* diferente. Las longitudes de onda  $\lambda$  y  $\lambda_n$  se relacionan por la ecuación (1.2).

La segunda razón, es suponer una película muy delgada donde  $2d$  sea mucho menor que una longitud de onda. La diferencia de fase entre las dos ondas se aproxima a cero con la suposición hecha y se esperaría ver la película brillante en la reflexión, pero sucede lo contrario, se ve oscura. Esto es claro, cuando por la acción de la gravedad se produce una película en forma de cuña, extremadamente delgada en su extremo superior. Para explicar este fenómeno y otros similares, un rayo de luz debe experimentar un cambio de fase abrupto de  $\pi$  o  $180^\circ$ , cuando se refleja en la interfaz aire-película. Así pues, el rayo que se refleja de la superficie anterior experimenta un cambio de fase.

Así, para que dos rayos se combinen para dar una *intensidad máxima*, con incidencia normal, se tiene la ecuación (1.8).

El término  $\frac{1}{2}\lambda$  se introduce porque en la reflexión existe un cambio de fase de  $180^\circ$ , equivalente a la mitad de una longitud de onda.

Las ecuaciones (1.8) y (1.9), se cumplen cuando el índice de refracción de la película es mayor o menor que los índices de los medios en cada lado de la película (cara posterior y anterior). Sólo en estos casos existirá un cambio de fase relativo de  $180^\circ$  para reflexiones en las dos superficies.

Si el espesor de la película no es uniforme, donde la película tiene una forma de cuña, ocurre una interferencia constructiva en ciertas partes, y en otras se presenta una interferencia destructiva; apareciendo bandas de intensidad máxima y mínima, llamadas *franjitas de espesor constante*. La anchura y el espaciamiento de las franjas depende de la variación del espesor  $d$  de la película.

Sobre la base de lo anterior, una superficie plana y pulida puede ser comparada contra una superficie plana de referencia (patrón o estándar), poniéndolas juntas (cara con cara) y se observarán franjas de igual espesor, las cuales se forman en la delgada capa de aire que separa a las superficies (Figura 1-16).

El arreglo tiene una lámpara láser de helio-neón como fuente de luz monocromática. El patrón de franjas corresponde a curvas de nivel de los errores de la superficie de prueba. Un método simple para saber si la superficie de prueba es convexa o cóncava se aplica

generalmente presionando en un punto cerca del borde de la pieza. Si la superficie es convexa, el centro de las franjas se moverá hacia este punto; si la superficie es cóncava, el centro de las franjas se alejara del punto.

Para medir errores de superficie más pequeños que una longitud de onda, se debe tener una capa delgada de aire entre las superficies (evitar daños por contacto) e introducir pocas franjas dentro del campo. La forma de la franja dentro de sus bordes, indica la desviación del plano de la superficie. Si el promedio de espaciado de franjas es  $a$ , y la distancia entre dos líneas paralelas que encierran los bordes de la franja es  $b$ , el error pico-valle de la superficie es:

$$F = \frac{b}{a} \times \frac{\lambda}{2} \quad \dots (1.10)$$

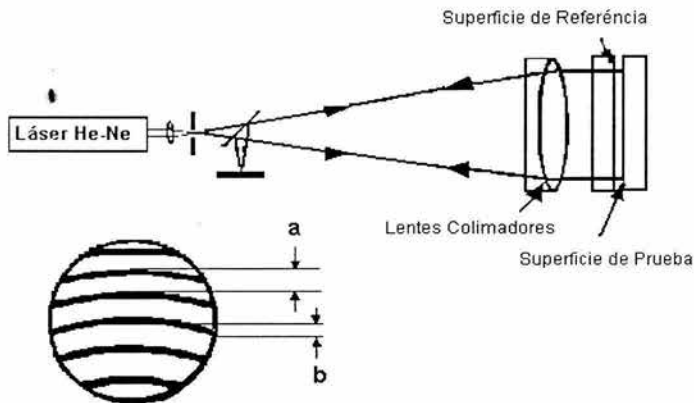


FIGURA 1-16. Interferómetro Fizeau para pruebas de planitud de superficie.

El Interferómetro Fizeau requiere de una fuente de **luz monocromática** (un color o una longitud de onda). Existen varias fuentes de luz monocromática (mercurio, vapor de sodio, helio-neón, etc.). También se puede emplear un prisma para separar la luz blanca en sus componentes y con la conjunción de un divisor de haz, aislar la longitud de onda deseada. Las fuentes de luz más utilizadas son aquellas en las cuales se realiza la excitación de átomos de un cierto elemento que irradia luz en una longitud de onda discreta.

Un estándar industrial es la lámpara de helio-neón. A continuación se muestra una tabla de longitudes de onda de fuentes de colores primarios y otra de algunas fuentes de luz utilizadas.

Longitud de onda aproximada de varios colores primarios:

Color	Intervalo de Longitud de Onda (nm)
Violeta	399 - 424
Azul	424 - 490
Verde	490 - 574
Amarillo	574 - 599
Naranja	599 - 645
Rojo	645 - 699

Longitud de onda de fuentes de luz<sup>17</sup> utilizadas:

Fuente	Longitud de onda	Intervalo de franjas
	nm	nm / franja
Isótopo de Mercurio (Hg <sup>198</sup> )	546	273
Helio	586	295
Sodio	598	299
Criptón 86	606	303
Helio-Neón	633	317
Rojo Cadmio	644	322

### 1.2.2. Interferómetro Fizeau Davison Optronics D305

Utilizando *franjas de igual espesor*, éste instrumento, seleccionado para realizar este trabajo por contar con él en el Laboratorio de Metrología del CCADET, se usa para determinar con un alto grado de exactitud la planitud de caras de planos y paralelas ópticos, espejos, piezas maquinadas de metal o cualquier material que posea una superficie reflectiva, como bloques patrón, asientos de válvulas, sellos mecánicos, etc.

A continuación se muestra el esquema óptico de funcionamiento del interferómetro Fizeau Davison Optronics D305.

<sup>17</sup> HARIHARAN, P.: *Obr. Cit.*, p.99.



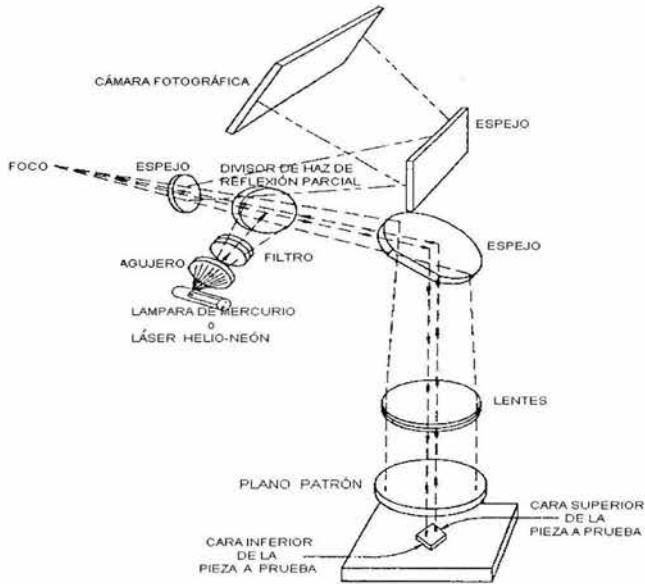


FIGURA 1-17. Esquema óptico de interferómetro Fizeau D305.

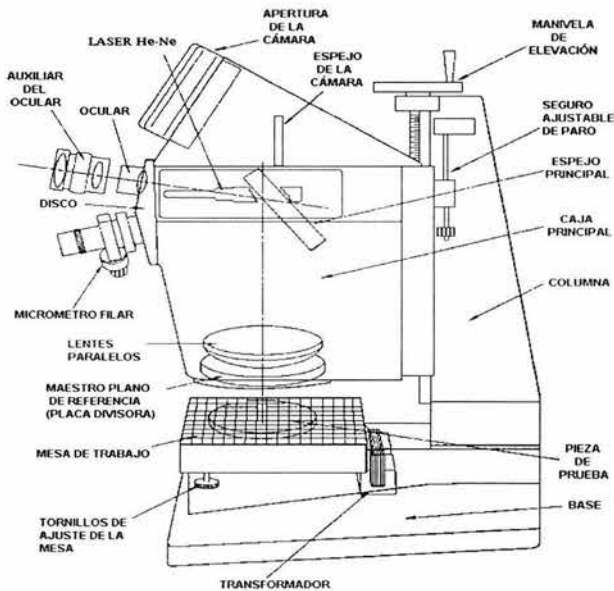


FIGURA 1-18. Partes del interferómetro Fizeau D305

### 1.3. Medición de planitud mediante un interferómetro.

Como ya se vio antes, un método muy exacto para la medición de dimensiones, es aquél que se basa en el principio de la interferencia de la luz. El componente más importante del interferómetro, es el plano óptico de referencia. Es una simple placa transparente (vidrio o cuarzo de alta calidad), con un acabado de planitud casi perfecto (posee una rugosidad promedio que es muy pequeña, que pueden ser despreciada). Cuando esta cara es colocada sobre otra superficie casi plana, y sobre de éstas se hace incidir un rayo de luz monocromática, se observan las franjas de interferencia formadas en la delgada película de aire.

#### 1.3.1. Procedimiento de medición de planitud en un interferómetro Fizeau Davison Optronics D305

Para poder realizar una medición de planitud, primero se tiene que tomar algunas consideraciones como:

- Tener una superficie limpia, ya que una partícula de polvo o grasa distorsiona el patrón de interferencia generado por ambas superficies (patrón y pieza bajo prueba).
- Hay que dejar que los instrumentos se estabilicen térmicamente.
- Obtener el ángulo de incidencia adecuado entre la fuente de la luz monocromática y las superficies involucradas (superficie bajo prueba y patrón), para obtener un patrón de interferencia que posea el menor número franjas de igual espesor.
- Las superficies deber estar lo más juntas posible, pero sin tocarse, para evitar daños de despostilladuras o raspaduras, por contacto.

Tomado las consideraciones anteriores, se puede realizar la medición en el orden siguiente:

- Se enciende el interferómetro (por lo menos 30 minutos antes de realizar la medición, para que se estabilice el láser He-Ne) y se coloca la superficie de prueba sobre la mesa de trabajo del interferómetro.
- Mediante la manivela de ajuste de elevación, se acerca el plano óptico del interferómetro a la superficie bajo prueba, cuidando que las superficies no se toquen.
- Se hace girar los tornillos de ajuste de la mesa de trabajo, para lograr el empalme de la imagen de referencia con la imagen de la superficie bajo prueba; ayudándose del auxiliar de ocular (figura 1-19).
- Se retira el auxiliar del ocular y se observa el patrón definido. Mediante los tornillos de ajuste de la mesa de trabajo se controla el número de franjas mínimas requeridas en el patrón de interferencia (5 franjas, según el manual de Interferómetro Davison Optronics D305), para obtener una buena medición.

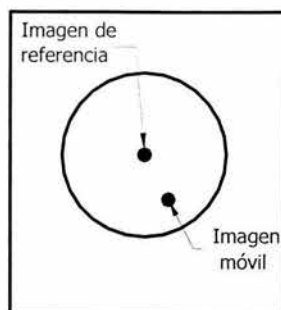


FIGURA 1-19. Empalme de imagen

- Girando el disco de oculares en la posición donde se encuentra montado el micrómetro filar, se toma la lectura de distancia entre franjas oscuras o claras y se toma la longitud de la desviación máxima (como lo muestra la Figura 1-20).



FIGURA 1-20. Toma de mediciones.

Para determinar la planitud se toman las medidas  $a$  y  $b$  y se aplica la ecuación (1.10) para determinar el error de planitud, conforme a la *Japanese Industrial Standard*.<sup>16</sup>

### 1.3.2. Inspección y diagnóstico de la superficie bajo prueba<sup>19</sup>

Para obtener una inspección precisa del patrón de interferencia obtenido, se toma una línea de referencia  $R$ , la cual permite situar al observador en el lugar correcto donde se debe realizar la interpretación del interferograma.

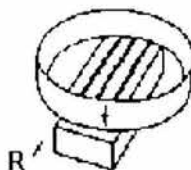


FIGURA 1-21. Línea de referencia, durante la inspección.

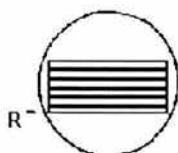
<sup>16</sup> Norma JIS b 7430-1977, "Optical Flats"

<sup>19</sup> BUSH, T.: Fundamentals of dimensional metrology, USA, Ed. Delmar Publishers Inc., 3<sup>rd</sup> ed., 1966, p.p.322-323.

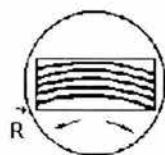
A continuación se muestra una tabla con los patrones de franjas de interferencia más comunes que se obtienen y el diagnóstico que los explica.

**Patrón de interferencia**

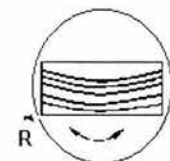
**Diagnóstico**



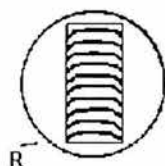
Las franjas de interferencia están alineadas con la línea de referencia y son equidistantes entre ellas, lo que indica que esta superficie es *plana*.



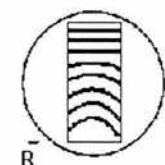
Las franjas de interferencia hacia arriba, después de la línea de referencia, indican que la superficie es *convexa* y tiene una *cresta en el centro*.



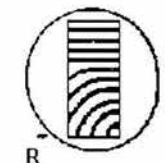
Esta superficie es *cóncava* y tiene un *sumidero* en el centro, por lo que se explicó en la figura anterior.



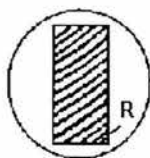
Estas franjas muestran una *pendiente de inclinación negativa*, en los bordes de la superficie. Aquí se nota la importancia de la línea de referencia, porque si el bloque se girara 180°, se tiene una *pendiente de inclinación positiva*.



En la parte superior esta superficie es *plana*, pero conforme se desciende, comienza a ser *convexa*.



En la esquina inferior derecha se tiene un *sumidero*, que crea el efecto de que la curvatura de las franjas corra hacia dicha esquina.



Esta superficie es *casi plana* en dirección a la línea de referencia, pero la ligera curvatura que presenta las franjas que se alejan de la línea de referencia, indican que esta es *ligeramente cóncava*.



La superficie es *plana* en dirección donde se deslizan las franjas, pero en el centro donde se separan, existe un *pico* (especie de tejado de caída de dos aguas).



En este caso se presenta el patrón de interferencia de *dos puntos altos* (crestas), rodeados de *áreas bajas*.

### 1.3.3. Método relativo de medición de planitud

Este método, ya descrito en 1.3.1, se lleva a cabo utilizando un plano físico que se considera patrón (planos de cuarzo), con una rugosidad máxima superficial muy pequeña o despreciable, comparada con otras superficies similares a ésta. Según muchos estudios la medición de planitud máxima que se puede obtener con este método es de  $\lambda/200$ .<sup>20</sup>

### 1.3.4. Método absoluto de medición de planitud

En este caso, la medición de planitud se obtiene comparando una superficie plana real contra un plano matemático. Sin embargo, para fines prácticos es necesario definir físicamente un patrón absoluto que permita realizar comparaciones directas, sin la necesidad de establecer modelos matemáticos para la obtención de la planitud.

Así pues, tomando como base definiciones o consideraciones de las leyes de la física, hay dos posibilidades: la primera es definir el *plano físico ideal* que puede ser, por ejemplo, la *superficie libre de un líquido*; o la segunda, utilizar un método matemático donde no se requiera un plano físico ideal, lo que nunca permitirá tener información absoluta de la planitud.<sup>21</sup>

Por lo tanto, en este trabajo, se utiliza la superficie libre de un líquido para definir el plano físico ideal, el cual, según la ley de gravitación se define como: *la superficie en la cual toda la infinidad de puntos que la componen tienen igual potencial gravitacional (energía potencial); siempre y cuando el centro de gravedad sea infinitamente distante*.<sup>22</sup>

<sup>20</sup> Schulz, G. y Schwider, J.: "Precise measurement of planeness", en: Applied Optics, USA, No. 6, enero-junio, 1967, p.1077.

<sup>21</sup> *Ibid.* p.1080.

<sup>22</sup> *Ibid.* p.1080.

Así pues, la superficie libre de un líquido sin perturbación alguna y de dimensiones considerables, depositado sobre la superficie de la tierra, es tan plano que puede ser medido y considerado como un plano ideal.

Algunos líquidos propuestos según sus propiedades físicas y ópticas son: agua, glicerina, aceite y mercurio. Con líquidos transparentes, la superficie por medir puede ser probada sumergida dentro del líquido.<sup>23</sup>

En el Physikalisch Technische Bundesantalt (PTB) de Alemania, se ha desarrollado un interferómetro tipo Fizeau para medir planitud de superficies ópticas, utilizando un espejo líquido de mercurio con espesor 0,2mm y diámetro de 240mm, colocado en un recipiente de acero inoxidable recubierto con una capa de plata ultra-pura de 1mm de espesor. Todo este sistema de espejo líquido, está montado en una estructura diseñada especialmente para soportar al mercurio y proveerle amortiguamiento de vibraciones externas. En el mismo diseño mecánico se consideró la colocación del arreglo óptico del Interferómetro Fizeau, que utiliza una lámpara de cadmio con una longitud de onda de 509nm, con una distancia entre franjas de 1cm y una desviación máxima de 7nm.<sup>24</sup>

Existen perturbaciones diversas que afectan la estabilidad de la superficie libre de un líquido, tales como: vibración, partículas de polvo, capilaridad, evaporación, diferencia de temperatura, cargas electrostáticas, campos magnéticos y contraste. Pero pese a todas estas perturbaciones es posible utilizarlos como plano patrón para la calibración de planos ópticos e Interferómetros, como se verá en el desarrollo de los capítulos siguientes.

---

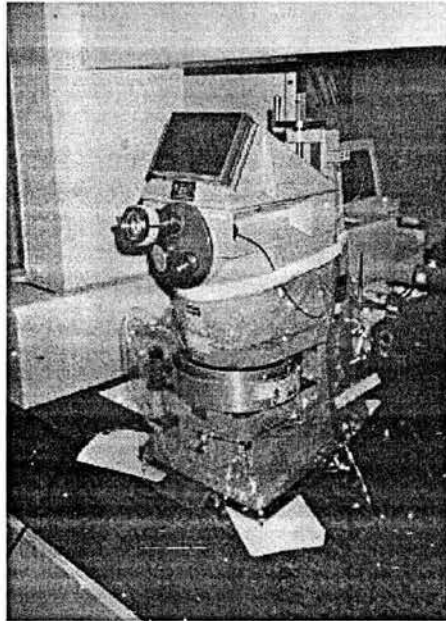
<sup>23</sup> *Ibid.* p.1080.

<sup>24</sup> Bunnagel, R. Oehring, H.A. y Steiner, K.: "Fizeau interferometer for measuring the flatness of optical surface", en: Applied Optics, USA, No. 2, febrero, 1968, p.p.331-335.

---

---

## ***CAPITULO II***



### ***Diseño del Sistema Espejo Líquido (SEL)***

---

---

## 2. Diseño del Sistema Espejo Líquido (SEL)

### 2.1. Sistema Espejo Líquido (SEL)

El **Sistema Espejo Líquido (SEL)**, es el dispositivo que se utiliza para poder realizar una calibración absoluta al interferómetro Fizeau Davison Optronics D305. Este dispositivo emplea como patrón de calibración un *plano líquido (PL)*, o sea, la superficie libre de un líquido (en éste caso la de un aceite), el cual tendrá un aislamiento de vibraciones mediante otro *aceite de amortiguamiento(LA)*, que dará estabilidad al plano líquido en cuanto a perturbaciones por contacto o por movimientos bruscos. Además se dota el sistema de una *funda de plástico* que evita que corrientes de aire perturben el plano líquido y por consiguiente no deja que partículas de polvo o de cualquier otra índole se depositen sobre su superficie.

#### 2.1.1. Partes del SEL

Como ya se mencionó, el SEL esta constituido por tres componentes:

- a) Plano líquido ó Líquido espejo.
- b) Líquido de amortiguamiento.
- c) Funda protectora de corrientes de aire y partículas de polvo.

a. **Plano líquido ó Líquido espejo (PL)**: Es la superficie libre de un líquido, depositado en un recipiente.

Según Schulz<sup>1</sup>, un *plano físico*, es una superficie con un mismo potencial gravitacional, si y solo si el centro de gravedad es infinitamente distante.

Así pues, la superficie libre de un líquido sin perturbaciones depositado sobre la superficie de la tierra es un *plano ideal*.

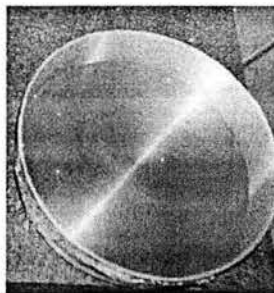


FIGURA 2-1. Plano Líquido.

<sup>1</sup> Schulz, G.; Schwider, J.: "Precise Measurement of Planeness", en Applied Optics, USA, No.6, enero-junio, 1967, p.1080.



b. **Líquido amortiguador (LA):** Líquido que se utiliza para flotar y soportar el recipiente del líquido espejo, con la finalidad de disminuir las vibraciones hacia el recipiente del plano líquido y por consiguiente que dichas perturbaciones no lleguen al PL.

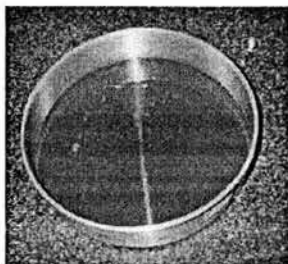


FIGURA 2-2. Líquido amortiguador.

c. **Funda protectora de corrientes de aire y partículas de polvo:** Esta funda está hecha de plástico, provista con un cierre de velcro, para facilitar la sujeción en el interferómetro, y de esta manera evitar el paso de corrientes de aire y de partículas de polvo que puedan contaminar la superficie del PL.



FIGURA 2-3. Funda protectora de plástico.

### 2.1.2. Propiedades de los líquidos utilizados en el SEL

Para la selección de los fluidos a utilizar, se tomaron los aceites similares utilizados por V.A. Grigor'ev.

La única propiedad que debe cumplir el PL, es que tenga una viscosidad cinemática de 12-14 cSt a 50°C.<sup>2</sup> El valor de la viscosidad cinemática de este aceite permite que el volumen de éste se esparza rápidamente hasta tomar la forma de un plano y además de que posee la propiedad de amortiguar vibraciones externas por sí mismo en toda su extensión.

Dicho aceite no es higroscópico, no forma película en la superficie y su coeficiente de reflexión es adecuado para formar un patrón de interferencia con alto contraste, además de que es un aceite mineral con un alto grado de pureza.

<sup>2</sup> Grigor'ev, V. A.; Zaborov, Ya.O.; et.al.: "Use of a liquid mirror for the calibration of an interferometer having a plane comparison wave front", en: Soviet Journal Optic Technology, USA, Vol.53, No.10, octubre, 1986, p.614.

El aceite utilizado, es un aceite de procesos industriales, llamado **Nacional 80**<sup>3</sup>, con código de producto Mexlub: 0353, y sus propiedades se muestran a continuación:

Prueba	Valor Típico
Color ASTM	3,0
Peso específico de 20 a 4°C (gr/ml)	0,895
Punto de inflamación (°C)	135
Viscosidad a 40°C (cSt)	14,5
Viscosidad a 100°C (cSt)	3,0
Índice de viscosidad	40
Punto mínimo de fluidez (°C)	-20

El aceite Nacional 80, es un aceite claro de minerales puros de base nafténica, altamente refinado, baja tendencia a la oxidación, al desgaste y a la herrumbre.

Por otro lado, para el *LA* se propone un aceite con un valor alto de viscosidad cinemática<sup>4</sup> respecto de la viscosidad cinemática del *PL*, con la finalidad de prever amortiguamiento al *PL*, lo que corresponde a un aceite de transmisión.

El aceite existente en México, es el aceite para vehículos de gasolina, **aceite para transmisión manual SAE-140**<sup>5</sup>, con código de producto de Mexlub: 0151, de propiedades:

Prueba	Valor Típico
Color ASTM	6,5
Peso específico de 20 a 4°C (gr/ml)	0,910
Punto de inflamación (°C)	250
Viscosidad a 40°C (cSt)	620
Viscosidad a 100°C (cSt)	34
Índice de viscosidad	90
Punto mínimo de fluidez (°C)	-12

<sup>3</sup> <http://www.mexlub.com.mx>

<sup>4</sup> Grigor'ev, V. A.; Zaborov, Ya.O.; et.al.: *art. cit.*, p.615.

<sup>5</sup> <http://www.mexlub.com.mx>

Es un aceite elaborado con aceites básicos parafínicos altamente refinados, con resistencia a la oxidación. Además de que contiene un aditivo antiemulsificante, que permite que se forme una película continua de lubricante.

El cambio en las propiedades de los aceites utilizados respecto de la temperatura no significa mucho en este caso, ya que los aceites se utilizan en ambiente controlado, donde la variación de temperatura es de  $\pm 0,5^\circ\text{C}$ . Lo que permite observar en la figura 2-4, que en cambios de temperatura muy pequeños, los aceites conservan las propiedades requeridas para su aplicación.

$T$ : temperatura ( $^\circ\text{C}$ )

$\mu/\rho$ : coeficiente de viscosidad cinemático ( $\text{m}^2/\text{s}$ )

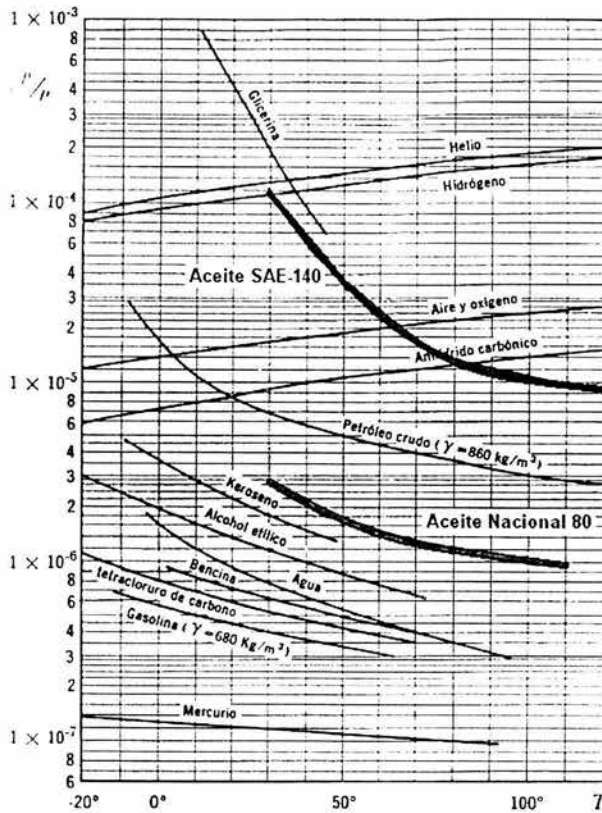


FIGURA 2-4. Gráfico de viscosidad de algunas sustancias.<sup>6</sup>

### 2.1.3. Consideraciones de montaje del SEL

Existen algunas consideraciones que se deben cuidar, para realizar un montaje correcto y con el mínimo de perturbaciones durante la medición; según V. A. Grigor'ev:

<sup>6</sup> LEVI, Enzo: Elementos de Mecánica del Medio Continuo, México, Ed. Limusa, 1998, p.253.

1. El plano líquido se debe dejar reposar por un periodo de 24 horas, para que la superficie del plano líquido, adopte la forma de un plano, con la finalidad de que se esparza completamente.
2. El plano líquido debe tener un diámetro mayor que el plano óptico del interferómetro, aproximadamente 10mm de radio, para eliminar efectos del menisco (mojado de superficie, ver apéndice B)
3. Cubrir el plano líquido con una funda de plástico, para evitar corrientes de aire y contaminación de la superficie libre del aceite.
4. El rayo de incidencia sobre la superficie del plano líquido debe ser oblicuo. La longitud de onda del láser utilizado es de 633nm.

Estas consideraciones, permiten que el plano líquido, se apegue a la definición de plano físico ideal; y se pueda realizar una calibración más confiable.

## **2.2. Superficie libre de un fluido como plano físico ideal**

Como se ha mencionando, un plano físico ideal es aquel plano en el cual toda la extensión de su superficie posee un mismo potencial gravitacional; lo cual es posible solamente cuando su centro de gravedad se encuentra en el infinito (concepto que define a la línea recta).

Una línea recta es una línea curva en la cual su centro se encuentra en el infinito lo cual se puede demostrar geoméricamente. Este concepto se utiliza para determinar la curvatura de la superficie libre de un líquido depositado en un recipiente o de cualquier líquido derramado que se encuentre sobre la superficie de la tierra, (ríos, mares, charcos, etc.).

Además de determinar la curvatura de la superficie libre de un líquido depositado en un recipiente con una demostración geométrica, es preciso obtener mediante el efecto de capilaridad o mojado de superficie, la altura del menisco para determinar la porción del *PL* que produce efectos de arista.

### **2.2.1 Curvatura del *PL***

El recipiente que se utiliza para contener el *PL* es un recipiente cilíndrico con un diámetro ( $\phi_{PL}$ ), de 240mm, y la distancia del centro de gravedad de la superficie del *PL*, que es el radio de la tierra ( $R_T$ ), es de aproximadamente 6400Km. Para poder dar inicio a la demostración, se utiliza la figura 2-5.

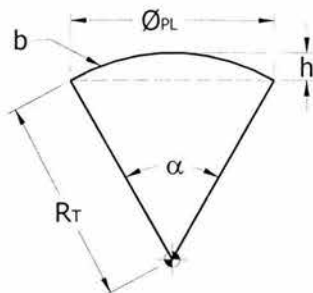


FIGURA 2-5. Esquema de la geometría de un líquido sobre la superficie de la tierra.

Como ya ha se mencionado, un líquido depositado en un recipiente tiende a adquirir la forma del mismo; así pues, un líquido que se derrama sobre la superficie de la Tierra tenderá a tomar la forma curva de ella. Precisamente en esta concepción se basará la demostración geométrica.

Existen dos parámetros que son determinantes, para conocer que tan plana es la superficie libre del líquido, que son:

- a) La longitud del arco de circunferencia denotado por  $b$

$$b = \frac{\pi}{180} R_T \alpha \quad \dots (2.1)^7$$

- b) El tamaño de la magnitud  $h$ , que determina la separación máxima que existe entre  $\phi_{PL}$  y  $b$ .

$$h = R_T \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{ó} \quad h = \frac{\phi_{PL}}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \quad \dots (2.2)^8$$

Para poder determinar los parámetros anteriores, se tiene que conocer el ángulo  $\alpha$ , el cual se determina mediante la ley de los senos, como se muestra a continuación:

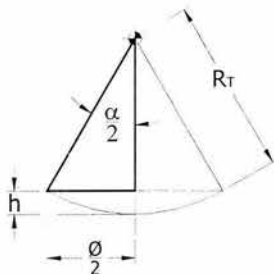


FIGURA 2-6. Aplicación de la ley de los senos para determinar  $\alpha$ .

<sup>7</sup> GIECK, Kurt: Manual de formulas técnicas, México, Ed. Alfaomega, 1989, 72ª ed., p.B3.

<sup>8</sup> Ibidem, p.B3.

Aplicando la ley de los senos, se tiene que

$$\frac{\frac{\phi_{PL}}{2}}{\text{sen} \frac{\alpha}{2}} = \frac{R_T}{\text{sen} 90^\circ} \dots (2.3)$$

Despejando  $\alpha$ , se tiene la ecuación siguiente:

$$\alpha = 2 \text{angsen} \left( \frac{\phi_{PL}}{2R_T} \right) \dots (2.3.1)$$

Sustituyendo valores en ecuación (2.3.1), se tiene el resultado siguiente:

$$\alpha = 2 \text{angsen} \left( \frac{0,24m}{2 \times 6400 \times 1000m} \right)$$

$$\boxed{\alpha = 2,15 \times 10^{-6} [^\circ]}$$

Tomando el valor de  $\alpha$ , para resolver la ecuación (2.1), se obtiene el valor siguiente de la longitud de la curvatura.

$$b = \frac{\pi}{180} \times (6400 \times 1000m) \times (2,15 \times 10^{-6})$$

$$\boxed{b \approx 0,24m \approx \phi_{PL}}$$

Donde al comparar  $b$  contra  $\phi_{PL}$ , resulta que  $b \approx \phi_{PL}$ .

Ahora, se sustituyen valores en las ecuaciones (2.2), para obtener el valor de  $h$ :

$$h = 6400 \times 10^3 m \left( 1 - \cos \frac{2,15 \times 10^{-6} \text{ }^\circ}{2} \right)$$

$$\boxed{h = 0m}$$

$$\text{ó} \quad h = \frac{0,24m}{2} \tan \frac{2,15 \times 10^{-6}}{2}$$

$$\boxed{h = 2nm}$$

Así pues los datos recabados, son lo siguientes:

$R_T$ [Km]	6400
$\phi_{PL}$ [m]	0,24
$\alpha$ [°]	$2,15 \times 10^{-6}$
$b$ [m]	0,24
$h$ [m]	$2 \times 10^{-9}$

Por lo tanto, queda demostrado que con un recipiente de 240mm de diámetro para el  $PL$ , la superficie libre del líquido puede considerarse un plano físico ideal.

### 2.2.2. Efectos por aristas debido a la capilaridad

En el apéndice B se observa como un fluido moja las paredes de su contenedor, y al mojar se tiene un menisco que posee cierta curvatura, que como se demostró en el apartado anterior tiene una magnitud. El líquido que se utiliza como  $PL$ , es un aceite y el recipiente es de aluminio, por lo que el aceite moja la pared de aluminio y se tiene un menisco de la forma siguiente.

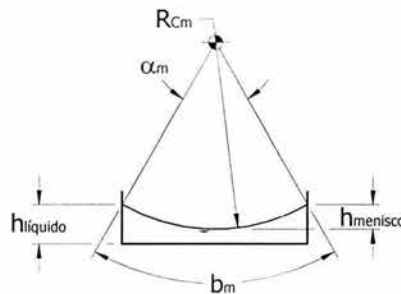


FIGURA 2-7. Forma del menisco.

Para determinar la altura del menisco, se utilizan los conceptos de capilaridad y el de tensión superficial, y se aplican según la figura 2-8.

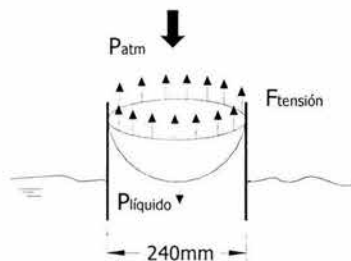


FIGURA 2-8. Diagrama de equilibrio de fuerzas.

Realizando la sumatoria de fuerzas se tiene que:

$$F_T = A_T P_{PL} \dots (2.4)$$

donde  $P_{PL} = \gamma_{PL} h_{menisco}$

$$A_T = \frac{\pi \phi_{PL}^2}{4}$$

$$F_T = \phi_{PL} \pi \sigma_{PL} \cos \theta$$

Sustituyendo variables en (2.4) y despejando  $h_{menisco}$ :

$$h_{menisco} = \frac{4 \sigma_{PL} \cos \theta}{\gamma_{PL} \phi_{PL}} \dots (2.5)$$

Si  $\sigma_{PL} = 0,0350 \frac{N}{m}$ ,  $\theta = 0^\circ$  y  $\gamma_{PL} = 8753,1 \frac{N}{m^3}$ , se tiene:

$$h_{menisco} = \frac{4 \cos(0^\circ) \left( 0,035 \frac{N}{m} \right)}{\left( 8753,1 \frac{N}{m^3} \right) (0,24m)}$$

$$h_{menisco} = 66643nm$$

Utilizando la figura 2-5, se tiene que se conoce  $h_{menisco} \approx h \approx 0$ , y  $\phi_{PL}$ , pero se desconoce el radio  $Rc_m$ , (en lugar de  $R_T$ ) la curvatura  $b_m$  y el ángulo  $\alpha_m$ .

Para obtener  $Rc_m$ , se utiliza la ecuación siguiente:

$$Rc_m = \frac{h_{menisco}}{2} + \frac{\phi_{PL}^2}{8h_{menisco}} \dots (2.6)^9$$

De modo que al sustituir  $h_{menisco}$  y  $\phi_{PL}$  se obtiene

$$Rc_m = 108,038m$$

Para calcular el  $\alpha_m$ , se utiliza la ley de los senos, de la misma forma que el apartado anterior, apoyándose en la figura 2-6 y la ecuación (2.3.1), obteniendo

<sup>9</sup> GIECK, Kurt: Obr. Cit., p.B3.



$$\alpha_m = 0,13^\circ$$

Las magnitudes anteriores, permiten tener un arreglo de la forma siguiente:

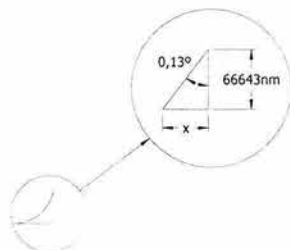


FIGURA 2-9. Dimensiones del menisco

Tomando un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 2-9, y aplicando la relación trigonométrica de la tangente se tiene:

$$x = (66643nm) \tan(0,13^\circ)$$

$$x = 151nm$$

Para efectos prácticos, el diámetro del *PL* podría ser igual que el del plano óptico del Interferómetro Fizeau sin sufrir efectos indeseables por capilaridad en la obtención de interferograma.

### 2.3. Plano Líquido (PL) o Líquido Espejo (LE)

Ya se demostró que el *Plano Líquido (PL)*, es un plano físico ideal; pero la demostración anterior responde al caso en el que la superficie libre del *PL*, no tiene movimiento alguno sobre su superficie, no se presentan ondas en la superficie. Esto es falso, ya que un líquido cualquiera que fuera, sobre la superficie de la Tierra, tiene asociado un *sistema coordinado no inercial*, debido al movimiento de rotación de la Tierra, que se representa mediante la **aceleración de Coriolis**<sup>10</sup>. Así pues, a mayor altura de líquido contenido, se generan ondas de mayor amplitud; por ende en una altura menor de líquido, la amplitud de ondas es pequeña.

Así pues, esta perturbación inherente del plano líquido, se tiene que cuantificar, en término de la **frecuencia natural de vibración** que posee el plano líquido. Esta valoración se hará con la ayuda de la dinámica de fluidos, para determinar la **frecuencia de resonancia**, del *PL* y mediante este valor poder determinar que cantidad de **Líquido Amortiguador (LA)**, se requiere para poder aislar el *PL* de dichas frecuencias que provoquen una perturbación de magnitud mayor que su **frecuencia de resonancia**.

<sup>10</sup> WHITE, M. Frank: Mecánica de fluidos, México, Ed. McGraw-Hill, 1988, p.167.

### 2.3.1. Ondas en la superficie de un fluido

Las ondas en superficies libres de líquidos, tienen algunas consideraciones o restricciones generales, que se muestran a continuación:

1. La **velocidad de propagación (c)**, de onda en la superficie, depende del medio.
2. La **frecuencia de la onda (f)**, es decir, la frecuencia de oscilación de los puntos de la superficie libre, es igual a la frecuencia de la fuente que la origina.
3. Si la **frecuencia de oscilación** aumenta, entonces la longitud de onda ( $\lambda$ ) disminuye en el medio.

Estos aspectos son importantes, para poder intuir el comportamiento que las ondas tienen en la *Superficie Libre de un Líquido (SLL)*. Para poder modelar el comportamiento de las ondas, así como los parámetros que las caracterizan, se proponen las consideraciones siguientes:

1. Las ondas se generan por la **fuerza de gravedad**, en la superficie libre.
2. El movimiento inducido en la superficie se considera **irrotacional**, es decir, la circulación en cualquier contorno arbitrario es cero  $\bar{\omega} = \Delta \times \bar{u} = \bar{0}$ , así pues el vector de vorticidad es cero; donde la **vorticidad** es el rotacional de la velocidad.
3. El **vector de velocidad** se puede expresar como un gradiente del potencial de velocidades (Ecuación de Laplace).

El estudio del modelado de las ondas en superficies libres, se basará en la figura siguiente, donde se muestra el cuerpo de un líquido sobre una superficie plana, así como las ondas en su superficie libre.

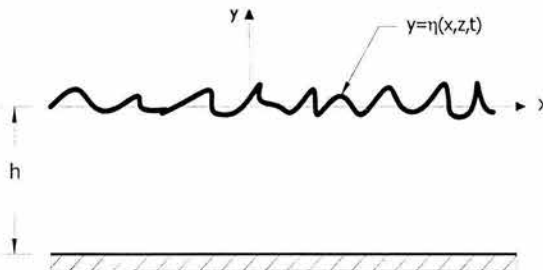


FIGURA 2-10. Diagrama de ondas en superficies libres.

donde  $y = \eta(x, z, t)$ : superficie libre del líquido

$h$ : profundidad media del líquido

$\eta$ : es una función que designa a  $y$ , que depende de  $x$ ,  $z$  y  $t$ .

Sobre la superficie, por sencillez, se supone que las ondas que se producen, son ondas sinusoidales, de longitud  $\lambda$ , que avance con velocidad constante  $c$ , en la dirección positiva del eje  $x$ . Además se supone que el flujo carece de efectos viscosos y que la causa que provoca las ondas

no induce movimientos de rotación en el medio, según la ley de Thomson que dice: "un movimiento irrotacional no puede transformarse en rotacional, a menos que intervenga alguna fuerza externa"<sup>11</sup>

De esta figura, se pueden proponer las condiciones de fronteras en el punto  $y=\eta$ , como sigue:

- Condición dinámica en la superficie, donde  $p=P(x,z,t)$
- Condición cinemática en la superficie libre  $y-\eta=0$

Si se toma el término  $y-\eta=0$ , y se le aplica la derivada material, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(y-\eta) + \frac{\partial}{\partial x}(y-\eta)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}(y-\eta)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}(y-\eta)\frac{dz}{dt} = 0$$

donde  $u = \frac{dx}{dt}$ ,  $v = \frac{dy}{dt}$  y  $w = \frac{dz}{dt}$  de modo que

$$\frac{\partial}{\partial t}(y-\eta) + \left( u \frac{\partial(y-\eta)}{\partial x} + v \frac{\partial(y-\eta)}{\partial y} + w \frac{\partial(y-\eta)}{\partial z} \right) = 0 \quad \dots (2.7)$$

En general, la velocidad es un vector, función de la posición y del tiempo, que tiene tres componentes escalares  $u$ ,  $v$  y  $w$ .

$$\vec{V}(x, y, z, t) = \hat{i}u(x, y, z, t) + \hat{j}v(x, y, z, t) + \hat{k}w(x, y, z, t)$$

Reduciendo la ecuación,

$$\frac{\partial}{\partial t}(y-\eta) + \vec{V} \cdot \nabla(y-\eta) = 0 \quad \dots (2.7.1)$$

donde  $\vec{V}$ : es el campo de velocidad, que depende de las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$ .

Se tiene que las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$  son independientes y la función  $\eta$  depende de  $x$ ,  $z$  y  $t$ , desarrollando la expresión (2.7) se obtiene

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + v \left( \frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + w \left( \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) = 0 \quad \dots (2.7.2)$$

Se supone que sobre la superficie se producen ondas sinusoidales, por sencillez, se puede determinar las consideraciones siguiente:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} \neq 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial z} \neq 0$$

<sup>11</sup> LEVI, Enzo: *Obr. Cit.*, p.180.

Así pues, las componentes de velocidad en dirección del eje  $y$ , varía respecto al tiempo

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v \neq 0$$

Además, se puede determinar que

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \eta(x, z, t)}{\partial y} = 0$$

Sustituyendo en (2.7.2), las deducciones anteriores, la ecuación queda como sigue:

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v - w \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad \dots (2.7.3)$$

Multiplicando por (-1) y reacomodando,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} = v \quad \dots (2.8)$$

Como ya se había dicho, el flujo es irrotacional ( $\bar{\nabla} \times \bar{V} = 0$ ), por lo que se obtiene  $\bar{V} = \bar{\nabla} \phi$  donde  $\phi = \phi(x, y, z, t)$ , denominado *potencial de velocidades*, se pueden generar los valores siguientes:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Sustituyendo, estos componentes de velocidades en (2.8), se encuentra la ecuación siguientes, en  $\mathbf{y}=\eta$ :

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial y}} \quad \dots (2.8.1)$$

La *ecuación de continuidad*, para un flujo irrotacional, densidad constante ( $\rho = \text{cte}$ ); o sea, flujo incompresible:

$$\rho(\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) = 0$$

Como  $\rho = \text{cte}$

$$(\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) = 0$$

Ya que es un flujo irrotacional  $\bar{V} = \bar{\nabla} \phi$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \phi = 0$$

Se tiene como resultado la ecuación de Laplace.

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0} \quad \dots (2.8.2)$$

Se considera que es un flujo no viscoso porque la viscosidad no es la que afecta al escurrimiento, sino son los efectos inerciales debidos a la aceleración.

Para la ecuación de la cantidad de movimiento, con un flujo no viscoso  $\bar{\tau}_{ij} = \bar{0}$  y flujo irrotacional.

$$\rho \bar{g} - \bar{\nabla} P = \rho \frac{d\bar{V}}{dt}$$

a la ecuación anterior, se puede realizar algunas operaciones algebraicas:<sup>12</sup>

- El término  $\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla})\bar{V}$ , donde el segundo término del sumando  $(\bar{V} \cdot \bar{\nabla})\bar{V}$ , se puede escribir como  $(\bar{V} \cdot \bar{\nabla})\bar{V} = \bar{\nabla} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \zeta \times \bar{V}$  donde

$$\zeta = \text{rot} \bar{V} \quad ^{13}$$

por lo que en la ecuación de flujo irrotacional  $\frac{d\bar{V}}{dt}$ , queda como sigue:

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{\nabla} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \zeta \times \bar{V} \right] = \rho \bar{g} - \bar{\nabla} P$$

Si se divide la ecuación anterior por  $\rho$  y se reagrupan los términos

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{\nabla} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \zeta \times \bar{V} + \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P - \bar{g} = 0$$

Multiplicando escalarmente por un vector de desplazamiento infinitesimal  $d\bar{r}$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \cdot d\bar{r} + \bar{\nabla} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot d\bar{r} + (\zeta \times \bar{V}) \cdot d\bar{r} + \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P \cdot d\bar{r} - \bar{g} d\bar{r} = 0 \quad \dots (2.9)$$

Del cálculo vectorial se tiene que cuando el vector  $d\bar{r}$  es perpendicular a otro vector cualquiera, ocurre lo siguiente  $\bar{\nabla} f \cdot d\bar{r} = 0$ , donde  $f$  es una función cualquiera, este caso  $(\zeta \times \bar{V}) \cdot d\bar{r} = 0$ .<sup>14</sup> Además, también se cumple que  $\bar{\nabla} f \cdot d\bar{r} = df$ .

<sup>12</sup> WHITE, M. Frank: Mecánica de fluidos, Obr. Cit., p. 266.

<sup>13</sup> Ibidem, p.266.

Por lo que la ecuación (2.9), queda como sigue:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \cdot d\bar{r} + d\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \frac{dP}{\rho} + gdy = 0 \quad \dots (2.10)$$

Aplicando el potencial de velocidades  $\phi$ .

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \cdot d\bar{r} = \frac{\partial}{\partial t} ((\nabla\phi) \cdot d\bar{r}) = d \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Sustituyendo en (2.10) y aplicando integración,

$$\int d \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi^2 + \int \frac{dP}{\rho} + g \int dy = 0$$

Integrando la ecuación se tiene,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi^2 + \frac{P}{\rho} + gy = \text{constante} = C \quad \dots (2.11)$$

donde  $C=F(t)$  y  $y=\eta$ ;  $\phi^2 = \nabla\phi \cdot \nabla\phi$ , sustituyendo valores en (2.11)

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi + \frac{P}{\rho} + g\eta = F(t)} \quad \dots (2.8.3)$$

Por último se aplica, la condición de frontera en  $y=-h$ ,

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial y} = v = 0} \quad \dots (2.8.4)$$

Así pues las ecuaciones que modelan las ondas en la SLL, con sus respectivas condiciones de frontera, son:

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial y}} ; y=\eta \quad \dots (2.8.1)$$

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0} \quad \dots (2.8.2)$$

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi + \frac{P}{\rho} + g\eta = F(t)} ; y=\eta \quad \dots (2.8.3)$$

<sup>14</sup> Ibidem, p.266.

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial y} = v = 0} ; y = -h \quad \dots (2.8.4)$$

Ecuaciones, utilizadas según Currie<sup>15</sup>, para modelar las ondas en superficie libre de líquidos, donde  $\phi = \phi(x, \eta, t)$ .

### 2.3.2. Ondas de pequeña amplitud

Este es un caso particular del apartado anterior, donde se proponen las consideraciones siguientes:

- Se tienen ondas planas
- El flujo es bidimensional

Así pues, la ecuación de continuidad expresada mediante el potencial de velocidades, para un flujo bidimensional, en el plano  $xy$ , es:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0} \quad \dots (2.8.5)$$

Las condiciones de frontera en la superficie libre, cuando existen ondas de pequeña amplitud, se considera que la *amplitud* ( $\epsilon$ ), es pequeña comparada con las medidas escalares de longitud, tales como la *altura del líquido* ( $h$ ) y la *longitud de onda* ( $\lambda$ ).

Pero  $\eta$  es pequeña compara con  $\lambda$ , por lo que la cantidad  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ , es la pendiente de la superficie libre; y para ondas de amplitud pequeña, dicha cantidad es despreciable.

La cantidad  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  que es la componente de velocidad en dirección del eje  $x$ , es *pequeña*, ya que las ondas en la superficie no consideran ondas con frecuencia altas y por ende se asume que la amplitud de movimiento será pequeña.

Por lo dicho anteriormente, el producto  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ , que aparece en la ecuación (2.8.1) es cuadráticamente pequeño, por lo que se puede despreciar.

Así pues, la condición cinemática de frontera representada en la ecuación (2.8.1), queda como sigue:

$$\boxed{\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \phi(x, \eta, t)}{\partial y}} \quad \text{en } y = \eta$$

<sup>15</sup> CURRIE, I.G.: "Fundamentals Mechanics of Fluids", USA, Ed. McGraw Hill, 1974, p.180.

Como una aproximación,  $\eta$  es pequeña, así pues en expansión de serie de Taylor para la cantidad  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  en  $y=\eta$ , alrededor de la línea  $y=0$ :

$$\frac{\partial \phi(x, \eta, t)}{\partial y} = \frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial y} + \eta \frac{\partial^2 \phi(x, 0, t)}{\partial y^2} + 0\eta^3$$

donde el segundo término tiende a ser cero.

Así pues la condición cinemática queda como se muestra

$$\boxed{\frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial y} = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t}} \quad \text{en } y=0 \quad \dots (2.8.6)$$

Se toma la ecuación (2.8.3), *condición dinámica* de frontera en la superficie libre, se le trata de la forma siguiente: se tiene un *flujo estacionario*, y el movimiento del fluido es inducido por las ondas; el término no lineal  $u \cdot u = \nabla \phi \cdot \nabla \phi$ , se desprecia por ser cuadráticamente pequeño, lo que implica obtener un valor despreciable.

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

El término  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  se expande en serie de Taylor, alrededor de la línea  $y=0=\eta$

$$\frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial t} = \frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 \phi(x, 0, t)}{\partial t^2} + 0\eta^2$$

La cantidad  $F(t)$  es absorbida por el potencial de velocidades  $\phi = \phi(x, \eta, t)$ , al considerar que

$$\phi(x, y, t) + \int F(t) dt = \text{constante}$$

Así pues, la ecuación (2.8.3) queda como sigue:

$$\frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial t} + \frac{P(x, t)}{\rho} + g\eta(x, t) = 0$$

si se deriva con respecto a  $t$ , se tiene que

$$\frac{\partial^2 \phi(x, 0, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + g \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = 0$$

donde  $\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial y}$ , por lo que se tiene que



$$\frac{\partial^2 \phi(x,0,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + g \frac{\partial \phi(x,0,t)}{\partial y} = 0 \quad \dots (2.8.7)$$

Por último con la condición de frontera en  $y=-h$ :

$$\frac{\partial \phi(x,-h,t)}{\partial t} = 0 \quad \dots (2.8.8)$$

### 2.3.3. Velocidad de propagación de las ondas en la superficie libre<sup>16</sup>

Para poder analizar la velocidad de propagación, de las ondas en la superficie se considera de acuerdo a la figura 2-11, lo siguiente:

- Líquido estacionario de altura  $h$ .
- Plano de onda de amplitud pequeña que viaja en la superficie del líquido con una velocidad  $c$ , y en la dirección positiva del eje  $x$ .
- La forma que toma la onda es una sinusoidal pura de amplitud  $\epsilon$  y de longitud de onda  $\lambda$ .

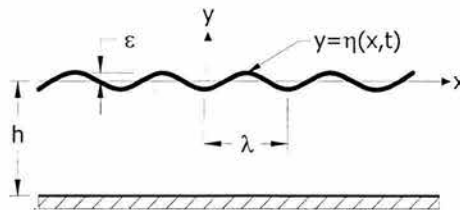


FIGURA 2-11. Parámetros para la determinación de  $c$ .

Como ya se vio anteriormente, la ecuación en la superficie libre esta dada por  $y = \eta(x, t)$  donde

$$\eta(x, t) = \epsilon \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right]$$

Otros datos importantes que se tienen que considerar son:

- Los efectos de tensión superficial son despreciables.
- La presión en la superficie será constante e igual a la  $P_{atm}$ :  $P(x, t) = P_{atm}$
- Se conoce  $\epsilon$ ,  $\lambda$  y  $h$ , la única incógnita es  $c$ .
- El fluido es homogéneo e incompresible, de modo que  $\rho = cte$ .

<sup>16</sup> CURRIE, I.G: "Fundamentals Mechanics of Fluids", USA, Ed. McGraw Hill, 1974, p.p.183-186

Se utilizarán las ecuaciones siguientes, para resolver el problema:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (2.8.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) \quad \dots (2.8.6)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, 0, t) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + g \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \quad \dots (2.8.7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, -h, t) = 0 \quad \dots (2.8.8)$$

Aplicando las condiciones ya propuestas, el arreglo de ecuaciones queda como sigue:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (2.8.5a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, t) = -\epsilon \frac{2\pi c}{\lambda} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right] \quad \dots (2.8.6a) \text{ Condición Cinemática en la Superficie Libre}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, 0, t) + g \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \quad \dots (2.8.7a) \text{ Condición Dinámica en la Superficie Libre}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, -h, t) = 0 \quad \dots (2.8.8a) \text{ Condición de Frontera } \mathbf{y = -h}$$

La solución a la *Ecuación de Laplace* (2.8.5a), donde  $\frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial y}$ , varía según el  $\cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)$  con una constante de separación de  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ , es:

$$\phi(x, y, t) = \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) \left( C_1 \sinh \frac{2\pi y}{\lambda} + C_2 \cosh \frac{2\pi y}{\lambda} \right) \quad \dots (2.8.9)$$

La solución de la *Ecuación de Laplace*, se desarrolla en el **apéndice D**.

Para determinar las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , se utiliza la condición de frontera (2.8.8a) en  $\mathbf{y = -h}$ , para lo cual se deriva la ecuación (2.8.9), quedando:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, t) = \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) \left( C_1 \frac{2\pi}{\lambda} \cosh \frac{2\pi y}{\lambda} + C_2 \frac{2\pi}{\lambda} \sinh \frac{2\pi y}{\lambda} \right)$$

Evaluando en  $y=-h$

$$\frac{\partial \phi(x, -h, t)}{\partial y} = \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \left( C_1 \frac{2\pi}{\lambda} \cosh \left[ \frac{-2\pi h}{\lambda} \right] + C_2 \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{senh} \left[ \frac{-2\pi h}{\lambda} \right] \right) = 0$$

Puesto que  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \neq 0$ , al reacomodar términos se tiene:

$$C_1 \frac{2\pi}{\lambda} \cosh \left[ \frac{-2\pi h}{\lambda} \right] + C_2 \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{senh} \left[ \frac{-2\pi h}{\lambda} \right] = 0$$

donde  $\begin{cases} \cosh(-x) = \cosh(x); \text{ función par (simetría respecto al eje } y) \\ \operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x); \text{ función impar (simetría respecto al origen)} \end{cases}$

Por lo tanto se tiene que  $\frac{2\pi}{\lambda} (C_1 \cosh \frac{2\pi h}{\lambda} - C_2 \operatorname{senh} \frac{2\pi h}{\lambda}) = 0$  si  $\frac{2\pi}{\lambda} \neq 0$  se puede despejar  $C_1$ , y simplificando, se tiene

$$C_1 = C_2 \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}$$

sustituyendo  $C_1$  en la ecuación (2.8.9), se tiene lo siguiente:

$$\phi(x, y, t) = C_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \left( \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \operatorname{senh} \frac{2\pi y}{\lambda} + C_2 \cosh \frac{2\pi y}{\lambda} \right) \dots (2.8.9a)$$

Para obtener la constante  $C_2$ , se aplica la condición de frontera (2.8.7a), para lo cual se deriva la ecuación anterior (2.8.9a) obteniendo

$$\frac{\partial^2 \phi(x, 0, t)}{\partial t^2} = -C_2 \left( \frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2 \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right]$$

$$\frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial y} = \frac{2\pi}{\lambda} C_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \left( \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \cosh(0) + \operatorname{senh}(0) \right)$$

donde  $\cosh(0)=1$  y  $\operatorname{senh}(0)=0$ .

Sustituyendo en (2.8.7a) y reacomodando términos:

$$C_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \left[ - \left( \frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2 + g \frac{2\pi}{\lambda} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \right] = 0$$

Ecuación que satisface todos los valores en  $x$  y  $t$ , donde se desconocen las constantes  $C_2$  y

la velocidad  $c$  a la que viaja la onda; pero  $C_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) \neq 0$ , se despeja  $\frac{c^2}{g}$

$$\frac{c^2}{g} = \frac{\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}$$

Para encontrar un número adimensional, se divide entre  $h$ :

$$\boxed{\frac{c^2}{gh} = \frac{\lambda}{2\pi h} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}} \dots (2.8.10)$$

Cabe señalar que la ecuación (2.8.10) es una aproximación para amplitudes pequeñas, lo cual es válido para  $\epsilon \ll \lambda$  y  $\epsilon \ll h$ .

Si consideramos líquidos de profundidad grande (deep liquid), donde  $h \gg \lambda$ . El parámetro se incrementará  $\frac{2\pi h}{\lambda}$ , por lo que  $\tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \approx 1$ .

Así que, para líquidos profundos la ecuación (2.8.10) queda como sigue

$$\boxed{\frac{c^2}{gh} = \frac{\lambda}{2\pi h}} \dots (2.8.10a) \quad \text{Líquidos Profundos}$$

Ecuación válida si  $\epsilon \ll \lambda \ll h$ .

Ahora cuando son líquidos pocos profundos (shallow liquids), el líquido cumple si  $h \ll \lambda$ . En este caso ocurre que  $\frac{2\pi h}{\lambda}$  es tan pequeño que  $\tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \approx \frac{2\pi h}{\lambda}$ ; por lo tanto la ecuación (2.8.10) queda como sigue:

$$\boxed{\frac{c^2}{gh} = 1} \dots (2.8.10b) \quad \text{Líquidos Poco Profundos}$$

Ecuación que cumple cuando  $\epsilon \ll h \ll \lambda$ .

Las ecuaciones (2.8.10), (2.8.10a) y (2.8.10b) se grafican a continuación; donde pueden apreciarse las ecuaciones límite (2.8.10a) en líquidos profundos y (2.8.10b) en líquidos pocos profundos

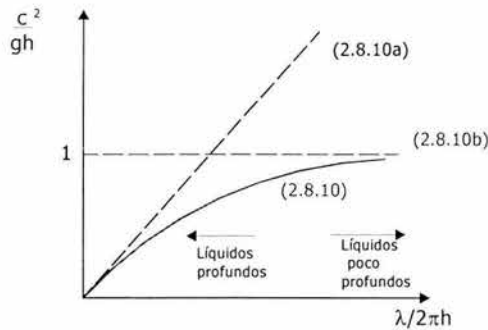


FIGURA 2-12. Gráfica de la velocidad de propagación de las ondas  $c$ .

2.3.4. Ondas en recipientes cilíndricos (sloshing in tanks)<sup>17</sup>

Las variables que se necesitan en un tanque cilíndrico, se muestran en la figura siguiente:

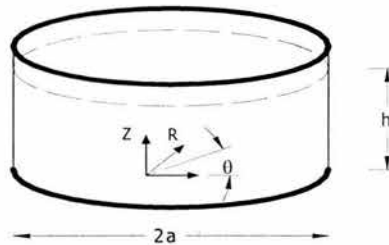


FIGURA 2-13. Ondas en tanques cilíndricos.

Se tiene que resolver para el siguiente potencial de velocidades

$$\phi(R, \theta, z, t)$$

La conversión de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas:

$$x = R \cos \theta; \quad \hat{i} = \hat{e}_r$$

$$y = R \sin \theta; \quad \hat{j} = \frac{1}{r} \hat{e}_\theta$$

$$z = z; \quad \hat{k} = \hat{e}_z$$

$$t = t$$

Tomando las ecuaciones del apartado 2.3.3. (ondas de pequeña amplitud, ecuación (2.8.5) y (2.8.7), esta última con  $P = \text{constante}$ , y haciendo la conversión en coordenadas cilíndricas, se tiene que

<sup>17</sup> CURRIE, I.G: Obr.cit. p.p.205-209

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots (2.8.5b)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(R, \theta, h, t)}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi(R, \theta, h, t)}{\partial z} = 0; \mathbf{z=h} \quad \dots (2.8.7b) \quad \text{Condición de Presión}$$

Nuevas condiciones de frontera:

$$\frac{\partial \phi(R, \theta, 0, t)}{\partial z} = 0; \mathbf{z=0} \quad \dots (2.8.12) \quad \text{Condición de Frontera en el Fondo}$$

$$\frac{\partial \phi(a, \theta, z, t)}{\partial R} = 0; \mathbf{R=a} \quad \dots (2.8.13) \quad \text{Condición de Frontera en la Pared}$$

La solución más importante de este sistema de ecuaciones, es la **frecuencia natural de oscilación** de un líquido contenido en un recipiente cilíndrico.

Mediante el método de separación de variables, se propone una solución del tipo:

$$\phi(R, \theta, z, t) = \Re(R)T(\theta)Z(z)\text{sen}\omega t$$

La solución de la Ecuación de Laplace (2.8.5b), se desarrolla en el **apéndice D**. Dicha solución es:

$$\phi_m(R, \theta, z, t) = (A_{1m} \text{sen}(m\theta) + A_{2m} \cos(m\theta)) (B_{1m} \text{senh}(kz) + B_{2m} \cosh(kz)) (J_m(kR)) \text{sen}\omega t \quad \dots (2.8.14)$$

A la ecuación (2.8.14) se le aplica la condición de frontera (2.8.12), de modo que al derivarla y sustituir la condición se tiene:

$$\frac{\partial \phi(R, \theta, 0, t)}{\partial z} = B_{1m} k \cosh(0) + B_{2m} k \text{senh}(0) = 0$$

donde  $\cosh(0)=1$  y  $\text{senh}(0)=0$ .

Al despejar  $B_{1m}$ , se tiene que  $B_{1m}=0$ .

Al sustituir en (2.8.14)

$$\phi_m(R, \theta, z, t) = (A_{1m} \text{sen}m\theta + A_{2m} \cos m\theta) \cdot (B_{2m} \cosh(kz)) (J_m(kR)) \text{sen}\omega t$$

Operando algebraicamente y simplificando

$$\phi_m(R, \theta, z, t) = (A_{1m} B_{2m} \text{sen}m\theta + A_{2m} B_{2m} \cos m\theta) \cdot (\cosh kz) \cdot (J_m(kR)) \cdot \text{sen}\omega t$$

donde  $A_{1m} \cdot B_{2m} = k_{1m}$  y  $A_{2m} \cdot B_{2m} = k_{2m}$

$$\phi_m(R, \theta, z, t) = (k_{1m} \text{sen} m\theta + k_{2m} \text{cos} m\theta) \bullet (\cosh kz) \bullet (J_m(kR)) \bullet \text{sen} \omega t \quad \dots (2.8.15)$$

Para aplicar la condición dinámica (2.8.7b) en la superficie libre, se deriva la ecuación anterior y se evalúa en  $z=h$ , para obtener

$$\frac{\partial^2 \phi(R, \theta, h, t)}{\partial t^2} = -(k_{1m} \text{sen} m\theta + k_{2m} \text{cos} m\theta) \bullet \cosh kh \bullet J_m(kR) \bullet \omega^2 \text{sen} \omega t$$

$$\frac{\partial \phi(R, \theta, h, t)}{\partial z} = (k_{1m} \text{sen} m\theta + k_{2m} \text{cos} m\theta) \bullet k \text{senh}(kh) \bullet J_m(kR) \bullet \text{sen} \omega t$$

Sustituyendo en la condición dinámica (2.8.7b) en la superficie:

$$(k_{1m} \text{sen} m\theta + k_{2m} \text{cos} m\theta) \bullet \cosh(kh) \bullet J_m(kR) \bullet \omega^2 \text{sen} \omega t = g(k_{1m} \text{sen} m\theta + k_{2m} \text{cos} m\theta) \bullet k \text{senh}(kh) \bullet J_m(kR) \text{sen} \omega t$$

Simplificando y despejando  $\omega^2$ :

$$\omega^2 = gk_m \tanh(k_m h) \quad \dots (2.8.16) \text{ Frecuencia Natural de Oscilación}$$

Utilizando la condición de frontera (2.8.13) en las paredes

$$(k_{1m} \text{sen} m\theta + k_{2m} \text{cos} m\theta) \bullet \cosh kz \bullet kJ'_m(ka) \bullet \text{sen} \omega t = 0$$

y despejando  $J'_m(ka)$ ,

$$J'_m(ka) = 0$$

Ecuación válida para una infinidad de valores discretos de  $k$ .

Si se emplea un índice  $n$ , se tendrá  $K_{mn}$ , que denota las  $n$  raíces de la función de Bessel de  $J_m$ .

$$J'_{mn}(k_{mn} a) = 0$$

La solución en la ecuación (2.8.15) es entonces:

$$\phi_{mn}(R, \theta, z, t) = (k_{1mn} \text{sen} m\theta + k_{2mn} \text{cos} m\theta) (\cosh k_{mn} z) (J_{mn}(k_{mn} R)) \text{sen} \omega_{mn} t \quad \dots (2.8.15a)$$

Así pues, la frecuencia natural de oscilación queda como se muestra a continuación:

$$\omega_{mn}^2 = gk_{mn} \tanh(k_{mn} h) \quad \dots (2.8.16a) \text{ Frecuencia Natural de Oscilación}$$

$$\text{ó } \omega_{mn} = (gk_{mn} \tanh(k_{mn}h))^{\frac{1}{2}}$$

donde  $k_{mn} = \frac{\lambda_{ij}}{R}$

siendo  $\lambda_{ij}$ : modo de vibración

$R$ : radio del recipiente

Así pues, la ecuación anterior queda como sigue:

$$\omega_{ij} = \left( \frac{\lambda_{ij}g}{R} \tanh \frac{\lambda_{ij}h}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \dots (2.8.16b)$$

Como la ecuación anterior, da una frecuencia natural de oscilación circular (en rad/s); se requiere obtener una frecuencia natural en Hertz, así que:

$$f_{ij} = \frac{1}{2\pi} \omega_{ij}$$

por lo tanto, la ecuación (2.8.16b), queda de la forma siguiente:

$$f_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda_{ij}g}{R} \tanh \frac{\lambda_{ij}h}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \dots (2.8.16c)$$

El periodo de oscilación en cualquier líquido es:

$$T = \frac{1}{f_{ij}} = 2\pi \left( \frac{\lambda_{ij}g}{R} \tanh \frac{\lambda_{ij}h}{R} \right)^{1/2} \dots (2.8.16d)$$

Según Blevins,<sup>18</sup> para líquidos pocos profundos (*shallow liquids*), o sea, cuando se obtiene  $h \ll \lambda$ , se tiene las consideraciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{ij}h}{R} &< \frac{\pi}{10} \\ \operatorname{senh} \frac{\lambda_{ij}h}{R} &\approx \frac{\lambda_{ij}h}{R} \\ \operatorname{cosh} \frac{\lambda_{ij}h}{R} &\approx 1 \\ \operatorname{tanh} \frac{\lambda_{ij}h}{R} &\approx \frac{\lambda_{ij}h}{R} \end{aligned}$$

<sup>18</sup> BLEVINS, Robert D.; "Formulas for natural frequency and mode shape", USA, Ed. Van Nostrand Reinhold Company Regional Office, 1979, p.366.



Al sustituir en la ecuación (2.8.16c) de  $f_{ij}$ , la ecuación queda de la forma siguiente:

$$f_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda_{ij} g}{R} \cdot \frac{\lambda_{ij} h}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Simplificando la ecuación, queda

$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{2\pi R} (gh)^{\frac{1}{2}} \dots (2.8.17)$$

donde  $h$ : altura del líquido

$R$ : radio del recipiente

Ecuación que da el valor de la frecuencia natural de oscilación en Hertz.

El periodo de oscilación en líquidos poco profundos es:

$$T = \frac{1}{f_{ij}} = \frac{2\pi R}{\lambda_{ij}} (gh)^{-\frac{1}{2}} \dots (2.8.17a)$$

El valor de  $\lambda_{ij}$ , se encuentra en la tabla siguiente:

		$\lambda_{ij}$						
		$i$						
$j$	0	1	2	3	4	5	6	
0	0	1.8412	3.0542	4.2012	5.3175	6.4156	7.5013	
1	3.8317	5.3314	6.7061	8.0152	9.2824	10.5199	11.7349	
2	7.0156	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819	13.9872	15.2682	
3	10.173	11.7060	13.1704	14.5859	15.9641	17.3128	18.6374	

Tabla 13-6. Waves in basins of constant depth; BLEVINS, Robert D.; "Formulas for natural frequency and mode shape", Obr. Cit.

## 2.4. Líquido Amortiguador (LA)

Con la finalidad de proveer el Sistema Espejo Líquido (SEL) de una mayor estabilidad y aislamiento contra perturbaciones por contacto; se utiliza el aceite de transmisión SAE-140, para utilizarlo como sistema de aislamiento de vibraciones.

Así pues, la cantidad de **LA**, necesaria, depende del peso del **PL** y su recipiente. Pero lo más importante es calcular la cantidad de **LA**, considerando que la frecuencia del **LA** en su recipiente sea  $\frac{3}{4}$  la del **PL** (por limitaciones de diseño) para evitar que el **PL** llegue a su frecuencia natural y tarde más tiempo en estabilizarse.

La frecuencia natural de oscilación, en recipientes cilíndricos (obtenida en el apartado 2.3.4), se utilizará como condición de frecuencia en el principio de flotación, para determinar la cantidad necesaria de **LA**, y poder estar dentro de la condición mencionada:

$$\boxed{f_{LA} = \frac{3}{4} f_{PL}} \dots (2.8.18)$$

Factor que es determinante en la construcción del **SEL**, para procurar mayor estabilidad, ya que durante la experimentación dicha condición arrojó valores óptimos para la aplicación del **SEL**.

#### 2.4.1 Cantidad de LA.

Para explicar el principio de flotación, se utiliza el principio de Arquímedes, que enuncia lo siguiente:

"Todo cuerpo sumergido en un líquido experimenta un empuje ascensional igual al peso del líquido que desaloja".<sup>19</sup>

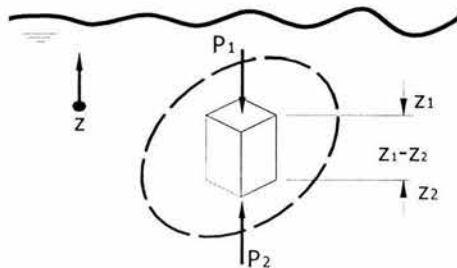


FIGURA 2-14. Principio de Arquímedes.

Como se muestra en la figura 2-14, el cuerpo está limitado por dos superficies y de esta podemos obtener que:

$$F_B = \int (P_2 - P_1) dA_H = -\rho g \int (z_2 - z_1) dA_H = \rho g (V_{CUERPO})$$

$$F_B = \rho g (V_{DESPLAZADO})$$

donde  $F_B$ : es la fuerza de flotación o peso del fluido desplazado por el cuerpo.

<sup>19</sup> MATAIX, Claudio: obr. Cit,p.72.

La línea de acción de la fuerza de flotación pasa por el centro de gravedad del cuerpo ( $\rho$ =uniforme), el punto donde actúa la fuerza de flotación se llama **centro de flotación** ( $B$  ó  $CB$ ), el centro de flotación no tiene por que coincidir con el centro de gravedad del cuerpo.

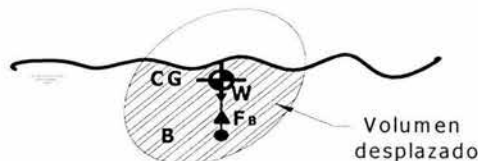


FIGURA 2-15. Equilibrio estático de un cuerpo flotante.

Conociendo el principio de Arquímedes y la descripción de la fuerza de flotación, se pueden determinar tres casos:

1. Si  $W > F_B$ , el cuerpo se hunde.
2. Si  $W < F_B$ , el cuerpo sale a la superficie, hasta que  $W_{fluido} = W_{cuerpo}$ .
3. Si  $W = F_B$ , el cuerpo encuentra una *flotación neutra*, o sea que el cuerpo se mantiene sumergido en la posición en que se le deje.

Así pues, para cuerpos parcialmente sumergidos se tiene que el peso del cuerpo ( $W$ ), es igual al del líquido desalojado por la porción sumergida, o sea  $W = F_B$ . Y la posición de equilibrio se calcula con  $F_B$ .

Aplicando los conceptos anteriores, en el **SEL**, se obtiene la cantidad necesaria de **LA**; para soportar el **PL** y su recipiente, evitando contacto entre recipientes y logrando una posición de *flotación neutra*.

Para poder aplicar el Principio de Flotación, y conocer los parámetros involucrados, se utiliza la figura siguiente:

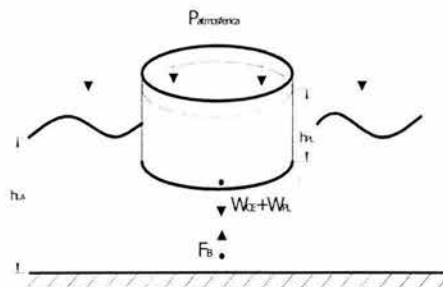


FIGURA 2-16. Diagrama de cuerpo libre de la disposición del SEL.

Realizando sumatoria de fuerzas en el eje  $y$ , dentro del **LA**:

$$\sum F_y : F_B + P_{atm} A = W_{CE} + W_{PL} + P_{atm} A$$

de modo que al simplificarla se tiene

$$F_B = W_{CE} + W_{PL} \quad \dots (2.12)$$

con  $W_{CE} = m_{CE}g$

$$W_{PL} = \rho_{PL}gV_{PL} = \gamma_{PL}V_{PL} = \frac{\pi\phi_{PL}^2 h_{PL}}{4}$$

$F_B$  = peso del líquido desalojado o fuerza de flotación =  $F_{LA}$

$m_{CE}$ : masa del contenedor del PL

g: gravedad

$\rho_{PL}$ : densidad del PL

$\gamma_{PL}$ : peso específico del PL

$V_{PL}$ : volumen del PL

Sustituyendo en la ecuación (2.12), se tiene

$$F_B = m_{CE}g + \gamma_{PL}h_{PL} \frac{\pi\phi_{PL}^2}{4} \quad \dots (2.12a)$$

Por otro lado, para el LA se tiene que:

$$\rho_{LA} = \frac{m_{LA}}{V_{LA}} \quad \text{por lo tanto} \quad V_{LA} = \frac{m_{LA}}{\rho_{LA}}$$

donde  $\rho_{LA}$ : densidad del LA

Además se sabe que:

$$\gamma_{LA} = \rho_{LA}g \quad \text{entonces} \quad \rho_{LA} = \frac{\gamma_{LA}}{g}$$

donde  $\gamma_{LA}$ : peso específico del LA

Sustituyendo  $\rho_{LA}$  en la ecuación del  $V_{LA}$ , se llega a lo siguiente:

$$V_{LA} = \frac{m_{LA}g}{\gamma_{LA}}$$

donde, por definición  $W_{LA} = m_{LA}g$  y como el peso es una fuerza:

$$W_{LA} = F_{LA} = F_B$$

Sustituyendo en  $V_{LA}$ :

$$V_{LA} = \frac{W_{LA}}{\gamma_{LA}} = \frac{F_{LA}}{\gamma_{LA}} = \frac{F_B}{\gamma_{LA}}$$

ecuación que proporciona la cantidad de volumen del LA.

Despejando  $F_B$ :

$$F_B = V_{LA} \gamma_{LA}$$

Sustituyendo  $F_B$  en (2.12a)

$$V_{LA} \gamma_{LA} = m_{CE} g + \gamma_{PL} h_{PL} \frac{\pi \phi_{PL}^2}{4}$$

donde  $V_{LA} = \frac{\pi \phi_{LA}^2}{4} h_{LA}$ , y sustituyendo en la ecuación anterior

$$\frac{\pi \phi_{LA}^2 h_{LA} \gamma_{LA}}{4} = m_{CE} g + \gamma_{PL} h_{PL} \frac{\pi \phi_{PL}^2}{4}$$

despejando  $h_{LA}$ :

$$h_{LA} = \frac{4}{\pi \phi_{LA}^2 \gamma_{LA}} \left[ m_{CE} g + \gamma_{PL} h_{PL} \frac{\pi \phi_{PL}^2}{4} \right] \dots (2.13)$$

Ecuación que modela la cantidad de aceite amortiguador necesario para soportar el PL y su recipiente.

#### 2.4.2. Vibraciones

Todo sistema posee una capacidad de vibración y la mayoría de los sistemas pueden vibrar libremente de muchas maneras diferentes. En general, las vibraciones naturales predominantes de objetos pequeños suelen ser rápidas, mientras que las de objetos más grandes suelen ser lentas. La Tierra completa, después de haber sufrido un terremoto, puede continuar vibrando a un ritmo de una oscilación por hora.

La característica común de todos estos fenómenos es su *periodicidad*. Existe un esquema de movimiento o desplazamiento que se repite una y otra vez, esquema que puede ser sencillo o complicado.

Para facilitar este esquema, se prefiere representar las vibraciones de forma sinusoidal, ya que este tipo de movimiento es posible en la mayoría de los casos si el desplazamiento es suficientemente pequeño, donde el desplazamiento  $x$  es una función senoidal de amplitud  $A$  con una frecuencia de oscilación  $\omega$  y un ángulo de fase  $\alpha$ , esto es

$$x = A \sin(\omega t + \alpha)$$

Ecuación que corresponde al movimiento armónico simple.

2.4.2.1. Sistema masa-resorte-amortiguador<sup>20</sup>

El sistema *masa-resorte-amortiguador* mostrado en la figura 2-17, tiene un amortiguamiento viscoso con una constante de disipación de  $b$ , que tiene unidades de  $\frac{N \cdot s}{m}$ , colocada en paralelo con el resorte.

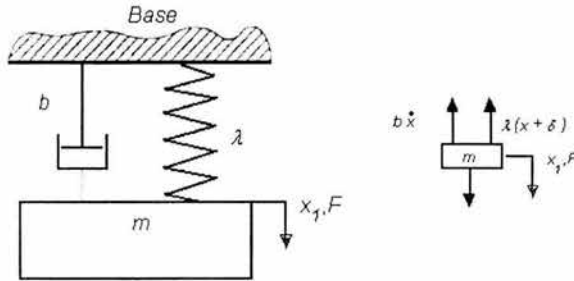


FIGURA 2-17. Sistema masa-resorte-amortiguador

Aplicando el método de Lagrange para un sistema conservativo, pero en su forma extendida; donde se ingresa un función de disipación viscosa  $D$ , que tiene la forma siguiente:

$$D = \frac{1}{2} b \dot{x}_i^2 \dots (2.14)$$

la función queda de la forma siguiente:

$$\sum \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = X_i \right\} \dots (2.15)$$

donde  $b$ : es el coeficiente de amortiguamiento viscoso

$x$ : es la posición de la masa  $m$

$L = (T - U)$ : es la diferencia entre la energía cinética y potencial

$Q_i = F$ : la fuerza aplicada en dirección de la coordenada  $x_i$

La ecuación de movimiento con un grado de libertad es:

$$m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + \lambda x_1 = F \dots (2.16)$$

En un estado transitorio la solución en forma general, se muestra a continuación:

$$x_1(t) = Ae^{\alpha t} \dots (2.17)$$

El sistema de segundo orden es cuadrático en la constante de integración  $\alpha$ , la cual se encuentra por sustitución directa en la solución homogénea de la ecuación (2.16).

<sup>20</sup> SMITH, S.T.; Foundations of Ultraprecision Mechanism Design, Malaysia, Ed. Gordon and Breach Science Publishers S.A., 1992, p.p. 288, 289, 299-303.

$$m\alpha^2 + b\alpha + \lambda = 0 \dots (2.16.1)$$

La ecuación característica (2.16.1), tiene dos raíces que son.

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4m\lambda}}{2m} \dots (2.16.1a)$$

$$\text{ó} \quad \alpha = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \dots (2.16.1b)$$

donde  $\xi$  es el **factor o coeficiente de amortiguamiento**, definido como

$$\xi = \left( \frac{b^2}{4m\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \dots (2.18)$$

Así pues, el SEL para el caso que se presenta en este trabajo, tiene la configuración siguiente, incluyendo al amortiguamiento viscoso:

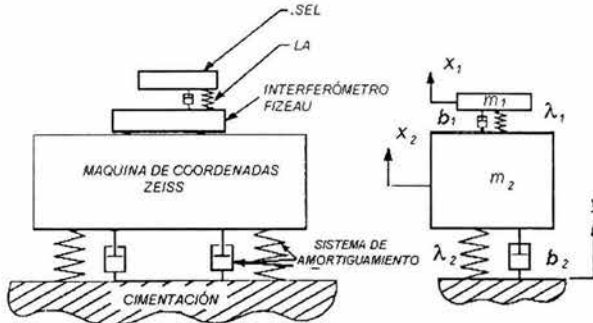


FIGURA 2-18. Disposición del SEL, para realizar una calibración absoluta al Interferómetro Fizeau.

El diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 2-18, se modela mediante las funciones de energía cinética, potencial y de disipación, quedando como se muestra a continuación:

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) \dots (2.19)$$

$$U = \frac{1}{2}[\lambda_1(x_1 - x_2)^2 + \lambda_2(x_2 - y)^2] \dots (2.20)$$

$$D = \frac{1}{2}[b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{y})^2] \dots (2.21)$$

donde  $x_1$ : es la posición del objeto de masa  $m_1$

$x_2$ : es la posición del objeto de masa  $m_2$

Sustituyendo estas funciones en la fórmula extendida de Lagrange, el sistema de ecuaciones que modela el movimiento queda como sigue:

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \lambda_1 (x_1 - x_2) = 0 \quad \dots (2.22)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{y}) + \lambda_1 (x_2 - x_1) + \lambda_2 (x_2 - y) = 0 \quad \dots (2.23)$$

Examinando el estado permanente de respuesta ante una excitación armónica en la cimentación de la forma  $y(t) = \text{Re}(Ae^{i\omega t})$ , el resultado del movimiento en las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  es entonces

$$x_1 = \text{Re}[H_{x_1,y}(i\omega)Ae^{i\omega t}] \quad \dots (2.24)$$

$$x_2 = \text{Re}[H_{x_2,y}(i\omega)Ae^{i\omega t}] \quad \dots (2.25)$$

Sustituyendo  $x_1$  y  $x_2$ , en la fórmula extendida de Lagrange, y después de aplicar algunas operaciones algebraicas, se encuentran las funciones de transferencia para  $x_1$  y  $x_2$ . Cuando el amortiguamiento es muy pequeño se puede considerar despreciable y desaparece la parte imaginaria:

$$H_{x_1,y}(i\omega) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 [\lambda_1 (m_1 + m_2) + \lambda_2 m_1] + \lambda_1 \lambda_2} \quad \dots (2.26)$$

$$H_{x_2,y}(i\omega) = \frac{H_{x_1,y}(i\omega)(\lambda_1 - \omega^2 m_1)}{(\lambda_1)} \quad \dots (2.27)$$

La ecuación  $H_{x_1,y}(i\omega)$ , tiene dos polos que pueden ser encontrados porque en el denominador existe un término cuadrático  $\omega^2$ . La valores de su solución corresponden a las dos frecuencia naturales del sistema sin amortiguamiento.

Es muy difícil diseñar un instrumento con un factor de amortiguamiento  $\xi$  previamente seleccionado de manera muy precisa, así que generalmente éste necesita ser medido después de su construcción. La mejor selección de un factor de amortiguamiento depende de la separación de las frecuencias naturales de la mesa y el instrumento. Si la masa del instrumento es mucho menor que la masa de la mesa (como en el caso analizado), una buena aproximación al factor de amortiguamiento crítico está en la región alrededor de 0,1 o algo menor. De esta manera se eliminan las vibraciones de bajas frecuencias relativamente rápido sin reducir significativamente la atenuación a altas frecuencias. Como regla general, un amortiguamiento ligero y una diferencia en las frecuencias naturales de al menos tres órdenes de magnitud ofrece suficiente aislamiento para la mayoría de las aplicaciones de precisión. Esto podría utilizarse, por ejemplo, como objetivo inicial de diseño para este sistema. En el presente trabajo, se considera que la respuesta dinámica del sistema mecánico responde a los parámetros de diseño adecuados para aislarlo de vibraciones, por lo que se concentrará el análisis en el problema de vibraciones que presenta el SEL.

#### 2.4.2.2. Vibraciones en objetos flotantes

Si un objeto flotante se introduce o se saca un poco del líquido a partir de su posición normal de equilibrio, surge una fuerza restauradora igual al aumento o definición del peso del líquido desplazado por el objeto y se inicia un movimiento periódico. Si el área de la superficie del cuerpo, donde se corta con la superficie del líquido es constante, el caso se simplifica.



El recipiente del PL, al ser depositado sobre la superficie del LA tendrá oscilaciones verticales debidas a la fuerza de flotación ( $F_B$ ) y el peso del contenedor del Plano Líquido ( $W_{CPL} + W_{PL}$ ); esto sucederá hasta que pase un determinado periodo de oscilación y el contenedor del PL, se estabilice.

A continuación, se muestra el diagrama de cuerpo libre.

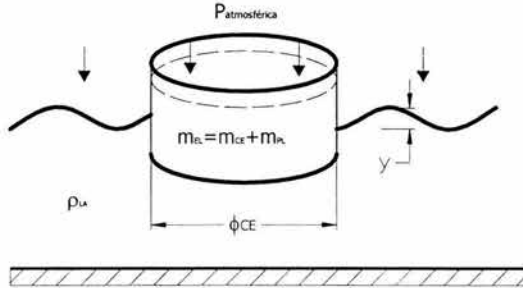


FIGURA 2-19. Diagrama de cuerpo libre del PL, para oscilaciones verticales.

Se tiene que  $m_{EL}$ , es la masa del contenedor del espejo líquido, con todo y el PL;  $\phi_{CE}$ , es el diámetro del contenedor del PL y sea  $y$  la distancia que está por encima de su nivel de flotación; por consiguiente el volumen del líquido desplazado es  $A_{CE}y$ . Aplicando la 2ª Ley de Newton, se tiene que

$$F = ma \quad \dots (2.28)$$

$$\text{donde } a = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$m = m_{EL}$$

$$F = W_{LIQUIDO-DESPLAZADO} = -g\rho_{LA}A_{CE}y$$

Sustituyendo en la segunda ley de Newton, se obtiene:

$$m_{EL} \frac{d^2y}{dt^2} = -g\rho_{LA}A_{CE}y$$

$$m_{EL} \frac{d^2y}{dt^2} + g\rho_{LA}A_{CE}y = 0$$

dividiendo la ecuación anterior entre  $m_{EL}$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g\rho_{LA}A_{CE}}{m_{EL}}y = 0 \quad \dots (2.28a)$$

Se compara la ecuación (2.28a) con el modelo general para vibraciones, que se muestra a continuación:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad \dots (2.29) \quad ^{21}$$

<sup>21</sup> SOLAR, González Jorge.; Cinemática y Dinámica básica para Ingenieros, 2 ed., México, Ed.Trillas, 1998, p.416.

Y se encuentra la frecuencia natural de oscilación del recipiente del *PL* sobre el *LA*, definida por ( $\omega_{nOV}$ ):

$$\omega_{nOV}^2 = \frac{g\rho_{LA}A_{CE}}{m_{EL}}$$

$$\omega_{nOV} = \sqrt{\frac{g\rho_{LA}A_{CE}}{m_{EL}}} \dots (2.30)$$

donde  $m_{EL} = \gamma_{PL} \frac{\pi\phi_{CE}^2}{4} h_{PL} + m_{CE}$

$$A_{CE} = \frac{\pi\phi_{CE}^2}{4}$$

$$\gamma_{LA} = g\rho_{LA}$$

Sustituyendo en la frecuencia natural de oscilación,

$$\omega_{nOV} = \sqrt{\frac{g\rho_{LA} \frac{\pi\phi_{PL}^2}{4}}{\gamma_{PL} \frac{\pi\phi_{PL}^2}{4} h_{PL} + m_{CE}}}$$

Simplificando

$$\omega_{nOV} = \sqrt{\frac{g\rho_{LA}\pi\phi_{PL}^2}{\pi\gamma_{PL}\phi_{PL}^2 h_{PL} + 4m_{CE}}} \dots (2.31)$$

Para encontrar la frecuencia natural de oscilación, en Hertz, se divide la ecuación anterior entre  $2\pi$ :

$$f_{nOV} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g\rho_{LA}\pi\phi_{PL}^2}{\pi\gamma_{PL}\phi_{PL}^2 h_{PL} + 4m_{CE}}} \dots (2.31a)$$

Su periodo de oscilación es

$$T_{nOV} = 2\pi \left( \frac{\pi g \rho_{LA} \phi_{PL}^2}{4m_{CE} + \pi \gamma_{PL} \phi_{PL}^2 h_{PL}} \right)^{-\frac{1}{2}} \dots (2.31b)$$

## 2.5. Parámetros de selección del SEL

Con los conceptos obtenidos en los apartados 2.3 y 2.4, se puede determinar los parámetros necesarios para realizar un montaje del SEL, con el menor número de perturbaciones posibles.

Los parámetros necesarios son:

1. Frecuencia natural de oscilación del PL ( $f_{ij_{PL}}$ )
2. Cantidad de LA para su flotación ( $h_{LA}$ )
3. Frecuencia natural de oscilación del LA ( $f_{ij_{LA}}$ ), con la  $h_{LA}$  obtenida
4. El diámetro requerido para el recipiente del LA ( $\phi_{LA}$ )

5. La altura del LA ( $h_{LA}$ ) y el diámetro del recipiente del LA ( $\phi_{LA}$ ), deben respetar la condición propuesta en la ecuación (2.8.18).

El punto cinco es de gran importancia porque al respetar dicha condición, se consigue disponer de recipientes del LA de tamaño considerable, de tal forma que los recipientes queden coaxiales al plano óptico del interferómetro Fizeau y se evite el efecto del menisco; además de evitar contacto en las paredes del contenedor de LA con el interferómetro y la funda de plástico. En lo que se refiere a la  $h_{LA}$ , se obtienen alturas manejables y se asegura que exista una separación entre fondos de recipientes, para evitar transmisión directa de perturbaciones externas, al contenedor del PL.

De la combinación de ecuaciones, se obtendrán gráficas de selección del SEL funcional, y para que el SEL sea óptimo, se tendrá que utilizar el programa de selección del mismo.

### 2.5.1. Frecuencia de resonancia

*Plano Líquido:* Para calcular la frecuencia natural de oscilación, se aplica la ecuación (2.8.16).

$$f_{ij_{PL}} = \frac{\lambda_{ij}}{2\pi R_{PL}} (gh_{PL})^{\frac{1}{2}} \dots (2.8.16)$$

$$T_{PL} = \frac{1}{f_{ij_{PL}}} \dots (2.8.16a)$$

*Líquido Amortiguador:* Como se mencionó anteriormente, tiene que cumplir la condición siguiente:

$$f_{ij_{LA}} = \frac{3}{4} f_{ij_{PL}} \dots (2.8.18)$$

$$T_{LA} = \frac{1}{f_{j_{LA}}} \dots (2.8.18a)$$

Por Flotación: se calcula con la ecuación (2.14a).

$$fn_{ov} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi g \rho_{AL} \phi_{CE}^2}{4m_{CE} + \pi \gamma_{PL} \phi_{CE}^2 h_{PL}}} \dots (2.31a)$$

$$Tn_{OV} = \frac{1}{fn_{OV}}$$

Para el SEL propuesto, se tiene los datos siguientes:

$\lambda_{10}$ : Modo principal de oscilación;  $\lambda_{10} = 1,8412$  (Tabla  $\lambda_{ij}$ )

$\phi_{PL} = 0,24m$  (fijado)

$g = 9,78 \frac{m}{s^2}$  (dato)

$h_{PL} = 3 \times 10^{-3} m$  (fijado)

$\rho_{LA} = 910 \frac{kg}{m^3}$  (dato)

$m_{CE} = 0,120 Kg$  (dato)

$\gamma_{PL} = \rho_{PL} g = 8753,1 \frac{N}{m^3} = 8753,1 \frac{kg}{m \cdot s^2}$  (dato)

$\gamma_{LA} = \rho_{LA} g = 0,910 \frac{gr}{ml} = 8899,8 \frac{N}{m^3} = 8899,8 \frac{kg}{m \cdot s^2}$  (dato)

Sustituyendo valores en las ecuaciones anteriores, se encuentran los parámetros necesarios:

Plano Líquido:

$$f_{10PL} = \frac{1,8412}{2\pi(0,12m)} \left( 9,78 \frac{m}{s^2} \times 3 \times 10^{-3} m \right)^{1/2}$$

$$f_{10PL} = 0,42 Hz$$

$$T_{PL} = 2,4s$$

Líquido Amortiguador:

$$f_{10LA} = \frac{3}{4}(0,42)$$

$$f_{10LA} = 0,32 \text{ Hz}$$

$$T_{LA} = 3,17 \text{ s}$$

Por Flotación

$$fn_{OV} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi \times 9,78 \frac{m}{s^2} \times 910 \frac{Kg}{m^3} \times (0,24m)^2}{4 \left( 0,120Kg \right) + \pi \times 8753,1 \frac{N}{m^3} \times (0,24m)^2 \times 3 \times 10^{-3} - m} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$fn_{OV} = 2,8 \text{ Hz}$$

$$Tn_{OV} = 0,36 \text{ s}$$

Son los resultados para los datos fijados, para la configuración del SEL propuesto.

$$\phi_{PL} = 0,24 \text{ m}$$

$$h_{PL} = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

### 2.5.2. Cantidad de LA y tamaño del recipiente del LA

Como se demostró en el apartado 2.4.1, la cantidad del Líquido necesario se calcula con la ecuación (2.13).

$$h_{LA} = \frac{4}{\pi \phi_{LA}^2 \gamma_{LA}} \left[ m_{CEG} + \gamma_{PL} h_{PL} \frac{\pi \phi_{PL}^2}{4} \right] \dots (2.13)$$

Para poder calcular  $h_{LA}$ , es necesario conocer  $\phi_{LA}$ , así que utilizando la ecuación (2.8.16), para el LA:

$$f_{ijLA} = \frac{\lambda_{ij}}{2\pi R_{LA}} (gh_{LA})^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo esta ecuación, en la ecuación (2.8.18), se tiene lo siguiente:

$$f_{ijLA} = \frac{3}{4} f_{ijPL} = \frac{\lambda_{ij}}{2\pi R_{LA}} (gh_{LA})^{\frac{1}{2}}$$

donde se tiene que  $R_{LA} = \frac{\phi_{LA}}{2}$ ; sustituyendo en la ecuación anterior y despejando  $\phi_{LA}$ :

$$\phi_{LA} = \frac{4\lambda_{ij}}{3\pi f_{ij_{PL}}} (gh_{LA})^{\frac{1}{2}} \dots (2.8.21)$$

Sustituyendo la ecuación (2.8.18) en la ecuación (2.8.21), se tiene

$$\phi_{LA} = \frac{4\lambda_{ij}}{3\pi f_{ij_{PL}}} \left[ \frac{4g}{\pi\phi_{LA}^2 \gamma_{LA}} \left( m_{CE}g + \gamma_{PL}h_{PL} \frac{\pi\phi_{PL}^2}{4} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Despejando  $\phi_{LA}$  y simplificando, se obtiene

$$\phi_{LA} = \sqrt{\frac{8\lambda_{ij}}{3\pi f_{ij_{PL}}} \left[ \frac{g}{\pi\gamma_{LA}} \left( m_{CE}g + \gamma_{PL}h_{PL} \frac{\pi\phi_{CE}^2}{4} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \dots (2.8.21a)$$

Con los datos del SEL propuesto, se encuentra el valor de  $\phi_{LA}$ :

$$\phi_{LA} = \sqrt{\frac{8(1,84)}{3\pi(0,42\frac{1}{s})} \left[ \frac{9,78\frac{m}{s^2}}{\pi(8899\frac{kg}{m \cdot s^2})} \left( 0,120kg \times 9,78\frac{m}{s^2} + 8753,1\frac{kg}{m \cdot s^2} \times 3 \times 10^{-3} m \frac{\pi(0,24m)^2}{4} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\phi_{LA} = 0,33m$$

Para encontrar la cantidad de LA, para soportar el PL, se sustituye  $\phi_{LA}$  en la ecuación (2.3.18):

$$h_{LA} = \frac{4}{\pi(0,33m)^2 (8899,8\frac{kg}{m \cdot s^2})} \left[ 0,120kg \times 9,78\frac{m}{s^2} + 8753,1\frac{kg}{m \cdot s^2} \times 3 \times 10^{-3} \times \frac{\pi(0,24m)^2}{4} \right]$$

$$h_{LA} = 3,1 \times 10^{-3} m = 3,1mm$$

Es la cantidad mínima necesaria, para obtener una flotación neutra y evitar contacto entre fondos de recipientes; además es la cantidad exacta para mantener la condición, dada en (2.8.18).

### 2.5.3. Gráficas de selección del SEL

Como los datos propuestos anteriormente para el SEL sólo ofrecen los parámetros para una configuración específica, es imposible saber que *configuraciones funcionales* se pueden encontrar cambiando el o los valores de una o más variables; así pues se propone una herramienta que es flexible y permite con una simple inspección visual, se evalúen una serie de configuraciones del SEL

y se determine cuales pueden ser las mejores ideas, según sea el caso. Por eso a continuación se presentan una serie de gráficos de selección, que permiten saber los parámetros requeridos para el SEL deseado.

Las gráficas se realizan con las ecuaciones, mostradas en los apartados 2.5.1 y 2.5.2, pero tomando las consideraciones siguientes:

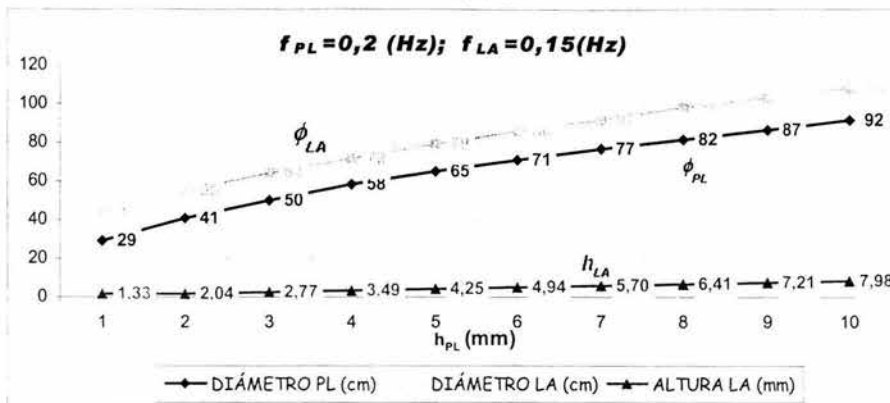
1. Los parámetros  $\lambda_{10}$ ,  $\rho_{LA}$  y  $\rho_{PL}$  permanecen constantes, con los valores indicados anteriormente.
2. La variación de  $h_{PL}$ , es a razón de 1mm.
3. La  $f_{PL}$  se mantiene constante y se varía en cada gráfica a razón de 0,1Hz.
4. Se mantiene la condición  $f_{LA} = \frac{3}{4} f_{PL}$ .
5. Los demás parámetros son dependientes de los antes mencionados.
6. El  $\phi_{LA} > \phi_{PL} > 15\text{cm}$  y  $\phi_{PL} < \phi_{LA} < 45\text{cm}$ .

Las ecuaciones utilizadas, para la obtención de las gráficas se muestran en la tabla siguiente:

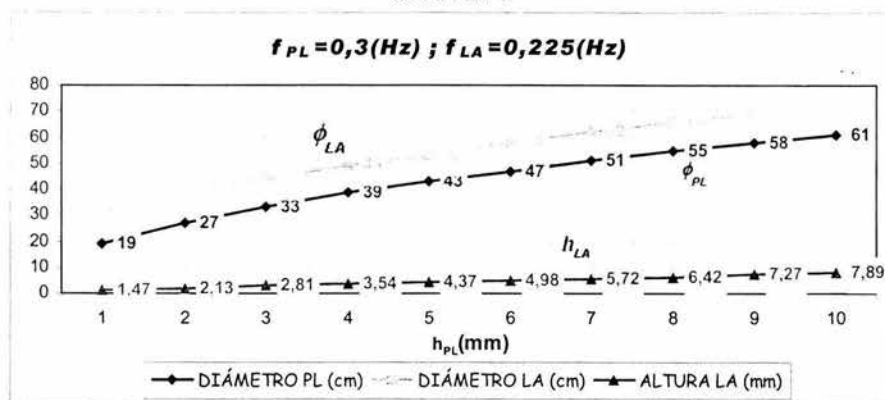
$f_{ij_{LA}} = \frac{3}{4} f_{ij_{PL}}$
$h_{LA} = \frac{4}{\pi \phi_{LA}^2 \gamma_{LA}} \left[ m_{CE} g + \gamma_{PL} h_{PL} \frac{\pi \phi_{PL}^2}{4} \right]$
$\phi_{LA} = \sqrt{\frac{8 \lambda_{ij}}{3 \pi f_{ij_{PL}}} \left[ \frac{g}{\pi \gamma_{LA}} \left( m_{CE} g + \gamma_{PL} h_{PL} \frac{\pi \phi_{PL}^2}{4} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}$
$f_{ij_{PL}} = \frac{\lambda_{ij}}{2 \pi R_{PL}} (g h_{PL})^{\frac{1}{2}}$

Con todas estas consideraciones, a continuación se muestran las gráficas de selección del SEL:

GRÁFICA 1

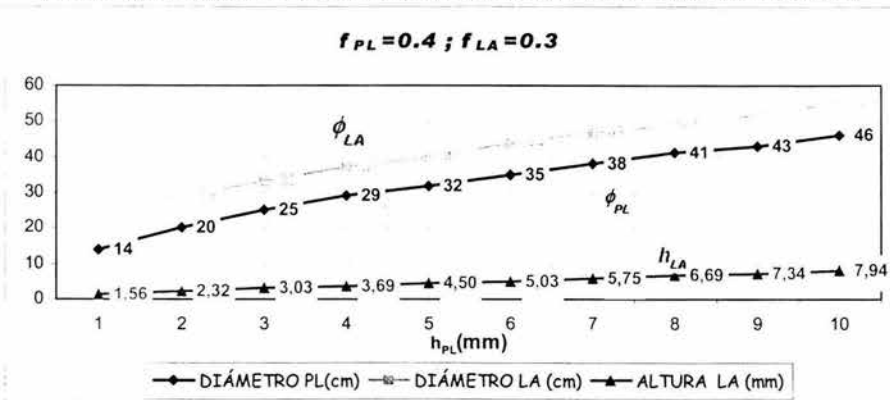


GRÁFICA 2



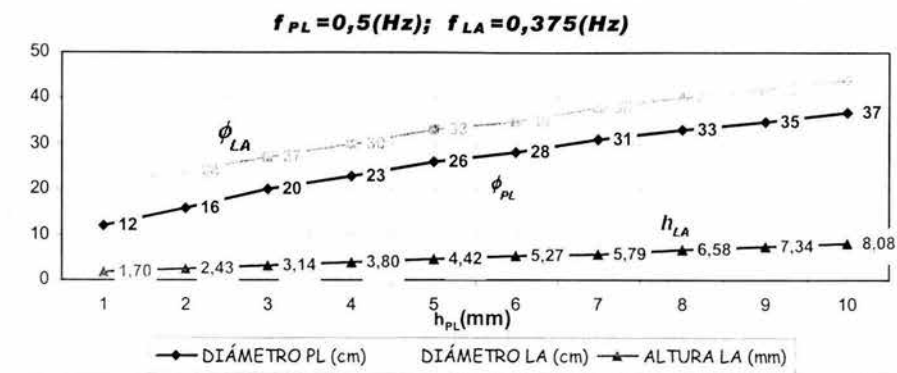
GRAFICA 3

(En esta gráfica se encuentra el diseño óptimo utilizado en este trabajo con  $h_{PL}=3mm$ )

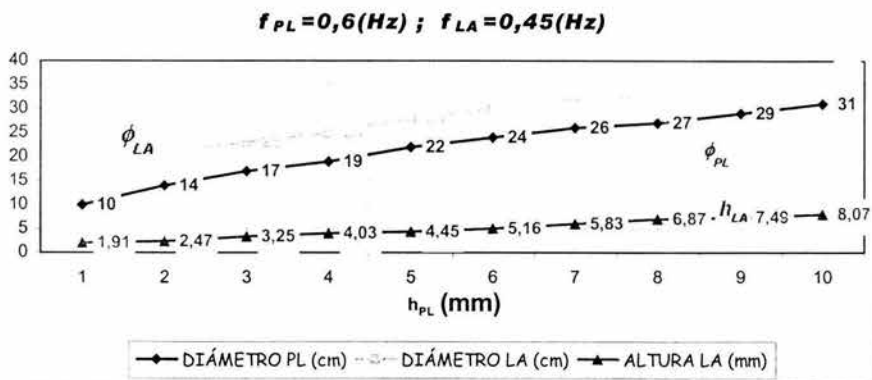




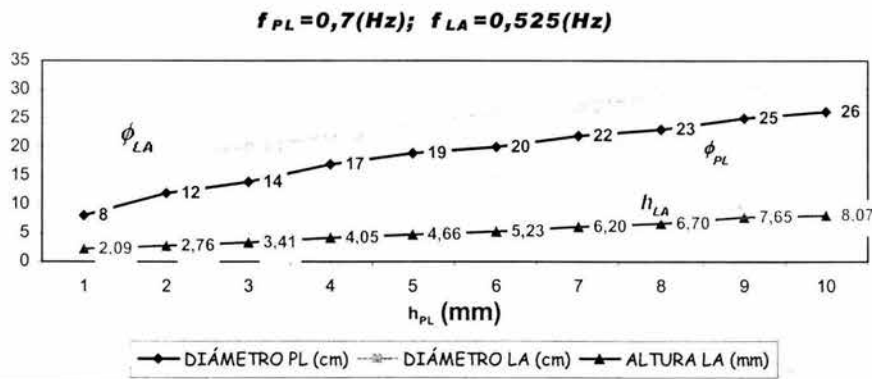
GRAFICA 4



GRÁFICA 5



GRÁFICA 6



## 2.5.4. Programa de selección del SEL

Con las gráficas anteriores, se puede encontrar, un diseño aproximado al deseado, pero para poder obtener un **diseño óptimo**, con los parámetros obtenidos en cualquiera de las gráficas anteriores, se puede utilizar el programa **Diseño DCA.xls**, que permite encontrar los mejores parámetros, para montar el SEL **óptimo**.

A continuación se muestra el programa de selección óptima del SEL:

**DISEÑO DEL DISPOSITIVO DE CALIBRACIÓN ABSOLUTA**

1er. Paso:

**CÁLCULO DE LA FRECUENCIA NATURAL DE OSCILACIÓN DEL ACEITE ESPEJO**

NOMBRE	VARIABLE	DATOS
Modo principal de vibración	$\lambda_{10}$	1,8412
Diámetro del recipiente del plano líquido (m)	$\phi_{PL}$	0,24
Gravedad ( m/s <sup>2</sup> )	g	9,78
Altura del plano líquido ( mm )	$h_{PL}$	3
		<b>INCÓGNITAS</b>
Frecuencia natural de oscilación del espejo líquido ( hz )	$f_{10PL}$	<b>0,4183</b>
Periodo de oscilación del espejo líquido ( s )	$T_{10PL}$	<b>2,3907</b>

2o. Paso:

**CÁLCULO DEL DIÁMETRO MÍNIMO DEL RECIPIENTE DEL ACEITE AMORTIGUADOR**

Si y sólo si  $f_{10LA} = (3/4) f_{10PL}$

NOMBRE	VARIABLE	DATOS
Peso específico del aceite espejo ( N/m <sup>3</sup> )	$\gamma_{PL}$	8753,10
Peso específico del aceite amortiguador ( N/m <sup>3</sup> )	$\gamma_{LA}$	8899,80
Masa del recipiente del espejo ( kg )	$m_{CPL}$	0,1200
		<b>INCÓGNITAS</b>
Diámetro mínimo del recipiente del aceite amortiguador ( m )	$\phi_{minLA}$	<b>0,3300</b>
Valor redondeado de $\phi_{minA}$ ( m )	$\phi_{minLA}$	<b>0,33</b>

3er. Paso:

**CANTIDAD MÍNIMA DE ACEITE MORTIGUADOR Y FRECUENCIA NATURAL DE OSCILACIÓN**

Si y sólo si  $\phi_A \geq \phi_{minA}$

NOMBRE	VARIABLE	DATOS
Diámetro propuesto del recipiente del aceite amortiguador ( m )	$\phi_{LA}$	0,3300

		INCÓGNITAS
Altura del aceite amortiguador ( mm )	$h_{LA}$	<b>3,1024</b>
Frecuencia natural de oscilación del aceite amortiguador ( hz )	$f_{10LA}$	<b>0,3094</b>
Periodo de oscilación del aceite amortiguador ( s )	$T_{10LA}$	<b>3,2326</b>

4o. Paso:

**FRECUENCIA NATURAL DE OSCILACIÓN DEL SISTEMA ESPEJO (RECIPIENTE Y ACEITE ESPEJO)**

NOMBRE	VARIABLE	INCÓGNITAS
Frecuencia natural de oscilación del sistema espejo ( hz )	$F_{OV}$	<b>6,4989</b>
Periodo de oscilación del sistema espejo ( s )	$T_{OV}$	<b>0,1539</b>

## TABLA DE DATOS DEL SEL ÓPTIMO

Para las condiciones siguientes:

1. Recipiente del aceite espejo con dimensiones ( m )
2. Altura de aceite espejo ( m )
3. Frecuencia natural de oscilación del aceite espejo ( hz )
4. Diámetro mínimo del recipiente del aceite amortiguador ( m )

$\phi_{RE}$	0,24
$h_{PL}$	3E-03
$f_{10PL}$	0,4183
$\phi_{minRA}$	0,3300

**TABLA DE DATOS** Condición mínima

$\phi_{LA}$ (cm)	$h_{PL}$ (mm)	$f_{10LA}$ (hz)
34	2,9226	0,2914
35	2,7580	0,2750
36	2,6069	0,2599
37	2,4679	0,2461
38	2,3397	0,2333
39	2,2212	0,2215
40	2,1116	0,2106
41	2,0098	0,2004
42	1,9153	0,1910
43	1,8272	0,1822

Hoja de cálculo, que arroja diversos valores de los parámetros de diseño del SEL, para obtener el SEL óptimo según la frecuencia natural de oscilación del PL y la frecuencia natural de oscilación del LA.

---

---

## ***CAPITULO III***



***Aplicación del SEL para una  
Calibración Absoluta del Interferómetro  
Fizeau Davison Optronics D305***

---

---

## **3. Aplicación del SEL para una Calibración Absoluta**

---

### **3.1. Consideraciones de prueba**

Como se ha mencionado en el capítulo anterior, el SEL es un dispositivo que requiere condiciones especiales que se han de tomar en cuenta para realizar una buena medición de planitud de la superficie bajo prueba.

Comparando el SEL con otros patrones de planitud (en este caso planos ópticos de cuarzo, vidrio, etc.), el SEL se ve afectado principalmente por vibraciones internas y externas al sistema, por lo que requiere condiciones de prueba más exigentes que permitan realizar una calibración lo más exacta posible, con un alto grado de repetibilidad que haga posible reproducir calibraciones posteriores bajo condiciones similares de operación.

Debido a la gran facilidad que posee un fluido para deformarse ante la presencia de cualquier perturbación, es necesario tomar en cuenta todas y cada una de las condiciones de prueba que en los apartados siguientes se proponen. De igual manera es importante contar con los accesorios y materiales necesarios para el montaje y disposición del SEL.

#### **3.1.1. Equipo y material necesario**

El equipo que se requiere para una aplicación correcta del SEL, es:

- Base metálica con tornillos niveladores antagónicos, para soportar el interferómetro Fizeau y mover el ángulo de incidencia del láser.
- Mesa antivibratoria de la máquina de coordenadas Zeiss, flotada neumáticamente y aislada de la estructura del edificio, para proveer de aislamiento de vibraciones al SEL.
- Dos recipientes cilíndricos de aluminio, uno con diámetro de 240mm (recipiente del PL) y otro de 300mm (recipiente del LA).
- Tripié para montar la cámara.
- Cámara de video (puede ser del tipo comercial), con casete para grabar.
- Funda de plástico, para proteger al SEL de corrientes de aire y de partículas de polvo.
- Aceite SAE 140, como LA.
- Aceite Nacional 80, como PL.

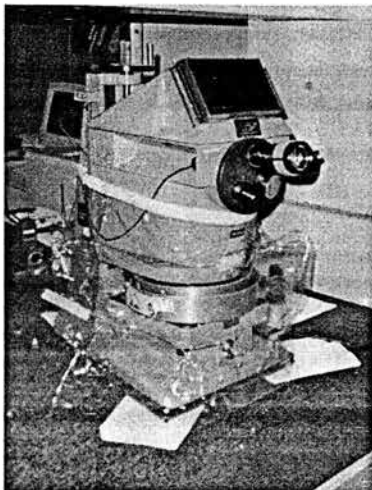


FIGURA 3-1. Dispositivo SEL.

### 3.1.2. Requisitos para la medición

Para poder realizar la calibración absoluta del interferómetro Fizeau, mediante un plano líquido, se deben tomar en cuenta las consideraciones siguientes:

- Ambos instrumentos ( el interferómetro Fizeau y el SEL), deben estar temperizados, permitiendo su estabilidad térmica dentro del recinto de calibración por un lapso de seis horas, al menos.
- Durante la calibración y temperización se debe cuidar que la temperatura no presente variaciones mayores de 0,5°C. Alrededor de 20 °C.
- El interferómetro Fizeau se coloca sobre la placa con tornillos niveladores, la cual debe estar previamente acomodada sobre la máquina de coordenadas Zeiss .
- Para lograr estabilidad del PL, el SEL se debe colocar 24 horas antes de su utilización sobre la mesa de trabajo del interferómetro Fizeau.<sup>1</sup>
- Se fija la funda de plástico para proteger al PL de corrientes de aire y de partículas de polvo.
- Respetar las cantidades necesarias de aceite para el PL y LA, así como los diámetros de los recipientes utilizados; ya que de esto depende la estabilidad del SEL (según el programa de Diseño del SEL).
- Tener la superficie del plano líquido libre de cualquier partícula de polvo, pelusa, etc.

<sup>1</sup> GRIGORÉV, V.A., Zaborov, Ya. O., " Use of a liquid mirror for the calibration of an interferometer having a plane comparison wavefront", en: Soviet Journal Optic Technology, USA, Vol. 53, No. 10, octubre, 1986, p. 615.

- Seleccionar el mejor patrón de interferencia, con la mayor separación posible entre franjas.
- Montar la cámara (lista para grabar), sobre el tripié en la dirección del ocular que tiene inscrita la leyenda **CAMERA**, al cual se le desmonta la tapa que lo protege, cuidando de no maltratar el espejo que porta.
- No recargarse en la máquina de coordenadas durante la medición, ni durante las 24 horas previas a ésta.

### 3.2. Medición de planitud

El método que se utilizó en este trabajo, se basa en la norma Japanese Industrial Standard JIS B7430-1977, "Optical Flats"; la cual especifica que la planitud de una superficie debe medirse mediante franjas de interferencia producidas por una superficie patrón de planitud, que en este caso es la superficie del PL.

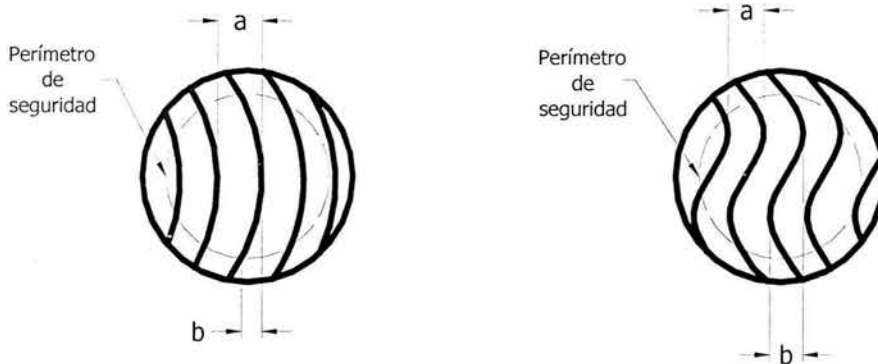


FIGURA 3-2. Patrones de Interferencia.

Donde:  $a$ : Magnitud de una franja de interferencia,  $(\mu m, nm, \lambda)$

$b$ : Fracción de franja correspondiente a la desviación de planitud,  $(\mu m, nm, \lambda)$

Para determinar la desviación de planitud, se aplica la fórmula (1.10) del Capítulo I:

$$F = \frac{\lambda b}{2 a}$$

donde  $F$ : desviación de planitud,  $(\mu m, nm, \lambda)$

$\lambda$ : longitud de onda utilizada,  $(\mu m, nm)$

El perímetro de seguridad, se determina según el diámetro exterior de la superficie a medir:

$\phi_{\text{ext}}$ (mm)	Ancho de la banda de seguridad (mm)
45	2
60	2
80	2
100	3
130	3

El ancho de la banda de seguridad se descuenta de la superficie bajo medición para evitar el efecto de arista. Aunque la norma JIS utiliza la unidad de medición en milímetros, para el procedimiento propuesto se utilizará su equivalencia en *pixeles*.

### 3.3. Interferogramas

Como se explicó en el capítulo I, los interferogramas son la representación visual o gráfica del patrón de interferencia, generado por la incidencia del láser en las superficies de referencia y de medición. Esta representación gráfica permite obtener las mediciones requeridas de los parámetros **a** y **b**, para determinar la desviación de planitud de una superficie.

La medición de los parámetros **a** y **b**, cuando se utilizan patrones de interferencia de superficies sólidas (patrón y mensurando), se pueden realizar directamente mediante el micrómetro unifilar montado en el ocular del interferómetro Fizeau, sin tener problemas de mediciones incorrectas por distorsión del patrón de interferencia, ya que es un patrón lo suficientemente estable.

Pero para medir los parámetros **a** y **b** cuando se usa el SEL, es necesario tomar fotografía o película para obtener patrones de interferencia estables, porque cualquier tipo de contacto físico durante la medición con el interferómetro Fizeau y la máquina de coordenadas Zeiss transmite vibraciones y distorsiona la superficie del plano líquido.

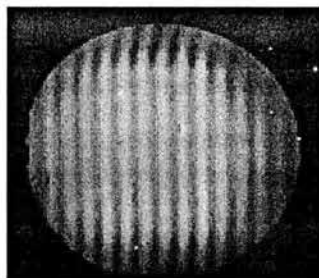


FIGURA 3-3. Interferograma.



La superficie libre del *PL* tiene un movimiento periódico permanente debido a la aceleración de Coriolis, por esta razón es necesario congelar la imagen mediante una fotografía para obtener un patrón de interferencia fijo.

### 3.3.1. Obtención de interferogramas del *PL*.

La obtención de los interferogramas del *PL*, es una operación que requiere de mucho cuidado y tener en cuenta algunas consideraciones especiales.

Es necesario contar con una cámara de video, colocarla sobre un trípode y posicionarla en la dirección del ocular por el cual se tomará la película; cuidando que la cámara abarque toda la extensión del patrón de interferencia generado, evitando contacto alguno entre el ocular del interferómetro y el objetivo de la cámara.

El video del patrón de interferencia se toma después de transcurridas las 24 horas de estabilización requeridas por el SEL. La toma de película es de un minuto.

El video obtenido se descarga en una *PC* para después seleccionar (mediante la reproducción cuadro por cuadro), las diez imágenes que presenten la mayor desviación visual entre franjas.

Las imágenes obtenidas, son imágenes a color, las cuales al momento de realizar una medición mediante un programa de cómputo con trazos sobre la imagen (Paint o Autocad), no permiten definir en ellas con certeza los límites entre franjas oscuras y claras; por lo que es necesario realizar un procesamiento a dichas imágenes con la finalidad de obtener bordes definidos en blanco y negro, para que de esta manera queden también definidos los límites de franjas que permitan hacer mediciones objetivas de los parámetros *a* y *b*.

### 3.3.2. Procesamiento de los interferogramas del *PL*

El objetivo del procesamiento de la imagen es obtener una representación simplificada de la imagen que en forma natural se forma de la observación del fenómeno de interferencia de la luz en el *PL*.

Se utiliza como herramienta de procesamiento la teoría conocida como *morfología matemática*, que es útil para extraer componentes de una imagen que sean útiles en la representación y descripción de la forma de una región, tales como contornos. También son de interés las técnicas morfológicas para el pre o post procesado, tales como el filtrado de detalles menos relevantes y la eliminación del trasfondo de poco interés. En este caso particular, las regiones de interés están conformadas por las franjas mismas del interferograma obtenido por medio de dispositivos de adquisición de imágenes como cámaras CCD y digitalizadores de video.

Entonces, el procesamiento se lleva a cabo como se describe en las siguientes siete etapas.

#### 3.3.2.1 Digitalización del interferograma.

La figura 3-4 muestra la imagen que se observa a través del interferómetro Fizeau digitalizada mediante una cámara de video comercial y su interfase a la computadora. La imagen tiene la característica de ser representada por 3 combinaciones de los colores rojo, verde y azul

(RGB). La intensidad o nivel de color de la imagen se obtiene de forma similar a una función de dos variables independientes discretas llamadas comúnmente  $x$  e  $y$ .

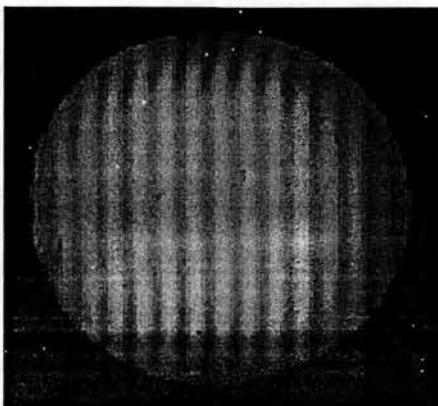


FIGURA 3-4. Imagen original

### 3.3.2.2 Conversión de imagen de color a imagen en niveles de gris.

Comúnmente, el procesamiento es aplicado a imágenes en escala de gris. Por ésta razón, la imagen de la figura 3-4 se convierte a escala de gris mediante la siguiente fórmula.

$$I(x, y) = 0.3 \times \text{Rojo}(x, y) + 0.59 \times \text{Verde}(x, y) + 0.11 \times \text{Azul}(x, y) \dots (3.1)$$

La figura 3-5 ilustra la conversión realizada.

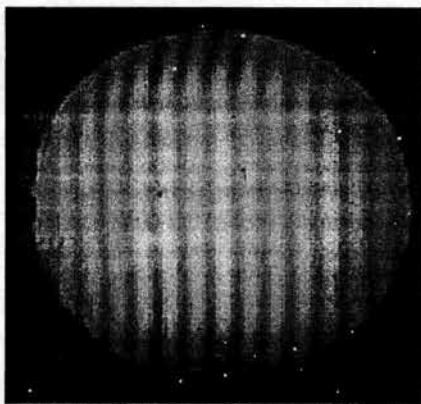


FIGURA 3-5. Conversión a escala de gris.

### 3.3.2.3 Erosión.

En la siguiente etapa se aplica el operador morfológico *erosión* a la imagen en escala de gris. La imagen procesada, figura 3-6, resulta ser menos brillante en los detalles oscuros, es decir, erosionada en las características de interés. La erosión esta dada por la siguiente expresión.

$$I\epsilon(x, y) = \min\{I(x+i, y+j) \text{ para } i, j = \pm 5, \pm 4, \dots, 0\} \dots (3.2)$$

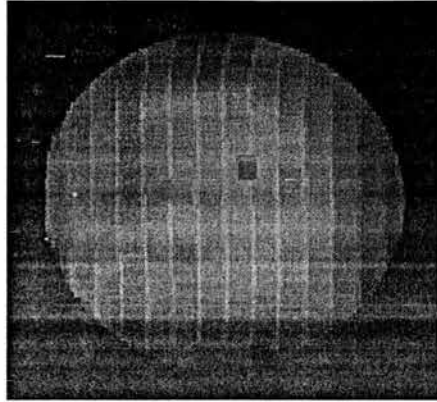


FIGURA 3-6. Erosión.

#### 3.3.2.4 Dilatación de la erosión.

Este operador morfológico, también conocido como *apertura*, se obtiene al dilatar la imagen erosionada mediante la siguiente fórmula.

$$I\delta\epsilon(x, y) = \max\{I\epsilon(x+i, y+j) \text{ para } i, j = \pm 5, \pm 4, \dots, 0\} \dots (3.3)$$

Entonces el resultado de *erosionar* y después *dilatar* se manifiesta como una eliminación de los detalles claros y oscuros menos relevantes, obteniendo una representación del fondo de la imagen en donde han sido removidas las franjas, figura 3-7.

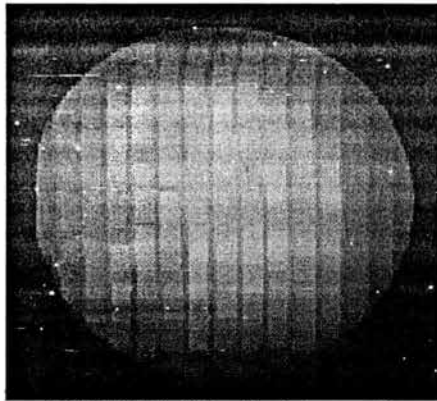


FIGURA 3-7. Dilatación de la erosión.

### 3.3.2.5 Resta del fondo.

En ésta etapa, el fondo de la figura 3-7 es restado a la imagen original de la figura 3-5, dando como resultado el aislamiento de las franjas de interferencia. El resultado es presentado en la figura 3-8 y la expresión analítica es la siguiente.

$$I_r(x, y) = \text{abs}\{I\varepsilon(x, y) - I\delta\varepsilon(x, y)\} \dots (3.4)$$

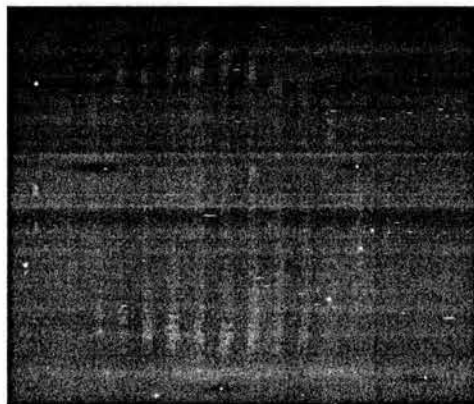


FIGURA 3-8. Resta del fondo.

### 3.3.2.6 Umbralización.

Esta operación tiene como objetivo transformar la imagen en nivel de gris a dos colores, blanco y negro, mediante la comparación del nivel de intensidad en la imagen contra un valor pre-establecido de umbral. La expresión analítica es la siguiente y el resultado de la operación se muestra en la figura 3-9.

$$I_u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{para } I_r(x, y) > \text{umbral} \\ 0 & \text{para } I_r(x, y) \leq \text{umbral} \end{cases} \dots (3.5)$$



FIGURA 3-9. Umbralización.

## 3.3.2.7 Apertura-cierre

El operador morfológico *apertura-cierre* se aplica sobre la base de los siguientes operadores binarios con el objeto de suavizar los contornos de la imagen umbralizada.

*Erosión.*

$$A \ominus B = \{x \mid (B)_x \subseteq A\} \dots (3.6)$$

que dice que la erosión de  $A$  por  $B$  es el conjunto de todos los puntos  $x$  tales que  $B$ , trasladado por  $x$ , esta contenido en  $A$ . La erosión, como su nombre lo indica, erosiona la imagen binaria.

*Dilatación.*

$$A \oplus B = \{x \mid (\text{complemento}(B))_x \cap A \neq \emptyset\} \dots (3.7)$$

Que dice que la dilatación de  $A$  por  $B$  es el conjunto de todos los desplazamientos  $x$  tales que  $\text{complemento}(B)$  y  $A$  se traslapen en al menos un elemento distinto de cero. La dilatación, como su nombre lo indica, dilata la imagen binaria.

En donde  $B$  es un elemento estructurante de la siguiente forma

$$B = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \dots (3.8)$$

Entonces la apertura-cierre esta dada por.

$$I_o(x, y) = (((I_u(x, y) \ominus B) \oplus B) \ominus B) \dots (3.9)$$

El resultado final se muestra en la figura 3-10 en donde se puede observar el aislamiento de las franjas de interferencia. Finalmente, la imagen de la figura 3-10 resulta ser la más apropiada con el fin de realizar mediciones.



FIGURA 3-10. Apertura-cierre.

El código fuente en MatLab que desempeña el proceso descrito se muestra a continuación.

```
clear;

%Lectura de imagen y conversión a nivel de gris
in=im2double(rgb2gray(imread('9s.bmp','bmp')));
s=size(in);
imshow(in);
'imagen original in1'
pause;
'procesando...'

%Erosion
for i=1: s(1),
    for j=1: s(2),
        min=1;
        for ii=-5:5,
            for jj=-5:5,

if((i+ii)>0)&((j+jj)>0)&((i+ii)<s(1)+1)&((j+jj)<s(2)+1))
                if(in(i+ii,j+jj)<min)
                    min=in(i+ii,j+jj);
                end
            end
        end
        epsilon(i,j)=min;
    end
end
imshow(epsilon);
'Erosion epsilon'
pause;
'Orocesando...'

%Dilatacion de la erosion
for i=1: s(1),
    for j=1: s(2),
        max=0;
        for ii=-5:5,
            for jj=-5:5,

if((i+ii)>0)&((j+jj)>0)&((i+ii)<s(1)+1)&((j+jj)<s(2)+1))
                if(epsilon(i+ii,j+jj)>max)
                    max=epsilon(i+ii,j+jj);
                end
            end
        end
        delta(i,j)=max;
    end
end
imshow(delta);
```

```
'Dilatacion delta'  
pause;  
  
%Resta el trasfondo  
x=in-delta;  
imshow(x);  
'Resta del transfondo x'  
pause;  
  
%Umbralizacion  
bw=x>0.05;  
imshow(bw);  
'Umbralizacion bw'  
pause;  
  
b=eye(3,3);  
  
%Apertura-cierre  
bwel=erode(bw,b);  
bwd1=dilate(bwel,b);  
bwd2=dilate(bwd1,b);  
bwe2=erode(bwd2,b);  
imwrite(bwe2,'out9s.png','png');  
imshow(bwe2);  
'Apertura-cierre bwe2'
```

### 3.4. Procedimiento de medición

#### 3.4.1. Instrucciones para realizar las mediciones de los interferogramas obtenidos del PL

Siguiendo la norma de referencia, las mediciones de planitud, deben realizarse tomando en cuenta la figura 3-2.

Como la medición que se va a realizar, es en píxeles, se tiene la equivalencia<sup>2</sup>:

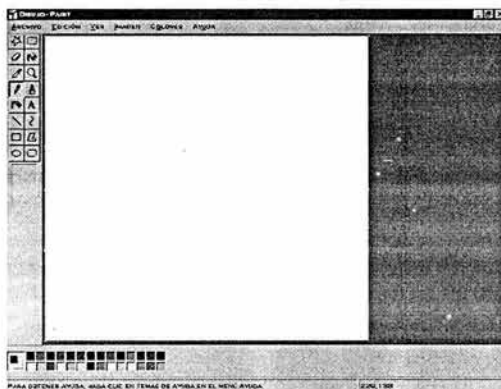
$$1\text{mm} \approx 3\text{píxeles}$$

De la norma JIS, para diámetros de planos entre 100-130mm, es necesario un perímetro de seguridad a 3mm mínimo. Así que la banda de seguridad deberá ser de al menos 9 píxeles.

Siguiendo estos pasos sencillos, se llevan a cabo las mediciones en el programa **Paint de Microsoft Windows**, como lo marca la secuencia que a continuación se muestra, la cual consta de dos tipos de trazos:

- i. *Trazos auxiliares*: trazos que sirven de apoyo para delimitar la superficie de trabajo en el patrón de interferencia,
- ii. *Trazos de medición*: trazos que sirven para hacer las mediciones de *a* y *b*.

Pantalla del programa **Paint**:



Comando a utilizar de la barra de herramientas:



Botón de activación del comando de trazado de *línea*



Botón de activación del comando de trazado de *circunferencia (Elipse)*

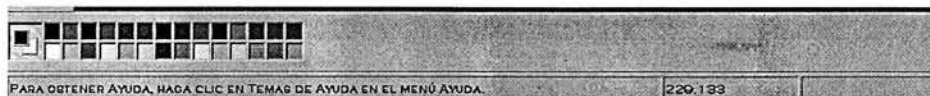
<sup>2</sup> Datos tomados directamente del programa *Microsoft Photo Editor*, al medir una fotografía.





Barra de colores.

Coordenadas ó píxeles.



Para poder ver la imagen en el programa *Paint*, se abre la imagen procesada con extensión *.png* (dando doble clic sobre el nombre de la imagen) en el programa *Microsoft Photo Editor* y presionando las tecla *Ctrl. + E* (seleccionar todo), después se presionan las teclas *Ctrl. + C* (copiar); posteriormente se abre el programa *Paint* y se presiona las teclas *Ctrl. + V* y con esta acción se pega la imagen en el programa *Paint*.

### 3.4.2. TRAZOS AUXILIARES

1. Se encierra la circunferencia del patrón de interferencia, dentro de un cuadrado. Cada línea que compone el cuadrado, se hace tangente a la circunferencia del patrón de interferencia de la forma siguiente:
  - Activar el comando de la barra de herramienta *Línea* y seleccionar el grosor más pequeño.
  - Seleccionar un color amarillo (o cualquier otro que resalte sobre el fondo negro)
  - En el menú *Ver*, seleccionar *Zoom, Personalizar*, seleccionar el *Zoom* de 600% y posteriormente presionar las teclas *Ctrl.+ M*, para ver la cuadrícula en la pantalla.
  - Por último se trazan cuatro líneas tangentes a la circunferencia del patrón de interferencia, como se muestra en la figura siguiente:

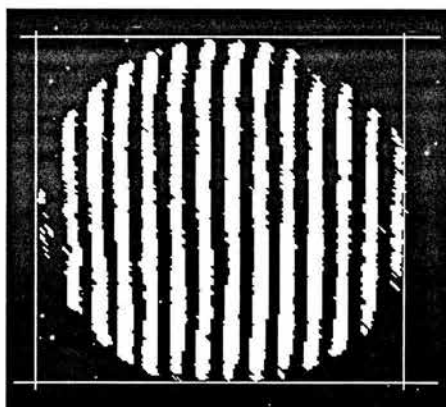


FIGURA 3-11. Líneas tangentes, límites del interferograma

2. Trazar un círculo que quede inscrito dentro del cuadrado hecho anteriormente.
  - En la barra de herramientas, se selecciona la opción trazado de circunferencia, *Elipse*, y seleccionar la opción de trazado sólo de perímetro y con el zoom al 200%.
  - El trazo de la circunferencia se realiza desde cualquier esquina del cuadrado, hacia su esquina opuesta (por ejemplo de la esquina superior izquierda hacia la esquina superior derecha).
  - La circunferencia queda como se muestra en la figura siguiente:

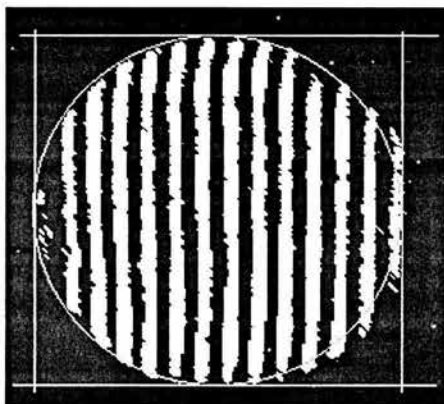


FIGURA 3-12. Determinación de la circunferencia del interferograma

3. Se trazan líneas perpendiculares a los segmentos del cuadrado, en el punto tangente de los segmentos con la circunferencia.
  - Se activa de la barra de herramientas el comando de *Línea*, y se trazan los segmentos perpendiculares a las líneas del cuadrado, partiendo del punto tangente, contando 10 píxeles para cada segmento (con el zoom al 800% y la cuadrícula a la vista), como se muestra en la figura siguiente:

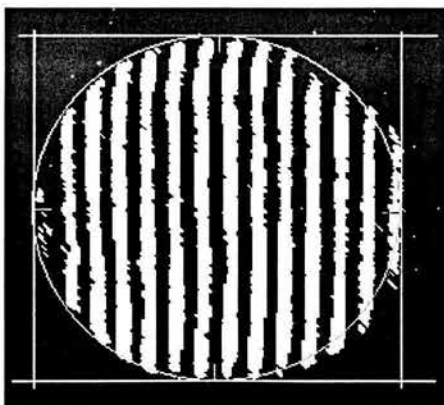


FIGURA 3-13. Trazo de la distancia del perímetro de seguridad.

4. Con ayuda de los segmentos de rectas trazados en el punto anterior, se trazan sendas rectas perpendiculares a estos segmentos, con la finalidad de obtener un cuadrado, como se muestra en la figura siguiente:

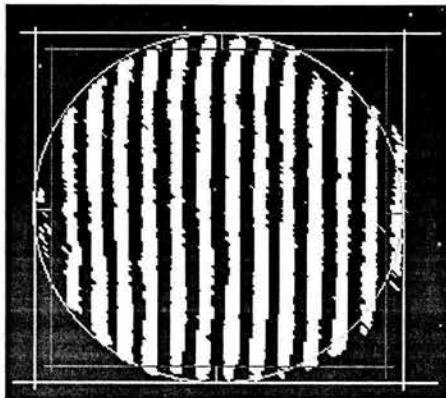


FIGURA 3-14. Líneas tangentes límites del perímetro de seguridad.

5. Utilizando el cuadrado trazado en el punto anterior, se traza una circunferencia como se hizo en el punto 2.

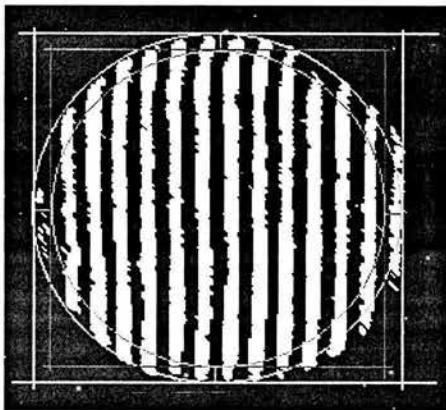


FIGURA 3-15. Trazado de la circunferencia, que marca el perímetro de seguridad

### 3.4.3. TRAZOS DE MEDICIÓN

6. Se localiza la franja que posee la mayor desviación a simple vista (utilizando el zoom al 200%, ver paso 1 de trazos auxiliares), y se traza una línea (roja), de un extremo de la franja que intersecta a la circunferencia de menor diámetro, hacia el otro extremo de la franjas que intersecta con la misma circunferencia de diámetro menor, como se muestra a continuación:

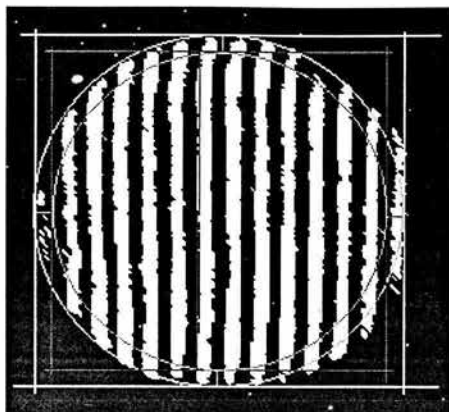


FIGURA 3-16. Línea trazada sobre la franja de mayor desviación

7. Utilizando el zoom al 800% y oprimiendo las teclas *Ctrl + M*, en la parte donde se observe la mayor desviación (la parte más alejada de la línea hacia la izquierda, según la figura), se traza un segmento de recta, al cual se le cuenta el número de píxeles que posea, partiendo de la recta trazada en el punto anterior, el número de píxeles será la medida de **b**.

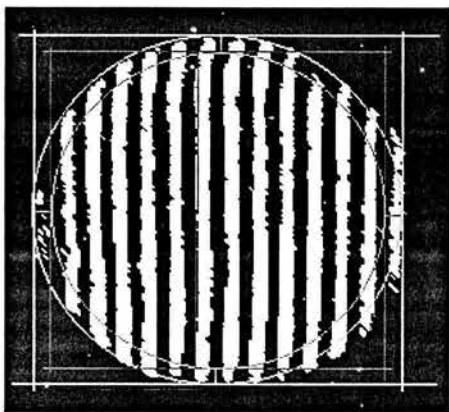
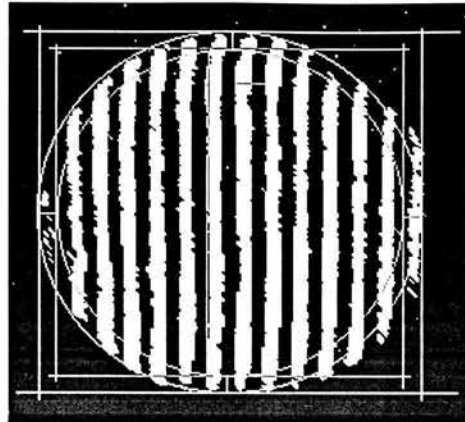


FIGURA 3-17. Longitud del parámetro **b**.

8. Se traza un segmento de recta de una parte de una franja blanca o negra (con el mismo zoom de 800%), a la siguiente, que termine en el punto correspondiente de la siguiente franja, y se cuenta el número de píxeles; con lo que obtenemos la medida de **a**.

FIGURA 3-18. Longitud del parámetro  $a$ .

#### 3.4.4. Cálculo de la desviación de planitud

Tomando una medición hecha a una imagen, se muestra un ejemplo de la forma en la cual se debe calcular la desviación de planitud. De acuerdo a la ecuación (1.10) los datos obtenidos necesarios son los siguientes:

$\lambda = 633 \text{ nm}$  (longitud de onda bajo la cual opera el láser He-Ne)

$a = 18 \text{ pixeles}$

$b = 3 \text{ pixeles}$

Sustituyendo valores se tiene

$$F = \frac{633 \text{ nm} \cdot 3 \text{ pixeles}}{2 \cdot 18 \text{ pixeles}} = 53 \text{ nm}$$

$$F = \frac{1}{12} \lambda \quad \text{Valor de la desviación de planitud}$$

### 3.5. Procedimiento de calibración.

La calibración del *Interferómetro Fizeau Davison Optronics D305*, del Laboratorio de Metrología del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET) de la UNAM, se describe en los párrafos posteriores.

Primero, se coloca la placa de metal con tornillos niveladores en la máquina de medición por coordenadas Zeiss, con la finalidad de poder cambiar el ángulo de incidencia del láser He-Ne del Interferómetro y sobre de ésta se coloca el Interferómetro Fizeau

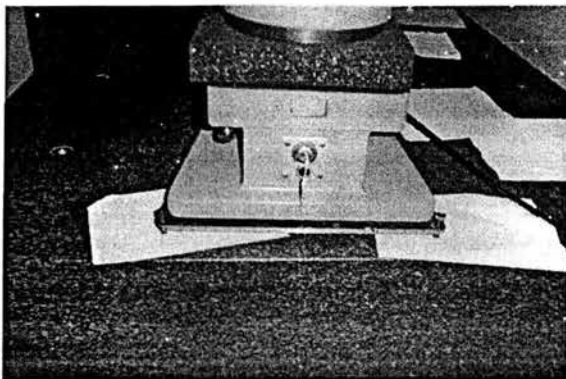


FIGURA 3-19. Placa de metal con tornillos niveladores sobre la que se monta el Interferómetro.

Para el SEL, el diámetro del recipiente del PL ( $\phi_{PL}$ ), es de 240mm y la altura del PL ( $h_{PL}$ ), es de 3mm. La cantidad necesaria de LA ( $h_{LA}$ ) es de 3,8mm y por consiguiente el tamaño del recipiente del LA resulta de un diámetro ( $\phi_{LA}$ ) de 300mm (Ver apartados 2.5.3 y 2.5.4.). Los recipientes se colocan coaxialmente entre sí, cubriéndolos con plástico para evitar que se contaminen con polvo o cualquier otra partícula suspendida.

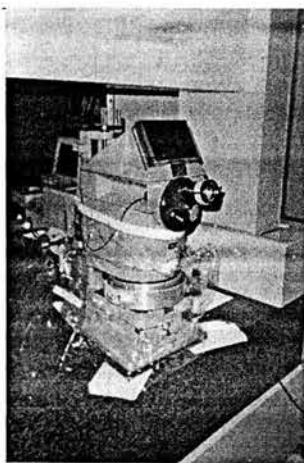


FIGURA 3-20. Dispositivo SEL

Se gira el revolver de oculares, de manera que el ocular que tiene inscrita la leyenda CAMERA, quede habilitado para observar el patrón de interferencia. Al realizar esta operación, se retira la tapa de dicho ocular para tener un campo más amplio de visualización del patrón de interferencia formado.

Con la cámara de video montada sobre el tripié a la altura y orientada en la dirección correcta hacia el ocular del interferómetro, cuidando que la imagen en la cámara abarque completamente el patrón de interferencia formado, se obtiene el patrón de interferencia que posea

la **mayor desviación de planitud** y el **menor número de franjas** posibles, a simple vista. Esto se obtiene al mover el ángulo de incidencia del láser del interferómetro mediante los tornillos antagónicos que tiene la placa de metal.

Pasadas las 24 horas de reposo y los 30min para las estabilización del láser He-Ne, se comienza la grabación de un minuto de video. Mediante una interfase cámara de video-computadora, se descarga el video a una computadora, con el propósito de reproducir el video cuadro por cuadro y seleccionar las fotografías que presenten la **mayor desviación de planitud**.

A las fotografías seleccionadas se les aplica el **procesamiento de imagen** en Matlab (descrito en el apartado 3.3.2), y se realiza la medición de los parámetros  $a$  y  $b$  de la ecuación (1.10) para obtener la desviación de planitud producida por el **interferómetro Fizeau Davison Optronics D305**.

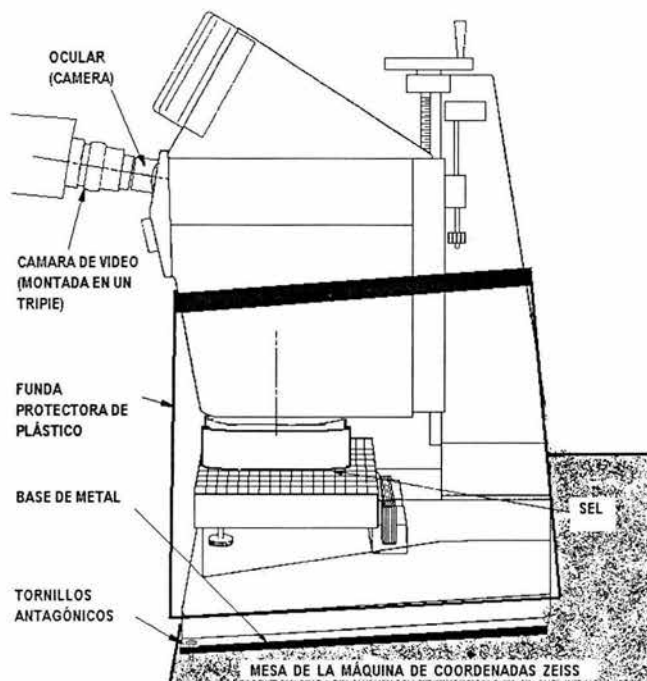


FIGURA 3-21. Disposición del SEL para realizar la calibración al interferómetro Fizeau

### 3.6. Medición de los interferogramas.

En 3.4, se mostró el procedimiento para hacer las mediciones a los interferogramas obtenidos. Así pues, a continuación se presentan cada una de las fotografías con sus respectivos valores para los parámetros  $a$  y  $b$ .

Las imágenes se muestran en toda su extensión en una primera vista. En la segunda se muestra la ampliación de la fotografía en la porción donde se realiza la medición.

1ª Imagen:

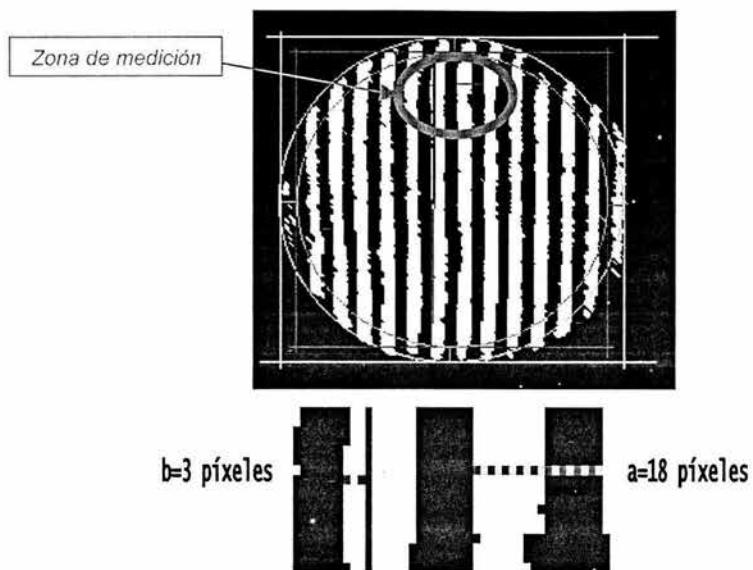


FIGURA 3-22. Fotografía tomada en el segundo 0.

2ª Imagen:

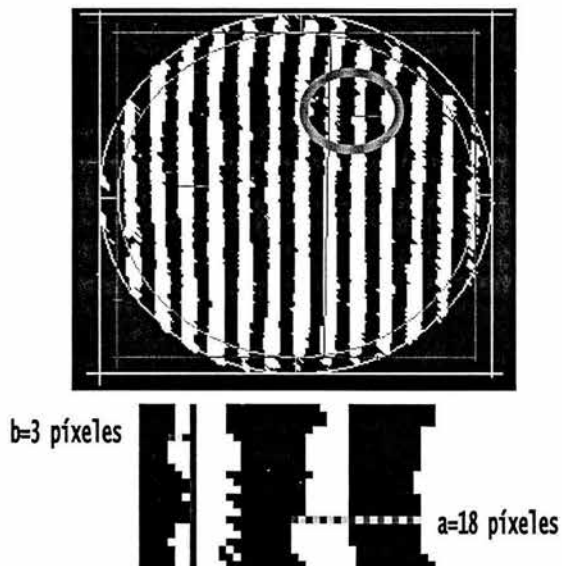


FIGURA 3-23. Fotografía tomada en el segundo 2.



3ª Imagen:

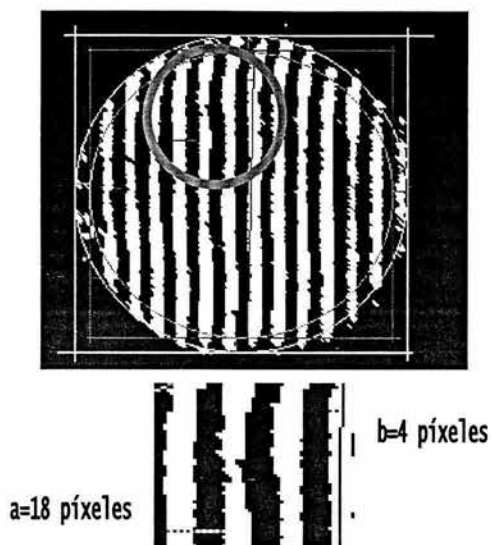


FIGURA 3-24. Fotografía tomada en el segundo 4.

4ª Imagen:

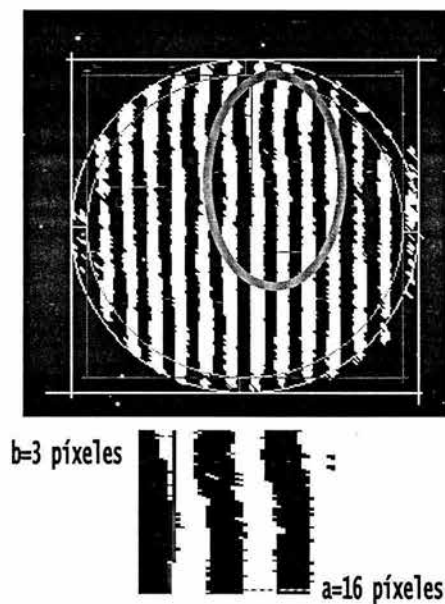


FIGURA 3-25. Fotografía tomada en el segundo 5.

5ª Imagen:

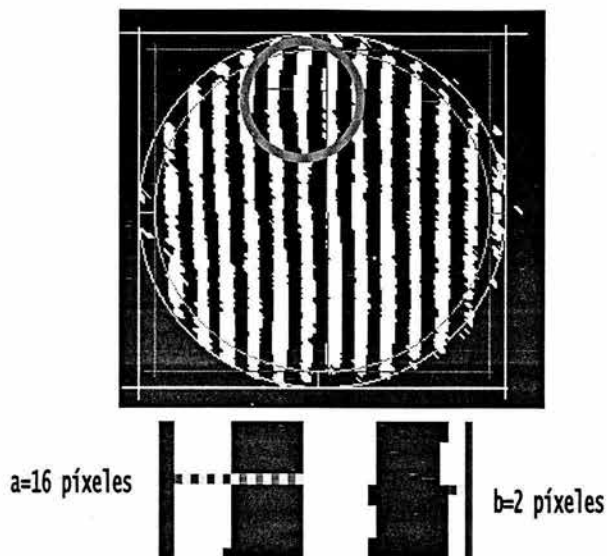


FIGURA 3-26. Fotografía tomada en el segundo 6.

6ª Imagen:

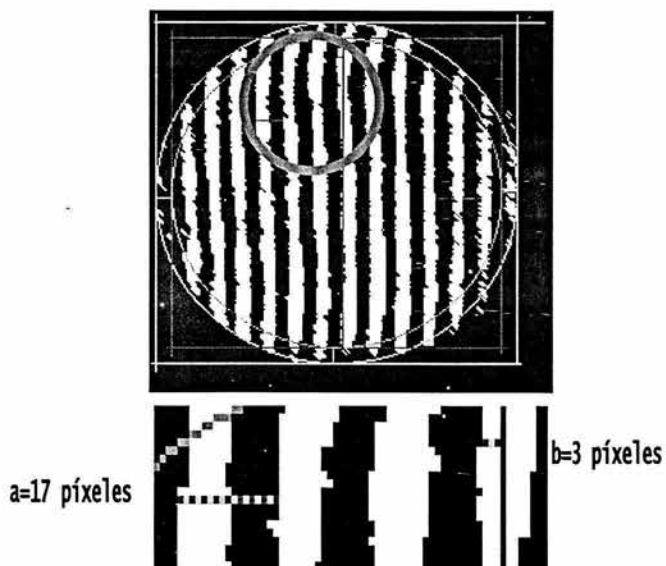


FIGURA 3-27. Fotografía tomada en el segundo 7.

7ª Imagen:

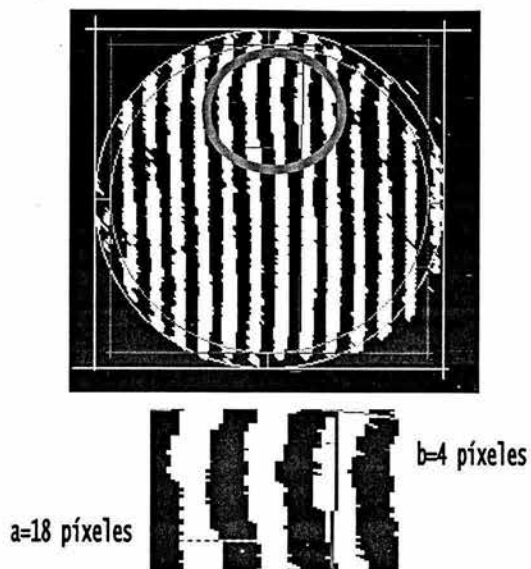


FIGURA 3-28. Fotografía tomada en el segundo 8.

8ª Imagen:

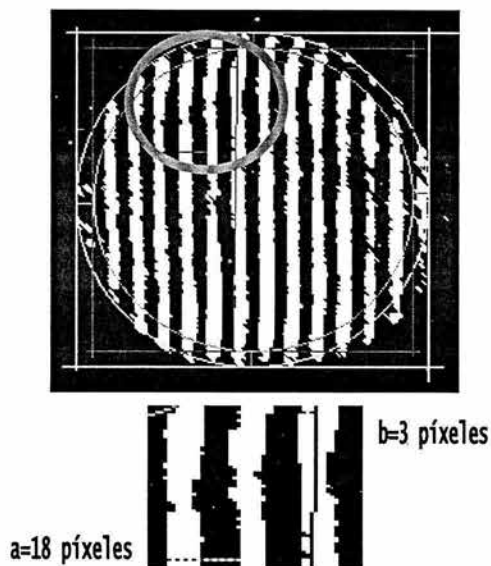


FIGURA 3-29. Fotografía tomada en el segundo 9.

9ª Imagen:

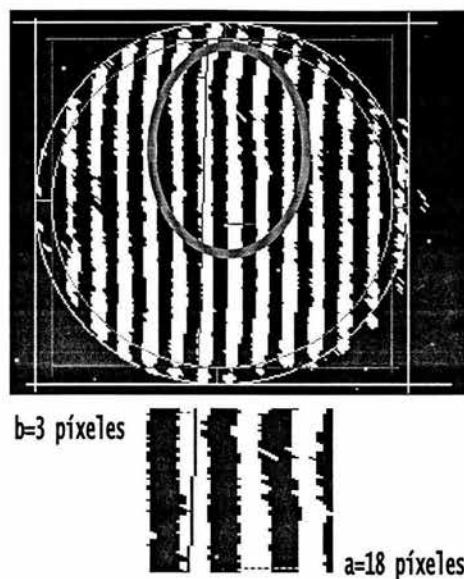


FIGURA 3-30. Fotografía tomada en el segundo 10.

10ª Imagen:

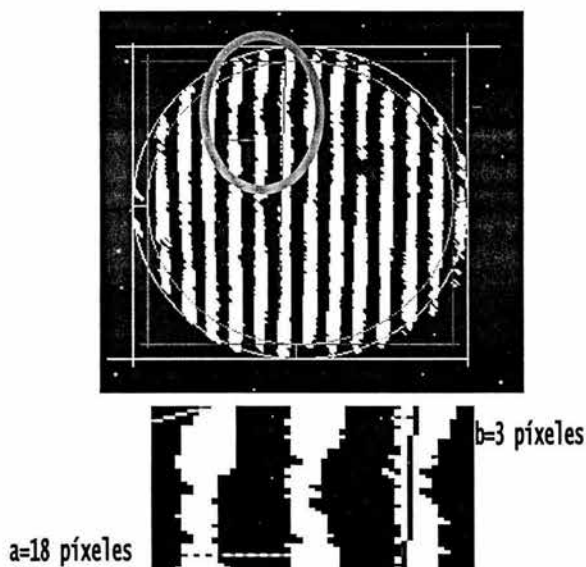


FIGURA 3-31. Fotografía tomada en el segundo 11.

11ª Imagen:

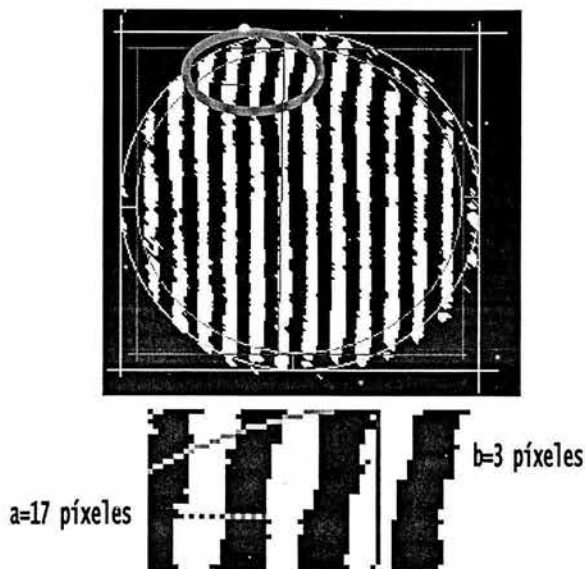


FIGURA 3-32. Fotografía tomada en el segundo 12.

### 3.7. Procesamiento de datos.

Con las once mediciones, se aplica estadística descriptiva para establecer una desviación de planitud promedio, con una incertidumbre asociada por el tratamiento estadístico.

Así pues los datos obtenidos son los siguientes:

Imagen	Segundo	a (píxeles)	b (píxeles)
1	0	18	3
2	2	18	3
3	4	18	4
4	5	16	3
5	6	16	2
6	7	17	3
7	8	18	4
8	9	18	3

9	10	18	4
10	11	18	3
11	12	17	3

Con estos datos se calcula la desviación de planitud en los once casos con la ecuación (1.10),

$$F = \frac{\lambda b}{2a} = \frac{633nm}{2} \frac{b}{a}$$

Los resultados obtenidos se resumen en la tabla siguiente:

Imagen	Segundo	a (píxeles)	b (píxeles)	F (λ)	F (λ)	F (nm)
1	0	18	3	0,08	1/12	53
2	2	18	3	0,0	1/12	53
3	4	18	4	0,11	1/9	70
4	5	16	3	0,09	1/11	58
5	6	16	2	0,06	1/16	40
6	7	17	3	0,09	1/11	58
7	8	18	4	0,11	1/9	70
8	9	18	3	0,08	1/12	53
9	10	18	4	0,11	1/9	70
10	11	18	3	0,08	1/12	53
11	12	17	3	0,09	1/11	58

La primera columna de datos de desviación de planitud (F en unidades de λ), es a la que se le aplica estadística descriptiva.

**Rango:**

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 0,11 - 0,06 \dots (3.10)$$

$$R = 0,05$$

**No. De Intervalos:**

Se proponen 4 intervalos

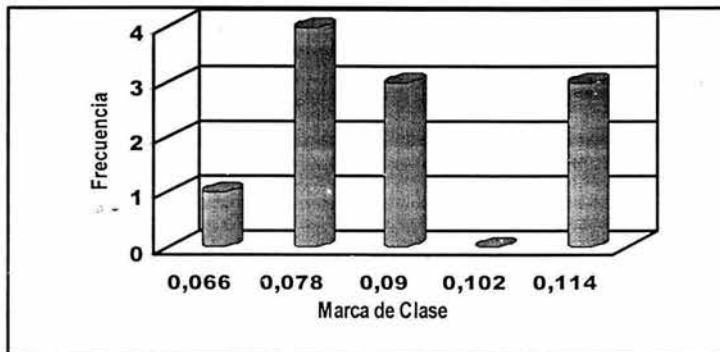
**Tamaño de los Intervalos de Clase:**

$$TIC = \frac{\text{Rango}}{\text{No. Intervalos}} = \frac{0,05}{4} \dots (3.11)$$

$$TIC = 0,012$$

**Tabulación:**

Limite de Clase	Marca de Clase	Tabulación	Frecuencia	Frecuencia Relativa	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Rel. Acumulada
0,060 0,072	0,066	I	1	1 / 11	1	1 / 11
0,072 0,084	0,078	IIII	4	4 / 11	5	5 / 11
0,084 0,096	0,090	III	3	3 / 11	8	8 / 11
0,096 0,108	0,102		0	0	8	8 / 11
0,108 0,120	0,114	III	3	3 / 11	11	11 / 11
Σ			11	1		

**Histograma:****Estadístico Media:**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{n=1}^i f_i \cdot \hat{x}_i}{\sum_{n=1}^i f_i} = \frac{(1)(0,066) + (4)(0,078) + (3)(0,090) + (0)(0,102) + (3)(0,114)}{1 + 4 + 3 + 0 + 3} \dots (3.12)$$

$$\bar{x} = \frac{0,990}{11} = 0,09$$

$$\bar{x} = 0,09\lambda = \frac{1}{11}\lambda = 57nm$$

**Estadístico Varianza:**

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^i f_i (\hat{x}_i - \bar{x})^2}{n} \dots (3.13)$$

$$S_x^2 = \frac{(1)(0,066 - 0,09)^2 + 4(0,078 - 0,09)^2 + 3(0,09 - 0,09)^2 + 3(0,114 - 0,09)^2}{11}$$

$$S_x^2 = 0,00026$$

**Desviación Estándar:**

$$S_x = \sqrt{S_x^2} \dots (3.14)$$

$$S_x = 0,016\lambda = 10nm$$

Valor de desviación estándar similar a los resultados obtenidos por V.A. Grigor'ev.<sup>3</sup>

Con la información obtenida hasta este momento se aplica el *Criterio de Chauvenet* (ver Apéndice E), para rechazar mediciones que puedan sesgar los estadísticos.

Tomando las mediciones extremas, se tiene:

Imagen	Segundo	a (píxeles)	b (píxeles)	F (λ)	F (λ)	F (nm)
3	4	18	4	0,11	1 / 9	70
5	6	16	2	0,06	1 / 16	40
7	8	18	4	0,11	1 / 9	70
9	10	18	4	0,11	1 / 9	70

<sup>3</sup> Grigor'ev, V.A., Zaborov, Ya O. y Ivanov, P.P.: "Use of a liquid mirror calibration of an interferometer having a plane comparison wavefront", en: Soviet Journal Optics Technology, The Optical Society of America, USA, No. 53, Vol. 10, Octubre, 1987, p. 615.



Según el Criterio de Chauvenet, se tiene que para las 11 lecturas la razón de máxima desviación es 1.99, entonces, considerando valores absolutos:

$$\eta_{\text{sup}} = \frac{d \text{máx}_{\text{sup}}}{S_x} = \frac{x_{\text{máx}} - \bar{x}}{S_x} \dots (3.15)$$

$$\eta_{\text{sup}} = \frac{d \text{máx}_{\text{sup}}}{S_x} = \frac{0,11\lambda - 0,09\lambda}{0,016\lambda} = 1,25 < 1,99$$

$$\eta_{\text{inf}} = \frac{d \text{máx}_{\text{inf}}}{S_x} = \frac{0,06\lambda - 0,09\lambda}{0,016\lambda} = 1,88 < 1,99$$

Como la razón de desviación de los valores  $0,11\lambda$  y  $0,06\lambda$  es menor que 1,99 se conservan ambos; por lo cual no hay valores de las mediciones rechazados.

### 3.8. Determinación de la desviación de planitud.

El intervalo de confianza utilizando la distribución de *t de Student* (ver apéndice E), se define como:

$$\pm \frac{t}{\sqrt{n}} S_x \dots (3.16)$$

donde  $n$ : es el número de eventos de la muestra.

El factor  $\frac{t}{\sqrt{n}}$  se obtiene de la tabla contenida en la norma DIN 1319<sup>4</sup>, con una *probabilidad del 95%* y  $n-1=10$  grados de libertad.

Así pues, el intervalo de confianza es de:

$$\pm \frac{t}{\sqrt{n}} S_x = \pm(0,67)(0,016\lambda) = \pm 0,01\lambda$$

Más adelante se verá que el intervalo de confianza aquí obtenido, servirá para conocer la incertidumbre tipo A, según la GUM.

El resultado de calibración, expresado como una desviación de planitud del *PL* medido en el interferómetro Fizeau queda como sigue::

$$F = (0,09 \pm 0,01)\lambda$$

$$F = 57 \pm 7 \text{ nm}$$

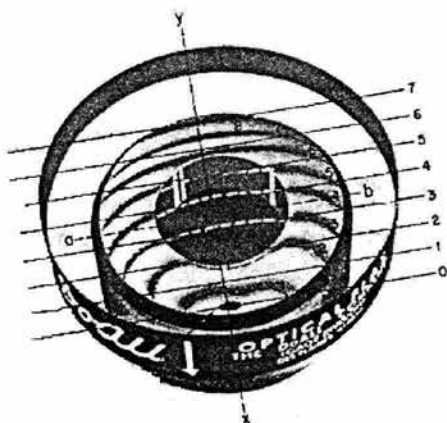
<sup>4</sup> Norma DIN 1319, hoja 3, p. 3

Una forma de validar este resultado, es llevando a cabo una comparación con el resultado proveniente de una calibración del plano óptico del interferómetro Fizeau. Pero debe quedar claro que esta comparación contempla el resultado proporcionado por el interferómetro completo empleando el SEL, contra una de sus partes, un *plano óptico*, calibrado aisladamente por otro interferómetro.

---

---

## CAPITULO IV



### *Cálculo de la Incertidumbre*

---

---

## 4. Cálculo de la Incertidumbre

---

### Introducción

Al informar el resultado de una medición de una magnitud física, es necesario proporcionar alguna indicación cuantitativa de la calidad del resultado, de manera que se proporcione confiabilidad al resultado. Con dicha confiabilidad, los resultados de las mediciones pueden ser comparados entre ellos y con valores de referencia especificados o normalizados.

Así pues, es necesario que exista un procedimiento a seguir, fácil de usar, para evaluar y expresar la **incertidumbre**.

La aplicación del concepto de incertidumbre en los resultados de mediciones, es relativamente nuevo, pesar de que el concepto de error y análisis de error han sido parte de la práctica de la metrología. En la actualidad se acepta de manera general que cuando todas las componentes conocidas o supuestas del error han sido evaluadas y se han aplicado las correcciones pertinentes, aún persiste una incertidumbre acerca de la confiabilidad del resultado expresado, lo que quiere decir que persiste una duda de lo bien que está representado el resultado de la medición realizada.

Por lo tanto, el método para evaluar la incertidumbre del resultado de una medición debe ser **universal**, o sea, que el método debe ser aplicable a cualquier tipo de mediciones y a cualquier tipo de datos utilizados en las mediciones.

Por lo anterior, las cantidades utilizadas para expresar la incertidumbre deben ser:

- **Internamente consistentes:** debe poder obtenerse directamente a partir de los componentes que contribuyen a ella; así mismo, debe ser independiente de la forma en que dichas componentes se agrupan y del método en que éstas se descomponen en subcomponentes.
- **Transferibles:** debe ser posible utilizar directamente la incertidumbre evaluada para un resultado, como una componente al evaluar la incertidumbre de otra medida en la cual se utiliza el primer resultado.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Instituto Mexicano de Normalización y Certificación A.C. (IMNC): Guía para la expresión de incertidumbre en las mediciones (GUM), México, Ed. IMNC, , 2003, p. viii.

#### 4.1. Conceptos fundamentales de medición<sup>2</sup>

- **Mensurando:** La magnitud física determinada en un proceso de medición. Puede ser influenciada por otras magnitudes como temperatura, presión, humedad, etc.; cuyos valores pueden afectar el valor del mensurando.
- **Valor verdadero:** El valor verdadero de una magnitud es definido como el valor consistente con su definición. Esto significa que no existe error en la medición. El valor verdadero no puede determinarse experimentalmente.
- **Valor nominal y valor convencionalmente verdadero:** El valor nominal es un valor aproximado de una medida material o característica de un instrumento de medición. El valor convencionalmente verdadero es aquel que proviene de un proceso de medición, comparando el mensurando con un patrón de mayor nivel bajo condiciones definidas.
- **Error:** La diferencia que existe entre el resultado de una medición y su valor verdadero. El valor convencionalmente verdadero es utilizado comúnmente en la práctica para determinar el error.
- **Error relativo:** Se obtiene dividiendo el error entre el promedio del valor de las mediciones. Como el error puede ser negativo o positivo, al tomar el valor absoluto del mismo se conoce el valor absoluto del error, utilizado para expresar la magnitud (o módulo) del error.
- **Error aleatorio:** Se debe a las variaciones impredecibles de una o más cantidades de influencia. Así pues, el efecto de cada variación es conocido como *efectos aleatorios*. La incertidumbre de los efectos aleatorios puede ser cuantificada mediante la repetición del número de pruebas.
- **Error sistemático:** Error que ocurre de forma constante, o es inherente al instrumento de medición o al mensurando.
- **Exactitud:** La exactitud de una medición es el grado de aproximación hacia el valor real, o sea, que tan cerca se encuentra una medición de su valor verdadero.
- **Precisión:** Es el grado de dispersión de los resultados de medición, cuando la medición se repite un cierto número de veces, bajo las mismas condiciones.
- **Calibración:** Es el proceso de comparar la indicación de un instrumento o el valor de una medida material contra el valor indicado por un patrón bajo condiciones específicas.
- **Trazabilidad:** Cadena ininterrumpida de comparaciones con una serie de patrones de mayor nivel con incertidumbres conocidas.

<sup>2</sup> DA SILVA G.S.M.: Basic metrology for ISO-9000 certification, USA, Ed. Butterworth Heinemann, 2002, capítulo 2.

- **Resolución** En un instrumento de medición, es la diferencia más pequeña entre dos indicaciones de la escala.
- **Discriminación:** Es la capacidad de un instrumento de medición para responder a pequeños cambios de la cantidad de entrada.
- **Sensibilidad:** En un instrumento de medición, es la cantidad numérica que representa la razón de cambio en la respuesta con respecto a un cambio en la entrada.
- **Repetibilidad:** En un instrumento de medición, es el grado de concordancia entre los resultados de mediciones sucesivas de un mismo mensurando efectuadas bajo las mismas condiciones como:
  - Mismo procedimiento.
  - Mismo instrumento de medición.
  - Mismas condiciones ambientales.
  - Mismo operador.
  - Mismo lugar.
- **Reproducibilidad:** Para un proceso de medición, es el grado de concordancia entre los resultados de mediciones de un mismo mensurando, efectuadas en condiciones diferentes.

## 4.2. Tipos de incertidumbre

El objetivo básico de realizar una medición es determinar el valor de una cantidad específica del mensurando, así que la medición tiene que realizarse con una especificación apropiada del mensurando y del método y procedimiento de medición.

El valor del mensurando no puede determinarse exactamente debido a los errores presentes en el proceso de medición, por lo que se obtiene una aproximación del valor del mensurando. Dicha estimación es completa sólo cuando se complementa con una indicación de su exactitud, que se llama *Incertidumbre*, definida como:

*“El parámetro asociado con el resultado de una medición que caracteriza la dispersión del valor que puede ser razonablemente atribuido al mensurando”<sup>3</sup>*

<sup>3</sup> Ibidem, p.194.

#### 4.2.1. Incertidumbre tipo A

La evaluación de la incertidumbre tipo A, está basada en un análisis estadístico de la repetición de pruebas del mensurando, obtenidas bajo las mismas condiciones de medición.<sup>4</sup>

Así pues en metrología la mejor estimación de una magnitud, que varía aleatoriamente, es la media aritmética de  $n$  medidas efectuadas y es calculada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \dots (4.1)$$

Los valores  $x_i$  difieren entre sí por causas de efectos aleatorios, que se presentan durante la medición.

La varianza estimada  $S^2(x_i)$  o la desviación estándar estimada  $S(x_i)$  caracterizan la variabilidad de los valores medidos  $x_i$ , siendo ésto una dispersión de los mismos en torno al valor medio. La varianza se obtiene mediante la expresión siguiente:

$$S_{x_i}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \dots (4.2)$$

Pero una mejor estimación de la varianza de la magnitud a medir es la varianza experimental de la media,  $\sigma^2(\bar{x})$ , que se representa como sigue:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{S_{x_i}^2}{n} \dots (4.3)$$

Así pues, la desviación estándar experimental de la media sirve para evaluar cuando un valor medio  $\bar{x}$  representa una magnitud a ser medida. Esta estimación es más certera cuando el número de repeticiones efectuadas de mediciones es mayor.

$$\sigma_{\bar{x}_i} = \sqrt{\sigma^2(\bar{x})} \dots (4.4)$$

Por razones económicas el número de repeticiones varía entre 3 y 10. Así que es necesario un coeficiente que tome en cuenta que la muestra es pequeña. Dicho coeficiente se llama **t de Student** y es dado en función de los grados de libertad  $\nu$ , con  $\nu=n-1$  al nivel de confianza  $p(t_p, \nu)$ . (Ver tabla de t de Student en apéndice E, donde los valores no mostrados pueden obtenerse mediante interpolación lineal).

La incertidumbre tipo A, determinada a partir de  $n$  mediciones de una magnitud  $x$ , para  $\nu$  grados de libertad y nivel de confianza  $p=95\%$  esta dada por:

$$U_A = \pm t_{95\%}(\nu) \cdot S_x \dots (4.5)$$

<sup>4</sup> KIMOTHI, S.K.: The Uncertainty of Measurement Physical and Chemical Metrology Impact and Analysis; Ed. American Society for Quality, USA, 2002, p.201.

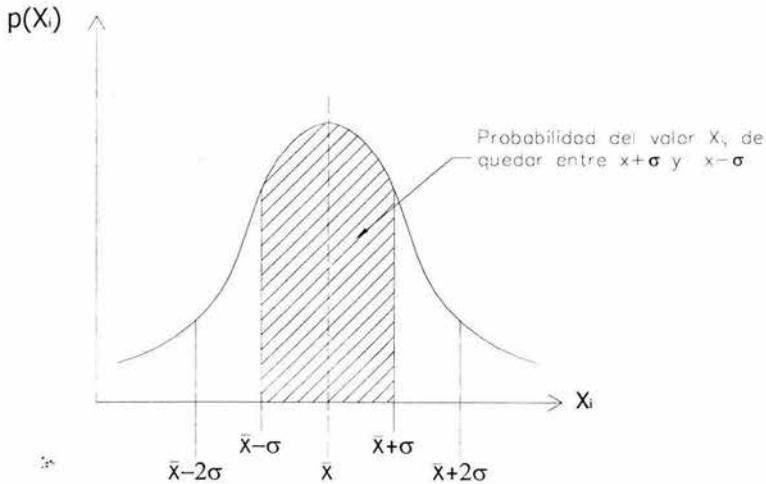


FIGURA 4-1. Nivel de confiabilidad.

Puede ocurrir que las  $n$  mediciones sean idénticas y en dicho caso la desviación estándar es cero. En este caso la incertidumbre de tipo A será evaluada como incertidumbre tipo B.

Si y sólo si la estimación de la incertidumbre de una magnitud  $X$  es obtenida a partir de información del manual de operación del fabricante, del certificado de calibración u otras fuentes de información; dicha información se considera como un múltiplo conocido de la desviación estándar.

Estos factores normalmente son 1,64; 1,96 y 2,58 para niveles de confianza de 90, 95 y 99% respectivamente.

En metrología para los cálculos de incertidumbre se usa un nivel de confianza de 95% y 1,96, éste último se redondea a 2, únicamente cuando se trata de evaluar incertidumbre tipo A.

#### 4.2.2. Incertidumbre tipo B

Las incertidumbres de este tipo son determinadas a partir de informaciones accesorias y externas al proceso de medición. Estas informaciones pueden ser obtenidas de resultados de mediciones similares anteriores, experiencia o conocimiento del comportamiento del instrumento, datos del fabricante, datos proporcionados por certificados de calibración, referencias de manuales de instrucción, etc.

Se recomienda que los componentes de este tipo de incertidumbre sean por lo menos los originados por las fuentes siguientes:

- Incetidumbre asociada al patrón de referencia y cualquier inestabilidad en su valor o indicación.
- Incetidumbre asociada al equipo de medida o calibración y al mensurando.



- c) Incertidumbre asociada al procedimiento de calibración.
- d) Incertidumbre asociada al efecto de las condiciones ambientales.

Tomando en cuenta las consideraciones siguientes:

1. Corregir los errores sistemáticos para minimizar la incertidumbre final.
2. Realizar un análisis crítico al adicionar una incertidumbre tipo B, para evitar duplicidad.
3. El nivel de confianza asociado a cada incertidumbre de este tipo se estandarizará para un 68%.

Para calcular la incertidumbre tipo B, se puede realizar mediante varios tipos de distribuciones de probabilidad, como son:

1. Distribución uniforme o rectangular.
2. Distribución trapezoidal simétrica.
3. Distribución triangular.

En muchos casos es posible estimar apenas los límites superior e inferior para  $x_i$  para establecer la probabilidad de que un valor permanezca en el intervalo  $a_i - a_s$ , tanto para efectos prácticos y para lograr que la probabilidad de que el valor  $x_i$  quede fuera de dicho intervalo sea prácticamente cero.

Si no se tiene idea clara y concisa de los posibles valores  $x_i$  dentro del intervalo, se puede asumir que es igualmente probable que  $x_i$  pueda estar en cualquier punto del intervalo, asociándole una **distribución uniforme o rectangular**, y atribuyéndole un número de grados de libertad infinito ( $\nu=\infty$ ).

En dicho caso,  $x_i$  es una estimación del valor esperado de  $x_i$ , y el punto medio del intervalo es

$$x_{xi} = \frac{a_i + a_s}{2} \dots (4.6)$$

con varianza

$$S_{xi}^2 = \frac{(a_s - a_i)^2}{12} \dots (4.7)$$

Si la diferencia entre los límites  $a_i - a_s$  es designada por  $2a$ , se tiene que:

$$S_{xi}^2 = \frac{a}{3} \dots (4.7.1)$$

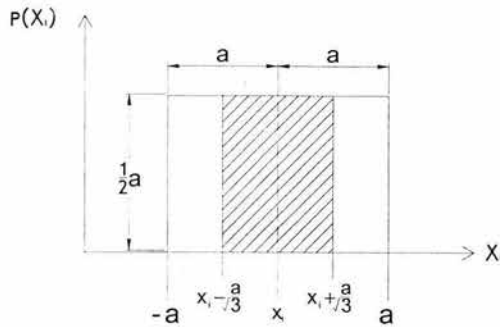


FIGURA 4-2. Distribución rectangular.

Algunos ejemplos de fuentes de incertidumbre con distribución rectangular son: gradientes de temperatura, resolución de instrumentos, histéresis, etc.

Las distribuciones de probabilidad con funciones escalonadas de este tipo a veces no tienen significado físico, siendo más realista admitir que los valores junto a los límites son menos probables que los valores próximos al centro. Así pues, es razonable sustituir una distribución rectangular simétrica por una **distribución trapezoidal simétrica** (trapezoido isósceles), con base mayor  $a_s - a_i = 2a$  y base menor  $2\beta a$ , con  $0 \leq \beta \leq 1$ . Si  $\beta \rightarrow 1$  la distribución trapezoidal se aproxima a una distribución rectangular, mientras que para  $\beta = 0$  es una **distribución triangular**.

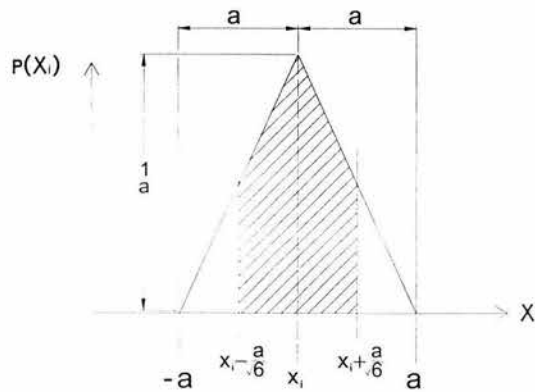


FIGURA 4-3. Distribución triangular.

Tomando una distribución trapezoidal para  $x_i$ , se tiene para la estimación de  $x_i$  el valor

$$x_i = \frac{a_i - a_s}{2} \dots (4.8)$$

con una varianza asociada de

$$S_{xi}^2 = \frac{a^2(1 + \beta^2)}{6} \dots (4.9)$$

En el caso de una distribución triangular  $\beta=0$ , se tiene una varianza asociada de la forma siguiente:

$$S_{xi}^2 = \frac{a^2}{6} \dots (4.10)$$

En este caso se tienen grados de libertad infinitos ( $v=\infty$ ), ya que dentro del intervalo la estimación puede asumirse como cualquier valor.

#### 4.2.3. Incertidumbre combinada

La incertidumbre combinada esta dada por la ley de propagación de incertidumbre, que está basada en la expansión de series de Taylor de una función, comúnmente utilizada en cálculo diferencial. El proceso de medición puede ser modelado con la expresión matemática siguiente:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots (4.11)$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son el número de cantidades de entrada cuantificables e  $y$  es la cantidad que finalmente se desea medir. Cada variable de entrada  $x_i$  tiene su propia distribución de probabilidad. Como una distribución de probabilidad es caracterizada por su valor medio y su varianza; cada una de las variables  $x_i$  tiene un valor medio  $\bar{x}_i$  y su varianza  $u_{xi}^2$ . Con la variable de salida  $y$  ocurre lo mismo, se tiene un valor medio  $\bar{y}$  y su varianza asociada  $u_c^2(y)$ . La variable de salida tiene su propia distribución de probabilidad, la cual depende de la distribución de probabilidad de las variables de entrada y la naturaleza de sus relaciones funcionales.

Conociendo el valor medio  $\bar{x}_i$  de las diferentes cantidades de entrada, la mejor estimación de la variable de salida  $y$  se obtiene sustituyendo los valores de  $\bar{x}_i$ , en lugar de  $x_i$ . Así pues, el valor  $\bar{y}$  es la mejor estimación del valor del mensurando:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \dots (4.12)$$

evaluado en  $x_1 = \bar{x}_1$ , , etc.

La expansión en series de Taylor es un método comúnmente utilizado para expresar una función no lineal como una función lineal, obteniendo excelentes resultados si el término de mayor orden se extiende hasta infinito. No obstante, en la mayoría de los casos relacionados con

mediciones físicas, las series de Taylor son truncadas en el término de primer orden, y raramente, en el de segundo orden.

Así, la relación  $y=f(x_i)$  puede escribirse como sigue, al utilizar la expansión en serie de Taylor:

$$y - \bar{y} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x_1 - \bar{x}_1) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (x_n - \bar{x}_n) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x_i - \bar{x}_i) \quad \dots (4.13)$$

Los términos  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ , se evalúan en el valor medio  $\bar{x}_i$  de cada una de las variables de entrada.

La varianza de  $y$  se obtiene de la solución de la siguiente ecuación:

$$\sigma_y^2 = \int (y - \bar{y})^2 f_y dy \quad \dots (4.14)$$

donde la ecuación (4.14) es la varianza combinada de  $y$ , y  $f_y$  es la función de distribución de probabilidad de la variable dependiente  $y$ .

Sin entrar en detalles de la teoría estadística, en la varianza de  $y$  se tienen dos casos.

#### **Caso 1: Variables de entrada no correlacionados.**

Si dos o más variables de entrada son independientes y no correlacionadas, la incertidumbre estándar combinada  $u_c(y)$  es la raíz cuadrada positiva de la varianza combinada  $u_c^2(y)$ , la cual se obtiene de la ecuación siguiente:

$$u_c^2(y) = \sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i) \quad \dots (4.15)$$

El término  $u(x_i)$  es la incertidumbre estándar para la componente  $x_i$  y puede obtenerse según sea el tipo de evaluación de incertidumbre, A o B. El término  $u_c(y)$  es la estimación de la desviación estándar de la distribución de probabilidad de  $y$ .

El término  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$  es el coeficiente de sensibilidad que describe como varía la salida estimada  $y$  al variar los valores estimados de entrada.

La ecuación (4.15) se conoce como la *ley de propagación de incertidumbre*. Si la no linealidad de  $f$  es significativa, el término de mayor orden en la expansión de las series de Taylor se debe incluir en la expresión (4.15). Si la distribución de  $x_i$  es simétrica con respecto a la media, el término de segundo orden se debe sumar en la ecuación (4.15).

$$\sum \sum \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \bullet u^2(x_i) \bullet u^2(x_j) \right] \dots (4.16)$$

### Caso2: Variables de entrada correlacionadas.

La relación entre dos variables aleatorias se llama *correlación*. Si cambia en un valor una de las variables aleatorias, provoca un cambio en la misma dirección o en dirección opuesta en el valor de la otra variable aleatoria, por lo que se entiende que existe correlación entre dichas variables. Por ejemplo, la temperatura ambiente y la humedad relativa.

La dependencia mútua de dos variables aleatorias que están correlacionadas se caracteriza por un parámetro llamado **covarianza**. El término *covarianza* es análogo a la varianza de una variable aleatoria, y su valor es estimado a partir de  $n$  observaciones repetidas simultáneamente.

Si  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , hasta  $(x_n, y_n)$  son observaciones simultáneas de dos variables aleatorias, su covarianza  $s(x, y)$  se estima con la ecuación siguiente:

$$s(x_i, y_i) = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \bullet (y_i - \bar{y})}{(n-1)} \dots (4.17)$$

El término **coeficiente de correlación** se utiliza frecuentemente como una medida de la dependencia mútua de dos variables, y se representa con la siguiente ecuación:

$$r(x_i, y_i) = r(y_i, x_i) = \frac{s(x_i, y_i)}{s(x_i) s(y_i)} \dots (4.18)$$

El coeficiente de correlación es un número que se encuentra dentro del intervalo de  $-1$  a  $1$ .

La ley de propagación de la incertidumbre para variables de entrada correlacionadas se da como sigue:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \bullet u(x_i, x_j) \dots (4.19)$$

donde el término  $u(x_i, x_j)$  es la covarianza; y cuando los términos son independientes (no correlacionados),  $u(x_i, x_j) = 0$ .

La mejor manera de combinar los diversos componentes de incertidumbre es a través de la tabulación de las incertidumbres estandarizadas de cada tipo, utilizando el concepto de grados de libertad efectivos para determinar el coeficiente de cobertura que corresponde a un intervalo de confianza del 95%. Dicha determinación se basa en la ecuación de Welch-Satterthwaite:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^n \frac{u_i^4(y)}{v_i}} \dots (4.20)$$

#### 4.2.4. Incertidumbre expandida

La incertidumbre expandida es análoga al intervalo de confianza del resultado de una medición. Se obtiene multiplicando el valor de incertidumbre combinada  $U_c(y)$  por el factor de cobertura  $k$ .

El factor de cobertura  $k$ , se obtiene de la tabla  $t$  de Student, con los grados de libertad efectivos ( $v_{\text{eff}}$ ), obtenidos de la ecuación anterior, para un nivel de confianza del 95%.

$$U = k \cdot u_c(y) \dots (4.21)$$

El resultado de la medición se expresa como sigue:

$$y \pm U \dots (4.22)$$

con un intervalo de confianza del 95%, donde por lo general el factor de cobertura toma valores dentro del rango 2-3.

De lo anteriormente expuesto, el **procedimiento de evaluación de incertidumbre acorde a la GUM<sup>5</sup>** queda como sigue:

1. Definir el mensurando.

2. Identificar todas las variables que influyen en el proceso de medición y contribuyen a la incertidumbre. Por ejemplo: el mensurando puede ser medido directamente usando un equipo de medición. Otras veces el mensurando es calculado a partir de valores intermedios, que se obtienen de fuentes externas tales como certificados de calibración, tablas de datos, manuales, etc.

3. Establecer un modelo matemático que relacione las variables de entrada y el mensurando. El modelo debe cubrir los parámetros intermedios, así como otros factores que influyen en el resultado de la incertidumbre.

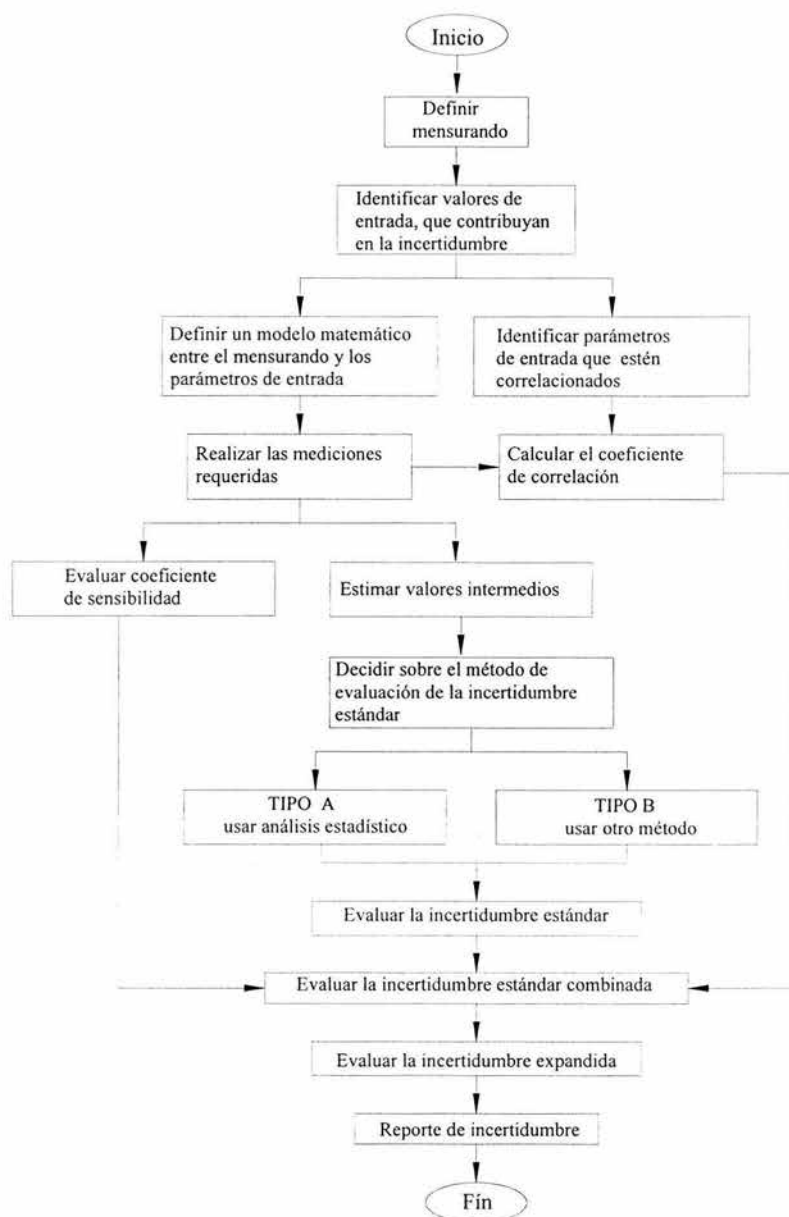
$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i)$$

4. Determinar un valor estimado de los valores de las variables de entrada  $x_i$ . Cada valor  $x_i$  de entrada incluye una corrección para los efectos sistemáticos que influyen significativamente en la estimación y del mensurando.

<sup>5</sup>KIMOTHI, S.K.: The Uncertainty of Measurement, Physical and Chemical Metrology Impact and Analysis; Ed. American Society for Quality, USA, 2002, p.p.212-213.

5. Evaluar la incertidumbre estándar  $u(x_i)$  para cada entrada estimada como incertidumbre tipo A o tipo B, según sea el caso.
6. Evaluar los coeficientes de sensibilidad.
7. Si las variables de entrada tienen correlación, hay que evaluar el coeficiente de correlación.
8. Calcular el valor estimado  $\bar{y}$  del mensurando a partir de la relación funcional  $f$  y la estimación de  $\bar{x}_i$  de las variables de entrada.
9. Evaluar la *incertidumbre combinada estándar* del resultado de medición  $y$  a partir de las *incertidumbres estándar* y el *coeficiente de sensibilidad* de las variables de entrada usando la *ley de propagación de incertidumbre*. Si los parámetros de entrada están correlacionados, se encuentra el coeficiente de correlación. Encontrar la incertidumbre combinada estándar usando la ley de propagación de incertidumbres para parámetros de entrada correlacionados.
10. Al reportar la *incertidumbre expandida*, se multiplica la incertidumbre combinada por el factor de cobertura  $k$ , el cual se encuentra dentro de un intervalo de 2 a 3. El valor de  $k$  se selecciona según el nivel de confianza que se le asocia al intervalo.
11. Reportar el resultado de la medición  $\bar{y}$  junto con su incertidumbre estándar  $u_c(y)$  o con su incertidumbre expandida  $U$ .

El procedimiento descrito anteriormente se resume en el diagrama de flujo siguiente:





### 4.3. Cálculo de la incertidumbre del Interferómetro Fizeau

#### Incetidumbre tipo A.

La media de los resultados obtenidos en el capítulo III, es:

$$\bar{x} = 57nm = \frac{1}{11} \lambda = 0,09\lambda$$

Con una desviación estándar de:

$$S_x = 10nm = \frac{1}{63} \lambda = 0,016\lambda$$

La desviación estándar de la media según la ecuación (4.4):

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{10nm}{\sqrt{11}} = 3nm$$

Este valor es muy parecido al resultado obtenido por V.A. Grigor'ev y Ya. O. Zaborov<sup>6</sup>, utilizando el mismo número de eventos con un 95% de nivel de confiabilidad; aplicando la distribución t de Student.

El modelo matemático es:

$$U_{F_{INT}} = U_{F_{EST}} + U_{F_{PO}} + U_{F_{PL}} + U_{\lambda_{LI}} \dots (4.23)$$

donde

$U_{F_{INT}}$  : incertidumbre asociada al interferómetro Fizeau

$U_{F_{EST}}$  : incertidumbre de planitud por repetibilidad.

$U_{F_{PO}}$  : incertidumbre de planitud del plano óptico del interferómetro Fizeau, obtenida del certificado de calibración.

$U_{F_{PL}}$  : incertidumbre de planitud del plano líquido

$U_{\lambda_{LI}}$  : incertidumbre por estabilidad de la longitud de onda promedio de la fuente láser

<sup>6</sup> GRIGORÉV, V.A., Zaborov, Ya. O.: "Use of a liquid mirror for the calibration of an interferometer having a plane comparison wavefront", en: Soviet Journal Optic Technology, USA, Vol. 53, No. 10, octubre, 1986, p. 615.

Incertidumbre Tipo B

1. Incertidumbre estándar del plano óptico del interferómetro Fizeau: **5,7nm**.<sup>7</sup>

$$U_{F_{PO}} = \frac{5,7nm}{\sqrt{3}} = 3,3nm \quad (\text{distribución rectangular})$$

2. Incertidumbre estándar del plano líquido: **2,25nm**. (ver capítulo II).

$$U_{F_{PL}} = \frac{2,25nm}{\sqrt{3}} = 1,3nm \quad (\text{distribución rectangular})$$

3. Incertidumbre por estabilidad de la longitud de onda promedio del láser:  $1 \times 10^{-6} \lambda$ ,<sup>8</sup> donde  $\lambda=633nm$ : **0,000633nm**.

$$U_{\lambda_{L1}} = \frac{0,000633nm}{\sqrt{3}} = 0,0nm \quad (\text{distribución rectangular})$$

Tabla de incertidumbres obtenidas:

Fuente de Incertidumbre	Tipo	Incertidumbre Estándar ( $U_x$ )	Grados de Libertad ( $\nu_x$ )	Coefficiente de Sensibilidad ( $C_x$ )	( $U_x \times C_x$ )
$U_{F_{EST}}$	A	3nm	10	1	1
$U_{F_{PO}}$	B	3,3nm	$\infty$	1	1
$U_{F_{PL}}$	B	1,3nm	$\infty$	1	1
$U_{\lambda_{L1}}$	B	0,0nm	$\infty$	1	1

Incertidumbre combinada

$$U_c(F_{INT}) = (3^2 + 3,3^2 + 1,3^2 + 0^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$U_c(F_{INT}) = 5nm$$

<sup>7</sup> Obtenida del certificado de calibración del mismo, rms=0.009 $\lambda$ .

<sup>8</sup> WILLIAMS, D.C.: Optical Methods in Engineering Metrology, Ed. Chapman & Hall, London, 1993, p. 477.

Y sus grados de libertad efectivos son los siguientes:

$$v_{eff} = \frac{(5)^4}{\frac{(3)^4}{10} + \frac{(3,3)^4}{\infty} + \frac{(1,3)^4}{\infty} + \frac{(0)^4}{\infty}}$$

$$v_{eff} = 77$$

### Incertidumbre Expandida

Con  $v_{eff} = 77$ , se tiene  $k=2$ , con un nivel de confianza del 95%, según tabla de la distribución de t de Student anexa en el apéndice E.

$$U = 2 \times 5nm$$

$$U = 10nm \approx \frac{\lambda}{63}$$

Por lo que el resultado de la calibración del interferómetro Fizeau es:

$$F_{INT} = 57 \pm 10nm$$

o bien,

$$F_{INT} = \frac{\lambda}{11} \pm \frac{\lambda}{63}$$

---

---

## ***CAPITULO V***

***Conclusiones***

---

---

## 5. Conclusiones

---

Partiendo de la hipótesis sustentada en el trabajo realizado, la cual pretendía demostrar que la superficie libre de un líquido puede utilizarse como patrón absoluto de planitud para realizar una calibración al Interferómetro Fizeau Davison Optronics D305, del Laboratorio de Metrología del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET) de la UNAM, se encontró que dicha superficie *cumple con los requisitos para ser un patrón de planitud confiable y se puede utilizar como patrón absoluto de planitud*; aunque por sus propiedades físicas tiene algunas restricciones importantes para su manejo, que deben ser controladas adecuadamente para conseguir resultados confiables.

Las vibraciones inherentes al sistema (ondas debidas a la gravedad), vibraciones externas, efectos por capilaridad (menisco), partículas de polvo y diferencias de temperatura, son algunos de los factores de influencia que pueden ser controlados y evitar que afecten de manera significativa las mediciones que se realicen.

Las vibraciones se controlan a partir de conocer la frecuencia natural de oscilación del *PL*. Mediante el conocimiento de su valor, puede calcularse el amortiguamiento necesario para que las vibraciones externas no perturben la superficie libre del *PL*. Así pues, las condiciones de trabajo del *LA* se diseñan de tal manera que las vibraciones externas no alcancen el valor de la frecuencia natural de oscilación del *PL*, evitando además que el recipiente que contiene al *PL* tenga contacto con superficies rígidas que le pudieran transmitir vibraciones no deseadas directamente, afectando considerablemente su estabilidad. Todo el sistema *SEL* e Interferómetro Fizeau, se montan en la mesa de medición de la máquina de medir por tres coordenadas, que se encuentra a su vez aislada de la cimentación del edificio. De esta manera se logró *estabilizar el PL en forma rápida, evitando al máximo las excitaciones externas*. Ello permite obtener interferogramas de *excelente calidad*, que al ser medidos arrojan valores de desviación de planitud con *dispersión muy pequeña*, con un intervalo de confianza de  $\pm 7\text{nm}(\pm 0,01\lambda)$ .

Por otro lado, los efectos de capilaridad observados en el menisco que se forma entre la pared del recipiente cilíndrico del *PL* y el *líquido espejo*, tiene dos efectos importantes que han de tomarse en cuenta dentro del diseño del *SEL*. El primero es el debido a la curvatura que se genera en la superficie libre del líquido que como se vió en el capítulo 2; geométricamente se puede considerar despreciable al tener un valor de  $2\text{nm}$ , lo que determina que para fines prácticos la superficie libre del *PL* es una plano físico. El segundo punto importante, son los efectos por aristas, los cuales puedan afectar en las mediciones que se realicen con el *SEL*, ya que este efecto se evita creciendo en diez milímetros el tamaño del plano líquido respecto al tamaño del plano del instrumento que se calibrará, puesto que la longitud del menisco es de  $151\text{nm}$ . Estos resultados permiten determinar que la superficie libre de un líquido cumple con los requisitos para ser un *patrón absoluto de planitud ó plano patrón absoluto*.

Por otra parte, las partículas de polvo que se depositan sobre la superficie del plano líquido, ocasionan que el patrón de interferencia generado se distorsione, mostrando en lugar de franjas de interferencia un patrón circular de interferencia alrededor de la partícula depositado sobre el *PL*. Por ello, se hizo necesario dotar al *SEL* de una cubierta de plástico que impidiera que se depositaran

partículas de polvo o pelusas sobre la superficie del *PL*, así como evitar que corrientes de aire perturben la superficie libre del *PL*, o sea, que los esfuerzos cortantes producidos por éstas, ocasionen que se formen ondas en la superficie del *PL*.

Por otro lado, las variaciones de temperatura en el interior del laboratorio, no afecta a las propiedades físicas de los líquidos utilizados ya que como se muestra en la figura 2-4, un cambio de  $\pm 0,5^{\circ}\text{C}$  en el medio ambiente del laboratorio no tiene afectos en las propiedades físicas de los aceites (*PL* y *LA*).

Una limitante para el desarrollo del SEL en el caso que se analiza en este trabajo, se refiere a las dimensiones de los diámetros que ambos recipientes deben tener, para resultar de un tamaño adecuado de tal manera que puedan montarse fácilmente sobre la mesa de trabajo del interferómetro Fizeau. Esta situación se soluciona con la ecuación (2.8.18), donde se especifica que la frecuencia de oscilación del *LA*, debe ser de  $\frac{3}{4}$  de la frecuencia del *PL*. Tomando en cuenta esta consideración, se obtiene un sin fin de combinaciones posibles para obtener el SEL. Dicha condición se muestra en las gráficas de selección del apartado 2.5.3, las cuales muestran varias configuraciones del SEL, que con base en las condiciones requeridas se puede obtener, de forma rápida y sencilla, una idea general del SEL requerido. Para obtener el SEL óptimo, es necesario utilizar el programa de selección del SEL, que se muestra en el apartado 2.5.4; con ayuda de los valores aproximados que se obtienen de las gráficas de selección.

Así pues, el dispositivo propuesto en este trabajo para realizar una calibración absoluta mediante un plano líquido, está dotado de un excelente grado de repetibilidad que permite obtener cualquier número de repeticiones del proceso de calibración de forma confiable y exacta, lo que hace que este sistema sea fácil de usar para quienes tienen experiencia previa en el manejo del interferómetro.

Como se ha mencionado en el desarrollo de este trabajo, el *PL* se perturba muy fácilmente ante la presencia de excitaciones externas, lo que impide que se realicen mediciones directas al interferograma que se genera; por lo cual se tiene que tomar video de la medición y mediante la reproducción cuadro por cuadro en una computadora, se seleccionen las imágenes que presenten la mayor desviación de planitud observada en una inspección rápida. Por ello, se hace necesario procesar las imágenes de los interferogramas para definir claramente los bordes de sus franjas.

El procesamiento de las imágenes de los interferogramas, evita que durante las mediciones el operario afecte éstas por errores de apreciación, por lo que se cuenta con una metodología bien definida para evitarlos en las mediciones de planitud y que éstas sean lo más objetivas posible. Además, el procedimiento *MPT-42- Procedimiento para la calibración absoluta de un Interferómetro Fizeau, mediante un plano líquido* del CCADET de la UNAM, permite que cualquier usuario calificado que desee realizar una calibración con el SEL, lo haga sin la necesidad de contar con una capacitación especializada sobre el instrumento; siguiendo solamente los pasos indicados en él.

Al tener sumo cuidado en el control de las perturbaciones del sistema y dotar al SEL de un procedimiento para su aplicación, se obtiene un excelente resultado de incertidumbre asociada al sistema que posee un valor de  $\pm 10\text{nm}$ . Este da un alto grado de confiabilidad al dispositivo propuesto para realizar una *calibración absoluta del Interferómetro Fizeau Davison Optronics mediante el PL*. La coincidencia de este resultado con los resultados obtenidos por Grigor'ev y por

---

Bunnagel, proporciona un buen grado de certeza para utilizar el SEL para realizar la calibración del interferómetro Fizeau en estudio.

Una ventaja adicional que tiene el SEL, en contraste con algunos dispositivos similares, es que para construirlo sólo se requiere dos recipientes cilíndricos, según lo requiera el cálculo de las dimensiones para el PL y el LA .

Este sistema es susceptible de mejoras, que por limitaciones de tiempo y por desviarse del objetivo del presente trabajo, se dejan para posibles trabajos posteriores. Las mejoras más importantes, según las necesidades observadas, son:

- Estudiar el sistema de amortiguamiento completo, incluyendo la cimentación, mesa de soporte, interferómetro y SEL;
- Diseñar un soporte mecánico especial para el SEL, que esté perfectamente aislado de vibraciones externas.

---

---

# ***Apéndices***

---



## **APENDICE A**

---

### **Glosario**

**Amplitud ( $a$ ):** La distancia entre la posición de equilibrio y la posición extrema ocupada por un cuerpo que oscila.

**Cresta y Valle:** Los puntos más altos de una onda se denominan *cresta*, y los puntos más bajos se llaman *valles*.

**Coherencia:** Es la propiedad inherente a un patrón de interferencia bien definido, donde la diferencia de fase entre los puntos sobre la pantalla no cambia con el tiempo.

**Espejo plano:** Una superficie lisa y plana que refleja especularmente la luz.

**Fase:** La relación de una onda sinusoidal respecto del tiempo.

**Patrón de interferencia:** La apariencia general de un grupo de franjas claras y oscuras.

**Frecuencia ( $f$ ):** Número de oscilaciones completas que un cuerpo efectúa por unidad de tiempo.

**Frente de onda:** Ondas generadas por una excitación externa, que se desplazan en dirección perpendicular en un medio uniforme.

**Longitud de onda ( $\lambda$ ):** Es la distancia recorrida por la onda durante un periodo  $T$ .

**Luz de helio:** La luz emitida por la excitación de átomos de helio.

**Luz monocromática:** Luz compuesta por una sola longitud de onda o color.

**Onda:** Serie de pulsos alternados (tiene una cresta y un valle).

**Onda de luz:** Un pulso de energía luminosa que se transmite en el espacio.

**Onda longitudinal:** Movimiento oscilatorio en la dirección de la propagación de la onda y en contra de ésta.

**Onda sinusoidal:** La forma gráfica de los pulsos de energía a lo largo de un rayo de luz.

**Onda transversal:** Onda en la cual la oscilación de los puntos se realiza en dirección perpendicular a la de propagación.

**Periodo ( $T$ ):** Tiempo que tarda en efectuarse una oscilación completa.

**Plano:** Superficies de referencia, usualmente pequeña, muy cercana a una superficie plana.

**Plano óptico:** Planos físicos de cuarzo, vidrio, zafiro, u otro material transparente.

## APENDICE B

### Propiedades de los fluidos

El estudio de los fluidos hoy en día es de vital importancia, ya que el estudio de su comportamiento permite al Ingeniero Mecánico darles un uso adecuado y una aplicación en tareas específicas. Ante la necesidad de conocer las propiedades y comportamiento de los fluidos surge la *Mecánica de fluidos*, rama de la mecánica que con la ayuda de herramientas matemáticas y las leyes fundamentales de la física, proveen de una base teoría para el estudio de los fluidos.

La Mecánica de fluidos se ocupa del estudio de los fluidos en movimiento o en reposo y los efectos consiguientes sobre los contornos, limitada por una superficie sólida u otro fluido<sup>1</sup>.

Hasta este momento se ha hablado de fluidos, pero ¿qué es un fluido?. Un fluido es aquella sustancia que debido a su poca cohesión intermolecular carece de forma propia, por lo que adopta la forma del recipiente que lo contiene.<sup>2</sup>

Por lo tanto un fluido no puede soportar un esfuerzo tangencial o cortante sobre su superficie sin que se perturbe, por pequeño que sea (líquidos y gases). Con los sólidos pasa lo contrario porque soportan esfuerzos cortantes considerables, presentando sólo una deformación elástica..

"Los líquidos a una presión y temperatura determinada ocupan un volumen determinado. Introducido el líquido en un recipiente adopta la forma del mismo, pero llenando sólo el volumen que le corresponde. Si sobre el líquido reina una presión uniforme, por ejemplo, la atmosférica, el líquido adopta,...., una superficie libre plana, como la superficie de un lago o la de un cubo de agua".<sup>3</sup>

Por otra parte, los gases a una presión y temperatura determinada tienen también un volumen determinado, pero puesto en libertad se expanden hasta ocupar el volumen completo del recipiente que lo contiene, y no presentan superficie libre".<sup>4</sup>

- *Densidad*: es la masa por unidad de volumen  $[\rho]_L = \left[ \frac{M}{L^3} \right] \dots (B.1)$
- *Peso específico*: es el peso por unidad de volumen  $[\gamma]_L = \rho g = \left[ \frac{M}{L^2 \cdot T^2} \right] \dots (B.2)$
- *Volumen específico*: es el recíproco de la densidad  $[v]_L = \left[ \frac{L^3}{M} \right] \dots (B.3)$

<sup>1</sup> WHITE, M. Frank: Mecánica de fluidos, México, Ed. McGraw Hill, 1988, p.1.

<sup>2</sup> MATAIX, Claudio: Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas, México, Ed. Harla, 1982, p.13.

<sup>3</sup> Ibid. p.13.

<sup>4</sup> Ibid. p.13.

• *Viscosidad dinámica*: como se dijo anteriormente, en los fluidos la deformación aumenta constantemente bajo la acción del esfuerzo cortante o tangencial, por pequeño que éste sea. Así pues, entre las moléculas de un fluido existen fuerzas moleculares que se denominan fuerzas de *cohesión*.

El desplazamiento de una moléculas con relación a las otras, se produce a causa de la fricción entre ellas. Por otro lado, entre las moléculas de un fluido en contacto con un sólido y las moléculas del sólido existen fuerzas moleculares que se denominan *fuerzas de adherencia*. El coeficiente de fricción interna de un fluido se denomina *viscosidad dinámica o absoluta* ( $\mu$ ).

$$[\mu]_L = \left[ \frac{F \cdot T}{L^2} \right] = \left[ \frac{M}{L \cdot T} \right] \dots (B.4)$$

$$1[\mu]_L = 1 \left[ \frac{N \cdot s}{m^2} \right] = 1[Pa \cdot s] \quad \therefore \quad 1cP = 10^{-2}P = 10^{-3}Pa \cdot s$$

El estudio de la viscosidad y de sus unidades se realiza mediante la ley de Newton, que cumplen los fluidos llamados *newtonianos*. (por ejemplo agua, aire, aceite, etc.).

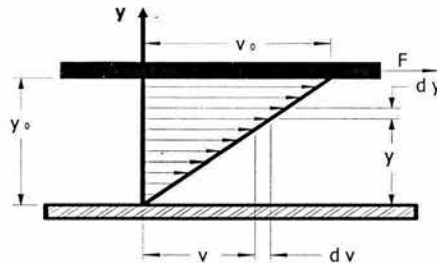


FIGURA B-1. Ley experimental de Newton.

$$F = A\mu \frac{dv}{dy} \dots (B.5)$$

donde F: fuerza aplicada; A: área de la placa,

$\frac{dv}{dy}$ : gradiente de velocidad y  $\frac{F}{A}$ : esfuerzo unitario cortante ( $\tau$ )

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \dots (B.6)$$

Por lo tanto, un fluido newtoniano es aquel fluido cuya viscosidad dinámica depende de la presión y la temperatura, pero no del gradiente de velocidad.

- **Viscosidad cinemática:** intervienen las fuerzas debidas a la viscosidad y las fuerzas de inercia que dependen de la densidad. Por dicha razón, es de vital importancia la viscosidad dinámica referida a la densidad, o sea la relación de la viscosidad dinámica ( $\mu$ ) a la densidad ( $\rho$ ) se denomina **viscosidad cinemática** ( $\nu$ ), y se expresa como sigue:

$$[\nu]_{\text{L}} = \left[ \frac{\mu}{\rho} \right] = \left[ \frac{L^2}{T} \right] \dots \text{(B.7)}$$

$$1cSt = 10^{-2} St = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

Así pues, la viscosidad dinámica de los fluidos varía mucho con la temperatura, si aumenta la temperatura, aumenta la viscosidad dinámica en los gases y disminuye en los líquidos; pero en ambos es independiente de la presión. Pero en la viscosidad cinemática, para los gases varía mucho con la presión y la temperatura, mientras que en los líquidos sólo varía con la temperatura.

- **Tensión superficial:** es una fuerza que se produce en la superficie de los líquidos, cuando el fluido entra en contacto con otros fluidos no miscibles (líquido o gas) o con un contorno sólido. El origen de dicha fuerza es la cohesión intermolecular y la fuerza de adhesión del fluido con el sólido. En la superficie libre de un líquido, superficie de contacto entre un líquido y aire, la tensión superficial ( $\sigma$ ), se manifiesta en el líquido como una fina membrana.

$$[\sigma]_{\text{L}} = \left[ \frac{F}{L} \right] \dots \text{(B.8)}$$

La tensión superficial explica la formación de gotas, los fenómenos de formación de menisco y la elevación del líquido en tubos capilares.

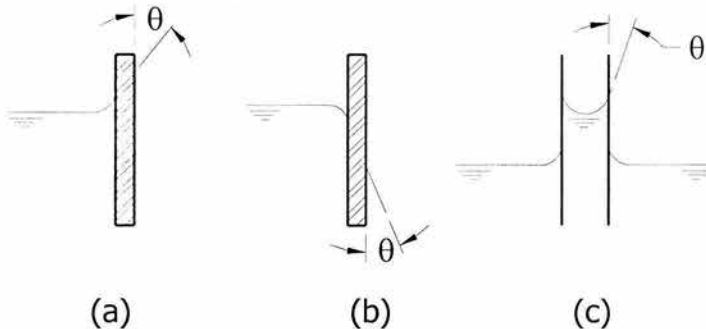


FIGURA B-2. Fenómenos debidos a la tensión superficial: (a) líquido que moja la superficie; (b) líquido que no moja la superficie; (c) elevación capilar.

Un efecto importante es el **ángulo de contacto** ( $\theta$ ), que aparece cuando la interfase llega hasta una pared sólida. Si el ángulo de contacto es menor de  $90^\circ$ , el líquido *moja* al sólido. Si es mayor de  $90^\circ$  *no moja*.

## APENDICE C

### Dinámica de fluidos

#### Ecuación de continuidad

El principio de conservación de la masa, expresa que no puede aparecer o desaparecer masa en el interior de un volumen de control, a menos que haya pasado a través de la superficie que delimita sus fronteras. Con la ayuda de la figura C-1, se obtendrá dicha ecuación.

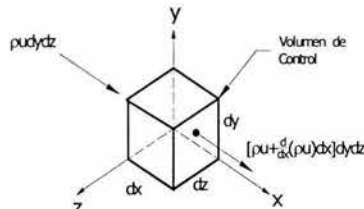


FIGURA C-1. Elemento diferencial.

Cada una de las caras del elemento diferencial, se tiene lo siguiente:

Cara	Flujo másico de entrada	Flujo másico de salida
x	$\rho dy dz$	$\left[ \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \right] dy dz$
y	$\rho v dx dz$	$\left[ \rho + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy \right] dx dz$
z	$\rho w dx dy$	$\left[ \rho + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dz \right] dx dy$

Utilizando la ecuación de volumen de control para la conservación de la masa:

$$\frac{dm}{dt} = 0 = \iiint_{vc} \frac{d}{dt} \rho dV + \iint_{sc} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \dots (C.1)$$

Como  $\iiint_{vc} \frac{d}{dt} \rho dV \approx \frac{d\rho}{dt} dx dy dz$  por ser un elemento infinitesimal y como

$$\iint_{sc} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \iiint_{vc} \rho \operatorname{div} \vec{v} dV = \iiint_{vc} \rho (\nabla \cdot \vec{v}) dV \text{ por el Teorema de Gauss.}$$

$$\iiint_{VC} \frac{d\rho}{dt} dV + \iiint_{VC} \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{v} dV = 0 \quad \dots (C.1.1)$$

Por lo tanto, considerando un volumen unitario,  $x=1$ ,  $y=1$  y  $z=0$ , así pues se tiene:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) \right) dx dy dz = 0 \quad \dots (C.1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{u} = 0 \quad \text{Ecuación de continuidad} \quad \dots (C.2)$$

Si se tienen los vectores unitarios;  $e_r = \text{grad}r$ ,  $e_\theta = r \text{grad}\theta$  y  $e_z = \text{grad}z$  y además se cuenta con los factores de conversión de  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $\theta = \text{ang.tany/x}$  y  $z = z$ ; se encuentra la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad \dots (C.2.1)$$

*Ecuación de la cantidad de movimiento*

Realizando el análisis para la ecuación de continuidad, para la ecuación de la cantidad de movimiento, se puede realizar más rápido, utilizando el mismo elemento diferencial de la figura C-1, por lo tanto se tiene que:

$$\sum \bar{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_{VC} \bar{v} \rho dV \right) + \sum (m_i \bar{v}_i)_{\text{salida}} - \sum (m_i \bar{v}_i)_{\text{entrada}} \quad \dots (C.3)$$

Tomando la misma consideración respecto al primer término de lado derecho; por ser un elemento de volumen de control tan pequeño.

Cara	Flujo másico de entrada	Flujo másico de salida
X	$\rho u \bar{V} dy dz$	$\left[ \rho u \bar{V} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \bar{V}) dx \right] dy dz$
Y	$\rho v \bar{V} dx dz$	$\left[ \rho v \bar{V} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \bar{V}) dy \right] dx dz$
Z	$\rho w \bar{V} dx dy$	$\left[ \rho w \bar{V} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \bar{V}) dz \right] dx dy$

$$\text{Se tiene: } \sum F = dx dy dz \left[ \frac{d}{dt}(\rho \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \bar{V}) \right] \dots \text{(C.4)}$$

Que se reduce a:

$$\sum \bar{F} = dx dy dz \left[ \bar{V} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) \right] + \rho \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right) \right] \dots \text{(C.4.1)}$$

donde  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0$  ecuación de continuidad y

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}$$

por lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$\sum \bar{F} = \rho \frac{d\bar{V}}{dt} dx dy dz \dots \text{(C.4.2)}$$

Existen dos tipos de fuerzas que actúan sobre el elemento infinitesimal, que son: fuerzas másicas y de superficie; como en este caso sólo se consideran una única fuerza másica, se tiene:

$$dF_{\text{gravedad}} = \rho \bar{g} dx dy dz \dots \text{(C.5)}$$

Y para las fuerzas de superficie tenemos:

$$\left( \frac{dF}{dv} \right)_{\text{sup}} = -\bar{\nabla} p + \bar{\nabla} \cdot \tau_{ij} \dots \text{(C.6)}$$

Por lo que, la **ecuación de la cantidad de movimiento** es:

$$\rho \bar{g} - \bar{\nabla} p + \bar{\nabla} \cdot \tau_{ij} = \rho \frac{d\bar{V}}{dt} \dots \text{(C.7)}$$

Para flujos no viscosos (Ecuación de Euler),  $\tau_{ij}=0$ .

*Flujo irrotacional no viscoso y potencial de velocidades.*

Cuando un flujo es irrotacional, ocurre que  $\bar{\nabla} \times \bar{V} = \bar{0}$  y cuando es no viscoso se tiene que  $\tau_{ij}=0$ , por lo que la ecuación de la cantidad de movimiento queda como sigue:

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = \rho \bar{g} - \bar{\nabla} p \dots \text{(C.7.1)}$$

Para poder simplificar, se modifican algunos términos como sigue:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V} \dots \text{(C.8)}$$

donde  $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \nabla\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \zeta \times \vec{V}$ , donde  $\zeta = \text{rot}\vec{V} = \nabla \times \vec{V}$ , y que es la *vorticidad local* del fluido.

Sustituyendo las modificaciones en la ecuación de cantidad de movimiento de este apartado, dividiendo por  $\rho$  y multiplicando toda la ecuación por  $d\vec{r}$  se tiene

$$\left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \zeta \times \vec{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p - g \right] \cdot d\vec{r} = 0 \quad \dots \text{(C.9)}$$

Por ser un flujo irrotacional  $(\zeta \times \vec{V}) \cdot d\vec{r} = 0$  y donde  $d\vec{r}$  es perpendicular a  $\zeta \times \vec{V}$  y también  $d\vec{r}$  es paralelo a  $\vec{V}$ , y además se toma por conveniencia  $\vec{g} = g\hat{k}$ ; se integra a lo largo de una línea de corriente, se tiene la *ecuación de Bernoulli para flujo no estacionario*:

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0 \quad \dots \text{(C.10)}$$

Donde  $ds$  es elemento de longitud a lo largo de la línea de corriente. Lo que da para un flujo estacionario:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = \text{constante en línea de corriente} \quad \dots \text{(C.11)}$$

La irrotacionalidad da lugar a una función escalar  $\phi$ , donde  $\phi = \phi(x, y, z)$  se denomina **potencial de velocidades**.

Entonces si  $\nabla \times \vec{V} = 0$ , entonces se tiene que  $\vec{V} = \nabla\phi$ , lo que denota que un vector con rotacional nulo es el gradiente de una función escalar (por un teorema de análisis vectorial).

Por lo tanto conocida  $\phi$ , se pueden obtener los componentes de velocidad.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \dots \text{(C.12)}$$

Así pues, la ecuación de Bernoulli en términos del potencial de velocidades es:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla \phi^2 + gz = \text{constante} \quad \dots \text{(C.10.1)}$$



## APENDICE D

### Solución de ecuaciones diferenciales

D.1.1. Solución de la ecuación de Laplace (2.8.5a), de la página 47.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Con las siguiente condición:

$$\text{Condición cinemática: } \frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial y} = -\varepsilon \frac{2\pi c}{\lambda} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right]$$

La  $\frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial y}$  varía según  $\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right]$  con una constante  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

Se usa una solución de la forma siguiente:

$$\phi(x, y, t) = X(x)Y(y) = XY \dots (D.1)$$

Tomando la ecuación de Laplace, se realiza la operación siguiente:  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$

Y se realiza un cambio de variable según la ecuación (D.1), se tiene que

$$YX'' = -XY''$$

Reacomodando términos  $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \alpha$ , donde  $X \neq 0$  y  $Y \neq 0$ .

Para obtener la *solución homogénea*, se utiliza la tricotomía propuesta en el párrafo anterior.

En x	En y
$X'' - \alpha X = 0$	$Y'' + \alpha Y = 0$
Aplicando el operador diferencial $(D^2 - \alpha)x = 0$	Aplicando el operador diferencial $(D^2 + \alpha)y = 0$
Sustituyendo para encontrar los eigenvalores $\lambda^2 - \alpha = 0$	Sustituyendo para encontrar los eigenvalores $\lambda^2 + \alpha = 0$
$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$	$\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\alpha}$

Así pues, la solución homogénea, para cada variable queda como sigue:

$X(x) = C_1 e^{x\sqrt{\alpha}} + C_2 e^{-x\sqrt{\alpha}}$	$Y(y) = C_3 e^{y\sqrt{\alpha}} + C_4 e^{-y\sqrt{\alpha}}$
---	---

A continuación se describen las ecuaciones de Euler, para numero complejos.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$$

Aplicando las ecuaciones de Euler, a las solución propuesta (D.1), se tiene lo siguiente, cuando  $\alpha > 0$ .

$$\phi(x, y, t) = (C_1 e^{x\sqrt{\alpha}} + C_2 e^{-x\sqrt{\alpha}}) (C_3 \cos\sqrt{\alpha}y + iC_3 \operatorname{sen}\sqrt{\alpha}y + C_4 \cos\sqrt{\alpha}y - iC_4 \operatorname{sen}\sqrt{\alpha}y)$$

Reduciendo la ecuación mediante términos semejantes,

$$\phi(x, y, t) = (C_1 e^{x\sqrt{\alpha}} + C_2 e^{-x\sqrt{\alpha}}) [(C_3 + C_4) \cos\sqrt{\alpha}y + (C_3 - C_4) \operatorname{sen}\sqrt{\alpha}y]$$

donde  $(C_3 + C_4) = C_5$  y  $(C_3 - C_4) = C_6$ , así pues la ecuación queda de la manera siguiente.

$$\phi(x, y, t) = (C_1 e^{x\sqrt{\alpha}} + C_2 e^{-x\sqrt{\alpha}}) (C_5 \cos\sqrt{\alpha}y + C_6 \operatorname{sen}\sqrt{\alpha}y); \quad \alpha > 0 \quad \dots (D.2)$$

Para el caso  $\alpha < 0$ , se realizan los mismos pasos anteriores, y se tiene como resultado lo siguiente:

$$\phi(x, y, t) = (C_1 \cos\sqrt{\alpha}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\alpha}x) (C_5 e^{y\sqrt{\alpha}} + C_6 e^{-y\sqrt{\alpha}}) \quad \dots (D.3)$$

Se utiliza la ecuación (D.3) para resolver el problema planteado en este trabajo, y se aplica a la condición cinemática.

$$\frac{\partial\phi(x, y, t)}{\partial y} = (C_1 \cos\sqrt{\alpha}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\alpha}x) (C_5 \sqrt{\alpha} e^{y\sqrt{\alpha}} - C_6 \sqrt{\alpha} e^{-y\sqrt{\alpha}}) \quad \dots (D.4)$$

Sustituyendo  $y=0$ , en la ecuación (D.4), se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial\phi(x, 0, t)}{\partial y} = (C_1 \cos\sqrt{\alpha}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\alpha}x) (C_5 \sqrt{\alpha} e^0 - C_6 \sqrt{\alpha} e^0)$$

Simplificando la ecuación, se tiene que:

$$\frac{\partial\phi(x, 0, t)}{\partial y} = (C_1 \cos\sqrt{\alpha}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\alpha}x) (C_5 - C_6) \sqrt{\alpha}$$

Igualando al segundo término de la condición cinemática, se obtiene la ecuación siguiente:

$$(C_1 \cos\sqrt{\alpha}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\alpha}x) (C_5 - C_6) \sqrt{\alpha} = -\varepsilon c \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right]$$

Igualando términos, se obtienen las igualdades siguientes:

$$(C_1 \cos\sqrt{\alpha}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\alpha}x) = \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right] \quad \dots (D.5)$$

$$(C_5 - C_6) \sqrt{\alpha} = -\varepsilon c \frac{2\pi}{\lambda} \quad \dots (D.6)$$

De la ecuación (D.5), se obtiene la igualdad siguiente.

$$C_1 \cos\sqrt{\alpha}x = \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right] \quad \dots (D.7)$$

$$C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\alpha} x = 0 \quad \dots (D.8)$$

De la ecuación (D.7), se determina lo siguiente:

$$\sqrt{\alpha} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \dots (D.7.1)$$

$$x = (x - ct) \quad \dots (D.7.2)$$

$$C_1 = 1 \quad \dots (D.7.3)$$

Por lo tanto, de la ecuación (D.6), se obtiene lo siguiente.

$$(C_5 - C_6) = -\varepsilon c \quad \dots (D.6.1)$$

Sustituyendo las expresiones (D.7) y (D.8) en (D.3), se tiene la ecuación siguiente:

$$\phi(x, y, t) = \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right] \left( C_5 e^{y\sqrt{\alpha}} + C_6 e^{-y\sqrt{\alpha}} \right) \quad \dots (D.3.1)$$

De las propiedades de las funciones trigonométrica hiperbólicas, se tiene:

$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\operatorname{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$e^x = 2 \operatorname{senh}(x) + e^{-x}$	$e^{-x} = 2 \operatorname{cosh}(x) - e^x$

Aplicando dichas identidades, se obtiene lo siguiente:

$$\phi(x, y, t) = \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right] \left( 2C_5 \operatorname{senh} \sqrt{\alpha} y + C_5 e^{-y\sqrt{\alpha}} + 2C_6 \operatorname{cosh} \sqrt{\alpha} y - C_6 e^{y\sqrt{\alpha}} \right) \quad \dots (D.3.2)$$

Así pues, como el problema analizado muestra un movimiento periodo de forma sinusoidal, los términos exponenciales se desprecian:

$$C_5 e^{-y\sqrt{\alpha}} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad C_6 e^{y\sqrt{\alpha}} \rightarrow 0$$

Por lo que la ecuación (D.3.2), queda de la forma siguiente.

$$\phi(x, y, t) = \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right] \left( 2C_5 \operatorname{senh} \sqrt{\alpha} y + 2C_6 \operatorname{cosh} \sqrt{\alpha} y \right) \quad \dots (D.3.3)$$

donde  $2C_5 = C_1$  y  $2C_6 = C_2$

La solución buscada a este problema, sustituyendo las constantes  $C_1$  y  $C_2$  y la expresión (D.7.1), es la utilizada en la ecuación (2.8.9):

$$\phi(x, y, t) = \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right] \left( C_1 \operatorname{senh} \frac{2\pi y}{\lambda} + C_2 \operatorname{cosh} \frac{2\pi y}{\lambda} \right)$$

D.1.2. Solución de la ecuación de Laplace (2.8.5b), de la página 51.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Utilizando el método de separación de variables, se propone una solución de la forma siguiente:

$$\phi(R, \theta, z, t) = \mathfrak{R}(R)T(\theta)Z(z)\text{sen}(\omega t) \quad \dots (D.9)$$

donde  $\mathfrak{R}(R) = \mathfrak{R}$ ,  $T(\theta) = T$  y  $Z(z) = Z$ .

Sustituyendo la ecuación (D.9), en la ecuación de Laplace (2.8.5b), se tiene lo siguiente.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad \dots (D.9.1)$$

Multiplicando la ecuación (D.9.1), por el factor  $\frac{R^2}{\phi}$  queda como se muestra a continuación

$$\frac{R}{\mathfrak{R}} \frac{d}{dR} \left( R \frac{d\mathfrak{R}}{dR} \right) + \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d\theta^2} + \frac{R^2}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad \dots (D.9.2)$$

Siguiendo el método de separación de variables, el segundo término contiene todos los términos en función sólo de  $\theta$ , así que este término es igual a una constante que en este caso es de  $-m^2$ , donde  $m$  es una constante de integración.

El significado del signo negativo es que es una función trigonométrica y por que depende menos de los resultados  $e^\theta$  que se obtengan. La constante de integración  $m$ , es  $\phi(\theta) = \phi(\theta + 2\pi)$  y satisface a:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d\theta^2} = \frac{T''}{T} = \alpha = -m^2 \quad \dots (D.10)$$

Reacomodando términos

$$T'' + m^2 T = 0 \quad \dots (D.10.1)$$

Aplicando en operador aniquilador

$$\begin{aligned} (D^2 + m^2)\theta &= 0 \\ D^2 + m^2 &= 0 \\ \lambda^2 + m^2 &= 0 \\ \lambda &= \pm im \end{aligned}$$

Se tiene que

$$T(\theta) = C_1 e^{im\theta} + C_2 e^{-im\theta} \quad \dots (D.11)$$

Aplicando las formulas de Euler en la ecuación (D.11)

$$T(\theta) = C_1 (\cos m\theta + isenm\theta) + C_2 (\cos m\theta - isenm\theta)$$

Reduciendo por términos semejantes, se tiene

$$T(\theta) = (C_1 + C_2)\cos m\theta + i(C_1 - C_2)\text{sen}m\theta$$

donde  $(C_1 + C_2) = A_2$  y  $i(C_1 - C_2) = A_1$ , por lo que la ecuación (D.11) queda como se muestra

$$\boxed{T(\theta) = A_2 \cos m\theta + A_1 \text{sen}m\theta} \quad \dots \text{(D.11.1)}$$

Dividiendo la ecuación (D.9.1), por  $R^2$ :

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R \frac{dR}{dR} \right) + \frac{1}{R^2 T} \frac{d^2 T}{d\theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad \dots \text{(D.9.3)}$$

donde  $-m^2 = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d\theta^2}$

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R \frac{dR}{dR} \right) - \frac{m^2}{R^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad \dots \text{(D.9.3.1)}$$

Se tiene que el último término depende sólo de z, será igual a una constante (por el método utilizado). Aquí se tomará la constante igual a  $k^2$ ,

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{Z''}{Z} = k^2 \quad \dots \text{(D.12)}$$

Reacomodando términos

$$Z'' - k^2 Z = 0 \quad \dots \text{(D.12.1)}$$

Aplicando en operador aniquilador

$$\begin{aligned} (D^2 - k^2)Z &= 0 \\ \lambda^2 - k^2 &= 0 \\ \lambda &= \pm k \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$Z(z) = C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz} \quad \dots \text{(D.13)}$$

De las identidades hiperbólicas del seno y del coseno, se obtiene lo siguiente.

$e^x = \text{senh}(x) + \text{cosh}(x)$	$e^{-x} = \text{cosh}(x) - \text{senh}(x)$
---	--

Utilizando  $e^x$  y  $e^{-x}$  en (D.13),

$$Z(z) = C_3 (\text{senh}(kz) + \text{cosh}(kz)) + C_4 (\text{cosh}(kz) - \text{senh}(kz))$$

Reduciendo por términos semejantes, se tiene

$$Z(z) = (C_3 - C_4) \text{senh}(kz) + (C_3 + C_4) \text{cosh}(kz)$$

donde  $(C_3 + C_4) = B_2$  y  $(C_3 - C_4) = B_1$ , por lo que la ecuación (D.13) queda como se muestra

$$\boxed{Z(z) = B_1 \text{senh}(kz) + B_2 \text{cosh}(kz)} \quad \dots \text{(D.13.1)}$$

Se utiliza la forma hiperbólica en lugar de la exponencial para ver la extensión finita del dominio de z.

La ecuación diferencial (D.9.3.1), queda como sigue:

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R \frac{d\mathfrak{R}}{dR} \right) - \frac{m^2}{R^2} + k^2 = 0 \quad \dots (D.9.4)$$

Multiplicando por  $R^2$  la ecuación (D.9.4)

$$R \frac{d}{dR} \left( R \frac{d\mathfrak{R}}{dR} \right) + R^2 \mathfrak{R} k^2 - m^2 \mathfrak{R} = 0$$

$$R \frac{d}{dR} \left( R \frac{d\mathfrak{R}}{dR} \right) + (R^2 k^2 - m^2) \mathfrak{R} = 0 \quad \dots (D.9.4.1)$$

donde la ecuación (D.9.4.1) es una ecuación de *Bessel* de orden  $m$  y con solución de la forma siguiente.

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x)$$

$$\mathfrak{R}(R) = D_{1m} J_m(kR) + D_{2m} Y_m(kR) \quad \dots (D.14)$$

donde  $J_m$  es una función de *Bessel* de primera clase de orden  $m$  y  $Y_m$  es una función de *Bessel* de segunda clase.

Así pues, según la función de *Bessel* de segundo orden,  $Y_m$ , diverge para  $x=0$  para todos los valores de  $m$ , por lo que el coeficiente  $D_{2m} = 0$ .

Así que, la dependencia de  $R$  en el potencial de velocidades es proporcional a  $J_m(kR)$ . Por lo que, para cualquier entero  $m$ , la solución por separación de variables es la mostrada en la ecuación (2.8.14):

$$\boxed{\phi(R, \theta, z, t) = (A_{1m} \sin(m\theta) + A_{2m} \cos(m\theta)) (B_{1m} \sinh(kz) + B_{2m} \cosh(kz)) (J_m(kR)) \sin(\omega t)}$$

## APENDICE E

---

### Estadística descriptiva.<sup>1</sup>

Las variables pueden ser de dos tipos:

**Variables cualitativas o atributos:** no se pueden medir numéricamente (por ejemplo: nacionalidad, color de la piel, sexo).

**Variables cuantitativas:** tienen valor numérico (edad, precio de un producto, ingresos anuales).

Las variables también se pueden clasificar en:

**Variables unidimensionales:** sólo recogen información sobre una característica (por ejemplo: edad de los alumnos de una clase).

**Variables bidimensionales:** recogen información sobre dos características de la población (por ejemplo: edad y altura de los alumnos de una clase).

**Variables pluridimensionales:** recogen información sobre tres o más características (por ejemplo: edad, altura y peso de los alumnos de una clase).

Por su parte, las **variables cuantitativas** se pueden clasificar en discretas y continuas:

**Discretas:** sólo pueden tomar valores enteros (1, 2, 8, -4, etc.). Por ejemplo: número de hermanos (puede ser 1, 2, 3, ..., etc, pero, por ejemplo, nunca podrá ser 3,45).

**Continuas:** pueden tomar cualquier valor real dentro de un intervalo. Por ejemplo, la velocidad de un vehículo puede ser 80,3 km/h, 94,57 km/h...etc.

Cuando se estudia el comportamiento de una variable hay que distinguir los siguientes conceptos:

**Individuo:** cualquier elemento que porte información sobre el fenómeno que se estudia. Así, si estudiamos la altura de los niños de una clase, cada alumno es un individuo; si estudiamos el precio de la vivienda, cada vivienda es un individuo.

**Población:** conjunto de todos los individuos (personas, objetos, animales, etc.) que porten información sobre el fenómeno que se estudia. Por ejemplo, si estudiamos el precio de la vivienda en una ciudad, la población será el total de las viviendas de dicha ciudad.

---

<sup>1</sup> SPIEGEL, Murray: Probabilidad y estadística serie Schaum, México, Ed, McGraw Hill, 1998, Cap. 2, 4, 5.

**Muestra:** subconjunto que seleccionamos de la población. Así, si se estudia el precio de la vivienda de una ciudad, lo normal será no recoger información sobre todas las viviendas de la ciudad (sería una labor muy compleja), sino que se suele seleccionar un subgrupo (muestra) que se entienda que es lo suficientemente representativo.

**Medidas de posición:** Las medidas de posición nos facilitan información sobre la serie de datos que estamos analizando. Estas medidas permiten conocer diversas características de esta serie de datos.

Las medidas de posición son de dos tipos:

- Medidas de posición central:* informan sobre los valores medios de la serie de datos.
- Medidas de posición no centrales:* informan de como se distribuye el resto de los valores de la serie.

#### a) Medidas de posición central

Las principales medidas de posición central son las siguientes:

- Media:* es el valor medio ponderado de la serie de datos.

Se pueden calcular diversos tipos de media, siendo las más utilizadas:

*Media aritmética:* se calcula multiplicando cada valor por el número de veces que se repite. La suma de todos estos productos se divide por el total de datos de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^j f_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^j f_i} \dots E.1.$$

*Media geométrica:* Se multiplican todos estos valores y al producto final se le calcula la raíz enésima, donde  $n$  es el total de los datos de la muestra.

$$\bar{x} = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \dots E.2$$

Según el tipo de datos que se analice será más apropiado utilizar la media aritmética o la media geométrica.

La media geométrica se suele utilizar en series de datos como tipos de interés anuales, inflación, etc., donde el valor de cada año tiene un efecto multiplicativo sobre el de los años anteriores. En todo caso, la media aritmética es la medida de posición central más utilizada.

Lo positivo de la media, es que en su cálculo se utilizan todos los valores de la serie, por lo que no se pierde ninguna información.



Sin embargo, presenta el problema de que su valor (tanto en el caso de la media aritmética como geométrica) se puede ver muy influido por valores extremos, que se aparten en exceso del resto de la serie. Estos valores anómalos podrían condicionar en gran medida el valor de la media, perdiendo ésta representatividad.

2. **Mediana:** es el valor de la serie de datos que se sitúa justamente en el centro de la muestra (un 50% de valores son inferiores y otro 50% son superiores).

No presentan el problema de estar influido por los valores extremos, pero en cambio no utiliza en su cálculo toda la información de la serie de datos (no pondera cada valor por el número de veces que se ha repetido).

3. **Moda:** es el valor que más se repite en la muestra.

### **b) Medidas de posición son centrales**

Las medidas de posición no centrales permiten conocer otros puntos característicos de la distribución que no son los valores centrales. Entre otros indicadores, se suelen utilizar una serie de valores que dividen la muestra en tramos iguales:

### **Medidas de dispersión**

Estudia la distribución de los valores de la serie, analizando si estos se encuentran más o menos concentrados, o más o menos dispersos.

Existen diversas **medidas de dispersión**, entre las más utilizadas podemos destacar las siguientes:

1.- **Rango:** mide la amplitud de los valores de la muestra y se calcula por diferencia entre el valor más elevado y el valor más bajo.

$$\text{Rango} = x_{\max} - x_{\min} \dots E.3$$

2.- **Varianza:** Mide la distancia existente entre los valores de la serie y la media. Se calcula como la sumatoria de las diferencias al cuadrado entre cada valor y la media, multiplicadas por el número de veces que se ha repetido cada valor. La sumatoria obtenida se divide por el tamaño de la muestra.

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^i f_i (\hat{x}_i - \bar{x})^2}{n} \dots E.4$$

La varianza siempre será mayor que cero. Mientras más se aproxima a cero, más concentrados están los valores de la serie alrededor de la media. Por el contrario, mientras mayor sea la varianza, más dispersos están.

3.- **Desviación típica:** Se calcula como raíz cuadrada de la varianza.

Tabla t de Student.<sup>2</sup>

Los valores de  $t_p(\nu)$  de la distribución t para los grados de libertad  $\nu$  que definen el intervalo  $-t_p(\nu)$  a  $t_p(\nu)$  abarca la fracción de  $p$  de la distribución.

Grados de libertad $\nu$	$p(%)$					
	68.27 <sup>(a)</sup>	90	95	95.45 <sup>(a)</sup>	99	99.73 <sup>(a)</sup>
1	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.80
2	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
3	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
4	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.62
5	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
6	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
7	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.53
8	1.07	1.86	2.31	2.37	3.36	4.28
9	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
10	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
11	1.05	1.80	2.20	2.25	3.11	3.85
12	1.04	1.78	2.18	2.23	3.05	3.76
13	1.04	1.77	2.16	2.21	3.01	3.69
14	1.04	1.76	2.14	2.20	2.98	3.64
15	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
16	1.03	1.75	2.12	2.17	2.92	3.54
17	1.03	1.74	2.11	2.16	2.90	3.51
18	1.03	1.73	2.10	2.15	2.88	3.48
19	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.45
20	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
25	1.02	1.71	2.06	2.11	2.79	3.33
30	1.02	1.70	2.04	2.09	2.75	3.27
35	1.01	1.70	2.03	2.07	2.72	3.23
40	1.01	1.68	2.02	2.06	2.70	3.20
45	1.01	1.68	2.01	2.06	2.69	3.18
50	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
100	1.005	1.660	1.984	2.025	2.626	3.077
$\infty$	1.000	1.645	1.960	2.000	2.576	3.000

<sup>(a)</sup> Para valores de  $z$  descritos por una distribución normal con media  $\mu$  y una desviación estandar  $\sigma$ , el intervalo  $\mu \pm k\sigma$  que comprende  $p=68.27$ ,  $95.45$  y  $99.73\%$  de la distribución, corresponden a  $k=1.2$  y  $3$ , respectivamente.

<sup>2</sup> DA SILVA, G.M.S: Basic metrology for ISO-9000 certification, USA, Ed. Butterworth Heinemann, 2002, apéndice 2.

## Referencias

### Literatura

- ◆ Blevins, Robert D.; *Formulas for natural frequency and mode shape*, USA, Ed. Van Nostrand Reinhold Company Regional Office, 1979.
- ◆ Bush, T.; *Fundamentals of dimensional metrology*, USA, Ed. Delmar Publishers Inc., 3rd ed., 1966.
- ◆ Currie, I.G.; *Fundamentals Mechanics of Fluids*, USA, Ed. McGraw Hill, 1974, p.180.
- ◆ Da Silva G.S.M.; *Basic metrology for ISO-9000 certification*, USA, Ed. Butterworth Heinemann, 2002.
- ◆ Gieck, Kurt; *Manual de formulas técnicas*, México, Ed. Alfaomega, 1989, 72ª ed.
- ◆ Hariharan, P.; *Optical Interferometry*, Australia, Ed. Academic Press Inc., 1985.
- ◆ Hecht, Eugene; *Optics*, USA, Ed. Addison Wesley Publishing Company, 1989.
- ◆ Instituto Mexicano de Normalización y Certificación A.C. (IMNC); *Guía para la expresión de incertidumbre en las mediciones (GUM)*, México, Ed. IMNC, , 2003.
- ◆ Kimothi, S.K.; *The Uncertainty of Measurement Physical and Chemical Metrology Impact and Analysis*; Ed. American Society for Quality, USA, 2002.
- ◆ Levi, Enzo; *Elementos de Mecánica del Medio Continuo*, México, Ed. Limusa, 1998.
- ◆ Mataix, Claudio; *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*, México, Ed. Harla, 1982.
- ◆ *Norma DIN 1319.*
- ◆ *Norma JIS b 7430-1977, Optical Flats.*
- ◆ Smith, S.T.; *Foundations of Ultraprecision Mechanism Design*, Malaysia, Ed. Gordon and Breach Science Publishers S.A., 1992.
- ◆ Spiegel, Murria; *Probabilidad y estadística serie Schaum*, México, Ed. Mc Graw Hill, 1998.
- ◆ Solar, González Jorge.; *Cinemática y Dinámica básica para Ingenieros*, 2 ed., México, Ed. Trillas, 1998.
- ◆ Tippens, Paul E.; *Física 2*, México, Mc Graw Hill, 1992, vol. 2.
- ◆ White, M. Frank; *Mecánica de fluidos*, México, Ed. McGraw-Hill, 1988.
- ◆ Williams, D.C.; *Optical Methods in Engineering Metrology*, Ed. Chapman & Hall, London, 1993.

---

Artículos

- ◆ Grigor'ev, V. A.; "Zaborov, Ya.O.; et.al.; *"Use of a liquid mirror for the calibration of an interferometer having a plane comparison wave front"*, en: Soviet Journal Optic Technology, USA, Vol.53, No.10, octubre, 1986.
- ◆ Schulz, G. y Schwider, J.; *"Precise measurement of planeness"*, en: Applied Optics, USA, No. 6, enero-junio, 1967.
- ◆ Bunnagel, R., Oehring, H.A. y Steiner, K.; *"Fizeau interferometer for measuring the flatness of optical surface"*, en: Applied Optics, USA, No. 2, febrero, 1968.

---

## Bibliografía

### Artículos

- ◆ Abramson, Norman H.; *Dynamic behavior of liquid in moving container*, Applied Mechanics Reviews, vol. 16, No. 7, 1963.
- ◆ Carman, P.D.; *Control and Interferometric Measurement of the Plate Flatness*, Journal Optical Society American; vol. 45, 1955.
- ◆ Fritz, Bernard S.; *Absolute Calibration of an Optical Flat*; Pro. SPIE; vol. 192, 1979.
- ◆ Fritz, Bernard S.; *Absolute Calibration of an Optical Flat*, Optical Engineering; vol. 23, 1984.
- ◆ Küchel, Michael F.; *A new approach to solve the three flat problem*, International Journal for Light and Electrón Optiics, vol. 113, No. 9, 2001.
- ◆ Lingard, P.S.; *Length-Bar Step-Gauge Calibration Using a Laser Measurement System with a Coordinate Measuring Machine*, 1991.
- ◆ Primark, William; *Optical Flatness Standard*, Optical Engineering; vol. 23, 1984.
- ◆ Primark, William; *Optical Flatness Standard: Comment*, Optical Engineering; vol. 28, 1989b.
- ◆ Schulz, Gunter and J Schwider; *Comments on the Paper 'Optical Flatness Standard'*, Optical Engineering; vol. 26, 1987.
- ◆ Schulz, Gunter and J Schwider; *Establishing an Optical Flatness Standard*, Applied Optics; vol. 10, 1971.