



**UNIVERSIDAD
NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

CAMPUS ARAGÓN

**“EL CAOS Y LA
CARACTERIZACIÓN DE
SERIES DE TIEMPO A
TRAVÉS DE TÉCNICAS DE
LA DINÁMICA NO-LINEAL”**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO EN COMPUTACIÓN

P R E S E N T A:
**ADRIANA ELISA ESPINOSA
CONTRERAS**

DIRECTOR: M. EN. C. LUIS RAMÍREZ FLORES

MÉXICO, D.F.

2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS:

Las condiciones iniciales no pudieron ser mejores. Quiero agradecer a mi abuelito Juan, por toda su sabiduría y por conocer a mi abuelita Gela, a quien le agradezco infinitamente todo su amor y comprensión, y por todos los hijos que tuvieron, mis tíos Juan Carlos, Rosa María, Ma. de los Ángeles, Humberto, Beatriz y Ricardo. Pero sobre todo a su segunda hija, mi madre Elisa. Sin ella, y de no haber conocido a mi padre, Felipe, yo no hubiera nacido ni mi hermana. Gracias mamá por ser todo para mí, por estar ahí en todo momento. Gracias a mi papá por haberme aconsejado estudiar esta carrera porque de no ser así no hubiera conocido a Miguel Ángel Herrera, a quien le agradezco mi vocación de divulgadora de la ciencia. En una insospechada bifurcación conocí el mundo de la investigación científica y le agradezco infinitamente a Patricia Rayón quien me ayudó a retomar mi verdadero camino. Esta tesis no pudo estar mejor dirigida por quien me tuvo una infinita paciencia en mi caos personal, gracias Luis Ramírez Flores. Mi familia ha tenido siempre un lugar muy especial en mi corazón y en mi corazón también está mi hermana Cynthia, gracias por ser quien eres. Sin duda alguna agradezco también a las parejas de mis tíos cuyos frutos son muy especiales para mí, Gaby, José Manuel, Juan Carlos, Susana, Gely, Armando, Helena, Humberto, Luis Eduardo, Miguel Ángel, Carolina, Catherine, y todos mis demás primos, sobrinos y tíos. Dentro de mi familia también están mis amigos, Mari y Emma, sin duda mis más grandes amigas; Ernenstein, Bethsabé, Yolanda, Lidy, Chayito, Lorena, Norma, y todos mis amigos de la ENEP Aragón, gracias por los momentos vividos en la universidad; gracias a Roxana, a Melanie y a Ruth, quienes siempre me acompañan aunque estén muy lejos; gracias a Atenayhs y a Alejandra con quienes he compartido lágrimas y risas, felicidad y tristezas, gracias por ser las mejores amigas que he tenido, sin duda alguna son las más queridas. Estudiar un semestre de la carrera de Biología hizo que cambiara de nuevo la trayectoria no-lineal de mi vida, gracias a Carito y gracias a María Sánchez Cordero, gracias a Bianca y a Emmanuel. Gracias a Julieta Fierro y a Ana María Sánchez Mora, ahora estoy dentro de una trayectoria más estable en mi vida y al mismo tiempo soy más feliz. Gracias a Aline, a Julio, a Martha, a Mónica y a mis demás compañeros del diplomado en divulgación de la ciencia. Gracias a Gloria Valek y a Estrella Burgos, me dieron la oportunidad de mi vida. Gracias a Martín Bonfil por creer en mí.

Adriana Elisa

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	7
OBJETIVO E HIPÓTESIS	7
RESUMEN	8
APORTACIONES DE ESTA TESIS	9
CAPÍTULO I	
EL CAOS Y EL PROBLEMA DE LA PREDICCIÓN	15
I.1 Introducción Histórica.....	15
I.2 El Caos Matemático.....	17
I.2.1 Desde la Mística Grecia Antigua Donde se Tenían Ecuaciones para Todo.....	18
I.2.2 Engranajes de los Griegos y la Visión de un Universo Mecánico.....	20
I.2.3 De Copérnico a Newton.....	21
I.2.4 De Newton a Poincaré.....	25
I.2.5 La Matemática Faltante: "Probabilidad".....	31
CAPÍTULO II	
EL PROBLEMA DE LA NO-LINEALIDAD	41
II.1 Sistemas Lineales y No-Lineales.....	41
II.2 La Importancia de la No-Linealidad.....	43
II.3 La No-Linealidad y el Caos.....	44
II.4 Los Fenómenos No-lineales.....	46
CAPÍTULO III	
¿QUÉ SON LOS FENÓMENOS CAÓTICOS?	59
III.1 Sensibilidad a las Condiciones Iniciales.....	59
III.2 La Pequeña Causa de Poincaré.....	65
III.3 El Problema de los <i>Tres-Cuerpos</i> y la Teoría de KAM.....	70
III.3.1 Desarrollo Histórico.....	72
III.3.2 La Memoria de Poincaré Sobre el Problema de los <i>Tres-Cuerpos</i>	74
III.3.3 Teoría General de la Estabilidad.....	75
III.3.4 Desarrollos Posteriores.....	77
III.4 Los Retratos del Espacio de Fases.....	78
III.5 Atractores.....	83
CAPÍTULO IV	
DIFERENTES MEDIDAS DEL CAOS Y COMPLEJIDAD	101
IV.1 Cuantificando El Caos.....	101
IV.2 Series de Tiempo de Variables Dinámicas.....	103
IV.3. Técnicas de Análisis de la Dinámica No-lineal para Series de Tiempo.....	105

1.-Distribución De Probabilidades.....	105
2.-Diagramas De Espacio De Fase.....	106
3.-Mapas De Poincaré.....	109
4.-Exponente De Lyapunov.....	111
5.-Espectro De Potencia.....	116
6.-Frecuencias Dominantes.....	119
7.-Función De Autocorrelación.....	121
8.-Mapas Recurrentes.....	123

CAPÍTULO V

CARACTERIZACIÓN DE DIFERENTES SERIES DE TIEMPO NO-LINEALES.....

V.4. Aplicación de las Técnicas de la Dinámica No-Lineal a las Series de Tiempo.....	129
1.-La Serie de Mackey-Glass.....	133
2.-La Serie Particiones Perfectas.....	138
3.-La Serie de Autogeneración.....	143
4.-La Serie de la ecuación kx^2-l	148
5.-La Serie de la Evolución de las Poblaciones.....	153

CONCLUSIONES.....

ANEXO.....

BIBLIOGRAFÍA.....

INTRODUCCIÓN

Una gran cantidad de fenómenos se pueden describir como series de tiempo aperiódicas, como son: la temperatura en un lugar específico, la bolsa de valores, la contaminación, las ventas de una compañía, el nivel de agua en una presa, etc.; las relaciones causales y su predicción en todos estos casos son muy complejas y difíciles, y las técnicas estadísticas –que son las más utilizadas– son muy limitadas, en especial porque todos estos fenómenos son no-lineales.

Las técnicas de la dinámica no-lineal y otras relacionadas, permiten una aproximación a la caracterización de estos fenómenos, en especial para la anticipación de la posibilidad de su modelado y predicción.

OBJETIVO E HIPÓTESIS

El presente trabajo tiene como propósito demostrar la potencia de las técnicas modernas de la dinámica no-lineal en la caracterización de fenómenos aperiódicos no-lineales, con ciertas restricciones, para que posteriormente se puedan hacer modelaciones y tal vez predicciones de los mismos con el menor grado de error posible.

Debido a que en los congresos nacionales e internacionales de física y computación estaba latente la pregunta ¿por qué a veces las técnicas que se utilizan para predecir series de tiempo funcionan y a veces no? En este trabajo decidimos adelantarnos un paso, es decir, supusimos que las técnicas de predicción funcionaban pero que las series tenían ciertas características que las hacían predecibles y ciertas características que no las hacían predecibles. Utilizamos la mayor cantidad posible de técnicas para poder caracterizar o clasificar las series en diferentes grupos, según su grado de complejidad, a saber en constantes, periódicas, cuasiperiódicas, caóticas y aleatorias; una vez caracterizadas procedimos a utilizar técnicas de predicción para comprobar nuestra hipótesis de que al menor grado de complejidad de la serie ésta se predice con menor grado de error, a mayor grado de complejidad de la serie el error en la predicción aumenta y que si la serie es caracterizada como aleatoria la predicción se vuelve imposible.

RESUMEN

Las teorías y técnicas modernas de la dinámica no-lineal han demostrado su poder de caracterización en diferentes fenómenos físicos. En este trabajo se presenta la utilización de diferentes técnicas, para la caracterización del comportamiento de distintas series numéricas, con distinto grado de complejidad matemática. Las series analizadas en este trabajo tienen la característica de contar con fórmula generadora, produciéndose series de tiempo que son no-lineales; estas series fueron estudiadas con las técnicas de 1) Distribución de probabilidades, 2) Diagramas de espacio de fase, 3) Mapas de Poincaré, 4) Exponente de Lyapunov, 5) Espectro de potencia, 6) Frecuencias dominantes, 7) Función de autocorrelación y 8) Mapas recurrentes; para así poder caracterizarlas y saber cuáles, en principio, son *más fáciles* de predecir y cuales son *más difíciles*. Los resultados indican, que es posible modelar y predecir series numéricas de diferente grado de complejidad con ciertas restricciones.

En el capítulo 1 se encuentra una visión histórica del Caos matemático, así como de la predicción y sus problemas al toparse con sistemas que son totalmente deterministas y muy simples de resolver, pero el resultado del comportamiento de su evolución temporal es irregular e impredecible a largo plazo.

En el capítulo 2 se definen los sistemas no-lineales, se describe la importancia que tiene este tipo de fenómenos así como su relación con los fenómenos caóticos.

En el capítulo 3 se describen los fenómenos caóticos pasando por una breve historia de cómo se descubrió este tipo de comportamiento, que es muy sensible a las condiciones iniciales y que puede ser confundido muy a menudo con el comportamiento aleatorio.

El capítulo 4 trata la importancia de caracterizar los fenómenos con distintas técnicas de análisis caótico, para facilitar el trabajo de saber cuáles fenómenos son más fáciles de predecir y cuáles son imposibles de predecir.

Y finalmente en el capítulo 5 se encuentra la caracterización de las diferentes series estudiadas, mostrándose que es posible predecir fenómenos de distinto grado complejidad, siempre y cuando no tengan comportamiento aleatorio.

Introducción

APORTACIONES DE ESTA TESIS

-Comportamiento Caótico de Máquinas Computacionales. A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **XL Congreso Nacional de Física**. Monterrey, N.L. 27-31 de Octubre de 1997. Resumen publicado en el **Supl. del Bol. Soc. Mex. Fis.** 11-13, México: SMF, ISSN 0187-4713, 1997, 93p.

-Análisis Caótico y Predictivo de la Contaminación Ambiental en la Ciudad de México. A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **VIII Congreso Internacional de Electrónica, Comunicaciones y Computadoras. "CONIELECOMP '98"**. Universidad de las Américas; Puebla, Pue., México. 23-25 de Febrero de 1998. 20-23pp.

-Análisis Matemático y Predictivo de Diferentes Contaminantes en la Ciudad de México. A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **2º Congreso Estatal de Investigación en Educación, Ciencia y Tecnología**. En el área: Contaminación y Tecnología Ambiental. Universidad Tecnológica de Nezahualcóyotl, Edo. de México. 24-25 de Junio de 1998. 10-11pp.

-Análisis Caótico y Predictivo de la Contaminación Ambiental. J. Figueroa-Nazuno & A. Espinosa-Contreras. **CLEAN AIR '98**. World Trade Center, Mexico City. 22-24 de Septiembre de 1998.

-Análisis No-Lineal de Contaminantes en la Zona Metropolitana. A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **XLI Congreso Nacional de Física. San Luis Potosí, S.L.P.** 26-30 de Octubre de 1998. Resumen publicado en el **Supl. del Bol. Soc. Mex. Fis.** 12-3, México: SMF, ISSN 0187-47-3, 1998, 27-28pp.

-Evolución y Comportamiento Estadístico de un Autómata Celular en 2D Operando con Compuertas Lógicas. A. Espinosa-Contreras, N. Villanueva-Rosales & J. Figueroa-Nazuno. **XLI Congreso Nacional de Física. San Luis Potosí, S.L.P.** 26-30 de Octubre de 1998. Resumen publicado en el **Supl. del Bol. Soc. Mex. Fis.** 12-3, México: SMF, ISSN 0187-47-3, 1998, 29pp.

-Predicción de Series Numéricas a través de Redes Neuronales Modernas. A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **XLI Congreso Nacional de Física. San Luis Potosí, S.L.P.** 26-30 de Octubre de 1998. Resumen publicado en el **Supl. del Bol. Soc. Mex. Fis.** 12-3, México: SMF, ISSN 0187-47-3, 1998, 69pp.

-Comportamiento Caótico de las Máquinas Computacionales Tag y Hailstone. A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **Simposium Internacional de Computación CIC '98**. Instituto Politécnico Nacional; México, D.F. 11-13 de Noviembre de 1998, 279-287pp. ISBN 970-18-1916-0.

Introducción

-Análisis No-Lineal de dos Máquinas Computacionales. A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **2º Foro "Investigadores del Futuro"**. Universidad del Valle de México-LV; Naucalpan, Edo. de México. 23-27 de Noviembre de 1998.

-Análisis y Predicción de Contaminantes: La Ciudad de México. J. Figueroa-Nazuno, A. Espinosa-Contreras, Y. Sáinz-García & E. Villanueva-Peña. **3er. Simposio de Contaminación Atmosférica**. Colegio Nacional; México, D.F. 17-19 de Febrero de 1999.

-Análisis del Comportamiento de un Automata Celular en 2D con Reglas de Interacción de Compuertas Lógicas. A. Espinosa-Contreras, N. Villanueva-Rosales & J. Figueroa-Nazuno. **Primer Congreso Internacional en Electrónica, Comunicaciones y Computación CIECC '99**. Universidad Veracruzana; Poza Rica, Veracruz, México. 24-26 de Marzo de 1999, 103-106pp.

-Análisis Experimental del Modelo y Predicción de Series de Tiempo por Acoplamiento Aleatorio. E. Villanueva-Peña, A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **Primer Congreso Internacional en Electrónica, Comunicaciones y Computación CIECC '99**. Universidad Veracruzana; Poza Rica, Veracruz, México. 24-26 de Marzo de 1999, 111-114pp.

-Análisis Experimental del Modelo y Predicción de Series de Tiempo por Acoplamiento Aleatorio. E. Villanueva-Peña, A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **IV Simposio Ibero-Americano de Reconocimiento de Patrones SIARP 99**. Instituto de Cibernética, Matemática y Física; Ciudad de La Habana, Cuba. 21-26 de Marzo de 1999, 327-335pp. ISBN: 970-18-2386-9

-Análisis de la Evolución Temporal de Compuertas Lógicas como Reglas de Interacción de Automatas Celulares en 2D. A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **3er. Foro "Investigadores del Futuro"**. Universidad del Valle de México-LV, Naucalpan, Edo. de México. 23-30 de Abril de 1999.

-Análisis del Comportamiento de Diferentes Variables de la Bolsa de Valores con Mapas Recurrentes. A. Espinosa-Contreras, O. Monroy-García & J. Figueroa-Nazuno. **2º Encuentro Nacional de Computación ENC'99**. En el Taller de Aprendizaje, Búsqueda, Clasificación y Optimización con Enfoques Heurísticos. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo; Pachuca, Hidalgo. 12-15 de Septiembre de 1999. ISBN: 968-6254-46-3

-Modelado de Series de Tiempo por Acoplamiento Aleatorio. E. Villanueva-Peña, A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **2º Encuentro Nacional de Computación ENC'99**. En el Taller de Aprendizaje, Búsqueda, Clasificación y Optimización con Enfoques Heurísticos. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo; Pachuca, Hidalgo. 12-15 de Septiembre de 1999. ISBN: 968-6254-46-3.

-Análisis del Comportamiento de Diferentes Sismos en la Ciudad de México con Técnicas de la Dinámica No-Lineal. A. Espinosa-Contreras, R. Suárez-Núñez & J. Figueroa-Nazuno. **XLII Congreso Nacional de Física. Villahermosa, Tab.** 25-29 de Octubre de 1999. Resumen publicado en el **Supl. del Bol. Soc. Mex. Fis.** 13-3, México: SMF, ISSN 0187-4713, 1999, 86pp.

Introducción

-Análisis No-Lineal de la Generación de Números Aleatorios por Humanos. A. Espinosa-Contreras, E. Villanueva-Peña & J. Figueroa-Nazuno. **XLII Congreso Nacional de Física. Villahermosa, Tab.** 25-29 de Octubre de 1999. Resumen publicado en el **Supl. del Bol. Soc. Mex. Fis.** 13-3, México: SMF, ISSN 0187-4713, 1999, 61pp.

-Analizador Caótico, Empleando la Técnica de Acoplamiento Aleatorio. E. Villanueva-Peña, A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **XLII Congreso Nacional de Física. Villahermosa, Tab.** 25-29 de Octubre de 1999. Resumen publicado en el **Supl. del Bol. Soc. Mex. Fis.** 13-3, México: SMF, ISSN 0187-4713, 1999, 126pp.

-Análisis Caótico del Comportamiento Colectivo de Autómatas Celulares con Reglas de Interacción de Compuertas Lógicas. A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **Congreso Internacional de Computación CIC '99.** Instituto Politécnico Nacional; México, D.F. 17-19 de Noviembre de 1999, 496-502pp. ISBN 970-18-3697-9

-Modelado y Aprendizaje de Series de Tiempo por Acoplamiento Aleatorio. E. Villanueva-Peña, A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **Mexican International Conference on Artificial Intelligence MICAI 2000.** Centro de Investigación en Computación y Sociedad Mexicana de Inteligencia Artificial. Acapulco, Gro. México. 11-14 de Abril de 2000, 299-306pp. ISBN 970-18-4465-3.

-Modelado y Caracterización de Series de Tiempo por Análisis Gramatical. R. Menchaca-Méndez, C. Sánchez-Rodríguez, A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **XLIII Congreso Nacional de Física. Puebla, Pue.** Del 30 de Octubre al 3 de Noviembre del 2000. Resumen publicado en el **Supl. del Bol. Soc. Mex. Fis.** 14-3, México: SMF, ISSN 0187-4713, 2000, 135pp.

-Análisis No-Lineal del Comportamiento de la Pérdida de Paquetes en la Red Internet con Técnicas Caóticas. A. Espinosa-Contreras, L. Álvarez-Robles & J. Figueroa-Nazuno. **11a Reunión de Otoño de Comunicaciones, Computación, Electrónica y Exposición Industrial ROC&C 2000.** IEEE Sección México, Acapulco, Gro. Del 29 de Octubre al 3 de Noviembre de 2000. 90-96pp.

-Análisis del Comportamiento de la Pérdida de Paquetes en la Red Internet con Técnicas de la Dinámica No-Lineal. A. Espinosa-Contreras & J. Figueroa-Nazuno. **Congreso Internacional de Computación CIC' 2000.** CIC-IPN, México D.F. 13-17 de Noviembre de 2000. 529-535pp. ISBN-970-18-5540-X

CAPÍTULO I

EL CAOS Y EL PROBLEMA DE LA PREDICCIÓN



“El simple aleteo de las alas de una mariposa en Hong Kong puede crear un huracán en Nueva York.”

-Edward Lorenz

Vincent Van Gogh, "Noche Estrellada", 1889, Óleo sobre tela, (73x92 cm).

El Caos es invisible a nosotros. Millones de años de evolución han condicionado nuestros cerebros y nuestra forma de pensar, así que podemos percibir solamente patrones de regularidad. Toma el mal genio de un Vincent Van Gogh que ve los flujos caóticos del cielo de noche.

CAPÍTULO I

EL CAOS Y EL PROBLEMA DE LA PREDICCIÓN

I.1 Introducción Histórica

Definir el término **Caos** resulta muy complejo y difícil, debido al origen mismo de la palabra, ésta proviene del griego **Khaos** que significa **"abismo"**, o bien, **"abismo abierto"**. Esta descripción metafórica tiene mucho sentido en la Física moderna. A continuación se presentan diferentes definiciones de las ideas relacionadas con el análisis de la palabra Caos.

CAOS.-En la Cosmogonía griega antigua significa cualquiera de los dos conceptos, el primigenio vacío del Universo antes del comienzo de las cosas o el abismo de Tártaro: el inframundo, ambos se encuentran en la Teogonía de Hesíodo. Primero fue Caos en el sistema de Hesíodo, después Gea y Eros (la Tierra y el Deseo). Sin embargo, Gea no fue generada del Caos; los descendientes de Caos fueron Erebo (las Tinieblas) y Nyx (la Noche). Después, el aire superior brilló, el Día. Nyx engendró después a los aspectos Oscuros y Terribles del Universo. Este concepto se ajusta con otra noción antigua que vio a Caos como la oscuridad del inframundo.

En cosmogonías posteriores se designó al Caos como el estado original de las cosas, sin embargo, concebidas. El significado moderno del mundo se deriva de Ovidio, quien vio al Caos como la masa informe y desordenada, a partir de la cual el creador del Cosmos produjo el Universo ordenado. Este concepto de Caos también es aplicado a la interpretación de la Historia de la Creación, en Génesis 1, por la antigua Iglesia de los Padres.[42]

CAOS.-(del griego Khaos, abismo) Según muchas tradiciones poéticas y religiosas, es la indeterminada confusión y mezcla de los elementos eternos, antecedente de la configuración del mundo ordenado en un universo o cosmos. Confusión o desorden: Sin alguien que mande... reina el Caos (Ortega y Gasset).

En casi todas las cosmogonías, esta objetivación o personificación del confuso y remoto origen de todos los seres del universo, aparece con diversos nombres. En la Teogonía de Hesíodo, coexistían en el seno del Caos la Noche (Nyx) y las Tinieblas (Erebo), quienes separándose del Caos hicieron surgir al Cielo (Urano) y a la Tierra (Gea). Otras veces se habla indistintamente del Caos y del Erebo. En la Cosmogonía bíblica, aparece un equivalente del Caos en el estado informe en que Dios creó la materia, antes de iniciarse la obra de los 6 días y lo designa con la expresión: "tohu wa-bohu". [43]

CAOS.-La palabra significa abismo abierto. El estado de completo desorden anterior a la formación del mundo a partir del cual según los mitólogos, se inicia la formación. Hesíodo dice: "Antes de todos los seres estaba el Caos, luego la Tierra de ancho seno" (Teogonía VII 6). Aristóteles combatió esta noción (fis., IV 208b 33ss) ya que admitía la eternidad del mundo. Kant se sirvió de ésta para indicar el estado originario de la materia, del que más tarde se originaron los mundos. [44]

CAOS.-En Mecánica y Matemáticas, es el comportamiento de sistemas dinámicos gobernados por leyes determinísticas, el cual es aparentemente azaroso o impredecible. Un término más preciso "Caos Determinístico", sugiere una paradoja debido a que conecta dos nociones que son familiares y que comúnmente se consideran incompatibles. La primera es el azar, o impredecibilidad, como el caso de la trayectoria de una molécula en un gas o en la elección de un individuo de una población. En el análisis convencional, el azar fue considerado más aparente que real, surgiendo de la ignorancia de muchas causas del trabajo. En otras palabras se creía que el mundo era impredecible porque a su vez es complicado. La segunda noción es la de movimiento determinístico, como el de un péndulo o un planeta, que ha sido aceptada desde el tiempo de Sir Isaac Newton como ejemplo del éxito predictivo de la ciencia, sobre aquello que inicialmente es complejo. [2]

CAOS.-En Mecánica Clásica es el comportamiento de un sistema dinámico que puede describirse geoméricamente como el movimiento sobre un "atractor". Efectivamente las matemáticas de la Mecánica Clásica reconocen tres tipos de atractores: atractor de punto fijo (que caracteriza estados estacionarios), atractor de ciclo límite (ciclos periódicos) y toros (combinaciones de varios ciclos). En la década de los 60's el matemático americano Stephen Smale descubrió una nueva clase de atractores, a los cuales llamó "atractores extraños". Dentro de este tipo de atractores la dinámica es caótica. Más tarde reconoció que los atractores extraños han detallado la estructura a todas las escalas de magnificación (una clase de formas geométricas complejas que exhiben comúnmente la propiedad de autosimilaridad), que a su vez conducen a notables desarrollos en el área de gráficas computarizadas. (Véase el capítulo III).

Las aplicaciones de las matemáticas del Caos son en extremo diversas, e incluyen el estudio del flujo turbulento de fluidos, irregularidades en el ritmo cardíaco, dinámica de poblaciones, reacciones químicas, física de plasmas y el movimiento de cúmulos de estrellas, entre otras muchas más. [2]

De las definiciones anteriores, podemos distinguir dos tipos de Caos, el filosófico y el matemático. En este trabajo sólo nos enfocaremos en el Caos matemático que se analizará a continuación.

1.2 El Caos Matemático

De las definiciones anteriores de Caos se puede observar, que definir este término, al menos matemáticamente, es más complejo de lo que parece. En 1986, en una prestigiosa conferencia internacional sobre Caos celebrada en la Real Sociedad de Londres se dio una definición más concreta del término:

CAOS.-Comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinístico.

Estocástico significa aleatorio y determinístico es un término introducido por Pierre Laplace, que en dinámica que se refiere a las leyes inmutables y precisas que sigue un sistema dinámico, es decir su ecuación. [2]

El término Caos fue evolucionando paralelamente con la ciencia. A continuación haremos un recuento de esa evolución.

I.2.1 Desde la Mística Grecia Antigua Donde se Tenían Ecuaciones para Todo

La metáfora de un universo que funciona como un reloj se remonta a mucho tiempo atrás y es importante que apreciemos cuán profundamente arraigada se encuentra.

Un buen lugar para comenzar lo constituye, de nuevo, la Grecia Antigua, con Tales de Mileto. Él nació alrededor del 624 a. de C., murió sobre el 564 a. de C. y es famoso por haber predicho un eclipse de Sol. Probablemente adoptó el método de predecir eclipses empleado por los egipcios o los caldeos, y su predicción sólo fue correcta con un margen de error de un año más o menos. Sea como fuere, el eclipse ocurrió en un momento propicio, interrumpiendo una batalla entre lidios y medas, y el Sol quedó casi completamente oscurecido. Estas circunstancias casuales, aumentaron sin duda, la reputación de Tales como astrónomo.

Una de las frustraciones de ser historiador es la forma en que, casi por accidente, algunos sucesos pueden fecharse con exactitud mientras que otros sólo son conjeturas. El conocimiento de la fecha de nacimiento de Tales se basa en los escritos de Apolodoro, la de su muerte se debe a Diógenes Laercio; ambas fechas son poco fiables. Pero sin ninguna sombra de dudas, el eclipse ocurrió el 28 de mayo del año 585 a. de C. Tan fiable resulta el tic-tac del reloj cósmico que, dos milenios y medio después, podemos calcular no sólo cuándo ocurrieron los eclipses antiguos, sino también los lugares sobre la superficie de la Tierra en donde se pudieron ver. Los eclipses solares son raros y el anterior, en particular, es el único del que razonablemente pudo haber sido testigo Tales. Los acontecimientos astronómicos todavía proporcionan a los historiadores uno de los mejores métodos para datar sucesos.

Se dice que Tales iba caminando una noche y quedó tan absorto en su estudio del cielo nocturno, que cayó en una zanja. Un acompañante le comentó: "¿Cómo puedes decir qué va a suceder en los cielos cuando no puedes ver lo que se extiende bajo tus propios pies?" En cualquier caso, esta historia resume las actitudes que dieron lugar a la Mecánica Clásica. Los filósofos de la Grecia antigua podían calcular los movimientos de los planetas con una exactitud pasmosa, pero todavía creían que los objetos pesados caían más rápidamente que los ligeros.

La Dinámica sólo comenzó a progresar cuando los matemáticos apartaron sus ojos del cosmos y miraron más atentamente -y más críticamente- lo que sucedía debajo de sus pies. Tolomeo imaginó que la Tierra se encontraba estacionaria en el centro de todo porque tomó demasiado al pie de la letra, la evidencia aportada por sus propios sentidos y no acertó a la hora de cuestionar su significado. Pero la Cosmología proporcionó el estímulo, y es dudoso que cuestiones más prácticas hubiesen proporcionado suficiente inspiración.

La Cosmología primitiva está bien surtida de imaginación mitológica, pero es deficiente en contenidos objetivos. Nos encontramos visiones de una Tierra plana sostenida por un elefante, del dios Sol guiando su carruaje a través del cielo, y de estrellas que cuelgan de cuerdas y se apagan durante el día. El punto de vista pitagórico no era menos místico, si bien concedía mayor importancia al significado mágico de los números introdujo la Matemática en escena. Platón sugería que la Tierra se encontraba en el centro del Universo, con todos los demás objetos girando a su alrededor en una serie de esferas huecas. También creía que la Tierra era redonda, y en su creencia, de inspiración pitagórica, de que todo, incluso el movimiento de los cielos, era una manifestación de la regularidad matemática, resultó enormemente influyente.

Eudoxio, un extraordinario matemático y que también inventó la teoría rigurosa de los números irracionales, se dio cuenta de que el movimiento observado de los planetas con respecto a las estrellas, no se ajustaba al ideal platónico. Las trayectorias seguidas por los planetas estaban inclinadas, y muy frecuentemente, parecía como si éstos se movieran hacia atrás. Eudoxio concibió una descripción matemática en la cual se consideraba que los planetas estaban montados sobre una serie de veintisiete esferas concéntricas, cada una girando alrededor de un eje sostenido por la más próxima. Sus sucesores mejoraron el ajuste de las observaciones añadiendo esferas adicionales. Sobre el año 230 a. de C. Apolonio suplantó este sistema con una teoría de los egipcios, en la que los planetas se movían en pequeños círculos cuyos centros, a su vez, giraban en círculos mayores. Claudio Tolomeo, que vivió en Alejandría entre los años 100-160 d. de C., perfeccionó el sistema de los egipcios hasta que éstos se ajustaron tan bien a las observaciones, que nada los suplantó durante 1 500 años. Fue un triunfo de la ciencia antigua. [2]

I.2.2 Engranajes de los Griegos y la Visión de un Universo Mecánico

La metáfora de que los cielos se muevan análogamente a como funciona la maquinaria de un reloj puede tener una base más literal. Nuestras ideas sobre la cultura griega antigua provienen de una vertiente intelectual: Filosofía, Geometría, Lógica. La tecnología ha recibido menos atención. En parte, esto es debido a que han sobrevivido pocos ejemplos de la tecnología griega. Ahora sabemos que los griegos valoraban la Lógica, matemática intelectual, por encima de la Logística, matemática práctica. Pero nuestras fuentes sobre esta visión del tema no son imparciales. La historia completa de la tecnología griega puede que no se conozca nunca, pero los indicios con los que contamos son fascinantes.

En 1900, unos pescadores estaban buscando esponjas, alejados de la costa de la diminuta isla griega de Antikitera (enfrente de la gran isla griega de Kitera, entre Grecia y Creta). Hallaron los restos de un barco que se hundió durante una tormenta, en el año 70 a. de C., mientras éste navegaba de Rodas a Roma. Su botín incluía estatuas, cerámica, ánforas y monedas, junto con un conjunto de dibujos y varias partes metálicas, que reveló trazas de engranajes. En 1972, Derek de Solla Price observó este material con rayos X y fue capaz de construir el complicado dispositivo de 32 ruedas dentadas (ver figura 1.2.2-1). Pero, ¿para qué servía? Analizando su estructura, Derek decidió que debía usarse para calcular las posiciones del Sol y de la Luna con respecto al fondo de las estrellas.

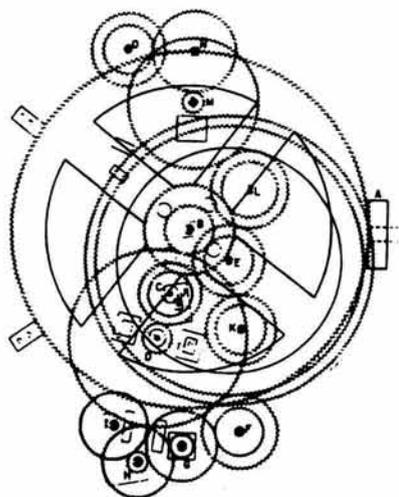


Figura 1.2.2-1. Engranaje del mecanismo de Antikitera, calculador planetario de la Grecia antigua.[2]

El mecanismo de Antikitera tiene características muy interesantes, entre ellas, el de ser el ejemplo más remoto que se conoce de un engranaje diferencial. Tales engranajes se emplean ahora en ejes traseros de automóviles para que las ruedas se muevan a diferentes velocidades, por ejemplo al tomar una curva. En el mecanismo de Antikitera era necesario un engranaje diferencial para calcular las fases de la Luna, sustrayendo el movimiento del Sol del de la Luna. El aparato es muy complejo y está fabricado con una precisión considerable. Lo que indica la existencia de una larga tradición en la Grecia antigua en el corte de engranajes y en máquinas engranadas. No han sobrevivido más ejemplos, tal vez porque las máquinas viejas y rotas fueron fundidas para aprovechar su metal. [2]

El matemático británico Christopher Zeeman escribió sobre la influencia de tales aparatos en la ciencia griega, en un artículo llamado "Gears from the Greeks" (*Proceedings of the Royal Institution*, vol. 58, 1986):

"Primero vinieron los astrónomos observando los movimientos de los cuerpos celestes y recogiendo datos. En segundo lugar, los matemáticos inventando la notación matemática para describir los movimientos y ajustar los datos. En tercer lugar, los técnicos haciendo modelos mecánicos para simular aquellas construcciones matemáticas. En cuarta posición, generaciones de estudiantes que aprendieron Astronomía a partir de estas máquinas. En quinto lugar, científicos, cuya imaginación estaba tan deslumbrada por generaciones de dicho aprendizaje que realmente creyeron que era así como funcionaban los cielos. En sexto lugar vinieron las autoridades, quienes insistieron sobre el dogma recibido. Y así, la raza humana enloqueció al aceptar el sistema tolemaico durante un millar de años."

I.2.3 De Copérnico a Newton

En 1473 Nicolás Copérnico se dio cuenta de que la Teoría de Tolomeo contenía un gran número de epiciclos idénticos y descubrió que podía eliminarlos si consideraba que la Tierra giraba alrededor del Sol. Los epiciclos idénticos eran trazas del movimiento de la Tierra, superpuesto sobre los movimientos de los restantes planetas. De golpe, esta Teoría Heliocéntrica redujo el número de epiciclos a treinta y uno.

La visión de la Teoría de Tolomeo que Copérnico tenía dejó igualmente insatisfecho a Johannes Kepler. Él heredó una serie de observaciones astronómicas nuevas y extremadamente precisas, realizadas por Tycho Brahe, ya que estaba buscando las estructuras matemáticas que había detrás de éstas. Tenía una mentalidad abierta, tan abierta que algunas de sus ideas, tal como la relación entre la separación de las órbitas planetarias y los poliedros regulares, parecen bastante ridículas hoy en día. Posteriormente Kepler abandonó esta teoría cuando se dio cuenta de que estaba en conflicto con sus observaciones; no disponemos todavía de ninguna teoría sobre la formación de los planetas que explique correctamente los tamaños y las distancias entre ellos.

Finalmente Kepler fue forzado, casi contra su voluntad, a formular su primera ley: los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol. Hay otras dos leyes implícitas en este trabajo que posteriormente adquirieron un enorme significado. La segunda ley establece que la órbita de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. La tercera ley sostiene que el cubo de la distancia entre el Sol y el planeta, es proporcional al cuadrado del período de su órbita. La Teoría de Kepler es estéticamente mucho más atractiva que un revoltijo de epiciclos, pero al igual que sus predecesoras, es puramente descriptiva. Dice qué hacen los planetas, pero no da un fundamento unificador. Antes de que la Cosmología pudiese ir más allá de Kepler, hubo que resignarse a ser realista y poner los pies en la tierra.

En la Universidad de Pisa, en la década de 1580, se dieron importantes avances en el conocimiento humano. Pero la excitación no podía continuar todo el tiempo. Durante un servicio religioso, un estudiante debió aburrirse, puesto que su atención se distrajo y comenzó a mirar una gran lámpara que se balanceaba con la brisa. Ésta oscilaba lentamente, pero él notó que cuando la oscilación era más amplia, su velocidad aumentaba, de modo que el tiempo empleado en una oscilación permanecía constante. Por aquel entonces aún no se habían inventado relojes precisos, de modo que midió el tiempo empleado por la lámpara usando su pulso.

El estudiante era Galileo Galilei, quién entró a la Universidad de Pisa a la edad de 17 años para estudiar Medicina, recibiendo clases particulares de matemáticas. Galileo nació en Florencia en 1564 y murió en 1642. Del mismo modo que fue un científico de primer orden, también fue una destacada figura literaria, un escritor elegante y hábil, y el primer divulgador de la ciencia. Tenía un barco de herramientas con el que fabricó sus propios telescopios: descubrió que Júpiter tenía cuatro lunas, los primeros cuerpos celestes conocidos que no giraban alrededor de la Tierra.

Galileo tenía talento para el pensamiento claro, prefiriendo las explicaciones lógicas a los argumentos extensos, ideados para complicar y oscurecer. Vivió en una época en que se aceptaban las explicaciones de los sucesos en función de sus propósitos religiosos. Por ejemplo, la lluvia caía porque su propósito era regar los cultivos, una piedra lanzada al aire caía al suelo porque ese era el lugar que le correspondía. Galileo se dio cuenta, de que las preguntas sobre el propósito de las cosas no proporcionaban a la humanidad control sobre los fenómenos naturales. En lugar de preguntar por qué cae la piedra, él buscaba la descripción precisa de cómo caía. En lugar del movimiento de la Luna, en el que él no podía influir o regular, estudió bolas rodando sobre planos inclinados. Y, en un golpe genial, confinó su atención a unas pocas cantidades claves: tiempo, distancia, velocidad, aceleración, momento.

El tiempo, en particular, le creó a Galileo muchos dolores de cabeza. No se puede medir el tiempo de una piedra cayendo, mirando cuánto se acorta una vela ardiendo. Él usó relojes de agua y el ritmo de su propio pulso, de acuerdo con el historiador Stillman Drake, canturreaba para sí mismo, marcando el ritmo del mismo modo en que lo haría un músico. Para entender mejor los fenómenos dinámicos y mejorar la precisión de sus medidas de tiempos, estudió el caso de una bola rodando sobre una pendiente suave, en lugar de una que cayera libremente. Y mediante una mezcla de experimentos ideales y reales, llegó a una elegante descripción de cómo caían los cuerpos bajo la acción de la gravedad.

De acuerdo con el espíritu de la Geometría griega –en la que todos los objetos estaban idealizados, de modo que una línea no tiene anchura y un plano no tiene espesor- Galileo idealizó su mecánica, eligió despreocuparse los efectos tales como la resistencia del aire, para poder buscar las simplicidades subyacentes. A fin de desenredar la maraña de influencia interrelacionada que controla el mundo natural, es mejor empezar estudiando cada hebra a la vez.

En los tiempos medievales se pensaba que el recorrido de un proyectil tenía lugar en tres partes: un movimiento inicial en línea recta, una porción de un círculo y una caída vertical final. Galileo descubrió que la velocidad de un cuerpo que cae aumenta a un ritmo constante. De esto dedujo el recorrido correcto, una parábola. También mostró que una bala de cañón alcanza una distancia máxima cuando se lanza con un ángulo de 45° . Encontró leyes para la composición de las fuerzas. Se dio cuenta de que, en ausencia de la resistencia del aire, una masa pesada y una ligera deben caer con la misma velocidad. Galileo tenía un sentido del humor seco, como expuso en su *Diálogo Sobre los Principales Sistemas del Mundo*:

"Yo diría que cualquiera que se considere más razonable que todo el Universo, se mueve a fin de dejar que la Tierra permanezca fija, sería más irracional que uno que escalara a la parte superior de una cúpula para tener una panorámica de la ciudad y sus alrededores, y entonces pidiera que todo el campo gire alrededor suyo, de forma que él no se moleste en girar su cabeza."

Un sistema de ley natural para los objetos celestes, otro para los objetos mundanos. Kepler con su vista puesta en el cielo y Galileo con su oído en el suelo, era casi impensable que hubiera una conexión entre los dos reinos. El Cielo era puro, inmaculado, la casa de Dios y sus ángeles; la Tierra era el lugar del hombre pecador. Un sencillo golpe de intuición cambió para siempre esta percepción.

Algunos grandes científicos han sido niños prodigio, pero el joven Isaac Newton fue un niño relativamente ordinario, excepto por su destreza para construir cosas. El gato de la familia, del que se dice que desapareció en un globo de aire caliente, lo vivió en carne propia. Newton nació en 1642 en la aldea de Woolsthorpe, fue un bebé prematuro y enfermizo. No resaltó particularmente como estudiante en el Trinity College de Cambridge. Pero cuando se produjo la gran peste, regresó a su aldea natal, alejado de la vida académica, y casi sin ayuda de nadie, pero con los antecedentes matemáticos históricos, creó la Óptica, la Mecánica y el Cálculo. Al final de su vida fue director de la Real Casa de Moneda y presidente de la Real Sociedad Inglesa. Murió en 1727.

Galileo descubrió que un cuerpo que se mueve sometido a la gravedad terrestre adquiere una aceleración constante. Newton perseguía un objetivo mayor: un código de leyes¹ que gobernase el movimiento de un cuerpo bajo todas las combinaciones de fuerzas.

En cierto sentido, el problema era geométrico y no dinámico. Si un cuerpo se mueve con una velocidad uniforme, entonces la distancia que recorre es el producto de su velocidad por el tiempo transcurrido. Si se mueve con velocidad no uniforme no existe una fórmula tan simple. Los matemáticos anteriores a Newton hicieron importantes progresos, mostrando que varias cuestiones dinámicas básicas podían expresarse en forma geométrica. Sin embargo, rara vez era fácil resolver los problemas geométricos.

¹ En realidad Newton nunca formuló "leyes" él les llamó: "principios", de ahí el nombre de su libro con el que dio a conocer sus ideas, *Principia*. Pero, nosotros las conocemos como leyes y no como principios.

Una gráfica que muestre cómo varía la velocidad de un cuerpo con el tiempo, tiene la forma de una curva. Por argumentos geométricos, puede mostrarse que la distancia total recorrida es igual al área comprendida bajo la curva. Similarmente, la velocidad es la pendiente de la tangente de otra gráfica, que representa la distancia frente al tiempo. Pero, ¿Cómo hallar estas áreas y tangentes? Newton, e independientemente Gottfried Leibniz, resolvieron estos problemas dividiendo el tiempo en intervalos cada vez más diminutos. El área comprendida bajo la curva, resulta ser la suma de las áreas de un gran número de estrechas bandas verticales. Newton y Leibniz demostraron que el error cometido por tal aproximación resulta muy diminuto, a medida que el intervalo temporal se hace cada vez menor, y argumentaron que "en el límite" el error puede llegar a anularse totalmente. Del mismo modo, la pendiente de una tangente puede calcularse considerando dos valores del tiempo muy próximos y permitiendo que la diferencia entre ambos sea arbitrariamente pequeña.

Ningún matemático pudo proporcionar de forma lógica una justificación rigurosa para este método, pero ambos estaban convencidos de que era correcto. Leibniz hablaba de cambios "infinitesimales" en el tiempo, Newton tenía una imagen más física de las cantidades que influyen continuamente, y las llamó "fluentes y fluxiones". [2]

1.2.4 De Newton a Poincaré

La revolución del pensamiento científico que culminó con Newton, nos llevó a una visión del Universo como un gigantesco engranaje que funcionaba como un mecanismo de extraordinaria precisión. De acuerdo con esta visión, una máquina es, por encima de todo predecible. Bajo las mismas condiciones realizará las mismas cosas. Un ingeniero que sepa las especificaciones de la máquina y su estado en un momento dado puede, en principio, calcular exactamente lo que hará en cualquier instante posterior.

Newton formuló sus leyes en la forma matemática que no sólo relacionaban entre sí cantidades, sino también las velocidades de cambio de dichas cantidades. Cuando un cuerpo cae libremente bajo una gravedad constante, no es su posición la magnitud que permanece constante; si así fuera, permanecería suspendido sin soporte alguno. Tampoco es la velocidad -el ritmo de cambio de la posición- la magnitud que permanece constante. Cuanto más cae un cuerpo, más rápido lo hace: por eso es más peligroso caerse desde un edificio alto que desde uno bajo.

Es la aceleración -el ritmo de cambio del ritmo de cambio de la posición- la que es constante. Quizá podamos comprender ahora por qué se necesitaron tantos siglos para que se descubrieran estas regularidades dinámicas: la ley es simple sólo para aquellos que adquieren una nueva concepción de la simplicidad.

Las ecuaciones que involucraron ritmos de cambio se denominaron ecuaciones diferenciales. El ritmo de cambio de una cantidad se determina mediante la diferencia de sus valores en dos instantes cercanos, la palabra "diferencial" impregna, recordándonos dicho concepto, las matemáticas: cálculo diferencial, coeficiente diferencial. La resolución de ecuaciones algebraicas, aquéllas que no involucran ritmos de cambio, no es siempre fácil; la resolución de ecuaciones diferenciales es un orden de magnitud más difícil. Mirando en retrospectiva desde finales del siglo XX, la sorpresa es que tantas ecuaciones diferenciales importantes puedan ser resueltas, al menos desde un punto de vista ingenuo. Ramas enteras de la Matemática han brotado de la necesidad de entender una única, crucial, ecuación diferencial.

La palabra "análisis" adquirió una especial connotación durante el siglo XVIII, cuando el aspecto teórico del Cálculo se fue extendiendo sustancialmente. El principal artífice de tal desarrollo fue Leonard Euler, el matemático más prolífero de todos los tiempos. Euler también fue responsable de grandes partes de la aplicación del Cálculo a la Física Matemática. Nacido en Suiza en 1707, fue educado en primer lugar para la vida religiosa, pero pronto se decidió por las matemáticas y comenzó a publicar a la edad de 18 años. A los 19, ganó un importante premio matemático concedido por la Academia Francesa de Ciencias, sobre un problema relacionado con los mástiles de los buques. En 1733, fue nominado por la Academia de San Petersburgo en Rusia. En 1741 se mudó a Berlín, pero regresó a Rusia en 1766 a requerimiento de Catalina la Grande. En consecuencia, Suiza le recuerda como un gran matemático suizo, Rusia como un gran matemático ruso, y Alemania como un gran matemático alemán. Su vista comenzó a fallar y en 1766 estaba totalmente ciego. Esto no tuvo efectos notables en su prodigiosa y original producción matemática.

El campo de la Mecánica Analítica contribuyó con las primeras pinceladas newtonianas: la Mecánica se basaba total y explícitamente en el Cálculo, para el que el objetivo era, primero, hallar ecuaciones diferenciales que gobernaban el movimiento del sistema de interés, y, luego, resolverlas. Pero pronto comenzaron a abrirse áreas completamente nuevas.

Los antiguos pitagóricos buscaban la armonía en los números o, más exactamente, números en armonía, pues la numerología de la música fue su mayor descubrimiento. Muchos habían querido detectar una afinidad entre la Matemática y la Música. Sea como fuere, se obtuvo una cantidad asombrosa de importantes resultados matemáticos, a partir del problema de las vibraciones de una cuerda de violín. Puede argumentarse, por ejemplo, que sin éste no dispondríamos ni de la radio, ni de la televisión. Resolviendo una ecuación diferencial apropiada, Brook Taylor descubrió en 1713 que la forma fundamental de una cuerda vibrante es una gráfica sinusoidal. En 1746, Jean Le Rond D'Alembert se percató de que también eran posibles otras formas. D'Alembert era hijo ilegítimo de madame de Tencin, un famoso personaje y de su amante, el caballero Destouches. El fruto de esta relación fue abandonado en las escaleras de la iglesia de Saint Jean-le-Rond de Paris, de ahí su inusual nombre de pila.

D'Alembert llevó a cabo un análisis general de la cuerda vibrante. Suponiendo que la amplitud de la vibración es pequeña (para eliminar términos indeseables de las ecuaciones), escribió una ecuación diferencial que debía ser satisfecha por la cuerda. Pero ésta era un tipo nuevo de ecuación, una ecuación de derivadas parciales. En tales ecuaciones aparecen los ritmos de cambio de algunas cantidades con respecto a diversas variables. Para la cuerda de violín, estas variables son de posición de un punto sobre la cuerda y el tiempo. D'Alembert consiguió mostrar que la ecuación se satisface por la superposición de dos ondas de forma arbitraria, una viajando hacia la izquierda y otra hacia la derecha. Euler se apresuró a completar este descubrimiento. Se le ocurrió que la forma ondulada sinusoidal única puede acoplarse con sus armónicos superiores: ondas con la misma forma pero vibrando al doble, triple, cuádruple... de la frecuencia fundamental. Euler analizó las vibraciones de campanas y tambores en una "Nueva Teoría de la Música". Daniel Bernoulli extendió los resultados a los tubos de los órganos. Después de la Música vino la Física. Joseph Louis Lagrange, un joven que comenzaba a hacerse de un nombre, aplicó en 1759 estas ideas a las ondas del sonido y al cabo de diez años estaba lista una Teoría de la Acústica comprensible y lograda.

El siglo XVIII fue una época de poderío marítimo, que exigía conocimientos sobre el modo en que fluyen el agua y otros fluidos. En 1752, Euler enfocó su atención a la Dinámica de Fluidos y en 1755 estableció un sistema de ecuaciones de derivadas parciales, para describir el movimiento de un fluido sin viscosidad. Consideró fluidos incomprensibles (agua) y comprensibles (aire). Modeló el fluido como un medio continuo, infinitamente divisible, y describió su movimiento en términos de variables continuas, que dependen de la posición de las partículas del fluido: velocidad, densidad, presión.

Las diversas ramas de la Física fueron cayendo una a una, bajo el dominio matemático. Joseph Fourier desarrolló una ecuación para describir el flujo de calor y obtuvo un método nuevo y potente para resolverla, ahora conocido como Análisis de Fourier. La idea principal consiste en representar cualquier forma de onda como una superposición de curvas sinusoidales.

La deformación de materiales sometidos a tensión, fundamental para la Ingeniería, condujo a las ecuaciones de la elasticidad. Análisis más profundos de la gravitación condujeron a ecuaciones que ahora denominamos en honor de Pierre Simon Laplace y de Simon Denis Poisson. Las mismas ecuaciones aparecían de nuevo en Hidrodinámica y Electroestática, y se desarrolló una generalización común, conocida como la "Teoría del Potencial".

La Teoría del Potencial permitió a los matemáticos abordar problemas tales, como la atracción gravitatoria debida a una masa elipsoidal. Esto es importante en Astronomía, puesto que la mayoría de los planetas no son esferas, sino que están ligeramente achatados en sus polos. En el siglo XVIII (y principios del XIX) fue un periodo en el que se forjaron la mayoría de las grandes teorías de la Física Matemática Clásica, siendo las principales excepciones las ecuaciones de Navier-Stokes, del flujo de un fluido viscoso, y las ecuaciones del Electromagnetismo, debidas a James Clerk Maxwell, que aparecieron un poco después. El descubrimiento de las ondas de radio vino a través de las ecuaciones de Maxwell.

Surgió un paradigma contundente. La forma de modelar la naturaleza era mediante ecuaciones diferenciales. Pero hubo un precio que pagar. Los matemáticos del siglo XVIII se dieron de topes en la pared, en un problema que ha plagado la Mecánica Teórica hasta nuestros días. Obtener las ecuaciones es una cosa, resolverlas es otra muy diferente. El mismo Euler dijo:

"Si no nos está permitido penetrar en un conocimiento completo concerniente a los movimientos de los fluidos, no se debe a la Mecánica, o a la insuficiencia de los principios conocidos del movimiento a los que hemos de atribuir la causa. Es el mismo análisis el que aquí nos abandona"

Los principales logros del siglo XVIII consistieron en obtener ecuaciones para modelar los fenómenos físicos. Pero hubo mucho menos suerte al resolver las ecuaciones.

A pesar de eso, había un ilimitado optimismo y un sentimiento general de que los problemas de la naturaleza habían quedado ampliamente resueltos. El éxito del paradigma de la ecuación diferencial fue impresionante y vasto. Muchos problemas, incluyendo los básicos y los importantes, condujeron a ecuaciones que podían ser resueltas. Comenzó un proceso de autoselección, por el que las ecuaciones que no podían resolverse eran, automáticamente, de menos interés que aquéllas que sí se podían resolver. Por supuesto, los libros de texto a partir de los cuales las nuevas generaciones aprendían las técnicas, sólo contenían problemas resolubles. La premisa era que el Universo sigue un camino dinámico único y predeterminado. Sólo puede hacer una cosa. Pierre Simon Laplace (1749-1827), en sus *Ensayos Filosóficos Sobre Las Probabilidades*, lo expresa de la siguiente manera:

“Un ser inteligente que en un instante dado conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la forman, y que fuera lo suficientemente inmenso como para poder analizar dichos datos, podría condensar en una única fórmula el movimiento de los objetos más grandes del Universo y el de los átomos más ligeros. Nada sería incierto para dicho ser, tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos.”

De las afirmaciones de Laplace, podemos comprender el clima de entusiasmo que prevalecía en la ciencia de aquella época, cuando un fenómeno tras otro –mecánica, calor, ondas, sonido, luz, magnetismo, electricidad- eran dominados por la misma técnica. El paradigma del determinismo clásico había nacido: si las ecuaciones describen la evolución del sistema unívocamente, en ausencia de perturbaciones externas aleatorias, su comportamiento está entonces unívocamente especificado en todo instante. Sin embargo, aún había cuestiones sin respuestas, tales como el movimiento de tres cuerpos bajo la gravedad. Pero de un modo u otro, tales ecuaciones eran vistas como excepciones.

Y, de hecho, incluso el determinismo matemático de las ecuaciones del movimiento tenían huecos. Una de las idealizaciones comunes, de la Mecánica Newtoniana, es considerar partículas elásticas duras. Si colisionan dos de tales partículas, salen rebotadas con ángulos y velocidades bien determinados. Pero las leyes de Newton no son suficientes para determinar el resultado de la colisión simultánea de tres de esas partículas. Las pretensiones eran muchas y los resultados eran defectuosos.

En 1750, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) recogió las ideas de Euler y, a partir de ellas, elaboró una reformulación sobre la Dinámica. Como resultado de este trabajo se produjeron dos ideas importantes. Ambas habían estado presentes durante décadas, pero Lagrange pudo formularlas de manera concreta.

La primera idea de Lagrange fue el principio de conservación de la energía. La Mecánica Clásica reconocía dos formas de energía. La energía potencial es la energía que un cuerpo tiene en virtud de su posición. Por ejemplo, en un cuerpo gravitatorio, la energía potencial es proporcional a la altura. Un cuerpo en la cima de una colina posee más energía potencial que uno en un valle, por ello la escalada a una colina es más fatigosa que un paseo a lo largo de la playa. La energía cinética es la energía que tiene un cuerpo en virtud de su velocidad: se ha de trabajar mucho más para frenar un caballo desbocado que cuando se trota sobre él. Durante el movimiento, y en ausencia de fricción, estas dos formas de energía pueden convertirse una a la otra.

Cuando Galileo dejó caer su célebre bala de cañón desde la torre inclinada de Pisa, ésta comenzó con mucha energía potencial pero no cinética, e intercambiaba energía potencial por cinética conforme caía. Es decir, descendió y aceleró, a final de cuentas: la energía total, es decir, la energía cinética más la potencial, no cambian. Cuando una bala de cañón cae de un parapeto pierde energía potencial y, por tanto, ha de ganar energía cinética. Es decir, se acelera. La segunda ley de Newton del movimiento expresa efectivamente este argumento cualitativo en una forma cuantitativa.²

La segunda idea de Lagrange fue introducir coordenadas generalizadas. Las coordenadas son un truco para convertir la Geometría en Álgebra, asociando un conjunto de números con cada punto. Los matemáticos encontraban conveniente trabajar con varios sistemas de coordenadas, dependiendo del problema que estaban abordando. Lagrange vio que era inconveniente acarrear este tipo de cálculos en una teoría matemática. Comenzó suponiendo un sistema de coordenadas cualesquiera. Luego, con una simplicidad pasmosa, obtuvo las ecuaciones del movimiento en una forma que no dependía del sistema de coordenadas elegido. La formulación de Lagrange posee numerosas ventajas sobre la de Newton. Muchas de ellas son técnicas: son más fáciles de aplicar cuando existen ligaduras en el movimiento y evita las transformaciones de coordenadas engorrosas. Pero sobretodo es más general, más simple y más abstracta.

² $F = ma$

Estas ideas fueron proseguidas por Rowan Hamilton (1805-1865), el gran matemático irlandés. Reformuló la Dinámica de nuevo, con mayores generalidades aún. En la versión de Hamilton de la teoría, el estado de un sistema dinámico se especifica por un conjunto general de coordenadas de posición (similares a las de Lagrange) junto con un conjunto relacionado de coordenadas de momento (las velocidades correspondientes multiplicadas por la masa). Una cantidad única, ahora conocida como el hamiltoniano del sistema, define la energía total en términos de las posiciones y momentos. El ritmo de cambio con el tiempo, de las coordenadas de posición y de momento, se expresa en función del hamiltoniano mediante un sistema de ecuaciones unificado y simple.

A pesar de todos los importantes logros alcanzados en la Física y la Matemática Clásica, permanecieron sin tocar algunas áreas de la naturaleza. Los matemáticos podían calcular el movimiento de un satélite de Júpiter, pero no el de un copo de nieve en una ventisca. Podían describir el crecimiento de una burbuja de jabón, pero no el de un árbol. Los matemáticos habían podido concretar, algo del orden del Universo y las razones de ese orden, pero todavía vivían en un mundo desordenado. Creían, que gran parte del desorden (o caos) obedecía a las mismas leyes fundamentales; su incapacidad para aplicar aquellas leyes a cualquier efecto eran simplemente una cuestión de complejidad. El movimiento de dos masas puntuales podía calcularse de forma precisa. El caso de tres partículas era ya demasiado difícil para una solución completa, aunque podía resolverse de forma aproximada. El movimiento a largo plazo de los aproximadamente cincuenta cuerpos mayores en el sistema solar era imposible de controlar en su totalidad. [2]

1.2.5 La Matemática Faltante: "Probabilidad"

La Teoría de la Probabilidad se originó con un tema bastante práctico, el juego. El jugador tiene un sentido instintivo de las probabilidades en una apuesta, Girolamo Cardano (1501-1576), el erudito del juego, un genio intelectual y pícaro incorregible, fue el primero en escribir sobre la Probabilidad.

En 1654, el caballero de Mére le preguntó a Blaise Pascal (1623-1662) cómo repartir mejor las apuestas en un juego de azar cuando se interrumpe. Pascal escribió a Pierre de Fermat (1601-1665) y entre los dos encontraron una respuesta. Ésta se imprimió en 1657 en el primer libro que se dedicó igualmente a la Teoría de la Probabilidad "*De ratiocinis in ludo aleae*" de Christian Huygens.

La Probabilidad, proviene de la publicación de la obra de Laplace "*Teoría Analítica de las Probabilidades*", en 1812. De acuerdo con él, la probabilidad de un suceso es el número de maneras en que puede ocurrir, dividido por el número total de cosas que pueden suceder, sobre el supuesto de que estas últimas son igualmente probables.

Una de las partes más importantes de la Teoría de las Probabilidades es la Estadística, y ésta a su vez, centra muchos de sus estudios en la famosa distribución normal. Ésta es una curva, en forma de campana, que modela fielmente las proporciones de una población que tiene alguna característica particular.

La distribución normal fue denominada originalmente la ley del error, debido al trabajo de los astrónomos y matemáticos del siglo XVIII, quienes cuando trataron de calcular las órbitas de los cuerpos celestes, se vieron forzados a tomar en cuenta el error observacional. La ley del error describe cómo se aglomeran los valores observados alrededor de un valor promedio, y proporciona estimaciones de las posibilidades de que ocurra un error de un valor determinado. Adolphe Quetelet (1796-1874) la importó a las ciencias sociales, y aplicó el método a todo lo que se le ocurrió: medidas del cuerpo humano, delitos, matrimonios, suicidios. En comparación con la Mecánica Celeste de Laplace a la suya la tituló deliberadamente Mecánica Social. Quetelet fue lo suficientemente hábil para extraer conclusiones generales de la supuesta constancia de los valores sociales, y sugirió la idea de un hombre promedio. No sólo pensaba en la condición humana como una especie de dinámica social, quería ocuparse de ella como si fuese un ingeniero. Ajustando, estabilizando, amortiguando las oscilaciones. Para él el hombre promedio no era una abstracción matemática, sino un ideal moral.

Las ciencias sociales difieren de las ciencias físicas en muchos aspectos, uno de los cuales es que los experimentos controlados son raramente realizables en las ciencias sociales. Si un físico desea examinar el efecto del calor en una barra de metal, puede calentarla a varias temperaturas y comparar los resultados. Si un economista desea examinar el efecto de una política fiscal en la economía de un país, puede aplicarla o no, pero no puede permitirse el lujo de aplicar diferentes regímenes fiscales a la misma economía bajo las mismas condiciones. Alrededor de 1880, las ciencias sociales comenzaron a desarrollar un sustituto del experimento controlado, derivado de los primeros trabajos de Quetelet sobre la distribución normal. El trabajo más importante fue realizado por tres hombres: Francis Galton, Ysidro Edgeworth y Karl Pearson. Cada uno de ellos destacaba en su propio campo de conocimientos: Galton, en Antropología; Edgeworth, en Economía, y Pearson, en Filosofía. Entre ellos convirtieron la Estadística en una ciencia más o menos exacta.

Francis Galton (1822-1911) estudió Medicina, pero la abandonó cuando heredó una fortuna. En 1860 dedicó su atención a la Metrología y, por medio de métodos gráficos, dedujo la existencia de anticiclones a partir de un montón de datos irregulares. Tocó temas como la Educación, la Psicología, la Sociología y el estudio de las huellas digitales, pero en 1865 apareció su principal interés, la herencia genética. Galton deseaba entender cómo pasaban a las generaciones sucesivas las características heredadas. En 1863 se encontró con los escritos de Quetelet y quedó maravillado con la distribución normal. Sin embargo, el modo en él que la empleó era bastante diferente de como sugería Quetelet. Galton consideró la distribución normal como un método para clasificar datos en grupos de origen diferente, Galton razonó que la distribución normal se aplicaba únicamente a poblaciones puras, que fallaría en mezclas de poblaciones.

Pero esta imagen no satisfizo a Galton cuando pensaba en la herencia genética. Supongamos que la primera generación de una población pura tiene alturas distribuidas normalmente. Cada individuo tiene descendientes, cuyas alturas, presumiblemente, también están distribuidas normalmente. Sin embargo, el pico de altura de los descendientes, depende de cuál fue el pico de altura de los progenitores, de lo contrario, ¿Cómo podría heredarse la altura característica? De esta forma, las alturas de las sucesivas generaciones se describen por superposición de muchas distribuciones normales diferentes, pero esto no necesariamente conduce a una distribución normal. Conclusión: cuando una población pura produce la siguiente generación, la población resultante deja de ser pura. Pero esto es absurdo, la generación pura original, es a la vez, una generación resultante de la generación previa. En 1877, Galton consiguió resolver esta paradoja. Para entonces tenía numerosas generaciones de guisantes dulces que se ajustaban a la distribución normal, también tenía un curioso instrumento experimental llamado trestobillo, que simulaba la matemática, dejando caer perdigones de plomo a través de una disposición ordenada de alfileres metálicos, rebotando al azar, a la izquierda o a la derecha. Su resolución fue la siguiente, puesto que los padres proceden de una población pura, las distribuciones normales por separado correspondientes a sus descendientes no son independientes. Su comportamiento superpuesto es especial. De hecho, tiene lugar un pequeño milagro matemático: las distribuciones están relacionadas justo de tal manera que al superponerlas todas, resulta de nuevo una distribución normal.

Galton quedó impresionado con el resultado y ello le condujo a la idea de regresión. Los niños de padres altos son, en promedio, más bajos que ellos; los niños de padres más bajos son, en promedio, más altos. Esto no impide que los niños de padres altos sean más altos que los de padres bajos, pero la altura de los descendientes está así, desplazada ligeramente hacia el promedio.

Desde otra óptica, en 1873, el físico James Clerk Maxwell (1831-1879) propuso el empleo de los métodos estadísticos en una reunión de la Sociedad Británica para el Avance de la Ciencia:

“La más ínfima porción de materia que podemos someter al experimento está constituida por millones de moléculas, ninguna de las cuales se nos muestra jamás en su identidad individual. No podemos, por tanto, determinar el movimiento real de ninguna de dichas moléculas; por ello, estamos obligados a abandonar el método histórico estricto y adoptar el método estadístico para tratar con grandes grupos de moléculas. Los datos del método estadístico, tal como se aplican a la ciencia de las moléculas, son las sumas de grandes cantidades moleculares. Al estudiar relaciones entre cantidades de este tipo, nos encontramos con una nueva clase de regularidad, la de los promedios, de la que podemos fiarnos suficientemente para todos los propósitos prácticos, pero de la que no podemos pretender ese carácter de precisión absoluta que poseen las leyes de la dinámica abstracta”.

Maxwell abordó una cuestión básica: ¿Cuál es la distribución estadística de la velocidad, aleatoriamente variable, de una molécula? Comenzó con dos suposiciones físicas plausibles:

- La componente de la velocidad en cualquier dirección dada es independiente de la componente en cualquier dirección perpendicular.
- La distribución es esféricamente simétrica, es decir, trata a todas las distribuciones por igual.

A partir de estos principios básicos, sin recurrir a las leyes de la Dinámica, Maxwell presentó un argumento matemático único para demostrar que la distribución ha de ser el análogo tridimensional de la ley de error de Qutelet.

Al final del siglo XIX la ciencia había adquirido dos paradigmas muy diferentes para los modelos matemáticos. El primero y más antiguo, era el análisis de gran precisión por medio de las ecuaciones diferenciales; en principio, era capaz de determinar la evolución completa del Universo, pero en la práctica, sólo era aplicable a problemas simples y bien estructurados. El segundo era el análisis estadístico de cantidades promediadas, que trabajaban con cantidades globales del movimiento de sistemas altamente complejos. No había prácticamente contacto alguno, a nivel matemático, entre ambos métodos. Las leyes estadísticas no se calculaban como consecuencia matemática de las leyes de la Dinámica, eran algo extra y se basaban en la intuición física.

A medida que fue transcurriendo el siglo XX, la metodología estadística fue ocupando su lugar al lado del modelo determinista. Apareció una palabra nueva para reflejar que incluso el azar tenía sus propias leyes: estocástico (La palabra griega *stochastikos* significa *de buena puntería* y de este modo expresa la idea de usar las leyes del azar para el beneficio personal). La matemática de procesos estocásticos –secuencia de sucesos determinados por el azar- creció junto con los procesos deterministas.

El orden ya no fue nunca más sinónimo de ley y el desorden de fuera de ley. Ambos, el orden y el desorden, tenían leyes. Pero estas leyes eran de diferentes comportamientos. Una ley para lo ordenado, otra para lo desordenado. Dos paradigmas, dos teorías. Dos formas de ver el mundo. *El Determinismo para los sistemas simples con pocos grados de libertad, la Estadística para los sistemas complicados con muchos grados de libertad.* Cualquier sistema, era aleatorio o no lo era. Si lo era, los científicos usaban algún método estocástico; si no, preparaban sus ecuaciones deterministas.

Los dos paradigmas eran igualmente aceptados por los científicos, eran igualmente útiles, igualmente importantes, igualmente matemáticos. Iguales, pero diferentes. Muy diferentes. Los científicos sabían que eran diferentes, y sabían por qué; los sistemas simples se comportan de forma simple, los sistemas complicados, se comportan de forma complicada. Entre la simplicidad y la complejidad no puede haber un terreno común.

Pero los científicos en su afán por entender cada vez mejor las cosas se cuestionan y peor aún, cuando se sabe algo con firmeza, los cuestionamientos son más profundos. Si no se cuestiona, se vive a base de fe y no de ciencia.

¿Puede un sistema determinista simple comportarse como uno aleatorio? El progreso completo de la ciencia estaba basado en la creencia de que la forma de buscar la simplicidad en la naturaleza es hallando ecuaciones diferenciales para describirla. ¡Que pregunta tan tonta!

En el momento de la historia al que acabamos de llegar sólo se podía distinguir una voz disidente y de forma débil e incierta, era simplemente una indicación temblorosa de problemas futuros, dicha voz se elevó una sola vez, después calló, una voz que –si se escuchó– fue ignorada. Era la voz de un hombre que presumiblemente fue el matemático más grande de su época, otro revolucionario de la turbulenta ciencia de la Dinámica. La voz de un hombre que tocó el Caos...

Y se horrorizó por ello. Nacido en Nancy, Francia, el gran Henri Poincaré (1854-1912). Entre sus innumerables descubrimientos e invenciones fundó la moderna teoría cualitativa de los sistemas dinámicos. Fue un unificador, buscador de principios generales, el último de los tradicionalistas y el primero de los modernos (ver figura 1.2.5-1). Se movió, prácticamente, por todos los temas de la Matemática de su época: Ecuaciones Diferenciales, Teoría de Números, Análisis Complejo, Mecánica, Astronomía, Física Matemática. Su creación más destacable fue la Topología: el estudio general de la continuidad. Él la denominó *análisis situs*, análisis de la posición. Y la aplicó a uno de los problemas más difíciles en la frontera de la Dinámica.



Figura 1.2.5-1. Henri Poincaré (1854-1912).

La memoria por la que se le concedió el premio a Poincaré se titulaba (en francés) *El Problema de los Tres Cuerpos y las Ecuaciones de la Dinámica*. Se publicó en 1890 y tenía 270 páginas en el original. La primera parte establecía propiedades de las ecuaciones dinámicas; la segunda aplicaba los resultados al problema de un número arbitrario de cuerpos moviéndose sometidos a la gravitación newtoniana.

Así, de este modo llegamos a la conclusión de que la naturaleza posee muchas regularidades que pueden ser registradas, analizadas, y tal vez, predichas y controladas. Todo en la naturaleza parecía estar regido por leyes muy precisas y exactas que explicaban el desarrollo del Universo, ahora sabemos que sistemas que obedecen leyes inmutables y precisas no siempre actúan de manera predecible y regular. Leyes deterministas pueden producir comportamientos que parecen aleatorios. [2]

Los conceptos de predicción o de repetibilidad de un experimento adquieren nuevos aspectos cuando se analizan desde la óptica del Caos, se descubrió que con reglas muy bien establecidas y con el conocimiento total de las condiciones iniciales que rigen un sistema, éste puede tomar caminos muy diferentes y no poder tener control del sistema en evolución. Es por ello que la importancia en el estudio de fenómenos que son totalmente deterministas y que producen comportamientos tan inesperados, nos lleve a tener diversas técnicas de caracterización de series tiempo así como también técnicas modernas predicción. [16]

La importancia de la caracterización de las series de tiempo radica en que nos podemos anticipar un paso, es decir, podemos encontrar la explicación de por qué algunas series son mejores predecibles que otras, y cuáles son imposibles de predecir, aún con las mejores técnicas modernas de predicción que son muy poderosas como las llamadas técnicas neurocomputacionales y otras relacionadas. En este campo se encuentran las Redes Neuronales Artificiales, y la literatura ha mostrado que actualmente son las mejores en cuanto a predicción del fenómeno en estudio por series de tiempo, debido a que su importancia radica en que puede tratar con series que son muy complejas, no-lineales y que además no es necesario contar con las ecuaciones matemáticas que gobiernan o describan tales fenómenos. [16, 23, 31, 32, 33]

CAPÍTULO II

EL PROBLEMA DE LA NO-LINEALIDAD



“A los físicos les gusta pensar que todo lo que hay que decir es, esas son las condiciones, ahora ¿qué pasa después?”

-Richard P. Feynman

Remedios Varo, "Planta Insumisa", 1961, Óleo sobre masonite, (84x62 cm).

Texto de Remedios Varo: Este científico experimenta con plantas y vegetales diversos. Está perplejo porque hay una planta rebelde. Todas están ya echando sus ramas en forma de figuras y fórmulas matemáticas, menos una que insiste en dar una flor y la única ramita matemática que echó al principio y que cae sobre la mesa era muy débil y mustia y además equivocada pues dice "dos y dos son casi cuatro". Cada pelo del científico es una fórmula matemática.

Capítulo II

EL PROBLEMA DE LA NO-LINEALIDAD

II.1 Sistemas Lineales y No-Lineales

Como se mencionó en el primer capítulo el Caos se puede entender de dos formas, una filosófica y otra matemática; sin embargo, para los fines de este capítulo necesitamos describir un tipo de comportamiento particularmente complejo que algunos sistemas dinámicos presentan. Caos en sí es realmente sólo un tipo de comportamiento que se exhibe en estos sistemas. Su esfera de influencia está más ligada a la llamada "Dinámica No-Lineal", el estudio de este comportamiento dinámico lo centraremos con el fluir del tiempo (que es, el comportamiento en tiempo) de un sistema no-lineal. Iniciemos con la siguiente definición, aunque burda, nos indicará el camino para llegar a una más satisfactoria:

Un sistema no-lineal es aquel que se puede modelar matemáticamente con ecuaciones que en algunos casos evolucionan con el tiempo y éstas son no-lineales; esto es, las variables dinámicas que describen las propiedades del sistema (por ejemplo, posición, velocidad, aceleración, presión, etc...) aparecen en las ecuaciones en una forma que está lejos de tener variables con exponente 1.

Se dice que un sistema es lineal cuando y sólo cuando la siguiente condición se satisface: Supóngase que $g(x,t)$ y $h(x,t)$ son soluciones linealmente independientes, de la ecuación del sistema que evoluciona con el tiempo; entonces $c g(x,t) + d h(x,t)$ es además una solución, donde c y d son

cualesquiera constantes reales o complejas. $g(x,t)$ y $h(x,t)$ son funciones linealmente independientes en una cierta región siempre que la combinación lineal $\alpha g(x,t) + \beta h(x,t) = 0$ exige que $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ para toda x, t en la región mencionada.

Además se puede expresar la noción de linealidad en términos de la respuesta de un sistema a un estímulo. Suponga que $h(x,t)$ da la respuesta del sistema a un estímulo particular $S(t)$. Si se cambia $S(t)$ a $2S(t)$, un sistema lineal tendrá la respuesta $2 h(x,t)$. Para un sistema no-lineal, la respuesta será más grande o más pequeña que $2 h(x,t)$.

Ilustremos esta definición con dos ejemplos de la Mecánica elemental: un sistema lineal, el otro no-lineal. En la Física clásica el comportamiento de un sistema que consiste de una partícula con masa m , sujeta a una fuerza F_x , que actúa en la dirección del eje x , y que está restringida a moverse sólo en esa dirección se expresa según la Segunda Ley de Movimiento de Newton:

$$F_x(x,t) = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.1-1)$$

En el caso de una masa sujeta a la fuerza que ejerce un resorte ideal sobre éste, dicha fuerza está dada según la Ley de Hooke mediante:

$$F_x(x) = -kx \quad (2.1-2)$$

Aquí x es el desplazamiento de un resorte desde su posición de equilibrio (donde $F_x = 0$), y k es llamada la constante del resorte, que es una medida de su rigidez. Combinando las ecuaciones (2.1-1) y (2.1-2), se encuentra la ecuación que nos indica cómo evoluciona el sistema con el tiempo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (2.1-3)$$

Esta ecuación es lineal en x y en la segunda derivada de x . En efecto, sean x_1 y x_2 dos soluciones de (2.1-3) y a y b , dos constantes reales o complejas, $\frac{d^2(ax_1 + bx_2)}{dt^2} = a\left(-\frac{k}{m}x_1\right) + b\left(-\frac{k}{m}x_2\right)$ por la linealidad de la derivada.

En consecuencia tenemos frente a nosotros un sistema modelado por una ecuación **lineal**. Si la masa se desplaza de la posición de equilibrio y se

libera, ésta oscilará cerca de la posición de equilibrio sinusoidalmente con una frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1-4)$$

Si la fuerza F_x tiene una dependencia de x más complicada, por ejemplo, si $F_x = bx^2$, entonces el modelo de ecuación que evoluciona con el tiempo es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{b}{m} x^2 \quad (2.1-5)$$

Si x_1 y x_2 son soluciones, entonces $(ax_1 + bx_2)^2 \neq ax_1^2 + bx_2^2$ y en consecuencia el sistema modelado es **no-lineal**, debido a que la posición de la partícula aparece en la ecuación elevada al cuadrado ¡Y el cuadrado de la suma no es igual a la suma de los cuadrados de los sumandos! [12]

II.2 La Importancia de la No-Linealidad

La Dinámica No-lineal está inmersa en el estudio de los sistemas cuyas ecuaciones que evolucionan con el tiempo son no-lineales. ¿Por qué es importante estudiar la no-linealidad? La idea básica es la siguiente: Si un parámetro que describe un sistema lineal, como la constante de rigidez k en la ecuación (2.1-3), es modificado ligeramente, entonces la frecuencia y amplitud de las oscilaciones resultantes cambiarán, pero la naturaleza cualitativa del comportamiento (simples oscilaciones armónicas en este ejemplo) permanecerá casi igual. En efecto, cambiando proporcionalmente los parámetros longitud y tiempo de los ejes, se observa que el comportamiento para cualquier valor de k es semejante para algún otro valor de k .

Como veremos posteriormente, para sistemas no-lineales, un cambio pequeño en uno de sus parámetros puede conducir a cambios radicalmente diferentes tanto en el comportamiento cuantitativo como en el cualitativo. Para un valor definido, es posible que el comportamiento sea periódico, para otro valor ligeramente diferente, es posible que el comportamiento sea completamente aperiódico. Se podría señalar que casi todos los sistemas reales son no-lineales al menos en alguna extensión. [12]

II.3 La No-Linealidad y el Caos

Como se había mencionado anteriormente, modificando ligeramente los parámetros de entrada en sistemas no-lineales, a veces muy simples, éstos pueden dar lugar a un comportamiento complejo llamado Caos. El sustantivo *Caos* y el adjetivo *caótico* con frecuencia son usados para describir cómo en un sistema dado, al transcurrir el tiempo, evoluciona en un movimiento aperiódico (es decir que nunca se repite exactamente igual) y es *aparentemente* aleatorio o ruidoso. Subrayando que esta aleatoriedad caótica es aparente y tiene un orden bien definido, en algún sentido, por las ecuaciones que describen el sistema. De hecho, la mayoría de los sistemas que analizaremos en el capítulo 5 son completamente determinísticos, aunque muchos de los fenómenos que se encuentran en la naturaleza no cuentan con modelos matemáticos que los describan hasta el momento. En general, se necesitan las siguientes hipótesis para determinar el comportamiento de un sistema, que en general suelen llamarse *determinísticos*:

- 1.- Ecuaciones que evolucionan con el tiempo;
- 2.- los valores de los parámetros que describen el sistema;
- 3.- las condiciones iniciales.

Por ejemplo, el desplazamiento horizontal y la velocidad dx/dt con $t=0$ para las ecuaciones (2.1-3 y 2.1-5), en principio determinan completamente el subsecuente comportamiento de dicho sistema. Ahora nuestro problema es cómo estudiar y comprender esta aparente aleatoriedad que subyace en una ecuación totalmente determinística.

Si vemos un sistema con un comportamiento complejo que parece aleatorio, podemos tratar de explicarlo dando un argumento basado en la noción de "ruido" o uno basado en el de la "complejidad". Si estamos de acuerdo con el primer argumento, entonces en consecuencia el comportamiento complejo puede deberse a la influencia de efectos externos que no fueron controlados como picos eléctricos, vibraciones mecánicas o fluctuaciones de temperatura. Ya que estas perturbaciones externas están cambiando de una forma incontrolada (y tal vez aleatoria). Por el otro lado, si estamos de acuerdo con el argumento de complejidad, vemos que la mayoría de los sistemas reales en Biología, Química, Física, Ingeniería, y en muchas disciplinas más, están hechos de billones y billones de átomos y moléculas, todos ellos interactuando, y debido a que no se tiene control preciso (o aun conocido) del comportamiento de todos esos átomos y

moléculas (tal vez, lo mejor que se puede hacer es controlar su comportamiento promedio), no es sorprendente que esta carencia de control conduzca a fluctuaciones y aleatoriedades en el comportamiento total del sistema.

Para ser un poco más precisos, podemos decir que esos sistemas complejos tienen muchos *grados de libertad*¹, y su actividad es lo que conduce al comportamiento aparentemente aleatorio. Por supuesto, en muchos casos, ambos, ruido y complejidad, pueden ser factores que contribuyen en gran medida a que el sistema contenga un mayor número de grados de libertad.

Una de las consecuencias del estudio del Caos es que éste provee una explicación alternativa para esta aparente aleatoriedad -una que depende no sobre ruido sino sobre complejidad-. El comportamiento caótico aparece en sistemas que están esencialmente libres de ruido y son además relativamente simples -sólo unos pocos grados de libertad están activos-. Por supuesto, si creemos que el Caos juega un papel en cualquier experimento dado, necesitamos establecer que el ruido no es un factor mayor, y que debemos saber el número de grados de libertad activos. La Teoría del Caos nos provee herramientas para llevar a cabo este análisis.
[12]

Hasta aquí, se ha enfatizado el estudio del comportamiento de un sistema que evoluciona con el *tiempo*. Cabe mencionar que otra rama importante de la Dinámica No-lineal extiende este estudio a esos sistemas que tienen una extensión espacial significativa, pero no será objeto de estudio de esta tesis.

¹ **Grados de libertad:** El interés que el espacio de fase presenta para los dinamistas está ligado precisamente al hecho de que debe contener toda la información sobre la dinámica del sistema estudiado. Así pues, hay que elegir las magnitudes necesarias y suficientes para la determinación de esta dinámica. Además, dichas magnitudes tienen que ser independientes para que cada una de ellas aporte su propia información. Ello significa también que si una de ellas no está definida, subsiste una cierta libertad en la determinación del estado considerado. En el caso del péndulo, por ejemplo, si definimos en un instante dado la posición, nos queda todavía plena libertad para fijar la velocidad. En cambio, si la posición y la velocidad ya han sido establecidas, toda la dinámica queda definida. Llegamos así a la noción de grados de libertad del sistema, que consideraremos igual a la dimensión del espacio de fase, aunque pueden hallarse otras definiciones en la literatura. El volante del péndulo, por ejemplo, cuyo espacio de fase tiene dos dimensiones, es un sistema con dos grados de libertad. Por oposición, el agua turbulenta de un torrente posee un gran número de grados de libertad debidos a la presencia de un gran número de tamaños y velocidades distintos. En un espacio de fase de sólo tres dimensiones (y, *a fortiori*, por supuesto, en un espacio de fase de dimensión mayor) se pueden encontrar atractores dotados de sensibilidad a las condiciones iniciales, bastan pues tres grados de libertad para que un sistema dinámico no-lineal pueda volverse caótico.

II.4 Los Fenómenos No-lineales

A lo largo de muchos años, hemos visto que en diversas ciencias se han ido elaborado poco a poco estudios sobre los fenómenos no-lineales y cómo en algunas situaciones no han sido posible describirlos de manera satisfactoria, en otros casos sencillamente se han eludido. Por ejemplo, en el caso de la Meteorología, un problema muy importante es poder predecir el clima que prevalecerá no sólo al día siguiente, sino una semana, un mes, un año después. Sin embargo, a pesar de que esta ciencia se ha desarrollado bastante y mucha gente ha trabajado en ella durante más de un siglo, este tipo de predicciones no ha podido llevarse a cabo de manera satisfactoria. Lo mismo pasa en muchas otras áreas.

En la Física podemos mencionar el fenómeno de la turbulencia. Cuando un fluido se mueve a lo largo de un tubo, en ciertas condiciones el fluido lo hace de manera muy tranquila y regular; se dice que el flujo es laminar y sus propiedades sí han podido ser determinadas. Sin embargo, en otras circunstancias, por ejemplo si aumentamos la presión para aumentar el fluido hacia la salida, el flujo se vuelve turbulento: empiezan a aparecer primero pequeños remolinos, después remolinos más y más grandes, y el movimiento del fluido se vuelve muy irregular. Se dice que el flujo ha entrado en turbulencia. Este efecto no se ha podido entender satisfactoriamente en más de cien años de estudio de la Hidrodinámica.

En la Economía tampoco se han podido entender los motivos por los cuales en cierto momento el índice de la bolsa de valores empieza a subir y luego comienza a descender. En muchas ocasiones parece ser un fenómeno azaroso.

Los casos anteriores ilustran algunos de los problemas que han quedado sin solución. Sin embargo, con el advenimiento de los estudios de la Dinámica No-lineal se ha podido tener una interpretación diferente del fenómeno que es bastante prometedora. Un aspecto importante, que es común a diferentes fenómenos, es la posibilidad de que se puedan hacer predicciones sobre los mismos. Por ejemplo, si se sabe que un día está lloviendo, se quisiera predecir si seguirá esta situación al día siguiente o si se mantendrá dentro de dos días más. Es decir, ¿existirá la posibilidad de poder predecir lo que ocurrirá en el futuro si sabemos en qué situación nos encontramos ahora?

En los últimos 20 años se ha desarrollado una novedosa forma de abordar este tipo de situaciones. Resulta que muchos fenómenos completamente distintos, como la turbulencia, el clima, el índice de la bolsa de valores, las señales eléctricas, ciertas reacciones químicas y otras más, tienen comportamientos que, vistos desde perspectivas apropiadas, son muy parecidos. Debido a este hecho, trataremos un caso muy especial para ilustrar el fenómeno del así llamado Caos.

Consideraremos un problema importante en Ecología, a saber, cómo evoluciona en el transcurso del tiempo una población determinada, por ejemplo de los insectos. Si conocemos el número de insectos este año, nos podemos preguntar ¿cuántos insectos habrá el año próximo, el siguiente, y así sucesivamente?

Con el estudio que se haga quisiéramos poder encontrar una regla que nos dijera que si en un año dado hay, por ejemplo, en un determinado lugar 10 500 insectos, el siguiente año habrá 12 750. Si se puede descubrir esta regla, entonces aplicándola de año en año se podrá conocer la población en cualquier año futuro. En matemáticas, una regla de este tipo se llama función o relación de recurrencia. ¿De qué depende ésta? Pues debería hacerlo de las condiciones en que vive la población. No dará lo mismo si se trata de un lugar desértico o de una selva, si la población dispone de muchos alimentos o si más bien son escasos. Es decir, de alguna manera en la función tiene que aparecer esta información. Además, la población que habrá el año siguiente dependerá de la población que existe en este año presente. Encontrar esta función se llama hacer o construir un modelo.

La función más sencilla es la siguiente. Supondremos que la población crecerá el año siguiente con un porcentaje fijo del año actual. Por ejemplo, si la población crece año con año 10%, se tiene la siguiente situación: supongamos que en el presente año hay 10 000 insectos; entonces el año próximo aumentará en 10% este número, así, habrá un aumento de: $0.1 \times 10\ 000 = 1\ 000$. Y por lo tanto, el número de insectos que habrá el año próximo será igual al número que hay en el presente año (10 000) mas el aumento que ocurrió (1 000), es decir:

$$10\ 000 + 1\ 000 = 11\ 000 \text{ insectos}$$

El siguiente año habrá un aumento de 10% de 11 000, es decir aumentará en: $0.1 \times 11\ 000 = 1\ 100$

Y el número que habrá será: $11\ 000 + 1\ 100 = 12\ 100$

De esta manera se puede calcular el número de insectos del año que se quiera. Sin embargo, hacerlo paso por paso a un plazo de 150 años por ejemplo, sería muy engorroso. Pero puede abreviarse este procedimiento como sigue. Nos damos cuenta de que se puede encontrar la población del año siguiente (11 000 en nuestro ejemplo) haciendo la siguiente operación:

$$11\ 000 = 1.1 \times 10\ 000$$

Aquí, 10 000 es la población inicial. De la misma forma, la población en el segundo año (12 100) se puede obtener a partir de la población en el primer año (11 000) haciendo la siguiente multiplicación:

$$12\ 100 = 1.1 \times 11\ 000$$

Vemos entonces que la población en cualquier año se encuentra multiplicando 1.1 por la población del año anterior. O equivalentemente, la población del año siguiente se puede encontrar multiplicando 1.1 por la población del año presente:

$$\text{población del año próximo} = 1.1 \times \text{población del año presente}$$

La población de un año cualquiera se introduce como dato para encontrar la población del año siguiente. Repitiendo o iterando esta operación tantas veces como se quiera, se encontrará la población de cualquier año futuro, usando progresiones geométricas los cálculos anteriores se simplifican. La operación que acabamos de encontrar es la función a la que nos referimos arriba. De lo que acabamos de explicar, nos damos cuenta de que si se conoce la función y la población inicial, entonces es posible determinar con precisión la población en cualquier año futuro.

Se puede abreviar el procedimiento presentado de la manera siguiente: la letra x será la población en cierto año y la letra y la población del año siguiente. Entonces:

$$y = 1.1 x$$

Para obtener y se multiplica 1.1 por x . El 1.1 proviene del hecho que supusimos que el crecimiento sería de 10% anual. Sin embargo, no siempre será así, podrá haber otras posibilidades. Si así fuera, el 1.1 se sustituirá por otro número. De manera general, este otro número se representará con la letra q .

$$\text{Así, la función se puede escribir:} \quad y = qx \quad (2.4-1)$$

$$\text{población del año próximo} = q \times \text{población del presente año}$$

El valor numérico que tenga el factor q , que aparece en esta expresión, dependerá de las condiciones en que ocurra el aumento de la población. En la forma en que se establece el modelo considerado, el valor de q varía de 0 a 4.

Se puede representar la información contenida en esta expresión de manera gráfica, en el eje horizontal (figura 2.4-2) se miden los valores de x y en el eje vertical los valores de y . La expresión (2.4-1) queda representada por una línea recta. Mientras mayor sea el valor de q , mayor será la inclinación de la recta. Debido a que la gráfica de la ecuación (2.4-1) es una recta se dice que la expresión (2.4-1) es **lineal**.

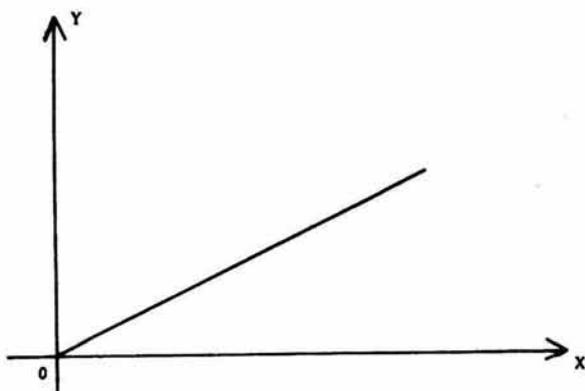


Figura 2.4-2. Gráfica del modelo que muestra la población de insectos del año siguiente (y) determinada por la población del año presente (x). En este modelo la población crece sin cesar.[39]

Una consecuencia de la aplicación de esta función es que, al transcurrir el tiempo, la población crecerá de manera indefinida; llegará un momento en que será tan grande que el número de individuos de la especie no cabría en el planeta. Es claro que, un modelo como el que acabamos de presentar, no puede describir de manera correcta las variaciones reales de una población. Si ésta crece mucho, llegará un momento en que los alimentos no alcancen para todos, además los depredadores de esta especie harán su parte, recordemos la frase de Goethe "no te preocupes, alguien cuida que los árboles no lleguen al cielo" y, por lo tanto, la población empezará a descender. Este efecto debe considerarse, por lo que la función dada por la expresión (2.4-1) se deberá modificar para que tome en cuenta que una población puede crecer, pero hasta cierto punto; más allá deberá reducirse. Por otro lado, si la población es pequeña y se tienen los recursos suficientes, y no hay muchos depredadores, entonces la población crecerá.

Lo anterior significa que la gráfica de la figura 2.4-2 deberá ser reemplazada por otra en la que para valores pequeños de x , es decir de la población, la curva suba, mientras que para valores muy grandes de x ésta disminuya. Esta gráfica se deberá ver como se muestra en la figura 2.4-3. Para que la curva disminuya, necesariamente tendrá un máximo; es decir, ésta deberá tener la forma de una campana invertida. Ahora nos damos cuenta de que esta curva ya no es una línea recta. Por lo tanto, a esta situación se le llama **no-lineal**.

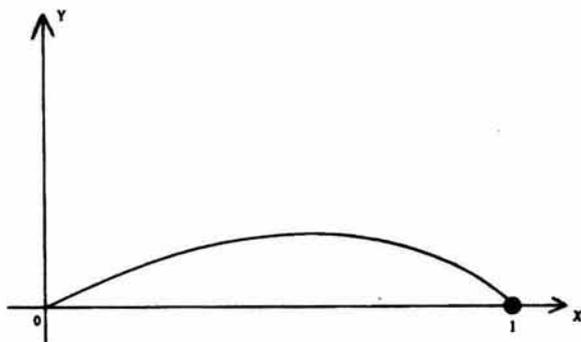


Figura 2.4-3. Modificación del modelo de la figura 2.4-2, para tomar en cuenta el hecho de que llega un momento en que la población no puede crecer indefinidamente.[39]

Una forma matemática de representar la curva de la figura anterior es la siguiente:

$$y = qx(1 - x) \quad (2.4-4)$$

y = población del año siguiente

x = población del año presente

Esta expresión implica que, dado el valor de la población en el presente año (valor representado por x), se obtendrá el valor y de la población al año siguiente. Por conveniencia se han tomado a x y y como la fracción entre los valores cero y uno. El valor cero en x representa la extinción de la población y el valor uno el máximo valor posible de la población. Lo que nos está diciendo la ecuación (2.4-4) es que si se da x , para obtener el valor de y las operaciones que hay que hacer son:

- 1) De 1 le restamos x : $[(1 - x)]$,
- 2) el resultado lo multiplicamos por x : $[x(1 - x)]$,
- 3) este último resultado lo multiplicamos por q : $[qx(1 - x)]$,

Así se obtiene el valor de y .

Por ejemplo, si $q=2.5$ y el valor de x es 0.7, obtenemos sucesivamente que:

$$1) 1-x = 1-0.7 = 0.3$$

- 2) $x(1-x) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$
3) $qx(1-x) = 2.5 \times 0.21 = 0.525$

El valor de la población al año siguiente es 0.525.

Si ahora se usa como valor inicial de la población el valor que acabamos de encontrar, es decir 0.525, siguiendo el procedimiento se obtiene que la población al tercer año será 0.6234. Siguiendo esta iteración se encuentran sucesivamente los siguientes valores de la población en años sucesivos: 0.5869, 0.6061, 0.5968, 0.6016, 0.5992, 0.6004, 0.5998, 0.6001, 0.6000, 0.6000, 0.6000, 0.6000, 0.6000, 0.6000, ...

Estos resultados nos indican que a partir de cierto momento, la población llega a un valor que ya no cambia con el tiempo. En nuestro caso, la población llega al valor 0.6000. En el caso que acabamos de tratar, se empezó con la población inicial de $x = 0.7$ y se terminó con la de 0.6000. Si en lugar de haber empezado con 0.7 se hubiera empezado con el valor inicial de $x = 0.25$ (para el mismo valor de q de 2.5), siguiendo el mismo procedimiento iterativo se obtendrían los siguientes valores:

0.4688, 0.6226, 0.5874, 0.6059, 0.5970, 0.6015, 0.5992, 0.6004, 0.5998, 0.6001, 0.6000, 0.6000, 0.6000, 0.6000, ...

¡Se llega al mismo valor final de 0.6000! Es decir, si se empieza con otra condición inicial se llega al mismo valor final. Así se comience con el valor que sea, para este caso de $q = 2.5$, siempre se llegará al mismo valor final de 0.6000.

Este resultado nos indica varias cosas acerca de la ecuación (2.4-4). En primer lugar, la población no crece indefinidamente por más iteraciones que se hagan. En segundo lugar, después de algunos años se alcanza un valor, que no depende de cuál haya sido el valor de la población inicial. Es decir, el valor 0.6000 no depende de la condición inicial. Se logra así una población estacionaria: la misma año con año.

Si se vuelve a repetir este procedimiento pero para otro valor de q en la ecuación (2.4-4) se obtendrá otro valor final. Por ejemplo, si se usa para q el valor de 2.7, el valor final que se obtiene es 0.6296. Nótese que:

para $q = 2.5$ se obtiene como valor final 0.6000

para $q = 2.7$ se obtiene como valor final 0.6296

A medida que q aumenta de valor, el valor final también aumenta su valor.

Vayamos ahora al otro extremo, el de un valor de q pequeño, por ejemplo 0.4. Si se empieza con una población de 0.3, entonces los valores de la población que se van obteniendo son los siguientes:

0.0840, 0.0308, 0.0119, 0.0047, 0.0019, 0.0007, 0.0003, 0.0001, 0.000, 0.000, ...

El valor final al que se llega es cero. ¡La población se extingue! De hecho, para los valores de q menores o iguales que 1, la población se extingue con el transcurrir del tiempo, sin importar cuál sea su valor inicial.

Ahora nos vamos al extremo de valores grandes de q . Por ejemplo, usemos para q el valor de 3.3 y el inicial de la población de 0.6000. Así se van obteniendo los siguientes valores: 0.7920, 0.5436, 0.8187, 0.4898, 0.8247, 0.4772, 0.8233, 0.4801, 0.8237, 0.4779, 0.8236, 0.4795, 0.8236, 0.4794, 0.8236, 0.4794, 0.8236, 0.4794, ...

Ahora no se obtiene un solo valor final que se vaya repitiendo año con año, sino que se va pasando del valor 0.8236 al de 0.4794 sucesivamente. Es decir, ahora la población en un año tendrá el valor de 0.4794 y al año siguiente el de 0.8236; el año siguiente se repetirá el valor de 0.4794 y luego, nuevamente el de 0.8236, y así sucesivamente. Esto significa que ahora se tienen dos valores finales posibles y que el valor de 0.4794 se alcanza no cada año sino cada dos años. Lo mismo ocurre con el otro valor de 0.8236. Es decir, el ciclo ahora dobló su valor de un año a dos; es decir, aparece ahora una periodicidad de 2 años. Nótese que los valores 0.8236 y 0.4794 no dependen del valor inicial que se escogió.

Si en lugar de 0.6 se hubiera tomado otro valor, llegaríamos a los mismos valores finales (0.8236 y 0.4794); esto siempre y cuando se mantenga el mismo valor de q , es decir, 3.3. Se dice que estamos en condiciones de periodo dos.

Para el valor de $q = 3.5$, con la condición inicial de 0.6, se obtienen, después de varias iteraciones, no dos valores finales sino cuatro, que son 0.3028, 0.8260, 0.5001 y 0.8750. Estos cuatro valores se van repitiendo, en el orden dado. Ahora esto corresponde al período 4.

Si se sigue aumentando el valor de q , se obtienen ocho valores finales. Para $q = 3.55$ por ejemplo, éstos son: 0.3548, 0.8127, 0.5405, 0.8817, 0.3703, 0.8278, 0.5060, y 0.8874. Esta situación corresponde al período 8.

Para $q = 3.651$, ahora los valores finales serán 16, que ya no escribiremos. Al seguir aumentando q se obtienen, sucesivamente, 32, 64, 128.... valores finales.

Si ahora escogemos el valor de 3.6 para q , resulta que por más iteraciones que se hagan no se llega a un valor final, en el sentido de que

este valor (o valores) se repita como en los casos mencionados anteriormente. Ahora se encuentra una sucesión de números que no se repiten y que tienen toda la apariencia de una sucesión escogida al azar, es decir, nos hemos topado con el comportamiento caótico. Si se cambia la condición inicial, pero se mantiene el valor de $q = 3.6$, se obtiene otra sucesión con números distintos de los anteriores y que tampoco adquiere valores finales que se repiten constantemente.

Estos resultados pueden observarse haciendo la siguiente gráfica (ver figura 2.4-5). En el eje horizontal mediremos los valores de q ; en el eje vertical se medirá(n) el(los) valor(es) final(es) que se obtenga(n) para el correspondiente valor de q . Así,

- para $q = 2.5$, cuyo valor final = 0.6000 le corresponde el punto A;
- para $q = 2.7$, cuyo valor final = 0.6296 le corresponde el punto B;
- para $q = 0.4$, cuyo valor final = 0 le corresponde el punto C;
- para $q = 3.3$, cuyos valores finales = 0.8236 y 0.4794 le corresponden los puntos D y E;
- para $q = 3.5$, cuyos valores finales no los escribiremos, le corresponden los puntos F, G, H, I, etcétera.

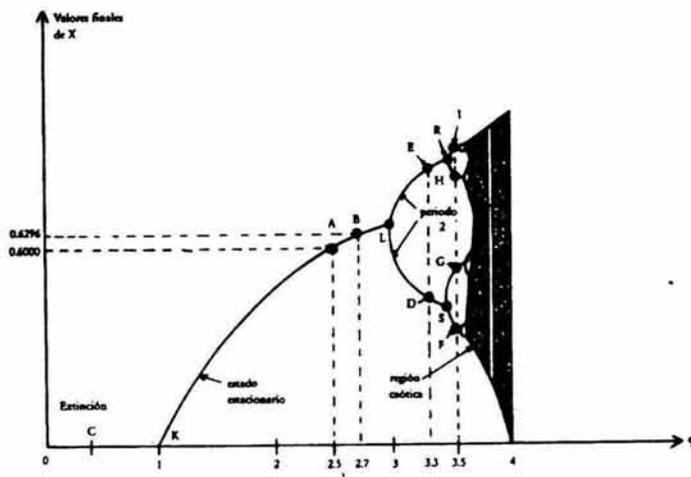


Figura 2.4-5. Gráfica de los valores finales que se obtienen con referencia a la población como función del parámetro q y que muestra dos tipos de regímenes: el periódico (estable) y el caótico.[39]

Los valores de q para los cuales no se obtienen valores finales, se marcarán en la gráfica con una línea completa, ya que todos los valores son posibles. De la gráfica se puede observar lo siguiente, a medida que va aumentando el valor de q :

Para q menor o igual que 1, los valores son nulos; hay extinción de la población.

Para q entre 1 y 3, solamente hay un solo valor final, el del estado estacionario, que va aumentando a medida que q aumenta. En este intervalo la gráfica es la línea curva KL.

Al seguir aumentando q , en L empieza a aparecer una bifurcación que da dos valores finales. Así q entre 3 y 3.45 tiene dos valores finales; estamos en la región del período 2. La gráfica en este intervalo consiste en dos líneas curvas, la LR y la LS.

Si q sigue aumentando, para el valor de 3.45 (aproximadamente) aparecen otras dos bifurcaciones y ahora se tendrán cuatro valores finales. De hecho entre 3.45 y 3.54 estaremos en la región del período 4 y la gráfica muestra cuatro líneas curvas, que ya no nombraremos.

Al seguir aumentando q , aparecen nuevas bifurcaciones y nuevas líneas curvas hasta que, finalmente, cuando q adquiere el valor de 3.5699 ya no hay valores finales fijos y se tiene una región con manchas que hemos denominado caótica. En esta región q adquiere cualquier valor.

Como se puede apreciar en la figura 2.4-5, dentro de la región caótica aparecen regiones que sí tienen valores fijos. Éstas son las regiones blancas de la figura. En efecto, para q alrededor del valor 3.84 aparece una región con valores finales bien determinados. Ahora se obtienen tres valores: 0.1494, 0.4879 y 0.9594. Al seguir aumentando q hay una bifurcación y por ejemplo, para $q = 3.846$, ahora hay seis valores finales. Al seguir aumentando q siguen las bifurcaciones, hasta que se llega a una nueva región caótica.

Podemos entonces afirmar que al ir aumentando q , se pasa por los siguientes regímenes:

extinción \rightarrow un solo valor final \rightarrow periódicos con periodicidades de 2, 4, 8, 16, ... \rightarrow caótico \rightarrow periódicos con periodicidades de 3, 6, ... \rightarrow caótico, ...

Estos resultados se obtuvieron con el estudio de la función dada por la ecuación (2.4-1). Sin embargo, hay muchas otras funciones, distintas de ésta, pero cuyas gráficas tienen la misma forma cualitativa mostrada en la figura 2.4-5. Resulta que para todas estas funciones distintas, el comportamiento de los valores finales es el mismo que se explicó en este capítulo. Este comportamiento es característico de las funciones **no-lineales**. [39]

En el capítulo 5 se analizará el comportamiento de esta función, entre otras, que también cuentan con fórmula generadora y que con el cambio de las condiciones iniciales éstas generan comportamientos complejos no-lineales.

CAPÍTULO III

**¿QUÉ SON LOS
FENÓMENOS
CAÓTICOS?**



“Caos es la ley de la naturaleza, el orden es el sueño del hombre.”

-Henry Adams

Remedios Varo, "Armonía", 1956, Óleo sobre masonite, (76x94 cm).

Texto de Remedios Varo: El personaje está tratando de encontrar el hilo invisible que une todas las cosas, por eso, en un pentagrama de hilos de metal, ensarta toda clase de objetos, desde el más simple, hasta un papelito conteniendo una fórmula matemática que es ya en sí un cúmulo de cosas; cuando consigue colocar en su sitio los diversos objetos, soplando por la clave que sostiene el pentagrama, debe salir una música no sólo armoniosa sino también objetiva, es decir, capaz de mover las cosas a su alrededor si así se deseó usarla, la figura que se desprende de la pared y colabora con él, representa al azar (que tantas veces interviene en todos los descubrimientos), pero al azar objetivo. Cuando uso la palabra objetivo, entiendo por ello que es algo fuera de nuestro mundo, o mejor dicho, más allá de él, y que se encuentra conectado con el mundo de las causas y no de los fenómenos que es el nuestro.

CAPÍTULO III

¿QUÉ SON LOS FENÓMENOS CAÓTICOS?

Sistemas simples pueden generar comportamientos muy complicados y el mismo sistema, con pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, se puede comportar en formas radicalmente diferentes. Este tipo de comportamiento impredecible es caótico. Estudios recientes en Matemáticas, Física y Ciencia Aplicada han conducido a métodos para estudiar Caos y han mostrado que no sólo hay orden en el Caos, sino que el Universo es posiblemente más caótico de lo que nos podamos imaginar.

[13]

III.1 Sensibilidad a las Condiciones Iniciales

Las leyes del movimiento de Isaac Newton, expuestas a fines del siglo XVII, implican que si se conoce la fuerza que se aplica sobre una partícula se puede conocer la trayectoria que ésta seguirá. Sin embargo, esta posibilidad contiene una condición: debe especificarse la posición y la velocidad que tiene la partícula en el instante inicial. Es decir, si se pueden precisar las condiciones iniciales de la partícula, las leyes de Newton permiten conocer completamente su futuro, lo cual resultará válido para cualquier sistema que tenga cualquier número de partículas.

Basado en estos hechos, el matemático francés Pierre Simon de Laplace (1749-1827) llegó a jactarse de que si se le dieran las posiciones y velocidades iniciales de cada una de las partículas que componen el Universo, podría predecir el futuro por el resto del tiempo. En el año de 1776 Laplace escribió lo siguiente:

"El estado presente del sistema de la naturaleza es evidentemente una consecuencia de lo que era en el momento anterior y, si imaginamos una inteligencia que en un instante dado abarcara todas las relaciones entre los entes de este Universo, podría decir las posiciones respectivas, los movimientos y las propiedades generales de todos estos entes en cualquier tiempo del pasado o del futuro. La Astronomía Física, la rama del conocimiento que hace el honor más alto a la mente humana, nos da una idea, aunque imperfecta, de lo que sería tal inteligencia."

"La simplicidad de la ley del movimiento de los cuerpos celestes y las relaciones entre sus masas y distancias, permite al análisis seguir su movimiento hasta cierto punto; y, para determinar el estado del sistema de estos grandes cuerpos en los siglos pasados o futuros, le basta al matemático que sus posiciones y velocidades sean conocidas por la observación en cualquier momento del tiempo. El hombre debe esta capacidad al poder del instrumento que emplea y al pequeño número de relaciones que utiliza en sus cálculos. Pero la ignorancia de las diversas causas implicadas en la producción de sucesos, así como su complejidad, junto a la imperfección del análisis, impide que lleguemos a la misma certidumbre sobre la vasta mayoría de los fenómenos. Por ello hay cosas inciertas para nosotros, cosas más o menos probables, y buscamos compensar la imposibilidad de conocerlas determinando su diferente grado de probabilidad. Así es como debemos a la debilidad de la mente humana una de las más delicadas e ingeniosas de las teorías matemáticas, la ciencia del Azar y la Probabilidad."

Este hecho conlleva a un riguroso determinismo en las leyes de la naturaleza. Pero en el año de 1903 Poincaré escribió lo siguiente:

"...nosotros solamente podemos conocer la situación inicial de manera *aproximada*. Si esto nos permitiera predecir la situación que sigue en el tiempo con *la misma aproximación*, es todo lo que necesitaríamos, y podríamos decir que el fenómeno ha sido predicho, que está regido por leyes. Pero esto no es siempre así; puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan condiciones muy diferentes en los fenómenos finales. Si un pequeño error en las condiciones iniciales produce un enorme error en las condiciones finales, la predicción se vuelve imposible y tenemos un fenómeno fortuito."

Consideremos un fenómeno físico muy simple, la caída de los cuerpos. Una piedra cae al soltarla debido a que experimenta una fuerza, la de gravedad, que está dirigida hacia el centro de la Tierra. Con base en las leyes de Newton se puede encontrar que la trayectoria que sigue la piedra es una línea recta vertical. Sin embargo, la misma piedra sujeta a la misma fuerza (su peso) también puede moverse a lo largo de otra trayectoria. Por ejemplo, si la lanzamos bajo un ángulo con la horizontal, entonces se moverá a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura 3.1-1, que resulta ser una parábola.

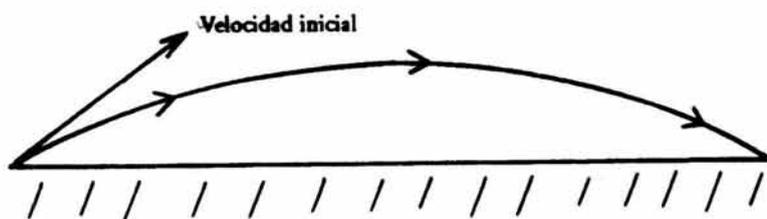


Figura 3.1-1. Una piedra lanzada hacia arriba, formando un ángulo con la horizontal, describe una trayectoria parabólica.[39]

Nos podemos hacer la siguiente pregunta: si en los dos casos la misma piedra estuvo sujeta a la misma fuerza, ¿por qué en un caso se movió a lo largo de una línea recta vertical y en el otro a lo largo de una parábola? Como podemos apreciar, a pesar de ser la misma piedra y la misma fuerza, hubo una diferencia.

- En el primer caso se soltó la piedra, lo que significa que en el instante inicial su velocidad fue nula.
- En el segundo caso se le dio a la piedra, en el instante inicial, una velocidad dirigida hacia arriba, como se muestra en la figura 3.1-1.

Por lo tanto, en los dos casos hubo condiciones iniciales diferentes y, en consecuencia, las trayectorias seguidas fueron distintas, a pesar de que en ambos casos la piedra estuvo sujeta a la misma fuerza, la gravedad.

Este ejemplo nos ilustra un hecho muy importante: para conocer el tipo de evolución que sigue un sistema se necesitan conocer, además de las leyes que lo rigen (en los casos de arriba, las de Newton y la fuerza de gravedad), las condiciones iniciales del sistema. Bajo las mismas leyes, diferentes condiciones iniciales producen distintas evoluciones en el tiempo.

La cuestión a la que se refirió Poincaré tiene que ver con lo siguiente. Tomemos dos piedras iguales. Soltemos la primera piedra desde cierto punto, digamos el A, sobre el suelo (ver figura 3.1-2a). Al mismo tiempo soltemos la segunda piedra desde el punto B, que está muy cercano al punto A. Nos damos cuenta de que, no obstante que en ambos casos las velocidades iniciales de las piedras son iguales (cero), sus posiciones iniciales no son iguales ya que las soltamos desde dos puntos distintos, aunque difieren muy poco. Decimos que las condiciones iniciales de ambas piedras no son las mismas, aunque sí muy parecidas.

Veamos qué pasa con las posiciones que van ocupando las dos piedras en sus caídas. Si nos fijamos medio segundo después de haber soltado las piedras veríamos (figura 3.1-2b) que están en las posiciones C y D, respectivamente. Nos damos cuenta de que la distancia entre los puntos C y D también es muy pequeña (de hecho es igual a la de los puntos iniciales A y B). En consecuencia, si la diferencia de condiciones iniciales es muy pequeña, entonces al transcurrir el tiempo la diferencia entre las posiciones de las dos piedras sigue siendo muy pequeña. Es decir, en este caso, las trayectorias que siguen son muy cercanas.

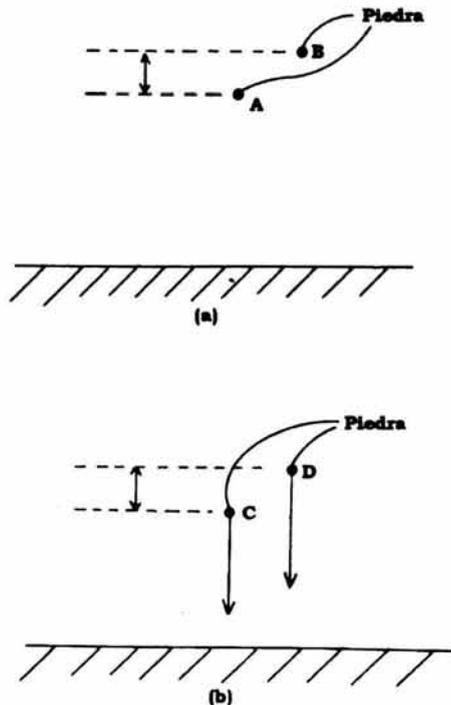


Figura 3.1-2. Cuando dos cuerpos caen a partir del reposo y desde posiciones muy cercanas, no se separan mucho en sus trayectorias.[39]

Veamos ahora otra situación. Supongamos que soltamos las dos piedras iguales desde puntos cercanos a la cima de una montaña (ver figura 3.1-3). La primera en la cima C, y la otra desde el punto A de la montaña, es decir, un lugar que no es ya la cima, pero muy cercano a ella. ¿Qué ocurre ahora con las trayectorias de las piedras? Pues la primera se quedará en la cima, mientras que la segunda rodará por la ladera de la montaña. En consecuencia, después de cierto intervalo, digamos 3 segundos, la separación entre las posiciones de ambas piedras será muy grande: una en la cima y la otra abajo. En este caso, nuevamente las condiciones iniciales de las dos piedras son muy parecidas pero ahora sus posiciones, al transcurrir el tiempo, difieren marcadamente. Es decir, con el paso temporal en este caso no se conservan las posiciones muy cercanas unas de otras.

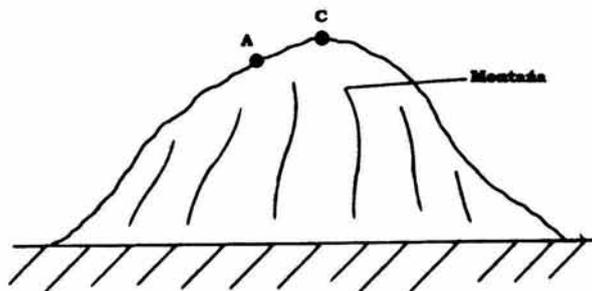


Figura 3.1-3. Dos piedras que caen desde puntos distintos de una montaña y a partir de posiciones muy cercanas, se separan mucho a lo largo de sus trayectorias.[39]

Otro ejemplo se ilustra en la figura 3.1-4, en la que se observan dos bolas de billar que inciden sobre una mesa que tiene varios obstáculos convexos. Las posiciones iniciales de las bolas son ligeramente distintas. Vemos que aun cuando las velocidades iniciales de las bolas sean las mismas, las trayectorias que siguen son completamente diferentes.

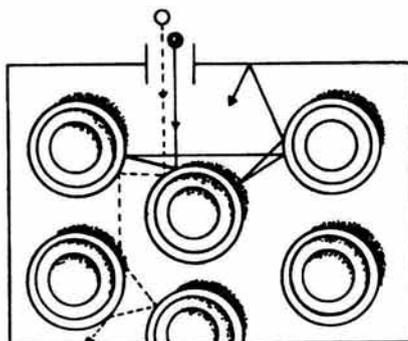


Figura 3.1-4. Ilustración de que pequeñas variaciones en las posiciones iniciales producen trayectorias muy separadas.[39]

De los dos casos que hemos considerado podemos afirmar que hay dos tipos de situaciones:

- 1) Condiciones iniciales muy parecidas producen condiciones finales también muy parecidas, y
- 2) condiciones iniciales muy parecidas producen condiciones finales completamente diferentes.

Ahora bien, para determinar la evolución de un sistema cuando el tiempo transcurre debemos conocer las leyes que lo rigen, así como sus condiciones iniciales. Si fuera posible determinar con toda precisión estas condiciones iniciales entonces podríamos saber en cualquier instante las características que tiene el sistema. A esto se refería Laplace cuando decía que si se le daban las condiciones iniciales del Universo podría determinar el futuro. Sin embargo, en una situación real no podemos afirmar que se puedan determinar con toda precisión las condiciones iniciales. Al medir estas cantidades siempre se cometerán errores, que son inevitables. Por lo tanto, lo más que se puede hacer es fijar las condiciones iniciales en forma aproximada. Estas condiciones iniciales diferirán de las verdaderas condiciones iniciales del sistema en muy poco si los errores cometidos son pequeños. ¿Qué podemos decir acerca de la trayectoria que seguirá el sistema?, ¿Podemos predecirla?

De lo que se ha visto puede ocurrir una de dos posibilidades:

- 1) Si estamos en un caso en que diferencias de condiciones iniciales producen condiciones finales muy parecidas, entonces podremos predecir qué ocurre con el sistema, con el transcurso del tiempo, también con un error pequeño. En este caso la separación entre las trayectorias es muy pequeña y la predicción que se haga será muy parecida a la trayectoria real.
- 2) Si se está en el caso en que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales producen condiciones finales muy distintas, entonces la trayectoria real que siga el sistema se separará muy marcadamente de la trayectoria que podamos predecir. En este caso nuestra predicción está muy lejos de la realidad, por lo que no hay posibilidad de hacer predicción válida alguna, o si la hay el error sería muy grande.

El ejemplo del billar y las anteriores discusiones a éste, son discusiones en la que se presentaron hechos plausibles sin llegar a una demostración. Se puede hacer un análisis matemático riguroso del billar con obstáculos convexos, dicho análisis fue realizado por el ruso Yakov G. Sinai seguido por otros matemáticos. Este tipo de sistemas con sensibilidad a las condiciones iniciales tienen análisis matemáticos muy complejos. [39]

III.2 La Pequeña Causa de Poincaré

Como vimos en la sección anterior, el recorrido de una bola sobre una mesa de billar con obstáculos convexos da lugar a un fenómeno un poco extraño. Supongamos que modificamos la condición inicial, reemplazando la posición y la velocidad reales de la bola por una posición y una velocidad imaginarias ligeramente diferentes. Entonces la trayectoria real y la trayectoria imaginaria, que al comienzo estaban muy próximas, empezarán a divergir cada vez más rápidamente hasta que de pronto no tengan nada que ver una con la otra. Esto es a lo que los científicos han llamado "sensibilidad a las condiciones iniciales". Conceptualmente éste es un descubrimiento muy importante.

El movimiento de la bola de billar está determinado sin ambigüedad por la condición inicial, y aun así estamos esencialmente limitados en la predicción de su trayectoria. Tenemos a la vez determinismo e impredecibilidad a largo plazo. Nuestro conocimiento de la condición inicial está siempre empañado por una cierta imprecisión: no somos capaces de distinguir la condición inicial real de las numerosas condiciones iniciales imaginarias que están próximas a ella. Y por consiguiente, no sabemos cuál de las predicciones posibles es la correcta. Pero si no podemos predecir el comportamiento de una bola de billar, ¿Qué sucede con el movimiento de los planetas? ¿Y con la evolución de los fenómenos meteorológicos? El movimiento de los planetas es predecible con siglos de antelación, pero las previsiones meteorológicas fiables están limitadas a una o dos semanas. Sin embargo, debemos hacer algunas aclaraciones sobre la bola de billar antes de avanzar en nuestra discusión sobre la predecibilidad.

Al estudiar el movimiento de la bola de billar hemos despreciado el rozamiento. ¿Teníamos derecho a hacer esta aproximación? Este tipo de problemas se plantean constantemente en Física: ¿Son admisibles las idealizaciones que se utilizan?

En el caso de la bola de billar, la presencia del rozamiento implica que la bola acabará por detenerse. Pero si se detiene mucho tiempo, después de que el movimiento se haya hecho impredecible, resultaba práctico suponer que no había rozamiento. (La teoría de la bola de billar con obstáculos convexos tiene la ventaja de ser bastante fácil de analizar, pero su aplicación a un billar real daría lugar a serias dificultades).

Pero ahora surge un problema más serio: ¿Hasta qué punto el fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales es general? Al analizar el sistema de la bola de billar con obstáculos convexos, hemos llegado a la conclusión de que una pequeña variación inicial conducirá a la impredecibilidad futura a largo plazo. Este comportamiento puede presentarse en todo tipo de sistema, puede tratarse de un sistema mecánico sin rozamiento, o de un sistema con una fuente de energía que reemplaza a la que se disipa por rozamiento, o incluso a un sistema más general con componentes eléctricos, químicos, etc...

Lo que cuenta es que exista una evolución temporal determinística bien definida. En tal caso, los matemáticos dicen que se tiene un sistema dinámico. Los planetas que giran en torno a una estrella constituyen un sistema dinámico (idealizado con un sistema mecánico sin rozamiento). Un fluido viscoso en cuyo interior rota una hélice es también un sistema dinámico (disipativo en este caso pues existe un rozamiento interno, llamado disipación, en el fluido viscoso). Y si encontramos una evolución temporal determinística que idealice de forma apropiada la historia de la humanidad será también un sistema dinámico.

Pero volvamos a la pregunta anterior: la sensibilidad a las condiciones iniciales ¿Es la excepción a la regla para los sistemas dinámicos? La evolución temporal ¿Es o no es, en general, predecible a largo plazo? De hecho, hay varias posibilidades. En algunos casos, por ejemplo, para un péndulo con rozamiento, no hay sensibilidad a las condiciones iniciales ya que se puede predecir el comportamiento del péndulo y cómo evolucionará hacia un estado de reposo. En otros casos, se tiene sensibilidad a las condiciones iniciales cualquiera que éstas sean, como es el caso de la bola de billar con obstáculos convexos. Finalmente, muchos sistemas dinámicos tienen un comportamiento mixto, para el que la predicción a largo plazo es posible para ciertas condiciones iniciales pero no para otras. Sin embargo, el problema de las condiciones iniciales no es nuevo. Ya nuestros antepasados habían descubierto que el futuro era difícil de predecir y que pequeñas causas podían tener grandes efectos.

Lo relativamente nuevo es la demostración de que para ciertos sistemas, un pequeño cambio en la condición inicial produce habitualmente un cambio en la evolución posterior del sistema, de modo que las predicciones a largo plazo resultan completamente vanas. Esta demostración fue llevada a cabo a finales del siglo XIX por el matemático francés Jacques Hadamard.

El sistema considerado por Hadamard era una especie de billar alabeado en el que la superficie plana de la mesa estaba reemplazada por una superficie con *curvatura negativa*¹. Lo interesante del problema era el movimiento de un punto que permanece ligado a la superficie sobre la que se desplaza sin rozamiento. De este modo el billar de Hadamard es lo que en términos técnicos se denomina el *flujo geodésico* sobre una superficie de curvatura negativa. Dicho flujo permitió a Hadamard demostrar el teorema de sensibilidad a las condiciones iniciales. (El correspondiente teorema de billar con obstáculos convexos es mucho más difícil y sólo fue demostrado por Sinai mucho más tarde, en los años setenta).

Uno de los que en aquella época comprendieron la importancia filosófica del resultado de Hadamard, fue el físico Pierre Duhem (Duhem tenía ideas muy avanzadas para su tiempo, pero sus convicciones políticas eran netamente reaccionarias). En un libro publicado en 1906 y dirigido al gran público, Duhem tituló un apartado "*Ejemplo de Deducción Matemática que Nunca debe Utilizarse*". Como él explica esta deducción matemática es el cálculo de una trayectoria sobre el billar de Hadamard. Ésta "nunca debe utilizarse", pues una pequeña variación que necesariamente esté presente en la condición inicial, da lugar a una gran incertidumbre en la trayectoria calculada si se espera el tiempo suficiente, y esto convierte a la predicción en algo sin valor.

Otro francés escribía libros de Filosofía de la Ciencia en esa misma época: el famoso matemático Henri Poincaré. En su libro "*Ciencia y Método*" publicado en 1908, discute el problema de la impredecibilidad aunque no de una manera técnica.

¹ Lo más fácil de estudiar es el caso de las superficies compactas es la curvatura constante negativa (la desventaja de este tipo de superficies es que no se pueden realizar en el espacio euclidiano de 3 dimensiones). Recordemos el postulado de Euclides que dice que, por un punto exterior de una recta, pasa una y sólo una paralela a dicha recta. Y también recordemos que se pueden construir geometrías no euclidianas para las que el postulado anterior es falso. En particular, en el plano de Lobatchevski existen muchas paralelas a una recta dada que pasan por un punto situado fuera de dicha recta. Así pues, en el plano de Lobatchevski, dos puntos que se mueven sobre rectas paralelas se alejan, en general uno de otro. El billar con curvatura constante negativa se obtiene cerrando el plano de Lobatchevski y volviendo a pegar los bordes de manera que se obtenga una superficie cerrada lisa (obviamente hay que demostrar que esto es posible). Sobre el billar así obtenido, es posible imaginar el fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales.

No cita a Hadamard ni los detalles matemáticos de la teoría de los sistemas dinámicos -teoría que él había creado y conocía mejor que nadie-. Una observación esencial de Poincaré es que el azar y el determinismo se han hecho compatibles por la impredecibilidad a largo plazo. Poincaré lo explica de la siguiente manera:

"Una causa muy pequeña que escapa a nuestra atención determina un efecto considerable que no podemos dejar de observar y entonces decimos que el efecto es debido al azar. Si conociésemos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del Universo en el momento inicial, podríamos predecir exactamente la situación de ese mismo universo en un momento posterior. Pero, aun cuando se diese el caso de que las leyes de la naturaleza no tuvieran ningún secreto para nosotros, incluso así sólo podríamos conocer la situación inicial *aproximadamente*. Si esto nos permitiese predecir la situación siguiente con la *misma aproximación*, eso es todo lo que necesitamos y diríamos que el fenómeno habríase predicho, que está gobernado por leyes. Pero no siempre es así, puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales las produzcan grandes en el fenómeno final. Un pequeño error en las primeras producirá un abultado error en las segundas. La predicción se hace imposible y aparece el fenómeno fortuito."

Poincaré sabía lo útiles que son las probabilidades del mundo físico. Sabía que el azar forma parte de la vida de todos los días. Y como también creía en el determinismo clásico (la incertidumbre cuántica todavía no existía en su época), quería encontrar dónde estaba la fuente del azar. Sus reflexiones sobre el problema le proporcionaron varias respuestas. Él vio varios mecanismos mediante los cuales la descripción determinista del mundo podía dar lugar de manera natural a la idealización probabilística. Uno de estos mecanismos es el de la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Poincaré discute dos ejemplos de sensibilidad a las condiciones iniciales. El primero es el de un gas compuesto por numerosas moléculas que se mueven a gran velocidad en todas direcciones y sufren numerosos choques entre sí. Estos choques, dice Poincaré, dan lugar a sensibilidad en las condiciones iniciales (la situación es análoga al ejemplo de la bola de billar chocando con un obstáculo convexo). La impredecibilidad del movimiento de las partículas en el gas justifica una descripción probabilística.

El segundo ejemplo de Poincaré concierne a la Meteorología. También aquí dice "existe sensibilidad a las condiciones iniciales". Por otra parte, nuestro conocimiento de las condiciones iniciales es siempre algo impreciso y ello explica la poca fiabilidad de las previsiones del tiempo que se van a hacer. Así, como no podemos prever cuándo suceden los fenómenos meteorológicos, pensamos que su sucesión tiene lugar al azar.

Para un especialista contemporáneo, lo más sorprendente de las ideas de Poincaré es su carácter completamente moderno. La dinámica de un gas de esferas elásticas por una parte, la circulación general de la atmósfera por otra, han sido objeto de estudios fundamentales durante los últimos años y el punto de vista que se adoptó fue el de Poincaré. David Ruelle matemático francés y precursor de las teorías del Caos, habla en su libro "*Azar y Caos*" acerca del olvido por parte de los científicos, de las teorías de Poincaré sobre las condiciones iniciales y también encuentra las posibles razones de dicho olvido, David Ruelle dice:

"Lo que es muy sorprendente, es el largo intervalo que ha transcurrido entre las ideas de Poincaré y el moderno estudio por parte de los físicos del fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales. El estudio reciente de lo que ahora llamamos Caos no se ha beneficiado de los estudios de Hadamard, Duhem y Poincaré. Las matemáticas de Poincaré han tenido su papel, pero sus ideas sobre predicciones meteorológicas tuvieron que ser descubiertas de forma independiente. Yo veo dos razones para el sorprendente intervalo que separa a Poincaré de los estudios modernos sobre el Caos. La primera es el descubrimiento de la Mecánica Cuántica, que conmocionó el mundo de la Física y ocupó todas las energías de varias generaciones de físicos. La Mecánica Cuántica hace intervenir al azar de una forma nueva e intrínseca. Entonces ¿Por qué pretender ahora introducir al azar mediante la sensibilidad a las condiciones iniciales en Mecánica Clásica? Veo otra razón para el olvido de las ideas de Hadamard, Duhem y Poincaré: estas ideas llegaron demasiado pronto cuando no existían medios para explotarlas. Poincaré no tenía a su disposición esas útiles herramientas matemáticas, que son la teoría de la medida o el teorema ergódico, y por lo tanto no podía expresar sus brillantes intuiciones en un lenguaje preciso. Hay que señalar también que cuando no alcanzamos a tratar un problema matemático, siempre podemos estudiarlo numéricamente con la computadora. Pero evidentemente este método, que ha ligado un papel tan esencial en el estudio del Caos, no existía a comienzos del siglo XX." [45]

III.3 El Problema de los Tres-Cuerpos y la Teoría de KAM

El problema de los *tres*-cuerpos es uno de los problemas más celebrados en Mecánica Celeste. En esta sección daremos una historia general del problema, haciendo un resumen del trabajo asociado con éste y que explica su conexión con la pregunta de la estabilidad del Sistema Solar. En particular nos enfocaremos en la contribución del matemático francés, del que tanto hemos hablado, Henri Poincaré cuyo intento de encontrar una solución lo llevó al descubrimiento de la matemática del Caos.

El problema de los *tres*-cuerpos puede describirse como sigue: tres partículas se mueven en el espacio bajo su mutua atracción gravitacional; dadas sus condiciones iniciales, determinan su subsiguiente movimiento. Por lo tanto pueden describirse por una serie de nueve ecuaciones diferenciales de segundo orden. El problema naturalmente se extiende a cualquier número de partículas, y en el caso de n -partículas este es conocido como el problema de los n -cuerpos.

Con el paso de los años el intento de encontrar una solución al problema de los *tres*-cuerpos ha generado una riqueza de investigación. Entre los años de 1750 y el comienzo del siglo XX más de 800 artículos relacionados con el problema fueron publicados, invocando a una llamada de distinguidos matemáticos y astrónomos, y por consiguiente, como es frecuente el caso con ese tipo de problemas, su importancia es ahora percibida tanto de gran importancia en los avances matemáticos generados por los intentos a su solución, como el problema en sí. Estos avances han venido de muchos campos diferentes, incluyendo, en época reciente, el análisis de los sistemas dinámicos.

Un caso especial del problema de los *tres*-cuerpos que se ha caracterizado prominentemente en la investigación como resultado de su forma simplificada y sus aplicaciones prácticas es a lo que Poincaré llamó el problema "restringido" de los *tres*-cuerpos. En esta formulación dos de los cuerpos, conocidos como los primarios, giran alrededor de su centro de masa en trayectorias circulares bajo la influencia de su atracción gravitacional mutua y por consiguiente, forman un sistema de dos cuerpos en el que el movimiento es conocido. Un tercer cuerpo, generalmente conocido como el planetoide, que se asume sin masa con respecto a los otros dos, se mueve en el plano definido por los otros dos cuerpos girando y mientras comienza a ser influenciado gravitacionalmente por ellos, no ejerce influencia por sí mismo. El problema entonces es comprobar el movimiento del tercer cuerpo.

Este caso particular del problema de los *tres-cuerpos*, es el más simple de importancia y en el contexto del trabajo de Poincaré es especialmente significativo, debido a que la mayoría de sus resultados pertenecen a esta formulación. Aparte de sus características simplificadas, además provee una buena aproximación para situaciones físicas reales, por ejemplo, en el problema de determinar el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, dada la presencia del Sol. En este caso, el problema es casi circular (la excentricidad de la órbita de la Tierra es aproximadamente 0.017), casi planar (ambas, la órbita de la Tierra y la de la Luna, están muy cercanas en el plano elíptico), y los valores de los cocientes de masa y las distancias medias entre los cuerpos satisfacen las condiciones. La formulación además provee una aproximación razonable al sistema que consiste del Sol, Júpiter y un pequeño planeta.

Aparte de su atracción intrínseca, tan simple como para establecer el problema, el problema de los *tres-cuerpos* tiene un atributo adicional que ha sido responsable de la abundancia de los resolvedores potenciales: su liga íntima con la pregunta fundamental de la estabilidad del Sistema Solar. Que es, la pregunta de si el sistema planetario guardará siempre la misma forma como hasta ahora la ha tenido, o si eventualmente uno de los planetas escapará del sistema o tal vez peor, experimente una colisión. Es una pregunta que ha interesado a astrónomos por siglos, aún desde la primera vez que fue observado que los movimientos de la Tierra y de los otros planetas no son precisamente regulares y periódicos.

Puesto que los cuerpos en el Sistema Solar son aproximadamente esféricos y sus dimensiones extremadamente pequeñas, cuando son comparados con las distancias entre ellos, pueden ser considerados como puntos de masa. Bajo las leyes de Newton y a una primera aproximación, los planetas se mueven en trayectorias elípticas alrededor del Sol, éste comienza en uno de los focos de la elipse. Esta descripción es una primera aproximación porque permite solamente la interacción entre el Sol y el planeta determinado, cuyo movimiento comienza a ser descrito y no toma en cuenta las fuerzas entre los planetas individuales. Estas otras fuerzas causan perturbaciones a la trayectoria elíptica original, así que cambia muy lentamente y es concebible que estos cambios muy lentos pudieran, después de un muy largo periodo de tiempo, alterar las trayectorias presentes en la forma de que un planeta pudiera ser lanzado fuera del sistema o pudiera ocurrir una colisión.

Aunque las observaciones hechas en los últimos 1000 años muestran que no ha sucedido lo anterior, es un poco diferente probar matemáticamente que esto pudiera o no ocurrir y es la búsqueda para esa prueba matemática la que suministra la conexión con el problema de los *tres-cuerpos*. Si ignoramos todas las otras fuerzas como el viento solar o los efectos relativistas y tomando solamente las fuerzas gravitacionales dentro de la explicación, el Sistema Solar puede ser modelado como un problema de *diez-cuerpos* teniendo una gran masa (el Sol) y nueve pequeñas. [46]

III.3.1 Desarrollo Histórico

El origen del problema de los *tres-cuerpos* puede pensarse como sinónimo del fundamento de la Astronomía Dinámica Moderna puesto que esta parte de la Mecánica Celeste comenzó con la introducción de la Teoría de la Gravitación de Newton. Desde el tiempo de la publicación de la *Principia* en 1687, se volvió importante verificar si solamente la ley de Newton fue capaz de dar un entendimiento completo, de cómo se mueven los cuerpos celestes en el espacio tridimensional. Con objeto de perseguir esta línea de investigación, fue necesario averiguar el movimiento relativo de n -cuerpos atrayéndose unos a otros de acuerdo a la ley de Newton.

Newton resolvió geoméricamente el problema de *dos-cuerpos* para dos esferas moviéndose bajo su atracción gravitacional mutua, y en 1710 Daniel Bernoulli había probado que el movimiento de una partícula con respecto a la otra está descrita por una sección cónica. En 1734 Bernoulli ganó un premio de la Academia Francesa por su tratado analítico del problema de los *dos-cuerpos* y el problema fue resuelto en detalle por Leonhard Euler en 1744.

Las necesidades del conocimiento acerca del movimiento del satélite natural de nuestro planeta en el sistema formado por el Sol, la Tierra y la Luna estuvo bajo escrutinio, y la teoría lunar rápidamente dominaba la joven investigación dentro del problema. Las investigaciones que aparecieron de una búsqueda para una solución a éste las llevaron en dos direcciones: aquellas que se interesaron en encontrar teoremas generales con respecto al movimiento y aquellas que buscaron buenas aproximaciones para soluciones que podrían sostenerse por un periodo de tiempo dado, comenzando de un instante al que los datos estuvieron disponibles. Newton fue el primero en tratar el problema y logró resultados en ambos tipos de investigación. Por un lado, habiendo mostrado previamente que el centro de masa de n -cuerpos se mueve con una velocidad uniforme en una línea recta, él hizo una investigación general dentro del movimiento de cuerpos en atracción, mientras que por el otro,

Capítulo III

¿Qué son los Fenómenos Caóticos?

usando una aproximación esencialmente geométrica al método de variación de parámetros, él aplicó la teoría de la perturbación al movimiento de la Luna. Una vez que estudió el movimiento de la Luna con respecto a la Tierra y habiendo obtenido una trayectoria elíptica, él consideró el efecto del Sol sobre la trayectoria de la Luna, tomando en cuenta las variaciones en la trayectoria de ésta. Sin embargo, los cálculos le causaron grandes dificultades y su cómputo para el movimiento de los áspides lunares dieron un valor que fue aproximadamente la mitad del valor observado. De hecho los problemas que él encontró eran tales que recordó más adelante que "su cabeza nunca le dolió tanto como con sus estudios de la Luna."

En 1760 Euler comenzó a considerar versiones simplificadas del problema de los *tres-cuerpos*, empezando con el caso de cuando dos de los cuerpos están mezclados en el espacio y el tercero se mueve en su campo gravitacional, él dio soluciones involucrando integrales elípticas. En 1762 produjo la primera formulación del problema restringido y probó la existencia de soluciones colineales. Entonces en 1722, en una memoria dedicada a la teoría lunar incluyó la primera formulación del problema restringido basado sobre un sistema de coordenadas de rotación y que, conjuntamente con una memoria hecha por Lagrange, compartió el *Premio de la Academia de París*.

Como Euler reconoció, enviando el movimiento de los cuerpos a un sistema de coordenadas de rotación, las masas de los primarios aparecen estacionarias, y puesto que la posición y velocidad del planetóide están cada una especificadas por dos coordenadas, esto resulta un sistema con sólo dos grados de libertad. Con respecto al problema general Euler fue capaz de reducirlo de uno de orden 18 a uno de orden 8, esto fue logrado usando las seis integrales del movimiento del centro de masa, las tres integrales de momento angular y la integral de energía.

La memoria ganadora del *Premio de la Academia de París* de Lagrange fue un análisis del problema de los *tres-cuerpos* en que él usó las integrales de momento angular y la integral de energía para mostrar que el problema podría ser reducido a un sistema de orden 7. Su método fue el primero en determinar las distancias mutuas entre los cuerpos, el plano del triángulo en el espacio y la orientación del triángulo en el plano. Sus ecuaciones entonces admitieron dos tipos de soluciones particulares: la solución colineal encontrada por Euler, en el que los cuerpos se mueven siempre sobre una línea recta, y una configuración equilátera en el que los cuerpos están siempre en los vértices de un triángulo equilátero en movimiento.

En 1836, Carl Gustav Jacobi (1804-1851) encontró una integral ahora conocida como la integral jacobina para el problema restringido. Y en 1843, ignorando el trabajo de Lagrange, redujo el problema general a uno de orden 6. Logró la reducción extra por el tan llamado método de eliminación de nodos. Él comenzó haciendo un cambio lineal de variables que efectivamente cambiaron la configuración, a una en la cual dos cuerpos "ficticios" se mueven en una trayectoria alrededor de un tercero. Puesto que el cambio de variables es lineal, la forma de las integrales del momento angular no cambian y el vector del momento angular total permanece constante y perpendicular a un plano invariante. Jacobi entonces mostró que la intersección entre los planos de las trayectorias de los dos cuerpos permanecen paralelos a este plano invariante, y por lo tanto la diferencia en longitud entre los nodos ascendentes es siempre π radianes.

Jacobi además fue responsable, junto con Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) de desarrollar nuevos métodos para la integración de ecuaciones diferenciales de un sistema dinámico general, que fue particularmente útil en el contexto del problema. La teoría Hamilton-Jacobi, como es conocida ahora, creció de la Dinámica Lagrangeana pero fue originada propiamente en los años de 1830 con investigaciones de Hamilton dentro de la Óptica Matemática y el problema de los *tres*-cuerpos. [2, 46]

III.3.2 La Memoria de Poincaré Sobre el Problema de los *Tres*-Cuerpos

La famosa memoria de Poincaré sobre el problema de los *tres*-cuerpos fue publicada en 1890, pero la historia de su publicación comenzó cinco años antes. En Julio de 1885, aparecieron noticias anunciando una importante competencia internacional de matemáticas, que comenzó a ser patrocinada por el Rey Oscar II de Suecia y Noruega para marcar su 60 aniversario en 1889. El organizador de la competencia y uno de los jueces fue el matemático sueco Gosta Mittag-Leffler (1846-1927), los otros jueces fueron Karl Weierstrass (1815-1897) de Berlín y Charles Hermite (1822-1901) de París. Se fijaron cuatro preguntas y una, planteada por Weierstrass, requirió una solución al problema de los n -cuerpos. La pregunta que reflejaba en Weierstrass un gran entendimiento e interés en el problema, fue la de encontrar una solución bajo las condiciones particulares en que no ocurrieran colisiones.

Para Poincaré, la competencia actuó como un estímulo para sintetizar muchas de las ideas que él había desarrollado en la década anterior. La pregunta de la estabilidad del Sistema Solar fue una en la que él había estado explícitamente interesado por varios años y por algún tiempo había construido una pila de técnicas con las que lanzaría una ofensiva. Muchas de esas técnicas fueron originadas en su pionera investigación sobre la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, que han aparecido en series de cuatro memorias publicadas entre 1881 y 1886, y en el que él había discutido la idea de estabilidad por primera vez. Para la competencia él había intentado abordar el problema de n -cuerpos comenzando con el problema general de *tres*-cuerpos y extendiendo así sus resultados, pero las dificultades inherentes lo condujeron a enfocar su atención casi exclusivamente sobre el problema restringido de los *tres*-cuerpos. A pesar de no resolver el problema de n -cuerpos, su trabajo sobre el problema restringido fue reconocido como sobresaliente y en Enero de 1889 se le concedió el premio y en 1890 su memoria fue publicada como la entrada ganadora en la competencia. Desde su publicación, la memoria ha sido reconocida por generaciones subsecuentes de matemáticos como un hito en el estudio y desarrollo de la Mecánica Celeste y la Dinámica. Ahora ambas son famosas por suministrar los fundamentos para autores de renombre en un trabajo de tres volúmenes sobre Mecánica Celeste, "*Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*", y por contener la primera descripción matemática del comportamiento caótico en un sistema dinámico. [2, 46, 47]

III.3.3 Teoría General de la Estabilidad

El deseo de Poincaré de abordar el problema de la estabilidad del Sistema Solar significó que la estabilidad *per se* fue un tópico natural a perseguir. Él primero discutió la estabilidad de soluciones a ecuaciones diferenciales en 1885 y durante el mismo periodo además estuvo investigando la estabilidad de otro tipo: el de diferentes formas de masas de rotación de un fluido. Esto suministró la primera conexión entre su trabajo y el del matemático ruso Alexander Lyapunov (1857-1918). Lyapunov además se comprometió en una investigación cualitativa dentro de la teoría de la estabilidad, y en 1892 (algunos años después de su terminación) su investigación fue publicada en una memoria notable. Este fue el primer intento de crear una teoría matemática completa de estabilidad para la dinámica de n -cuerpos en movimiento. Desafortunadamente, su aparición en Rusia significó que sus contenidos fueron casi inaccesibles a la amplia comunidad matemática. Fue solamente con la publicación de una

traducción en francés en 1907 que sus ideas comenzaron a penetrar los círculos matemáticos de Europa occidental y su estudio de la pregunta de la estabilidad fue reconocida como formación a un importante complemento al que Poincaré había emprendido.

Aunque Lyapunov reconoció libremente la influencia de las ideas de Poincaré, él utilizó una definición de estabilidad que fue mucho más estricta que la definición de Poisson de estabilidad usada por Poincaré. Lyapunov definió la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales como estable, si otras soluciones que comenzaron a un tiempo dado lo suficientemente cerca de la solución dada, permanece arbitrariamente cerca de todos los otros tiempos posteriores.

Hubo muchas similitudes entre los resultados obtenidos por Lyapunov y los obtenidos por Poincaré, pero la varianza en sus definiciones de estabilidad significaron que el propósito de sus análisis fueran sustancialmente diferentes. La teoría de Lyapunov, mientras que es extremadamente rigurosa y detallada, estuvo limitada en su rango por su definición que es también realmente demandante. Para Lyapunov si una solución es estable no solamente el movimiento con perturbaciones no puede desviarse más allá del movimiento que no las tiene, sino que también cada punto en la trayectoria del movimiento con perturbaciones tiene que estar muy cerca de los puntos correspondientes en el movimiento sin perturbaciones. Puesto que en términos prácticos hay algunos sistemas dinámicos que satisfacen completamente el criterio de Lyapunov, la aplicación de su teoría está esencialmente confinada al análisis local. Por otro lado, la teoría de la estabilidad de Poincaré, por estar basada en una definición menos restringida, podía aplicarse a problemas de una naturaleza más compleja de aquéllos considerados por Lyapunov. El punto de partida para Poincaré fue su teoría de integrales invariantes que, en conjunto con su definición, significó que él podía atacar preguntas generales de la estabilidad de sistemas dinámicos, obteniendo resultados como su teorema de recurrencia que le permitió un entendimiento del comportamiento de las soluciones del problema restringido de los *tres-cuerpos*. Por lo tanto su teoría lo condujo al conocimiento del comportamiento global de los sistemas, conocimiento que podría haber sido imposible de obtener sin la precisión de la teoría de Lyapunov, aunque ésta fue contrabalanceada por la imprecisión que la acompaña en su análisis local.

La inaccesibilidad inicial del trabajo de Lyapunov significó que las ideas de Poincaré fueron conocidas en la primera respuesta. Sin embargo, la teoría de Poincaré, así como es capaz de una gran generalización y de tener una definición que fue intuitivamente más natural que la de Lyapunov, suministró un marco preciso y convencional en el cual trabajar. Ahora la teoría es generalmente considerada como uno de los logros fundamentales dentro de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. La literatura ha crecido sustancialmente alrededor del trabajo de Poincaré, más recientemente en el área de la teoría de control, y en 1992 el centenario de la publicación original de la memoria fue conmemorada por la aparición de una traducción en Inglés. [46, 47]

III.3.4 Desarrollos Posteriores

La pregunta de la convergencia de las series de Lindstedt suministró el punto de partida para algunos desarrollos remarcables en el siglo XX. Poincaré había mostrado que las series fueron, aparte de algunos casos excepcionales, divergentes. Había, sin embargo, una cláusula. Él dejó claro que no había dado una prueba rigurosa para los casos cuando las frecuencias se pueden fijar por adelantado. Con el trabajo de Kolmogorov, Arnold y Moser, que comenzó en el año de 1950, sabemos que en esos casos la mayoría de las soluciones de las series formales son de hecho convergentes. Sus resultados forman la base para lo que es ahora conocido como la teoría Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM), que proporciona métodos para integrar sistemas hamiltonianos con perturbaciones, válidos para periodos de tiempo infinitos. De particular significado es el hecho de que la teoría de KAM establece concluyentemente la existencia de soluciones de series convergentes para el problema de n -cuerpos.

Hubo, además, muchos matemáticos que estudiaron el trabajo de Poincaré sobre el problema de los *tres*-cuerpos dando lugar a nuevos descubrimientos en otros campos relacionados. Jacques Hadamard (1865-1963) y George Birkhoff (1884-1944) persiguieron los aspectos cualitativos de la investigación de Poincaré, mientras que Ivor Bendixson (1861-1935) trabajó en ecuaciones diferenciales ordinarias y Elie Cartan (1869-1951) trabajó sobre la teoría de las integrales invariantes.

Pero a pesar del éxito de la memoria de Poincaré, durante los primeros años del siglo XX hubo intentos no muy serios para investigar más a fondo el comportamiento de las soluciones asintóticas de Poincaré. En gran medida esto puede ser explicado por la inhabilidad de comprometerse en un análisis cuantitativo debido a las técnicas

computacionales inadecuadas. El advenimiento de la computadora digital moderna ha significado que esos análisis sean ahora posibles, ya que en los últimos veinte años se ha visto una creciente investigación de los sistemas no-lineales produciendo una gran riqueza de nuevos resultados. Una consecuencia bien conocida de esto ha sido el desarrollo del análisis matemático del Caos, el corazón en el que se ha situado la teoría de Poincaré de soluciones asintóticas. Además de los problemas de computación numérica, también estaba la dificultad de que el comportamiento aparentemente aleatorio que se exhiben en las soluciones asintóticas de Poincaré no se adecuaban al modelo Laplaciano de un Universo mecanicista, que generalmente era aceptado por todos. [47]

III.4 Los Retratos del Espacio de Fases

Como lo mencionamos anteriormente, hace más de 100 años Henri Poincaré probó que el movimiento de tres cuerpos en interacción bajo la fuerza de la gravedad puede ser extremadamente complicado. Su descubrimiento fue la primera evidencia de lo que ahora llamamos Caos: que es el comportamiento irregular que se presenta en sistemas dinámicos no-lineales simples sin rasgos aleatorios construidos en éstos, o bien determinísticos. El análisis del Caos es emocionante debido a que abre la posibilidad de simplificar fenómenos muy complicados, es preocupante debido a que introduce nuevas dudas acerca del procedimiento tradicional de la construcción de modelos de Ciencia y, entre otras cosas, es fascinante debido a sus entrelagos entre Matemáticas, Ciencia y Tecnología.

Hay dos estilos principales de pensamiento matemático. El primero es formal y remoto, simbólico y abstracto, centrado en la manipulación virtuosa de fórmulas aun más complejas. El segundo es visual y orgánico, explotando la habilidad remarcable de la mente humana para dibujar y moldear contornos y formas. En el primero debe tratarse del Álgebra mientras que en el segundo deber ser Geometría, pero una Geometría que desde luego está lejos del estereotipo pomposo usualmente reprochado sobre la pobre, muy sufrida, incomprensible Euclidiana. Hay una buena parte de Álgebra en los anales de Caos, pero también un inusual gran número de retratos. El rol de los cálculos formales es forzar a los matemáticos a checar que los resultados realmente sean válidos. Pero los resultados en sí tienden a ser geométricos en carácter: podemos explicarlos y descubrirlos dibujando retratos. Así fue como Poincaré hizo su gran descubrimiento.

Desde el año de 1960 la aproximación geométrica de Poincaré fue desarrollada dentro de la poderosa herramienta del análisis del Caos llamada "Dinámica Topológica" por la Escuela Americana de Steven Smale en Berkeley, California, y la Escuela Soviética de Andrei Kolmogorov, Yasha Sinai y Vladimir Arnold en Moscú. El verdadero análisis del Caos tiene un sabor geométrico muy fuerte: espacio de fases, trayectorias, flujos, mapas, fuentes, sumideros, sillas de montar, atractores, bifurcaciones, etcétera. Cualquier estudioso del Caos que no sólo quiera admirar un hermoso retrato sino comprender qué es el retrato, debe estar muy bien familiarizado con este vocabulario geométrico.

La palabra *espacio* ha sufrido una severa metamorfosis, al menos en matemáticas. Convencionalmente, la palabra se refiere a las cosas tridimensionales en las que habitamos o, 'eso en que el material de los cuerpos tienen extensión'. En matemáticas, *espacio* puede significar casi cualquier cosa. Un matemático que pregunta: ¿En qué espacio estás trabajando?, no se refiere al tamaño de tu oficina; es una petición para una descripción de la estructura completa de la totalidad de objetos del tipo que estamos considerando. Desde este punto de vista, un matemático de no muy amplios estudios dice: un espacio polinomial, es decir un elemento del espacio de todos los polinomios.

El Caos es un fenómeno dinámico. Ocurre cuando el estado de un sistema cambia con el tiempo. Hay cambios regulares, esa cosa de los sistemas dinámicos clásicos y los caóticos, y no hay duda de que también de los más desordenados, que aún todavía no entendemos. La entidad que cambia es alguna variable, o conjunto de variables, que determinan el estado del sistema. Los valores de este conjunto de variables, en un instante particular de tiempo, determina todo lo que deseamos saber acerca del sistema.

Por ejemplo, pensemos en una bola de billar sobre una mesa. Para determinar su estado necesitamos saber, al menos, dónde está (dos variables, sus coordenadas espaciales) y qué tan rápido se mueve (dos más). Si estamos interesados en el giro que se produce con el taco de billar, necesitamos dos variables más para especificar la dirección del eje del giro, y dos más para medir sus correspondientes velocidades. Aún en esta descripción simplificada, una bola de billar es un objeto mucho más complicado, necesitamos ocho variables distintas sólo para especificar su estado instantáneo. Ahora dejemos que el tiempo fluya. La bola se mueve siguiendo las leyes de la dinámica. De cualquier forma en la que se le pegue a la bola, el estado de la bola de billar cambia. Ésa es la descripción física. La visión geométrica es equivalente, pero con un énfasis diferente. En lugar de pensar en el estado físico de la bola, nos enfocaremos en aquéllas cantidades que la determinan.

Un punto sobre una línea puede estar especificado sólo por una cantidad, su distancia a la izquierda o derecha de algún punto determinado, u origen. Para un punto sobre el plano, necesitamos dos de esas cantidades, sus coordenadas relativas a un sistema elegido de ejes. Para un punto en un espacio tridimensional, necesitamos tres cantidades. ¿Qué geometría podría necesitar ocho coordenadas? Obviamente, la geometría de un espacio octadimensional. Ése es un espacio *ficticio*, en el sentido de que existe más en la mente que en el objeto real; pero representa fielmente una entidad física genuina: el conjunto de todos los estados posibles de la bola de billar. Nosotros le llamamos el **espacio de fases** de la bola.

Si un punto en el espacio ordinario se mueve, éste traza una curva. Cuando una bola de billar sigue las leyes de la dinámica, sus ocho coordenadas se mueven continuamente, así que nos dará como resultado una curva en un espacio de fases octadimensional. Ocho dimensiones es muy difícil de visualizar, una forma de visualizar más de tres dimensiones es graficarlas en grupos de dos o tres. [45, 2]

Para entender mejor lo anterior tomemos el ejemplo de medir la temperatura de algún atleta cuando corre en algún lugar en particular, observando este parámetro por un tiempo, probablemente cambiará (ver figura 3.4-1). Los diferentes valores observados pueden etiquetarse por las observaciones que se hagan en diferentes tiempos.

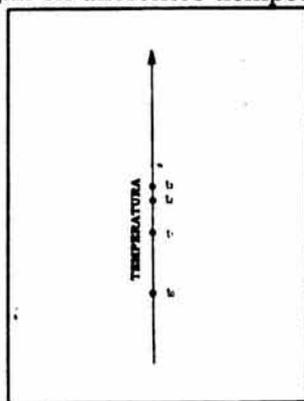


Figura 3.4-1. En la que se muestran cuatro estados observados en cuatro diferentes tiempos.[4]

La medición de la temperatura nos lleva a ver que también involucramos la variable tiempo, es decir, las mediciones observadas van cambiando continuamente con el fluir del tiempo, al añadir otro eje de coordenadas en donde grafiquemos también el tiempo de observación (ver figura 3.4-2), lo que podemos apreciar es su gráfica de la *serie de tiempo* obtenida del fenómeno en estudio.

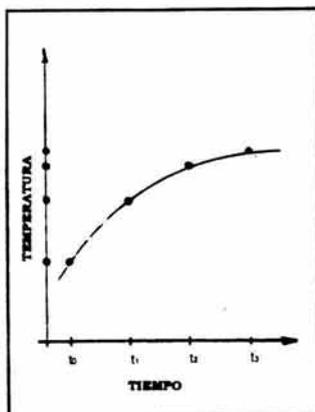


Figura 3.4-2. Estos datos componen una serie de tiempo de observaciones y se muestran aquí como una gráfica. El eje vertical representa el espacio de estado y el eje horizontal indica el tiempo.[4]

Los cambios en el estado actual del sistema se observan y se representan como una curva en el *espacio de fases*. Cada punto en esta curva carga una etiqueta de registro del tiempo de observación. A ésta se le llama una *trayectoria* del modelo (ver figura 3.4-3).

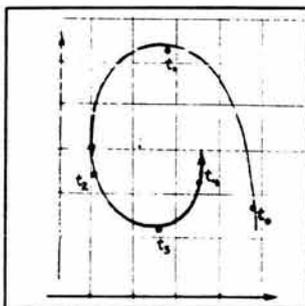


Figura 3.4-3. En la que se muestra el espacio de fases de la medición de la temperatura de un individuo.[4]

Para ver intuitivamente cómo se construye una gráfica en el *espacio de fases* observemos las figuras 3.4-4 y 3.4-5. Para ver cómo se construye una gráfica de espacio de fases matemáticamente ésta se explicará en el siguiente capítulo, por ahora, nos basta con esta idea para adentrarnos en el fascinante tema de los "atractores".

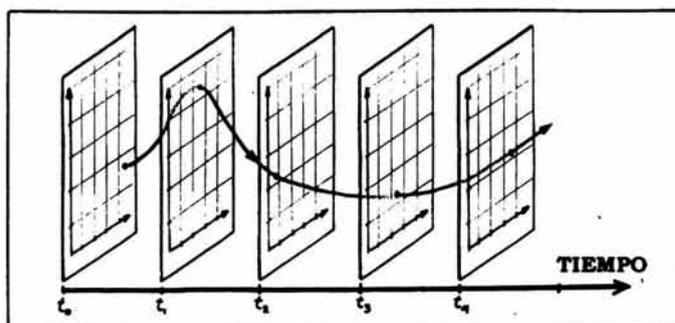


Figura 3.4-4. Aquí el plano vertical representa el espacio de estado y el eje horizontal representa el tiempo de observación. Los parámetros observados en un tiempo dado se grafican en el plano vertical pasando a través del punto apropiado sobre el eje del tiempo.[4]



Figura 3.4-5. La trayectoria puede obtenerse de las series de tiempo simplemente viéndolas desde el ángulo correcto.[4]

Si observamos más parámetros de nuestro ejemplo del atleta cuando corre en algún lugar en particular, esto nos lleva a modelos de más dimensiones (ver figura 3.4-6). [4]

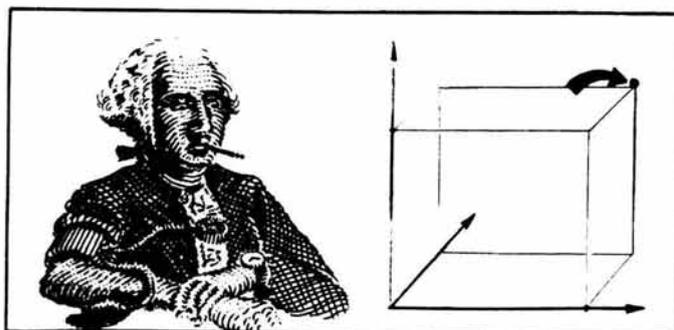


Figura 3.4-6. Supóngase que a las 7:00 a.m. este atleta observa tres de los parámetros de su cuerpo (digamos, temperatura, presión arterial y su pulso), los registros de esos tres datos son un punto en el espacio de fases tridimensional.[4]

III.5 Atractores

El marco general del que emerge el Caos es la llamada teoría de los sistemas dinámicos. Un sistema dinámico consta de dos partes: la noción de estado (la información esencial sobre un sistema) y una dinámica (una regla que describe cómo evoluciona el estado en el tiempo). La evolución puede representarse, como lo mencionamos anteriormente, en un espacio de fases o diagrama de estados, construcción abstracta cuyas coordenadas son las componentes del estado. En general, las coordenadas del espacio de fases varían con el contexto; en el caso de un sistema mecánico podrían ser posiciones y velocidades y, en el de un modelo ecológico, las poblaciones de las diferentes especies.

El péndulo simple constituye un buen ejemplo de un sistema dinámico. Todo lo que se necesita para determinar su movimiento son dos variables: posición y velocidad. El estado es, pues, un punto en un plano, cuyas coordenadas son la posición y la velocidad. Las leyes de Newton dan una regla expresada matemáticamente en una ecuación diferencial, que describe la evolución de dicho estado. Conforme el péndulo oscila a un lado y otro, el estado se mueve a lo largo de una *trayectoria*, o camino, en el plano. En el caso ideal de un péndulo sin rozamiento, la trayectoria es un ciclo; si no, describe una espiral que tiende a un punto a medida que se va frenando el péndulo (ver figura 3.5-1).

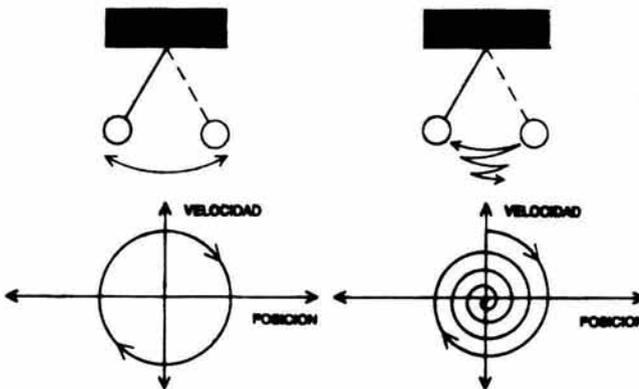


Figura 3.5-1. El espacio de fases es un espacio abstracto cuyas coordenadas son los grados de libertad del movimiento de un sistema. Por ejemplo, el movimiento de un péndulo (esquemas superiores) está completamente determinado por su posición y su velocidad iniciales. Por ello, su configuración se define por un punto en un plano cuyas coordenadas son la posición y la velocidad (esquemas inferiores). Mientras el péndulo oscila de un lado al otro, sigue una "trayectoria" o camino a través del espacio de fases. En el caso de un péndulo ideal no sometido a rozamiento, la trayectoria es una curva cerrada (abajo a la izquierda); pero si hubiera rozamiento, la trayectoria describiría una espiral que se acercaría a un punto (abajo a la derecha). [45]

La evolución temporal de un sistema dinámico puede desarrollarse de manera continua o discreta en el tiempo. En el primer caso, se habla de un flujo; en el segundo, de una aplicación. Un péndulo se mueve continuamente de un estado a otro describiéndose así por un flujo continuo en el tiempo. El número de insectos que nacen cada año en una cierta región y el intervalo temporal entre gotas sucesivas de un grifo que gotea, se explican de modo más natural mediante una aplicación discreta en el tiempo.

Para saber cómo evoluciona un sistema con un estado inicial dado, se puede recurrir a la dinámica (las ecuaciones del movimiento), que explica el movimiento por incrementos a lo largo de la trayectoria. Para determinar el comportamiento de un sistema con este método, se necesita un trabajo de cálculo que es proporcional al tiempo durante el que se desea seguir la trayectoria. En el caso de sistemas simples, como un péndulo sin rozamiento, puede ocurrir que las ecuaciones admitan una solución explícita, es decir, una fórmula que exprese cualquier estado futuro en función del inicial. Una solución explícita proporciona un atajo, un algoritmo simple que precisa sólo del estado inicial y el tiempo final para predecir el futuro, sin pasar por los estados intermedios. Con tal solución, el trabajo de cálculo necesario para seguir el movimiento es más o menos independiente del tiempo deseado. A modo de ejemplo, dadas las ecuaciones del movimiento planetario y lunar, y las posiciones y velocidades de la Tierra y la Luna, los eclipses pueden predecirse con años de antelación.

Los éxitos en la obtención de soluciones explícitas en el caso de muchos sistemas simples, durante los primeros desarrollos de la Física, suscitaron la esperanza de que tales soluciones existieran para cualquier sistema mecánico. Desgraciadamente hoy en día sabemos que esto en general no es así. El comportamiento impredecible de los sistemas dinámicos caóticos no puede expresarse mediante una solución explícita. Consecuentemente, no hay atajos para predecir su comportamiento. No obstante, el espacio de fases proporciona una herramienta poderosa para describir el comportamiento de los sistemas caóticos. La utilidad de la imagen que así se obtiene, reside en la posibilidad de representar el comportamiento de los sistemas de manera geométrica. Por ejemplo, un péndulo con rozamiento termina por detenerse, lo que significa que la trayectoria se aproxima a un punto en el espacio de fases. Este punto no se mueve: está fijo; por atraer a las trayectorias próximas, recibe el nombre de "atractor". Si se da un pequeño empujón al péndulo, vuelve al mismo punto fijo atractor.

Cualquier sistema, que con el paso del tiempo tiende al reposo, puede caracterizarse por un punto fijo en el espacio de fases. Este es el caso de un fenómeno muy general por el que las pérdidas debidas al rozamiento o a la viscosidad, por ejemplo, provocan que las trayectorias sean atraídas hacia una región menor del espacio de fases con menos dimensiones. Se dice que una región así constituye un atractor. *Grosso modo*, un atractor es a lo que tiende, o a lo que es atraído, el comportamiento de un sistema. Algunos sistemas no tienden al reposo a largo plazo, sino que recorren periódicamente una sucesión de estados. Fijémonos en un reloj de péndulo, en él la energía perdida por rozamiento se repone con la almacenada en un muelle o un peso. El péndulo repite su movimiento una y otra vez. En el espacio de fases, tal movimiento corresponde a un ciclo, a una trayectoria periódica. Independientemente de cómo empiece a balancearse el péndulo, el ciclo al que se aproxima a largo plazo es siempre el mismo. Tales atractores son llamados "ciclos límite o periódicos". Otro sistema familiar con un atractor periódico es la onda de la función *seno* o *coseno*. [45]

Hay otros tipos de atractores los cuales explicaremos utilizando un sistema con dos grados de libertad, es decir, uno en el que podemos dibujar las figuras en el plano. De hecho, este sistema no corresponderá a ningún modelo físico particular. Se tratará de una construcción puramente matemática, pensada para ilustrar el comportamiento típico que presentaría un sistema con dos grados de libertad. Dada una ecuación diferencial, podemos visualizar el movimiento de todos los puntos iniciales posibles si pensamos en un fluido imaginario que corre a lo largo de las trayectorias de la ecuación. Si escogemos un punto de partida, es decir, un conjunto de condiciones iniciales para la ecuación, entonces las coordenadas de su movimiento subsecuente son las soluciones de la ecuación diferencial para dicha condición inicial. En la figura 3.5-2 podemos ver la imagen de cómo se ajustan estas líneas de flujo de la ecuación en el espacio de fases. El flujo se indica con líneas curvas, que corresponden a la evolución temporal de las coordenadas de varios puntos iniciales. Las flechas indican la dirección del movimiento a medida que transcurre el tiempo. Podemos notar cómo el flujo encaja en su conjunto: las flechas en las curvas más próximas se hallan alineadas muy juntas. Esto significa que el fluido imaginario, cuyo flujo está representado por las líneas, no se separa: el movimiento es continuo. Existen cuatro características de este flujo particular las cuales me gustaría resaltar:

Primero, en la parte izquierda hay un punto hacia el cual confluyen en espiral todas las líneas de flujo próximas. Se le conoce como *sumidero*. Es bastante similar a un tubo de desagüe por el cual hace «glu-glu» el fluido. Enfrente, en la parte derecha, hay un tubo de desagüe al revés, un punto a partir del cual el fluido se desparrama en espiral. Se le llama *fente*. Piénsese en un fluido saliendo a borbotones por un manantial. En la parte de en medio existe un lugar donde las líneas de flujo parecen entrecruzarse. Se le conoce como *silla de montar*. De hecho, las líneas no se cruzan. Si dos chorros de un fluido real chocan uno con el otro, se ven estas sillas de montar. Finalmente, rodeando la fuente, a la derecha, hay un bucle que se cierra una sola vez. Este es un *ciclo límite*. Se parece a un remolino, donde el fluido gira y gira. Un torbellino.

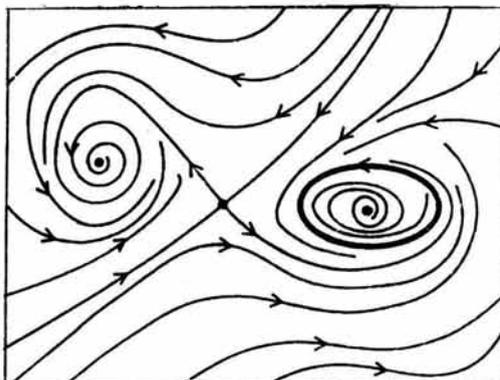


Figura 3.5-2. Espacio de fases de un flujo en un plano que muestra (de izquierda a derecha) un sumidero, una silla de montar, un ciclo límite y una fuente. [2]

A continuación veamos estos atractores más a detalle:

1. Sumideros.-Un sumidero es un lugar en donde una línea de flujo se degenera para convertirse en un único punto, hacia el cual confluyen todos los puntos vecinos. Si el sistema inicia su movimiento en el punto central de un sumidero no sucede nada. Simplemente se queda ahí. Así pues, el sumidero representa un estado estacionario del sistema. Mientras tanto, si el sistema comienza su movimiento por un punto próximo al sumidero, se moverá hacia él. Esto significará que el estado estacionario en un sumidero es *estable*. Si tomamos el punto que representa el estado de un sistema y lo alejamos un poco del sumidero, entonces dicho punto gira en espiral dirigiéndose de nuevo hacia el punto de donde partió. Los sumideros entonces son estados estacionarios estables. Ver figura 3.5-3.

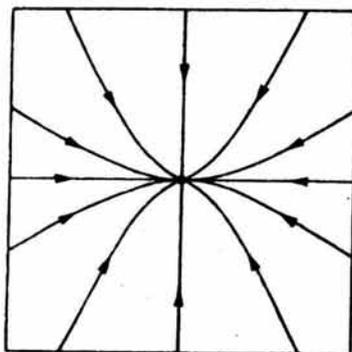


Figura 3.5-3. En la que se muestra un sumidero. [2]

2. Fuentes.-Las fuentes son también estados estacionarios. Pero, ahora, los puntos vecinos se alejan. Ver figura 3.5-4.

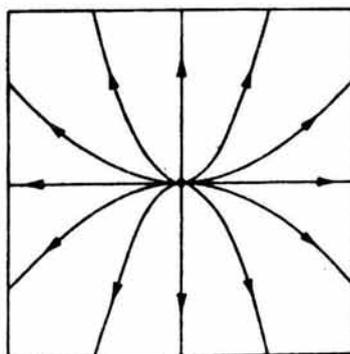


Figura 3.5-4. En la que se muestra una fuente. [2]

3. Sillas de Montar.-Estos atractores son más interesantes. En cierto sentido, son estados estacionarios que son estables en algunas direcciones e inestables en otras. Imaginemos un jinete con poca experiencia montado en un caballo, sobre una silla que ha sido engrasada. Si el jinete se mueve hacia adelante o hacia atrás en la silla, simplemente se deslizará retrocediendo a la posición central. Pero si empieza a resbalar hacia los lados, volcará. Su posición es estable con respecto a los desplazamientos hacia delante y hacia atrás, pero inestable con respecto a los desplazamientos laterales. Debido a este tipo de analogía, a tales puntos se les da el nombre de "sillas de montar". Ver la figura 3.5-5.

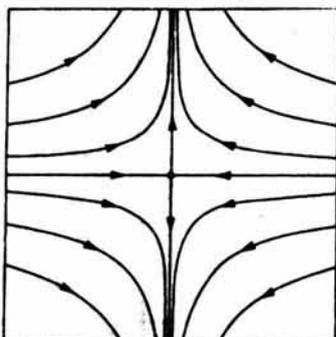


Figura 3.5-5. En la que se muestra un silla de montar: las líneas que se cruzan en el centro son sus separatrices. [2]

El punto de en medio de la "cruz", el punto de silla propiamente dicho es -igual que todas las trayectorias que se reducen a puntos únicos- un estado estacionario. Dos líneas de flujo se denominan las *separatrices* de la silla. Se designan de esta forma porque separan el modo en que fluyen puntos próximos. Imaginémoslos recorriendo una separatriz desde la izquierda de la figura 3.5-5, si empezamos justo por encima de ella, daremos un giro brusco hacia la izquierda a medida que nos aproximemos al punto de silla, si empezamos por abajo, efectuaremos un giro brusco hacia la derecha.

4. Ciclos Límite.-Los ciclos límite son realmente interesantes. Si empezamos uno siempre estamos dando vueltas, repitiendo constantemente el mismo movimiento. El movimiento es "periódico". Hay dos tipos básicos de ciclos límite. El que se muestra en la figura 3.5-6 es un ciclo límite estable: los puntos próximos se mueven hacia él. También existe un ciclo límite inestable: los puntos próximos se alejan de él. (Para dibujarlo, basta con invertir todas las flechas de la figura 3.5-6).

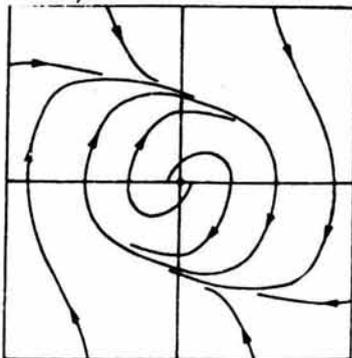


Figura 3.5-6. En la que se muestra un ciclo límite estable que es un bucle cerrado hacia el cual convergen las trayectorias vecinas. [2]

Poincaré y el matemático sueco Ivar Bendixon, demostraron un teorema que prueba que típicamente sólo tienen lugar estos cuatro tipos de comportamiento, en un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano. En la actualidad sabemos que no es cierto que *toda* ecuación diferencial se comporte solamente de estas cuatro formas. Un sistema puede tener varios atractores. Si así ocurre, diferentes condiciones iniciales pueden llevar a diferentes atractores. El conjunto de puntos que evoluciona hacia un atractor se llama su cuenca de atracción. Un reloj de péndulo tiene dos cuencas: los desplazamientos pequeños desde su posición de reposo le devuelven de nuevo al reposo; sin embargo, con desplazamientos grandes, el reloj empieza su tic-tac conforme el péndulo ejecuta una oscilación estable llevándolo a un atractor de ciclo límite o periódico. [2]

La forma de atractor que sigue en complejidad es el "cuasiperiódico" que topológicamente es un toro, una figura semejante a la superficie de una rosquilla o dona (ver la figura 3.5-7). Aquí se combinan juntos varios movimientos periódicos diferentes, cuyas frecuencias son independientes (la *frecuencia* de un movimiento periódico es el número de períodos por segundo. De modo que períodos largos corresponden a frecuencias bajas y períodos cortos a frecuencias altas). La trayectoria se arrolla rodeando el toro en el espacio de fases, de modo que una frecuencia queda determinada por la rapidez con que la trayectoria rodea el toro por el camino más corto y la otra por la rapidez con que lo hace alrededor del camino más largo. En este tipo de atractores los toros pueden ser de dos o más dimensiones, lo que representa la combinación de más de dos oscilaciones. [45]

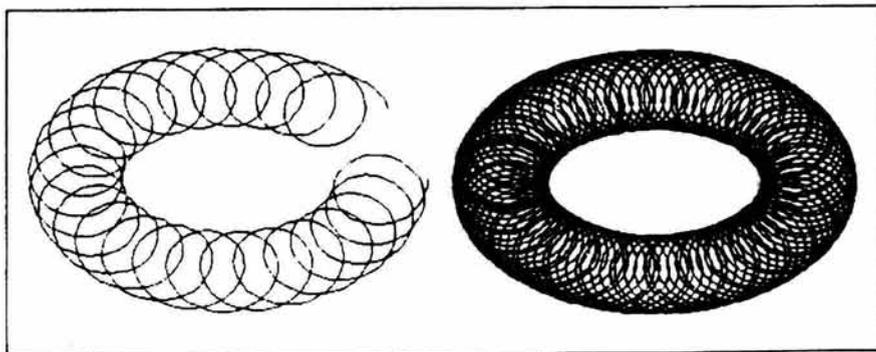


Figura 3.5-7. Topológicamente en un toro tienen lugar movimientos cuasiperiódicos: (izquierda) combinación de movimientos en los círculos grande y pequeño; (derecha) el toro resultante. [2]

Si combinamos dos movimientos periódicos cuyos periodos tengan una medida común –es decir, que ambos sean múltiplos de enteros de una misma cantidad-, entonces el resultado es, de hecho, un movimiento periódico. Si un movimiento tiene un periodo de, digamos, 3 segundos y el otro de 5, entonces la combinación de movimientos se repetirá cada 15 segundos. Pero si no existe ninguna medida común –por ejemplo, si los periodos son de 1 segundo y de $\sqrt{2}$ segundos- entonces el movimiento nunca se repetirá exactamente. Sin embargo, “casi se repite”, en el sentido de que podemos hallar estados que sean tan próximos al estado inicial como queramos. Por este motivo se emplea el nombre de “cuasiperiódico”.

Una característica importante de los movimientos cuasiperiódicos, a pesar de su complejidad, es la de su predecibilidad. Aun cuando la trayectoria no se repite nunca exactamente, si las frecuencias carecen de divisor común, el movimiento sigue siendo regular. Las órbitas que empiezan cerca la una de la otra en el toro permanecen siempre cercanas, por lo que la predecibilidad a largo plazo está garantizada con errores muy pequeños. [45, 2]

Hasta hace muy poco, los puntos fijos, los ciclos límite y los toros eran los únicos atractores conocidos. En 1963, Edward N. Lorenz, del Instituto de Tecnología de Massachusetts, descubrió un ejemplo de un sistema de pocos grados de libertad que presentaba un comportamiento complejo. Motivado por el deseo de entender la impredecibilidad del tiempo meteorológico, empezó con las ecuaciones del movimiento de un fluido (la atmósfera puede considerarse un fluido); simplificándolas, obtuvo un sistema con tan sólo tres grados de libertad. A pesar de ello, el sistema se comportaba de un modo aparentemente estocástico que escapaba a toda caracterización adecuada, por cualquiera de los tres tipos de atractor entonces conocidos. El atractor que observó, llamado hoy atractor de Lorenz, fue el primer ejemplo de “atractor caótico”, o extraño. (Ver figura 3.5-8 y 3.5-9).

Usando una computadora digital para simular su sencillo modelo, Lorenz dilucidó el mecanismo básico responsable del azar observado: las perturbaciones microscópicas se amplifican hasta interesar el comportamiento macroscópico. Dos trayectorias con condiciones iniciales próximas divergen rápidamente de forma exponencial y por ello permanecen cercanas sólo durante un corto periodo. La situación difiere cualitativamente en los atractores no caóticos. En ellos, las trayectorias vecinas siguen estando cerca, los pequeños errores se mantienen acotados y el comportamiento es predecible.

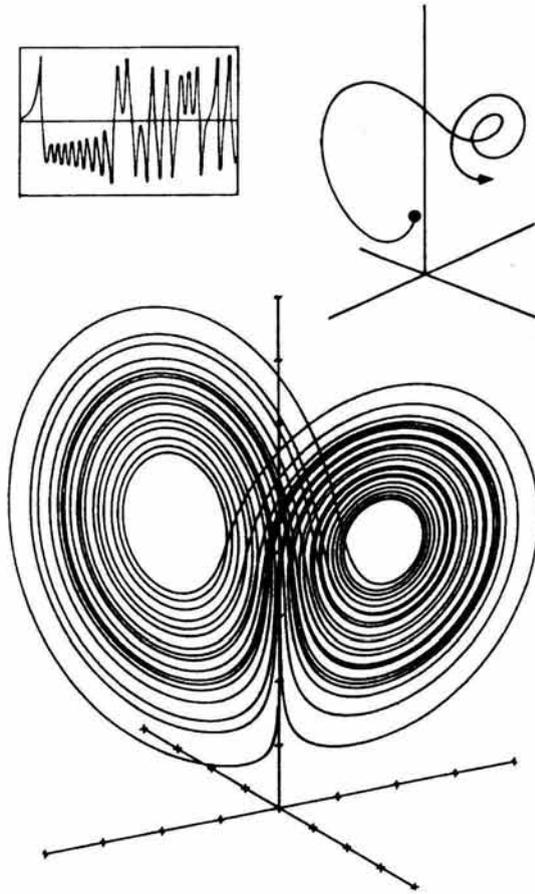


Figura 3.5-8. El Atractor de Lorenz nos recuerda a unas alas de mariposa y se convirtió en un emblema para los primeros exploradores del Caos. Reveló la fina estructura escondida dentro de un flujo desordenado de datos. Tradicionalmente, los valores cambiantes de cualquier variable podría ser desplegada en las tan llamadas series de tiempo (ver el recuadro superior izquierdo). Para mostrar las relaciones cambiantes entre las tres variables se requiere de una técnica diferente. En cualquier instante en el tiempo, las tres variables arreglan la localización de un punto en el espacio tridimensional; como el sistema cambia, el movimiento del punto representa las variables que cambian continuamente. Debido a que el sistema nunca se repite exactamente, la trayectoria nunca se intersecta. En lugar de un lazo cerrado o ciclo límite que da vueltas por siempre, el movimiento sobre un atractor caótico es abstracto, pero transmite la esencia del movimiento del sistema real. [48]

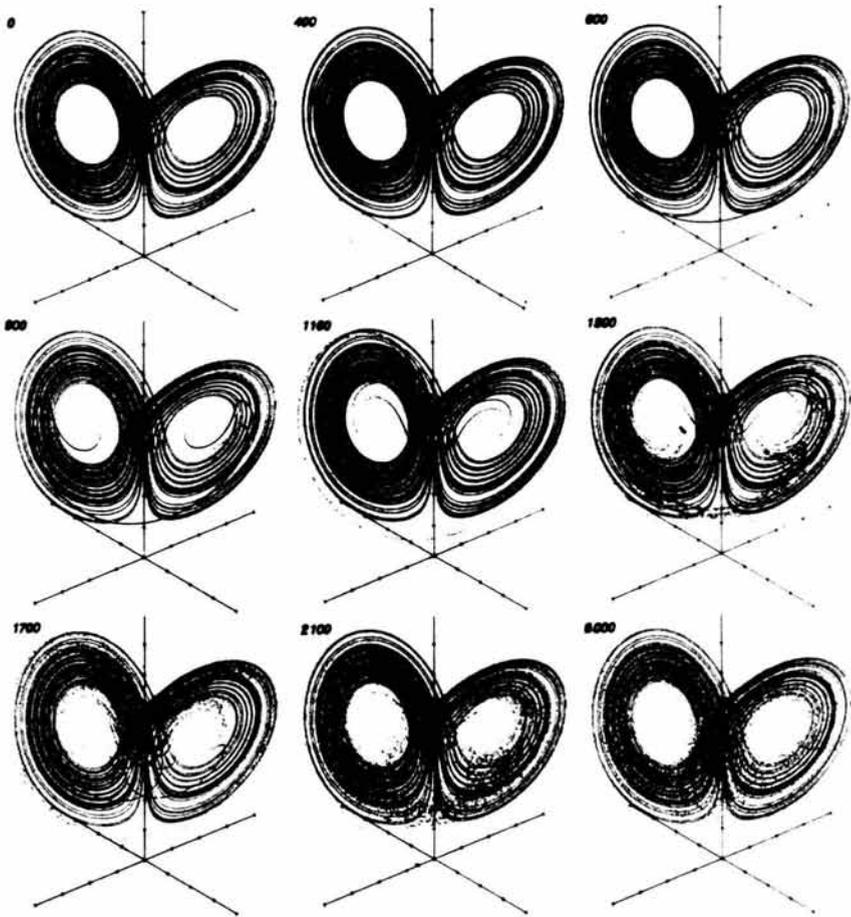


Figura 3.5-9. Un atractor caótico desarrolla una estructura mucho más complicada que la que presenta un atractor predecible (un punto, un ciclo límite o un toro). La divergencia de las trayectorias próximas constituye la razón última por la que el caos lleva a la impredecibilidad. Una medición perfecta correspondería a un punto en el espacio de fases, pero cualquier medición real resulta imperfecta y genera un entorno de incertidumbre. El verdadero estado podría hallarse en cualquier parte del entorno. Lo que se muestra aquí en el atractor de Lorenz, con la incertidumbre en la medida inicial representada por 10,000 puntos rojos, tan juntos entre sí en un comienzo que son indistinguibles. Al moverse cada punto bajo la acción de las ecuaciones, la nube se estira hasta convertirse en un hilo largo y fino, que se pliega después sobre sí mismo muchas veces, hasta que sus puntos se extienden por todo el atractor. La predicción se torna entonces imposible: el estado final puede encontrarse en cualquier parte del atractor. En el caso de un atractor predecible, por el contrario, todos los estados finales permanecen próximos. Los números que hay escritos sobre los esquemas indican el tiempo en unidades de duocentésima de segundo. [45]

La clave para entender el comportamiento caótico está en una simple operación de estirado y plegado que se produce en el espacio de fases. La divergencia exponencial constituye una propiedad local: puesto que los atractores tienen tamaño finito, dos trayectorias en uno de ellos no pueden diverger exponencialmente de manera indefinida. En consecuencia, el atractor debe plegarse sobre sí mismo. Aunque las trayectorias diverjan y sigan caminos cada vez más alejados, en algún momento habrán de acercarse de nuevo entre sí. Al hacerlo, las trayectorias se mezclan en un atractor extraño, como naipes de un mazo cuando un jugador los baraja. El azar de las trayectorias caóticas es consecuencia del proceso de mezcla. El proceso de estirar y doblar se produce repetidamente, creando pliegues dentro de los pliegues *ad infinitum*. Un atractor caótico es, en otras palabras, un fractal: un objeto que va revelando nuevos detalles a medida que se va amplificando (ver la figura 3.5-10).

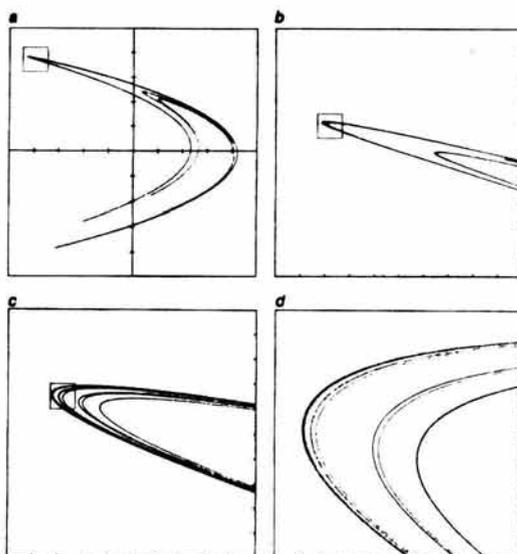


Figura 3.5-10. Los atractores caóticos son fractales: objetos que, a medida que se van amplificando, van revelando nuevos detalles. El caos produce fractales de modo natural. Al irse separando las trayectorias próximas, acaban por doblarse una sobre la otra para que el movimiento permanezca dentro de unos límites finitos. Esto se repite una y otra vez, generándose pliegues dentro de los pliegues *ad infinitum*. Como resultado, los atractores caóticos muestran una bella estructura microscópica. Michel Hénon, del Observatorio de Niza, descubrió una regla simple que estira y pliega el plano, cambiando de sitio cada uno de los puntos. Se representan aquí los obtenidos por aplicación reiterada de la regla de Hénon, empezando con un punto inicial. La forma geométrica resultante (a) proporciona un ejemplo simple de atractor caótico. El recuadro pequeño se aumenta por un factor 10 en b. Repitiendo el proceso (c, d), la estructura microscópica del atractor se manifiesta en detalle.^[45]

El Caos mezcla entre sí las trayectorias en el espacio de fases como el panadero mezcla la pasta del pan cuando la amasa. Para imaginar lo que ocurre con las trayectorias vecinas en un atractor caótico, coloquemos una gota de colorante azul en la masa. El amasado consta de dos acciones: estirar la masa, con la consiguiente extensión del colorante y plegarla sobre sí misma. Al principio, la gota de colorante sólo se alarga, pero acaba por plegarse sobre sí misma, y con el paso del tiempo se estira y repliega muchas veces. Una inspección detallada muestra que la masa consta entonces de muchas capas alternadamente azules y blancas. Tras sólo 20 pasos, la gota inicial se ha estirado hasta más de un millón de veces de su longitud original y su espesor ha disminuido hasta el nivel molecular. El tinte azul se mezcla completamente con la masa. El Caos opera del mismo modo, con la diferencia de que, en vez de mezclarse con la masa, se mezcla en el espacio de fases. Inspirado por esta imagen de la mezcla, Otto E. Rössler, de la Universidad de Tübingen, propuso el ejemplo más elemental de atractor caótico en un flujo (ver la figura 3.5-11).

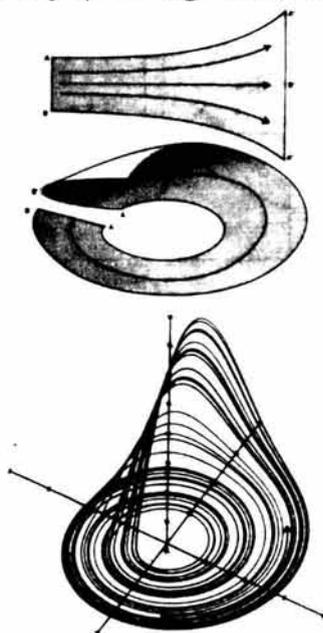


Figura 3.5-11. Observado a gran escala, un atractor caótico no constituye una superficie suave, sino una superficie que se pliega a sí misma. La ilustración muestra los pasos para construir un atractor caótico del tipo más elemental: el atractor de Rössler (abajo). Primero, las trayectorias próximas en el objeto deben "estirarse" o divergir, exponencialmente (arriba); aquí las distancias entre las trayectorias se ofrecen dobladas, casi. En segundo lugar, para que el objeto se mantenga compacto, se debe "doblar" sobre sí mismo (centro); la superficie se pliega sobre ella, de suerte que sus dos extremos se encuentren. El atractor de Rössler, observado en muchos sistemas, desde fluidos hasta reacciones químicas, confirma la máxima de Einstein de que la naturaleza prefiere las formas simples. [45]

Quando se llevan a cabo observaciones sobre un sistema físico, los inevitables errores de la medición impiden especificar su estado con toda exactitud. Por cuya razón, el estado del sistema no está situado en un punto único, sino en una pequeña región del espacio de fases. Aunque la incertidumbre cuántica fija el tamaño mínimo que puede tener la región, en la práctica diversas clases de ruidos de fondo limitan la exactitud de la medición e introducen errores bastante mayores. La pequeña región especificada por la medida es análoga a la gota de colorante azul en la masa.

Situar el sistema en una región pequeña del espacio de fases mediante una medición proporciona cierta cantidad de información sobre el sistema. Cuanto más precisa sea la medida, más conocimiento se obtiene sobre el estado del sistema. A la inversa, cuanto mayor sea la región más incertidumbre se tendrá. Puesto que los puntos próximos en un sistema no caótico permanecen cercanos con la evolución temporal, la medición proporciona cierta cantidad de información que se conserva en el tiempo. Este es, precisamente, el sentido en el que tales sistemas pueden denominarse predecibles: las mediciones iniciales contienen información que puede usarse para predecir el comportamiento futuro. En otras palabras, los sistemas predecibles no son especialmente sensibles a los errores de la medición.

Las operaciones de estirado y plegado en un atractor caótico eliminan sistemáticamente la información inicial y la sustituyen por otra nueva; los estirones amplían las incertidumbres en las escalas pequeñas, los pliegues acercan trayectorias que estaban muy separadas y destruyen información de gran escala. Así, los atractores caóticos actúan como multiplicadores que elevan las fluctuaciones microscópicas a una expresión macroscópica. Esto explica por qué no existen las soluciones exactas, los atajos para predecir el futuro. Tras un breve período, la incertidumbre incluida en la medición inicial cubre el atractor por entero y se pierde toda capacidad predictiva: simplemente no hay conexión causal entre el pasado y el futuro.

Los atractores caóticos funcionan localmente como amplificadores de ruido. Una fluctuación pequeña, debida quizás a la agitación térmica, causará una gran desviación en la posición de la trayectoria poco después. Pero hay un aspecto importante en el que los atractores caóticos difieren de los simples amplificadores de ruido. Debido a que las operaciones de estirar y plegar son repetitivas y continuas, cualquier minúscula fluctuación acabará por dominar el movimiento; así, el comportamiento cualitativo es independiente del nivel de ruido.

Por lo anterior, los sistemas caóticos no pueden "suavizarse", bajando la temperatura, por ejemplo. Generan azar por sí mismos, sin necesidad de influencias aleatorias externas. Su comportamiento aleatorio se debe a algo más que a la amplificación de los errores y a la pérdida de la capacidad de predecir; se origina por la complejidad de las trayectorias generadas por el estirado y el plegado.

Los atractores caóticos de pocas dimensiones abren un nuevo campo en la teoría de los sistemas dinámicos. Pero debe cuestionarse su relevancia en relación con la aleatoriedad observada en los sistemas físicos. La primera prueba experimental en favor de la hipótesis según la cual los atractores caóticos fundan el movimiento estocástico de los fluidos fue más bien indirecta. El experimento fue realizado, en 1974, por Jerry P. Gollub, del Haverford College, y Harry L. Swinney, de la Universidad de Texas en Austin. La prueba resultó ser indirecta, porque los investigadores no se concentraron en el atractor en sí, sino en las propiedades estadísticas que lo caracterizan. El sistema que examinaron era una célula de Couette: formada por dos cilindros concéntricos. El espacio entre ellos se llena con un fluido y uno de los cilindros, o ambos, giran con una velocidad angular fija. Según aumenta la velocidad angular, el fluido exhibe pautas de comportamiento progresivamente más complejas, con una dependencia temporal complicada (ver la figura 3.5-12). Lo que hicieron Gollub y Swinney fue esencialmente medir la velocidad del fluido en un punto dado. Al incrementar la velocidad de rotación, observaron transiciones desde una velocidad constante en el tiempo hasta otra que variaba periódicamente y, finalmente, a otra velocidad variable de forma aperiódica. Esta transición al movimiento aperiódico constituía el punto central del experimento.

El experimento se había diseñado para decidir entre dos concepciones teóricas que predecían diferentes esquemas de comportamiento del fluido a medida que cambiaba la velocidad de rotación. La teoría de Landau del movimiento aleatorio de un fluido predecía que, al incrementar la rotación, se excitaría un número siempre creciente de oscilaciones independientes del fluido. El atractor asociado sería un toro de muchas dimensiones. Esta concepción de Landau había sido puesta en duda por David Ruelle, del Instituto de Altos Estudios Científicos de Paris, y Floris Takens, de la Universidad holandesa de Groningen. Adujeron argumentos matemáticos de los que se intuía que era poco probable que el atractor asociado con las ideas de Landau apareciera en el movimiento de un fluido. Por el contrario, sus resultados indicaban que cualquier toro de muchas dimensiones debería originar un atractor caótico, como había postulado Lorenz.

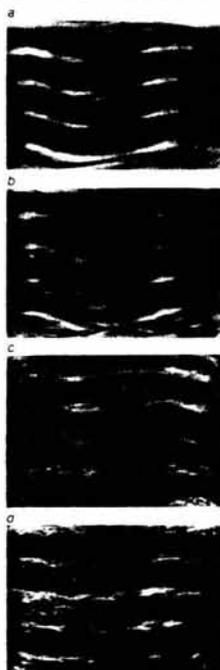


Figura 3.5-12. Comprobación experimental, en apoyo de la hipótesis según la cual los atractores caóticos están en la base de algunas clases de movimiento aleatorio de los fluidos. Se muestran aquí varias fotografías sucesivas del agua en una célula de Couette, que consiste en dos cilindros concéntricos. El espacio entre los dos cilindros se llena con agua y se provoca que el interior gire con una determinada velocidad angular (a). A medida que aumenta la velocidad angular, el fluido desarrolla una pauta de comportamiento progresivamente más compleja (b) que se torna irregular (c) y después caótica (d). [45]

Gollub y Swinney encontraron que para velocidades de rotación bajas, el flujo del fluido no cambiaba con el tiempo: el atractor subyacente era un punto fijo. Al aumentar la velocidad, el agua empezaba a oscilar con una frecuencia independiente que correspondía a un ciclo límite atractor (una trayectoria periódica), y si la velocidad de rotación se aumentaba aún más, la oscilación presentaba dos frecuencias independientes, lo que indicaba la existencia de un toro bidimensional atractor. La teoría de Landau predecía que, conforme se aumentara la velocidad de rotación, la pauta debería continuar: aparecerían gradualmente más y más frecuencias distintas. Pero no ocurría así. Más allá de una velocidad crítica de rotación, aparecía de repente una banda continua de frecuencias. Esta observación era coherente con el "flujo determinista no periódico" de Lorenz, corroborando la idea de que los atractores caóticos subyacían en la turbulencia de los fluidos. Aunque el análisis de Gollub y Swinney apoyaba la idea de que los atractores caóticos estaban detrás del movimiento aleatorio de los fluidos, su trabajo distaba mucho de ser concluyente. Sería deseable demostrar explícitamente la existencia de un atractor caótico simple en los datos experimentales. Sin embargo, lo normal es que en un experimento no se registren todos los aspectos de un sistema, sino tan sólo unos pocos. Gollub y Swinney no podían registrar, por ejemplo, todo el flujo de Couette, sino solamente la velocidad en un punto. [45]

El atractor (ver figura 3.5-13) se reconstruye a partir de unos datos limitados. Está claro que ello no siempre se puede hacer; si el atractor es demasiado complicado, algo se pierde. En algunos casos, sin embargo, si podemos reconstruir la dinámica a partir de un número reducido de datos. [45]. En el capítulo 4 explicaremos con detalle la reconstrucción de atractores a partir de solamente la serie de tiempo dada de los fenómenos en estudio, así como más técnicas para caracterizar diferentes sistemas dinámicos.

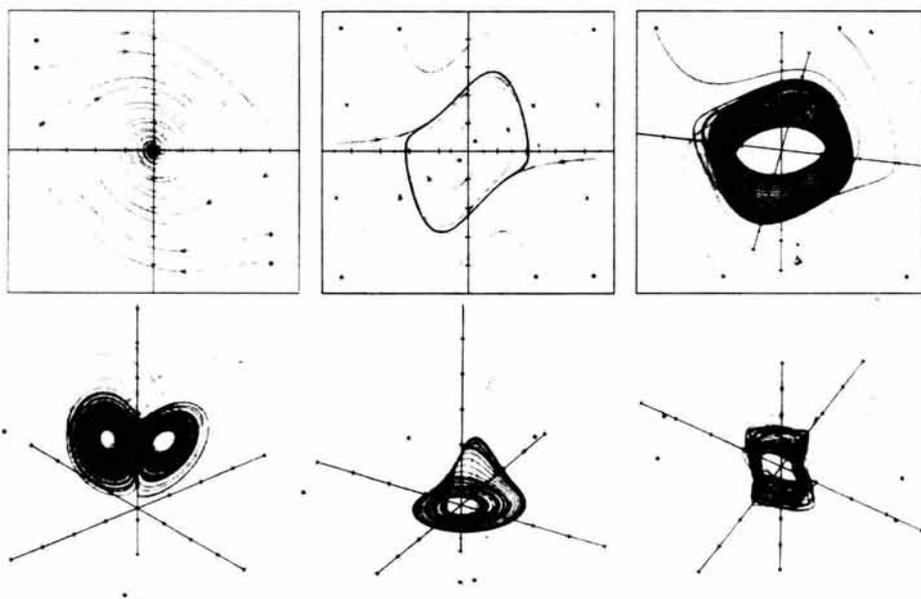


Figura 3.5-13. Los atractores son formas geométricas que caracterizan el comportamiento a largo plazo en el espacio de fases. A grandes rasgos, un atractor es a lo que tiende, o a lo que es atraído, el comportamiento de un sistema. Se muestran aquí los atractores en azul y los estados iniciales en rojo. Las trayectorias (verde) acaban acercándose a los atractores desde los estados iniciales. El tipo más simple de atractor es un punto fijo (arriba, izquierda). Tal atractor corresponde a un péndulo con rozamiento; el péndulo llega siempre a la misma posición de reposo, independientemente del modo en que empezó a oscilar (véase la mitad derecha de la figura 3.5-1). El que le sigue en complejidad es el ciclo límite (arriba, centro) que forma un ciclo cerrado en el espacio de fases. Un ciclo límite describe oscilaciones estables, como el movimiento de un reloj de péndulo y la onda de la función seno o coseno. Las oscilaciones compuestas o comportamiento cuasiperiódico, corresponden a un toro atractor (arriba, derecha). Estos tres atractores son predecibles: su comportamiento puede predecirse con exactitud. Los atractores caóticos, en cambio, corresponden a movimientos impredecibles y adquieren una forma geométrica más complicada. En la parte de abajo se muestran tres ejemplos de atractores caóticos; de izquierda a derecha, se ofrecen los descubiertos por Edward N. Lorenz, Otto E. Rössler y Robert S. Shaw, respectivamente. [45]

CAPÍTULO IV

DIFERENTES MEDIDAS DEL CAOS Y LA COMPLEJIDAD



“Las cosas deberían ser tan simples como sea posible, pero no muy simples”

-Albert Einstein

Remedios Varo, "El Malabarista", 1956, Óleo y nácar incrustado sobre masonite,
(91x122 cm).

Texto de Remedios Varo: Se trata de un prestidigitador, está lleno de trucos, de color, de vida. En el carricoche lleva toda clase de cosas milagrosas y animales, ante él está la "masa"; para que sea más "masa", hasta llevan un traje común, un enorme pedazo de tela gris con agujeros para sacar las cabezas, todos se parecen, tienen igual pelo, etc...

CAPÍTULO IV

DIFERENTES MEDIDAS DEL CAOS Y COMPLEJIDAD

IV.1 Cuantificando El Caos

¿Qué tan caótico es el comportamiento de un sistema complejo? Antes de entrar en los detalles de esa respuesta, deberíamos preguntarnos **por qué** es importante cuantificar el Caos. Una respuesta se sitúa en el deseo de poder especificar cuantitativamente si el comportamiento irregular de un sistema es de verdad caótico o simplemente tiene un comportamiento de mayor o menor complejidad. Como hemos visto, el comportamiento caótico genera una especie de aleatoriedad y pérdida de información debido a las condiciones iniciales, que pueden explicar el comportamiento complejo (o al menos algún comportamiento complejo) en sistemas reales. Sería muy interesante tener alguna forma cuantitativa definitiva para reconocer el Caos y sacar el "verdadero" Caos del sólo comportamiento ruidoso o comportamiento irregular debido a la complejidad (por un gran número de grados de libertad) del sistema. Una segunda respuesta sería que algo de esa cuantificación nos daría una estimación del número de grados (activos) de libertad para el sistema. Una tercera razón para cuantificar el comportamiento caótico es que se podrían anticipar rasgos universales análogos del comportamiento regular y del caótico, tanto cualitativos como cuantitativos, que describan el comportamiento de un sistema y los cambios de su comportamiento de su régimen caótico debido a variaciones en los parámetros del sistema. Veremos que algunos de esos rasgos universales han sido descubiertos y que parecen describir exactamente el comportamiento de sistemas actuales. Finalmente (aunque hoy es raramente posible), podríamos esperar que podamos ser capaces de correlacionar cambios en la cuantificación del comportamiento caótico, con cambios en el comportamiento físico de un sistema. Por ejemplo, ¿Hay alguna cuantificación o valor cuyos cambios están ligados a los ataques de fibrilación en los latidos del corazón, o en los comienzos de turbulencia en un fluido, o comportamiento ruidoso en un circuito semiconductor?

Además de calcular valores para cuantificar sistemas caóticos, necesitamos ser capaces de estimar incertidumbres asociadas con esa cuantificación. Sin esas incertidumbres, es imposible hacer comparaciones significativas entre valores calculados teóricamente y medidos experimentalmente, o comparar resultados de diferentes experimentos.

Para resumir, aquí hay algunas razones para cuantificar el comportamiento caótico:

1. La cuantificación puede ayudar a distinguir el comportamiento caótico del comportamiento ruidoso.
2. La cuantificación puede ayudar a determinar cuantas variables se necesitan para modelar la dinámica del sistema.
3. La cuantificación puede ayudar a clasificar sistemas dentro de clases universales.
4. Cambios en los valores de la cuantificación pueden estar ligados a importantes cambios en el comportamiento dinámico del sistema. [12]

La figura 4.1-1, que fue muy importante para obtener una forma de meta-análisis de caracterizar los fenómenos en diferentes grados de complejidad, muestra tres distintos sistemas caóticos. ¿Cuál es más caótico?

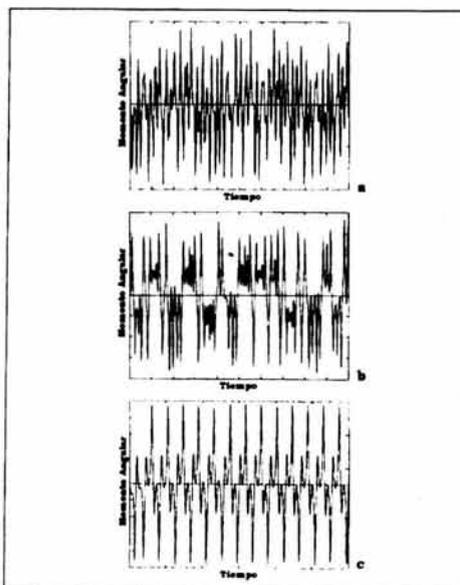


Figura 4.1-1. Algún Caos es más caótico que otro Caos. Se ilustran tres ejemplos del momento angular del péndulo contra tiempo, obtenido numéricamente, para diferentes frecuencias y resistencia al movimiento impulsor. Los tres son regimenes caóticos, pero son muy diferentes. El Caos es aparente en a y b; c parece un sistema periódico de periodicidad 5, pero cada pico tiene una altura ligeramente diferente, y esas variaciones tienen todas las características del Caos: nunca se repiten, es sensible a las condiciones iniciales, etcétera.[1]

IV.2 Series de Tiempo de Variables Dinámicas

La herramienta teórica clave que usaremos para cuantificar el comportamiento caótico, es la noción de una "serie de tiempo" de datos para el sistema. Nos enfocaremos en el uso de una secuencia de tiempo de valores de un sistema individual variable, decimos $x(t)$, para determinar las medidas cuantitativas de los comportamientos (posiblemente) caóticos del sistema. Asumiremos que hemos registrado una secuencia de valores $x(t_0)$, $x(t_1)$, $x(t_2)$, ... con $t_0 < t_1 < t_2$, y siguiendo esta secuencia. Podrían ser series de valores de tiempo muestreados de alguna variable, donde el tiempo de los valores están bastante juntos, o podrían ser series de valores para alguna variable donde el tiempo de los valores están medianamente separados generalmente.

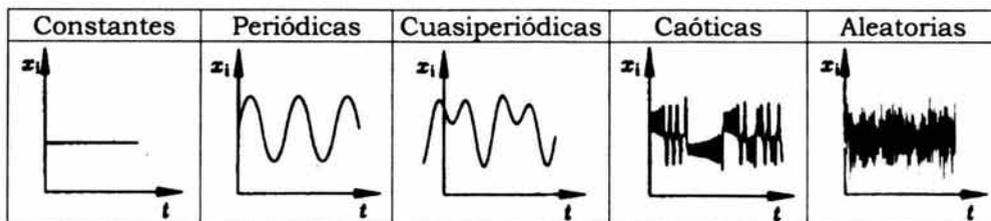
Tal serie de valores muestreados de solo una variable podría ser suficiente para capturar las características del sistema que queremos describir, en especial si queremos predecirlo. En efecto, si el muestreo se lleva a cabo en intervalos de tiempo apropiados (que necesitaremos especificar) y si la secuencia es usada hábilmente, entonces desde luego podemos reconstruir los rasgos *esenciales* de la dinámica en su espacio de fases. Por supuesto, necesitamos decir qué entendemos por *esencial*. Los valores muestreados de una variable no nos dirán claramente (o, en general, no podrán) qué es lo que están haciendo las otras variables (sin que nosotros tengamos una teoría completa para el sistema). Si nosotros limitamos nuestras metas, para reconocer bifurcaciones en el comportamiento del sistema y determinar si el comportamiento es caótico y si además, qué tan caótico es, entonces decimos que esta secuencia de variables individuales es suficiente (con algunas calificaciones, por supuesto).

Puede ser tentador basar nuestro análisis del comportamiento del sistema sobre trayectorias de tiempo continuo dado simbólicamente como $X(t)$, donde la cantidad del vector representa una serie completa de variables dinámicas para el sistema. Una serie completa es el número mínimo de variables que se necesitan para especificar únicamente el estado del sistema. En este tipo de análisis, el valor de x es válido para cualquier valor del parámetro tiempo. Sin embargo, experimentos reales siempre cuentan con muestreo de tiempo discreto de las variables, y cálculos numéricos, que debemos usar para la mayoría de los sistemas no-lineales, siempre tenemos pasos de tiempo discreto. Desde ambos, experimentos reales y cálculos de computadora actual, siempre se dan los valores de la variable en pasos de tiempo discreto, hacemos una virtud de necesidad y basar nuestra entera discusión sobre esas secuencias de tiempo discreto.

El problema de escoger el tiempo apropiado entre muestras (que es, escoger t_1-t_0 , t_2-t_1 , etc.) es un problema delicado. Si una cantidad infinita de ruido libre de datos está disponible, entonces casi cualquier serie de intervalos de tiempo lo estará. Sin embargo, para más situaciones realistas, con una cantidad finita de datos contaminados por algún ruido, debemos proceder muy cautelosamente. [14, 18]

Para caracterizar el Caos cuantitativamente, haremos uso de dos diferentes, pero relacionados, tipos de descripción. El primer tipo enfatiza la *dinámica* (dependencia de tiempo) del comportamiento caótico. El exponente de Lyapunov es un ejemplo de este tipo de descriptor. Introduciremos además algún tipo de "entropía", que juega un papel principal. Esos valores en la cuantificación nos dicen cómo el sistema evoluciona en tiempo y qué pasa con trayectorias cercanas que fluyen con el tiempo. El segundo tipo de cuantificación enfatiza la naturaleza *geométrica* de las trayectorias en el espacio de fases. Permitimos al sistema evolucionar para un tiempo (razonablemente) largo, y entonces examinamos la geometría de las trayectorias resultantes en el espacio de fases.

Las siguientes figuras muestran diferentes series de tiempo que han sido caracterizadas en la literatura como series constantes ($f(x)=(x*0)+1$), periódicas (función seno o coseno), cuasiperiódicas (función dobleseno), caóticas (ecuación de Lorenz) y aleatorias (ruido blanco). [5]



En este trabajo utilizaremos las técnicas de Distribución de Probabilidades, Diagramas de Espacio de Fases, Mapas de Poincaré, Exponente de Lyapunov, Espectro de Potencia, Frecuencias Dominantes, Función de Correlación, Mapas Recurrentes, que son técnicas de la Dinámica No-lineal, para caracterizar las series de tiempo utilizadas en el capítulo 5.

IV.3. Técnicas de Análisis de la Dinámica No-lineal para Series de Tiempo

1.-Distribución De Probabilidades

Esta técnica provee un histograma de los valores de los datos y realiza varias pruebas estáticas sobre éstos. Además muestra la probabilidad de ocurrencia de ciertos valores de datos. [5]

El arma práctica de la teoría de la probabilidad es la estadística. Gran parte de la estadística se centra alrededor de la llamada *distribución normal* (figura 4.3-1). Esta es una curva en forma de campana que moldea fielmente las proporciones de una población que tiene alguna característica particular. Por ejemplo, si se toman 1000 hombres al azar de entre la población de una región en particular y se dibuja una gráfica que muestre cuántos de ellos tienen una determinada altura en centímetros, ésta se asemejará exactamente a la curva acampanada de la distribución normal. Lo mismo sucede si se representa la envergadura de las alas de una población de patos, la habilidad de una población de topos para cavar madrigueras, los tamaños de los dientes de los tiburones o el número de lunares de los leopardos. (véase capítulo 1, 20pp). [2, 5]

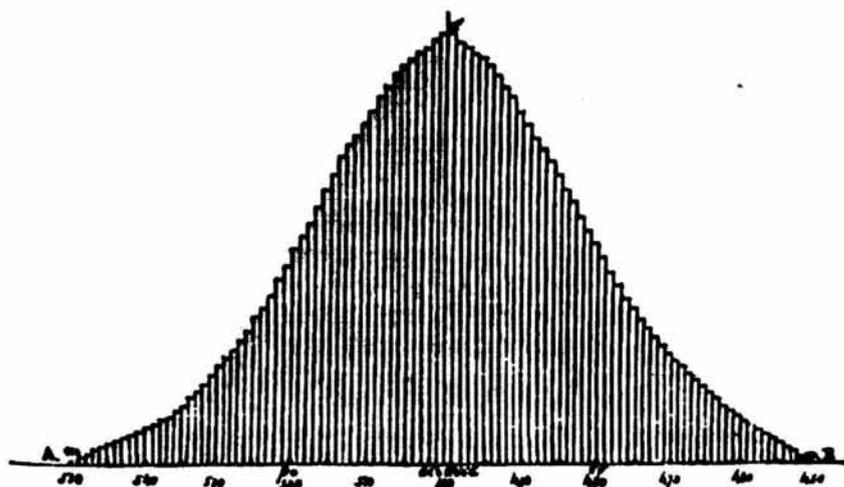
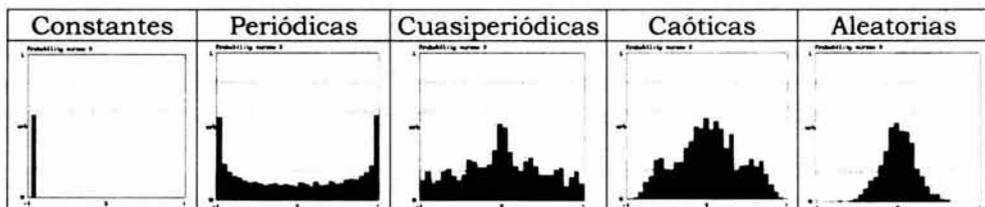


Figura 4.3-1. Gráfica de una distribución normal (Quetelet, 1846). [2]

Clasificación de la Distribución de Probabilidades:

Datos puramente aleatorios (como el ruido blanco) darán un incremento a la distribución Maxwelliana, donde podría mostrarse como una curva simple en todas las vistas si los datos son lo suficientemente válidos. Éste además podría ser el caso para datos caóticos, pero no lo es en general, más bien la distribución es parecida a un fractal. Los datos periódicos seguro darán un simple histograma con puntas filosas. [5]



2.-Diagramas De Espacio De Fases

Varias derivadas de los datos pueden ser graficados contra los valores de los datos para obtener una gráfica de espacio de fases que revela la topología y evolución de la solución, otra forma de construirla es usando la serie original y retrasos en tiempo de ésta. [5]

En su forma más simple, una secuencia de observaciones experimentales produce una *serie de tiempo*: una lista de números que representan el valor de la magnitud observada en intervalos regulares de tiempo. (Pueden ser irregulares, pero mantengamos la discusión sencilla). Por ejemplo, la temperatura diaria en un lugar dado al mediodía forma una serie de tiempo, quizás una como ésta:

17.3, 19.2, 16.7, 12.4, 18.3, 15.6, 11.1, 12.5 ...

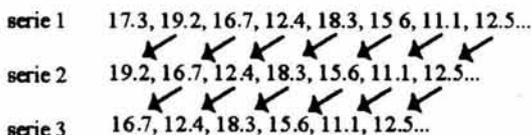
en grados centígrados.

Supongamos que queremos ajustar dichos datos a un atractor extraño. El problema es que se está contemplando un atractor en tres dimensiones; pero nuestras observaciones sólo dan una magnitud, si pudiéramos ver el atractor desde otras direcciones, podríamos construir un dibujo completo en tres dimensiones, igual que un arquitecto puede obtener la forma de un edificio a partir de un plano, un alzado frontal y un alzado lateral. Para reconstruir un atractor de tres dimensiones necesitamos información desde tres direcciones diferentes. Pero es imposible encontrar esas direcciones extras en una serie de tiempo de un único observable (un observable experimental es una cantidad que depende del estado del sistema que se observa), lo que necesitamos son otros dos observables.

Capítulo IV

Diferentes Medidas del Caos y Complejidad

Lo que Ruelle y Packard comprendieron fue que se pueden obtener dos observables ficticios más a partir de una sola serie de tiempo, desplazando el valor del tiempo. En vez de la serie de tiempo única se comparan tres; la original y dos copias, desplazadas uno y dos intervalos, respectivamente:



De esta forma se obtiene una construcción matemática: una serie de tiempo de observaciones en tres dimensiones, construida a partir de la serie de tiempo original de observaciones de una sola dimensión. Se leen columnas sucesivas de tuplas. Así, la primera de estas observaciones ficticias es la tupla [17.3, 19.2, 16.7], que representa un punto del espacio tridimensional que, referido a un origen elegido, cae 17.3 unidades al este, 19.2 al norte y 16.7 arriba. La siguiente es [19.2, 16.6, 12.4], y así sucesivamente. Según evoluciona el tiempo, estas tuplas se mueven en el espacio. Ruelle y Packard conjeturaron, y Takens demostró, que los caminos que trazan estas tuplas son una aproximación topológica a la forma del atractor.

Para un atractor con más dimensiones, se necesitan más de estas series de tiempo desplazadas, pero sigue siendo válida la misma idea general. Hay un método de cálculo para reconstruir la topología del atractor a partir de una serie de tiempo única, y *no importa qué observables se utilicen* para hacer esto. [2]

Reconstrucción del Espacio de Fases

El análisis de series de tiempo dadas como matrices de datos se analizan de la siguiente forma, se asume que la serie de tiempo resulta de un sistema dinámico estrictamente no-lineal. Las columnas de la matriz de datos son tomadas como aproximaciones discretas de trayectorias continuas del sistema. La meta en la investigación de una serie de tiempo es caracterizar el sistema dinámico de donde se deriva.

La reconstrucción del espacio de fases es un proceso donde columnas adicionales son derivadas desde una columna medida, dada en la matriz de datos. La figura 4.3-2 muestra un ejemplo donde una columna individual es usada para producir tres nuevas columnas. Las nuevas columnas generadas son básicamente copias cambiadas de la columna inicial donde el tamaño del cambio es denotado por el llamado tiempo de retraso d .

La longitud de las nuevas columnas es un poco más pequeño que la longitud de la columna inicial. La cantidad de reducción en el número de muestras depende del tiempo de retraso d y de la dimensión del espacio de reconstrucción (tres en el ejemplo de la Figura 4.3-2). Si los datos originales consisten de no sólo una, sino muchas columnas de datos, la construcción de columnas adicionales es llamada reconstrucción multi-columna. Tomando la derivada calculada numéricamente de una columna es otra posibilidad para generar columnas adicionales.

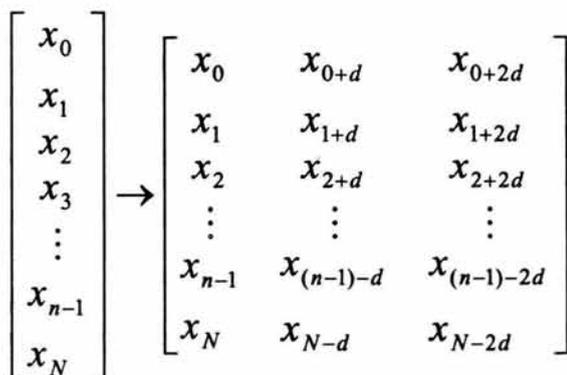


Figura 4.3-2. Reconstrucción del Espacio de Fases, generando un espacio de reconstrucción en 3D de una columna individual.

Con la reconstrucción del espacio de fases dos parámetros importantes se tienen que decidir. Primero se tiene que determinar un tiempo de retraso d apropiado y segundo se debe especificar la dimensión del espacio de reconstrucción. La elección del tiempo de retraso d influye decisivamente en la apariencia visual del espacio de reconstrucción. En la figura 4.3-3 se muestra la reconstrucción del espacio de fases de los datos de un electrocardiograma con un tiempo de retraso de $d=2$ y $d=25$.



Figura 4.3-3. Reconstrucción del espacio de fases de datos de un ECG con diferentes tiempos de retraso d .

Capítulo IV

Diferentes Medidas del Caos y Complejidad

El cálculo de la autocorrelación y el análisis de frecuencias de una columna son usadas para determinar los tiempos de retraso. La utilidad de la reconstrucción del espacio de fases se debe a resultados teóricos cuyo estado es el siguiente: si la dimensión del sistema dinámico marcado no es más grande que n entonces, tomando la dimensión del espacio de reconstrucción a ser $2n+1$ es suficiente para aproximar el comportamiento cualitativo del sistema marcado en el espacio de reconstrucción. Por ejemplo, si el sistema original contiene un atractor entonces el espacio de reconstrucción también contendrá una versión distorsionada del mismo atractor.

De este modo con la reconstrucción del espacio de fases, el comportamiento de un sistema dinámico complejo posiblemente con una dimensión más alta, puede ser analizado sólo procesando una sola serie de tiempo discreto. Como la dimensión del sistema dinámico marcado no es conocida frecuentemente, este avance de la dimensión del espacio de reconstrucción tiene que ser estimada. Una aproximación comienza con una cota superior garantizadamente grande sobre la dimensión del espacio de fases y emplea la descomposición de valores individuales para reducir este número tanto como sea posible. [2, 5]

Clasificación de los Diagramas de Fases:

Curva cerrada: oscilación periódica o subarmónica.

Toroide: cuasiperiódica, dos inconmensurables frecuencias presentes.

Figura Discernible: Atractor extraño, existen alejamientos y acercamientos de trayectorias. Sistema caótico.

Colección borrosa de trayectorias: Sistema dinámico con mucha aleatoriedad o ruido de entrada, obteniéndose patrones no discernibles aún, la literatura muestra que todavía no se ha encontrado algún patrón para la aleatoriedad. [5]

Constantes	Periódicas	Cuasiperiódicas	Caóticas	Aleatorias

3.-Mapas De Poincaré

El valor de los datos de cada máximo o mínimo es graficado contra su valor del máximo o mínimo previo para así revelar una estructura en los datos que de otro modo podría estar oculta; es un método de desfaseamiento. [5]

Una gráfica de espacio de fases generalmente no distinguirá entre datos caóticos y aleatorios. Para este propósito es útil tomar alguna sección cruzada del plano de fases para reducir su dimensión a 1. Después de esa operación, los datos caóticos aparecerán frecuentemente en la forma de un atractor extraño teniendo una estructura fractal con dimensión fraccional. Ver la figura 4.3-4. [2]

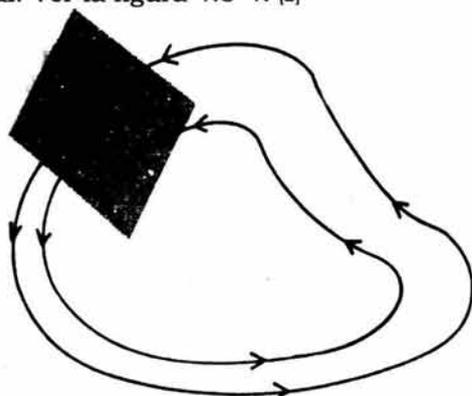


Figura 4.3-4. En la que se muestra cómo se construye el Mapa de Poincaré cruzando una sección del Espacio de Fases. [2]

Reconstrucción De Los Mapas De Poincaré

En el estudio matemático de sistemas dinámicos, un mapa se refiere a una serie de tiempo de datos $\{x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{n-1}), \dots, x(t_N)\}$ con la notación $x_0 \equiv x(t_{n-1})$. Un mapa determinístico simple es aquél en el que el valor de x_{n+1} puede determinarse de los valores de x_n . Éste se escribe frecuentemente de la forma

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (4.3-5)$$

Ésta puede ser reconocida como una *ecuación de diferencias*. La idea de un mapa puede estar generalizada a más de una variable. Además, x_n podría representar un vector con M componentes $x_n = (Y1_n, Y2_n, \dots, YM_n)$ y la ecuación 4.3-5 podría representar un sistema de M ecuaciones.

Por ejemplo, supóngase que consideramos el movimiento de una partícula que se despliega en el espacio de fases $(x(t), \dot{x}(t))$. Aprendimos con anterioridad que cuando el movimiento es caótico la trayectoria tiende a llenar una porción del espacio de fases. Sin embargo, si en lugar de encontrar al movimiento continuamente, nosotros sólo lo encontramos en la dinámica de tiempos discretos, entonces el movimiento aparecerá como una serie de puntos o marcas en el espacio de fases. Si $x_n \equiv x(t_n)$ y $y_n \equiv \dot{x}(t_n)$, esta serie de puntos en el espacio de fases representa un mapa *bidimensional*.

$$X_{n+1} = f(x_n, y_n) \tag{4.3-6}$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

Cuando los tiempos de muestreo t_n se escogen acorde a ciertas reglas, este mapa es llamado *Mapa de Poincaré*. [11, 5]

Clasificación de Mapas de Poincaré:

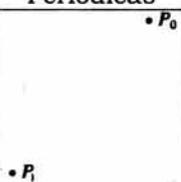
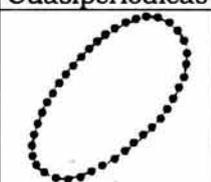
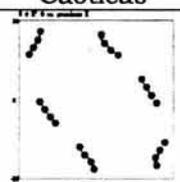
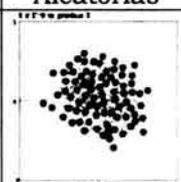
Número finito de puntos: oscilación periódica o subarmónica.

Curva cerrada: cuasiperiódica, dos inconmensurables frecuencias presentes.

Curva abierta: modelamiento sugerido como un mapa unidimensional; trata de graficar $x(t)$ contra $x(t+d)$.

Colección fractal de puntos: extraño atractor en tres dimensiones de espacio de fases.

Colección borrosa de puntos: (i) sistema dinámico con mucha aleatoriedad o ruido de entrada; (ii) atractor extraño pero el sistema tiene una disipación muy pequeña –se debe usar la técnica del exponente de Lyapunov; (iii) atractor extraño en espacio de fases con más de tres dimensiones –se debe tratar con múltiplos del mapa de Poincaré; (iv) movimiento cuasiperiódico con tres o más frecuencias dominantes inconmensurables. [11, 5]

Constantes	Periódicas	Cuasiperiódicas	Caóticas	Aleatorias
	 <p>• P_0</p>			

4.-Exponente De Lyapunov

El exponente de Lyapunov más grande es estimado siguiendo aproximadamente la evolución de pares escogidos de puntos de datos. El exponente de Lyapunov es una medida de la tasa el cual las trayectorias pasan cerca una de la otra en el espacio de fases en el que divergen. [5]

Describiremos el cálculo del exponente de Lyapunov de una serie de tiempo unidimensional. Etiquetaremos a las series $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots$ como x_0, x_1, x_2, \dots . Por la consideración de simplicidad, asumiremos, como usualmente es el caso, que los intervalos de tiempo entre muestras son todas iguales; por consiguiente, podemos escribir:

$$t_n - t_0 = n\tau \tag{4.3-7}$$

donde τ es el intervalo de tiempo entre muestras.

Si el sistema se comporta caóticamente la divergencia de trayectorias cercanas se manifestarán de la siguiente forma: si seleccionamos algún valor de las secuencias de x_s , digamos x_i , y entonces buscamos la secuencia para otro valor de x , digamos x_j , que es muy cercano a x_i , entonces la secuencia de diferencias

$$\begin{aligned} dif_0 &= |x_j - x_i| \\ dif_1 &= |x_{j+1} - x_{i+1}| \\ dif_2 &= |x_{j+2} - x_{i+2}| \\ &\vdots \\ dif_n &= |x_{j+n} - x_{i+n}| \end{aligned} \quad (4.3-8)$$

se asume que se incrementa exponencialmente, al menos sobre el promedio, conforme se incrementa n . Más formalmente, asumimos que

$$dif_n = dif_0 e^{\lambda n} \quad (4.3-9)$$

o, después de tomar logaritmos

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{dif_n}{dif_0} \quad (4.3-10)$$

En la práctica, tomamos la ec. (4.3-10) como la definición del exponente de Lyapunov λ . Si λ es positiva, el comportamiento es caótico. En este método de encontrar λ , esencialmente estamos localizando dos puntos de trayectorias cercanas en el espacio de fases y entonces seguimos las diferencias entre las dos trayectorias que siguen cada uno de esos puntos "iniciales". [12]

Algunos detalles técnicos

En principio, la determinación del exponente de Lyapunov de los datos de la serie de tiempo es sencilla. Muchos comentarios, sin embargo, están en el siguiente orden:

1. Se asume una tasa exponencial de separación de las dos trayectorias. Para una serie de tiempo dada, necesitamos examinar la validez de ese postulado cuidadosamente. Ésta se puede hacer graficando el logaritmo (natural) de la diferencia dif_m como una función del índice m . Si la divergencia es exponencial, los puntos caerán sobre una línea recta (o muy cercana a ésta), y entonces la inclinación de ésta es el exponente de Lyapunov. Una aptitud de al menos la cuadratura a una línea recta a esos datos dará una medida de la virtud de esa aptitud. Si el dato no cae cerca de una línea recta sobre una gráfica semilogarítmica, entonces el exponente de Lyapunov citado no nos es útil.

2. El valor de λ puede (y en general lo hace) depender del valor de x_i escogido como el valor inicial. Por esto, podemos realmente escribir $\lambda(x_i)$. Para caracterizar al atractor, usualmente queremos un valor promedio de λ . Nosotros encontramos un valor promedio calculando $\lambda(x_i)$ para un gran número N (se dice, 30 ó 40 en la práctica) de valores iniciales distribuidos sobre el atractor. El exponente de Lyapunov promedio para el atractor se encuentra entonces de la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda(x_i) \quad (4.3-11)$$

De esta serie de $\lambda(x_i)$ podemos además calcular una desviación estándar, que puede ser usada para proveer una estimación de la incertidumbre, que está asociada con el valor promedio.

Nota: Nosotros queremos el valor de λ para reflejar el hecho de que algún valor de x_i puede ocurrir más frecuentemente que otros: trayectorias visitan algunas partes del espacio de fases más frecuentemente que otras. El camino más fácil para implementar este requerimiento es escoger un gran número de puntos iniciales acordes a sus subíndices i . Entonces esas distancias de los valores de x que ocurren más frecuentemente en las series de tiempo se mostrarán más frecuentemente como puntos iniciales.

3. Para los sistemas acotados con los que nos hemos interesado, el número de pasos de tiempo n usados en la ec. (4.3-8) para la determinación de λ no pueden ser muy grandes. Como x está limitada en tamaño por un sistema acotado, las diferencias dif_i no pueden ser más grandes que la diferencia entre el valor más grande y el valor más pequeño de x . De aquí que el exponencial creciente en dif no puede seguir creciendo por siempre, y debemos limitar a n . Para alguna extensión, debemos ver a la secuencia de dif_i s para un sistema dado para ver qué tan grande puede ser n . El tamaño de n además depende del valor de λ y de dif_0 . Si dif_0 se hace más pequeña por requerimiento que x_j sea más cercano en valor a x_i , entonces la divergencia exponencial continuará para valores más grandes que n .
4. Si la secuencia de valores de x corresponde a un comportamiento periódico, los valores de dif deberían ser muy pequeños ó 0 porque la trayectoria regresa exactamente a la misma serie de valores. De aquí que este método de trayectoria podría dar $\lambda=0$ reflejando el hecho de que dif s tampoco crece o decrece en tamaño. Este resultado nos dice que los puntos de la trayectoria sobre órbitas periódicas tampoco convergen o divergen

(sobre el promedio). Para la dirección transversal del espacio de fases para una trayectoria periódica estable, el exponente de Lyapunov debería ser negativo, indicando que trayectorias cercanas son atraídas a la órbita estable. Sin embargo, las series de tiempo de valores de la misma trayectoria no pueden decirnos cómo trayectorias cercanas se aproximan al atractor.

5. Hay restricciones sobre los valores de j que podríamos usar para una x_i dada. Si los resultados de las series de tiempo de un muestreo con un espacio muy cerrado de alguna cantidad, varía suavemente, entonces no debemos escoger a una j que esté muy cercana a i porque esos dos valores son muy cercanos en tiempo. Si los dos valores están muy cercanos en tiempo, esperamos que el comportamiento permanezca cerrado, y podríamos terminarlo con un valor pequeño erróneo para $\lambda(x_j)$. Podemos evitar este problema insistiendo que x_j no siga a x_i muy de cerca en tiempo en la serie. Varios criterios han sido propuestos para escoger una separación de tiempo mínimo, algunos usando conceptos como lo es el "Tiempo de Correlación", que contienen detalles técnicos que queremos evitar aquí. Generalmente, una gráfica de x_j s como una función de tiempo permitirá determinar, al menos aproximadamente, qué tiempo mínimo de retraso puede haber. Por supuesto, si los datos son un registro de la sección de Poincaré, que ya están muy separados en tiempo, entonces esos problemas no aparecen.

6. Un comentario sobre unidades. Algunos autores prefieren definir λ usando:

$$dif_n = dif_0 2^{n\lambda_2}$$

y entonces λ_2 se interpreta como una razón de divergencia en "bits por unidad de tiempo". Usando 2 como la base para la función exponencial, el exponente da la razón de divergencia de la secuencia de los valores x escritos en la forma de números binarios (una secuencia de bits, 0s ó 1s). λ_2 es una medida de la razón (en bits por unidad de tiempo) del que perdemos información contenida en el valor inicial de x (expresado en forma

binaria). $\lambda_2 = \frac{\lambda}{\ln 2}$.

7. Hay límites prácticos sobre qué tan pequeño puede ser dif_0 .

Como x s ha sido también computado con un número finito de lugares decimales o registrado de un experimento con una precisión finita, el número de lugares decimales produce un límite inferior sobre qué tan pequeña puede ser una diferencia significativa. Por ejemplo, si los datos fueron registrados con sólo

tres lugares decimales, entonces no podría tener sentido preguntar por una diferencia más pequeña que 0.001. Por supuesto, si hemos tomado suficientes datos, eventualmente, aún si el sistema es caótico, éste tendrá algunos valores repetitivos, simplemente debido a la exactitud de digitización finita. Podríamos entonces encontrar dos valores que son exactamente iguales. Esas coincidencias serán raras, aunque, y por un sistema caótico, serán un artefacto de la precisión finita. [12]

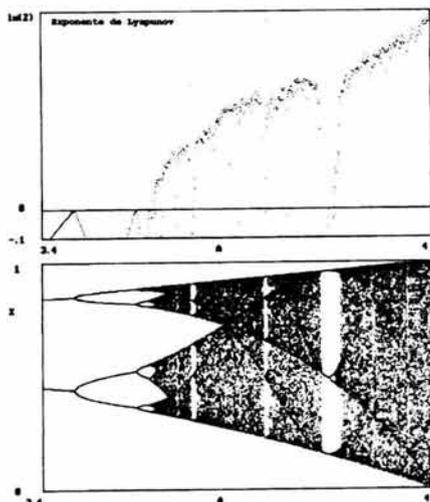


Figura 4.3-12. La figura superior muestra el exponente de Lyapunov para la función del mapa logístico graficado como una función del control del parámetro A . La figura inferior muestra el diagrama de bifurcación correspondiente. Cuando λ es negativa, el comportamiento es periódico. Cuando el exponente es 0, ocurre una bifurcación. Cuando el exponente es positivo, el comportamiento es caótico. [12]

Clasificación del Exponente de Lyapunov:

Trayectorias caóticas tienen al menos un exponente de Lyapunov positivo. Para trayectorias periódicas, todos los exponentes son negativos. El exponente de Lyapunov es cero cuando está cerca una bifurcación. En general hay tantos exponentes de Lyapunov como ecuaciones dinámicas. [12, 5]

Constantes	Periódicas	Cuasiperiódicas	Caóticas	Aleatorias
	Exponente: (-) (-)	Exponente: (+) (-)	Exponente: (+) (+)	Exponente: (+) (+) Valores muy grandes

5.-Espectro De Potencia

Por lo regular, la transformada rápida de Fourier es usada para graficar el espectro sobre escalas lineales, escalas logarítmicas lineales o escalas logarítmicas-logarítmicas de los datos y despliega la potencia (amplitud media cuadrada) como una función de la frecuencia. [5]

Si se tiene una serie de tiempo complicada que sea una mezcla de ondas de diferentes frecuencias, es posible analizar la señal matemáticamente y obtener las componentes individuales. También podemos encontrar la intensidad de cada componente, es decir, cuánto contribuye cada componente al total. El método es básicamente el análisis de Fourier: representar una curva como una suma de *senos* y *cosenos*.

El resultado de este análisis puede resumirse en un *espectro de potencia*, una gráfica que muestra la intensidad de cada componente de frecuencia, ver figura 4.3-13. Ésta muestra cinco series de tiempo (la gráfica de la izquierda) junto con sus espectros de potencia (a la derecha). La escala de tiempo para las observaciones (en segundos, s) y la escala de frecuencias (en Hertz: 1 Hz= 1 oscilación por segundo) están abajo. [2]

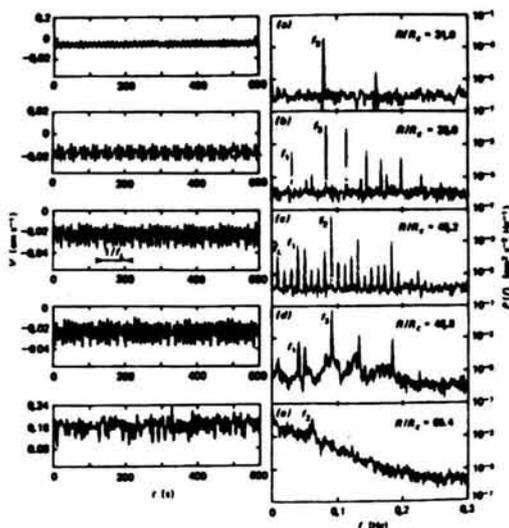


Figura 4.3-13. Series de tiempo de observaciones en un experimento de convección, y la correspondiente secuencia de los espectros de potencia, que muestran cómo cambia la intensidad de las componentes de frecuencia. Los picos indican frecuencias bien definidas en un movimiento periódico o cuasiperiódico; las bandas anchas indican la existencia del Caos. [2]

Por ejemplo, el dibujo superior izquierdo muestra un ritmo muy regular con una oscilación por segundo aproximadamente. Esto se refleja en el espectro de potencia correspondiente de la derecha con un único pico, marcado con f_2 , cerca de 0.1 Hz. La segunda serie de tiempo es mucho menos regular, y su espectro de potencia tiene varios picos. Un ojo entrenado puede ver que todas se construyen sumando entre sí múltiplos de dos frecuencias básicas, f_1 y f_2 , alrededor de 0.03 y 0.1 Hz. Estos picos en el espectro de potencia corresponden a componentes de frecuencia claramente definidas, que son mucho más intensas que cualquier frecuencia cercana. Una serie de tiempo cuasiperiódica tiene un espectro de potencia que consiste principalmente de picos agudos, como los tres dibujos superiores de la figura 4.3-13. Una serie de tiempo ruidosa, señal "aleatoria", tiene un espectro de banda ancha, cuyas componentes de frecuencia están esparcidas, como en la figura inferior. Es posible también una mezcla de las dos, como en la cuarta figura.

El espectro de potencia es algo así como las "huellas dactilares de la frecuencia" de una serie de tiempo, y puede ser utilizado para detectar la presencia de ciertos tipos de comportamiento. Si aparece gradualmente una banda ancha de frecuencias (ver la figura 4.3-14) lo que se encuentra es que la serie de tiempo se hace caótica. [2]

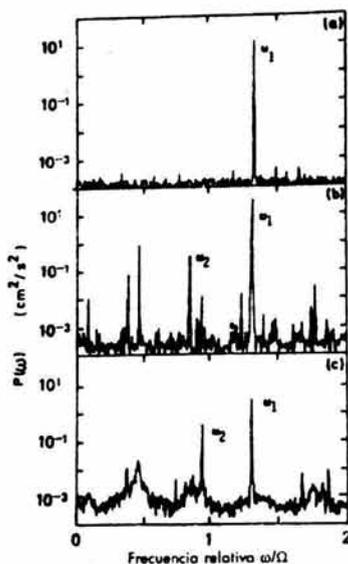


Figura 5.3-14. Espectros de potencia del sistema Taylor-Couette. Inicialmente se observa una sola frecuencia ω_1 (oscilación periódica). Luego aparece una segunda frecuencia ω_2 (junto con otros picos que representan combinaciones de ω_1 y ω_2). Finalmente se ve una banda ancha de Caos. [2]

Transformada Rápida de Fourier

Ésta es hasta el momento la medición más popular, principalmente porque la idea de descomposición de una serie de tiempo no-periódica en una serie de señales sinusoidales o armónicas es ampliamente conocida entre científicos e ingenieros. La presuposición hecha en este método es que la serie de tiempo periódica o no-periódica puede ser representada como una síntesis de señales de *seno* o *coseno*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.3-15)$$

donde $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \text{seno } \omega t$

Debido a que $F(\omega)$ frecuentemente es compleja, el valor absoluto de $|F(\omega)|$ es usado en despliegues gráficos. En la práctica, se utiliza un componente electrónico o una computadora para calcular $|F(\omega)|$ de datos de entrada del experimento, algunos parámetros varían dependiendo del experimento que se trate. Cuando el movimiento es periódico o cuasiperiódico, $|F(\omega)|$ muestra una serie de espigas delgadas o líneas indicando que la serie de tiempo puede ser representada por una serie discreta de funciones armónicas $\{e^{i\omega_k t}\}$, donde $k=1, 2, \dots$

[12]

El Análisis de Fourier y La Dinámica No-Lineal

¿Cuál es la utilidad del análisis de Fourier para la Dinámica No-Lineal? Como hemos visto, el análisis de Fourier nos deja determinar el contenido de la frecuencia de alguna serie de tiempo. Si ésta es periódica o cuasiperiódica, entonces el espectro de potencia de Fourier consistirá de una secuencia de "espigas" de las frecuencias fundamentales, sus armónicos, y las frecuencias que son las sumas y diferencias de las distintas frecuencias. El punto crucial es que el espectro consistirá de una serie *discreta* de frecuencias. Sin embargo, si la serie de tiempo es no-periódica (por ejemplo caótica), entonces el espectro de potencia de Fourier será continuo. De este modo, la repentina aparición de un espectro de potencia es continuo desde un espectro discreto; como algún parámetro del sistema es cambiado, es vista como un indicador del comienzo de comportamiento caótico. Sin embargo, puede observarse un espectro de potencia de Fourier continuo si el ruido externo está presente. Además, si muchos grados de libertad están activos, entonces pueden haber tantas frecuencias fundamentales y armónicos presentes, que el espectro de potencia de Fourier *aparece* continuo para una resolución experimental dada, aun cuando las distintas frecuencias podrían ser resueltas con una resolución más alta. De este modo, la presencia de un espectro de potencia continuo no puede necesariamente ser tomado como una evidencia

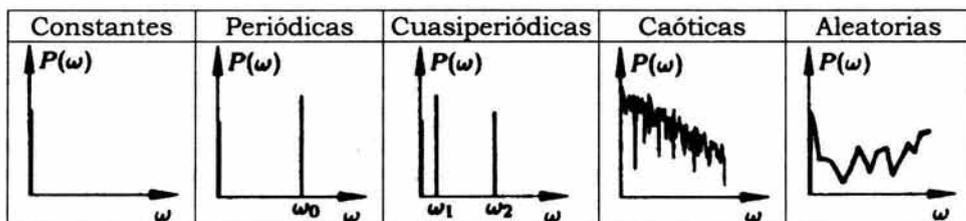
Capítulo IV

Diferentes Medidas del Caos y Complejidad

concluyente para la existencia de (baja dimensión) Caos, sin que se pueda mostrar ese ruido externo que está ausente y la resolución experimental es suficiente para ver todas las frecuencias que podrían estar presentes para el número esperado de grados de libertad. [12, 2]

Clasificación del Espectro de Potencia:

Datos aleatorios y caóticos dan un incremento al ampliar el espectro. Los datos periódicos y cuasiperiódicos producirán algunos picos dominantes en el espectro. La potencia espectral que siempre sigue líneas sobre una escala logarítmica lineal están pensadas para ser buenos candidatos para el Caos, de este modo el ruido tiende a tener un espectro de potencia bajo. [5]



6.-Frecuencias Dominantes

El método de máxima entropía es usado para calcular el espectro de potencia donde se hace una predicción de los siguientes 18 valores de las series de tiempo. En este caso, los últimos puntos N en la serie y los polos N son usados para predecir los siguientes 18 valores. [5]

Esta técnica es similar a la técnica de Espectro de Potencia. La frecuencia está en unidades de la frecuencia crítica de Nyquist (el recíproco de dos veces el intervalo entre los puntos de datos). Sin embargo, más que usar un método de transformada rápida de Fourier, esta técnica utiliza el método de máxima entropía (o todos los polos).

El método de máxima entropía representa los datos en términos de un número finito (N) de polos complejos de frecuencia discreta. Por el contrario, la transformada rápida de Fourier esencialmente adecua el espectro de potencia.

La entropía métrica es una noción asociada a la evolución caótica de un sistema que proporciona una medida de su grado de desorden. En efecto, la "magnitud" del desorden no viene dada por la dimensión fractal, que puede ser pequeña, pese a estar ligada a una tasa elevada de desorden cuando el sistema es fuertemente disipativo.

Consideremos ante todo el ejemplo de un comportamiento periódico: se trata de un sistema predecible, es decir, que si hemos efectuado previamente un gran número de medidas, podremos predecir el valor que hallaremos al término de otra nueva. No hay sorpresa, no hay nueva información proporcionada por la evolución del sistema (su entropía métrica es nula). Para un régimen caótico, en cambio, el conocimiento de la evolución pasada no permite llevar a cabo una predicción segura, sólo estimar la probabilidad de encontrar tal o cual valor. Así pues, cada nueva medida aporta una información suplementaria. La entropía métrica proporciona entonces una medida de la cantidad de nuevas informaciones engendrada permanentemente por la evolución del sistema. El método práctico de evaluación de la entropía métrica permite comprender el vínculo de esta magnitud con el parecido de un sistema consigo mismo a lo largo de la evolución.

Consideremos la porción de una trayectoria del sistema entre los instantes t_0 y t_1 y determinemos el número de otras porciones de trayectorias que durante el mismo intervalo de tiempo se mantienen a una distancia inferior a r de la primera. Cuando se aumenta la longitud de la porción de la trayectoria central, es decir el número de porciones vecinas, situadas a una distancia inferior a r , disminuye a causa de la divergencia de las trayectorias próximas. La tasa de salida de las trayectorias próximas fuera del tubo de radio r , promediada sobre el atractor, proporciona una cota inferior de la entropía métrica. Si la serie de tiempo es muy parecida a sí misma, la divergencia de las trayectorias será lenta, y la tasa de salida y la entropía serán pequeñas.

Cabe definir de un modo más preciso la entropía métrica a partir de los llamados exponentes de Lyapunov. En todo punto de una sección de Poincaré cabe distinguir dos direcciones: la dirección dilatante (o de estirado), tal que la distancia entre dos puntos vecinos aumenta en promedio como $\exp(\lambda_1 t)$ siendo λ_1 positivo, y la dirección contractante, localmente perpendicular a las láminas. En esta última dirección, la distancia entre dos puntos vecinos disminuye en promedio como $(\lambda_3 t)$, con λ_3 negativo. λ_1 y λ_3 son dos exponentes de Lyapunov: caracterizan el atractor tomado en su conjunto y en cierto modo caracterizan su topología. En este ejemplo, el atractor se despliega en un espacio de tres dimensiones. En la dirección estrictamente perpendicular a la sección de Poincaré, dos puntos vecinos pertenecerán, por definición, a la misma trayectoria: con el tiempo, su distancia media no sufrirá cambios. Así pues, el exponente λ_2 asociado a esta dirección será nula. Más generalmente, para cada sistema caracterizado por n grados de libertad hay n exponentes de Lyapunov. Se ha visto que la sensibilidad a las condiciones iniciales permite asegurar que el Caos determinista

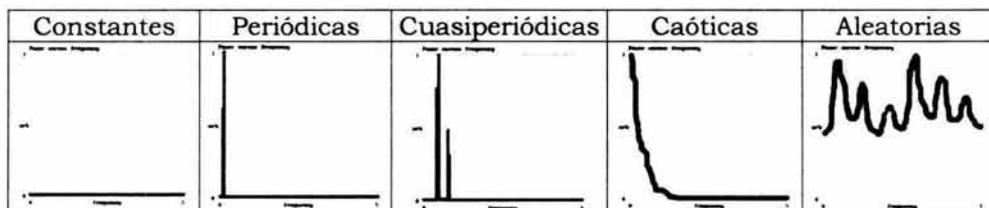
Capítulo IV

Diferentes Medidas del Caos y Complejidad

corresponde a la existencia de por lo menos un exponente de Lyapunov positivo. Volviendo a la entropía, vemos que el escape de las trayectorias fuera del tubo, que traduce esta sensibilidad a las condiciones iniciales, es debido al efecto de todas las direcciones dilatantes. Ello permite establecer que la entropía métrica es menor o igual a la suma de los exponentes de Lyapunov positivos. [12]

Clasificación de las Frecuencias Dominantes:

Datos aleatorios y caóticos dan un incremento al ampliar el espectro. Los datos periódicos y cuasiperiódicos producirán algunos picos dominantes en el espectro. [5]



7.-Función De Autocorrelación

La función de autocorrelación provee una medida de la dependencia de los puntos de datos sobre sus vecinos. [5]

La función de autocorrelación se obtiene multiplicando cada $X(t)$ por $X(t-\tau)$ y sumando el resultado de todos los puntos de datos. La suma entonces se grafica como una función de τ . Esto da una medida de cómo dependen de sus vecinos los puntos de datos. El valor de τ en donde la función de autocorrelación permanece pequeña es el tiempo de correlación. [5]

Matemáticamente

Una herramienta de procesamiento de series de tiempo que está relacionada con la transformada de Fourier es la Función de Correlación dada por:

$$A(\tau) = \int_0^x x(t)x(t+\tau)dt \tag{4.3-16}$$

Cuando una serie de tiempo es caótica, la información acerca del origen de su pasado está perdida. Esto significa que $A(\tau) \rightarrow 0$ así como $\tau \rightarrow \infty$, o la serie de tiempo está solamente correlacionada con su pasado reciente.

Esto se ilustra en la figura 4.3-17 para las vibraciones caóticas de un haz que se dobla. El espectro de Fourier muestra una banda ancha de frecuencias, mientras que la función de correlación tiene un pico en el origen $\tau=0$ y desciende rápidamente con el tiempo. [19]

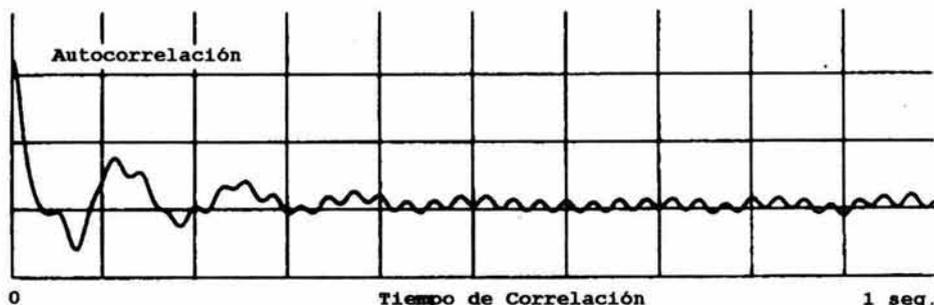


Figura 4.3-17. En la que se muestra la Función de Autocorrelación de una serie de tiempo caótica. [19]

Clasificación de la Función de Autocorrelación:

Datos aleatorios muy grandes no tendrán correlación y para esos datos la función de autocorrelación caerá abruptamente a cero, implicando una correlación de tiempo pequeña. Datos correlacionados muy grandes –como la salida de un generador de ondas *seno*- tendrán una función de autocorrelación que varía con t pero tendrá una amplitud que sólo disminuirá lentamente. Datos caóticos de ecuaciones de diferencias tienden a mostrar poca correlación, pero los datos caóticos de ecuaciones diferenciales pueden tener una enorme correlación si la prueba de tiempo es pequeña, entonces por lo tanto los puntos de datos adyacentes tienen valores similares. [5]

Constantes	Periódicas	Cuasiperiódicas	Caóticas	Aleatorias

8.-Mapas Recurrentes

Los mapas recurrentes (MRs) fueron descritos primero por J. P. Eckmann, S. Oliffson Kamphorst y D. Ruelle [35]. Los MRs son una herramienta gráfica relativamente nueva para el análisis cualitativo de series de tiempo. **Con los MRs, se pueden detectar gráficamente patrones escondidos y cambios estructurales en los datos o ver similitudes en patrones a través de las series de tiempo bajo estudio.** [35, 49]

Los MRs son además una excelente herramienta para la visualización de la dinámica multidimensional. Se tiene una función $y=f(x)$ y se desea examinar su comportamiento. Así, se grafica Y vs. X sobre una gráfica regular. Pero, ¿qué pasa si la función es más compleja, tal como $y=f(x, w, z, r)$? No hay forma de graficar todas las variables al mismo tiempo. Aquí es donde los mapas recurrentes se vuelven muy útiles. Con los MRs, se puede graficar y visualizar la dinámica del sistema en cualquier número de dimensiones. [35, 49]

Reconstrucción de un Mapa Recurrente

Antes de que un MR se construya, una serie de tiempo unidimensional puede analizarse en un espacio dimensional más complejo, en donde la dinámica del mecanismo generador toma lugar. Esto se hace usando una técnica llamada Coordenadas Inmersas con Retraso, que recrea un retrato del espacio de fases del sistema dinámico bajo estudio de una serie de tiempo individual; esto es, se puede recrear una fotografía topológicamente equivalente del comportamiento del sistema multidimensional, usando las series de tiempo de una sola variable observada. Por ejemplo, la bolsa de valores es un sistema altamente complejo con un gran número de variables y factores, que influyen su dinámica. Usando las coordenadas inmersas con retraso, se puede recrear la dinámica de ese sistema multidimensional de una sola variable observada y predecirlo. La idea es que el efecto de todas las otras variables (desconocidas) están ya reflejadas en el sistema de salida.

Para expandir una serie de tiempo unidimensional en un espacio de fases M -dimensional, se sustituye cada observación en la serie de tiempo original $X(t)$ con el vector:

$$y(i) = (x(i), x(i+d), x(i+2d), \dots, x(i+(m-1)d)),$$

donde

i es el índice de tiempo,

m es la dimensión inmersa,

d es el tiempo de retraso

Como resultado, se tienen series de vectores:

$$Y = (y(1), y(2), y(3), \dots, y(N-(m-1)d)),$$

donde

N es la longitud de las series de tiempo originales.

Para hacer a un MR más significativo, el mapeado de color debe ser significativo también. Por ejemplo, colores "cálidos" (amarillo, rojo y naranja) pueden estar asociados a pequeñas distancias entre los vectores, mientras que los colores "fríos" (azul, negro) podrían ser usados para mostrar grandes distancias. De esta forma se puede visualizar y estudiar el movimiento de las trayectorias del sistema e inferir algunas características del sistema dinámico que se ha generado de las series de tiempo. Para series de tiempo aleatorias, la distribución uniforme de colores sobre todo el MR es esperada. La serie de tiempo más determinista tendrá el MR más estructurado. [49]

Dimensión Inmersa

Los valores de la dimensión inmersa (M) y el tiempo de retraso son usados para la reconstrucción en el espacio de fases del sistema dinámico bajo estudio, usando las coordenadas inmersas con retraso. Idealmente, M podría ser lo suficientemente grande para revelar las trayectorias del sistema de traslapes mismos, pero no muy largos, por el otro lado el ruido lo amplificará. La regla es obtener M en $M \leq 2 * N + 1$, donde N es el número de variables operativas, o grados de libertad en el sistema dinámico bajo estudio. En la mayoría de los casos N es desconocido y puede ser solamente estimado. [49]

Tiempo de Retraso

El tiempo de retraso, como la dimensión inmersa, es usado para la reconstrucción del espacio de fases. Escoger el tiempo de retraso óptimo puede ser problemático. Si el tiempo de retraso es muy pequeño, las coordenadas usadas para cada vector reconstruido no serán lo suficientemente independientes para llevar cualquier nueva información acerca de las trayectorias del sistema en el espacio de fases. Si el tiempo de retraso es muy grande, las coordenadas podrían convertirse en aleatorias con respecto una de la otra. El método más comúnmente utilizado para estimar el tiempo de retraso es computar la función de información mutua. [49]

Información Mutua

La función de Información Mutua puede utilizarse para determinar el valor "óptimo" del tiempo de retraso para la reconstrucción en el espacio de fases, la idea es que una buena elección para el tiempo de retraso d , dado el estado del sistema $x(t)$, provee la máxima información nueva con medición en $x(t+d)$. [49]

Entropía Temporoespacial

La Entropía Temporoespacial mide la estructura de la imagen tanto en el dominio del espacio como en el tiempo. Esencialmente, compara la distribución global de colores de todo el mapa recurrente con la distribución de colores en cada línea diagonal del mismo. En términos físicos, esta cantidad compara la distribución de distancias entre todos los pares de vectores en el espacio de fases reconstruido, con las distancias entre las diferentes órbitas que evolucionan con el tiempo. El resultado es normalizado y presentado como un porcentaje de la "máxima" entropía (aleatoriedad). Que es, 100% de entropía significa la ausencia de cualquier estructura (distribución uniforme de colores, aleatoriedad pura), mientras que el 0% de entropía implica una "perfecta" estructura (patrones de distinto color, "estructuras" perfectas y predictibilidad). [49]. Además, el siguiente rango de entropía temporoespacial podría esperarse para diferentes series:

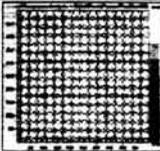
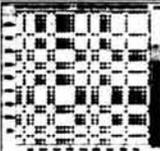
Serie de Tiempo	Entropía Temporoespacial
Periódicas	cerca de 0%
Cuasiperiódicas	entre 20% y 60%
Caóticas	entre 40% y 80%
Aleatorias	cerca de 100%

Clasificación de Mapas Recurrentes

Figuras estructuradas repetitivas iguales: Series periódicas y cuasiperiódicas.

Figuras estructuradas y patrones discernibles: Series caóticas.

Distribución uniforme de colores: Series aleatorias. [49]

Constantes	Periódicas	Cuasiperiódicas	Caóticas	Aleatorias
				
Entropía Temporoespacial: %	Entropía Temporoespacial: 15%	Entropía Temporoespacial: 52%	Entropía Temporoespacial: 72%	Entropía Temporoespacial: 89%
Recurrencia: %	Recurrencia: 19.005%	Recurrencia: 21.425%	Recurrencia: 24.238%	Recurrencia: 35.837%
Determinismo: %	Determinismo: 52.597%	Determinismo: 10.887%	Determinismo: 29.317%	Determinismo: 0.078%

CAPÍTULO V

**CARACTERIZACIÓN DE
DIFERENTES SERIES
DE TIEMPO
NO-LINEALES**



*¡Dejad que brame el Caos!
¡Dejad que las figuras de las nubes
pululen!*

Yo espero a que llegue la forma.

-Robert Frost

M. C. Escher, "Rind", 1955, Madera grabada y tallado en negro, café, azul-gris y gris, impreso en 4 bloques.

CAPÍTULO V

CARACTERIZACIÓN DE DIFERENTES SERIES DE TIEMPO NO-LINEALES

V.1 Aplicación de las Técnicas de la Dinámica No-Lineal a las Series de Tiempo

Cuando se le aplican técnicas de caracterización a las series de tiempo, el resultado es una clasificación objetiva de éstas para obtener información muy importante de los fenómenos en estudio como lo es la posibilidad de su predicción.

En la tabla 5.1-1 se presenta un esquema general de los pasos a seguir en la caracterización de las series de tiempo: Primero se obtienen las series de tiempo de los sistemas dinámicos a estudiar, representadas aquí en forma matricial. En segundo lugar a todas las series de tiempo se les aplican las distintas técnicas de análisis de la dinámica no-lineal y dependiendo de qué tan compleja o desordenada es la serie ésta se caracteriza haciendo una comparación de los resultados con las series que técnicamente están definidas como Constantes ($f(x)=(x*0)+1$), Periódicas (Función Seno o Coseno), Cuasiperiódicas (Función Dobleseno), Caóticas (Ecuación de Lorenz) y Aleatorias (Ruido Blanco). La tabla de meta-análisis es la que nos permite, por medio de diferentes grados de complejidad, caracterizar a la serie de tiempo. [16, 31, 32, 33]

TABLA 5.1-1.-METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

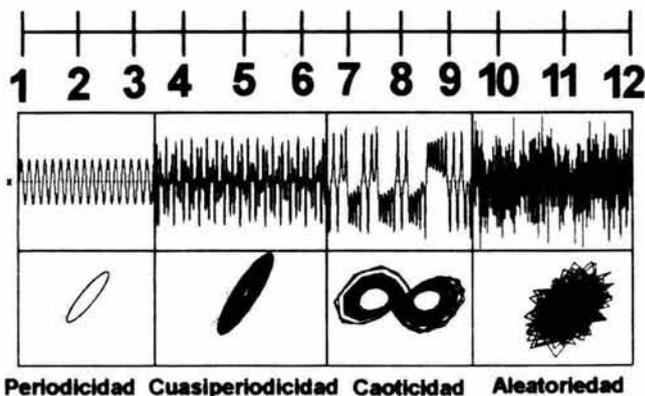
Series de Tiempo $X_n(t)$					
$\begin{bmatrix} X_{0,0} & X_{0,1} & X_{0,2} & \dots & X_{0,j-1} \\ X_{1,0} & X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,j-1} \\ X_{2,0} & X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & X_{2,j-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n-1,0} & X_{n-1,1} & X_{n-1,2} & \dots & X_{n-1,j-1} \end{bmatrix}$					
↓					
Caracterización de las Series de Tiempo					
Técnicas	Tipo de Comportamiento				
	Determinismo (Constante)	Periodicidad	Cuasiperiodicidad	Caoticidad	Aleatoriedad
Gráficas de Tiempo					
Distribución de Probabilidades					
Diagramas de Espacio de Fase					
Mapas de Poincaré					
Exponente de Lyapunov		Exponente: (-) (-)	Exponente: (+) (-)	Exponente: (+) (+)	Exponente: (+) (+) Valores muy grandes
↓					



Técnicas	Tipo de Comportamiento				
	Determinismo (Constante)	Periodicidad	Quasiperiodicidad	Caoticidad	Aleatoriedad
Espectro de Potencia					
Frecuencias Dominantes					
Función de Autocorrelación					
Mapas Recurrentes					
	Entropía Temporoespacial: % Recurrencia: % Determinismo: %	Entropía Temporoespacial: 15% Recurrencia: 19.006% Determinismo: 82.997%	Entropía Temporoespacial: 82% Recurrencia: 21.428% Determinismo: 10.887%	Entropía Temporoespacial: 72% Recurrencia: 24.288% Determinismo: 29.817%	Entropía Temporoespacial: 89% Recurrencia: 88.837% Determinismo: 0.878%



Tabla de Meta-Análisis



La razón por la cual la caracterización de las series de tiempo se lleva a cabo con la tabla de meta-análisis es la siguiente: Las series de tiempo son de distinta complejidad y aún siendo de un tipo tienen diferentes grados, si tomamos algo así como un continuo que va precisamente desde las series constantes hasta las aleatorias, podemos tomar tres grados diferentes para cada caracterización (el grado puede cambiar). Esta idea se tomó a partir de que las series pueden ser caóticas, más caóticas y sumamente caóticas (sin llegar a la aleatoriedad) ver figura 5.1-2. Teniendo así una forma de caracterización de la serie de tiempo y a pesar de que se utilicen técnicas cualitativas se llega a una caracterización bastante confiable. [1, 16, 31, 32, 33]

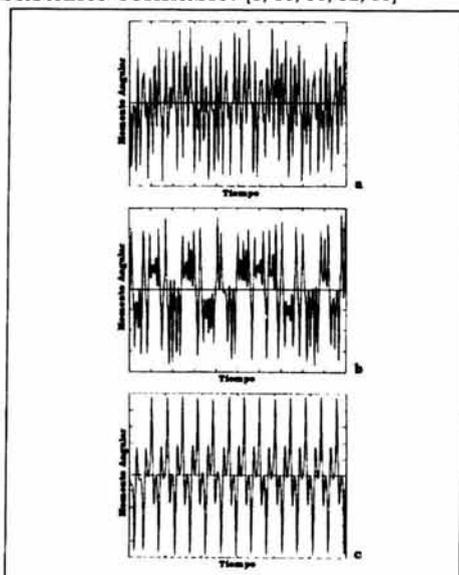


Figura 5.1-2. Algún Caos es más caótico que otro Caos. Se ilustran tres ejemplos del momento angular del péndulo contra tiempo, obtenido numéricamente, para diferentes frecuencias y resistencia al movimiento impulsor. Los tres son regímenes caóticos, pero son muy diferentes. El Caos es aparente en a y b; c parece un sistema periódico de periodicidad 5, pero cada pico tiene una altura ligeramente diferente, y esas variaciones tienen todas las características del Caos: nunca se repiten, es sensible a las condiciones iniciales...[1]

Si la caracterización de las series de tiempo tiene un número de alto grado quiere decir que es más compleja o desordenada, y por consiguiente es más difícil de predecir que una que tenga un valor numérico de menor grado, siendo menos compleja y más fácil de predecir; las que caen en el rango de 10 a 12 serían imposibles de predecir por la característica de que son totalmente aleatorias.

Una vez que las series han sido debidamente caracterizadas con las diferentes técnicas de análisis de la dinámica no-lineal y con la tabla de meta-análisis, se hacen los modelos de predicción de cada una de las series, se espera que cuando las series tengan valores de caracterización altos, el grado de error que se obtenga en la predicción con las diferentes redes neuronales artificiales sea también más alto que aquellas series que resulten con un grado de caracterización más bajo.

A las series que ya han sido caracterizadas se les aplican distintas técnicas de predicción como son las redes neuronales artificiales; se utilizaron las más poderosas que son la de Retropropagación y la Red Holográfica, obteniéndose además los grados de error para ver el alcance de las redes neuronales en la predicción de las series de tiempo. [23]

A continuación se describen las series numéricas utilizadas, que son muy complejas a pesar de que son muy fáciles de obtener por medio de sus respectivas fórmulas (son deterministas), pero el comportamiento que éstas adquieren es muy complejo y a simple vista aleatorio, y no pudiendo predecir fácilmente cual valor va a alcanzar después del anterior a largo plazo, y más aún cuando se cambian las condiciones iniciales de estas series el comportamiento cambia radicalmente.

1) La Serie de Mackey-Glass

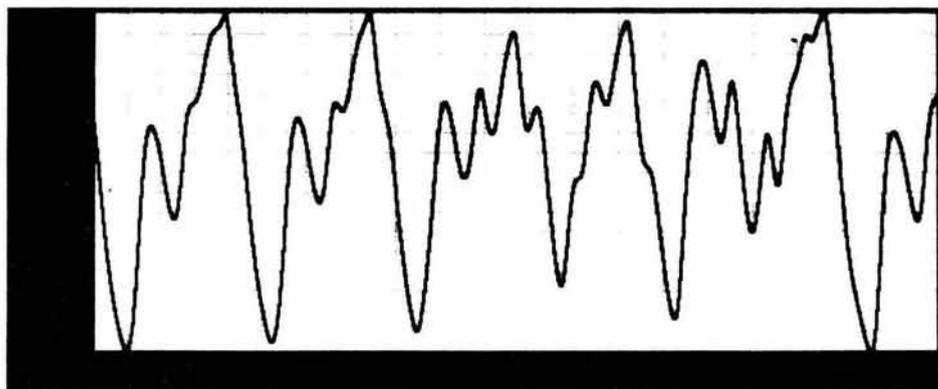
La ecuación diferencial de tiempo de retraso Mackey-Glass está definida por [29] (en el anexo 1 se encuentra el programa en lenguaje C para obtener la serie de tiempo):

$$dx(t)/dt=0.2x(t-\tau)/(1+x(t-\tau)^{10})-0.1x(t)$$

Cuando $x(0)=1.2$ y $\tau=17$, tenemos una serie de tiempo no-periódica y no-convergente que es muy sensitiva a condiciones iniciales.

Asumimos que $x(t)=0$ cuando $t<0$

Gráfica de la Serie de Tiempo de Mackey-Glass:



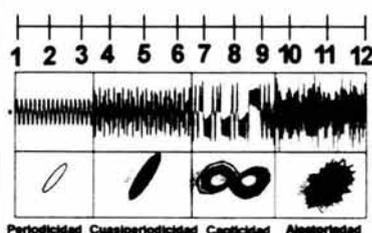
En la tabla 5.1-3 podemos ver los resultados de los análisis hechos a la serie de Mackey-Glass con las diferentes técnicas de la Dinámica No-Lineal. Teniendo una caracterización de la misma siguiendo la tabla de meta-análisis.

Tabla 5.1-3.-Caracterización de la Serie de Mackey-Glass.

TÉCNICAS EMPLEADAS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE LOS DATOS	Grado de Caoticidad
1.-Distribución de Probabilidades	8
2.-Diagramas de Espacio de Fase	8
3.-Mapas de Poincaré	9
4.-Exponente de Lyapunov	7
5.-Espectro de Potencia	7
6.-Frecuencias Dominantes	7
7.-Función de Autocorrelación	6
8.-Mapas Recurrentes	STE: 35%→5
	Rec: 22.491%→6
	Det: 99.901%→3

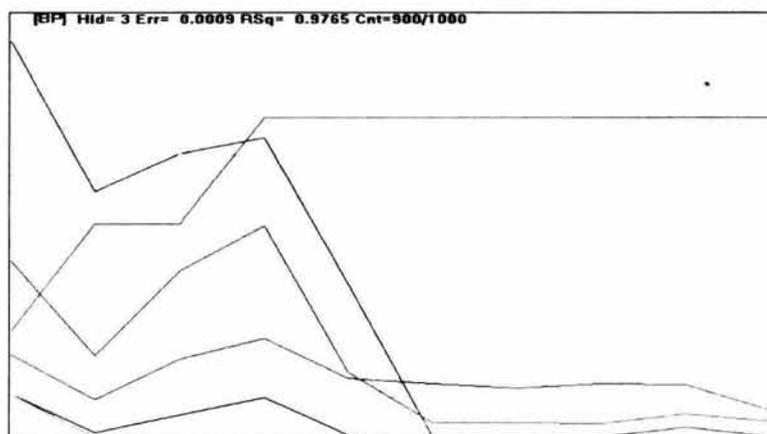
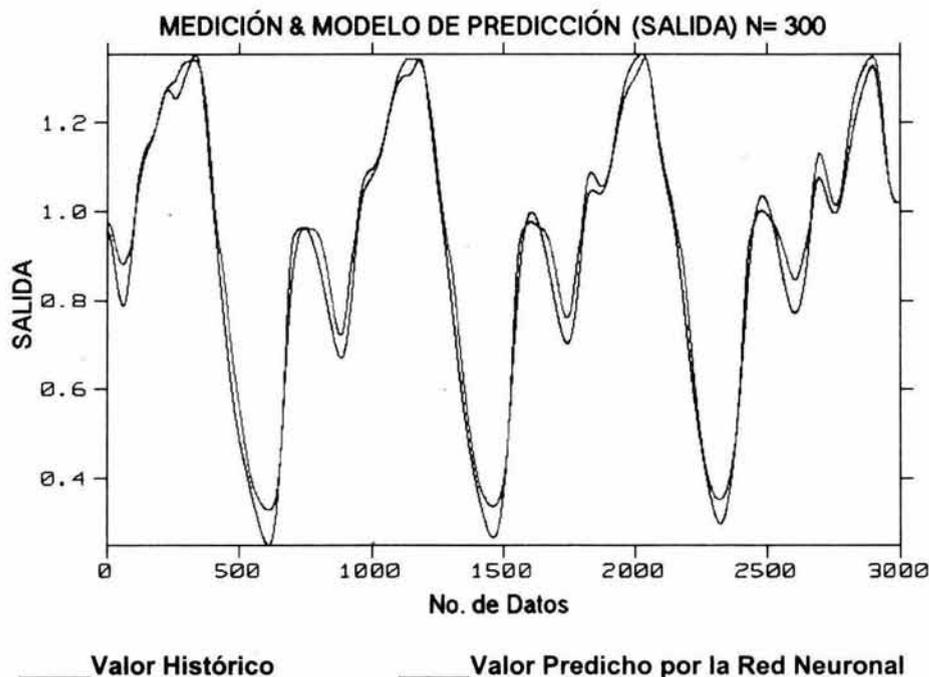
Tabla 5.1-3. Resumen de los resultados obtenidos de las diferentes técnicas usadas para la serie de tiempo de Mackey-Glass. Donde: **Entropía (STE)**=Información de Shannon de la distribución de línea \geq al parámetro de línea medido en bits binarios (base 2). Para una serie periódica el STE está cerca del 0%, para una serie caótica el rango es de 20% y 80%, para una serie aleatoria el STE está cerca del 100%. **Recurrencia (%)**=Número de repeticiones / área triangular. **Determinismo (%)**=Número de puntos recurrentes formando líneas diagonales ascendentes / Número de recurrencias (igual a -1 si el número de recurrencias=0). **Grado de Caoticidad**=De acuerdo con la tabla de Meta-Análisis, los códigos de las casillas muestran los diferentes grados de periodicidad, cuasiperiodicidad, caoticidad y aleatoriedad analizados. Siendo el número más pequeño correspondiente al determinismo, es decir es más fácil de predecir, y el número más grande correspondiente a la aleatoriedad, es decir, es más difícil de predecir.

Tabla de Meta-Análisis

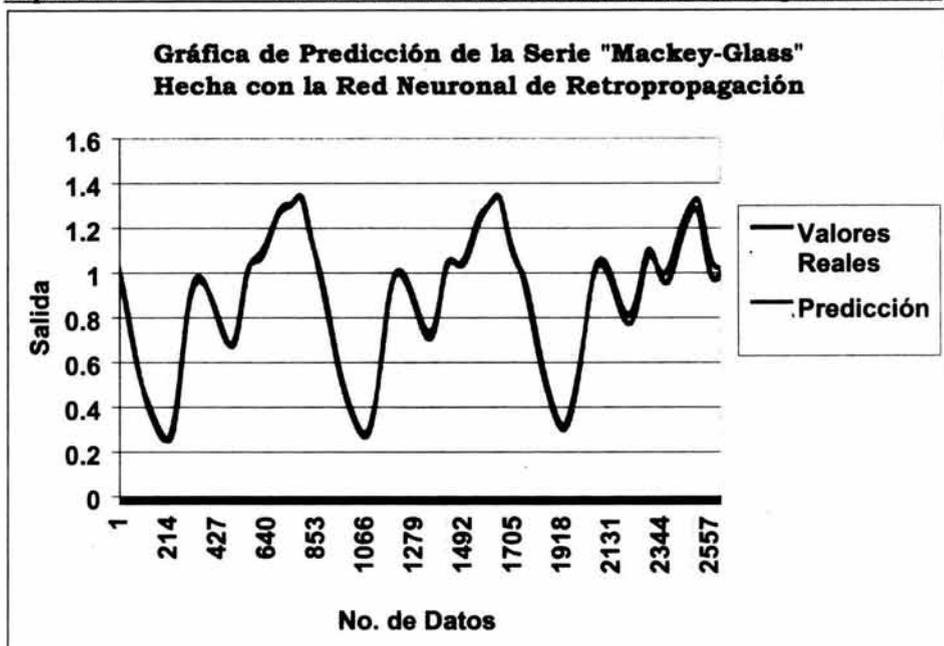


Los resultados muestran que la serie es caótica y que por lo tanto se puede alcanzar a hacer una predicción de la misma con un grado de error mínimo, para comprobar que la serie puede ser predicha, utilizamos dos tipos de Redes de Neuronales, la red de Retropropagación y la red Holográfica; así como también la técnica de Frecuencias Dominantes (prediciendo los siguientes 18 valores de la serie). A continuación se muestran los resultados obtenidos.

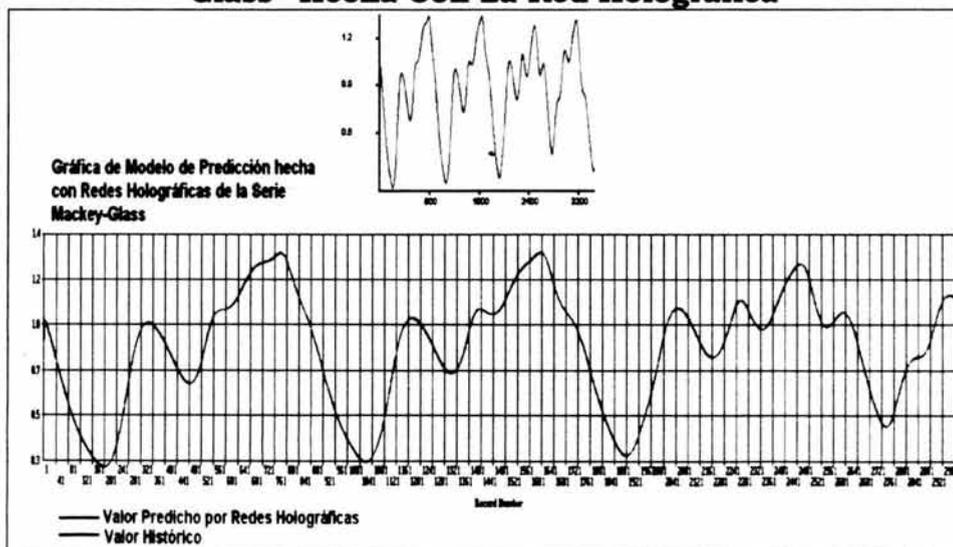
Gráfica Del Modelo De Predicción De La Serie "Mackey-Glass" Hecha Con La Red Neuronal De Retropropagación



En esta gráfica se muestra a) el modelo de predicción hecha con la red neuronal de Retropropagación y b) la gráfica de error.



Gráfica Del Modelo De Predicción De La Serie "Mackey-Glass" Hecha Con La Red Holográfica



En esta gráfica se muestra el modelo de predicción hecha con redes holográficas, la gráfica superior pequeña es la serie Mackey-Glass graficada en tiempo.

Tabla De Predicción De Los Sigüientes 18 Valores En La Serie De Mackey-Glass Hecha Con La Técnica De Frecuencias Dominantes

Valores Históricos X_i	Valores Predichos P_i	Error $e_i = X_i - P_i$	Error Cuadrado $(X_i - P_i)^2$
1.10552	1.105494	0.0000260	0.00000000067600
1.10386	1.1038275	0.0000325	0.00000000105625
1.10216	1.1021109	0.0000491	0.00000000241081
1.10042	1.1003466	0.0000734	0.00000000538756
1.09865	1.0985392	0.0001108	0.00000001227664
1.09684	1.0966901	0.0001499	0.00000002247001
1.095	1.0948013	0.0001987	0.00000003948169
1.09313	1.0928767	0.0002533	0.00000006416089
1.09124	1.0909181	0.0003219	0.00000010361961
1.08934	1.0889279	0.0004121	0.00000016982641
1.08743	1.0869085	0.0005215	0.00000027196225
1.0855	1.0848625	0.0006375	0.00000040640625
1.08358	1.0827918	0.0007882	0.00000062125924
1.08165	1.0806987	0.0009513	0.00000090497169
1.07973	1.0785855	0.0011445	0.00000130988025
1.07782	1.076454	0.0013660	0.00000186595600
1.07593	1.0752925	0.0000050	0.0000000002500
1.07406	1.074049	0.0000110	0.00000000012100
Media del Error	$ME = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{n}$	0.000391816666666656	
Suma Error Cuadrado	$SEC = \sum_{i=1}^n e_i^2$	0.00000580194755	
Media del Error Cuadrado	$MEC = \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{n}$	0.000000322330419444433	
Desviación Estándar del Error	$DSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{(n-1)}}$	0.000567741507593406000	

Tabla del Grado de Error Obtenido con las Diferentes Técnicas de Predicción.

Serie Numérica	Grado de error obtenido con las diferentes técnicas de Predicción en porcentaje.		
	Retropropagación	Holográfica	Frecuencias Dominantes (18 Valores)
MackeyGlass	0.0009	0.0001	0.03594308

2) La Serie Particiones Perfectas

Una partición perfecta de un número n es aquella que contiene sólo una partición de cada número menor que n cuando partes repetidas son consideradas como indistinguibles [37] (en el anexo 1 se encuentra el programa en lenguaje C para obtener la serie de tiempo).

Para determinar todas las particiones perfectas, nótese primero que debe haber al menos una parte unitaria (la partición solitaria de 1). Continuando en esta forma, una partición perfecta puede ser escrita como sigue:

$$1^{q_1-1} q_1^{q_2-1} (q_1 q_2)^{q_3-1} (q_1 q_2 q_3)^{q_4-1} \dots (q_1 q_2 \dots q_{k-1})^{q_k-1}$$

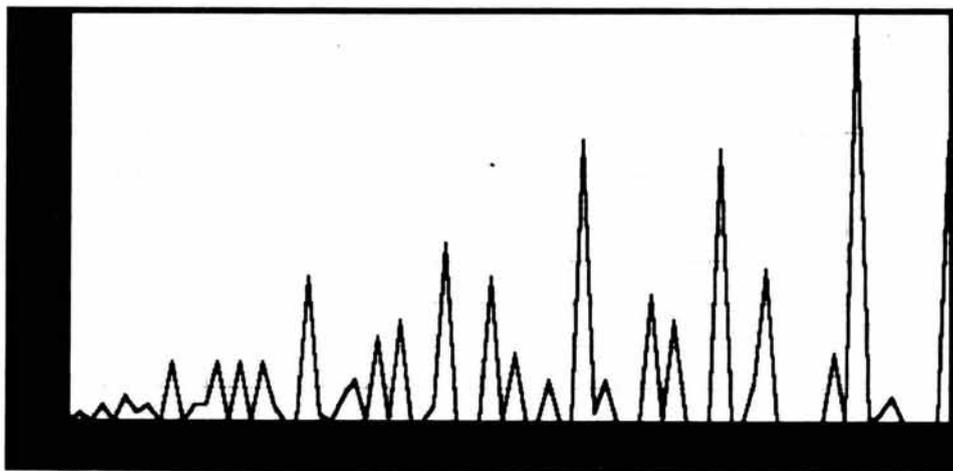
Así,

$$n = q_1 - 1 + q_1(q_2 - 1) + \dots + (q_1 q_2 \dots q_{k-1})(q_k - 1) = q_1 q_2 \dots q_k - 1$$

Los números q_1, q_2, \dots, q_k en este orden especifican completamente la partición, y $q_i > 1$ para cada i así,

Teorema: *El número de particiones perfectas de n es el mismo que el número de factorizaciones ordenadas de $n+1$ sin factores unitarios.*

Gráfica de la Serie de Tiempo de Particiones Perfectas:



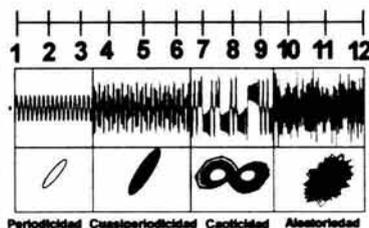
En la tabla 5.1-4 podemos ver los resultados de los análisis hechos a la serie de Particiones Perfectas con las diferentes técnicas de la Dinámica No-Lineal. Teniendo una caracterización de la misma siguiendo la tabla de meta-análisis.

Tabla 5.1-4.-Caracterización de la Serie de Particiones Perfectas.

TÉCNICAS EMPLEADAS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE LOS DATOS	Grado de Caoticidad
1.-Distribución de Probabilidades	8
2.-Diagramas de Espacio de Fase	7
3.-Mapas de Poincaré	7
4.-Exponente de Lyapunov	8.5
5.-Espectro de Potencia	7
6.-Frecuencias Dominantes	8
7.-Función de Autocorrelación	9
8.-Mapas Recurrentes	STE: 76%→8
	Rec: 25.906%→8
	Det: 12.401%→6

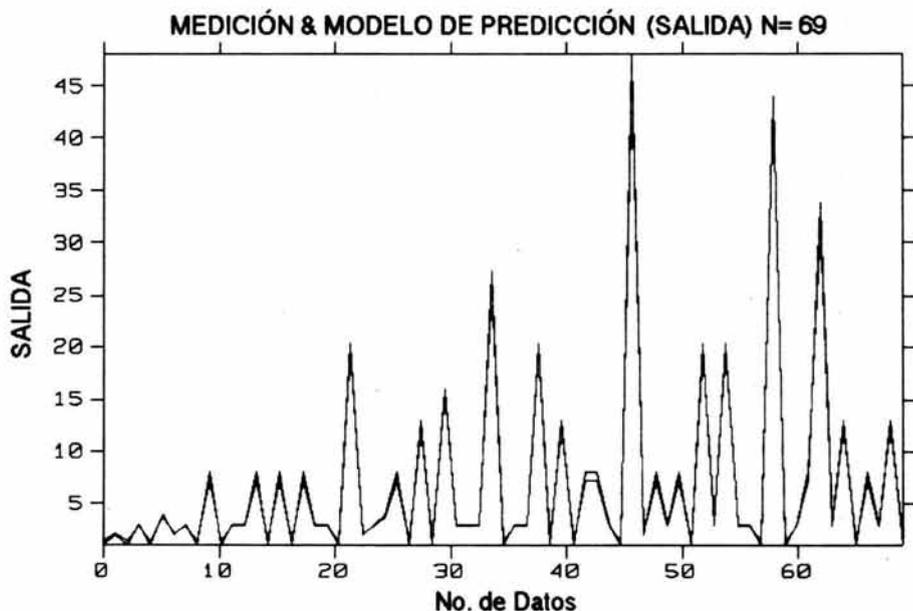
Tabla 5.1-4. Resumen de los resultados obtenidos de las diferentes técnicas usadas para la serie de tiempo de Particiones Perfectas. Donde: **Entropía (STE)**=Información de Shannon de la distribución de línea >= al parámetro de línea medido en bits binarios (base 2). Para una serie periódica el STE está cerca del 0%, para una serie caótica el rango es de 20% y 80%, para una serie aleatoria el STE está cerca del 100%. **Recurrencia(%)**=Número de repeticiones / área triangular. **Determinismo(%)**=Número de puntos recurrentes formando líneas diagonales ascendentes / Número de recurrencias (igual a -1 si el número de recurrencias=0). **Grado de Caoticidad**=De acuerdo con la tabla de Meta-Análisis, los códigos de las casillas muestran los diferentes grados de periodicidad, cuasiperiodicidad, caoticidad y aleatoriedad analizados. Siendo el número más pequeño correspondiente al determinismo, es decir es más fácil de predecir, y el número más grande correspondiente a la aleatoriedad, es decir, es más difícil de predecir.

Tabla de Meta-Análisis

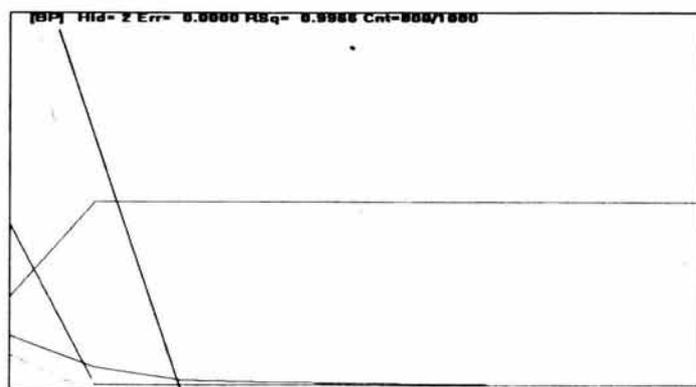


Los resultados muestran que la serie es caótica y que por lo tanto se puede alcanzar a hacer una predicción de la misma con un grado de error mínimo, para comprobar que la serie puede ser predicha, utilizamos dos tipos de Redes de Neuronales, la red de Retropropagación y la red Holográfica; así como también la técnica de Frecuencias Dominantes (prediciendo los siguientes 18 valores de la serie). A continuación se muestran los resultados obtenidos.

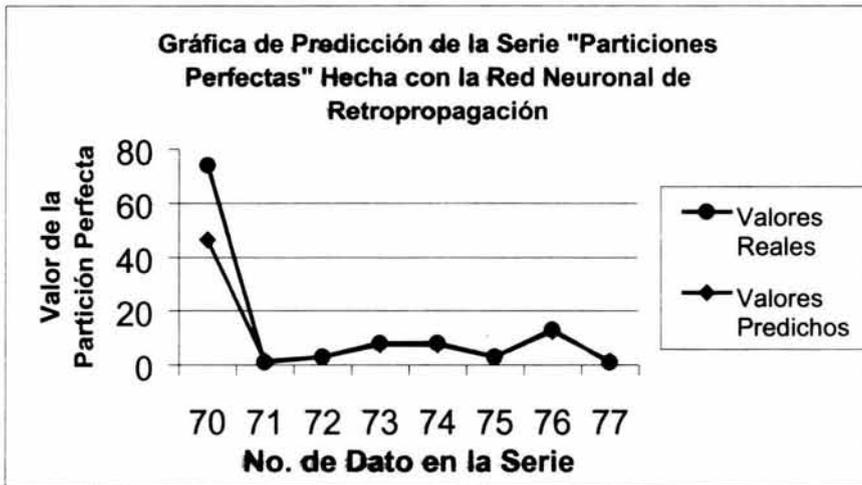
Gráfica Del Modelo De Predicción De La Serie "Particiones Perfectas" Hecha Con La Red Neuronal De Retropropagación



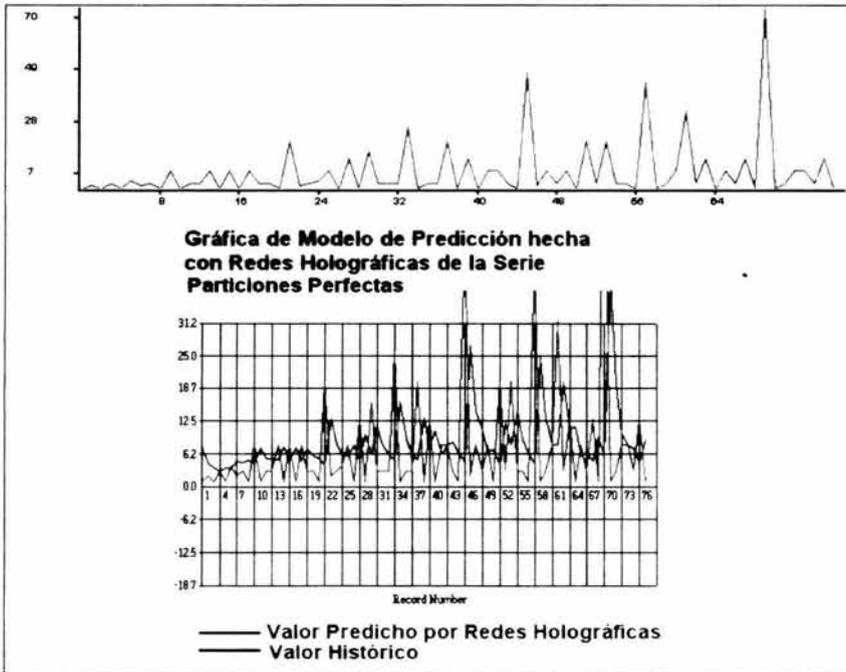
— Valor Histórico — Valor Predicho por la Red Neuronal



En esta gráfica se muestra a) el modelo de predicción hecha con la red neuronal de Retropropagación y b) la gráfica de error.



Gráfica Del Modelo De Predicción De La Serie Particiones Perfectas



En esta gráfica se muestra el modelo de predicción hecha con redes holográficas, la gráfica superior pequeña es sólo la serie Particiones Perfectas graficada en tiempo.

Tabla De Predicción De Los Sigüientes 18 Valores En La Serie De Particiones Perfectas Hecha Con La Técnica De Frecuencias Dominantes

Valores Históricos X_i	Valores Predichos P_i	Error $e_i = X_i - P_i$	Error Cuadrado $(X_i - P_i)^2$
3	5.9315896	-2.9315896	8.59421758282816
8	4.4219837	3.5780163	12.80220064306570
32	17.7643013	14.2356987	202.65511747718200
3	0.086412	2.9135880	8.48899503374400
13	20.5215397	-7.5215397	56.57355945867610
1	0.3911386	0.6088614	0.37071220440996
8	22.1431847	-14.1431847	200.02967345831400
3	3.3710206	-0.3710206	0.13765628562436
13	8.5284901	4.4715099	19.99440078579800
1	1.4327688	-0.4327688	0.18728883425344
74	21.85392	52.1460800	2719.21365936640000
1	-0.4939146	1.4939146	2.23178083209316
3	16.8531761	-13.8531761	191.91048805761100
8	2.63490987	5.3650901	28.78419210302340
8	14.2559795	-6.2559795	39.13727950442030
3	1.9560719	1.0439281	1.08978587796961
13	14.781599	-1.7815990	3.17409499680100
1	-0.032867	1.0328670	1.06681423968900
Media del Error	$ME = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{n}$	2.19992756277778	
Suma Error Cuadrado	$SEC = \sum_{i=1}^n e_i^2$	3496.4419167419	
Media del Error Cuadrado	$MEC = \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{n}$	194.246773152328	
Desviación Estándar del Error	$DSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{(n-1)}}$	13.9372441017702	

Tabla del Grado de Error Obtenido con las Diferentes Técnicas de Predicción.

Serie Numérica	Grado de error obtenido con las diferentes técnicas de Predicción en porcentaje.		
	Retropropagación	Holográfica	Frecuencias Dominantes (18 Valores)
Particiones Perfectas	0.007	3.4556	20.20341639

3) La Serie de Autogeneración, "Las vacas rojas y blancas". Pennington, J. V. [20] (en el anexo 1 se encuentra el programa en lenguaje C para obtener la serie de tiempo).

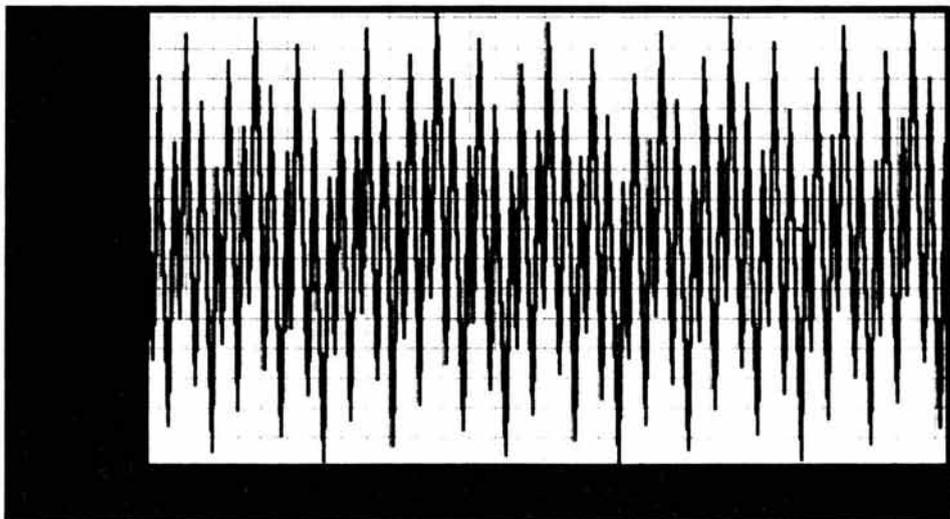
Un ranchero compró una vaca blanca, y en el siguiente año una roja. Cada año posterior él duplicaba sus compras de los dos años anteriores, comprando el mismo número de vacas, del mismo color y en el mismo orden. Así, en el tercer año, él compró una vaca blanca y entonces después una vaca roja; en el cuarto año, una roja, y entonces después una blanca, y entonces después una roja; y así continuó. ¿Cuál fue el color de la n -ésima vaca?

Solución: "La n -ésima vaca es roja o blanca conforme a la parte fraccional de $n(\sqrt{5}+1)/2$ es o no es menos que $(\sqrt{5}-1)/2$.

(Si el valor es > 0.618033988 la n -ésima vaca es blanca "1")

(Si el valor es ≤ 0.618033988 la n -ésima vaca es roja "2")

Gráfica de la Serie de Tiempo de Autogeneración:



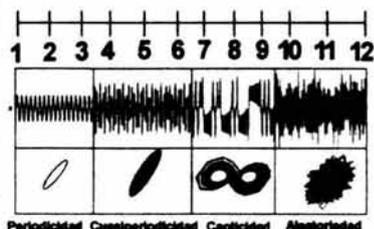
En la tabla 5.1-5 podemos ver los resultados de los análisis hechos a la serie de Autogeneración con las diferentes técnicas de la Dinámica No-Lineal. Teniendo una caracterización de la misma siguiendo la tabla de meta-análisis.

Tabla 5.1-5.-Caracterización de la Serie de Autogeneración

TÉCNICAS EMPLEADAS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE LOS DATOS	Grado de Caoticidad
1.-Distribución de Probabilidades	11
2.-Diagramas de Espacio de Fase	9
3.-Mapas de Poincaré	9
4.-Exponente de Lyapunov	7
5.-Espectro de Potencia	9
6.-Frecuencias Dominantes	9
7.-Función de Autocorrelación	10
8.-Mapas Recurrentes	STE: 0%→1
	Rec: 19.105%→4
	Det: 91.733%→4

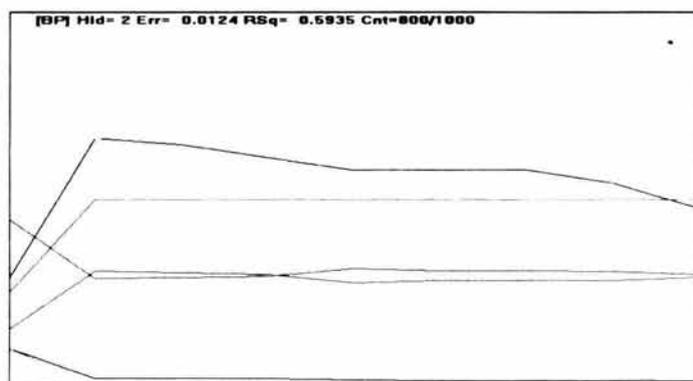
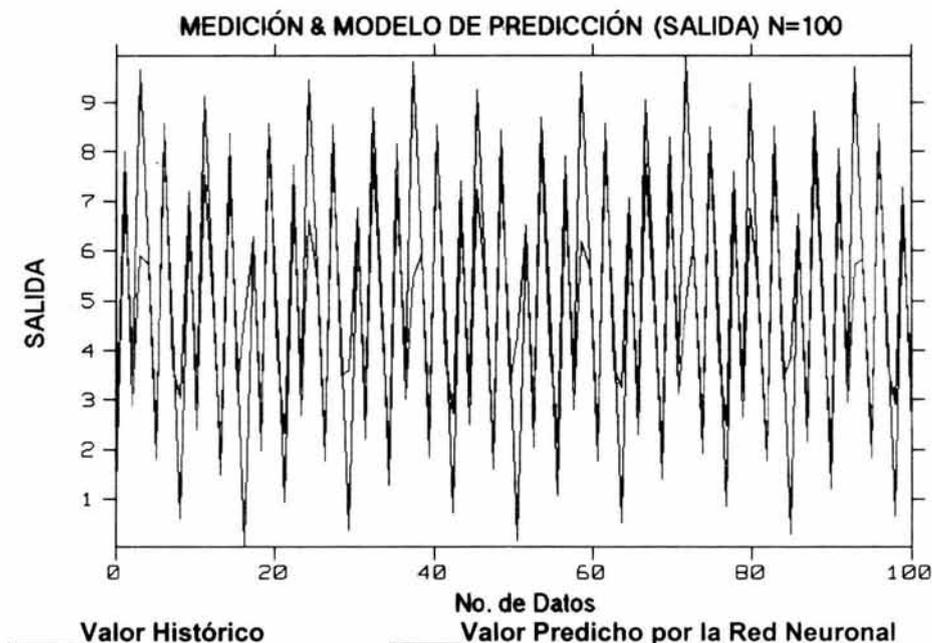
Tabla 5.1-5. Resumen de los resultados obtenidos de las diferentes técnicas usadas para la serie de tiempo de Autogeneración. Donde: **Entropía (STE)**=Información de Shannon de la distribución de línea \geq al parámetro de línea medido en bits binarios (base 2). Para una serie periódica el STE está cerca del 0%, para una serie caótica el rango es de 20% y 80%, para una serie aleatoria el STE está cerca del 100%. **Recurrencia(%)**=Número de repeticiones / área triangular. **Determinismo(%)**=Número de puntos recurrentes formando líneas diagonales ascendentes / Número de recurrencias (igual a -1 si el número de recurrencias=0). **Grado de Caoticidad**=De acuerdo con la tabla de Meta-Análisis, los códigos de las casillas muestran los diferentes grados de periodicidad, cuasiperiodicidad, caoticidad y aleatoriedad analizados. Siendo el número más pequeño correspondiente al determinismo, es decir es más fácil de predecir, y el número más grande correspondiente a la aleatoriedad, es decir, es más difícil de predecir.

Tabla de Meta-Análisis

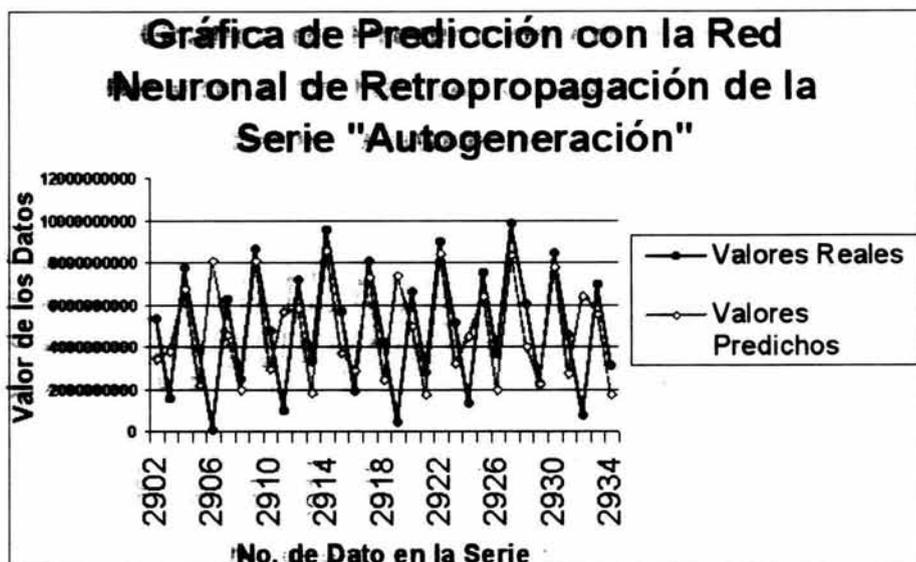


Los resultados muestran que la serie es altamente periódica y que por lo tanto se puede alcanzar a hacer una predicción de la misma con un grado de error mínimo, para comprobar que la serie puede ser predicha, utilizamos dos tipos de Redes de Neuronales, la red de Retropropagación y la red Holográfica; así como también la técnica de Frecuencias Dominantes (prediciendo los siguientes 18 valores de la serie). A continuación se muestran los resultados obtenidos.

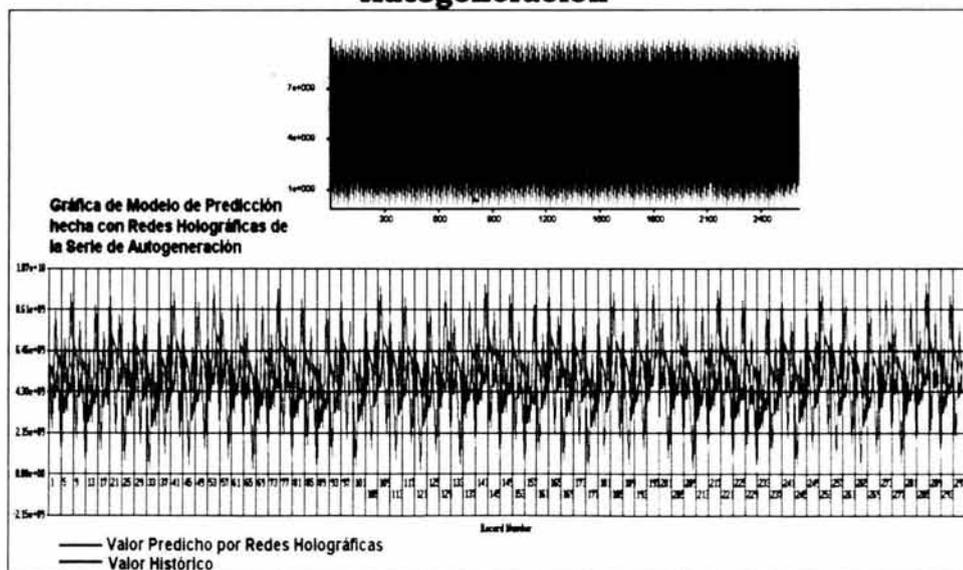
Gráfica Del Modelo De Predicción De La Serie "Autogeneración" Hecha Con La Red Neuronal De Retropropagación



En esta gráfica se muestra a) el modelo de predicción hecha con la red neuronal de Retropropagación y b) la gráfica de error.



Gráfica Del Modelo De Predicción De La Serie De Autogeneración



En esta gráfica se muestra el modelo de predicción hecha con redes holográficas, la gráfica superior pequeña es sólo la serie de Autogeneración graficada en tiempo.

Tabla De Predicción De Los Sigüientes 18 Valores En La Serie De Autogeneración Hecha Con La Técnica De Frecuencias Dominantes

Valores Históricos X_i	Valores Predichos P_i	Error $e_i = X_i - P_i$	Error Cuadrado $(X_i - P_i)^2$
5274270773	5560000000	-285729227	81641191162017500
1454610825	1700000000	-245389175	60215847207180600
7634950876	7830000000	-195049124	38044160773167400
3815290928	3950000000	-134709072	18146534079101200
9995630980	3940000000	6055630980	36670666565935800000
6175971031	6060000000	115971031	13449280031203000
2356311083	2260000000	96311083	9275824708632890
8536651134	9460000000	-923348866	852573128343486000
4716991186	5080000000	-363008814	131775399041687000
897331238	2710000000	-1812668762	3285768040730610000
7077671289	7170000000	-92328711	8524590874921520
3258011341	3340000000	-81988659	6722140204618280
9438351393	5710000000	3728351393	13900604109685000000
5618691444	5620000000	-1308556	1712318805136
1799031496	2370000000	-570968504	326005032559998000
7979371548	7860000000	119371548	14249566471916300
5274270773	5560000000	-320288401	102584659815137000
1454610825	1700000000	-3609948349	13031727082447800000
Media del Error	$ME = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{n}$	82161211.9444444	
Suma Error Cuadrado	$SEC = \sum_{i=1}^n e_i^2$	68551974866391100000	
Media del Error Cuadrado	$MEC = \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{n}$	3808443048132840000	
Desviación Estándar del Error	$DSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{(n-1)}}$	1951523263.53873	

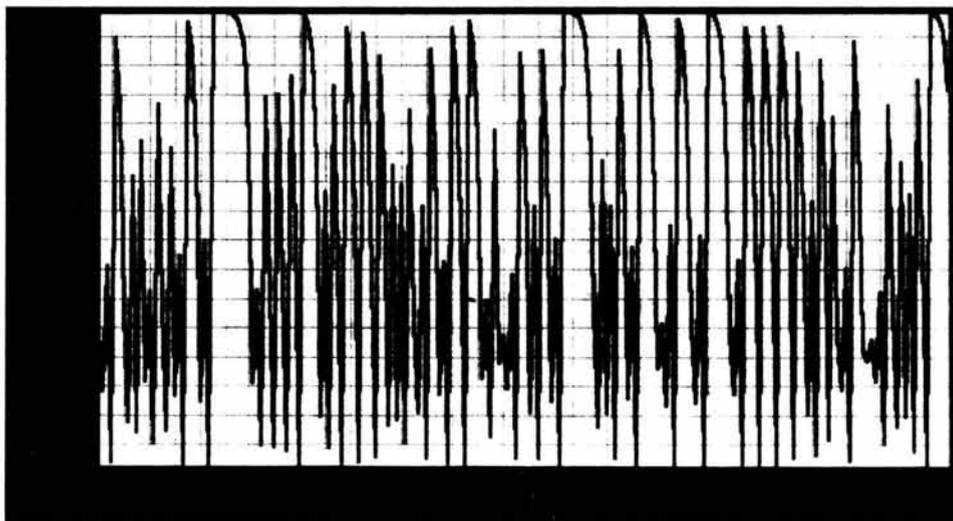
Tabla del Grado de Error Obtenido con las Diferentes Técnicas de Predicción.

Serie Numérica	Grado de error obtenido con las diferentes técnicas de Predicción en porcentaje.		
	Retropropagación	Holográfica	Frecuencias Dominantes (18 Valores)
Autogeneración	0.0124	0.103	1.63362394

4) Serie: Ecuación kx^2-1 . [2]

En esta ecuación algunos valores de K conducen a iteraciones ordenadas otras conducen al caos. Al iterar kx^2-1 para una elección cualquiera de $k>1.5$ el caos se establece, después de esto, cuanto más grande se hace k, tanto más caótico es el resultado (en el anexo 1 se encuentra el programa en lenguaje C para obtener la serie de tiempo).

Gráfica de la Serie de Tiempo de la ecuación kx^2-1 :



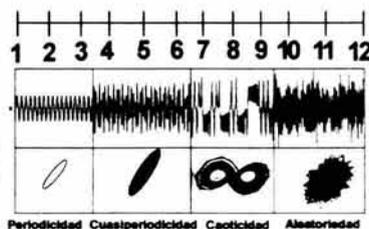
En la tabla 5.1-6 podemos ver los resultados de los análisis hechos a la serie de la ecuación kx^2-1 con las diferentes técnicas de la Dinámica No-Lineal. Teniendo una caracterización de la misma siguiendo la tabla de meta-análisis.

Tabla 5.1-6.-Caracterización de la Serie de kx^2-1

TÉCNICAS EMPLEADAS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE LOS DATOS	Grado de Caoticidad
1.-Distribución de Probabilidades	11
2.-Diagramas de Espacio de Fase	9
3.-Mapas de Poincaré	9
4.-Exponente de Lyapunov	8
5.-Espectro de Potencia	9
6.-Frecuencias Dominantes	9
7.-Función de Autocorrelación	10
8.-Mapas Recurrentes	STE: 79%→9
	Rec: 19.330%→4
	Det: 1.449%→10

Tabla 5.1-6. Resumen de los resultados obtenidos de las diferentes técnicas usadas para la serie de tiempo de la ecuación kx^2-1 . Donde: **Entropía (STE)**=Información de Shannon de la distribución de línea \geq al parámetro de línea medido en bits binarios (base 2). Para una serie periódica el STE está cerca del 0%, para una serie caótica el rango es de 20% y 80%, para una serie aleatoria el STE está cerca del 100%. **Recurrencia(%)**=Número de repeticiones / área triangular. **Determinismo(%)**=Número de puntos recurrentes formando líneas diagonales ascendentes / Número de recurrencias (igual a -1 si el número de recurrencias=0). **Grado de Caoticidad**=De acuerdo con la tabla de Meta-Análisis, los códigos de las casillas muestran los diferentes grados de periodicidad, cuasiperiodicidad, caoticidad y aleatoriedad analizados. Siendo el número más pequeño correspondiente al determinismo, es decir es más fácil de predecir, y el número más grande correspondiente a la aleatoriedad, es decir, es más difícil de predecir.

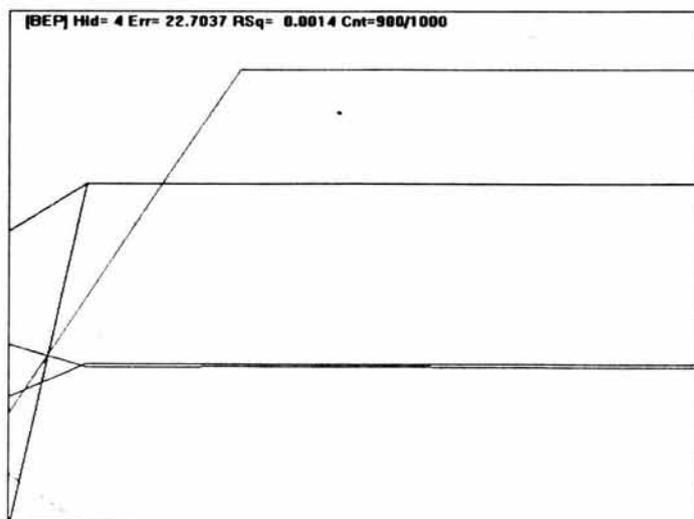
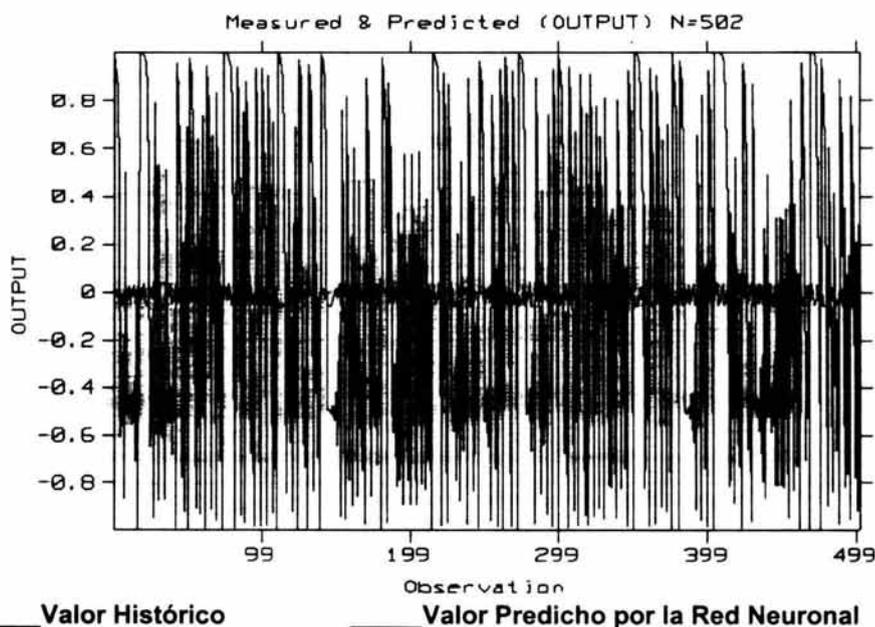
Tabla de Meta-Análisis



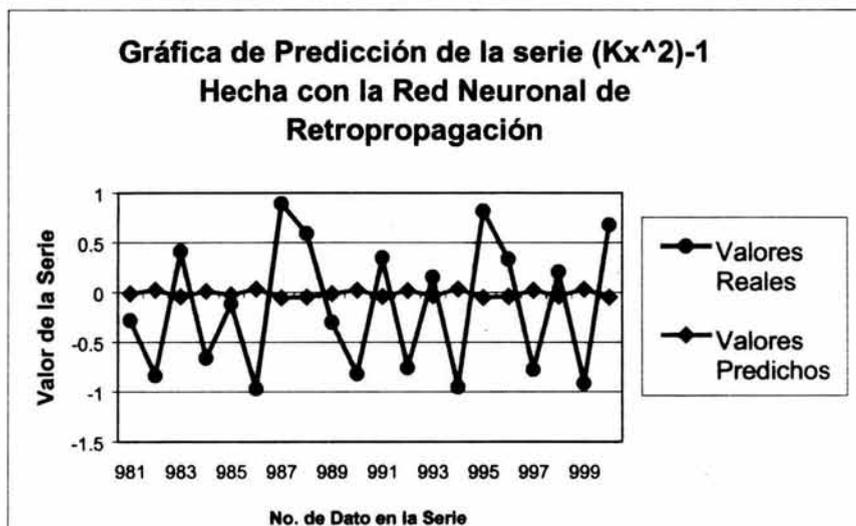
Periodicidad Cuasiperiodicidad Caoticidad Aleatoriedad

Los resultados muestran que la serie es caótica de un grado muy alto y que por lo tanto se puede alcanzar a hacer una predicción de la misma con un grado de error alto, para comprobar que la serie puede ser predicha, utilizamos dos tipos de Redes de Neuronales, la red de Retropropagación y la red Holográfica; así como también la técnica de Frecuencias Dominantes (prediciendo los siguientes 18 valores de la serie). A continuación se muestran los resultados obtenidos.

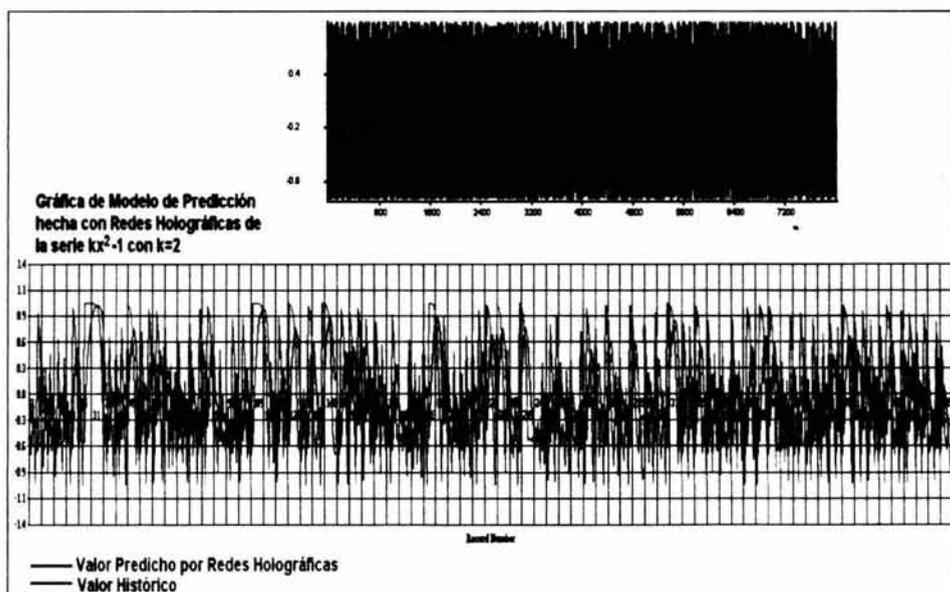
Gráfica Del Modelo De Predicción De La Serie " kx^2-1 " Hecha Con La Red Neuronal De Retropropagación



En esta gráfica se muestra a) el modelo de predicción hecha con la red neuronal de Retropropagación y b) la gráfica de error.



**Gráfica De Modelo De Predicción De La Serie
 kx^2-1 con $k=2$**



En esta gráfica se muestra el modelo de predicción hecha con redes holográficas, la gráfica superior pequeña es sólo la serie kx^2-1 con $k=2$ graficada en tiempo.

Tabla De Predicción De Los Sigüientes 18 Valores En La Serie kx^2-1 con $k=2$ Hecha Con La Técnica De Frecuencias Dominantes

Valores Históricos X_i	Valores Predichos P_i	Error $e_i=X_i-P_i$	Error Cuadrado $(X_i-P_i)^2$
0.40958111	0.0066853	0.40289581	0.162325033715556
-0.66448663	0.0913056	-0.75579223	0.571221894928373
-0.11691503	0.0337894	-0.15070443	0.022711825221625
-0.97266175	-0.0967376	-0.87592415	0.767243116553223
0.89214176	0.036228	0.85591376	0.732588364557338
0.59183385	0.0347946	0.55703925	0.310292726040562
-0.2994654	-0.0296675	-0.26979790	0.072790906844410
-0.82064095	-0.0018503	-0.81879065	0.670418128527423
0.34690314	0.0116319	0.33527124	0.112406804371138
-0.75931643	0.0149978	-0.77431423	0.599562526780493
0.15312287	0.004148	0.14897487	0.022193511891517
-0.95310677	0.0067588	-0.95986557	0.921341912471425
0.81682504	0.010603	0.80622204	0.649993977781762
0.33440629	0.0067365	0.32766979	0.107367491278644
-0.77634486	0.006661	-0.78300586	0.613098176794340
0.20542269	0.0074005	0.19802219	0.039212787732396
-0.91560304	0.0083913	-0.92399434	0.853765540352036
0.67665784	0.0073308	0.66932704	0.447998686475162
Media del Error	$ME = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{n}$	-0.111714076111111	
Suma Error Cuadrado	$SEC = \sum_{i=1}^n e_i^2$	7.67653341231742	
Media del Error Cuadrado	$MEC = \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{n}$	0.426474078462079	
Desviación Estándar del Error	$DSE = \sqrt{\sum \frac{e_i^2}{(n-1)}}$	0.653049828467996	

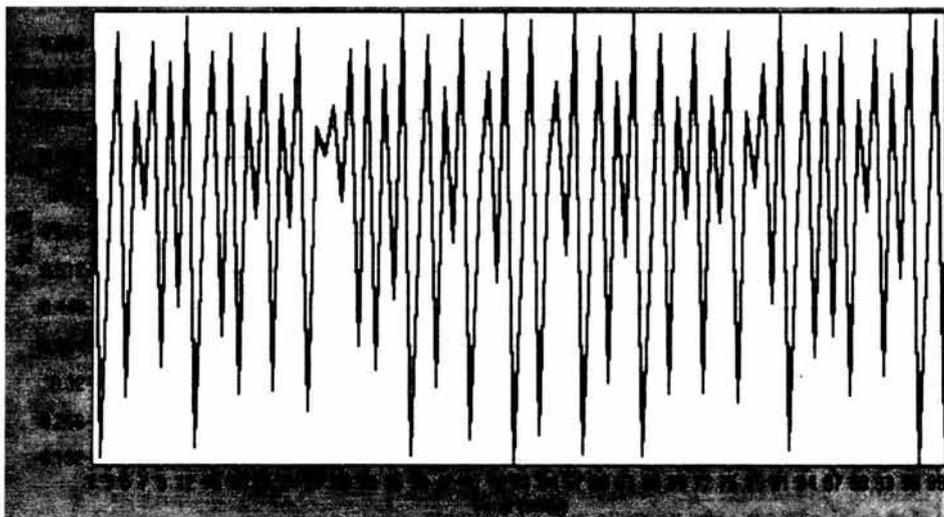
Tabla del Grado de Error Obtenido con las Diferentes Técnicas de Predicción.

Serie Numérica	Grado de error obtenido con las diferentes técnicas de Predicción en porcentaje.		
	Retropropagación	Holográfica	Frecuencias Dominantes (18 Valores)
kx^2-1 con $k=2$	22.7037	3.185	108.598138

5) Serie: Simulación de la Evolución de Poblaciones de Insectos $N_{i+1}=aN_i(1-N_i)$.^[39]

En el capítulo 2 de la tesis está explicada ampliamente esta función matemática y en el anexo 1 se encuentra el programa en lenguaje C para la obtención de esta serie.

Gráfica de la Serie de Tiempo de Poblaciones:



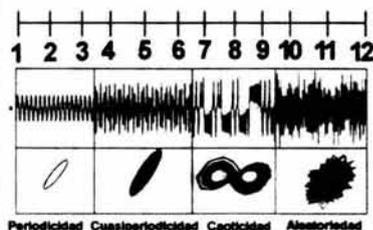
En la tabla 5.1-7 podemos ver los resultados de los análisis hechos a la serie de Poblaciones con las diferentes técnicas de la Dinámica No-Lineal. Teniendo una caracterización de la misma siguiendo la tabla de meta-análisis.

Tabla 5.1-7.-Caracterización de la Serie de Poblaciones

TÉCNICAS EMPLEADAS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE LOS DATOS	Grado de Caoticidad
1.-Distribución de Probabilidades	8
2.-Diagramas de Espacio de Fase	8.5
3.-Mapas de Poincaré	8
4.-Exponente de Lyapunov	9
5.-Espectro de Potencia	9
6.-Frecuencias Dominantes	9
7.-Función de Autocorrelación	10
8.-Mapas Recurrentes	STE: 78%→9
	Rec: 20.490%→5
	Det: 10.169%→6

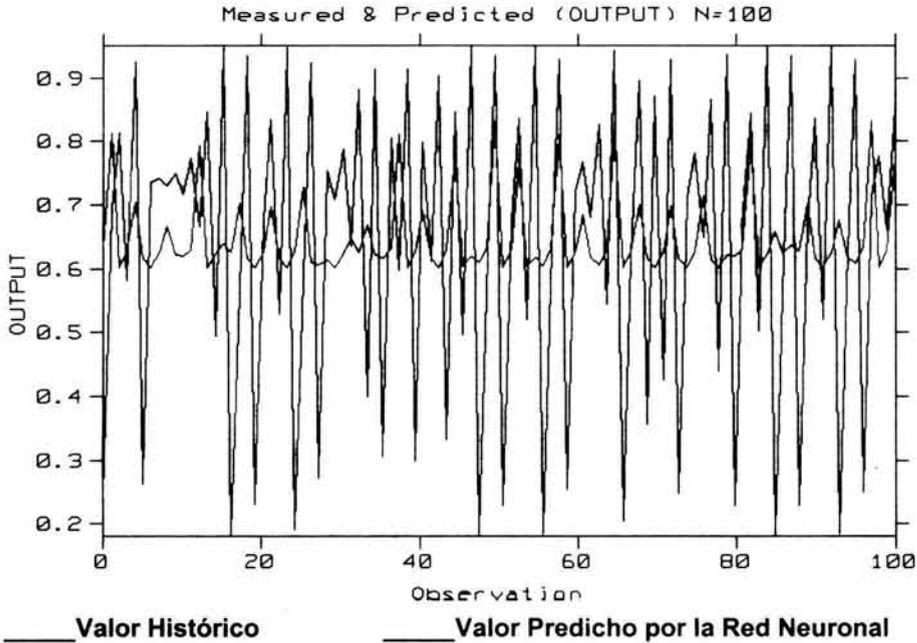
Tabla 5.1-7. Resumen de los resultados obtenidos de las diferentes técnicas usadas para la serie de tiempo de Poblaciones. Donde: **Entropía (STE)**=Información de Shannon de la distribución de línea \geq al parámetro de línea medido en bits binarios (base 2). Para una serie periódica el STE está cerca del 0%, para una serie caótica el rango es de 20% y 80%, para una serie aleatoria el STE está cerca del 100%. **Recurrencia(%)**=Número de repeticiones / área triangular. **Determinismo(%)**= Número de puntos recurrentes formando líneas diagonales ascendentes / Número de recurrencias (igual a -1 si el número de recurrencias=0). **Grado de Caoticidad**=De acuerdo con la tabla de Meta-Análisis, los códigos de las casillas muestran los diferentes grados de periodicidad, cuasiperiodicidad, caoticidad y aleatoriedad analizados. Siendo el número más pequeño correspondiente al determinismo, es decir es más fácil de predecir, y el número más grande correspondiente a la aleatoriedad, es decir, es más difícil de predecir.

Tabla de Meta-Análisis

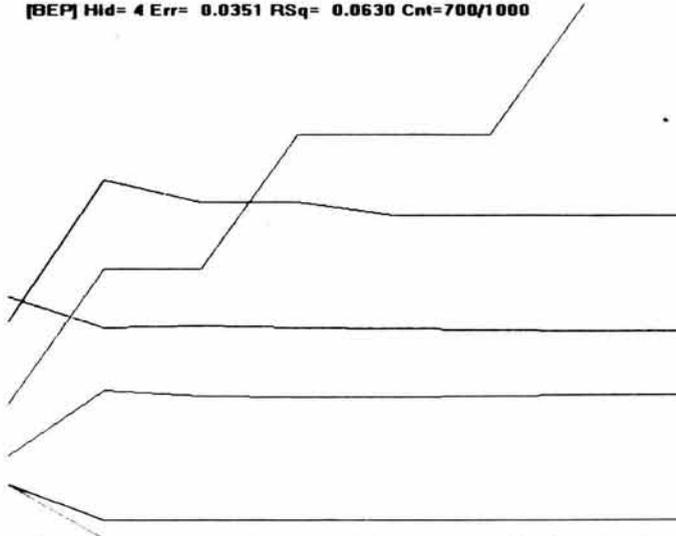


Los resultados muestran que la serie es caótica de un grado alto y que por lo tanto se puede alcanzar a hacer una predicción de la misma con un grado de error alto, para comprobar que la serie puede ser predicha, utilizamos dos tipos de Redes de Neuronales, la red de Retropropagación y la red Holográfica; así como también la técnica de Frecuencias Dominantes (prediciendo los siguientes 18 valores de la serie). A continuación se muestran los resultados obtenidos.

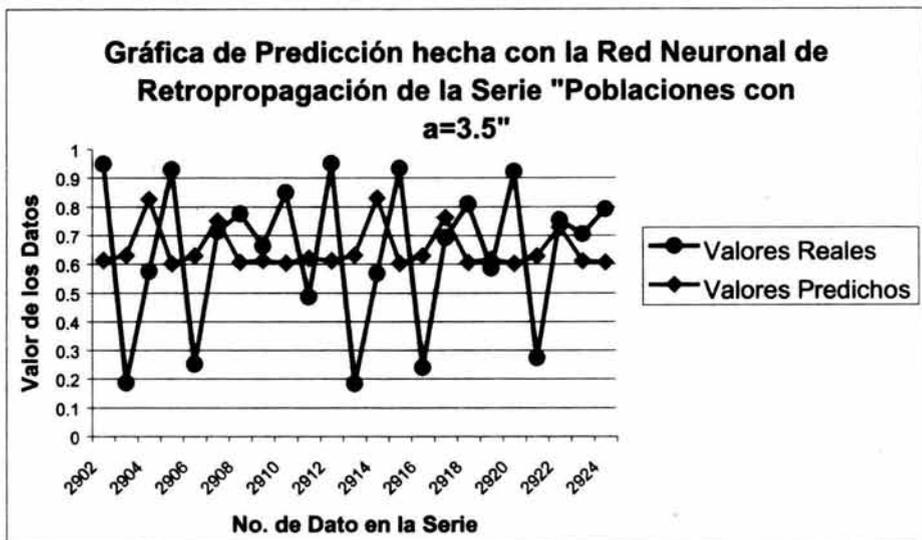
Gráfica Del Modelo De Predicción De La De Poblaciones Hecha Con La Red Neuronal De Retropropagación



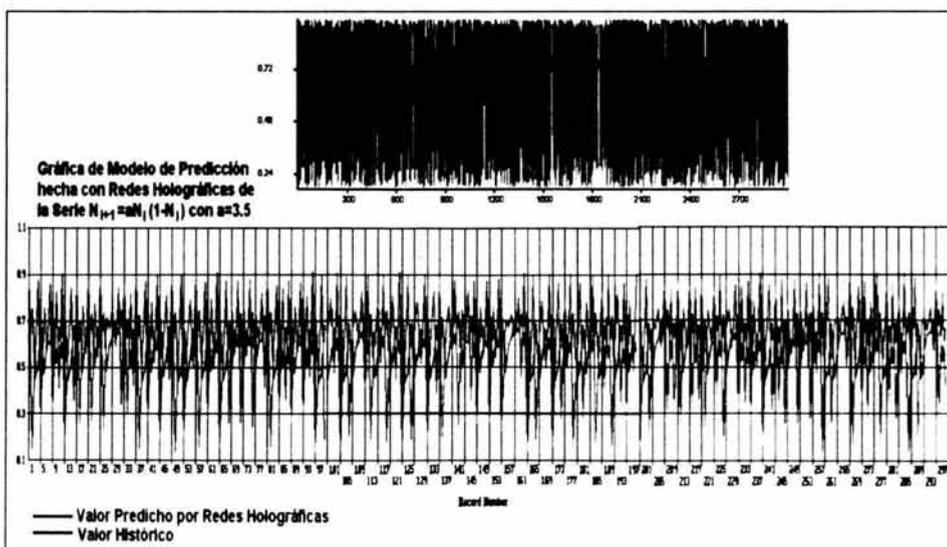
[BEP] Hid= 4 Err= 0.0351 RSq= 0.0630 Cnt=700/1000



En esta gráfica se muestra a) el modelo de predicción hecha con la red neuronal de Retropropagación y b) la gráfica de error.



Gráfica De Modelo De Predicción De La Serie De Poblaciones con $a=3.5$



En esta gráfica se muestra el modelo de predicción hecha con redes holográficas, la gráfica superior pequeña es sólo la serie de Poblaciones graficada en tiempo.

Tabla De Predicción De Los Sigüientes 18 Valores En La Serie Poblaciones Hecha Con La Técnica De Frecuencias Dominantes

Valores Históricos X_i	Valores Predichos P_i	Error $e_i = X_i - P_i$	Error Cuadrado $(X_i - P_i)^2$
0.20324661	0.3837452	-0.18049859	0.032579740991988
0.61536223	0.7772185	-0.16185627	0.026197452138313
0.89942789	0.622093	0.27733489	0.076914641211312
0.34373796	0.5918506	-0.24811264	0.061559882127770
0.85721225	0.6772788	0.17993345	0.032376046428903
0.46511775	0.5744867	-0.10936895	0.011961567224103
0.94537628	0.6977018	0.24767448	0.061342648043270
0.19623189	0.6153472	-0.41911531	0.175657643076396
0.59935474	0.6434204	-0.04406566	0.001941782391236
0.91248882	0.651698	0.26079082	0.068011851796272
0.30344132	0.6314195	-0.32797818	0.107569686556112
0.80318582	0.654905	0.14828082	0.021987201579872
0.60069776	0.628828	-0.02813024	0.000791310402458
0.91146785	0.6456397	0.26582815	0.070664605332423
0.306638	0.6406255	-0.33398750	0.111547650156250
0.8079223	0.6384793	0.16944300	0.028710930249000
0.58969867	0.6431247	-0.05342603	0.002854340681561
0.91942579	0.6379569	0.28146889	0.079224736037832
Media del Error	$ME = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{n}$	-0.00421027055555557	
Suma Error Cuadrado	$SEC = \sum_{i=1}^n e_i^2$	0.97189371642507	
Media del Error Cuadrado	$MEC = \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{n}$	0.0539940953569483	
Desviación Estándar del Error	$DSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{(n-1)}}$	0.232366295656122	

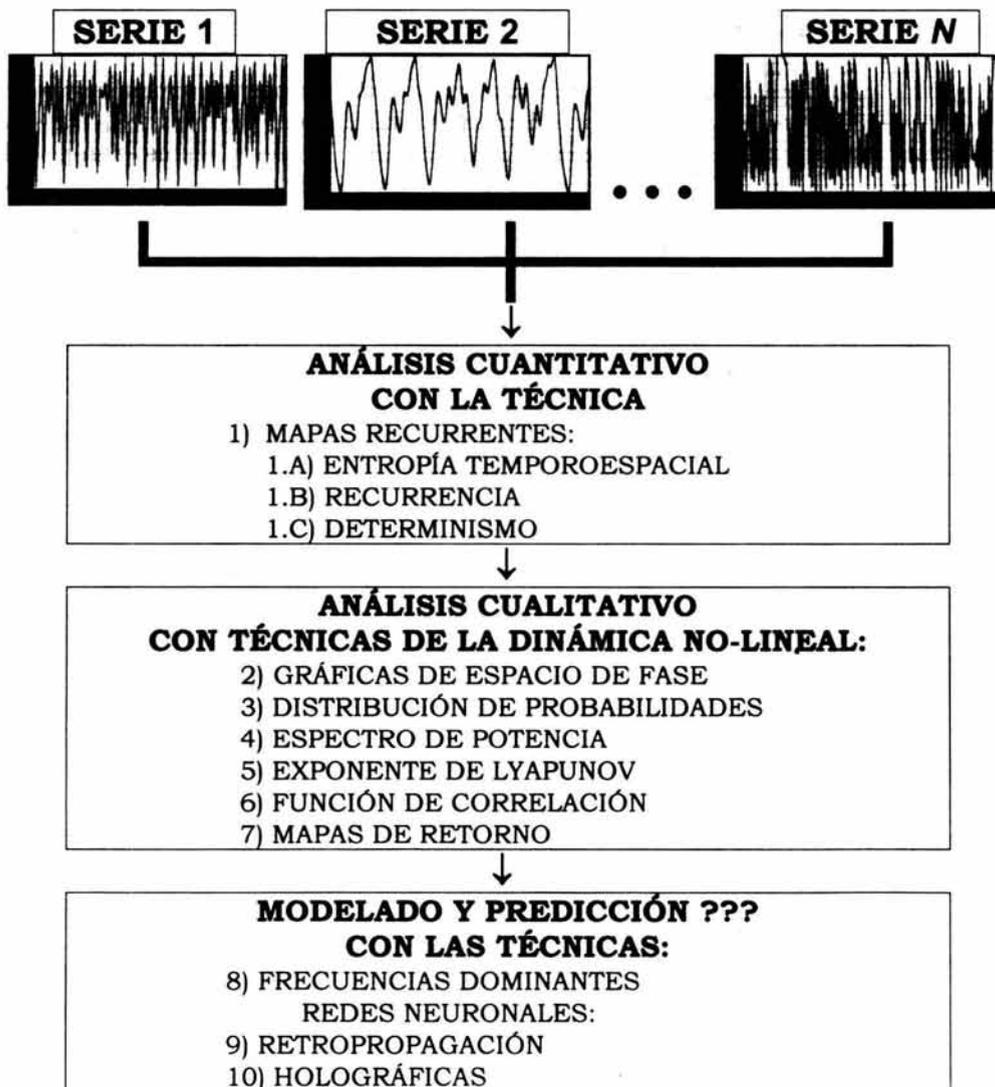
Tabla del Grado de Error Obtenido con las Diferentes Técnicas de Predicción.

Serie Numérica	Grado de error obtenido con las diferentes técnicas de Predicción en porcentaje.		
	Retropropagación	Holográfica	Frecuencias Dominantes (18 Valores)
Poblaciones	0.0351	0.584	0.67184977

CONCLUSIONES

En la siguiente gráfica se explica la metodología que se siguió para la caracterización y predicción de las series de tiempo.

Gráfica 1.-Metodología de Análisis de las Series de Tiempo



Conclusiones

La importancia en la caracterización de las series de tiempo, radica en que aunque no se tengan todas las variables que describen al fenómeno en estudio y en vez de construir una ecuación diferencial que a lo mejor es muy complicada de resolver, teniendo únicamente la serie de tiempo podemos entenderlo y, si la serie de tiempo no tiene un grado de complejidad entre los valores 10 y 12, de nuestra tabla de meta-análisis, podremos predecir unos pocos valores que serán de muchísima ayuda para el análisis del fenómeno estudiado.

Los resultados en lo particular muestran que las series utilizadas tienen diferentes grados de caoticidad. Asimismo, en ciertas circunstancias los fenómenos con comportamiento caótico tienen ciertos rangos de predicción muy importantes. Sí es posible predecir series numéricas especiales con técnicas neurocomputacionales de tipo Holográfico y de Retropropagación una vez que éstas han sido caracterizadas.

En la tabla 1 se presentan los grados de errores obtenidos al hacer los modelos de predicción y en la tabla 2 se dan los resultados resumidos de los análisis efectuados a cada una de las series numéricas.

TABLA 1.-Resultados de los Grados de Error de los Modelos de Predicción

Series Numéricas	Grado de error obtenido con las diferentes técnicas de predicción		
	Retropropagación	Holográfica	Frecuencias Dominantes
Autogeneración	0.0124	0.103	1.63362394
MackeyGlass	0.0009	0.0001	0.03594308
Particiones Perfectas	0.007	3.4556	20.20341639
Serie $N_{i+1}=aN_i(1-N_i)$ Con $a=3.5$	0.0351	0.584	0.67184977
Serie kx^2-1 Con $k=2$	22.7037	3.185	108.598138

Tabla 1.-En la que se muestra el grado de error que se obtuvo con las diferentes técnicas de predicción utilizadas en las series numéricas.

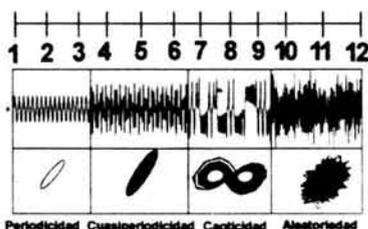
Conclusiones

Tabla 2.-Resultados Obtenidos de la Caracterización de las Diferentes Series de Tiempo

SERIES NUMÉRICAS	MAPAS RECURRENTES (Datos Crudos)			GRADO DE CAOTICIDAD OBTENIDO DE LAS DISTINTAS TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE LA DINÁMICA NO-LINEAL						
	STE	Recurrencia (%)	Determinismo (%)	1) DP	2) GEF	3) MPOIN	4) LYA	5) EP	8) FDOM	7) FCO
AUTOGENE-RACIÓN	0%	19.105	91.733	9	9	9	7	9	9	10
MACKEY GLASS	35%	22.491	99.901	7	8	9	7	7	7	6
PARTICIONES PERFECTAS	76%	25.906	12.401	7	7	7	8.5	7	8	9
Serie $N_{t+1}=aN_t(1-N_t)$ con $a=3.5$	78%	20.490	10.169	9	8.5	8	9	9	9	10
Serie kx^2-1 con $k=2$	79%	19.330	1.449	9	9	9	8	9	9	10

Tabla 2. Resumen de los resultados obtenidos de las diferentes técnicas usadas para cada una de las series numéricas. Donde: **Entropía**=Información de Shannon de la distribución de línea \geq al parámetro de línea medido en bits binarios (base 2). **Recurrencia**(%)=Número de repeticiones / área triangular. **Determinismo**(%)=Número de puntos recurrentes formando líneas diagonales ascendentes / Número de recurrencias (pone igual a -1 si el número de recurrencias=0). **Grado de caoticidad**=De acuerdo con la tabla de Meta-Análisis, los códigos de las casillas muestran los diferentes grados de periodicidad, cuasiperiodicidad, caoticidad y aleatoriedad analizados. Siendo el número más pequeño correspondiente al determinismo, es decir es más fácil de predecir, y el número más grande correspondiente a la aleatoriedad, es decir es más difícil de predecir.

Tabla de Meta-Análisis



ANEXO

PROGRAMAS HECHOS EN LENGUAJE "C" PARA GENERAR LAS SERIES NUMÉRICAS

1.-SERIE: MACKEY-GLASS. Mackey, M. C. & Glass, L. [29].

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
/* Regresa la ecuación diferencial dx/dt de Mackey-Glass */

double MGeq(double x, double time, double x_tau)
{
    double a = 0.2;
    double b = 0.1;
    double x_dot;
    x_dot = -b*x + a*x_tau/(1 + pow(x_tau, 10.0));
    return(x_dot);
}
/* Formula de Integracion de 4o orden de Runge-Kutta para una variable */
double
rk4(double x_now, double time, double step, double x_tau)
{
    double a, b, c, d;
    a = step*MGeq(x_now, time, x_tau);
    b = step*MGeq(x_now+0.5*a, time+step/2.0, x_tau);
    c = step*MGeq(x_now+0.5*b, time+step/2.0, x_tau);
    d = step*MGeq(x_now+c, time+step, x_tau);
    return(x_now + a/6 + b/3 + c/3 + d/6);
}
int
main()
{
    double step_size = 0.1; /* paso de integracion */
    double x = 1.2; /* condicion inicial */
    int sample_n = 12000; /*total muestras excluyendo la cond inici
dada*/
    int tau = 17; /* tiempo de retraso */
    int interval = 10; /*la salida es impresa cada 10 pasos de
tiempo*/
    double x_tau; /* x(t-tau) */
    double x_next;
    double time = 0;
    int i, index = 0;
    double *x_history; /*arreglo almacenar la informacion de
retraso*/
    int history_length;
    history_length = (int)(tau/step_size);
    x_history = (double *)calloc(history_length, sizeof(double));
    if (history_length != 0) {
        x_history = (double *)calloc(history_length, sizeof(double));
        for (i = 0; i < history_length; i++)
            x_history[i] = 0;
    }
    for (i = 0; i <= sample_n; i++) {
        if (i%interval == 0) printf("%4d %f\n", i/interval, x);
```

Anexo

```
x_tau = tau == 0 ? x:x_history[index];
x_next = rk4(x, time, step_size, x_tau);
if (tau != 0) {
    x_history[index] = x_next;
    index = (index + 1)%history_length;
}
time += step_size;
x = x_next;
}
return(0);
} //Fin
```

2.-SERIE: PARTICIONES PERFECTAS. Riordan, J. [37].

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <dos.h>

int n,r,i,j,k,h,l,o,p,q,r,s,t,cont,m,v,u,w,x,y,z;
FILE *sp;

void main ()
{
    sp = fopen("C:\\NM\\pertur.dat", "w");
    printf("numero \n");
    scanf("%i", &n);
    //1
    for (i=2; i<=(n+1); i++)
    {
        cont =1;
        //2
        for (j=2; j<=10; j++)
        {
            //3
            for (k=2; k<=10; k++)
            {
                r=k*j;
                if (r == (i+1))
                    cont+=1;
            }
            //4
            for (h=2; h<=10; h++)
            {
                m=r*h;
                if (m == (i+1))
                    cont+=1;
            }
            //5
            for (o=2; o<=10; o++)
            {
                l=m*o;
                if (l == (i+1))
                    cont+=1;
            }
            //6
            for (q=2; q<=10; q++)
            {
                p=l*q;
                if (p == (i+1))
                    cont+=1;
            }
            //
        }
    }
}
```

Anexo

```
    //7
    for (t=2;t<=10;t++)
    {
    s=p*t;
    if (s == (i+1))
    cont+=1;
    }//
    //8
    for (v=2;v<=10;v++)
    {
    u=s*v;
    if (u == (i+1))
    cont+=1;
    }//
    //9
    for (x=2;x<=10;x++)
    {
    w=u*x;
    if (w == (i+1))
    cont+=1;
    }//
    //10    7
    for (z=2;z<=10;z++)
    {
    y=w*z;
    if (y == (i+1))
    cont+=1;
    }//
    }//k
    }//h
        }//j

//    printf ("%i \n",cont);
fprintf(sp,"%i \n",cont);
    }//for i
    fclose(sp);
} //principal
```

3.-SERIE: AUTOGENERACIÓN, TAMBIÉN LLAMADA "LAS VACAS ROJAS Y BLANCAS". *Propuesto por J. V. Pennington, Houston, Texas.* [20]

```
#include <stdio.h>
#include <dos.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

void main()
{
FILE *fp;
double r,x;
int i,iter;
char val;
float k;
k=1.618033989;

    fp = fopen("c:\\adi\\vacas.dat", "w");
```

Anexo

```
do{
    printf("Dame el numero de Iteraciones \n N=");
    scanf("%i",&iter);
    for (i=1; i<= iter; i++)
    {
        r=(i*k);
        fprintf(fp, "%.10f\n ",r);
        r=i;
    }
    printf("Deseas hacer otro calculo \n [S/N] ");
    scanf("%s",&val);
}while (val != 'N');
    fclose(fp);
};//fin
```

4.-SERIE: ECUACIÓN kx^2-1 . [2]

```
#include <stdio.h>
#include <dos.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

void main()
{
    FILE *fp;
    double r,x;
    float k;
    int i,iter;
    char val;
    x=0.54321;

    fp = fopen("c:\\adi2\\iter.dat", "w");

do{
    printf("Dame el valor de K en el rango de 1 a 2.00000008 \n K=");
    scanf("%f",&k);
    printf("Dame el numero de Iteraciones \n N=");
    scanf("%i",&iter);
    for (i=0; i<= iter; i++)
    {
        r =(k *(x*x))-1;
        fprintf(fp, "%.10f\n ",r);
        x=r;
    }
    printf("Deseas hacer otro calculo \n [S/N] ");
    scanf("%s",&val);
}while (val != 'N');
    fclose(fp);
};//fin
```

Anexo

5.-SERIE: SIMULACIÓN DE LA EVOLUCIÓN DE POBLACIONES [39]

```
#include <stdio.h>
#include <dos.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

void main()
{
    FILE *fp;
    float No,Nf;
    int i,iter;
    char val;
    double a;
    a=4;

    fp = fopen("c:\\adi\\lenguaje\\bc\\bin\\insectos.dat", "w");

do{
    printf("Dame la poblacion inicial en el rango de 0 a 1 \n No=");
    scanf("%f", &No);
    printf("Dame el numero de Iteraciones \n N=");
    scanf("%i",&iter);
    for (i=0; i<= iter; i++)
    {
        No =(a * No * (1-No));
        fprintf(fp, "%.10f\n ",No);
        No=No;
    }

    printf("Deseas hacer otro calculo \n [S/N] ");
    scanf("%s",&val);

}while (val != 'N');

    fclose(fp);

} //fin
```

Bibliografía

Bibliografía:

- 1.-Hall, N. (1991). *"Exploring Chaos: A Guide To The New Science Of Disorder"*. W. W. Norton & Company. USA.
- 2.-Stewart I., traducción Ortuño M., Ruiz Martínez J., et al. (1991). *¿Juega Dios a los Dados? La nueva matemática del caos*. Grijalbo Mondadori S.A. ed, Barcelona.
- 3.-Medio, A. (1992). *"Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics"*. Cambridge University Press. Great Britain, Cambridge.
- 4.-Abraham, R. H. & Shaw, C. D. (1992). *"Dynamics: The Geometry of Behaviour"*. Addison-Wesley Publishing Company. USA.
- 5.-Sprott, J. C. & Rowlands, G. *"Chaos Data Analyzer"*. Physics Academic Software. IBM Version 1.0
- 6.-James, L. H. (1996). *"Theory Of Computation: An Introduction"*. Jones and Bartlett Publishers. Sudbury, Massachusetts.
- 7.-Penrose R. with Shimony A. et al., (1997). *"The Large, the Small and the Human Mind"*. Cambridge University Press.
- 8.-Dubois, M.; Aften, P. & Bergé, P. *"El Orden Caótico"*. Mundo Científico No. 68, Vol 7. 428-439pp.
- 9.-Peters, E. E. (1996). *"Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices and Market Volatility"*. 2nd Edition. Published by John Wiley & Sons, Inc. USA.
- 10.-Gulick D. (1992). *"Encounters With Chaos"*. McGraw-Hill Inc., Singapore.
- 11.-Moon, F. C. (1987). *"Chaotic Vibrations, An Introduction for Applied Scientists and Engineers"*. John Wiley & Sons, Inc., USA.
- 12.-Hilborn, R. C. (1994). *"Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers"*. Oxford University Press, Inc., USA.
- 13.-Holden, A. (1985). *"Chaos Is No Longer A Dirty Word"*. New Scientist, April 25. 12-15pp.

Bibliografía

- 14.-Weigend, A. S. & Gershenfeld, N. A. (1996). *"Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past"*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. USA, March.
- 15.-Forrester, Jay W. (1971-1973). *"World Dynamics"* 2nd Edition. Wright-Allen Press, Inc. Cambridge, Massachusetts, USA.
- 16.-Espinosa-Contreras, A. & Figueroa-Nazuno, J. (1997). *"Comportamiento Caótico de Máquinas Computacionales"*. XL Congreso Nacional de Física, resumen publicado en el Supl. del Bol. Soc. Mex. Fis., 11-3, Monterrey N.L., México, 27-31 de octubre, 93p.
- 17.-Kirchsteiger, A. M. & Gröller, E. (1996). *"Analysis and Visualization of Nonlinear Time Sequences"*. Institute of Computer Graphics, Vienna University of Technology.
- 18.-Makridakis, S, Wheelwright, S.C. & McGee, V.E., (1983). *"Forecasting: Methods and Applications"*, 2nd. Edition, John Wiley & Sons, New York.
- 19.-Moon, F. C., (1992). *"Chaotic and Fractal Dynamics: An Introduction for Applied Scientists and Engineers"*, John Wiley & Sons, Inc., USA.
- 20.-Sloane, N. J. A. (1973). *"A Handbook of Integer Sequences"*. Academic Press. (USA).
- 21.-Pennington, J. V. (1957). *"A self-generating sequence"*. The American Mathematical Monthly. Vol. 64, 198p.
- 22.-Riordan, J. (1958). *"An Introduction to Combinatorial Analysis."* Wiley, New York. (USA).
- 23.-Figueroa-Nazuno, J & Vargas-Medina, E. (1994) *¿Por qué funcionan las redes neuronales?* First International Congress of Computational Science Research, Metepec, México, 28-30 de septiembre.
- 24.-Duda, R. O. & Hart, P. E. (1973). *"Pattern Classification and Scene Analysis"*. John Wiley and Sons, New York.
- 25.-Sutherland, J. G. (1990). *"Holographic Model of Memory, Learning and Expression"*. Internat. J. Neur Syst., 1 (3), 256-267pp.

Bibliografía

- 26.-Sutherland, J. G. (1991). "A Transputer Based Implementation of Holographic Neural Technology, Transputing '91". Proc. of the World Transputer User Group Conf., Vol. 2, Ed. By Welch, P., Stiles, D., Kunii, T. L., and Bakkers, A., IOS Press.
- 27.-Sutherland, J. G. (1992). "The Holographic Method". Fuzzy, Holographic, and Parallel Intelligence: The 6th Generation Breakthrough, Ed. By Soucek B. And the IRIS Group, Wiley and Son Publishers.
- 28.-Platt, J. (1991). "Learning by Combining Memorization and Gradient Descent". Advances in Neural Information Processing Systems.
- 29.-Mackey, M. C. & Glass, L. (1977). "Oscillations and Chaos in Physiological Control Systems". Science 197:287.
- 30.-Zupan, J. & Gasteiger, J. (1993). "Neural Networks for Chemists: An Introduction". VCH Publishers, New York, NY (USA).
- 31.-Espinosa-Contreras, A. & Figueroa-Nazuno, J. (1998). "Análisis Caótico y Predictivo de la Contaminación Ambiental en la Ciudad de México". 8° Congreso Internacional de Electrónica, Comunicaciones y Computadoras CONIELECOMP 98. Puebla, México. 23-25 de febrero, 20-32pp.
- 32.-Espinosa-Contreras, A., et al. (1998). "Predicción de Series Numéricas a través de Redes Neuronales Modernas". XLI Congreso Nacional de Física, resumen publicado en el Supl. del Bol. Soc. Mex. Fis., 12-3, San Luis Potosí, S.L.P., México, 26-30 de octubre, 69p.
- 33.-Espinosa-Contreras, A.; Monroy-García, O. & Figueroa-Nazuno, J. (1999). "Análisis del Comportamiento de Diferentes Variables de la Bolsa de Valores con Mapas Recurrentes". 2° Encuentro Nacional de Computación ENC'99. En el Taller de Aprendizaje, Búsqueda, Clasificación y Optimización con Enfoques Heurísticos. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo; Pachuca, Hidalgo. 12-15 de Septiembre.
- 34.-Waldrop, M. M. (1992). "Complexity: The Emerging Science of the Edge of Order and Chaos". Simon & Schuster, Inc. USA.
- 35.-Eckman, J. P.; Oliffson, K. S. & Ruelle, D. (1987). "Recurrence Plots of Dynamical Systems". Eurphys. Lett., Vol. 4, No. 9, 973-977pp.
- 36.-Webber, C. L. Jr. & Zbilut, J. P. "Recurrent Structuring of Dynamical and Spatial Systems". Rev. Oxford Press (in press).

Bibliografía

- 37.-Riordan, J. (1958). *"An Introduction to Combinatorial Analysis"*. Wiley and Son Publishers, USA. 123-124pp.
- 38.-Schifter, I. (1996). *"La Ciencia del Caos"*. SEP/CONACYT/FCE. Colección "La Ciencia para Todos", Num. 142. México.
- 39.-Braun, E. (1996). *"Caos, Fractales y Cosas Raras"*. FCE/SEP/CONACYT. Colección "La Ciencia para Todos", Num. 150. México.
- 40.-Sametband, M. J. (1999). *"Entre el Orden y el Caos: La Complejidad"*. 2ª. Edición. FCE/SEP/CONACYT. Colección "La Ciencia para Todos", Num. 167. México.
- 41.-Briggs, J. & Peat, D. (1990). *Turbulent Mirror: An Illustrated Guide to Chaos Theory and the Science of Wholeness*". Harper & Row publishers, New York. USA.
- 42.-*"Enciclopedia Británica"*. Wescott & Thomson, 1987, Vol. IV, 3045pp.
- 43.-*"Nueva Enciclopedia Larousse"*. Larousse, 1991, Vol. I, 203pp.
- 44.-*"Diccionario Filosófico"*. Paxis, 1984, Vol. I, 184pp.
- 45.-Crutchfield, J. P., Doyne Farmer, J., Packard, N. H. y Shaw, R. S. (1987). *"Caos"*, Num. 125, febrero. In press.
- 46.-Barrow-Green, J.(1997). *"The three-body problem and the stability of the solar system"*. Providence.
- 47.-Rañada, A. F. (1983). *"Movimiento caótico"*. In press.
- 48.-Gleick, J. (1987). *"Chaos: Making a New Science"*. Penguin Books, USA.
- 49.-Kononov, E. (1999). *"Visual Recurrence Analysis (VRA)"*. Software versión 4.2