UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LORENTZ, MAXWELL Y LAS MATRICES DE DIRAC

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
F I S I C A

P R E S E N T A:
ANDREA VALDÉS HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. ÁNGEL PRIETO RUÍZ

2004

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Lorentz, Maxwell y las matrices de Dirac"

realizado por Valdés Hernández Andrea

con número de cuenta 09756678-6 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Angel Prieto Ruíz
Propietario	Dr. Luis de la Peña Auerbach
Propietario	Dr. Luis Estrada Martínez
Suplente	M. en C. Ignacio Campos Flores
Suplente	Dr. Julio Martinell Benito

Consejo Departamental de Física

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

A Laura Hernández Sadurní; de ella son además el lado izquierdo de todas mis ecuaciones, para que con su filosofía *chestertoniana* a la derecha, encuentre, de una vez por todas, esas verdades que tanto busca.

A mi primer maestro de laboratorio: Cuauhtémoc Valdés Olmedo, con quien después, y ante el catastrófico resultado de nuestros experimentos, leí acerca del universo, de las paradojas y de todos los enredos de eso que él me descubría y que llamaba física.

A Pedro Hernández Torres, mi abuelo...así nada más, porque él es de pocas palabras.

Agradecimientos

A Angel Prieto, porque en cada descarrío que tuve a lo largo de la tesis supo dejarme ir un poco y esperar a que tomara el camino de vuelta.

A Luis de la Peña, por su confianza, por todas esas pláticas en las que conoció a fondo mis inquietudes, y por el recordatorio constante de no perderlas.

A Luis Estrada, por el un punto de vista que rescató en sus comentarios sobre esta tesis.

A Julio Martinell, por el interés que tuvo en la revisión cuidadosa de la tesis.

A Ignacio Campos, por la confianza que tuvo en mi trabajo.

A Elsa y Mónica, por haber resistido todos mis desplantes al andar haciendo esta tesis.

A María del Mar, por aquéllo de sus efluvios.

A las 2/3 partes del conjunto de Andreas: la guerrillera y la bailarina, por todo eso de lo que nos hemos reído.

A todas las personas en el cuarto piso del Departamento de Física a las que les di lata y a las que tuvieron que acostumbrarse a mis altos volúmenes; especialmente a la señora Celia, por haber sido siempre tan consentidora.

Indice

Introducción

Los fenómenos electromagnéticos se describen utilizando esencialmente dos conceptos: las cargas y los campos electromagnéticos. Las primeras constituyen la fuente de los segundos, son susceptibles a su acción y también los modifican. Para lograr una descripción clásica completa de los fenómenos electromagnéticos se requiere de un conjunto de ecuaciones que determinen al campo a partir de su fuente generadora, así como de una ecuación de movimiento para una carga de prueba sometida a un campo previamente existente. Estos elementos fundamentales están constituidos por las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz; ambos pueden expresarse en forma covariante en el espacio de Minkowski recurriendo a un tensor antisimétrico $F^{\mu\nu}$, cuyas componentes son tres de índole eléctrica, y las tres restantes de naturaleza magnética, dando forma así a lo que se conoce como campo electromagnético.

Una concepción geométrica de la electrodinámica, sobre la que descansa el hecho de que la forma de las ecuaciones que la sustentan es invariante bajo transformaciones del grupo restringido de Lorentz, se logra entendiendo al campo electromagnético como un generador de rotaciones en el espacio de Minkowski, idea que ha sido previamente planteada y estudiada por el Dr. Angel Prieto[17]. El objetivo de esta tesis es justificar dicha interpretación, extrayendo las ecuaciones de la electrodinámica a partir del análisis de la acción de los elementos del grupo completo de Lorentz sobre los vectores del espacio-tiempo, así como de las formulaciones invariantes que surgen de la misma. Una vez fundamentada la relación intrínseca de la teoría electromagnética con las transformaciones de simetría del espacio-tiempo, se busca establecer su consecuencia directa: el planteamiento de los fenómenos electromagnéticos en cualquier espacio que comparta sus propiedades geométricas con el espacio de Minkowski.

En el primer capítulo se define el espacio de Minkowski, o el espacio-tiempo, y se establecen las propiedades de las transformaciones que dejan invariante la norma de sus vectores, es decir, se identifican los elementos del grupo de Lorentz. Se abordan las inversiones espacial y temporal y se pone especial detalle en las transformaciones del grupo restringido, reconociendo sus generadores así como el álgebra que satisfacen y que define al grupo.

En el segundo capítulo se muestra cómo surgen las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica a partir de los generadores de rotación del espacio-tiempo, y de las ecuaciones diferenciales invariantes a las que dan lugar los operadores (sobre funciones) asociados a ellos. Se analiza desde esta perspectiva el significado de las componentes eléctricas y magnéticas del campo, así como su comportamiento bajo las distintas inversiones del grupo de Lorentz.

En el capítulo tercero se establecen las condiciones que deben cumplir las bases de un espacio vectorial para generar un espacio geométricamente equivalente al de Minkowski. Una representación del grupo restringido de Lorentz se encuentra a partir de la expresión de sus generadores en términos de los vectores que satisfacen el álgebra de Dirac, y para lograr una descripción que abarque al grupo completo, se determina también la forma de los operadores de paridad e inversión temporal en la nueva versión del espacio.

Todos los elementos anteriores convergen en el capítulo cuatro, en donde, siguiendo la misma idea desarrollada en el segundo, se establecen las ecuaciones de la electrodinámica en una base conformada por matrices de Dirac. Con los elementos que provee esta nueva descripción y recurriendo al concepto de dualidad, se dividen los fenómenos electromagnéticos en una parte cuyo origen es puramente eléctrico y otra de naturaleza exclusivamente magnética, para revisar la interpretación del campo electromagnético que subyace a lo largo de todo el trabajo.

Finalmente, se presentan en las conclusiones las ideas esenciales que se desprenden de la tesis, así como una breve propuesta de los estudios que le darían continuidad.

Capítulo 1

Las transformaciones de Lorentz

1.1 El espacio de Minkowski y el grupo de transformaciones de Lorentz

El espacio de Minkowski es un espacio vectorial real de cuatro dimensiones cuyos puntos denotan un evento en el espacio-tiempo. La forma cuadrática de la distancia del origen al (cuadri)vector $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ está dada por

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \,, \qquad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu},$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico que define la geometría del espacio; sus componentes son

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, \qquad g_{\mu\nu} = 0 \ \text{ para } \ \mu \neq \nu, \qquad g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}.$$

A partir de la contracción del tensor métrico con el vector *contravariante* x^ν se obtiene la expresión para el vector *covariante* $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -x, -y, -z)$. De esta manera, la contracción de los cuadrivectores $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$ y $b_\mu = (b^0, -\mathbf{b})$ se escribe

$$a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

y la norma de un elemento del espacio de Minkowski es

$$s^2 = x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

El signo negativo en esta expresión, resultado de la definición del tensor métrico, permite distinguir tres tipos de vectores: aquéllos para los que $s^2 = 0$

y aquéllos que satisfacen $s^2 \lessgtr 0$. Los primeros se conocen como *vectores nulos* y forman la superficie de un cono (*cono de luz*) en el espacio de Minkowski cuyo eje de simetría es la línea $(ct, \mathbf{0})$; los vectores tales que s^2 es positiva, o *vectores temporaloides*, se ubican en el interior del cono; fuera de éste se encuentran los *vectores espaciales* para los que s^2 es menor que cero.

Las transformaciones homogéneas de Lorentz son transformaciones reales, lineales y de parámetros continuos del espacio de Minkowski en sí mismo, que dejan invariante la norma de sus vectores; es decir, si $L^\mu{}_\nu$ representa una transformación de Lorentz, de tal manera que

$$L^\mu{}_\nu x^\nu = x'^\mu,$$

entonces debe cumplirse

$$x'^\mu x'_\mu = x^\nu x_\nu$$

lo que impone sobre $L^\mu{}_\nu$ la siguiente condición de invariancia

$$g_{\alpha\beta} L^\alpha{}_\mu L^\beta{}_\nu = g_{\mu\nu}. \qquad (1.1.1a)$$

Así, las tres regiones del espacio determinadas por el cono de luz son invariantes ante una transformación de Lorentz[1].

Las 16 componentes del tensor $L^\mu{}_\nu$ definen los elementos de una matriz $L_{(4\times4)}$ donde el primer índice hace referencia al renglón y el segundo a la columna[2]. La transformación del espacio se escribe entonces

$$x' = Lx$$

con x un vector columna.

Para expresar la condición (1.1.1a) en forma matricial deben rearreglarse los índices tensoriales de manera que las contracciones coincidan con las reglas de multiplicación para matrices; partiendo de (1.1.1a) se tiene que (donde $(\sim)$ denota la transformación transpuesta)

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= L^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} L^\beta{}_\nu \qquad (1.1.1b) \\ &= \widetilde{L_\mu{}^\alpha}\, g_{\alpha\beta}\, L^\beta{}_\nu = \widetilde{L}_\mu{}^\alpha g_{\alpha\beta}\, L^\beta{}_\nu, \end{aligned}$$

[1] El interior, la superficie y el exterior del cono de luz son regiones disconexas en el sentido de que sus elementos no pueden relacionarse entre sí mediante una transformación de Lorentz, como consecuencia de que éstas conservan la norma de los elementos sobre los que actúan.

[2] Como L es un operador lineal que actúa sobre vectores de un espacio vectorial de dimensión finita, siempre es posible representarlo por una matriz definida respecto de los vectores base del espacio.

y por lo tanto (1.1.1a) equivale a

$$\widetilde{L}gL = g \tag{1.1.2}$$

con

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La relación (1.1.2) equivale a 16 ecuaciones, una para cada elemento de L; sin embargo es simétrica bajo la transposición

$$\widetilde{g} = \widetilde{\left(\widetilde{L}gL\right)} = \widetilde{L}\widetilde{g}L = \widetilde{L}gL = g,$$

por lo que sólo diez ecuaciones son linealmente independientes, restringiéndose así a seis el número de parámetros que determinan la transformación[9]. También de (1.1.2) puede concluirse que las transformaciones L forman un grupo[3] conocido como el *grupo de Lorentz*[4]. Sus elementos satisfacen además[5], y por (1.1.1b),

$$g_{\mu\nu}g^{\alpha\nu} = \delta_\mu{}^\alpha = \widetilde{L}_\mu{}^\alpha L_{\alpha\nu}g^{\alpha\nu} = \left(\widetilde{L}L\right)_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} = \left(\widetilde{L}L\right)_\mu{}^\alpha,$$

por lo que la transformación inversa es $L^{-1} = \widetilde{L}$; es decir, las transformaciones de Lorentz son ortogonales. Se tiene de aquí que

$$\left(L^{-1}\right)^\mu{}_\nu = L_\nu{}^\mu$$

y por lo tanto, los vectores covariantes se transforman bajo la inversa de L,

$$x'_\nu = L_\nu{}^\mu x_\mu.$$

Como los operadores L son ortogonales se cumple

$$\det\left(L\widetilde{L}\right) = (\det L)^2 = \det I = 1$$

[3] *c.f.* secciones A.1 y A.3.

[4] El grupo de Lorentz es un grupo de Lie de seis parámetros, es decir, se especifica por seis parámetros reales que varían continuamente dentro de un dominio que puede ser finito o infinito (*c.f.* A.2).

[5] $\delta_\mu{}^\alpha$ es la delta de Kronecker, que toma el valor 1 cuando los índices α y μ son iguales, y se anula cuando son diferentes.

de modo que

$$\det L = \pm 1. \tag{1.1.3}$$

Haciendo $\mu, \nu = 0$ en (1.1.1a), se encuentra

$$L^0{}_0 L^0{}_0 - L^k{}_0 L^k{}_0 = 1,$$

lo que implica $\left(L^0{}_0\right)^2 \geq 1$, es decir

$$L^0{}_0 \geq 1, \text{ o bien } L^0{}_0 \leq -1. \tag{1.1.4}$$

Las relaciones (1.1.3) y (1.1.4) permiten agrupar a las transformaciones L según el signo de su determinante y la magnitud de su primer elemento diagonal. Las transformaciones con determinante positivo (L_+) se llaman transformaciones propias y las de determinante negativo (L_-) impropias. Aquéllas cuyo elemento $L^0{}_0$ es mayor o igual a la unidad se llaman ortócronas $\left(L^{\uparrow}\right)$, y si éste es menor o igual a -1, las transformaciones se conocen como antiortócronas $\left(L^{\downarrow}\right)$. Las diferentes intersecciones de las cuatro dan lugar a los subconjuntos $L^{\downarrow}_{+}$, $L^{\uparrow}_{-}$, $L^{\downarrow}_{-}$ y $L^{\uparrow}_{+}$, de los cuales sólo el último constituye un subgrupo del grupo de Lorentz conocido como *grupo restringido de Lorentz;* sin embargo de la unión entre los agregados pueden encontrarse los otros dos subgrupos[26]: el *grupo ortócrono* $L^{\uparrow} = L^{\uparrow}_{-} \cup L^{\uparrow}_{+}$, y el *grupo propio* $L_+ = L^{\downarrow}_{+} \cup L^{\uparrow}_{+}$.

Los elementos de las cuatro familias $L^{\downarrow}_{+}$, $L^{\uparrow}_{-}$, $L^{\downarrow}_{-}$ y $L^{\uparrow}_{+}$ tienen la propiedad de que la variación continua de sus parámetros resulta en una transformación que pertenece al subconjunto original, de modo que no es posible conectar entre sí dos tipos distintos de transformaciones. El grupo de Lorentz está formado por cuatro agregados de transformaciones conexas, es decir, por cuatro familias en las que entre dos de sus elementos existe una curva continua de elementos que los unen[26].

1.2 Las inversiones en el grupo de Lorentz y el espacio tangente

Las transformaciones ortócronas transforman a los vectores temporaloides de tal manera que su desplazamiento temporal es positivo[13], es decir, describen sistemas físicos que evolucionan hacia tiempos futuros; si además no producen inversión alguna en las componentes del vector x^{μ}, entonces dichas transformaciones pertenecen a $L_+^\uparrow$; si en cambio invierten las componentes x^i entonces se tiene una transformación de $L_-^\uparrow$, como lo es la inversión espacial $I_S = g$. Las transformaciones antiortócronas por su parte permiten intervalos temporales negativos, entre ellas se encuentra el operador de inversión temporal $I_T = -I_S = -g$, que específicamente pertenece a $L_-^\downarrow$; la transformación antiortócrona que invierte tanto al tiempo como al espacio es un elemento de $L_+^\downarrow$ y está representada por la matriz[6] $I_{ST} = I_{TS} = -I$.

Como se mencionó anteriormente, el operador I_S invierte el signo de las coordenadas espaciales de los puntos x^μ. Si en cada uno de ellos se definen cuatro funciones de valores reales para formar el vector $k^\nu = (k^0,\ k^1,\ k^2,\ k^3)$, estas reglas de transformación no se aplican por igual a las componentes de k^ν, sino que dependen de cómo estén éstas relacionadas con las coordenadas x^μ, es decir, dependen de las funciones $k^\nu(ct, \mathbf{x})$ y por lo tanto, en general, los vectores se transforman de distinta manera bajo el operador de inversión, llamado también de paridad. Asimismo, no todos los vectores definidos en el espacio-tiempo se transforman de la misma manera bajo los elementos de $L_+^\uparrow$; pero cuando las funciones k^μ son tales que se transforman igual que las correspondientes funciones de coordenadas x^μ bajo una transformación del grupo restringido, entonces se dice que el vector que determinan es un cuadrivector contravariante, siendo así el vector k_μ uno covariante[7]. En forma análoga, y de nuevo con referencia al comportamiento de x^μ, se define como *vector polar* aquél que bajo paridad se transforma como x^μ, y como *pseudovector* al que lo hace de manera inversa[8].

[6]De sus propiedades queda claro desde el punto de vista geométrico por qué las inversiones, es decir, los elementos de los conjuntos $L_+^\downarrow$, $L_-^\uparrow$, $L_-^\downarrow$ no forman un grupo; por ejemplo, una inversión espacial aplicada una y otra vez no conduce a una reflexión del espacio.

[7]En general se usará indistintamente la palabra vector o cuadrivector para designar a éste último, es decir, a un elemento del espacio vectorial que bajo transformaciones de $L_+^\uparrow$ se comporta como x^μ, a menos que se especifique lo contrario.

[8]Las definiciones de vector polar y pseudovector (o vector axial) se refieren generalmente a la parte espacial de un vector del espacio de cuatro dimensiones. Es decir, dado el vector $f^\nu = (f^0,\ f^1,\ f^2,\ f^3)$ se dice que las funciones f^i forman las componentes de un vector polar si bajo paridad se transforman como x^i, es decir, si invierten su signo, y como pseudovector si se mantienen invariantes. A las componentes espaciales se les trata de manera separada, definiendo a la componente f^0 como escalar (frente a inversiones espaciales) si ésta no cambia de signo bajo la transformación, al igual que x^0, y como pseudoescalar en caso de que lo invierta. Aquí se ha extendido la definición, de manera que debe entenderse por vector polar al que tiene componente temporal escalar y componentes espaciales vectoriales, mientras que el pseudovector tiene en su parte temporal a

El mapeo $x^\mu \to k^\nu(ct, \mathbf{x})$ establece en cada punto del espacio un vector anclado ahí mismo, definiendo así lo que se entenderá como un espacio tangente al espacio de Minkowski. Si los vectores k^ν son cuadrivectores, entonces el espacio tangente se transforma igual que su dominio bajo transformaciones de $L_+^\uparrow$; si además siguen las mismas reglas de cambio frente al operador de paridad, entonces el espacio definido por el mapeo se transforma igual que el de Minkowski frente a transformaciones del grupo ortócrono. Así, frente a elementos de $L^\uparrow$, ambos espacios son indistinguibles. Por ejemplo, si el punto x^μ describe una curva $x^\mu(s)$ con s un parámetro continuo e invariante frente a las transformaciones del grupo restringido y de paridad, entonces la derivada

$$\frac{dx}{ds} = \lim_{\triangle s \to 0} \frac{x(s + \triangle s) - x(s)}{\triangle s} \tag{1.2.1}$$

define un espacio tangente (sobre la trayectoria) que puede identificarse con puntos del espacio de Minkowski, siempre que sobre este espacio se efectúen transformaciones contenidas en $L^\uparrow$.

Como ejemplo y para su posterior uso se presentan las transformaciones de los vectores velocidad u^μ y aceleración a^μ (con respecto a la longitud de arco de la curva a la que se refieren) bajo las inversiones I_T e I_S

$$\begin{aligned} I_S &: u^0 \to u^0, \quad u^i \to -u^i \\ I_T &: u^0 \to u^0, \quad u^i \to -u^i \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

$$\begin{aligned} I_S &: a^0 \to a^0, \quad a^i \to -a^i \\ I_T &: a^0 \to -a^0, \quad a^i \to a^i. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

1.3 Tranformaciones del grupo restringido de Lorentz

La matriz identidad $I_{4\times4}$ satisface (1.1.2), cumple que su determinante y su primer elemento diagonal son uno, y por lo tanto pertenece al grupo restringido de Lorentz. Específicamente, I es la transformación que corresponde al conjunto de parámetros $\{\alpha_i^0, i = 1,..,6\}$ tales que[9] $x' = x$. Si se mantienen fijos cinco de estos parámetros y se varía contínuamente el sexto, se

un pseudoescalar y en su parte espacial, a un pseudovector.

[9] *c.f.* apéndice A.2.

obtiene una transformación Λ contenida en $L_+^\uparrow$ (en lo sucesivo Λ denotará un elemento del grupo restringido) que puede desarrollarse en serie de potencias del parámetro φ, obteniendo para la transformación infinitesimal $(\delta\varphi = \lim_{N\to\infty} \frac{\varphi}{N})$

$$(\Lambda_{\delta\varphi})^\mu{}_\nu \approx I^\mu{}_\nu + \delta\varphi\omega^\mu{}_\nu. \tag{1.3.1}$$

A partir de esta expresión se identifica a $\omega^\mu{}_\nu$ como el generador de la transformación finita, la cual se obtiene aplicando (1.3.1) infinitas veces. En forma matricial se tiene

$$\Lambda = \lim_{N\to\infty} (\Lambda_{\delta\varphi})^N = \lim_{N\to\infty} \left(I + \frac{\varphi}{N}\omega\right)^N = \exp(\varphi\omega). \tag{1.3.2}$$

Para determinar la naturaleza del generador de la transformación se recurre a la condición (1.1.2) que puede escribirse como

$$g\widetilde{\Lambda}g = \Lambda^{-1}, \tag{1.3.3}$$

o bien

$$g\exp(\varphi\widetilde{\omega})\,g = \exp(-\varphi\omega). \tag{1.3.4}$$

Como $g^2 = I$, se cumple que

$$g\exp(\varphi\widetilde{\omega})\,g = \exp[\varphi\,(g\widetilde{\omega}g)].$$

De aquí y de (1.3.4) se tiene

$$g\widetilde{\omega}g = -\omega, \tag{1.3.5}$$

o lo que es lo mismo

$$\widetilde{(g\omega)} = -g\omega,$$

de modo que

$$\widetilde{g_{\alpha\mu}\omega^\mu{}_\nu} = \widetilde{\omega_{\alpha\nu}} = \omega_{\nu\alpha} = -g_{\alpha\mu}\omega^\mu{}_\nu = -\omega_{\alpha\nu},$$

es decir, el tensor $\omega^{\mu\nu}$ es antisimétrico. Un objeto de este tipo se puede construir a partir de la tétrada canónica que forma una base del espacio de Minkowski,

$$e_0^\mu = (1,0,0,0)\,, \quad e_1^\mu = (0,1,0,0)\,, \quad e_2^\mu = (0,0,1,0)\,, \quad e_3^\mu = (0,0,0,1)$$

definiendo el bivector

$$\omega_{(\alpha\beta)}{}^{\mu\nu} = e^{\mu}_{(\alpha)} e^{\nu}_{(\beta)} - e^{\nu}_{(\alpha)} e^{\mu}_{(\beta)}. \tag{1.3.6}$$

Para desarrollar la expresión (1.3.2) se deben calcular las potencias del bivector; con objeto de definir su producto como el producto matricial, el tensor $\omega_{(\alpha\beta)}{}^{\mu\nu}$ se expresa en la forma

$$\omega_{(\alpha\beta)}{}^{\mu}{}_{\nu} = e^{\mu}_{(\alpha)} e_{(\beta)\nu} - e_{(\alpha)\nu} e^{\mu}_{(\beta)}$$

de manera que

$$(\omega^{\mu}{}_{\nu})^2 = \omega^{\mu}{}_{\alpha} \omega^{\alpha}{}_{\nu}.$$

Se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \omega^{2n+1} &= \triangle^{n} \omega, \qquad & n = 0, \ldots \\ \omega^{2n} &= \triangle^{n-1} \omega^2, \qquad & n = 1, \ldots \end{aligned}$$

donde $\triangle = \left(e^{\mu}_{(\alpha)} e_{(\beta)\mu} \right)^2 - e^{\mu}_{(\alpha)} e_{(\alpha)\mu}\, e^{\nu}_{(\beta)} e_{(\beta)\nu}$.

Escribiendo la exponencial (1.3.2) como una serie de matrices se tiene

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varphi\omega)^n}{n!} = I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varphi\omega)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi\omega)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \left(I - \frac{\omega^2}{\triangle} \right) + \frac{\omega}{\sqrt{\triangle}} \operatorname{senh}\left(\sqrt{\triangle}\varphi \right) + \frac{\omega^2}{\triangle} \cosh\left(\sqrt{\triangle}\varphi \right). \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Con los cuatro vectores de la tétrada canónica se pueden formar seis bivectores (1.3.6) cuya expresión matricial es la siguiente

$$\begin{aligned} \omega^{\mu}_{(10)\nu} &= T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{\mu}_{(32)\nu} = S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \omega^{\mu}_{(20)\nu} &= T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{\mu}_{(13)\nu} = S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \omega^{\mu}_{(30)\nu} &= T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{\mu}_{(21)\nu} = S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dado que $e^{\mu}_{(\alpha)}e_{(\beta)\mu} = 0$ para $\alpha \neq \beta$, $e^{\mu}_{0}e_{0\mu} = 1$, y $e^{\mu}_{i}e_{i\mu} = -1$, sucede que para los generadores de la forma $\omega_{(i0)}$, $\triangle = 1$ y de (1.3.7) se tiene

$$\Lambda_{(i0)} = \left(I - \omega^2_{(i0)}\right) + \omega_{(i0)} \operatorname{senh}(\varphi) + \omega^2_{(i0)} \cosh(\varphi). \tag{1.3.8}$$

Las transformaciones (1.3.8) constituyen rotaciones hiperbólicas en planos espacio-temporales y son llamadas transformaciones *puras* de Lorentz. Si se toma el parámetro $\varphi \in (-\infty, \infty)$, las matrices $\Lambda_{(i0)}$ coinciden con aquéllas que transforman un sistema inercial en otro que se desplaza con respecto al primero con velocidad $v_i = c \tanh \varphi$ a lo largo del eje espacial $e_{(i)}$, y que conducen a las transformaciones relativistas usuales[10].

Para bivectores de la forma $\omega_{(ij)}$ se tiene $\triangle = -1$ y sustituyendo en (1.3.7) se encuentra

$$\begin{aligned} \Lambda_{(ij)} &= \left(I + \omega^2_{(ij)}\right) + \frac{\omega_{(ij)}}{i} \operatorname{senh}(i\varphi) - \omega^2_{(ij)} \cosh(i\varphi) \\ &= \left(I + \omega^2_{(ij)}\right) + \omega_{(ij)} \operatorname{sen}(\varphi) - \omega^2_{(ij)} \cos(\varphi). \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Las transformaciones (1.3.9) con $\varphi \in [0, 2\pi]$ coinciden con las rotaciones espaciales ordinarias alrededor del vector (espacial) unitario normal al plano ij del espacio de Minkowski, por un ángulo φ; es decir, para $ij = 32, 31, 21$ se tienen rotaciones alrededor de los vectores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ respectivamente[11].

Hasta aquí se han tomado en cuenta las transformaciones Λ considerando un único parámetro φ, es decir, las rotaciones sobre un plano[12]. En el

[10] La transformación que se obtiene, por ejemplo, para $i = 1$ en (1.3.8) es

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde se usó

$$\cosh \varphi = \gamma, \quad \operatorname{senh} \varphi = \gamma \frac{v}{c}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

[11] Las rotaciones se efectúan en sentido antihorario del vector $\mathbf{x}$ o bien en sentido horario si se gira el sistema de coordenadas, cuando éste está orientado en sentido positivo. Por ejemplo, para una rotación alrededor del vector $\hat{\mathbf{k}}$ ($ij = 21$ en (1.3.9)) se tiene

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi \\ y' &= y \cos \varphi - x \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

[12] El hecho de que las transformaciones $\Lambda = \exp(\varphi \omega_{\alpha\beta})$ correspondan a una rotación del

caso más general y como se vió en la sección 1.1, las transformaciones de $L_+^\uparrow$ requieren seis parámetros para especificarse, y por lo tanto, pueden ser expresadas como una rotación que involucra a seis planos independientes. Si se toman éstos como los que forman las parejas de vectores e_1e_0, e_2e_0, e_3e_0, e_3e_2, e_1e_3, y e_2e_1, entonces la transformación infinitesimal más general difiere de la identidad por una pequeña variación de los seis parámetros que corresponden a cada uno de los generadores[8]; la transformación finita Λ se alcanza aplicando infinitas veces la infinitesimal, como se hizo en (1.3.2), obteniendo

$$\Lambda = \lim_{N\to\infty}\left(I + \frac{\chi_1}{N}\omega_{10} + \frac{\chi_2}{N}\omega_{20} + \frac{\chi_3}{N}\omega_{30} + \frac{\theta_1}{N}\omega_{32} + \frac{\theta_2}{N}\omega_{13} + \frac{\theta_3}{N}\omega_{21}\right)^N =$$

$$= \exp\left[\chi_1\omega_{10} + \chi_2\omega_{20} + \chi_3\omega_{30} + \theta_1\omega_{32} + \theta_2\omega_{13} + \theta_3\omega_{21}\right]. \qquad (1.3.10)$$

En términos de los vectores unitarios en dirección del eje de giro de la rotación espacial ($\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{n}$), y de la velocidad relativa entre sistemas ($\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{v}}{v}$), puede escribirse

$$\theta_i = \theta n_i, \quad \chi_i = \chi u_i$$

donde θ es el ángulo de rotación espacial y $\chi = \tanh^{-1}\frac{v}{c}$.

La transformación pura más general se obtiene haciendo $\theta_i = 0$ en (1.3.10), y se escribe como[13]

$$\Lambda = \exp\left[\chi\left(\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{T}\right)\right]. \qquad (1.3.11)$$

De la misma manera, la rotación espacial se expresa mediante el operador[14]

$$\Lambda = \exp\left[\theta\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{S}\right)\right]. \qquad (1.3.12)$$

---

plano que definen los vectores $e^\mu_{(\alpha)}$ y $e^\mu_{(\beta)}$, se sigue de que dos vectores x y y definen un plano cuyas proyecciones sobre cada uno de los seis *planos canónicos* orientados $\mu\nu$ forman las componentes del bivector[16] $\omega^{\mu\nu}_{(xy)} = x^\mu y^\nu - x^\nu y^\mu$, de modo que el plano determinado por $e^\mu_{(\alpha)}$ y $e^\mu_{(\beta)}$ es $\omega^{\mu\nu}_{(\alpha\beta)}$.

[13] A partir de la serie de la exponencial y del resultado $(\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{T})^3 = (\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{T})$ se obtiene para los elementos de la transformación[12] (1.3.11)

$$L^{00} = \cosh\chi, \quad L^{k0} = -L^{0k} = u^k\,\mathrm{senh}\,\chi, \quad L^{ij} = g^{ij} + u^iu^j\left(1-\cosh\chi\right)$$

con $\cosh\chi = \gamma$, $\mathrm{senh}\,\chi = \frac{v}{c}\gamma$, $c\tanh\chi = v$, $\gamma = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

[14] Desarrollando la exponencial en (1.3.12) y tomando en cuenta que $(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{S})^3 = -(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{S})$, se encuentra que los elementos de las rotaciones espaciales en el espacio-tiempo son[12]

$$L^{00} = 1, \quad L^{k0} = L^{0k} = 0, \quad L^{ij} = -\delta^{ij}\cos\theta + n^in^j\left(\cos\theta - 1\right) - \epsilon^{ijk}n^k\,\mathrm{sen}\,\theta$$

La transformación (1.3.10) no es equivalente a la aplicación sucesiva de cada una de las seis rotaciones. Esto es consecuencia de que, en general, las rotaciones no conmutan y por lo tanto, de que el resultado que se obtiene al realizarlas depende del orden en el que se sucedan. Aplicar entonces dos de ellas y posteriormente sus inversas, no implica que el estado final del espacio coincida con el original, como puede verse al efectuar la siguiente serie de rotaciones infinitesimales

$$\begin{aligned}
\Lambda^{-1}_{(ij)}\Lambda^{-1}_{(j0)}\Lambda_{(ij)}\Lambda_{(j0)} &= \left(I-\theta_k S_k+...\right)\left(I-\chi_j T_j+...\right)\cdot \\
&\quad \cdot\left(I+\theta_k S_k+...\right)\left(I+\chi_j T_j+...\right) \\
&= \left(I-\chi_j T_j-\theta_k S_k+\theta_k\chi_j S_k T_j+...\right)\cdot \\
&\quad \cdot\left(I+\chi_j T_j+\theta_k S_k+\theta_k\chi_j S_k T_j+...\right) \\
&= I+\theta_k\chi_j\left(S_k T_j-T_j S_k\right)+\mathcal{O}^2\left(\theta_k,\chi_j\right) \\
&\doteq I+\theta_k\chi_j\left[S_k,T_j\right]+\mathcal{O}^2\left(\theta_k,\chi_j\right)
\end{aligned}$$

que muestra que a primer orden de los parámetros de las rotaciones en los planos ij y $j0$ se obtiene una rotación en el plano dado por el conmutador $[S_k,T_j]$. Las reglas de conmutación que satisfacen los generadores S y T pueden calcularse directamente de sus expresiones matriciales y son

$$\begin{aligned}
[S_i,S_j] &= -\epsilon_{ijk}S_k \\
[T_i,T_j] &= \epsilon_{ijk}S_k \\
[S_i,T_j] &= -\epsilon_{ijk}T_k.
\end{aligned} \tag{1.3.13}$$

Estas son características del grupo $L_+^\uparrow$ y definen su estructura[15]; cualesquiera seis operadores que satisfagan (1.3.13) pueden interpretarse como los generadores de rotaciones (asociadas a las transformaciones Λ) del espacio en el que actúan.

1.4 Representación de $L_+^\uparrow$ en el espacio de funciones.

Una rotación del espacio de Minkowski es una transformación del dominio de las funciones analíticas de valores reales $F=F(ct,x,y,z)$; por ello, asociado a cada una de las seis rotaciones uniparamétricas que constituyen una

[15] *c.f.* apéndice B.4.

transformación de Lorentz, existe un operador L que actúa sobre el espacio de funciones (considerando el dominio fijo) cuyo efecto es el de transformar la función original en la función referida al espacio rotado[16],

$$LF(x) = F'(x)$$

entonces

$$LF(\Lambda x) = F'(\Lambda x) = F(x) \tag{1.4.1a}$$

y por lo tanto

$$F(\Lambda x) = L^{-1} F(x) . \tag{1.4.1b}$$

Una transformación de Lorentz uniparamétrica queda expresada mediante un generador ω que determina el plano de rotación, y un ángulo φ que especifica su magnitud, de la siguiente manera (ecuación (1.3.2))

$$\Lambda(\varphi, \omega) = \exp(\varphi\omega) . \tag{1.4.2}$$

Si Λ produce una rotación pura, φ toma valores sobre la recta de los reales $(-\infty, \infty)$; cuando se trata de una rotación espacial, el parámetro está definido sobre la circunferencia $[0, 2\pi]$.

Por pertenecer al grupo restringido de Lorentz, la transformación $\Lambda(\varphi)$ puede obtenerse a partir de la identidad $\Lambda(0)$ mediante un desplazamiento del parámetro φ, es decir

$$\varphi_0 = 0 \to \varphi_0 + \varphi \Longleftrightarrow \Lambda(0) \to \Lambda(\varphi) .$$

Esta equivalencia preserva la ley de composición que satisface el grupo de translaciones T, dada por

$$T(\varphi_1) T(\varphi_2) = T(\varphi_1 + \varphi_2)$$

[16] Debe notarse que en esta expresión

$$F'(x) \neq F(x')$$

pues $F'(x)$ se refiere a la función descrita desde el nuevo sistema de coordenadas, y por lo tanto, su regla de correspondencia es distinta que la de $F(x')$, la cual es la función original en términos de la nueva variable. Esta diferencia puede apreciarse considerando la translación $x' = x - a$ y la función $F(x) = \operatorname{sen} x$; en este caso

$$F'(x) = \operatorname{sen}(x + a)$$

mientras que

$$F(x') = F(x - a) = \operatorname{sen}(x - a) .$$

ya que, como las rotaciones se efectúan en el mismo plano, puede escribirse[17]

$$\Lambda(\varphi_1)\,\Lambda(\varphi_2) = \exp(\varphi_1\omega)\exp(\varphi_2\omega) = \exp[(\varphi_1+\varphi_2)\,\omega] = \Lambda(\varphi_1+\varphi_2)\,.$$

Lo anterior revela el isomorfismo que existe entre las transformaciones uniparamétricas de $L_+^\uparrow$ y el grupo de translaciones de sus correspondientes parámetros[18]. En general, la translación $T\varphi_0 = \varphi_0 + \varphi$ de la línea de coordenadas de φ induce una rotación del plano correspondiente en el espacio de Minkowski, por un ángulo igual al desplazamiento *total* φ; es decir, da lugar a la transformación $\Lambda(\varphi) = \exp(\varphi\omega)$.

Este resultado permite encontrar la expresión para el operador L que aparece en (1.4.1), estableciendo previamente un mapeo que asocie los puntos del plano en el que se produce la rotación, con un elemento del dominio de su parámetro. Por ejemplo, en el plano yx se tiene

$$y = r\cos\alpha, \qquad x = r\operatorname{sen}\alpha \tag{1.4.3}$$

con r la norma de la proyección del vector (ct, x, y, z) sobre el plano. Frente a un desplazamiento de la línea de coordenadas $\alpha \to \alpha + \theta$ se obtiene la transformación $x \to x'$, $y \to y'$ con

$$\begin{aligned} x' &= r\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = r\operatorname{sen}\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\operatorname{sen}\theta = \\ &= x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ y' &= r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta = \\ &= y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

que, en efecto, corresponde a una rotación en el plano que contiene a x y a y por un ángulo igual al desplazamiento total θ.

En general, para cada transformación uniparamétrica, el mapeo queda establecido al determinar ciertas funciones

$$x^\mu = x^\mu(h, r)\,, \quad x^\nu = x^\nu(h, r)\,, \quad h = h(x^\mu, x^\nu) \quad \text{con} \quad \mu \neq \nu \tag{1.4.5}$$

[17] Al ser rotaciones en el mismo plano, los generadores de $\Lambda(\varphi_1)$ y $\Lambda(\varphi_2)$ son los mismos, por lo que, evidentemente, conmutan y puede usarse el resultado

$$AB = BA \implies \exp[A+B] = \exp A \exp B.$$

[18] En forma más general, cualquier grupo continuo uniparamétrico es equivalente al grupo aditivo de los números reales[4,25].

donde x^μ, x^ν son dos de las cuatro componentes del vector (x^0, x^1, x^2, x^3), r es la norma de la proyección del vector sobre el plano $\mu\nu$ y h es un elemento de la línea de coordenadas asociada al mismo. Cuando ocurre una translación de esta última, es decir cuando $h \to h + \varphi$, se induce sobre las funciones analíticas $f(h)$ la transformación

$$f(h+\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!} \left(\frac{d}{dh}\right)^n f(h) = \exp\left[\varphi \frac{d}{dh}\right] f(h) = \lambda(\varphi) f(h). \quad (1.4.6)$$

La relación (1.4.5) permite escribir, usando (1.4.1b) y (1.4.6)

$$\begin{aligned} f(h+\varphi) &= f(h') = f[h(x'^\mu, x'^\nu)] = F(x'^\mu, x'^\nu) = \\ &= L^{-1}(\varphi) F(x^\mu, x^\nu) = \lambda(\varphi) f(h). \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Las funciones $f(h)$ y $F(x^\mu, x^\nu)$ son dos expresiones de la misma transformación, ya que, aunque los dominios sobre los que están definidas son distintos, existe una equivalencia entre ellos establecida por el mapeo (1.4.5); de este modo el efecto que se obtiene al operar λ y L^{-1} sobre f y F, respectivamente, es en esencia el mismo. El desplazamiento $h \to h + \varphi$ se manifiesta sobre f a través de la aplicación de λ; y según se tiene del isomorfismo, existe una rotación correspondiente en el espacio de Minkowski que debe, por (1.4.7), ser efectuada en el espacio de funciones F mediante la acción de L^{-1}.

El operador $\frac{d}{dh}$ genera la transformación[19] λ; la expresión para éste que se obtiene mediante las relaciones (1.4.5) resulta en un operador diferencial D que corresponde al generador de L^{-1},

$$\frac{d}{dh} = \frac{dx^\mu}{dh}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{dx^\nu}{dh}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = D(x^\mu, x^\nu). \quad (1.4.8)$$

La transformación finita es entonces

$$L^{-1}(\varphi) = \exp[\varphi D(x^\mu, x^\nu)] \quad (1.4.9a)$$

[19]Si la translación en la línea del parámetro es infinitesimal, o sea si $h \to h + \delta\varphi$, la expresión (1.4.6) es, hasta términos lineales de $\delta\varphi$,

$$f(h+\delta\varphi) = f(h) + \delta\varphi \frac{df}{dh} + \ldots \approx \left(1 + \delta\varphi \frac{d}{dh}\right) f(h)$$

resultado que permite identificar al operador $\frac{d}{dh}$ como el generador de translaciones en el espacio de funciones f.

y dado que[20] $L^{-1}(\varphi) = L(-\varphi)$, se tiene

$$L(\varphi) = \exp\left[\varphi\left(-D\left(x^{\mu}, x^{\nu}\right)\right)\right]. \tag{1.4.9b}$$

En la expresión (1.4.7), L^{-1} opera sobre funciones que dependen únicamente de las dos coordenadas que forman el plano de la rotación. Sin embargo, es válido extender el dominio de aplicación de L^{-1} (o L) a todas aquéllas funciones que dependen de las *cuatro* componentes x^{μ} de un vector, puesto que los únicos cambios que las funciones sufren dada una rotación uniparamétrica involucran sólo operadores diferenciales (considerados en el generador D) con respecto a las variables susceptibles de cambio bajo la transformación de Lorentz.

A partir de (1.4.3) y usando (1.4.8) se obtiene el generador J_3 de L para rotaciones en el plano yx

$$\frac{d}{d\alpha} = \frac{dx}{d\alpha}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{d\alpha}\frac{\partial}{\partial y} = r\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\frac{\partial}{\partial y} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} = -J_3.$$

Para los planos espaciales restantes se tienen relaciones análogas a (1.4.3),

$$\begin{aligned} z &= r_{32}\cos\alpha_1, \quad y = r_{32}\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 \\ x &= r_{13}\cos\alpha_2, \quad z = r_{13}\,\mathrm{sen}\,\alpha_2. \end{aligned}$$

Los desplazamientos $\alpha_1 \to \alpha_1 + \theta_1$, $\alpha_2 \to \alpha_2 + \theta_2$ producen una rotación en el plano zy y xz por un ángulo θ_1 y θ_2 respectivamente. Las transformaciones L que corresponden a las tres rotaciones espaciales están generadas por los operadores

$$J_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad J_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad J_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}. \tag{1.4.10}$$

En los planos espacio-temporales el mapeo está dado como

$$\begin{aligned} ct &= r_{10}\cosh\beta_1, \quad x = r_{10}\,\mathrm{senh}\,\beta_1 \\ ct &= r_{20}\cosh\beta_2, \quad y = r_{20}\,\mathrm{senh}\,\beta_2 \\ ct &= r_{30}\cosh\beta_3, \quad z = r_{30}\,\mathrm{senh}\,\beta_3. \end{aligned}$$

Al efectuar los desplazamientos $\beta_1 \to \beta_1 + \chi_1$, $\beta_2 \to \beta_2 + \chi_2$, $\beta_3 \to \beta_3 + \chi_3$, se obtienen rotaciones puras cuyos parámetros son χ_1 en el plano ctx, χ_2 en

[20] Resultado que se sigue de la ley de composición para transformaciones uniparamétricas.

el plano cty y χ_3 en el plano ctz. Las funciones definidas sobre el espacio de Minkowski se transforman entonces bajo los operadores generados por

$$K_1 = -x\frac{\partial}{c\partial t} - ct\frac{\partial}{\partial x}, \quad K_2 = -y\frac{\partial}{c\partial t} - ct\frac{\partial}{\partial y}, \quad K_3 = -z\frac{\partial}{c\partial t} - ct\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.4.11}$$

Con estos resultados se verifica que los generadores de rotaciones en el espacio de funciones satisfacen las mismas reglas de conmutación (1.3.13)

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= -\epsilon_{ijk} J_k \\ [K_i, K_j] &= \epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk} K_k. \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Capítulo 2

La electrodinámica en el espacio de Minkowski

2.1 Las ecuaciones del campo de tétradas

Cuando en cada punto del espacio de Minkowski se definen cuatro vectores ε_α $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ linealmente independientes, se establece en él un campo de tétradas $\{\varepsilon_\alpha\}$ cuyos elementos están anclados al punto x,

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha \mid_x .$$

El vector x está referido a un punto x_0 sobre el que se define la tétrada canónica $\{e_\alpha\}$, con respecto a la cual se determinan las funciones de coordenadas x^μ. Este marco de referencia puede reproducirse en cada punto del espacio y formar, al igual que la tétrada $\{\varepsilon_\alpha\}$, una base del espacio tangente anclado ahí mismo. Por ello, y para cada x, existe una única transformación invertible L tal que[21]

$$\varepsilon_\alpha \mid_x = L(x)\, e_\alpha \mid_x, \quad L(x_0) = I. \tag{2.1.1}$$

Si los vectores ε_α satisfacen la relación

$$\varepsilon^\mu_\alpha \varepsilon_{\beta\mu} = g_{\alpha\beta}$$

[21] A lo largo de esta sección se emplea una notación matricial, de manera que, por ejemplo en la expresión

$$\varepsilon_\alpha \mid_x = L(x)\, e_\alpha \mid_x$$

debe entenderse a los vectores ε y e como matrices columna (correspondientes a tensores contravariantes), y a L como la matriz asociada al tensor $L^\mu{}_\nu$.

entonces su norma es constante en todo punto. Así, establecer un campo de tétradas unitarias[22] en el espacio es equivalente a asignar a cada uno de sus puntos una transformación L que preserva la norma de los vectores y cuyos parámetros, dependiendo del valor que adquieren en cada x, determinan la orientación de la nueva base con respecto a la base canónica del espacio tangente ahí definida. Si los parámetros varían continuamente conforme x se desplaza de igual forma, el campo de tétradas es de naturaleza continua y L pertenece al grupo restringido de Lorentz[23].

Dado que, en general, la dirección de los elementos de las tétradas varía de un punto a otro, la orientación de los planos formados entre ellos también es diferente en distintos puntos de anclaje. El plano que contiene a los vectores e_α y e_β (cuya orientación es constante en cada x) puede representarse con el bivector[24]

$$\omega^{\mu\nu}_{(\alpha\beta)} = e^\mu_\alpha e^\nu_\beta - e^\nu_\alpha e^\mu_\beta.$$

Análogamente los seis planos determinados por la nueva tétrada pueden identificarse con seis bivectores de la forma

$$\varpi^{\mu\nu}_{(\alpha\beta)} = \varepsilon^\mu_\alpha \varepsilon^\nu_\beta - \varepsilon^\nu_\alpha \varepsilon^\mu_\beta.$$

Por (2.1.1), estos últimos corresponden a las imágenes de $\omega^{\mu\nu}_{(\alpha\beta)}$ bajo la transformación L, es decir

$$\varpi_{(\alpha\beta)} = L\omega_{(\alpha\beta)}L^{-1} \tag{2.1.2}$$

de modo que (2.1.2) permite determinar la orientación de los planos formados por la tétrada $\{\varepsilon_\alpha\}$.

Si las componentes de x están parametrizadas con respecto a una variable continua s, la función $x = x(s)$ describe una curva conforme se recorre el dominio de s. Tras el desplazamiento infinitesimal $s \to s + \Delta s$, el punto x alcanza la posición $x + \Delta x$ y los vectores $\varepsilon_\alpha(x)$ la orientación $\varepsilon_\alpha(x + \Delta x)$. Estos últimos, dado que el campo de tétradas varía en forma continua, se muestran rotados infinitesimalmente con respecto a los $\varepsilon_\alpha(x)$.

Si R es la matriz de rotación infinitesimal en la base canónica, (*c.f.* ecuación (1.3.10))

$$R = I + \Delta\chi_1\omega_{(10)} + \Delta\chi_2\omega_{(20)} + \Delta\chi_3\omega_{(30)} + \tag{2.1.3a}$$

[22] Es decir, aquéllas cuyos elementos tienen norma ± 1.

[23] Como $L(x)$ preserva la norma de los vectores y puede alcanzarse de $L(x_0) = I \in L^\uparrow_+$ por una curva continua de transformaciones, es un elemento del grupo restringido de Lorentz.

[24] *c.f.* nota 12.

$$+ \quad \Delta\theta_1 \omega_{(32)} + \Delta\theta_2 \omega_{(13)} + \Delta\theta_3 \omega_{(21)},$$

entonces a partir de (2.1.2) puede encontrarse la transformación (2.1.3a) en términos de la base ε. Esta queda expresada como sigue

$$\begin{aligned} R_\varepsilon &= LRL^{-1} = \\ &= I + \Delta\chi_1 \varpi_{(10)} + \Delta\chi_2 \varpi_{(20)} + \Delta\chi_3 \varpi_{(30)} + \\ &\quad + \Delta\theta_1 \varpi_{(32)} + \Delta\theta_2 \varpi_{(13)} + \Delta\theta_3 \varpi_{(21)}. \end{aligned} \tag{2.1.3b}$$

Se ve así que la rotación infinitesimal más general R_ε que actúa sobre los vectores ε puede también descomponerse en seis rotaciones sobre cada uno de los planos definidos por ellos mismos.

Las tasas de cambio de los vectores ε_α bajo la rotación infinitesimal R_ε, producida al desplazarse x durante el intervalo Δs, están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varepsilon_0}{\Delta s} &= \frac{\Delta\chi_1}{\Delta s}\varepsilon_1 + \frac{\Delta\chi_2}{\Delta s}\varepsilon_2 + \frac{\Delta\chi_3}{\Delta s}\varepsilon_3, \\ \frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta s} &= \frac{\Delta\chi_1}{\Delta s}\varepsilon_0 - \frac{\Delta\theta_3}{\Delta s}\varepsilon_2 + \frac{\Delta\theta_2}{\Delta s}\varepsilon_3, \\ \frac{\Delta\varepsilon_2}{\Delta s} &= \frac{\Delta\chi_2}{\Delta s}\varepsilon_0 + \frac{\Delta\theta_3}{\Delta s}\varepsilon_1 - \frac{\Delta\theta_1}{\Delta s}\varepsilon_3, \\ \frac{\Delta\varepsilon_3}{\Delta s} &= \frac{\Delta\chi_3}{\Delta s}\varepsilon_0 - \frac{\Delta\theta_2}{\Delta s}\varepsilon_1 + \frac{\Delta\theta_1}{\Delta s}\varepsilon_2. \end{aligned} \tag{2.1.4a}$$

Los incrementos de los parámetros $\Delta\varphi_i$ ($\varphi_i = \chi_i$, o θ_i) causados por el desplazamiento del vector x pueden escribirse como

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i(x + \Delta x) - \varphi_i(x) = \varphi_i[x(s + \Delta s)] - \varphi_i[x(s)],$$

de modo que en el límite $\Delta s \to 0$ las relaciones (2.1.4a) adquieren la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_0}{ds} &= \frac{d\chi_1}{ds}\varepsilon_1 + \frac{d\chi_2}{ds}\varepsilon_2 + \frac{d\chi_3}{ds}\varepsilon_3, \\ \frac{d\varepsilon_1}{ds} &= \frac{d\chi_1}{ds}\varepsilon_0 - \frac{d\theta_3}{ds}\varepsilon_2 + \frac{d\theta_2}{ds}\varepsilon_3, \\ \frac{d\varepsilon_2}{ds} &= \frac{d\chi_2}{ds}\varepsilon_0 + \frac{d\theta_3}{ds}\varepsilon_1 - \frac{d\theta_1}{ds}\varepsilon_3, \\ \frac{d\varepsilon_3}{ds} &= \frac{d\chi_3}{ds}\varepsilon_0 - \frac{d\theta_2}{ds}\varepsilon_1 + \frac{d\theta_1}{ds}\varepsilon_2. \end{aligned} \tag{2.1.4b}$$

De esta manera las tasas de cambio de los elementos de la base $\{\varepsilon_\alpha\}$ se escriben como una combinación lineal de los vectores mismos.

Las ecuaciones (2.1.4*b*) se satisfacen independientemente de la transformación L que define a los vectores ε_α (ver (2.1.1)) es decir, se cumplen para todos los elementos del campo de tétradas. En general, un sistema de referencia definido sobre un objeto geométrico arbitrario en el espacio, caracterizado porque los incrementos de los vectores que lo conforman se expresan en términos de ellos mismos, constituye una referencia de Cartan; así, (2.1.4*b*) muestra que las tétradas $\{\varepsilon_\alpha\}$ forman un campo de referencias de Cartan, cuyas ecuaciones son las derivadas direccionales de sus elementos a lo largo del arco que recorre la curva $x\,(s)$. Dado que las relaciones (2.1.4*b*) son válidas para cualquiera que sea el vector tangente al espacio a lo largo del cual se desplaza x durante el intervalo ds, se tiene que la información contenida en las ecuaciones del campo no está restringida a una curva específica. Sin embargo, el marco de referencia $\{\varepsilon_\alpha\}$ junto con (2.1.4*b*) determina una curva, que es intrínseca a la rotación, siempre que se haga coincidir alguno de los cuatro elementos que lo conforman con el vector tangente a la curva en cuestión; de esta manera, el punto que se desplaza es el origen de la tétrada, sobre la cual se induce una serie de rotaciones infinitesimales conforme ésta describe un segmento de curva[25].

Si x ha de indicar la posición de una partícula que se desplaza en el espacio-tiempo, el hecho de que a lo largo de toda la trayectoria el vector tangente a la curva sea ε_α para algún $\alpha = 0, 1, 2, 3$, implica que la tétrada $\{\varepsilon_\alpha\}$ corresponde al marco de referencia que viaja con ella y que $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_0$ coincide con su velocidad propia medida con respecto a la longitud de arco[26].

[25] Un caso análogo en el espacio euclidiano de tres dimensiones es el de la tríada de Frenet: definiendo ésta a lo largo de una trayectoria, las ecuaciones de sus tasas de cambio contienen toda la información sobre la curva, a diferencia de la tétrada canónica definida sobre la misma. En realidad, las referencias de Cartan generalizan a los sistemas de Darboux y Frenet.

[26] Cuando una partícula se desplaza en el espacio-tiempo, su vector posición describe una trayectoria (la *línea de vida*) que puede parametrizarse con respecto a la longitud de arco s medida en el sistema en el que la partícula se encuentra en reposo, es decir, el parámetro corresponde al tiempo propio τ de la partícula multiplicado por el factor c

$$s = c\tau = c\int\left(1 - \frac{v^2\,(t)}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

con $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Si se mide con respecto a la longitud de arco, la velocidad de la partícula tiene norma

Si con respecto de la base canónica anclada al punto x, es decir, desde el sistema paralelo al observador que determina la posición, la velocidad de la partícula se denota con u, se tiene

$$u = \varepsilon_0 \tag{2.1.5}$$

y tras el desplazamiento infinitesimal se transforma en

$$u(x + \triangle x) = Ru(x)\,. \tag{2.1.6}$$

De esta manera la tasa de cambio del vector velocidad medida por el observador queda expresada como (el punto indica derivada con respecto al parámetro s)

$$\frac{du}{ds} = \lim_{\triangle s \to 0} \frac{u(s + \triangle s) - u(s)}{\triangle s} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\chi}_1 & \dot{\chi}_2 & \dot{\chi}_3 \\ \dot{\chi}_1 & 0 & \dot{\theta}_3 & -\dot{\theta}_2 \\ \dot{\chi}_2 & -\dot{\theta}_3 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ \dot{\chi}_3 & \dot{\theta}_2 & -\dot{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix} u(s)\,. \tag{2.1.7}$$

En tanto que cada vector u define un marco de referencia propio de la partícula, la transformación L asigna en cada punto de la curva, o equivalentemente, en cada instante, un sistema que es inercial con respecto al del observador. La ecuación (2.1.7) indica que la velocidad de cambio entre los diferentes sistemas inerciales que se establecen a lo largo de la curva, es igual a la tasa de cambio de u bajo una rotación infinitesimal de la tétrada anclada al punto donde está definida.

2.2 La fuerza de Lorentz

El sistema de ecuaciones (2.1.7) determina las componentes del vector aceleración (con respecto a la longitud de arco recorrido) con el que se desplaza una partícula cuya posición medida por un observador al instante τ es $x(c\tau)$. Físicamente dicha aceleración ocurre a causa de una fuerza definida en el punto x que depende además, y según la naturaleza de ésta, de ciertas propiedades intrínsecas de la partícula[27]. Como el cambio en la velocidad

unitaria, y dado que la transformación L preserva la norma de los vectores (*c.f.* (2.1.1)) se sigue que $\alpha = 0$.

[27] Si se requiere que una fuerza cualquiera k^μ sea ortogonal al vector velocidad u^ν, puede probarse que esta es condición suficiente y necesaria para que la fuerza sea de la forma

$$k^\mu \propto F^\mu{}_\nu u^\nu$$

queda determinado por las seis funciones $\dot{\chi}_i$ y $\dot{\theta}_i$, en éstas debe estar contenida toda la información acerca de aquéllo que produce la fuerza, así como de las propiedades características de la partícula sobre la que se ejerce. Si se denota con P la cantidad que porta información sobre la partícula y con E_i, B_i, a seis funciones que dependen únicamente de su posición, puede escribirse

$$\dot{\chi}_i = PE_i\left(ct, x, y, z\right), \qquad \dot{\theta}_i = PB_i\left(ct, x, y, z\right). \tag{2.2.1}$$

Entendiendo como una propiedad intrínseca de la partícula aquélla que es invariante y constante desde cualquier sistema de referencia, entonces P es una cantidad escalar frente a transformaciones de $L_+^\uparrow$.

Si la fuerza es de índole electromagnética, es aceptable suponer que la aceleración es proporcional a cierta propiedad q de la partícula, de naturaleza también electromagnética, e inversamente proporcional a su masa m; de esta manera $P = \frac{\kappa q}{m}$ con κ un factor numérico que es constante en todos los sistemas de referencia. Se tiene así de (2.1.7) que

$$\frac{du}{ds} = \frac{\kappa q}{m} F u \tag{2.2.2}$$

con F dada por

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.3}$$

Si las funciones E_i, B_i, causantes de la fuerza, se identifican con las componentes de los campos eléctrico y magnético, entonces la ecuación (2.2.2) con[28] $\kappa = c^{-1}$ coincide con la expresión para la *fuerza de Lorentz* que se ejerce

donde $F^{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico[1]. A tales fuerzas se les llama *fuerzas puras* y tienen la propiedad de que no alteran la masa propia de la partícula sobre la que actúan[18].

[28]Haciendo $u = e_0$ en (2.2.2), se tiene (en SI)

$$\left[m\frac{du}{d\tau}\right] = \frac{\text{kg}}{\text{s}} = [\kappa q E]$$

Si qE tiene unidades de fuerza, entonces

$$[\kappa] = \frac{\text{kg}}{\text{sN}} = \frac{\text{s}}{\text{m}}$$

y κ es por lo tanto el inverso de una velocidad; dado que ésta debe ser constante en todos los sistemas de referencia, se tiene que dicha velocidad sólo puede ser la de la luz y por lo tanto $\kappa = c^{-1}$.

sobre una partícula de carga *eléctrica*[29] $q_e = q$ y momento mu producida por un campo electromagnético externo cuya representación matricial es F[30]. Si se conocen las seis funciones E_i y B_i en cada punto del espacio, así como la masa y la carga de una partícula, quedan establecidas en todo el espacio las ecuaciones del campo de tétradas propias de la misma (expresión (2.1.7)). Dadas la velocidad y la posición inicial, la integración de las ecuaciones de movimiento (2.2.2), permite determinar la trayectoria que describe una carga cuya velocidad es de norma unitaria.

Las ecuaciones (2.1.7), y por lo tanto la fuerza de Lorentz (2.2.2), son consecuencia de la expresión (2.1.4*b*), cuya forma es satisfecha por todos los elementos del campo de tétradas. Debido a esto, la relación que (2.1.7) establece entre sus elementos es independiente del sistema que los describa. La ecuación (2.1.7) puede reescribirse como

$$\dot{u} = \left(\dot{\chi}_1\omega_{10} + \dot{\chi}_2\omega_{20} + \dot{\chi}_3\omega_{30} + \dot{\theta}_1\omega_{32} + \dot{\theta}_2\omega_{13} + \dot{\theta}_3\omega_{21}\right) u,$$

y adquiere, en otro marco de referencia, la forma (ver (2.1.1) y (2.1.2) con $\varepsilon_\alpha = e'_\alpha$, $\varpi = \omega'$)

$$\dot{u}' = \left(\dot{\chi}_1\omega'_{10} + \dot{\chi}_2\omega'_{20} + \dot{\chi}_3\omega'_{30} + \dot{\theta}_1\omega'_{32} + \dot{\theta}_2\omega'_{13} + \dot{\theta}_3\omega'_{21}\right) u'. \qquad (2.2.4)$$

Se verifica entonces que la ecuación (2.1.7), cuyos elementos están todos referidos a un sistema S llamado del observador, y cuya tétrada de referencia es la canónica, mantiene la misma forma para todos los sistemas que estén relacionados entre sí mediante una transformación de[31] $L_+^\uparrow$. Así, la fuerza de

[29]En el sistema que viaja con la partícula, sólo se miden efectos producidos por las funciones E_i, y por ello a la propiedad q se le llama carga *eléctrica*.

[30]Si bien la ecuación (2.1.7) se desprende de un análisis meramente geométrico, la fuerza de Lorentz adquiere (además del sentido matemático) un sentido físico una vez que se establece que la propiedad P es de la forma q/mc, resultado que es exclusivo de una teoría *física* en tanto que no puede deducirse de principios elementales, sino únicamente a partir del experimento.

[31]Para cualesquiera dos elementos del campo de tétradas se tiene

$$\varepsilon_{1\alpha} = L_1 e_\alpha, \quad \varepsilon_{2\alpha} = L_2 e_\alpha$$

entonces

$$\varepsilon_{2\alpha} = \left(L_2 L_1^{-1}\right) \varepsilon_{1\alpha} = L\varepsilon_{1\alpha}$$

donde $L = L_2 L_1^{-1}$ pertenece también a $L_+^\uparrow$. De aquí que todos los sistemas de referencia del campo se relacionan entre sí a través de una transformación del grupo restringido de Lorentz.

Lorentz constituye una ley física cuya validez se extiende a todos los sistemas de referencia inerciales. La ecuación (2.2.2), escrita en términos matriciales, puede expresarse como una relación entre las componentes de sus elementos en forma covariante de la siguiente manera

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu u^\nu, \tag{2.2.5}$$

donde se ha sustituido el vector velocidad u^μ por el de momento $p^\mu \equiv m u^\mu$.

2.3 El campo electromagnético

La relación (2.2.1) indica que las funciones $\dot{\chi}_i$ y $\dot{\theta}_i$, que manifiestan la rotación de una tétrada anclada en un punto, lo hacen por medio de los valores que E_i y B_i adquieren en el mismo. Dependiendo entonces de cuáles de dichas funciones no se anulan en un cierto x, se establecen los planos que intervienen en la rotación de la tétrada que tiene a x por origen, independientemente de la partícula que esté sujeta a la fuerza de Lorentz; asimismo, de su magnitud depende la velocidad con la que se realiza dicha rotación[32]. Desde esta perspectiva, las componentes del campo electromagnético producen rotaciones del espacio tangente anclado al punto donde están definidas y donde se encuentra una partícula cargada, determinando con ello una curva para la cual el vector ε_0 es siempre tangente y que constituye la trayectoria que será descrita por la carga.

Como lo muestra el par de ecuaciones (2.1.7) y (2.2.4), las funciones $\dot{\chi}_i$, $\dot{\theta}_i$, y por ende E_i, B_i, no se ven modificadas al pasar de un marco de referencia a otro; lo que cambia son las orientaciones que los planos tienen en cada uno de ellos. Así, la velocidad angular de rotación que se mide para uno de los planos propios de un sistema es la misma en cualquier otro (que sea inercial con respecto al primero) aunque referente ahora a un plano que se expresa como una combinación lineal de los anteriores. Si por ejemplo, un sistema S'

[32] El hecho de que las velocidades angulares instantáneas de rotación se relacionen con las componentes del campo electromagnético según (2.2.1), generaliza el resultado obtenido por Larmor en el sentido de que los efectos que un campo magnético en un cierto sistema produce sobre una carga, son equivalentes a los que se obtienen cuando se expresan las ecuaciones de movimiento en un sistema donde no hay campo, pero rota con respecto al anterior con una velocidad angular proporcional a la intensidad del campo, alrededor del eje del mismo[11].

se relaciona con el del observador S mediante una rotación en el plano ω_{10} por un ángulo φ, se tiene que (ver 1.3.8)

$$\begin{aligned}
\omega'_{10} &= \omega_{10}, & \omega'_{32} &= \omega_{32}, \\
\omega'_{20} &= \omega_{20}\cosh\varphi + \omega_{21}\operatorname{senh}\varphi, & \omega'_{13} &= \omega_{13}\cosh\varphi - \omega_{30}\operatorname{senh}\varphi, \\
\omega'_{30} &= \omega_{30}\cosh\varphi - \omega_{13}\operatorname{senh}\varphi, & \omega'_{21} &= \omega_{21}\cosh\varphi + \omega_{20}\operatorname{senh}\varphi.
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

de manera que el campo electromagnético (2.2.3) se expresa, en el sistema primado, como

$$\begin{aligned}
F' &= \\
&= E_1\omega_{10} + E_2\left(\omega_{20}\cosh\varphi + \omega_{21}\operatorname{senh}\varphi\right) + E_3\left(\omega_{30}\cosh\varphi - \omega_{13}\operatorname{senh}\varphi\right) + \\
&\quad + B_1\omega_{32} + B_2\left(\omega_{13}\cosh\varphi - \omega_{30}\operatorname{senh}\varphi\right) + B_3\left(\omega_{21}\cosh\varphi + \omega_{20}\operatorname{senh}\varphi\right).
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

El punto de anclaje de los planos en (2.3.1) coincide con el origen de S'; para conocer la F que mide un observador situado ahí es necesario reagrupar los elementos de (2.3.2) de tal forma que la expresión esté referida a las proyecciones sobre los planos que forma la tétrada canónica. De esta manera se encuentra

$$\begin{aligned}
E'_1 &= E_1, & B'_1 &= B_1, \\
E'_2 &= E_2\cosh\varphi + B_3\operatorname{senh}\varphi, & B'_2 &= B_2\cosh\varphi - E_3\operatorname{senh}\varphi, \\
E'_3 &= E_3\cosh\varphi - B_2\operatorname{senh}\varphi, & B'_3 &= B_3\cosh\varphi + E_2\operatorname{senh}\varphi,
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

de modo que son ahora las funciones E_i y B_i las que se ven alteradas de acuerdo con las mismas leyes de transformación que los planos asociados a ellas[33].

La observación de que un campo eléctrico en un sistema puede manifestarse en otro como uno magnético o viceversa, es reflejo de las expresiones (2.3.3) cuando se entienden por campos eléctrico y magnético a aquéllas componentes de F que están relacionadas con rotaciones de planos espacio-temporales y espaciales, respectivamente, cuando tales planos están referidos a la base canónica; es decir, cuando se define el carácter, ya sea eléctrico o magnético del campo a partir del plano $\omega_{\alpha\beta}$ del que la función sea coeficiente, esto es, a

[33] Las expresiones (2.3.3) establecen las reglas de transformación para los campos eléctrico y magnético entre dos sistemas que se alcanzan mediante una rotación hiperbólica generada por ω_{10}.

partir de la forma de (2.2.3). Con esta interpretación ni el campo eléctrico ni el magnético poseen un mismo significado en cada marco de referencia. Sin embargo, si se definen al campo eléctrico y magnético como aquéllas funciones que están relacionadas con rotaciones de planos hiperbólicos y espaciales respectivamente, pero referidos éstos a los que son *propios* de la tétrada que define al marco de referencia que los mide, entonces su significado geométrico ya no depende del sistema que los describe.

Esta última concepción del campo está estrechamente vinculada al significado físico de F como el de un operador de desplazamiento a lo largo del arco de una curva recorrida por una carga, que actúa sobre el espacio tangente al punto donde está situada (ver (2.2.2)); por ello es conveniente considerar al campo electromagnético en su forma conjunta como el objeto F, evitando así la ambigüedad a la que se presta su interpretación bajo el cambio de un sistema de referencia a otro, ocurrida cuando recae el carácter del campo en las componentes de F expresado en la base canónica.

2.4 Las cantidades electromagnéticas bajo las inversiones de Lorentz

Así como en la sección 1.2 se vio que las reglas de transformación bajo paridad de un cuadrivector dependen de la naturaleza de sus componentes, lo mismo ocurre con un tensor antisimétrico, cuyas componentes no tienen un cambio preestablecido bajo las inversiones, sino que éste depende de las funciones de las coordenadas x^μ que estén involucradas en su definición.

De las expresiones (2.2.1) y de la forma de P se tiene

$$mc\frac{d\chi_i}{ds} = qE_i, \qquad mc\frac{d\theta_i}{ds} = qB_i. \tag{2.4.1}$$

Las funciones χ_i, por ser ángulos de rotación en el plano $x^i x^0$, son funciones impares del argumento $\left(\frac{x^i}{x^0}\right)$ y lo mismo ocurre con las funciones θ_i en relación con el argumento[34] $\left(\frac{x^j}{x^k}\right)$, de manera que bajo una inversión espacial (I_S) se tiene,

$$d\chi_i \longrightarrow -d\chi_i, \qquad d\theta_i \longrightarrow d\theta_i. \tag{2.4.2}$$

[34] Un ángulo hiperbólico χ_i de rotación en el plano ω_{i0} se relaciona con la velocidad $\frac{dx^i}{dx^0}$ a través de la función *tanh*, y el ángulo espacial θ_i se expresa como una función *tan* del cociente $\frac{dx^j}{dx^k}$.

Como la masa es una cantidad escalar frente a las inversiones, y dado que la diferencial de arco $ds = cd\tau = c\gamma^{-1}dt$ no se ve afectada bajo una transformación de paridad, entonces frente a esta operación ocurre

$$qE_i \longrightarrow -qE_i = (\epsilon_{S,q}q)(\epsilon_{S,E}E_i), \qquad qB_i \longrightarrow qB_i = (\epsilon_{S,q}q)(\epsilon_{S,B}B_i),$$

donde $\epsilon_{S,q}$, $\epsilon_{S,E}$, $\epsilon_{S,B}$ adquieren los valores ±1 e indican la paridad de la carga eléctrica, y los campos E y B, respectivamente, bajo la transformación I_S. Debe cumplirse entonces que $\epsilon_{S,q}$ tiene signo inverso a $\epsilon_{S,E}$ e igual a $\epsilon_{S,B}$. En cualquiera de los dos casos, $\epsilon_{S,q} = \pm1$, la expresión (2.2.2) es invariante bajo una inversión espacial. Usando los resultados (1.2.2) y (1.2.3) con $\epsilon_{S,q} = 1$ se tiene, transformando a cada uno de los elementos de (2.2.2),

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} p^0 \\ -p^1 \\ -p^2 \\ -p^3 \end{pmatrix} = \frac{q}{c}\begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^0 \\ -u^1 \\ -u^2 \\ -u^3 \end{pmatrix}$$

de modo que la fuerza de Lorentz no se ve modificada si la propiedad electromagnética q es un escalar bajo transformaciones de paridad. Tampoco cambiaría la situación física si q fuese un pseudoescalar, pues con $\epsilon_{S,q} = -1$ se obtiene

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} p^0 \\ -p^1 \\ -p^2 \\ -p^3 \end{pmatrix} = \frac{-q}{c}\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^0 \\ -u^1 \\ -u^2 \\ -u^3 \end{pmatrix},$$

ecuaciones que son equivalentes a (2.2.2).

Bajo la inversión temporal (I_T) se cumplen las mismas reglas de transformación (2.4.2) para las diferenciales angulares; sin embargo, dt invierte su signo, y por ende lo hace la diferencial $d\tau$. De esta manera se encuentra

$$qE_i \longrightarrow qE_i = (\epsilon_{T,q}q)(\epsilon_{T,E}E_i), \qquad qB_i \longrightarrow -qB_i = (\epsilon_{T,q}q)(\epsilon_{T,B}B_i)$$

donde se tienen definiciones análogas a $\epsilon_{S,(q,E,B)}$ para $\epsilon_{T,(q,E,B)}$. En este caso debe satisfacerse $\epsilon_{T,q} = \epsilon_{T,E} = -\epsilon_{T,B}$.

A partir de las reglas de transformación (1.2.2) y (1.2.3) se tiene que bajo una inversión temporal con $\epsilon_{T,q} = 1$ la fuerza de Lorentz adquiere la forma

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} -p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \frac{q}{c}\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^0 \\ -u^1 \\ -u^2 \\ -u^3 \end{pmatrix},$$

expresión que es equivalente a (2.2.2), al igual que cuando se toma $\epsilon_{T,q} = -1$.

Se sigue del análisis anterior que no es posible determinar de la invariancia de (2.2.2) la paridad de la carga eléctrica, ni sus reglas de transformación bajo la inversión temporal. Unicamente se pueden establecer las siguientes condiciones entre los eigenvalores de estas operaciones sobre la carga eléctrica en relación con los de las componentes del campo electromagnético

$$\begin{aligned} \epsilon_{S,q} &= \epsilon_{S,B} = -\epsilon_{S,E} = \pm 1 \\ \epsilon_{T,q} &= \epsilon_{T,E} = -\epsilon_{T,B} = \pm 1. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Como se ha visto, en todos estos casos la forma de la expresión (2.2.2) no cambia bajo las operaciones I_S e I_T, de modo que la fuerza de Lorentz resulta invariante bajo las tres inversiones del grupo[35] L.

La rotación infinitesimal (2.1.3a) tiene asociada una transformación finita con parámetros χ_i y θ_i, cuya inversa es también una transformación del grupo restringido. Tomando los primeros términos de su desarrollo se obtiene una rotación infinitesimal R' que coincide con (2.1.3a) tras hacer las sustituciones $\triangle\chi_i \to -\triangle\chi_i$, $\triangle\theta_i \to -\triangle\theta_i$. A partir de este nuevo operador puede seguirse un procedimiento análogo al que se desarrolló en la sección 2.1 para obtener una expresión similar a (2.1.7) en la que se han hecho las sustituciones

$$\dot{\chi}_i \longrightarrow -\dot{\chi}_i, \qquad \dot{\theta}_i \to -\dot{\theta}_i$$

y donde el vector u no se ve alterado. Llamando V a esta transformación se tiene

$$qE_i \longrightarrow -qE_i = (\epsilon_{V,q} q)(\epsilon_{V,E} E_i), \qquad qB_i \longrightarrow -qB_i = (\epsilon_{V,q} q)(\epsilon_{V,B} B_i)$$

de manera que es necesario que se satisfaga $\epsilon_{V,q} = -\epsilon_{V,E} = -\epsilon_{V,B}$. Para $\epsilon_{V,q} = -1$ se tiene

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \frac{-q}{c}\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}, \tag{2.4.4}$$

con el mismo resultado en el caso $\epsilon_{V,q} = 1$.

[35] Se sigue de su invariancia frente a I_S e I_T que la fuerza de Lorentz es invariante frente a la inversión completa I_{ST}.

La correspondencia uno a uno entre las transformaciones del grupo restringido con sus inversas es equivalente a invertir la orientación de los seis planos canónicos. Esta última es arbitraria y por lo tanto la expresión (2.4.4) debe tener un significado físico análogo (o complementario) al de (2.2.2). Así, (2.4.4) puede entenderse como la fuerza de Lorentz para una carga $-q$, asociada a la expresión original (2.2.2). Se sigue que, así como para toda rotación del grupo existe una inversa, de la misma manera a cada carga q le corresponde otra de signo opuesto, y que frente a los *mismos* campos[36], las rotaciones de su tétrada propia se realizan en sentidos opuestos[37].

Lo anterior no significa que la fuerza de Lorentz no sea invariante frente a la conjugación de la carga (esto es, frente al intercambio $q \to -q$); la ecuación (2.4.4) no corresponde a la ecuación (2.2.2) transformada bajo dicha operación, sino que está solamente asociada a ella. Para que (2.4.4) coincida con la fuerza de Lorentz (2.2.2), es decir, para que ésta sea invariante bajo la conjugación de carga, se requiere hacer la sustitución $E_i \to -E_i$, y $B_i \to -B_i$, lo que es consistente con lo dicho anteriormente: para que la trayectoria descrita por una carga sea la misma que por otra de signo opuesto, deben invertirse los sentidos de rotación.

2.5 La correspondencia dual

El hecho de que los cuatro elementos e^{μ}_{α} que definen a los seis bivectores $\omega^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ (ver (1.3.6)) sean ortogonales entre sí, permite asociar a cada uno de los planos que éstos representan, otro que le sea ortogonal, estableciendo con ello una correspondencia aparejada entre planos tales que las líneas de uno son ortogonales a las del otro, y cuyo único punto de intersección es el vértice de la tétrada $\{e^{\mu}_{\alpha}\}$. Dichas relaciones de ortogonalidad son simétricas y están dadas por[38]

$$\omega_{10} \perp \omega_{32}, \tag{2.5.1}$$

[36] Es decir, con los mismos valores de las funciones E_i y B_i.

[37] Una transformación del grupo restringido es inversa sólo *con respecto a otra* y, dadas ambas, no tiene sentido determinar cuál es *la* transformación y cuál su inversa; equivalentemente una carga eléctrica no tiene un signo *per sé* sino que éste es igual u opuesto con respecto al de la otra.

[38] El sentido positivo de la tétrada corresponde a una relación de los planos ortogonales de tal manera que los índices $\alpha\beta\gamma\delta$ en

$$\omega_{\alpha\beta} \perp \omega_{\gamma\delta}$$

$$\omega_{20} \perp \omega_{13},$$
$$\omega_{30} \perp \omega_{21}.$$

La expresión (1.3.2) constituye una rotación uniparamétrica en el plano que contiene a e_α y e_β generada por el bivector $\omega^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$, cuyo sentido de giro está determinado por el orden en el que aparecen los índices $\alpha\beta$. La propiedad de antisimetría de los bivectores

$$\omega_{(\alpha\beta)}{}^{\mu\nu} = e^{\mu}_{(\alpha)}e^{\nu}_{(\beta)} - e^{\nu}_{(\alpha)}e^{\mu}_{(\beta)} = -\omega_{(\alpha\beta)}{}^{\nu\mu}$$

es equivalente, dado que las únicas parejas $\mu\nu$ diferentes de cero corresponden a aquéllas para las cuales $\mu\nu = \alpha\beta$ o $\beta\alpha$, a una antisimetría en los índices $\alpha\beta$, es decir, a una antisimetría en el orden en el que se acomoden los vectores e_α y e_β. La permutación $\alpha \longleftrightarrow \beta$, al invertir el signo de $\omega_{(\alpha\beta)}$, indica entonces la rotación en sentido opuesto. De esta manera, la superficie asociada a un bivector puede interpretarse como un plano orientado, donde la orientación queda establecida por el sentido de la rotación que produce.

Para los planos canónicos definidos en (1.3.6) se encuentra

$$\begin{aligned} \omega^{\mu}_{(i0)\nu}\, e^{\nu}_{i} &= e^{\mu}_{0}, \qquad & \omega^{\mu}_{(i0)\nu}\, e^{\nu}_{0} = e^{\mu}_{i}, \\ \omega^{\mu}_{(kj)\nu}\, e^{\nu}_{k} &= e^{\mu}_{j}, \qquad & \omega^{\mu}_{(kj)\nu}\, e^{\nu}_{j} = -e^{\mu}_{k}, \end{aligned}$$

de modo que el sentido de giro que definen los generadores de rotaciones espaciales es aquel en el que el vector que corresponde al primer índice rota hacia el segundo; en el caso de rotaciones hiperbólicas, el vector espacial rota hacia el temporal y viceversa, de manera que ambos son llevados (asintóticamente) hacia la superficie del cono de luz. En términos de transformaciones entre sistemas de referencia, esto último quiere decir que bajo una rotación generada por ω_{i0}, dado un parámetro φ, el sistema de laboratorio S (representado por e_0) queda referido a un sistema inercial S' que se desplaza con respecto a él a una velocidad $v_i = c\tanh\varphi$ a lo largo de la dirección positiva de e_i. La transformación inversa, o sea la rotación hiperbólica que permite describir a S' pero ahora desde la óptica del observador, se obtiene mediante el intercambio de ambos marcos de referencia. Para un observador situado en S' la dirección de desplazamiento de S coincide ahora con el sentido negativo de e_i; así y en el caso general de una rotación pura de la forma (1.3.11)

---

coincidan con una permutación par de 0123. Por esto, aunque ω_{10} es también ortogonal a ω_{23}, este orden no conserva la orientación de los elementos de la base.

es necesario, para encontrar la transformación inversa, efectuar sobre los generadores la transformación de paridad (1.3.5) bajo la cual se invierten las direcciones de los vectores espaciales[39] con lo que los planos adquieren la forma[40]

$$\omega' = -\widetilde{\omega},$$

es decir

$$(\omega_{i0})' = -\omega_{i0}, \qquad\qquad (\omega_{kj})' = \omega_{kj}. \tag{2.5.2}$$

La introducción del operador $g \in L_-^\uparrow$ dentro del contexto de rotaciones de $L_+^\uparrow$ extiende, hasta la familia de transformaciones ortócronas $(L^\uparrow)$, a los elementos necesarios para poder establecer las transformaciones que relacionan *mutuamente* a dos sistemas de referencia que se apartan entre sí con una velocidad dada[41].

Una vez establecidas las relaciones (2.5.1), las expresiones (2.5.2) permiten asociar a cada uno de los seis planos $\omega_{\alpha\beta}$ otro, denotado por $\omega^*_{\alpha\beta}$, que resulta de efectuar la inversión espacial sobre el plano que le es ortogonal. Dichas correspondencias están dadas por

$$\begin{aligned}
\omega_{10} &\rightarrow \omega^*_{10} = \omega_{32}, & \omega_{32} &\rightarrow \omega^*_{32} = -\omega_{10},\\
\omega_{20} &\rightarrow \omega^*_{20} = \omega_{13}, & \omega_{13} &\rightarrow \omega^*_{13} = -\omega_{20},\\
\omega_{30} &\rightarrow \omega^*_{30} = \omega_{21}, & \omega_{21} &\rightarrow \omega^*_{21} = -\omega_{30},
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

donde ω^* se llama el *dual* de ω. Así, en cada punto donde estén definidos los seis planos $\omega_{\alpha\beta}$ pueden definirse sus correspondientes duales, que forman ahí mismo los planos de un espacio tangente en el que los vectores espaciales están invertidos, y que son perpendiculares a los planos originales.

Los seis planos duales satisfacen las siguientes reglas de conmutación (con $\omega^*_{i0} = T^*_i$, y $\omega^*_{kj} = T^*_i$)

$$\begin{aligned}
[T^*_i, T^*_j] &= -\epsilon_{ijk} T^*_k\\
[S^*_i, S^*_j] &= \epsilon_{ijk} T^*_k\\
[T^*_i, S^*_j] &= -\epsilon_{ijk} S^*_k.
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

[39] Como se vio en la sección 1.2 el operador g efectúa la inversión espacial.

[40] La rotación inversa se puede obtener también manteniendo fijos los generadores y haciendo sobre el espacio de parámetros la transformación que corresponde a la inversión espacial, es decir, haciendo la sustitución $\varphi \rightarrow -\varphi$, que resulta en $v \rightarrow -v$.

[41] Los dos sistemas siempre pueden alcanzarse con la variación continua de los parámetros, pues las transformaciones ortócronas forman un subgrupo del grupo de Lorentz.

La comparación de éstas con (1.3.13), indica que los planos T^* generan rotaciones espaciales y los planos S^*, hiperbólicas. Dado que un conjunto de seis operadores $\{A_k, k = 1, ...6\}$ que sea solución del álgebra del grupo $L_+^\uparrow$ establece una representación del mismo[25], se tiene que si a cada rotación finita Λ de la forma (1.3.10) se le asocia la transformación

$$D(\Lambda) = \exp(\eta_1\omega_{10}^* + \eta_2\omega_{20}^* + \eta_3\omega_{30}^* + \phi_1\omega_{32}^* + \phi_2\omega_{13}^* + \phi_3\omega_{21}^*), \quad (2.5.5)$$

generada por los planos duales, entonces $D(\Lambda)$ forma un representación del grupo restringido de Lorentz[42], la cual, sin embargo, es inequivalente[43] con respecto a la formada por los operadores Λ (que en sí mismos forman evidentemente una representación del grupo restringido). Esta conclusión se deriva de la inexistencia de una matriz M que satisfaga[44]

$$D(\Lambda) = M\Lambda M^{-1}$$

y por ende no es posible hablar de vectores duales de la forma $x^* = Mx$. A pesar de esto, siguiendo la idea a partir de la cual se construyeron los planos duales, pueden definirse las imágenes de los vectores del espacio de Minkowski bajo la correspondencia $(*)$. Las relaciones biunívocas de ortogonalidad (2.5.1) ocurren como consecuencia de que para un plano canónico dado sólo existe uno que le es ortogonal y que conserva el sentido de la

[42]A cada transformación finita Λ se le asocia una rotación finita en el dual sólo mediante la correspondencia entre sus respectivos generadores, pero no a través del dual del operador; es decir, (2.5.5) no debe confundirse con

$$[\exp(\eta_1\omega_{10} + \eta_2\omega_{20} + \eta_3\omega_{30} + \phi_1\omega_{32} + \phi_2\omega_{13} + \phi_3\omega_{21})]^*$$

pues la representación está completamente determinada sólo a partir de sus generadores.

[43]*c.f.* apéndice C.

[44]La prueba, que se realiza por reducción al absurdo, consiste en suponer que dicha matriz existe. En ese caso debe cumplirse para cada generador

$$D(\omega) = \omega^* = M\omega M^{-1}$$

y por ende debe satisfacerse, por ejemplo

$$\begin{aligned}[T_1, T_2] &= T_1T_2 - T_2T_1 = S_1^*S_2^* - S_2^*S_1^* = MS_1S_2M^{-1} - MS_2S_1M^{-1} = \\ &= M[S_1, S_2]M^{-1} = -MS_3M^{-1} = T_3,\end{aligned}$$

resultado que contradice a las relaciones (1.3.13) y (2.5.4) y del que se concluye que no hay una transformación de similaridad que relacione a Λ con $D(\Lambda)$.

tétrada (en el entendido de que las superficies están orientadas); este no es el caso para los vectores que conforman la base, pues cada uno de ellos es ortogonal a otros tres. Sin embargo dicha tríada especifica un volumen, también orientado, cuyas líneas están todas en dirección perpendicular a la del vector que no contiene. Asignando entonces a cada uno de los vectores e_α el volumen que le es ajeno, queda establecida una relación uno a uno entre cada elemento de la base y un espacio tridimensional que le es ortogonal. Así, las expresiones correspondientes a (2.5.1) para los vectores son[45]

$$\begin{aligned} e_0 &\perp V(e_1e_2e_3), \quad e_1 \perp V(e_2e_0e_3), \\ e_2 &\perp V(e_1e_3e_0), \quad e_3 \perp V(e_0e_2e_1), \end{aligned}$$

donde $V(e_\alpha e_\beta e_\gamma)$ es el volumen formado a partir de los vectores e_α, e_β, y e_γ tomados en el orden en el que aparecen.

Una vez dadas estas relaciones, y para finalmente determinar el dual de un vector, es necesario realizar la inversión espacial sobre los volúmenes. Se obtienen entonces los siguientes resultados

$$\begin{aligned} e_0^* &= V(-e_1e_2e_3), \quad e_1^* = V(e_2e_0e_3), \\ e_2^* &= V(e_1e_3e_0), \quad e_3^* = V(e_0e_2e_1). \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Debido a que la correspondencia $(*)$ no conserva el carácter lineal de los vectores, sino que constituye la relación (2.5.6) entre éstos y los espacios tridimensionales, es claro que los planos ω^* no pueden expresarse como un producto antisimétrico de la forma (1.3.6) en el que está implícita la noción geométrica de vector como un objeto lineal que determina, junto con otro de su misma clase, un plano. En el espacio dual un vector se identifica con un volumen, y por lo tanto el plano $\omega^*_{\alpha\beta}$ debe entenderse como la superficie común, o la intersección, de los volúmenes que corresponden a e^*_α y e^*_β. En esta forma y a partir de (2.5.6) se encuentran expresiones para los planos duales ω^* análogas a (2.5.3)[46].

La noción de dualidad puede extenderse a todos los objetos n-dimensionales ($n = 0$, 1, 2, 3, y 4) que se construyen en el espacio de Minkowski,

[45] Estas relaciones de ortogonalidad guardan la misma orientación que en la nota 38.

[46] Dado que el volumen formado por tres vectores es independiente del orden (cíclico) en el que éstos se tomen, los duales de e_0 y e_1 pueden escribirse como

$$e_0^* = V(e_3e_2e_1), \qquad e_1^* = V(e_3e_2e_0).$$

El plano de intersección entre ambos volúmenes es claramente el que contiene a e_3 y e_2;

estableciendo así una serie de relaciones entre los diferentes objetos geométricos del espacio-tiempo, de tal manera que entre ellos subyace una relación de ortogonalidad. Bajo la operación $(*)$ los bivectores conservan su naturaleza al estar en correspondencia con planos (planos duales); los puntos que conforman el espacio de Minkowski, o vectores, quedan representados por una combinación lineal de volúmenes (puntos del espacio dual), y de manera inversa los espacios tridimensionales se identifican con líneas o vectores (volúmenes duales). Se ve así que mientras en un espacio aumenta la dimensionalidad de los elementos, en el otro decrece, de forma tal que la suma de las dimensiones de los objetos correspondidos es siempre cuatro. Esto último da lugar a establecer la relación de ortogonalidad restante entre una cantidad escalar y un tetravolumen (escalares duales), en particular a la unidad escalar 1 corresponde entonces el tetravolumen unitario determinado por lo vectores e_0, e_1, e_2 y e_3.

La matriz de rotación infinitesimal (2.1.3a) tiene una expresión asociada en el espacio dual y esto permite que el operador de la tasa de cambio que aparece en (2.1.7) la tenga también[47]. La forma dual para el campo electromagnético F está dada por

$$F^{*} = -B_1\omega_{10} - B_2\omega_{20} - B_3\omega_{30} + E_1\omega_{32} + E_2\omega_{13} + E_3\omega_{21}. \tag{2.5.7}$$

La sustitución $\omega \rightarrow \omega^{*}$ en (2.2.3) para obtener la correspondencia (2.5.7) es equivalente a hacer las sustituciones $E_i \rightarrow -B_i$, y $B_i \rightarrow E_i$; sin embargo esta no es una transformación propiamente hecha en el espacio de funciones; E_i y B_i se intercambian sólo por tener un sentido paramétrico de rotaciones, es decir, por ser las componentes del objeto antisimétrico F.

2.6 Las ecuaciones de Maxwell

Cuando una carga está en presencia de un campo electromagnético externo, la fuerza de Lorentz permite conocer la tasa de cambio de sus tétradas

el plano dual orientado ω^{*}_{10} se obtiene de proyectar e^{*}_{1} sobre e_0, de modo que

$$\omega^{*}_{10} = -\omega^{*}_{01} = \omega_{32},$$

dando así la misma orientación que (2.5.3).

[47]Por lo que se ha visto, sólo los objetos antisimétricos, o aquéllos asociados con un plano, tienen una expresión dual que no altera su naturaleza antisimétrica.

propias siempre que se conozcan previamente las funciones E_i y B_i en cada punto del espacio. El problema inverso de determinar las componentes del campo electromagnético a partir de su fuente, queda resuelto estableciendo ciertas *ecuaciones del campo*. Así como la fuerza de Lorentz consiste en un conjunto de ecuaciones diferenciales alrededor de un punto sobre una curva, las ecuaciones del campo deben ser ecuaciones diferenciales que describen cómo la fuente define sus componentes en la vecindad próxima de un punto cualquiera en el espacio. De acuerdo con esto, la fuerza de Lorentz debe complementarse con un conjunto de ecuaciones diferenciales que involucren a las seis componentes de F y que sean suficientes para determinarlas a partir de su fuente generadora.

Como se muestra en (2.3.3), las expresiones funcionales de E_i y B_i cambian entre los distintos observadores inerciales, por lo que las ecuaciones diferenciales que involucran a estas funciones difieren generalmente de sistema a sistema. Entre éstos, como se ha visto, la fuerza de Lorentz es invariante en su forma; así, y en aras de que todos los marcos de referencia coincidan en las leyes que describen a los fenómenos electromagnéticos, es necesario que las ecuaciones del campo se satisfagan, o tengan la misma estructura, desde la óptica de cualquier observador.

Cuando en un punto x están definidas cuatro funciones $z^\mu = z^\mu(x^\nu)$ que pueden identificarse con las proyecciones de un cuadrivector a lo largo de cada uno de los elementos de la base canónica, la expresión

$$\frac{\partial}{\partial x^0} z^0 + \frac{\partial}{\partial x^1} z^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} z^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} z^3 \tag{2.6.1}$$

da como resultado un invariante[48]. Los operadores que aparecen en ella

$$\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3},$$

son los generadores de desplazamiento a lo largo de los ejes e_0^μ, e_1^μ, e_2^μ, y e_3^μ respectivamente[49]. La ecuación (2.6.1) indica que la suma de los incrementos diferenciales a lo largo de las proyecciones paralelas a la dirección de desplazamiento del vector z, es una cantidad escalar. De aquí que las expresiones diferenciales invariantes asociadas a los vectores se obtengan a partir del operador diferencial[3] $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$.

[48] Esto se sigue de que el operador $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$ es un cuadrivector covariante y se transforma de manera inversa a como lo hace z^μ (*c.f.* sección 1.1).

[49] *c.f.* nota 19.

En forma análoga, los invariantes diferenciales asociados a las rotaciones del espacio se obtienen mediante los seis generadores K_i, J_i vinculados a una rotación de alguno de los seis planos canónicos (ver sección 1.4). A partir de dichos operadores se puede encontrar una expresión diferencial invariante al hacerlos operar sobre seis funciones que se identifiquen con las proyecciones de un plano sobre cada uno de los planos canónicos, es decir, con las componentes de un tensor antisimétrico. De acuerdo con esto, y en particular para las componentes de F, la expresión

$$K_1E_1 + K_2E_2 + K_3E_3 + J_1B_1 + J_2B_2 + J_3B_3 \tag{2.6.2a}$$

es un invariante[50]. Así, para dos sistemas inerciales entre sí S y S' se cumple (suma sobre los índices $i = 1, 2, 3$)

$$K_iE_i + J_iB_i = K_i'E_i' + J_i'B_i'.$$

Desarrollando se tiene

$$\begin{aligned} K_iE_i + J_iB_i &= -x\frac{\partial E_1}{c\partial t} - ct\frac{\partial E_1}{\partial x} - y\frac{\partial E_2}{c\partial t} - ct\frac{\partial E_2}{\partial y} - z\frac{\partial E_3}{c\partial t} - ct\frac{\partial E_3}{\partial z} - \\ &\quad -z\frac{\partial B_1}{\partial y} + y\frac{\partial B_1}{\partial z} - x\frac{\partial B_2}{\partial z} + z\frac{\partial B_2}{\partial x} - y\frac{\partial B_3}{\partial x} + x\frac{\partial B_3}{\partial y}, \end{aligned}$$

lo que puede reescribirse como

$$\begin{aligned} K_iE_i + J_iB_i &= -ct\left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}\right) - x\left(\frac{\partial E_1}{c\partial t} + \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial y}\right) - \\ &\quad -y\left(\frac{\partial E_2}{c\partial t} + \frac{\partial B_3}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial z}\right) - z\left(\frac{\partial E_3}{c\partial t} + \frac{\partial B_1}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

es decir

$$K_iE_i + J_iB_i = -x^\mu j_\mu = -x_\mu j^\mu \tag{2.6.2b}$$

con

$$\begin{aligned} j^0 &= \partial_x E_1 + \partial_y E_2 + \partial_z E_3, \qquad (2.6.3a) \\ j^1 &= -\partial_0 E_1 + \partial_y B_3 - \partial_z B_2, \\ j^2 &= -\partial_0 E_2 + \partial_z B_1 - \partial_x B_3, \\ j^3 &= -\partial_0 E_3 + \partial_x B_2 - \partial_y B_1. \end{aligned}$$

[50] La prueba se sigue del hecho de que los operadores K_i, J_i están asociados a rotaciones infinitesimales del espacio y se transforman de manera inversa a como lo hacen sus correspondientes generadores ω (*c.f.* ecuación (1.4.1*b*)), mientras que las reglas de transformación de los campos son las mismas que las de los bivectores.

Debido a que (2.6.2b) es un invariante, las cuatro funciones j_μ deben transformarse bajo rotaciones de forma inversa a como lo hacen las x^μ, es decir, se transforman como las componentes de un cuadrivector covariante. Por lo tanto, los valores j^μ forman un cuadrivector contravariante, el cual satisface la ecuación

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{2.6.3b}$$

como sigue de (2.6.3a).

Al hacer la sustitución $E_i \to -E_i$, y $B_i \to -B_i$ en (2.6.3a) se encuentra que j^μ invierte su signo; dado que esta transformación produce una inversión sobre las cargas eléctricas (ver sección 2.4), entonces, como es de suponer, la fuente de los campos que producen una fuerza sobre una carga eléctrica es proporcional a una carga de la misma clase. La expresión (2.6.3b) se interpreta así como la ley de conservación de la carga eléctrica[9].

Para investigar más a fondo la naturaleza del cuadrivector j^μ se pueden aplicar sobre sus componentes los operadores de paridad e inversión temporal. Como se ve de (2.4.3) los cambios de E_i y B_i bajo estas transformaciones dependen de cómo se elija la paridad de la carga en los casos correspondientes. A partir de la misma tabla se tienen las siguientes posibles combinaciones

si q es un escalar bajo I_S e I_T,

$$\begin{aligned} I_S &: j^0 \to j^0, \quad j^i \to -j^i, \\ I_T &: j^0 \to j^0, \quad j^i \to -j^i; \end{aligned}$$

si q se invierte bajo I_S e I_T,

$$\begin{aligned} I_S &: j^0 \to -j^0, \quad j^i \to j^i, \\ I_T &: j^0 \to -j^0, \quad j^i \to j^i; \end{aligned}$$

si q es un escalar bajo I_S y se invierte bajo I_T,

$$\begin{aligned} I_S &: j^0 \to j^0, \quad j^i \to -j^i, \\ I_T &: j^0 \to -j^0, \quad j^i \to j^i; \end{aligned}$$

si q se invierte bajo I_S y es un escalar bajo I_T,

$$\begin{aligned} I_S &: j^0 \to -j^0, \quad j^i \to j^i, \\ I_T &: j^0 \to j^0, \quad j^i \to -j^i. \end{aligned}$$

En el escenario más general, las cargas que generan los campos están desplazándose en el espacio-tiempo; la información acerca de este movimiento debe estar contenida en la fuente j^μ, lo que conduce a que éste es un vector de velocidad[51]. De los anteriores, el único caso consistente con que j^μ sea un cuadrivector que se transforma como una velocidad es el primero, es decir, cuando la carga eléctrica es un escalar frente a ambas inversiones[52].

Como se vio en la sección 2.5, por cada plano del espacio, hay asociado otro que corresponde a su dual y que representa también un generador de rotaciones. Para obtener el dual de F se transforman los planos o, de manera equivalente, las funciones E_i, B_i. Si se hace esto último, es decir si $E_i \to -B_i$, y $B_i \to E_i$, los planos se mantienen constantes y por lo tanto también los operadores K_i, J_i. De esta manera (2.6.2a) tiene una expresión correspondiente en el espacio dual dada por

$$-K_1B_1 - K_2B_2 - K_3B_3 + J_1E_1 + J_2E_2 + J_3E_3, \tag{2.6.4}$$

la cual es también una expresión diferencial invariante. Desarrollándola se tiene

$$\begin{aligned} -K_iB_i + J_iE_i &= ct\left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\right) + x\left(\frac{\partial B_1}{c\partial t} - \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{\partial E_3}{\partial y}\right) + \\ &\quad + y\left(\frac{\partial B_2}{c\partial t} - \frac{\partial E_3}{\partial x} + \frac{\partial E_1}{\partial z}\right) + z\left(\frac{\partial B_3}{c\partial t} - \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial E_2}{\partial x}\right) \\ &= x^\mu r_\mu = x_\mu r^\mu, \end{aligned}$$

donde las componentes del cuadrivector r^μ están dadas por

$$\begin{aligned} r^0 &= \partial_x B_1 + \partial_y B_2 + \partial_z B_3, \\ r^1 &= -\partial_0 B_1 + \partial_z E_2 - \partial_y E_3, \\ r^2 &= -\partial_0 B_2 + \partial_x E_3 - \partial_z E_1, \\ r^3 &= -\partial_0 B_3 + \partial_y E_1 - \partial_x E_2. \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

[51] Puede inferirse también que, dado que los campos afectan a las cargas a través de su velocidad, las cargas afectan a los campos también de acuerdo con un vector de la misma clase[18]. Este argumento de simetría puede verificarse, en última instancia, directamente del experimento.

[52] El planteamiento da por supuesta la invariancia de (2.6.3a) bajo las inversiones, lo cual es de esperar puesto que la fuerza de Lorentz mantiene su forma frente a dichas transformaciones.

Siguiendo el paralelismo con las ecuaciones (2.6.3a) es válido suponer que el cuadrivector r^μ es proporcional a una carga magnética g. Las relaciones (2.4.3) condicionan sólo la paridad de la carga eléctrica q; si se supone que una carga magnética g se transforma bajo I_S e I_T guardando la misma relación de paridad con el campo magnético que la que q guarda con el eléctrico, entonces se puede construir una tabla como la (2.4.3) dada por

$$\begin{aligned} \epsilon_{S,g} &= \epsilon_{S,E} = -\epsilon_{S,B} = \pm 1 \\ \epsilon_{T,g} &= \epsilon_{T,B} = -\epsilon_{T,E} = \pm 1. \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

La elección $\epsilon_{S,q} = \epsilon_{T,q} = 1$, necesaria para que la corriente se transforme como un vector velocidad, implica que $\epsilon_{S,B} = -\epsilon_{S,E} = 1$ y $\epsilon_{T,E} = -\epsilon_{T,B} = 1$; de modo que en aras de la consistencia de la transformación de los campos[53] y según de (2.6.6), debe cumplirse $\epsilon_{S,g} = \epsilon_{T,g} = -1$. De esta manera g es un pseudoescalar que invierte su signo frente a inversiones temporales y el vector r^μ es un pseudovector, invariante frente a I_T. Las ecuaciones homogéneas

$$\begin{aligned} \partial_x B_1 + \partial_y B_2 + \partial_z B_3 &= 0, \\ \partial_0 B_1 + \partial_y E_3 - \partial_z E_2 &= 0, \\ \partial_0 B_2 + \partial_z E_1 - \partial_x E_3 &= 0, \\ \partial_0 B_3 + \partial_x E_2 - \partial_y E_1 &= 0, \end{aligned} \tag{2.6.7}$$

son entonces las ecuaciones diferenciales *vectoriales* invariantes del espacio dual[54].

Las expresiones (2.6.3a) y (2.6.7) constituyen las *ecuaciones de Maxwell*, cuya forma es, de manera natural por como fueron obtenidas, la misma para cualesquiera dos sistemas inerciales[55]. En forma covariante se escriben en

[53] La inconsistencia en este sentido conduciría a que si coexisten ambos tipos de carga, la transformación de los campos no estaría bien definida.

[54] Las ecuaciones que naturalmente surgen de la expresión diferencial invariante asociada a las componentes de F^*, están dadas por (2.6.5). Con los elementos hasta aquí expuestos, sólo puede deducirse el comportamiento del cuadrivector r^μ frente a las inversiones del grupo de Lorentz, pero no se tienen argumentos suficientes para concluir que r^μ es idénticamente cero. Las ecuaciones homogéneas (2.6.7) se toman aquí como un resultado exclusivamente empírico, cuya naturaleza geométrica se analizará con más detalle en el capítulo 4.

[55] Así como solo existen dos invariantes asociados al campo electromagnético[18]

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \propto \sum_i \left(E_i^2 - B_i^2\right),$$

términos del tensor $F^{\mu\nu}$ y su dual (2.5.7) de la siguiente manera

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \tag{2.6.8a}$$

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0. \tag{2.6.8b}$$

2.6.1 El potencial electromagnético

Las ecuaciones (2.6.7) corresponden a cada una de las cuatro expresiones contenidas en

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.6.1.1}$$

cuando el arreglo de los índices $\alpha\beta\gamma$ toma los valores 123, 032, 013 y 021 respectivamente. La condición (2.6.1.1) es además suficiente y necesaria para que el campo electromagnético pueda escribirse como[22]

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{2.6.1.2}$$

con $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = A^\mu(x^\nu)$ un cuadrivector, llamado *potencial electromagnético.* A partir de (2.6.1.2) las componentes E_i, B_i adquieren la forma explícita

$$\begin{aligned}
E_1 &= -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0}, \quad B_1 = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}, \\
E_2 &= -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0}, \quad B_2 = \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}, \\
E_3 &= -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0}, \quad B_3 = \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}.
\end{aligned} \tag{2.6.1.3}$$

Las ecuaciones homogéneas de Maxwell (2.6.7) están automáticamente satisfechas por la equivalencia entre (2.6.1.1) y (2.6.1.2); las inhomogéneas (2.6.3a) quedan ahora expresadas en función del potencial como

$$j^\mu = \Box A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu), \tag{2.6.1.4}$$

---

y la expresión que involucra al dual,

$$F^{\mu\nu} F^*_{\mu\nu} \propto \sum_i E_i B_i,$$

se cumple que (2.6.2a) y (2.6.4) son las únicas expresiones diferenciales invariantes para las componentes del campo electromagnético.

donde $\Box$ es el operador diferencial invariante

$$\Box = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \partial_\nu \partial^\nu.$$

Con la norma de Lorenz[56] $\partial_\nu A^\nu = 0$, las ecuaciones (2.6.1.4) se escriben como

$$j^\mu = \Box A^\mu. \tag{2.6.1.5}$$

De esta manera la fuente j^μ determina completamente al campo electromagnético, pues una vez conocidas sus cuatro componentes, las soluciones de la ecuación (2.6.1.5) permiten, a través de (2.6.1.3), establecer las seis funciones E_i, B_i en todo punto. Así, vía la corriente y a partir de la soluciones de (2.6.1.5), queda definido en cada punto del espacio un vector tangente A^μ, cuyo rotacional proporciona la información sobre la tasa de cambio de las tétradas propias de una carga, independientemente de las características de la partícula. Esto permite interpretar al vector j^μ como el objeto que produce rotaciones en el espacio tangente de Minkowski anclado al punto donde se encuentra una carga del mismo tipo que la que produce la corriente.

[56]Todos los vectores de la forma

$$A^{\mu\prime} = A^\mu - \partial^\mu \phi$$

satisfacen igualmente las ecuaciones (2.7.3). De esta manera, existe una cantidad infinita de potenciales que dan origen al mismo campo electromagnético, y todos ellos difieren entre sí por un gradiente. Esta indeterminación permite elegir, de entre todos los potenciales, aquél que satisfaga la condición de Lorenz[9]

$$\partial_\nu A^\nu = 0$$

(o cualquier otra condición apropiada).

Capítulo 3

El álgebra del espacio-tiempo

3.1 Representación de los vectores del espacio-tiempo a la Dirac

Un vector en el espacio-tiempo es una entidad geométrica independiente del sistema de referencia que se use para identificarlo; sus componentes o proyecciones paralelas a lo largo de cada uno de los elementos de la base, dependen de la elección (arbitraria) de estos últimos. Si se toman como base del espacio de Minkowski los vectores de la tétrada canónica e_μ definida como sigue[57]

$$e_0 = (1,0,0,0)\,, \quad e_1 = (0,1,0,0)\,, \quad e_2 = (0,0,1,0)\,, \quad e_3 = (0,0,0,1)\,,$$

entonces un vector cualquiera x puede expresarse en la forma

$$x = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = x^\mu e_\mu, \tag{3.1.1a}$$

donde las funciones de coordenadas reales x^μ son las componentes del vector x respecto de la base $\{e_\mu\}$ y se conocen como componentes *contravariantes*.

A partir de la base $\{e_\mu\}$ puede construirse otra, $\{e^\star_\mu\}$, formada por los cuatro vectores *recíprocos* $e^\star_\mu \equiv e^\mu$ definidos como aquéllos que cumplen[16]

$$e_\mu \cdot e^\star_\nu = e_\mu \cdot e^\nu = \delta_\mu{}^\nu. \tag{3.1.2}$$

[57] La exposición de aquí en adelante se centra en las propiedades geométricas de los objetos del espacio de Minkowski, por lo que se recurre a una notación más apropiada para estos fines en la que se elimina la notación tensorial para referirse a vectores, dejándola exclusivamente para sus componentes, como se explicará más adelante. En el caso de la notación e_μ para los vectores de la base, debe entenderse que el índice tiene solo fines distintivos.

En términos del nuevo marco de referencia, el vector x se escribe de la siguiente manera

$$x = x_0 e^0 + x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3 = x_\mu e^\mu, \qquad (3.1.1b)$$

y las componentes x_μ (paralelas a los elementos de la base recíproca) constituyen sus componentes *covariantes*[58].

Las expresiones (3.1.1a) y (3.1.1b) se refieren al mismo vector, de modo que el producto escalar entre dos de ellos puede escribirse indistintamente como

$$x \cdot y = (x^\mu e_\mu) \cdot (y^\nu e_\nu) = e_\mu \cdot e_\nu \, x^\mu y^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \qquad (3.1.3)$$

o bien

$$x \cdot y = (x_\mu e^\mu) \cdot (y_\nu e^\nu) = e^\mu \cdot e^\nu \, x_\mu y_\nu \equiv g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu$$

donde $g_{\mu\nu}$ ($g^{\mu\nu}$) es el tensor métrico del espacio subtendido por la base $\{e_\mu\}$ ($\{e^\mu\}$). De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= e_\mu \cdot e_\nu = e_\nu \cdot e_\mu, \\ g^{\mu\nu} &= e^\mu \cdot e^\nu = e^\nu \cdot e^\mu, \end{aligned} \qquad (3.1.4)$$

es decir, las componentes del tensor métrico respecto de la base $\{e_\mu\}$ o $\{e^\mu\}$, están determinadas por los productos escalares entre los elementos de dichas bases.

La idea de expresar la métrica del espacio a partir de los productos internos $(\cdot)$ entre los elementos de una de sus bases, puede generalizarse a cualquier

---

[58] Anteriormente se ha usado la expresión

$$x^\mu = x^0 e_0^\mu + x^1 e_1^\mu + x^2 e_2^\mu + x^3 e_3^\mu$$

para denotar lo que se ha llamado un *vector contravariante* y

$$x_\mu = x^0 e_{0\mu} + x^1 e_{1\mu} + x^2 e_{2\mu} + x^3 e_{3\mu}$$

para un *vector covariante*. Geométricamente no existe, como ya se dijo, esta distinción entre vectores, sino entre sus componentes de acuerdo con la base que se use para determinarlos. En los contextos en los que se ha recurrido a la primera interpretación, debe entenderse que el álgebra desarrollada es tensorial y las ecuaciones resultantes son relaciones entre componentes vectoriales. En la mayor parte de esta sección se desarrolla un álgebra en términos geométricos y se entenderá por x^μ un escalar y no un vector, salvo en los casos en los que el índice sea distintivo de algún elemento, como se mencionó en la nota anterior. Sin embargo, durante el desarrollo del trabajo se emplean ambas descripciones y la lectura apropiada debe ser clara a partir del contexto.

espacio vectorial[59], siempre y cuando se haya definido previamente en él un producto simétrico entre sus vectores que sea un escalar dentro del espacio en cuestión[60]. En este caso, el conjunto de n elementos $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ que forma una base del espacio vectorial n-dimensional determina las $n \times n$ componentes del tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ del espacio que genera a partir de los productos escalares entre las parejas E_μ y E_ν $(\mu, v \leq n)$ es decir

$$E_\mu \cdot E_\nu \equiv \eta_{\mu\nu}. \tag{3.1.5}$$

El producto interno, por ser simétrico entre vectores, puede definirse como

$$E_\mu \cdot E_\nu \equiv \frac{1}{2}(E_\mu E_\nu + E_\nu E_\mu) = E_\nu \cdot E_\mu$$

donde $E_\mu E_\nu$ es el *producto geométrico*[6,7] entre los elementos E_μ y E_ν. Complementariamente, un producto antisimétrico entre los vectores puede establecerse a partir del producto exterior $(\wedge)$ de la siguiente manera

$$E_\mu \wedge E_\nu \equiv \frac{1}{2}(E_\mu E_\nu - E_\nu E_\mu) = -(E_\nu \wedge E_\mu).$$

Con ello el producto geométrico queda definido como aquél que consta de dos partes, una simétrica y otra antisimétrica en la forma

$$E_\mu E_\nu = E_\mu \cdot E_\nu + E_\mu \wedge E_\nu. \tag{3.1.6}$$

Si dos vectores cualesquiera A y B están generados a partir de la base $\{E_\mu\}$, se tiene que el producto geométrico entre ellos es análogo a (3.1.6)

$$AB = \frac{1}{2}(AB + BA) + \frac{1}{2}(AB - BA) = A \cdot B + A \wedge B. \tag{3.1.7}$$

[59] Un conjunto de elementos $V = \{A_1, A_2, ...\}$ es un espacio vectorial sobre un campo K si, dados $A_1, A_2, A_3 \in V$, y $\alpha, \beta \in K$ se cumple
a) $(A_1 + A_2) = (A_2 + A_1) \in V$
b) $(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$
c) Existe $0 \in V$ tal que $A + 0 = A$, para toda $A \in V$
d) Para toda $A \in V$, existe $(-A) \in V$ tal que $A + (-A) = 0$
e) $1A = A$
f) $\alpha A \in V$
g) $\alpha(\beta A) = \alpha\beta(A)$
h) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
i) $\alpha(A_1 + A_2) = \alpha A_1 + \alpha A_2$.

[60] Como, por ejemplo, la contracción tensorial $x^\mu y_\mu$.

Las propiedades geométricas de un espacio están completamente determinadas a partir de su métrica; por ello, si existen dos bases en dos espacios vectoriales cuyos elementos satisfacen, cada uno bajo su propia definición del producto $(\cdot)$, la misma ecuación (3.1.5), es posible establecer una correspondencia entre ellas de modo que los espacios que generan sean geométricamente equivalentes. Entonces, si se eligen cuatro vectores[61] γ_μ linealmente independientes que satisfagan

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu\right) = g_{\mu\nu}, \tag{3.1.8a}$$

es decir

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \left(e_\mu \cdot e_\nu\right) I, \tag{3.1.8b}$$

se tiene que el espacio generado por la base $\{\gamma_\mu\}$ puede representar a aquél cuya base es $\{e_\mu\}$ (*c.f.* (3.1.4)) y por lo tanto se puede establecer la correspondencia directa entre los elementos[62]

$$e_0 \rightarrow \gamma_0\,, \qquad e_i \rightarrow \gamma_i, \tag{3.1.9}$$

y como consecuencia, entre los puntos del espacio de Minkowski

$$x = x^\mu e_\mu \rightarrow x = x^0\gamma_0 + x^1\gamma_1 + x^2\gamma_2 + x^3\gamma_3 = x^\mu \gamma_\mu. \tag{3.1.10}$$

Las matrices cuadradas forman un espacio vectorial en el que el producto de dos de sus elementos puede descomponerse en una parte simétrica y otra antisimétrica en la forma (3.1.7), de manera que su multiplicación se muestra en forma natural como un *producto geométrico.* Los objetos γ_μ que satisfacen (3.1.8a) se conocen comúnmente como matrices de Dirac por el papel esencial que juegan en la ecuación del mismo nombre[63]; sin embargo aparecen en este contexto como la expresión que define a la métrica del espacio-tiempo, y por

[61] Donde se entiende por vector un elemento de un espacio vectorial.

[62] En forma análoga a (3.1.2), la base recíproca de $\{\gamma_\mu\}$ es $\{\gamma^\mu\}$, tal que se cumple

$$\gamma_\mu \cdot \gamma^\nu = \delta_\mu{}^\nu.$$

[63] La interpretación de las matrices γ_μ en la ecuación de Dirac es la de operadores sobre vectores columna conocidos como 4-*espinores,* identificados con la función de onda de una partícula de espín 1/2.

lo tanto el *álgebra de Dirac*[64], definida por (3.1.8a), puede emplearse para expresar propiedades geométricas del espacio de Minkowski[6].

Se sigue de la expresión (3.1.3) que el producto simétrico $x \cdot y$ de dos vectores está identificado con la longitud de la proyección de uno sobre el otro (en términos tensoriales, con la contracción $x^\mu y_\mu$). Desarrollando $x \cdot y$ de acuerdo con (3.1.10) y (3.1.8a) se ve que, en efecto, los invariantes bajo transformaciones de Lorentz de la forma $x^\mu y_\mu$ son escalares en el espacio generado por las[65] γ_μ

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \left(x^0\gamma_0 + x^1\gamma_1 + x^2\gamma_2 + x^3\gamma_3\right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(y^0\gamma_0 + y^1\gamma_1 + y^2\gamma_2 + y^3\gamma_3\right) \\ &= \left(x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3\right) I. \end{aligned} \tag{3.1.11a}$$

El producto antisimétrico de los vectores x y y es explícitamente

$$\begin{aligned} x \wedge y &= \left(x^0\gamma_0 + x^1\gamma_1 + x^2\gamma_2 + x^3\gamma_3\right) \wedge \\ &\quad \wedge \left(y^0\gamma_0 + y^1\gamma_1 + y^2\gamma_2 + y^3\gamma_3\right) \\ &= \left(x^1y^0 - x^0y^1\right)\gamma_1 \wedge \gamma_0 + \left(x^2y^0 - x^0y^2\right)\gamma_2 \wedge \gamma_0 + \\ &\quad + \left(x^3y^0 - x^0y^3\right)\gamma_3 \wedge \gamma_0 + \left(x^3y^2 - x^2y^3\right)\gamma_3 \wedge \gamma_2 + \\ &\quad + \left(x^1y^3 - x^3y^1\right)\gamma_1 \wedge \gamma_3 + \left(x^2y^1 - x^1y^2\right)\gamma_2 \wedge \gamma_1 \end{aligned} \tag{3.1.11b}$$

mientras que el bivector antisimétrico definido por x^μ y y^μ como $\omega^{\mu\nu}_{(xy)} = x^\mu y^\nu - x^\nu y^\mu$ puede descomponerse en la forma

$$\begin{aligned} \omega^{\mu\nu}_{(xy)} &= \left(x^1y^0 - x^0y^1\right)\omega^{\mu\nu}_{(10)} + \left(x^2y^0 - x^0y^2\right)\omega^{\mu\nu}_{(20)} + \\ &\quad + \left(x^3y^0 - x^0y^3\right)\omega^{\mu\nu}_{(30)} + \left(x^3y^2 - x^2y^3\right)\omega^{\mu\nu}_{(32)} + \\ &\quad + \left(x^1y^3 - x^3y^1\right)\omega^{\mu\nu}_{(13)} + \left(x^2y^1 - x^1y^2\right)\omega^{\mu\nu}_{(21)} \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

donde $\omega^{\mu\nu}_{(\alpha\beta)}$ representa al plano que forman los vectores $e_\alpha e_\beta$.

La matriz (3.1.10) es la expresión del vector (3.1.1a) obtenida de la correspondencia entre las bases $e_\mu \to \gamma_\mu$, en la que se conservaron naturalmente las componentes x^μ paralelas a los ejes; por lo tanto, y dado que las proyecciones

[64] *c.f* apéndice B.2.

[65] Se usan los resultados

$$(\gamma_0)^2 = I, \qquad (\gamma_i)^2 = -I, \qquad \gamma_\mu\gamma_\nu = -\gamma_\nu\gamma_\mu \text{ para } \mu \neq \nu$$

obtenidos a partir de (3.1.8a).

de $x \wedge y$ sobre el producto $\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta$ son iguales a las de $\omega^{\mu\nu}_{(xy)}$ sobre el bivector $\omega^{\mu\nu}_{(\alpha\beta)}$, se puede establecer la siguiente correspondencia entre los seis planos $\omega^{\mu\nu}_{(\alpha\beta)}$ y los productos[66] $\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta$

$$\begin{aligned} \omega^{\mu\nu}_{(10)} &\to \gamma_1 \wedge \gamma_0 = \gamma_1\gamma_0, & \omega^{\mu\nu}_{(32)} &\to \gamma_3 \wedge \gamma_2 = \gamma_3\gamma_2, \\ \omega^{\mu\nu}_{(20)} &\to \gamma_2 \wedge \gamma_0 = \gamma_2\gamma_0, & \omega^{\mu\nu}_{(13)} &\to \gamma_1 \wedge \gamma_3 = \gamma_1\gamma_3, \\ \omega^{\mu\nu}_{(30)} &\to \gamma_3 \wedge \gamma_0 = \gamma_3\gamma_0, & \omega^{\mu\nu}_{(21)} &\to \gamma_2 \wedge \gamma_1 = \gamma_2\gamma_1. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

La antisimetría en los índices $\alpha\beta$ del bivector $\omega_{\alpha\beta}$, que es la que permite hablar de una orientación del plano que éste representa (*c.f.* sección 2.5), se ve reflejada en la antisimetría de $\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta$, resultado que da lugar a la interpretación geométrica del producto $x \wedge y$ como un segmento de plano *orientado* de lados x y y. Así, el desarrollo (3.1.11*b*) descompone al paralelogramo definido por estos vectores en seis proyecciones (bidimensionales) sobre cada uno de los seis *planos canónicos* orientados $\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$ (con $\mu \neq \nu$) las cuales forman el tensor antisimétrico $\omega^{\mu\nu}_{(xy)} = x^\mu y^\nu - x^\nu y^\mu$.

3.2 La base de los multivectores

La correspondencia (3.1.9) entre los elementos de la base canónica del espacio de Minkowski e^μ_α con las matrices γ_α permite, como se vió en la sección anterior, obtener escalares de la forma $e^\mu_\alpha e_{\beta\mu}$ a partir del producto interno $\gamma_\alpha \cdot \gamma_\beta$, y objetos bidimensionales antisimétricos, asociados a los planos $\omega^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$, a través del producto externo $\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta$. Sin embargo, en el espacio-tiempo pueden definirse objetos no sólo de 0, 1 y 2 dimensiones, sino además de 3 y 4, los cuales pueden también obtenerse a partir de la base canónica $\{\gamma_\mu\}$ a través de los productos externos entre sus elementos. Se tienen entonces los siguientes cinco tipos de objetos del espacio que difieren entre sí por su naturaleza geométrica (o dimensionalidad)[67]:

a) 0-vector = escalar = $\gamma_\alpha \cdot \gamma_\beta$,
b) 1-vector = vector = γ_α,

[66] Como los cuatro elementos γ_μ son ortogonales entre sí (*c.f.* (3.1.8*b*)), se cumple

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta = \gamma_\alpha \cdot \gamma_\beta + \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta = \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta.$$

[67] En lo que sigue se suponen todos los índices $\alpha, \beta, \delta, \lambda$ distintos entre sí.

c) 2-vector = bivector = $\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta$,
d) 3-vector = trivector = $\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta \wedge \gamma_\delta$,
e) 4-vector = tetravector = $\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta \wedge \gamma_\delta \wedge \gamma_\lambda$.

La base del primer grupo es $\Gamma^0 \equiv I$, de manera que las matrices proporcionales a Γ^0 representan escalares del espacio de Minkowski; las cuatro matrices γ_μ dan lugar al conjunto $\Gamma^1 \equiv \{\gamma_\alpha\}$ y las posibles combinaciones lineales de coeficientes reales entre ellas se corresponden con los puntos del espacio de Minkowski, tal como aparece en (3.1.10); de (3.1.13) se sigue que los elementos de $\Gamma^2 \equiv \{\gamma_\alpha \gamma_\beta \mid \alpha < \beta\}$ forman una base para todos los planos orientados. Así como el bivector $\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta$ se interpreta como una superficie dirigida, el producto $\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta \wedge \gamma_\delta$ puede entenderse como el volumen o el paralelepípedo orientado (según el orden en el que se multipliquen los factores[68]) que determinan los vectores γ_α, γ_β y γ_δ, y por lo tanto el grupo $\Gamma^3 \equiv \{\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta \wedge \gamma_\delta\}$ contiene a los elementos de la base de los volúmenes tridimensionales. Finalmente, el volumen tetradimensional formado por los cuatro vectores de la tétrada, $\Gamma^4 \equiv \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta \wedge \gamma_\delta \wedge \gamma_\lambda$, es la base de los volúmenes de cuatro dimensiones.

Los elementos de cada conjunto Γ^n ($n = 0$, 1, 2, 3 y 4) son llamados *multivectores* simples (o $n-$vectores, donde n indica su dimensionalidad), y constituyen la base del multivector más general M cuya forma es

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + M_3, \tag{3.2.1}$$

donde M_n es un $n-$vector[69].

La expresión (3.1.7) establece las reglas de multiplicación entre dos vectores, pero no entre dos multivectores cualesquiera. En el caso de vectores, el producto externo es antisimétrico y el interno simétrico; sin embargo esto no es una propiedad que radique en la naturaleza del producto mismo, sino en la de los elementos que se multiplican. Para determinar la paridad de las operaciones entre cualesquiera M_1 y M_n suele imponerse la condición de que el producto interno debe tener simetría opuesta a la de su correspondiente

[68]El hecho de que el producto geométrico no sea conmutativo le da a los objetos geométricos que se construyen por esta vía una orientación.

[69]La representación matricial de los vectores γ_μ permite asignar un arreglo de la misma naturaleza a todos los multivectores independientemente de la dimensionalidad del objeto que éstos representan. La suma (3.2.1) tiene sentido, pues la suma entre matrices está bien definida, en contraposición con la expresión tensorial correspondiente al multivector M, en la que la suma entre tensores de distinto rango no está definida como un tensor.

producto externo[24]; basta entonces conocer la paridad de uno de los productos para conocer la del otro. El problema de establecer alguna de ambas se resuelve recurriendo a la interpretación geométrica de los multivectores simples y a la que dan lugar las operaciones entre ellos. Por ejemplo, y para su posterior uso, en lo que sigue se determina la paridad de los productos ($\wedge$) y ($\cdot$) entre un vector y un bivector a partir de este tipo de consideraciones[70]. Dado que los objetos que trata el álgebra multivectorial están orientados, el volumen $A \wedge (B \wedge C)$ que definen los tres vectores A, B y C (tomados en ese orden) tiene una orientación que no se ve afectada si se toman en orden cíclico sus elementos, es decir

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C.$$

De aquí y de la antisimetría de un bivector simple M_2 se tiene

$$A \wedge M_2 = M_2 \wedge A, \tag{3.2.2a}$$

es decir, el volumen $A \wedge M_2$ posee la misma orientación que el dado por $M_2 \wedge A$. Sin embargo como la simetría de este producto debe ser opuesta a la del producto interno de A con M_2, se concluye que[71]

$$A \cdot M_2 = -M_2 \cdot A. \tag{3.2.2b}$$

3.3. Representación de los elementos de $L_+^\uparrow$

Cuando se efectúa una rotación infinitesimal de alguno de los planos canónicos en el espacio de Minkowski, se tiene, hasta términos lineales del parámetro $\delta\varphi$ (ver (1.3.1))

$$x'^\mu \approx x^\mu + \delta\varphi\omega^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{3.3.1}$$

Esta expresión, escrita como una relación entre componentes, se escribe en términos del espacio generado por $\{\gamma_\mu\}$ como

$$x' \approx x + \delta\varphi\Gamma \cdot x, \tag{3.3.2}$$

[70] Se sigue el razonamiento utilizado en la referencia 24.

[71] En general, para un vector A y un $n-$vector M_n se cumple[24]

$$\begin{aligned} A \wedge M_n &= \frac{1}{2}\left[AM_n + (-1)^n M_n A\right] \\ A \cdot M_n &= \frac{1}{2}\left[AM_n - (-1)^n M_n A\right]. \end{aligned}$$

donde el término Γ está dado por alguno de los elementos de Γ^2 según el plano $\omega^{\mu\nu}$ en el que se realice la rotación[72]. Usando el resultado[73]

$$\Gamma \cdot x = \frac{1}{2}\left(\Gamma x - x\Gamma\right) \tag{3.3.3}$$

se tiene que

$$x' \approx x + \delta\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}x - x\frac{\Gamma}{2}\right),$$

expresión que, si se desprecian los términos cuadráticos de la diferencial del parámetro, coincide con

$$x' \approx \left(I + \delta\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)x\left(I - \delta\varphi\frac{\Gamma}{2}\right). \tag{3.3.4}$$

Lo anterior indica que si un cuadrivector x^μ sufre una transformación infinitesimal del grupo $L_+^\uparrow$ de acuerdo con (3.3.1), su vector "imagen" x se transforma según

$$x' \approx L_{\delta\varphi}\left(\varphi\right)xL_{\delta\varphi}\left(-\varphi\right), \tag{3.3.5}$$

donde $L_{\delta\varphi}\left(\varphi\right)$ es la matriz $\left(I + \delta\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)$. La transformación infinitesimal (3.3.4) permite identificar a los generadores del grupo restringido de Lorentz en su forma multivectorial con las matrices $\Gamma/2$. Explícitamente, y a partir de (3.1.13), se tiene

$$\begin{gathered} T_1' \to \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_0, \quad T_2' \to \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_0, \quad T_3' \to \frac{1}{2}\gamma_3\gamma_0 \\ S_1' \to \frac{1}{2}\gamma_3\gamma_2, \quad S_2' \to \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_3, \quad S_3' \to \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_1. \end{gathered} \tag{3.3.6}$$

En efecto, las matrices (3.3.6) están asociadas a transformaciones de $L_+^\uparrow$, según se ve de las relaciones de conmutación que satisfacen (*c.f.* ecuaciones (1.3.13))

$$\begin{aligned} \left[S_i', S_j'\right] &= -\epsilon_{ijk}S_k' \\ \left[T_i', T_j'\right] &= \epsilon_{ijk}S_k' \\ \left[S_i', T_j'\right] &= -\epsilon_{ijk}T_k'. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

[72]Se ha visto que la contracción de dos vectores $x^\mu y_\mu$ está asociada con el producto simétrico $x \cdot y$. Dado que el término $\omega^\mu{}_\nu x^\nu = \omega^{\mu\nu}x_\nu$ indica la contracción de un bivector con un vector, éste debe identificarse con el producto $\Gamma \cdot x$.

[73]*c.f.* nota 71 para el caso M un bivector.

La transformación finita del vector x se obtiene después de aplicar infinitas veces la matriz $L_{\delta\varphi}$ de acuerdo con la regla (3.3.5); al hacerlo se obtiene la expresión para el vector transformado

$$x' = L(\varphi)\, x L(-\varphi).$$

Como la transformación que se ha supuesto es uniparamétrica[74], se cumple que $L(-\varphi) = L^{-1}(\varphi)$ y entonces

$$x' = LxL^{-1} \tag{3.3.8}$$

La expresión general de las matrices L es, para rotaciones puras[75],

$$\begin{aligned} L_{(i0)} &= \lim_{N\to\infty}\left[I + \frac{\chi_i}{N}\left(\frac{\gamma_i\gamma_0}{2}\right)\right]^N = \qquad (3.3.9a)\\ &= \exp\left[\chi_i\left(\frac{\gamma_i\gamma_0}{2}\right)\right] = I\cosh\frac{\chi_i}{2} + \gamma_i\gamma_0 \operatorname{senh}\frac{\chi_i}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L_{(ij)} &= \lim_{N\to\infty}\left[I + \frac{\theta_k}{N}\left(\frac{\gamma_i\gamma_j}{2}\right)\right]^N = \qquad (3.3.9b)\\ &= \exp\left[\theta_k\left(\frac{\gamma_i\gamma_j}{2}\right)\right] = I\cos\frac{\theta_k}{2} + \gamma_i\gamma_j \operatorname{sen}\frac{\theta_k}{2} \end{aligned}$$

para las estrictamente espaciales[76].

En forma análoga a lo que se hizo en (1.3.10) la rotación L más general se escribe en la forma

$$L = \exp\left[\chi_i\left(\frac{\gamma_i\gamma_0}{2}\right) + \theta_k\left(\frac{\gamma_i\gamma_j}{2}\right)\right] \tag{3.3.10}$$

---

[74] *c.f.* nota 20.

[75] Para llegar a esta última expresión se desarrolla la exponencial en serie y se usa el resultado

$$(\gamma_i\gamma_0)^2 = 1$$

de donde

$$(\gamma_i\gamma_0)^{2n} = 1, \qquad (\gamma_i\gamma_0)^{2n+1} = \gamma_i\gamma_0.$$

[76] En este caso se parte de

$$(\gamma_i\gamma_j)^2 = -1$$

para obtener

$$(\gamma_i\gamma_j)^{2n} = (-1)^n, \qquad (\gamma_i\gamma_j)^{2n+1} = (-1)^n\gamma_i\gamma_j.$$

y corresponde a la transformación (1.3.10) hecha en el espacio de Minkowski. La expresión (3.3.10) establece la correspondencia entre las transformaciones $\Lambda^{\nu}{}_{\mu}$ de $L_{+}^{\uparrow}$ que actúan sobre los puntos del espacio de Minkowski x^{μ}, y los operadores definidos en la misma expresión, que actúan sobre los vectores (3.1.10).

La ley de transformación (3.3.8) para los vectores de Γ^1 se extiende a los constituyentes de los demás conjuntos Γ^n ($n = 2$, 3, y 4) como consecuencia de que los elementos de cada una de estas bases puede escribirse en la forma de un producto geométrico como sigue[77]

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta &= \gamma_\alpha\gamma_\beta, \\ \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta \wedge \gamma_\delta &= \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta, \\ \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta \wedge \gamma_\delta \wedge \gamma_\lambda &= \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\lambda. \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Bajo la transformación L se tiene, para cada elemento de Γ^1,

$$\gamma'_\mu = L\gamma_\mu L^{-1},$$

tales vectores primados forman a su vez una nueva base, ya que satisfacen la misma ecuación (3.1.8a),

$$\frac{1}{2}\left(\gamma'_\mu\gamma'_\nu + \gamma'_\nu\gamma'_\mu\right) = g_{\mu\nu}$$

de modo que cumplen con las mismas relaciones (3.3.11). Así se tiene que

$$\gamma'_\alpha \wedge \gamma'_\beta = \gamma'_\alpha\gamma'_\beta = \left(L\gamma_\alpha L^{-1}\right)\left(L\gamma_\beta L^{-1}\right) = L\left(\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta\right)L^{-1}$$

con resultados análogos para los elementos de Γ^3 y Γ^4.

Se concluye con esto que cualquier multivector M se transforma de acuerdo con

$$M' = LML^{-1}$$

y en consecuencia, se cumple

$$(MN)' = M'N' = L\,(MN)\,L^{-1} \tag{3.3.12}$$

para el producto geométrico entre cualesquiera dos multivectores M y N.

[77] El primer renglón se sigue de la definición (3.1.6); los dos siguientes son un caso particular del resultado de la nota 71, el primero con $A = \gamma_\alpha$, $M_2 = \gamma_\beta \wedge \gamma_\delta$ y el segundo con $A = \gamma_\alpha$, $M_3 = \gamma_\beta \wedge \gamma_\delta \wedge \gamma_\lambda$.

3.4 Los operadores de inversión

Como se vió en la sección 1.2, el grupo de Lorentz contempla, además de las transformaciones restringidas del tipo (3.3.10), dos inversiones principales: la del espacio y la temporal. Para establecer el comportamiento de los puntos del espacio de Minkowski expresados en la forma x frente al grupo completo, es necesario determinar los multivectores que corresponden a los operadores I_S e I_T.

A partir de la condición (3.1.8a) puede verificarse que la transformación

$$\gamma_0 x \gamma_0^{-1} = \gamma_0 x \gamma_0 \tag{3.4.1a}$$

da lugar a las inversiones

$$x^0 \to x^0, \quad x^i \to -x^i, \tag{3.4.1b}$$

y que el operador $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ actuando en la forma

$$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\, x\, (\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{-1} = (\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\, x\, (\gamma_1\gamma_2\gamma_3) \tag{3.4.2a}$$

conduce a las transformaciones

$$x^0 \to -x^0, \quad x^i \to x^i. \tag{3.4.2b}$$

Se encuentra así que el vector γ_0, es el operador de paridad representado por g en el espacio de Minkowski. Asimismo el producto $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ produce, al operar sobre los puntos del espacio en la forma (3.4.2a), el efecto de la inversión temporal. Al igual que ocurre en el caso de las transformaciones correspondientes en el espacio de Minkowski, la inversión completa se obtiene de aplicar sucesivamente al punto x, y en cualquier orden, ambos operadores[78]: γ_0 y $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

[78] Esto no significa que los operadores conmuten, o sea que se cumpla

$$\gamma_0\,(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = (\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_0$$

lo cual no ocurre como puede verificarse de (3.1.8a). Los operadores de inversiones espacial y temporal no deben conmutar entre sí (necesariamente); lo que debe ser independiente del orden en el que se apliquen es el efecto neto que producen al operar sobre un vector x. Así, y por (3.1.8a) se tiene

$$\begin{aligned} I_T I_S x I_S^{-1} I_T^{-1} &= (\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_0 x \gamma_0\,(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = \\ &= \gamma_0\,(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\, x\, (\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_0 \\ &= I_T I_S x I_S^{-1} I_T^{-1} = -x \end{aligned}$$

de manera que es irrelevante cuál de las dos transformaciones se realice primero.

Capítulo 4

La electrodinámica como un producto geométrico

4.1 La fuerza de Lorentz

A partir de la correspondencia para los puntos del espacio tiempo (3.1.10) y las transformaciones de Lorentz (3.3.10), puede establecerse, en cada punto x del espacio, una tétrada $\{\gamma'_\mu\}$ cuyos elementos están definidos en forma análoga a (2.1.1)

$$\gamma'_\mu = L\gamma_\mu L^{-1}.$$

Como se vio al final de la sección 3.3, el conjunto $\{\gamma'_\mu\}$ constituye en efecto un marco de referencia del espacio tangente cuyo origen es x. Reconstruyendo el razonamiento seguido en la sección 2.1 y de acuerdo con la forma de (3.3.4) generalizada al caso de seis planos de rotación, se obtiene la expresión correspondiente a (2.1.6)

$$u\left(x+\triangle x\right)=\lambda\left(\chi_i,\theta_i\right)u\left(x\right)\lambda\left(-\chi_i,-\theta_i\right) \qquad (4.1.1)$$

con u un vector referido a la tétrada canónica que representa al vector velocidad de la curva $s \rightarrow x(s)$ con respecto a la longitud de arco s en el instante τ,

$$u = u^0\gamma_0 + u^1\gamma_1 + u^2\gamma_2 + u^3\gamma_3 = \frac{dx}{ds}.$$

La transformación λ es la representación, en el espacio cuya base es la tétrada $\{\gamma_\mu\}$, de la rotación infinitesimal R que aparece en (2.1.3a) y está dada, de acuerdo con (3.3.6), por

$$\begin{aligned}\lambda &= I+\triangle\chi_1\frac{\gamma_1\gamma_0}{2}+\triangle\chi_2\frac{\gamma_2\gamma_0}{2}+\triangle\chi_3\frac{\gamma_3\gamma_0}{2}+\\ &\quad +\triangle\,\theta_1\frac{\gamma_3\gamma_2}{2}+\triangle\theta_2\frac{\gamma_1\gamma_3}{2}+\triangle\theta_3\frac{\gamma_2\gamma_1}{2}.\end{aligned}$$

A partir de esta expresión y de (4.1.1) se tiene que

$$\frac{du}{ds}=\frac{1}{2}\sum_i\dot{\chi}_i\left(\gamma_i\gamma_0u-u\gamma_i\gamma_0\right)+\dot{\theta}_i\left(\gamma_k\gamma_ju-u\gamma_k\gamma_j\right). \tag{4.1.2}$$

De (3.3.3), junto con la propiedad distributiva

$$(\Gamma_1\cdot u)+(\Gamma_2\cdot u)=(\Gamma_1+\Gamma_2)\cdot u$$

se sigue que (4.1.2) puede escribirse como

$$\frac{du}{ds}=\left(\dot{\chi}_1\gamma_1\gamma_0+\dot{\chi}_2\gamma_2\gamma_0+\dot{\chi}_3\gamma_3\gamma_0+\dot{\theta}_1\gamma_3\gamma_2+\dot{\theta}_2\gamma_1\gamma_3+\dot{\theta}_3\gamma_2\gamma_1\right)\cdot u, \tag{4.1.3}$$

expresión que corresponde, en lenguaje multivectorial, a (2.1.7).

A lo largo del procedimiento seguido y debido a que la correspondencia entre los puntos $x^\mu \to x$ se ha realizado a través de los vectores de la base, el espacio de parámetros no se ve modificado cuando los elementos del espacio de Minkowski se representan en términos de multivectores. Por ello, la discusión sobre su significado que aparece en el capítulo 2 conserva su validez dentro de este nuevo contexto. Esto permite hacer la sustitución (2.2.1) con $P = q/mc$ en la ecuación (4.1.3), llegando con ello a la fuerza de Lorentz escrita en el espacio generado por $\{\gamma_\mu\}$ en términos del producto interno entre el campo electromagnético y la velocidad, en la forma

$$\frac{du}{ds}=\frac{q}{mc}F\cdot u \tag{4.1.4}$$

donde

$$F=E_1\gamma_1\gamma_0+E_2\gamma_2\gamma_0+E_3\gamma_3\gamma_0+B_1\gamma_3\gamma_2+B_2\gamma_1\gamma_3+B_3\gamma_2\gamma_1. \tag{4.1.5}$$

La fuerza de Lorentz (4.1.4) establece las mismas relaciones entre sus elementos desde cualquier sistema de referencia, debido a que un producto de la forma $M_1\cdot N$, $M_1\wedge N$ con M_1 un vector y N un multivector cualquiera (en este caso un bivector), puede escribirse como un producto geométrico[79] cuya forma es, por (3.3.12), la misma para todos los marcos de referencia relacionados entre sí mediante la transformación L.

Usando las propiedades $\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu$ para $\mu \neq \nu$, $(\gamma_0)^2 = I$ y $(\gamma_i)^2 = -I$, que se derivan de (3.1.8a), se obtiene la expresión explícita para el producto

$$\begin{aligned} F \cdot u \;=\; & \gamma_0 \left(u^1 E_1 + u^2 E_2 + u^3 E_3\right) + \\ & + \gamma_1 \left(u^0 E_1 + u^2 B_3 - u^3 B_2\right) + \\ & + \gamma_2 \left(u^0 E_2 + u^3 B_1 - u^1 B_3\right) + \\ & + \gamma_3 \left(u^0 E_3 + u^1 B_2 - u^2 B_1\right) \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

cuyo lado derecho, multiplicado por $\frac{q}{c}$, coincide con el vector $\frac{dp}{ds}$ asociado al cambio en el momento que aparece en la ecuación (2.2.5).

Como ya se ha visto, el producto geométrico es una operación fundamental entre multivectores, en el que está contenida toda la información acerca de cómo se relacionan los factores a través de un producto simétrico y otro antisimétrico con respecto al orden en el que se multiplican. Según se sigue de (3.2.2b), F y u anticonmutan bajo la operación $(\cdot)$, por lo que $F \cdot u$ corresponde a la parte antisimétrica del producto geométrico. El elemento adicional, estrechamente ligado al producto $F \cdot u$ y que lo complementa para dar lugar al producto Fu, es justamente el producto simétrico $F \wedge u$, cuya forma explícita está dada por

$$\begin{aligned} F \wedge u \;=\; & \gamma_1 \gamma_3 \gamma_2 \left(u^1 B_1 + u^2 B_2 + u^3 B_3\right) + \\ & + \gamma_0 \gamma_3 \gamma_2 \left(u^0 B_1 + u^3 E_2 - u^2 E_3\right) + \\ & + \gamma_0 \gamma_1 \gamma_3 \left(u^0 B_2 + u^1 E_3 - u^3 E_1\right) + \\ & + \gamma_0 \gamma_2 \gamma_1 \left(u^0 B_3 + u^2 E_1 - u^1 E_2\right). \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

A diferencia de (4.1.6), este producto define un trivector cuyas componentes no tienen análogo en la descripción de la electrodinámica del capítulo 2, pero cuyo significado se analizará más adelante.

4.2 Las ecuaciones de Maxwell

La correspondencia (3.1.10) está establecida para los puntos del espacio de Minkowski x cuyas componentes son x^μ. Tales funciones de coordenadas

[79] *c.f.* nota 71.

están dadas por

$$x^{\mu} = x^{\mu}(x) = x \cdot \gamma^{\mu}$$

con $\{\gamma^{\mu}\}$ la base recíproca de $\{\gamma_{\mu}\}$. Se tiene además que

$$\partial_{\mu} x = \gamma_{\mu}.$$

Puede verificarse[6] de aquí que la correspondencia para el cuadrivector $\partial^{\mu} = (\partial_0, -\nabla)$ está dada por el *multivector diferencial*

$$\partial = \partial^0 \gamma_0 + \partial^1 \gamma_1 + \partial^2 \gamma_2 + \partial^3 \gamma_3.$$

El producto geométrico de este operador con un vector cualquiera B, o la *derivada geométrica* de B,

$$\partial B = \partial \cdot B + \partial \wedge B \tag{4.2.1}$$

puede calcularse a partir de (3.1.11), obteniendo para sus partes los resultados siguientes

$$\partial \cdot B = \left(\partial^0 B^0 - \partial^1 B^1 - \partial^2 B^2 - \partial^3 B^3\right) I = \partial_{\mu} B^{\mu}, \tag{4.2.2a}$$

$$\begin{aligned} \partial \wedge B \;=\; & \left(\partial^1 B^0 - \partial^0 B^1\right) \gamma_1 \gamma_0 + \left(\partial^2 B^0 - \partial^0 B^2\right) \gamma_2 \gamma_0 + \\ & + \left(\partial^3 B^0 - \partial^0 B^3\right) \gamma_3 \gamma_0 + \left(\partial^3 B^2 - \partial^2 B^3\right) \gamma_3 \gamma_2 + \\ & + \left(\partial^1 B^3 - \partial^3 B^1\right) \gamma_1 \gamma_3 + \left(\partial^2 B^1 - \partial^1 B^2\right) \gamma_2 \gamma_1. \end{aligned} \tag{4.2.2b}$$

Se tiene entonces que en la expresión ∂B están contenidos tanto la divergencia del vector B (en el producto interno) como su rotacional (en el externo).

Como se vió en la sección 2.6, la ecuación diferencial invariante asociada a un vector es precisamente su divergencia, o sea la parte simétrica del producto ∂B. En forma análoga es de esperar que las ecuaciones diferenciales invariantes asociadas al bivector F surjan del producto interno $\partial \cdot F$, el cual, usando la propiedad de la nota 68 adquiere la forma

$$\begin{aligned} \partial \cdot F \;=\; & \gamma_0 \left(-\partial^1 E_1 - \partial^2 E_2 - \partial^3 E_3\right) + \\ & + \gamma_1 \left(-\partial^0 E_1 + \partial^3 B_2 - \partial^2 B_3\right) + \\ & + \gamma_2 \left(-\partial^0 E_2 + \partial^1 B_3 - \partial^3 B_1\right) + \\ & + \gamma_3 \left(-\partial^0 E_3 + \partial^2 B_1 - \partial^1 B_2\right). \end{aligned}$$

Asignando las diferenciales correspondientes a las componentes ∂^μ se obtiene

$$\begin{aligned} \partial \cdot F = & \quad \gamma_0 \left(\partial_x E_1 + \partial_y E_2 + \partial_z E_3\right) + \\ & + \gamma_1 \left(-\partial_0 E_1 + \partial_y B_3 - \partial_z B_2\right) + \\ & + \gamma_2 \left(-\partial_0 E_2 + \partial_z B_1 - \partial_x B_3\right) + \\ & + \gamma_3 \left(-\partial_0 E_3 + \partial_x B_2 - \partial_y B_1\right). \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Los coeficientes de los vectores γ_μ son los mismos que aparecen en (2.6.2a), expresión que, en efecto, es una ecuación diferencial invariante.

El producto (4.2.3) corresponde en términos tensoriales a la contracción $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ que, según la ecuación (2.6.8a), resulta en el cuadrivector de corriente j^ν. Así, (4.2.3) es el (multi)vector corriente J y en la expresión

$$\partial \cdot F = J \tag{4.2.4}$$

están contenidas las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (2.6.3a).

Para la expresión complementaria $\partial \wedge F$ se tiene, recurriendo de nuevo a la propiedad (3.1.6), que

$$\begin{aligned} \partial \wedge F = & \quad \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \left(\partial_x B_1 + \partial_y B_2 + \partial_z B_3\right) + \\ & + \gamma_0 \gamma_2 \gamma_3 \left(-\partial_0 B_1 + \partial_z E_2 - \partial_y E_3\right) + \\ & + \gamma_0 \gamma_3 \gamma_1 \left(-\partial_0 B_2 + \partial_x E_3 - \partial_z E_1\right) + \\ & + \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \left(-\partial_0 B_3 + \partial_y E_1 - \partial_x E_2\right) \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

y las ecuaciones homogéneas de Maxwell (2.6.7) conducen así al resultado

$$\partial \wedge F = 0. \tag{4.2.6}$$

Como consecuencia de (3.3.12), el producto ∂F y por lo tanto sus partes $\partial \cdot F = J$, y $\partial \wedge F = 0$, son expresiones cuya forma es invariante frente al cambio de marcos de referencia inerciales.

4.3 Las ecuaciones de la electrodinámica bajo paridad

A partir de la transformación (3.4.1a) puede probarse que los constituyentes espaciales (γ_i) de Γ^1 son multivectores de grado uno que bajo paridad se transforman como vectores polares, mientras que la base temporal (γ_0) lo hace como un escalar, es decir

$$\begin{aligned}\gamma_0(\gamma_0)\gamma_0^{-1} &= \gamma_0, \quad \gamma_0(\gamma_1)\gamma_0^{-1} = -\gamma_1, \\ \gamma_0(\gamma_2)\gamma_0^{-1} &= -\gamma_2, \quad \gamma_0(\gamma_3)\gamma_0^{-1} = -\gamma_3.\end{aligned} \tag{4.3.1a}$$

Por su parte, los trivectores que conforman al agregado Γ^3 siguen reglas de transformación análogas a las de las componentes correspondientes a un pseudovector, como aquí se muestra

$$\begin{aligned}\gamma_0(\gamma_1\gamma_3\gamma_2)\gamma_0^{-1} &= -\gamma_1\gamma_3\gamma_2, \quad \gamma_0(\gamma_0\gamma_3\gamma_2)\gamma_0^{-1} = \gamma_0\gamma_3\gamma_2, \\ \gamma_0(\gamma_0\gamma_1\gamma_3)\gamma_0^{-1} &= \gamma_0\gamma_1\gamma_3, \quad\quad \gamma_0(\gamma_0\gamma_2\gamma_1)\gamma_0^{-1} = \gamma_0\gamma_2\gamma_1.\end{aligned} \tag{4.3.1b}$$

Las reglas de transformación frente a una inversión espacial de las componentes de (4.1.6), (4.2.3), (4.1.7) y (4.2.5) dependen de la paridad de las funciones E_i y B_i, la cual a su vez, está condicionada por el comportamiento bajo paridad de la carga q (ver (2.4.3)). La naturaleza escalar o pseudoescalar de esta última, es una elección arbitraria siempre que no haya más criterio que el de la invariancia de las ecuaciones frente a inversiones del grupo de Lorentz para determinarla, como se vió en la sección 2.6. Si se elige $\epsilon_{S,q} = +1$, las componentes de las dos primeras ecuaciones se transforman como las de un vector polar, mientras que las de la segunda pareja corresponden a las de un pseudovector. De aquí y de (4.3.1) se tiene que, dado q un escalar de paridad, la naturaleza de las componentes antes mencionadas coincide con la de los elementos de la base que les corresponde y en la que aparecen escritas las ecuaciones. Si en cambio se toma a q como pseudoescalar, las componentes escalares corresponden a un elemento de la base que es un pseudoescalar, y las componentes polares aparecen como proyecciones sobre un elemento que constituye un pseudovector. En forma inversa, las componentes de un pseudovector quedan referidas entonces a una base de índole polar.

Como se mencionó en la sección 1.2, aquellos vectores $k^\nu = k^\nu(x^\mu)$ definidos en un punto del espacio de Minkowski que bajo la acción de los elementos del grupo restringido de Lorentz se transforman como un cuadrivector, y que frente a la inversión espacial lo hacen como los vectores x^μ, se identifican con algún punto de un espacio tangente (anclado a x^μ) que se comporta de manera idéntica al espacio-tiempo frente a tansformaciones del grupo ortócrono. Esta idea se puede extender al espacio de multivectores para un vector $k(x)$ definido sobre el punto x; se sigue entonces que, por poder identificarse con un punto del espacio, k puede referirse a la base misma que describe a los puntos x, y que por (3.1.9), está compuesta por los elementos de Γ^1. Para establecer la congruencia entre las componentes y las bases de los multivectores en términos de sus transformaciones bajo paridad, y según lo dicho anteriormente, debe elegirse q escalar.

Dentro del contexto multivectorial surge así una distinción natural entre las bases de los cuadrivectores en función de su cambio frente a inversiones espaciales; más precisamente, las componentes pseudoescalares aparecen como coeficientes del trivector espacial $\gamma_m\gamma_n\gamma_l$ $(m,\ n,\ l = 1, 2, 3)$, mientras que los pseudovectores espaciales tienen como base a los trivectores espaciotemporales $\gamma_0\gamma_m\gamma_l$. Análogamente, la base en la que se transcriben a este espacio los cuadrivectores cuyas partes espaciales se identifican con vectores polares y cuya componente temporal es un escalar es justamente $\{\gamma_\mu\}$. De esta manera, la base en la que una ecuación esté escrita permite reconocer el comportamiento frente a I_S del cuadrivector al que corresponde.

Partiendo del supuesto de que las cargas eléctricas q son al campo eléctrico lo que las cargas magnéticas g son al campo magnético[80] se llega a que la paridad de ambas es opuesta (*c.f.* (2.4.3) y (2.6.6)), y por lo anterior, a que g es un pseudoescalar. De aquí que la base en la que aparecen las componentes del producto $\partial \wedge F$, estrechamente relacionado con las fuentes magnéticas del campo F, sea Γ^3. Ello indica que no existen fuentes magnéticas de la misma naturaleza que la fuente eléctrica J, siendo esta última un vector polar[81].

Como la existencia del campo electromagnético F no está sujeta a la de las cargas de prueba que pueda haber en el espacio, el producto Fu debe tener un significado independiente de las mismas[82]. La fuerza de Lorentz (4.1.4) con $u = \gamma_0$, ($c = 1$ en lo que sigue) es

$$\frac{dp_q}{d\tau}\,|_{\gamma_0} = q\,(F \cdot \gamma_0) = \gamma_1 q E_1 + \gamma_2 q E_2 + \gamma_3\, q E_3, \tag{4.3.2}$$

[80]En referencia a sus reglas de transformación frente a las inversiones del grupo de Lorentz.

[81]Esta observación es independiente de si las componentes de $\partial \wedge F$ son cero o no, aún cuando el campo electromagnético tuviese fuentes magnéticas, éstas cumplirían con la característica dada anteriormente.

A pesar de que las ecuaciones (2.6.7) manifiestan la inexistencia de las cargas g, es válido investigar como ejercicio, las propiedades de la carga g y de los efectos sobre ella, como se hará más adelante.

[82]De (2.2.1) las componentes de F son únicamente funciones de la posición, es decir, $F = F\,(x)$. El papel de la partícula está contenido en el elemento P. Por otro lado, u es un constituyente de una tétrada del campo, también independiente de la carga q.

donde p_q indica que la fuerza es ejercida sobre una carga q, y el subíndice γ_0 se refiere a que está medida en el sistema propio de la partícula. Esto hace de $F \cdot \gamma_0$ la fuerza propia por unidad de carga eléctrica[83]. Así, una carga q en reposo reacciona únicamente a las componentes eléctricas del campo F, es decir, la partícula sólo detecta campo eléctrico.

Siguiendo un razonamiento análogo para el caso en que se tuviera una carga magnética g, ésta sólo debería reaccionar, desde su sistema propio, frente a las proyecciones magnéticas del mismo campo F que sobre q produce la fuerza de Lorentz. Las componentes de (4.1.7), con $u = \gamma_0$, parecerían ser entonces las candidatas a formar las componentes de aquéllo que, por un paralelismo con el caso eléctrico, se llamará la fuerza magnética. Sin embargo, la expresión

$$g\,(F \wedge \gamma_0) = \gamma_0\gamma_3\gamma_2\, gB_1 + \gamma_0\gamma_1\gamma_3 gB_2 + \gamma_0\gamma_2\gamma_1 gB_3 \tag{4.3.3a}$$

(análoga a $q\,(F \cdot \gamma_0)$ para el caso magnético) esta escrita en una base pseudovectorial, característica que no comparten sus componentes gB_i, las cuales se transforman como las proyecciones de un vector polar bajo una inversión del espacio. Esto no permite entender a la expresión (4.3.3a) como la aceleración que produce el campo sobre la carga g. Para obtener una expresión que cumpla con los requisitos de una fuerza, es decir, que tenga componentes que correspondan a un vector y que esté escrita en la base Γ^1, debe transformarse (4.3.3a) en forma tal que los trivectores sean transformados en vectores. Haciendo

$$g\,(F \wedge \gamma_0)\,\gamma_5 \equiv g\,(F \wedge \gamma_0)\,\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

se obtiene[84]

$$g\,(F \wedge \gamma_0)\,\gamma_5 = \gamma_1\, gB_1 + \gamma_2 gB_2 + \gamma_3 gB_3 = \frac{dp_g}{d\tau}\,|_{\gamma_0}\,. \tag{4.3.3b}$$

Por analogía con (4.3.2) puede decirse que (4.3.3b) es la fuerza producida por F sobre la carga magnética en el sistema en el que está en reposo (de ahí la

[83]En realidad, $F \cdot \gamma_0$ se considera comúnmente la definición de campo eléctrico. Este se entiende como la parte de F que se mide en el sistema en el que la partícula eléctrica está en reposo.

[84]El significado del operador $\gamma_5 \equiv \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ se aclarará en la sección siguiente.

última igualdad). De (4.3.2) y (4.3.3) se tiene así que[85]

$$\frac{1}{q}\frac{dp_q}{d\tau}\mid_{\gamma_0}= F\cdot\gamma_0, \quad \frac{\gamma_5}{g}\frac{dp_g}{d\tau}\mid_{\gamma_0}= F\wedge\gamma_0 \tag{4.3.4}$$

lo que permite referirse a $F\wedge\gamma_0$ como el *dual*[86] de la fuerza ejercida sobre una partícula magnética por unidad de carga (magnética) en su sistema propio.

Desde un sistema inercial con respecto al de la partícula, la velocidad propia γ_0 tiene la forma $u = L\gamma_0 L^{-1}$, y las expresiones en (4.3.4) se convierten en

$$\frac{1}{q}\frac{dp_q}{d\tau} = F\cdot u, \quad \frac{\gamma_5}{g}\frac{dp_g}{d\tau} = F\wedge u. \tag{4.3.5}$$

4.4 Las ecuaciones de la electrodinámica en el espacio y su dual

Como se vió en la sección 3.1, la antisimetría del producto $\gamma_\alpha\wedge\gamma_\beta\wedge\gamma_\delta\wedge\gamma_\lambda$ le otorga al tetravolumen así definido un sentido de orientación. El orden en el que aparecen los factores γ_μ define una orientación del espacio a través del sentido en el que se construye la tétrada canónica[6]; en este caso el sentido positivo corresponde a una permutación par de 0123 en los índices $\alpha\beta\gamma\delta$. Así,

$$\gamma_5 \equiv \gamma_0\wedge\gamma_1\wedge\gamma_2\wedge\gamma_3 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

establece una orientación positiva del espacio. Como puede verificarse a partir de la propiedad (3.1.8), este multivector satisface

$$(\gamma_5)^2 = -I \tag{4.4.1}$$

y se transforma como un escalar bajo la acción de algún elemento de $L_+^\uparrow$, es decir, es invariante bajo transformaciones del grupo restringido[87]; sin embar-

---

[85]Donde se han usado los resultados

$$(\gamma_5)^2 = -I, \quad (F\wedge\gamma_0)\gamma_5 = -\gamma_5\,(F\wedge\gamma_0)$$

que se obtienen de (3.1.8) y de la definición del producto $F\wedge\gamma_0$.

[86]El uso de este término se aclarará en la siguiente sección.

[87]A partir de (3.1.8) se tiene que γ_5 conmuta con todos los bivectores, de manera que conmuta con todos los términos de la serie (3.3.10) pues en ésta aparecen sólo términos proporcionales a γ_5, a los bivectores mismos y a la identidad (*c.f.* notas 75, 76). Se tiene

go frente a la inversión espacial I_S invierte su signo lo que lo convierte en un pseudoescalar[88].

Si se calcula el producto geométrico de γ_5 por cada uno de los elementos de la base vectorial Γ^1, usando la propiedades asociativa del producto y las que resultan de (3.1.8), se obtiene la siguiente correspondencia

$$\begin{aligned}\gamma_0 &\rightarrow \gamma_5\gamma_0 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_0 = \gamma_1\gamma_3\gamma_2,\\ \gamma_1 &\rightarrow \gamma_5\gamma_1 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_1 = \gamma_0\gamma_3\gamma_2,\\ \gamma_2 &\rightarrow \gamma_5\gamma_2 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_2 = \gamma_0\gamma_1\gamma_3,\\ \gamma_3 &\rightarrow \gamma_5\gamma_3 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_3 = \gamma_0\gamma_2\gamma_1.\end{aligned} \tag{4.4.2a}$$

De aquí y de acuerdo con (2.5.6) los cuatro elementos del conjunto Γ^3 pueden escribirse en la forma $\gamma_5\gamma_\mu$ y representan volúmenes orientados, duales de los vectores correspondientes.

En forma análoga, multiplicando por γ_5 los elementos de Γ^2 se obtiene

$$\begin{aligned}\gamma_1\gamma_0 &\rightarrow \gamma_5\gamma_1\gamma_0 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_1\gamma_0 = \gamma_3\gamma_2,\\ \gamma_2\gamma_0 &\rightarrow \gamma_5\gamma_2\gamma_0 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_2\gamma_0 = \gamma_1\gamma_3,\\ \gamma_3\gamma_0 &\rightarrow \gamma_5\gamma_3\gamma_0 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_3\gamma_0 = \gamma_2\gamma_1,\\ \gamma_3\gamma_2 &\rightarrow \gamma_5\gamma_3\gamma_2 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_3\gamma_2 = -\gamma_1\gamma_0,\\ \gamma_1\gamma_3 &\rightarrow \gamma_5\gamma_1\gamma_3 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_1\gamma_3 = -\gamma_2\gamma_0,\\ \gamma_2\gamma_1 &\rightarrow \gamma_5\gamma_2\gamma_1 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_2\gamma_1 = -\gamma_3\gamma_0,\end{aligned} \tag{4.4.2b}$$

correspondencia que coincide con la dual (2.5.3).

Realizando ahora la operación sobre los volúmenes orientados positivamente se encuentra

$$\begin{aligned}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 &\rightarrow \gamma_5\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_0,\\ \gamma_2\gamma_0\gamma_3 &\rightarrow \gamma_5\gamma_2\gamma_0\gamma_3 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_2\gamma_0\gamma_3 = -\gamma_1,\end{aligned} \tag{4.4.2c}$$

---

entonces que γ_5 conmuta con cualquier elemento del grupo restringido de Lorentz y por lo tanto

$$\gamma_5' = L\gamma_5 L^{-1} = \gamma_5 L L^{-1} = \gamma_5,$$

es decir, γ_5 es un invariante del grupo $L_+^\uparrow$.

[88] Bajo el operador paridad, γ_5 se transforma como

$$\gamma_0\gamma_5\gamma_0^{-1} = \gamma_0\,(\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_0 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = -\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_5$$

$$\gamma_1\gamma_3\gamma_0 \rightarrow \gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma_0 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_1\gamma_3\gamma_0 = -\gamma_2,$$
$$\gamma_0\gamma_2\gamma_1 \rightarrow \gamma_5\gamma_0\gamma_2\gamma_1 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\,\gamma_0\gamma_2\gamma_1 = -\gamma_3.$$

Lo anterior deja establecido que la multiplicación por la izquierda de γ_5 por un multivector simple cualquiera M equivale a efectuar la transformación dual del mismo, es decir

$$M^* = \gamma_5 M, \tag{4.4.3}$$

de manera que γ_5 se muestra entonces como el operador de dualidad[89].

La noción de multivector dual permite dividir a las 16 matrices contenidas en la unión de los Γ^n en dos conjuntos tales que los elementos de uno son los duales de los elementos del otro. Tomando primero a los constituyentes de Γ^0, Γ^1 y a los elementos de Γ^2 que contienen un vector temporal se forma el agregado

$$\Gamma^{\mathrm{I}} = \{I,\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_1\gamma_0,\ \gamma_2\gamma_0,\ \gamma_3\gamma_0\},$$

el segundo conjunto es

$$\Gamma^{\mathrm{II}} = \{\ \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\ \gamma_1\gamma_3\gamma_2,\ \gamma_0\gamma_3\gamma_2,\ \gamma_0\gamma_1\gamma_3,\ \gamma_0\gamma_2\gamma_1,\ \gamma_3\gamma_2,\ \gamma_1\gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1\}.$$

A partir de las transformaciones de dualidad (4.4.2) se ve que, en efecto, los elementos de Γ^{II} son los duales de aquéllos contenidos en Γ^{I}, de modo que puede escribirse

$$\left(\Gamma^{\mathrm{I}}\right)^* = \Gamma^{\mathrm{II}}.$$

Según las reglas de transformación bajo paridad (4.3.1) los constituyentes de Γ^{II} tienen un comportamiento opuesto al de los elementos de Γ^{I} frente a la inversión espacial. Los trivectores $\gamma_5\gamma_\mu$ contenidos en Γ^{II}, pueden verse, ya no en su sentido volumétrico, sino como cuatro elementos que constituyen, al igual que los vectores γ_μ; una base del espacio de Minkowski. Esto queda

[89] La correspondencia dual (4.4.3) no es un isomorfismo porque no se conserva la ley de multiplicación; es decir, dados dos multivectores M y N no se cumple

$$M^*N^* = (MN)^*$$

como puede verse, por ejemplo, con $M = \gamma_0$ y $N = \gamma_1$,

$$\gamma_0^*\gamma_1^* = (\gamma_2\gamma_1\gamma_3)(\gamma_2\gamma_0\gamma_3) = \gamma_0\gamma_1 \neq \gamma_2\gamma_3 = (\gamma_0\gamma_1)^*$$

claro por el hecho de que cumplen con la condición (3.1.8a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5\gamma_\nu+\gamma_5\gamma_\nu\gamma_5\gamma_\mu\right) &= -\frac{(\gamma_5)^2}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu\right)= \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu\right)=g_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Así, la correspondencia dual cambia la base escalar por la pseudoescalar, la base natural de los vectores polares por la propia de los pseudovectores, y los planos espacio-temporales por los espaciales.

La expresión (4.1.5) para el campo electromagnético es equivalente, usando (4.4.2b), a

$$\begin{aligned}F &= E_1\gamma_1\gamma_0+E_2\gamma_2\gamma_0+E_3\gamma_3\gamma_0+ \\ &\quad +B_1\left(\gamma_1\gamma_0\right)^*+B_2\left(\gamma_2\gamma_0\right)^*+B_3\left(\gamma_3\gamma_0\right)^*,\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

en donde las componentes eléctricas del campo aparecen como coeficientes de un bivector espacio-temporal, mientras que las componentes magnéticas lo son de los correspondientes bivectores duales.

De (4.1.6), (4.1.7) y (4.4.2a) se tiene que el producto geométrico del campo electromagnético F con el vector u puede expresarse como la suma de un elemento referido a la base $\{\gamma_\mu\}$ y otro referido a la base dual $\{\gamma_\mu^*\}$ como sigue

$$\begin{aligned}Fu &= \gamma_0\left(u^1E_1+u^2E_2+u^3E_3\right)+\gamma_1\left(u^0E_1+u^2B_3-u^3B_2\right)+ \\ &\quad +\gamma_2\left(u^0E_2+u^3B_1-u^1B_3\right)+\gamma_3\left(u^0E_3+u^1B_2-u^2B_1\right)+ \\ &\quad +\gamma_0^*\left(u^1B_1+u^2B_2+u^3B_3\right)+\gamma_1^*\left(u^0B_1+u^3E_2-u^2E_3\right)+ \\ &\quad +\gamma_2^*\left(u^0B_2+u^1E_3-u^3E_1\right)+\gamma_3^*\left(u^0B_3+u^2E_1-u^1E_2\right).\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

En la parte vectorial está contenido el producto interno $F\cdot u$, es decir, la fuerza de Lorentz por unidad de carga, y las componentes del elemento dual coinciden con las de la fuerza magnética, también por unidad de carga.

En forma similar y a partir de (4.2.3) y (4.2.5), puede escribirse a la derivada geométrica del campo F como un multivector al que contribuyen una parte vectorial y otra dual de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\partial F &= \gamma_0\left(\partial_xE_1+\partial_yE_2+\partial_zE_3\right)+\gamma_1\left(-\partial_0E_1+\partial_yB_3-\partial_zB_2\right)+ \\ &\quad +\gamma_2\left(-\partial_0E_2+\partial_zB_1-\partial_xB_3\right)+\gamma_3\left(-\partial_0E_3+\partial_xB_2-\partial_yB_1\right)+ \\ &\quad \gamma_0^*\left(-\partial_xB_1-\partial_yB_2-\partial_zB_3\right)+\gamma_1^*\left(\partial_0B_1+\partial_yE_3-\partial_zE_2\right)+ \\ &\quad +\gamma_2^*\left(\partial_0B_2+\partial_zE_1-\partial_xE_3\right)+\gamma_3^*\left(\partial_0B_3+\partial_xE_2-\partial_yE_1\right).\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

El vector en esta expresión es el que representa a la corriente a través del producto $\partial \cdot F$, como se ve en (4.2.3), y el vector dual es resultado del producto $\partial \wedge F$.

Lo anterior permite expresar al campo electromagnético F, a su derivada ∂F y al producto Fu como la suma de un elemento que pertenece a Γ^{I} más otro contenido en Γ^{II} en la forma

$$\begin{aligned} F &= E_{\Gamma^{\mathrm{I}}} + B_{\Gamma^{\mathrm{II}}}, \\ Fu &= (F \cdot u)_{\Gamma^{\mathrm{I}}} + (F \wedge u)_{\Gamma^{\mathrm{II}}}, \\ \partial F &= (\partial \cdot F)_{\Gamma^{\mathrm{I}}} + (\partial \wedge F)_{\Gamma^{\mathrm{II}}}, \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

donde el subíndice Γ^{I}, Γ^{II} indica pertenencia al conjunto designado.

El campo electromagnético F, su acción sobre un vector velocidad Fu, y su derivada ∂F, es decir, todos los elementos necesarios para establecer las ecuaciones de la electrodinámica, se manifiestan así a través de una parte vectorial y otra dual; la primera contiene todos los vectores tangentes al espacio de Minkowski que frente al grupo $L^{\uparrow}$ forman una representación del mismo lugar geométrico, mientras que en la segunda intervienen los elementos de un espacio tangente de comportamiento opuesto al anterior frente al operador de paridad.

El hecho de que el campo eléctrico E está asociado a cargas eléctricas, que el producto $F \cdot u$ sea la fuerza por unidad de carga eléctrica y que la corriente $\partial \cdot F$ sea producida por cargas en movimiento de esta misma naturaleza, muestra que los fenómenos estrictamente relacionados con las cargas eléctricas están expresados en la base contenida en Γ^{I} (ver (4.4.7)); es decir, lo que las cargas eléctricas producen y frente a lo que reaccionan está escrito en términos de vectores polares, lo que conduce de manera natural a las expresiones para velocidades y fuerzas. De igual forma, los fenómenos puramente magnéticos, entendiendo por éstos las funciones B_i, las fuentes magnéticas $\partial \wedge F$ y las componentes de la fuerza magnética por unidad de carga, se manifiestan sólo a través del espacio dual[90] Γ^{II}.

[90] Esta idea está en la misma línea que la descomposición de una transformación de la forma (3.3.10) en el producto de una rotación pura por una espacial[26]. La primera tiene por generadores a los bivectores $\gamma_i\gamma_0$, o sea, a elementos de Γ^{I}, el mismo conjunto que está vinculado con las funciones E_i, que son en esencia velocidades angulares de rotaciones hiperbólicas (*c.f.* ecuación (2.2.1)). La segunda rotación está generada por los bivectores del conjunto Γ^{II}, a través del cual se manifiestan las funciones B_i asociadas a los parámetros de rotaciones espaciales.

En la sección 4.1 puede verse que la tasa de rotación de un elemento u de un campo de tétradas es de la forma

$$M_2 \cdot u \tag{4.4.8}$$

con M_2 un bivector. Comparando con la expresión (4.3.5), se tiene que la hipotética fuerza magnética no es el resultado de efectuar una serie de rotaciones sobre la tétradas propia de la carga g, al menos mediante la acción de F, como se planteó en el caso de la fuerza de Lorentz en la misma sección. Sin embargo, puede escribirse en la forma (4.4.8) a través del dual de F como sigue

$$\begin{aligned} \frac{dp_g}{d\tau} &= g\,(F \wedge u)\,\gamma_5 = \frac{1}{2} g\,(Fu + uF)\,\gamma_5 = \\ &= \frac{1}{2} g\,(-\gamma_5 F u + u\gamma_5 F) = \\ &= \frac{1}{2} g\,(uF^* - F^* u) = g\,[(-F^*) \cdot u]\,. \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

A partir de la forma del bivector $(-F^*)$ se requiere, para que (4.4.9) corresponda en efecto a una rotación, que las funciones B_i estén ahora relacionadas con ángulos de rotación en los planos espacio temporales, y que las componentes E_i lo estén con ángulos de rotaciones espaciales (que producen rotaciones en sentido opuesto al que define F). Así, lo que solía ser un campo eléctrico, se manifiesta ahora como uno magnético[91] y viceversa. La interpretación de las componentes de F como velocidades angulares se torna entonces ambigua cuando se interpreta *simultánemente* al par de ecuaciones (4.1.4) y (4.4.9) como una tasa de rotación sobre los elementos de un campo de tétradas propias de la partícula cargada, pues la rotación que producen E_i o B_i dependería de la naturaleza eléctrica o magnética de la misma.

Así pues, para que la interpretación de F como un operador de desplazamiento del origen de una tétrada a lo largo de un arco de curva sea consistente y única, debe renunciarse a la idea de una fuerza del tipo de (4.4.9), lo cual es inmediato si se acepta la inexistencia de la carga g.

Las ecuaciones homogéneas (4.2.6) junto con las no homogéneas (4.2.3) están contenidas en la siguiente expresión de la derivada geométrica del campo electromagnético

$$\partial F = J \tag{4.4.10}$$

[91] Entendidos los campos eléctrico y magnético como se definieron en la sección 2.3, es decir, en función de las rotaciones a las que dan lugar.

la cual se interpreta, puesto que sus soluciones están completamente determinadas por las componentes de la corriente J, diciendo que ésta es su única fuente[92]. Siendo así, las ecuaciones de la electrodinámica pueden leerse diciendo que la existencia de una carga en el espacio tiempo, al dar lugar a una corriente J, induce una rotación de cada marco de referencia propio de una carga en cada punto del espacio, cuya tasa de cambio por unidad de carga está dada por el campo electromagnético F.

[92] Las cuatro componentes de J definen a las cuatro componentes del (multi)vector potencial A a través de la ecuación (*c.f.* sección 2.6.1)

$$J = \Box A \equiv \partial^2 A = (\partial\partial)\, A = \partial\,(\partial A) = \partial\,(\partial \wedge A) = \partial F$$

donde se usó la condición de Lorenz $\partial \cdot A = 0$.

Conclusiones y perspectivas del trabajo

Las ecuaciones que permiten describir los fenómenos electromagnéticos son básicamente resultado de la manifestación del grupo de Lorentz en el espacio tangente de Minkowski. Los vectores tangentes en cada punto de la trayectoria de las cargas generadoras del campo producen el efecto de una rotación infinitesimal sobre los vectores tangentes anclados a una carga de prueba. Las ecuaciones que relacionan los vectores fuente con las velocidades angulares instantáneas de rotación por unidad de carga en cada punto del espacio, constituyen las ecuaciones de Maxwell, mientras que la fuerza de Lorentz es la expresión de la rotación infinitesimal a la que dan lugar dichas velocidades angulares, efectuada sobre el vector velocidad de la carga de prueba. En efecto, según lo que se mencionó en la introducción, la concepción del campo electromagnético como una rotación del espacio de Minkowski, se justifica por la consistencia de los resultados que de ella se obtienen con la teoría comúnmente usada.

El primer elemento crucial en esta descripción es el espacio tangente de velocidades. Sus elementos se transforman igual que los puntos del espacio de Minkowski frente al grupo ortócrono; es necesario entonces que la base que describa a este espacio tangente defina una métrica igual a la de Minkowski, y que sus elementos sigan reglas de transformación frente al operador paridad análogas a la de los puntos del espacio. El segundo pilar del planteamiento está compuesto por los seis generadores del grupo restringido de Lorentz; en cada uno de ellos, por dar lugar a rotaciones planares, aparece una idea intrínseca de orientación que se manifiesta en su antisimetría; en consecuencia, la representación en cualquier espacio de los generadores de rotación debe consistir de elementos antisimétricos.

El álgebra de Dirac, entendida como una regla de multiplicación, es una operación simétrica entre los elementos que la satisfacen y que cumplen con los requerimientos para formar una base del espacio tangente. A esta operación se le puede asociar una contraparte antisimétrica, carácter que le imprime al nuevo producto un sentido de orientación, a partir del cual pueden establecerse los generadores del grupo restringido.

Se tiene así que el producto geométrico entre objetos que satisfacen el álgebra de Dirac provee los elementos necesarios para la descripción completa de los fenómenos electromagnéticos. Cuando el producto se realiza entre dos vectores, se reúnen en un sólo concepto dos elementos clave en el contexto de las transformaciones entre sistemas inerciales: los invariantes, que aparecen en la parte simétrica del producto, y los generadores del grupo restringido, contenidos en la antisimétrica. Así, las transformaciones generadas por la base de los productos antisimétricos, dejan invariante al producto simétrico.

Establecer la correspondencia entre las bases del espacio de Minkowski y las matrices de Dirac permite que el análisis de las transformaciones del grupo completo de Lorentz se centre en los vectores mismos y, en consecuencia, que tanto las funciones de coordenadas como todas aquéllas que toman valores en los reales, en particular las velocidades angulares de rotación y por ende las componentes del campo, se mantengan invariantes bajo la transcripción de las ecuaciones de uno a otro espacio. La sustitución de los vectores canónicos del espacio de Minkowksi por las matrices de Dirac tiene además la ventaja de que el comportamiento de los vectores frente a la operación de paridad se ve naturalmente reflejado en la base a la que están referidas sus componentes.

Las ecuaciones de Maxwell identifican a la carga eléctrica como fuente única del campo electromagnético, pues en ellas se manifiesta la inexistencia de una carga magnética. La fuerza de Lorentz, por lo tanto, refleja la acción del campo sobre las únicas cargas electromagnéticas consistentes con ellas: las eléctricas. Sin embargo, aún cuando el cuadrivector correspondiente a la fuente magnética tenga todas sus componentes nulas, éstas son de naturaleza distinta a aquéllas que forman el vector de corriente eléctrica. Cuando las ecuaciones se expresan en términos de matrices de Dirac, la base del espacio en la que aparece escrita la fuente magnética se comporta en forma opuesta frente al operador paridad a como lo hace aquélla en la que se expresan la fuente eléctrica y la fuerza de Lorentz. Esta base es además, elemento a elemento, ortogonal a la que conforman las matrices γ y el espacio que subtiende, en el que se manifiestan pseudocuadrivectores, se identifica con el espacio dual. Esta distinción entre bases que surge en el contexto multivectorial, permite diferenciar los fenómenos electromagnéticos según el tipo de carga que éstos involucren. Si en el espacio de vectores tangentes de velocidad se presentan fenómenos eléctricos, entonces en el dual se manifiestan los de índole magnética.

El campo electromagnético F está formado a partir de los planos que contienen tanto el espacio como su dual y representa el vínculo entre ambos que mantiene una sola unidad geométrica. Su interpretación como el de un operador que induce rotaciones sobre el campo de tétradas propio de una carga de prueba, es única siempre que no existan cargas magnéticas; en caso contrario las rotaciones del sistema propio de una carga magnética estarían dadas por el dual de F, por lo que se tendrían dos operadores de rotación: las tétradas que viajan con una carga eléctrica se transformarían bajo el operador F, mientras que las propias de una carga magnética lo harían a través de F^*, es decir, a través de elementos exclusivos de una representación inequivalente del grupo restringido de Lorentz. Así, la existencia de una partícula magnética obligaría a replantear el concepto de campo electromagnético como aquí se ha descrito.

Todos los resultados anteriores han surgido de un análisis que considera únicamente transformaciones del grupo completo de Lorentz. El planteamiento de las ecuaciones de la electrodinámica, así como la interpretación de los elementos que las constituyen, están entonces estrechamente relacionados con el grupo y sus propiedades. Aún la posibilidad física de una carga eléctrica de signo opuesto puede verse como resultado de que los operadores de rotación forman un grupo, y concretamente, surge de la correspondencia interna de una transformación con su inversa.

El trabajo contenido en esta tesis, lejos de ser un estudio acabado, puede tomarse como punto de partida para subsecuentes exploraciones no sólo en el ámbito de la electrodinámica, sino también en cualquiera que involucre un tratamiento relativista o relaciones de invariancia. A continuación se presentan, a manera de ejemplo, dos propuestas a tratar con los elementos y el método desarrollados a lo largo del trabajo.

La primera de ellas consiste en indagar sobre el significado físico y geométrico del potencial electromagnético A, elemento fundamental que media entre la fuente y la determinación del campo que ésta produce. Un primer acercamiento se sigue tras verificar que el vector A se transforma, bajo las inversiones espacial y temporal, como un vector velocidad. Ahí donde una carga libre q se desplaza en el espacio-tiempo, está definido un vector tangente dado por la velocidad u de la partícula; la existencia de una fuente eléctrica en otro punto del espacio da lugar, justo donde está anclado u, al vector A;

como ambos son de la misma naturaleza, el vector U

$$U = u + \frac{q}{m} A$$

es un elemento del espacio tangente con reglas de transformación bien definidas frente a operadores del grupo de Lorentz. En este vector se reúne información sobre lo que el sistema fuente-carga produce en el espacio tangente anclado a la carga de prueba; esta última contribuye con el vector u, y la fuente lo hace indirectamente a través de A, el factor q/m que lo multiplica hace propio de cada partícula al vector U. El análisis de este campo vectorial desde la óptica del trabajo, puede conducir a una interpretación geométrica del potencial, así como de la sustitución del momento p de la carga de prueba por el momento canónico $P = p + qA$.

La segunda tarea que puede abordarse se presenta ahora en un contexto en el que generalmente no se consideran los elementos γ_μ como constituyentes de una base del espacio de Minkowski, sino como operadores sobre vectores columna de cuatro componentes, conocidos como 4-*espinores*. Tal es el caso cuando aparecen en la ecuación de Dirac

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \psi(x) = m\psi(x),$$

en la que $\psi(x)$ es la función de onda de una partícula de masa m y espín 1/2.

La expresión de la electrodinámica en términos de matrices de Dirac adquiere mayor sentido y justificación cuando se conjunta con el hecho de que la función de onda que describe al electrón satisface la ecuación de Dirac. Cuando la carga e está en presencia de un campo electromagnético externo, la ecuación para su función de onda se convierte en (usando notación multivectorial)

$$i\partial\psi(x) = m\psi(x) + eA\psi(x).$$

La comprensión del significado de la ecuación de Dirac puede enriquecerse cuando se ven sus matrices, no en un sentido exclusivamente vectorial u operativo, sino desde ambos puntos vista, permitiendo la flexibilidad para pasar de una interpretación a otra. Entendidas las matrices de Dirac como elementos de un marco de referencia, y en relación con el trabajo expuesto, convendría por ejemplo, analizar el significado de la ecuación cuando ésta se transcribe a la tétrada dual. Bajo la sustitución $\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu^* = \gamma_5\gamma_\mu$ la ecuación de Dirac en presencia de un potencial electromagnético se convierte en

$$\begin{aligned} i\gamma^*_\mu \partial^\mu \psi(x) &= i\gamma_5\gamma_\mu \partial^\mu \psi(x) = \\ &= -i\gamma_\mu \partial^\mu \gamma_5 \psi(x) = \\ &= m\gamma_5\psi(x) - e\gamma_\mu A^\mu \gamma_5 \psi(x), \end{aligned}$$

de las dos últimas igualdades se tiene

$$i\partial\psi^*(x) = -m\psi^*(x) + eA\psi^*(x),$$

de modo que la ecuación de Dirac en el espacio dual es la ecuación de Dirac en el espacio original para el cuadriespinor $\gamma_5\psi(x) \equiv \psi^*(x)$, en donde la masa m ha invertido su signo. A partir de una interpretación congruente del espacio dual, se está en posibilidades de dar significado a los cuadriespinores transformados ψ^*. Resulta también interesante averiguar qué significa que bajo la correspondencia dual el objeto $\gamma_\mu\partial^\mu$ pueda expresarse de la forma

$$\begin{aligned} \gamma_5\gamma_\mu\partial^\mu &= \gamma_3\gamma_2\left(\gamma_1\partial^0 + \gamma_0\partial^1\right) + \gamma_1\gamma_0\left(\gamma_2\partial^3 - \gamma_3\partial^2\right) \\ &= \gamma_2\gamma_1\left(\gamma_3\partial^0 + \gamma_0\partial^3\right) + \gamma_3\gamma_0\left(\gamma_1\partial^2 - \gamma_2\partial^1\right) \\ &= \gamma_1\gamma_3\left(\gamma_2\partial^0 + \gamma_0\partial^2\right) + \gamma_2\gamma_0\left(\gamma_3\partial^1 - \gamma_1\partial^3\right), \end{aligned}$$

en la que que sugieren los generadores de rotación sobre el espacio y las funciones.

Todo lo anterior apunta en la dirección de ampliar la interpretación de las expresiones que poseen carácter físico, a través de un lenguaje multivectorial que resalta las propiedades geométricas de aquéllo que describe.

Apéndice A

Grupo de Lorentz

A.1 Definición de grupo

Se dice que un conjunto G de elementos es un grupo si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. El producto $g_1 g_2$ de cualesquiera dos elementos de G está bien definido de tal manera que $g_1 g_2 \in G$.

2. El producto de tres elementos de G es asociativo, es decir $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$

3. Existe un único elemento I en G tal que $Ig = gI = g$ para toda $g \in G$

4. Para toda $g \in G$ existe un único elemento $g^{-1} \in G$ tal que $g^{-1} g = g g^{-1} = I$

A.2 Grupos de Lie

En términos generales, los elementos de un grupo continuo son transformaciones que mapean un punto $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ de un espacio $n-$dimensional en otro punto $M'(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ del mismo espacio. Tales transformaciones dependen de un conjunto de r parámetros continuos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$, de manera que hay n funciones

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r) = G(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$$

que las definen analíticamente. Estas transformaciones se considerarán lineales.

El conjunto de todas las transformaciones que se obtienen cuando los parámetros α_j adquieren todos sus posibles valores a lo largo de su dominio continuo, forma un grupo si satisface las siguientes propiedades:

1. El producto (o la composición) de dos transformaciones sucesivas es otra transformación del conjunto, y es tal que

$$G(\alpha_1, ..., \alpha_r)\, G(\alpha'_1, ..., \alpha'_r) = G(\alpha''_1, ..., \alpha''_r),$$

donde

$$\alpha''_i = \phi_i(\alpha_1, ..., \alpha_r; \alpha'_1, ..., \alpha'_r), \qquad i = 1, 2, ..., r$$

con ϕ_i una función diferenciable con respecto a todas sus variables.

2. El producto de dos transformaciones es asociativo.

3. La transformación identidad E, definida como aquélla para la cual $x'_i = x_i$, debe pertenecer al conjunto. Se cumple además que

$$G(\alpha_1, ..., \alpha_r)\, E = EG(\alpha_1, ..., \alpha_r) = G(\alpha_1, ..., \alpha_r),$$

y α_j^0 son los correspondientes valores de los parámetros de la transformación idéntica, es decir

$$x_i = f_i\left(x_1, x_2, ..., x_n; \alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_r^0\right).$$

Como los parámetros pueden modificarse por un cambio en el origen, siempre puede hacerse $\alpha_j^0 \doteq 0$.

4. Toda transformación $G(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ debe ser invertible y su inversa G^{-1} debe pertenecer al conjunto de transformaciones,

$$G(\alpha_1, ..., \alpha_r)\, G^{-1}(\alpha_1, ..., \alpha_r) = E.$$

Los grupos de transformaciones que satisfacen 1 a 4 se conocen como *grupos de Lie.*

A.3 Grupo de Lorentz

A partir de (1.1.2) puede probarse que las transformaciones L forman un grupo de la siguiente manera:

El producto L_1L_2 de dos transformaciones está bien definido como la multiplicación usual entre matrices; dado que ambas satisfacen (1.1.2) se tiene

$$\widetilde{L_1L_2}gL_1L_2 = \widetilde{L_2}\widetilde{L_1}gL_1L_2 = \widetilde{L_2}\left(\widetilde{L_1}gL_1\right)L_2 = \widetilde{L_2}gL_2 = g,$$

cumpliéndose las condiciones 1 y 2 de $A.1$. Es evidente que $I_{(4\times4)}$ satisface (1.1.2), de modo que la identidad es una transformación de Lorentz; además, como $\widetilde{L} = L^{-1}$, se tiene

$$\widetilde{\left(\widetilde{L}\right)} g\widetilde{L} = Lg\widetilde{L} = L\left(\widetilde{L}gL\right)\widetilde{L} = g,$$

por lo que $\widetilde{L}$, y por lo tanto L^{-1}, es una transformación de Lorentz, resultados estos últimos que, por las condiciones 3 y 4 de $A.1$, muestran que las transformaciones L forman un grupo.

Apéndice B

Algebras

B.1 Definición de un álgebra

Un *álgebra* se compone a partir de un espacio vectorial V en el que se ha definido una composición interna entre sus elementos llamada *producto*. A cada pareja (x, y) de vectores de V se le asocia un elemento z, que pertenece también a V, a través del producto $\diamond$, en la forma

$$z = x \diamond y.$$

Se dice que el álgebra es asociativa si

$$x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond x,$$

el producto es además bilineal, de manera que se cumple

$$\left(\sum_i a_i x_i\right) \diamond \left(\sum_j b_j y_j\right) = \sum_{ij} a_i b_j \left(x_i \diamond y_j\right).$$

B.2 Algebras de Clifford

Dado un conjunto de n elementos $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ tales que

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\eta_{ij}$$

pueden formarse los siguientes 2^n productos

$$1, e_{i,} e_i e_j, ..., e_1 e_2 ... e_n.$$

Estos son linealmente independientes y forman la base de un espacio vectorial sobre el campo de los reales, que junto con la noción de producto determina un álgebra llamada *álgebra de Clifford.*

En el caso de las matrices γ_μ la relación que satisfacen corresponde a $\eta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, de manera que éstas forman una base de un álgebra de Clifford.

B.3 Algebras de Lie

Un *álgebra de Lie* $\mathcal{L}$ es un espacio vectorial definido sobre un campo K en el que se ha definido un producto $[\cdot,\cdot]$, llamado *paréntesis (bracket) de Lie,* que tiene las siguientes propiedades

1. Si x y y son elementos de $\mathcal{L}$, entonces $z = [x, y] \in \mathcal{L}$
2. Si a y b son elementos de K, entonces $[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$
3. El producto es anticonmutativo, es decir $[x, y] = -[y, x]$
4. Se satisface la *identidad de Jacobi* $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Si el campo K es el de los reales (complejos), entonces se dice que $\mathcal{L}$ es un *álgebra real (compleja) de Lie.*

B.3.1 Constantes de estructura

Si el conjunto $\{E_i\}$ forma una base del álgebra de Lie, entonces por la propiedad 1 su producto debe pertenecer también al álgebra,

$$[E_i, E_j] = \sum_k c_{ijk} E_k.$$

Las constantes c_{ijk} son llamadas *constantes de estructura* del álgebra de Lie. Así, un álgebra de Lie está caracterizada por un conjunto de constantes de estructura tales que, por las propiedades 3 y 4, cumplen

$$\begin{aligned} c_{ijk} &= -c_{jik} \\ \sum_m \left(c_{ijm}c_{mkr} + c_{jkm}c_{mir} + c_{kim}c_{mjr}\right) &= 0, \quad r = 1, ..., m \end{aligned}$$

B.4 El álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie

Generalmente, si un grupo de Lie $n-$dimensional consta de transformaciones lineales T, los parámetros $s_1, s_2, ..., s_n$ cercanos a la identidad I pueden elegirse de tal manera que los operadores $T(s)$ se escriban en serie de potencias de cada uno de dichos parámetros

$$T = I + s_1 I_1 + s_2 I_2 + ... + s_n I_n. \qquad (B.4.1)$$

Derivando esta expresión con respecto a $s_1, s_2, ..., s_n$ y evaluando en $s = 0$, se obtienen los n generadores $I_1, I_2, ..., I_n$. Así, todos los elementos del grupo pueden escribirse, cerca de la identidad, como

$$T = \exp(t_1 I_1)\exp(t_2 I_2)...\exp(t_n I_n)$$

donde $t_1, t_2, ..., t_n$ es un nuevo conjunto de parámetros.

Las transformaciones lineales

$$J = u_1 I_1 + u_2 I_2 + ... u_n I_n \qquad (B.4.2)$$

que se obtienen diferenciando $(B.4.1)$ en la dirección arbitraria del vector u, pueden emplearse para expresar a cualquier elemento del grupo en la forma

$$T = \exp(u_1 I_1 + u_2 I_2 + ... u_n I_n) = \exp J.$$

Los operadores $(B.4.2)$ forman un álgebra, llamada *álgebra de Lie del grupo* correspondiente. En ella, están definidas tres operaciones: la suma, la multiplicación por números reales, y la operación

$$[A, B] = AB - BA.$$

El conmutador $[A, B]$ es un elemento del álgebra y en particular, para los generadores del grupo se cumple, como se vio anteriormente,

$$[I_i, I_j] = \sum_k c_{ijk} I_k.$$

De esta manera, con todo grupo de Lie G se asocia de manera intrínseca un álgebra de Lie $\mathcal{G}$ que está determinada por sus generadores. En el caso del grupo restringido de Lorentz, las reglas de conmutación que satisfacen sus generadores S y T son

$$\begin{aligned} [S_i, S_j] &= -\epsilon_{ijk} S_k \qquad (B.4.3) \\ [T_i, T_j] &= \epsilon_{ijk} S_k \\ [S_i, T_j] &= -\epsilon_{ijk} T_k. \end{aligned}$$

El hecho de que las constantes de estructura del grupo sean ϵ_{ijk} es resultado de que cuando se efectúan dos rotaciones en planos que son ajenos, es decir, que no tiene vectores en común, los puntos en uno de ellos no se ven afectados por la rotación del otro y viceversa, de aquí que las rotaciones en los planos $\omega_{(10)}\omega_{(32)}$, $\omega_{(20)}\omega_{(13)}$, $\omega_{(30)}\omega_{(21)}$ conmuten y por lo tanto$[S_i, T_j] = 0$ para $i = j$. También conmutan las rotaciones realizadas sucesivamente en un mismo plano, pues en este caso la rotación es una transformación uniparamétrica equivalente a una traslación en el espacio de parámetros que por lo tanto es conmutativa, por ello $[S_i, S_j] = [T_i, T_j] = 0$, para $i = j$. El cambio de signo bajo la permutación $ij \to ji$ es consecuencia de la antisimetría del anticonmutador.

El problema de determinar todas las representaciones continuas del grupo restringido de Lorentz, puede reducirse al problema algebraico de encontrar seis operadores A_k $(k = 1, 2, ..., 6)$ que satisfagan $(B.4.3)$. Tales operadores constituyen el conjunto de generadores infinitesimales de la correspondiente representación.

Apéndice C

Representaciones de un grupo

Sea G un grupo y T un operador lineal que actúa sobre un espacio vectorial V de dimensión finita n. Cuando es posible asociar a todo elemento $g \in G$ un operador $T_g \in T$ de tal manera que

$$T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}, \qquad\qquad T_{g_0} = I, \tag{C.1}$$

donde g_0 es el elemento identidad de G, e I es el operador identidad; entonces se dice que se ha establecido una representación $n-$dimensional, $g \rightarrow T_g$, del grupo G en el espacio V, llamado espacio de representación.

Ante un cambio de base del espacio vectorial

$$\{e_i\} \rightarrow \{e'_i\} = \left\{ \sum_j B_{ij} e_j \right\}$$

la matriz T que representa al operador lineal referida a la base $\{e_i\}$ se transforma de acuerdo con la regla

$$T \rightarrow T' = BTB^{-1}.$$

Si $Tv = w$, entonces

$$T'v' = \left(BTB^{-1}\right) Bv = B\left(Tv\right) = Bw = w'.$$

Para el efecto de las transformaciones de los vectores de V, el cambio de base resulta así irrelevante, por lo que si existen dos representaciones de igual dimensión tales que

$$T' = BTB^{-1} \tag{C.2}$$

entonces se dice que tales representaciones son equivalentes, es decir, son la misma aunque referida a distintas bases de V.

Una vez que se ha establecido una representación $g \rightarrow T_g$, si sucede que para todo elemento m de M, con M un subespacio vectorial de V

$$T_g m \in M, \tag{C.3}$$

entonces M es invariante bajo la representación y puede pensarse en T_g como operadores exclusivos sobre M, formándose así la representación de G en M.

Así, dada una representación se pueden buscar otras en los subespacios vectoriales de V bajo los cuales se satisfaga (C.3). El subespacio más pequeño M para el cual esto suceda, es decir, el mínimo subespacio vectorial de V invariante bajo la transformación, es el que formará el espacio de la representación *irreductible.*

Existen, sin embargo, representaciones en las que g y T_g no se relacionan de la forma (C.2); es decir, no existe una matriz B que cumpla (C.2). En ese caso se dice que las representaciones son inequivalentes.

Referencias

[1] Barut, A. O. *Electrodynamics and classical theory of fields and particles.* (New York: Dover, 1980).

[2] Baylis, W. E., Huschilt, J., y Wei, Jiansu. *Why i?,* Am. J. Phys. **60** (9), 788 (1992).

[3] Eyges, Leonard. *The classical electromagnetic field.* (Dover, 1980).

[4] Hamermersh, M. *Group theory and its application to physical problems.* (E.U: Addison-Wesley, 1962).

[5] Hamilton, J. Dwayne. *The Dirac equation and Hestenes' geometric algebra,* J.Math. Phys. **25** (6), June 1984.

[6] Hestenes, David. *Proper particle mechanics,* Jour. Math. Phys. 15, 1768 (1974).

[7] Hestenes, David. *Vectors, spinors, and complex numbers in classical and quantum physics,* AJP 39, 1013 (1971).

[8] Hladik, Jean. *Spinors in physics.* (E.U: Springer-Verlag, 1999).

[9] Jackson, John David. *Classical electrodynamics.* Third edition. (E.U: Wiley, 1999).

[10] Jauch, J.M and Rohrlich F. *The theory of photons and electrons.* Second edition. (Springer-Verlag, 1980).

[11] Larmor, J. *On the theory of the magnetic influence on spectra; and on the radiation from moving ions,* Philosophical Magazine, Dic 1897.

[12] MacFarlane, A. J. *On the restricted Lorentz group and groups homomorphically related to it*, Jour. Math. Phys. 3, 1116 (1962).

[13] Naimark, M. A. *Linear representations of the Lorentz group.* (Poland: Pergamon Press, 1964).

[14] Norbury, John W. *The invariance of classical electromagnetism under charge conjugation, parity and time reversal (PCT) transformations*, Eur. J. Phys. 11 (1990) 99-102.

[15] O'Neill, Barret. *Elementary Differential Geometry.* Second edition. (E.U: Academic Press, 1997).

[16] Pauli, W. *Theory of relativity.* (Canada: Dover, 1981).

[17] Prieto, Angel. *On the electrodynamic group: The relativistic radiation reaction force*, Jour. Math. Phys. 39, 1478-1494 (1998).

[18] Rindler, Wolfgang. *Introduction to special relativity.* (New York: Oxford University Press, 1982).

[19] Rosen, Joe. *Transformation properties of electromagnetic quantities under space invertion, time reversal, and charge conjugation,* Am. J. Phys. **41**, 586 (1973).

[20] Ryder, L. *Quantum field theory.* (Cambridge: Cambridge University, 1988).

[21] Streater, R. F. y Wightman, A. S. *PCT, spin and statistics, and all that.* (New York: Addison-Wesley, 1989).

[22] Synge, J. L. *Relativity: The special theory.* (Netherlands: North-Holland, 1972).

[23] Vold, Terje G. *An introduction to geometric calculus and its application to electrodynamics,* Am. J. Phys. **61** (6), 505 June 1993.

[24] Vold, Terje G. *An introduction to geometric algebra with an application in rigid body mechanics,* Am. J. Phys. **61** (6), 491 June 1993.

[25] Waerden van der, B. L. *Group theory and quantum mechanics.* (Germany: Springer-Verlag, 1974).

[26] Wightman, A. S. *L'invariance dans la mécanique quantique relativiste,* en *Dispersion relations and elementary particles,* editado por C. de Witt y R. Omnés. (New York: John Wiley & Sons, 1960).