



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPIEDADES FISICAS DE REDES
EXPONENCIALES ORDENADAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

IGNACIO ROZADA DIEGO FERNANDEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RAFAEL ANGEL BARRIO PAREDES



2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Propiedades Físicas de Redes Exponenciales Ordenadas"

realizado por Ignacio Rozada Diego Fernández

con número de cuenta 09950490-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de:Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dr. Rafael Barric Paredes

Propietario

Dra. Julia Tagüeña Parga

Propietario

Dr. Hernán Larralde Ridaura

Suplente

Dr. Denis Pierre Boyer

Suplente

Dr. Faustino Sánchez Garduño

Consejo Departamental de Física

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciaturas
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

A mi padre, y a mi madre (2000 †)

Agradecimientos

Deseo agradecer muy especialmente al Dr. Rafael Barrio por todo el apoyo a lo largo de este año, por todas las cosas que tuve la oportunidad de aprender a su lado, y que condujeron al trabajo aquí presente. También deseo agradecerle a su esposa, la Dra. Chumin Wang, sus comentarios y valiosa ayuda.

Agradezco también a mis sinodales, Dra. Julia Tagüeña Parga, Dr. Hernán Larralde Ridaura, Dr. Denis Pierre Boyer y Dr. Faustino Sánchez Garduño, por la concienzuda lectura y subsiguientes comentarios que condujeron a un sustancial mejoramiento de mi tesis.

Agradezco mucho al grupo de biomatemáticas de la facultad y del instituto de física, por ayudarme a encontrar algo que me apasionó: Dr. Pedro Miramontes, Dr. Octavio Miramontes, Dra. Lourdes Esteva, Dr. Pablo Padilla, Dr. Germinal Cocho, Dr. Faustino Sánchez (otra vez), y toda la gente de las escuelas de otoño en biomatemáticas.

Agradezco también a tantos excelentes profesores que conocí a lo largo de mis estudios, durante la prepa en León, la UNAM, y el semestre que estuve en Nueva York, y que son parcialmente responsables de lo que soy después de estos años: Fís. Wenceslao Oñate, Dr. Max Neumann, Dr. Jorge Ize, Dr. Juan Manuel Lozano, Dr. Rubén Barrera, Dra. Maria del Carmen Jorge y Jorge, Dr. John Rinzel, Dr. Charles Peskin, Dra. Martha Rosette, M. en C. Lourdes Velasco, y tantos otros.

Nada de esto hubiera sido posible en otro lugar, por lo que agradezco con mucho cariño a esa entidad abstracta y utópica que es la UNAM, y que sin embargo tiene tantas cosas concretas que propician una vida estudiantil y académica completa, y de primerísima calidad.

Después de todos los agradecimientos académicos, tengo que agradecer muy especialmente a todos mis compañeros y amigos a lo largo de estos años de carrera: Fermín, Ilse, el actuario, Vero, Abel, Olivia, Quique, Luis, Marco, Julieta, Andrés, durante los primeros semestres, la banda de NYU y Vasthidú, la femto,

Cristelia, Huguito, el men, Cynthia, Carolina, Angel, estos últimos semestres, y todos los que me faltaron por distraído. A la banda de escalada, con todas sus estrellas internacionales, a la gente del voluntariado que tanto compartimos durante mi año anterior a la UNAM, a los cuates del Lux y a los del FLC. Al don de los brinquitos, a los de la barbacoa del estadio y de Copal, a los del Venadito y demás garnachas que mantuvieron ocupado a mi estómago y al baño de mi casa.

A mi familia, primos y tíos, y en especial mi abuelita Margarita y a Jose, con las que conviví de cerca algunos de mis años en la UNAM. A mis hermanos, a la hermana y muy especialmente al jefe, gracias por su paciencia, apoyo y mentadas.

Y por último, a mi novia Toto, que me acompañó a pesar de la distancia estos años.

Índice

- Introducción

- Capítulo 1: Antecedentes
 - **1.1 Percolación y Árboles de Cayley**
 - **1.2 Redes Aleatorias**
 - **1.3 Redes de Mundo Pequeño**
 - **1.4 Redes Libres de Escala**

- Capítulo 2: El Modelo: Redes Exponenciales Ordenadas
 - **2.1 Motivación**
 - **2.2 Construcción**
 - **2.3 Propiedades**

- Capítulo 3: Aplicaciones de Redes Exponenciales Ordenadas
 - **3.1 Problema del Caminante Dirigido**
 - **3.2 Modelación de una Red de Neuronas**

- Conclusiones

- Apéndices
 - Apéndice 1: Redes Reales**
 - Apéndice 2: Programas en MATLAB**

- Bibliografía

Introducción

En estos tiempos, el estudio de redes complejas ha sido objeto de gran interés. Una de las razones es que se trata de la única herramienta para atacar una serie de problemas en los que hay innumerables unidades interactuando de manera no trivial. Éstas pueden ser desde la red de Internet, la red de las amistades de una comunidad, la red de seres susceptibles a una enfermedad particular, etc., en las que resulta demasiado complicado analizar el problema caso por caso, y a pesar de ello, hay una estructura que lo delimita.

Una de las razones del éxito de la teoría de redes, es que actualmente se cuenta con una gran cantidad de bases de datos sobre redes reales, lo que aunado con el poder de cómputo actual, permite hacer cálculos y estadística sobre redes de cientos de miles de unidades. Las unidades en una red se llaman nodos, y las uniones entre los nodos se llaman enlaces. Otro atractivo del estudio de redes complejas es que su presencia se extiende por todos los campos, por ejemplo, en el campo científico se aplica desde la física de estado sólido (Wiesenfeld, 1996) hasta la biología del genoma (Kauffman, 1969), pasando por la fisiología neuronal (Bhatt & Lee, 1982). En la industria hay miles de aplicaciones, por ejemplo, en las redes de comunicación como Internet y redes locales (Kirkpatrick & Belitz, 1996); en las redes de distribución, donde se busca maximizar el alcance de una red de distribución con el menor número de nodos (en la red de tiendas Domino's Pizza se tiene que cubrir una ciudad de tal manera que pueda llegar el producto en menos de 30 minutos a cualquier punto, con el menor número de tiendas); en las redes de energía eléctrica se busca robustecer la red de suministro de electricidad, para que un fallo local no cause un colapso general; etcétera.

La teoría moderna de redes complejas es algo muy nuevo, con menos de diez años de vida, por lo que en la tesis dedicamos un capítulo a los antecedentes que le dieron vida, y que se remontan a principios del siglo XX, pasando por el auge que hubo a fines del siglo pasado, hasta una nueva propuesta de red que reúne algunas de las propiedades más interesantes en varios modelos que se pensaban completamente opuestos. Las redes exponenciales ordenadas a las que se refiere el título de esta tesis, las nombramos exponenciales pues a partir de un nodo inicial el número de nodos en la red aumenta por capas de manera exponencial, y son ordenadas en el sentido de que las interconexiones de nodos y

enlaces están definidas explícitamente, y no en función de una probabilidad de conexión. Consideramos con red ordenada toda red que, al construirse repetidamente, siempre mantenga estrictamente la misma estructura. Las redes aleatorias, en cambio, están definidas bajo una probabilidad de que cada pareja de nodos esté conectada, lo que da lugar a redes diferentes en cada construcción.

El criterio bajo el que está ordenado el primer capítulo de la tesis es estrictamente cronológico: alrededor de 1920 surgen los árboles de Cayley como curiosidades matemáticas, en 1959 – 1960 Erdős y Rényi publican los artículos con los que nace el estudio de las redes aleatorias, en 1998 Watts y Strogatz publican su famoso artículo en *Nature* sobre redes de mundo pequeño, seguido de cerca en 1999 por artículos de Barabási, Albert y Jeong en *Science* y *Nature* sobre redes libres de escala.

En la primera sección del primer capítulo tratamos el problema de percolación. Se trata de un problema físico en el que los árboles de Cayley, estructura sobre la que se basan las redes exponenciales ordenadas, tienen particular relevancia y utilidad comparados con otras redes ordenadas. Esta sección da una idea de las propiedades que hacen que los árboles de Cayley sean tan útiles en problemas de física estadística, y que fueran la razón por la que se utilizaron en este trabajo.

En la segunda sección del primer capítulo se exponen los primeros trabajos que hubo sobre redes aleatorias. A diferencia del primer capítulo, en que se trabajó con redes ordenadas de baja dimensionalidad, el enfoque principal aquí es el caso general de redes aleatorias. A partir del estudio de la aparición de propiedades monótonas se conecta con el problema de percolación visto en la sección 1.1. Asimismo, tanto las redes aleatorias como los árboles de Cayley pertenecen a la misma familia de redes de dimensionalidad infinita.

La sección 1.3 presenta un nuevo tipo de redes que oscilan entre las redes aleatorias y las redes ordenadas. Es en parte un estudio sobre la transición de una red ordenada a una red aleatoria, mediante el desordenamiento de los enlaces en una red originalmente ordenada. Este tipo de redes, conocidas como redes de mundo pequeño, tienen propiedades muy interesantes, pues un poco de desorden sobre una red ordenada la vuelve más eficiente en transporte, pues la distancia

entre todos los pares de nodos se vuelve más pequeña que cuando la red era completamente ordenada. Otro punto interesante sobre las redes de mundo pequeño, es que definen una serie de parámetros que es posible evaluar en redes reales y así determinar si éstas presentan propiedades de mundo pequeño o no.

En el segundo capítulo compararemos las redes de mundo pequeño con las redes exponenciales ordenadas. Mostraremos que no siempre se cumple la suposición de que al desordenar un poco los enlaces en una red ordenada, ésta se vuelva más eficiente en transporte y comunicación. En particular, cualquier cantidad de desorden afecta negativamente la capacidad de transporte de las redes exponenciales ordenadas, contrariamente a lo expresado en la literatura (Watts, 1999).

La sección 1.4 trata sobre un nuevo refinamiento a la teoría de redes, en la forma de las redes con distribución de conectividad libre de escala. Los trabajos al respecto surgieron como una forma de explicar y estudiar la dinámica de crecimiento de las redes reales. Los resultados importantes a los que se llega es que se pueden construir redes libres de escala siguiendo un esquema de crecimiento preferencial. Éstas redes también son muy eficientes para transporte y comunicación por su pequeño diámetro (la trayectoria más larga en promedio), y son muy robustas ante fallos y ataques al azar. La distribución libre de escala implica que existan nodos muy conectados, lo que hace a la red muy vulnerable ante ataques dirigidos, pues si los nodos muy conectados son dañados se puede incrementar de manera importante el diámetro de la red.

Así como el primer capítulo funciona como una suerte de introducción al tema de teoría moderna de redes, el segundo capítulo es realmente el alma de la tesis. Aquí introducimos un nuevo modelo de red, basado en los árboles de Cayley discutidos en la sección 1.1, que tiene como característica principal que se trata de una red cerrada ordenada, con número de coordinación constante, en la que todos los nodos son equivalentes e intercambiables (red exponencial ordenada REO). A pesar de eso, el modelo de red tiene las mismas características de eficiencia en transporte y comunicación, y robustez ante fallos y ataques, que las redes aleatorias, aún cuando estas propiedades se creían privativas de las redes desordenadas.

Comparamos el modelo con las redes aleatorias y de mundo pequeño mediante un problema de transporte, en el que la red exponencial ordenada resulta ser más eficiente. En relación con las redes libres de escala, que son extremadamente vulnerables ante ataques dirigidos, la red exponencial ordenada resulta favorecida, ya que por definición no contiene nodos más importantes, lo que la hace muy robusta ante ataques o fallos.

Calculamos explícitamente algunos parámetros relativos a la REO, teniendo una gran ventaja sobre las otras redes, pues es posible obtener la mayoría de los resultados analíticamente en forma cerrada. Esto es un efecto indudablemente de que la REO está formada a partir de dos árboles de Cayley, una de las pocas estructuras sobre las que es posible calcular todos los parámetros de percolación.

Discutimos el algoritmo de creación de la red, pues no es trivial, y llegamos a la conclusión que de los dos parámetros que definen a la red: Z y N – el número de coordinación y el número de capas de los árboles respectivamente –, es necesario que $N \leq 4$, mientras que sobre Z no hay restricciones. Probamos que los nodos son equivalentes, con un algoritmo que reconstruye la red a partir de nodos intermedios, pues cuando la red puede ser reconstruída desde cualquier nodo significa que todos son equivalentes.

En el último capítulo discutimos dos problemas en los que se utilizan redes exponenciales ordenadas. El primer problema es un caso de transporte en la red, y sirve para ejemplificar la sencillez de la red, pues el resultado se obtiene de manera analítica, cuestión muy complicada en otras redes. En el segundo problema modelamos una red de neuronas sobre una red exponencial ordenada. Observamos una oscilación sostenida en todos los nodos–neuronas de la red, similar a la obtenida en redes totalmente conectadas, pero que sin embargo no ocurre en otros tipos de redes como en anillos unidimensionales y redes de Bethe.

Incluimos dos apéndices. En el primero se muestran datos de una gran cantidad de redes reales, relevantes para compararlas con los diferentes modelos de redes. El segundo apéndice contiene algunos de los algoritmos que usamos para diseñar las redes exponenciales ordenadas, en código de MATLAB.

Capítulo 1: Antecedentes

– 1.1 Percolación y Árboles de Cayley

En una red donde cada nodo está ocupado con probabilidad p independiente de todos los otros lugares, el problema de la percolación consiste en fijarse en los cúmulos: dados dos nodos en la red, pertenecen al mismo cúmulo si se puede transitar de un nodo al otro a través de nodos ocupados. El fenómeno de percolación consiste en que a partir de un valor, p_c , de la probabilidad de ocupación, aparece un cúmulo máximo que llega a todos los extremos de la red, a pesar de tener densidad cero. Como en el límite termodinámico se trabaja con redes infinitas, se ha dado por llamar cúmulo infinito al cúmulo máximo, pues solamente ahí está bien definido el fenómeno de percolación. Así como aparece un cúmulo que cruza toda la red, también aparecen cúmulos menores de todos los tamaños siguiendo una ley de potencias de tipo $P(s) = s^{-a}$, siendo $P(s)$ la probabilidad de que encontrar un cúmulo de tamaño s .

En principio, el problema de percolación está matemáticamente definido sobre cualquier red, pero como primeras aproximaciones se utilizaron redes ordenadas en dimensiones finitas, como redes triangulares, hexagonales, cuadradas, etc. En este tipo de redes el problema puede parecer sumamente sencillo, pero sucede que, excepto en muy pocos casos, el problema no es soluble analíticamente. El interés en este problema por parte de la comunidad de física estadística radica en que hay problemas en los que algunas transiciones críticas importantes pueden ser tratadas a partir de la transición en la que se genera el cúmulo infinito, como transiciones de fase térmicas y magnéticas por ejemplo (Stauffer & Aharony, 1994).

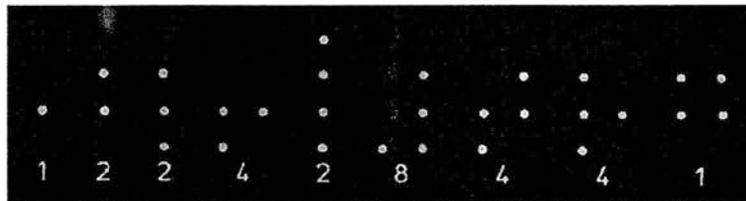
En términos matemáticos, la teoría de percolación está íntimamente ligada con problemas en redes en la teoría de sistemas desordenados, tales como las propiedades del modelo de Ising y los modelos ferroeléctricos (Ziman, 1979). Además tiene amplia aplicación en problemas tan diversos como percolación de fluidos a través de medios porosos y la propagación de plagas en una huerta (Frisch & Hammersley, 1963).

El caso más sencillo de estudio es el de una cadena unidimensional de sitios. Cuando la probabilidad de ocupación p es menor que 1, por cercano a 1 que sea este valor, en una cadena infinita existirán sitios vacíos, haciendo que no exista un cúmulo infinito, por lo que en este caso $p_c = 1$. Esto se puede ver también de la siguiente forma: la probabilidad de que un sitio cualquiera de la

Capítulo 1

cadena sea el extremo izquierdo (por decir algo) de un cúmulo de tamaño s es $n_s = p^s(1-p)^2$, cuando $0 < p < 1$. Ésto porque la probabilidad de tener k sitios juntos es p^k cuando son eventos independientes, y a esto se le tiene que añadir los sitios vacíos en los extremos del cúmulo, los dos con probabilidad $(1-p)$, también independientes. Cuando se tiene $p < 1$, la probabilidad n_s se va a cero exponencialmente conforme el tamaño s del cúmulo se va a infinito. Ésto significa que la probabilidad de encontrar cúmulos cada vez más grandes en una cadena unidimensional infinita es menor cada vez. Por lo tanto, el valor crítico de percolación ocurre únicamente cuando $p = 1$.

Desgraciadamente, en más de una dimensión el problema se complica mucho, porque el número de vecinos que tiene un cúmulo de tamaño k depende de la configuración de los k sitios. La tabla 1.1.1 presenta el número de distintas configuraciones para un cúmulo de hasta 4 unidades en una red cuadrada, obtenibles mediante rotaciones y reflexiones. Los diferentes cúmulos son llamados coloquialmente "animales de lattice".



Número de distintas configuraciones para cada "animal de lattice" de hasta 4 unidades. Así, 4 unidades colineales tienen 2 configuraciones: horizontal y vertical; mientras que las 4 unidades en forma de L tienen 8 posibles configuraciones: 4 rotaciones en cada una de 2 reflexiones.

Tabla 1.1.1

La tabla 1.1.2 contiene los valores críticos p_c para diferentes redes, tomados de Stauffer y Aharony (1994):

Capítulo 1

<i>Red</i>	<i>Nodo</i>	<i>Enlace</i>
Cuadrada	0.592746	0.50000
Triangular	0.50000	0.34729
Hexagonal	0.6962	0.65271
Diamante	0.43	0.388
Cúbica simple	0.3116	0.2488
d = 4 hipercúbica	0.197	0.1601
d = 5 hipercúbica	0.141	0.1182
d = 6 hipercúbica	0.107	0.0942
d = 7 hipercúbica	0.089	0.0787

Tabla 1.1.2

Se dan dos valores, para percolación por nodo y por enlace. En percolación por nodo, dos sitios están unidos si comparten un enlace común. En percolación por enlace, todos los nodos de la red están ocupados, y son los enlaces los que se asignan, así por ejemplo dos nodos pueden ser contiguos sin estar necesariamente conectados. En una red cuadrada bajo percolación por nodo, el quitar un nodo conectado con sus cuatro vecinos es equivalente a quitar cuatro enlaces en una red bajo percolación por enlace, lo que provoca que en general los valores críticos p_c sean diferentes en una misma red para ambos casos. Existen también redes duales, en las que se pueden quitar o poner tanto nodos como enlaces. (Véase la figura 1.1.1)

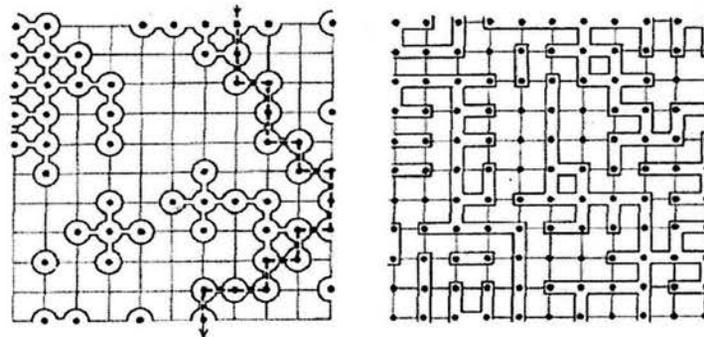


Figura 1.1.1

Se puede demostrar que el umbral de percolación en una red dada es siempre mayor para el caso de percolación por nodo: $p_c^E \leq p_c^N$, y esto es

intuitivamente fácil de ver con el argumento del párrafo anterior: es más destructivo para la red quitar nodos que enlaces, y de igual manera es más constructivo añadir nodos que enlaces (Hammersley, 1961).

Además del caso unidimensional, hay otro que puede resolverse de manera exacta: el árbol de Cayley (Flory, 1941). Los árboles de Cayley surgieron alrededor de 1920 como una curiosidad matemática, y posteriormente se descubrió que la aproximación de campo medio en magnetismo funciona de manera exacta sobre árboles de Cayley a través de la aproximación de Bethe. Es por eso que también se les conoce como redes de Bethe. Los árboles de Cayley son, esencialmente, un nodo central del cual parten Z enlaces, cada uno de estos unido a otros $Z-1$ enlaces independientes entre sí, cada uno unido a otros $Z-1$ enlaces, y así sucesivamente, sin hacer anillos, como se ve en la figura 1.1.2, cuatro capas de un árbol con $Z = 3$.

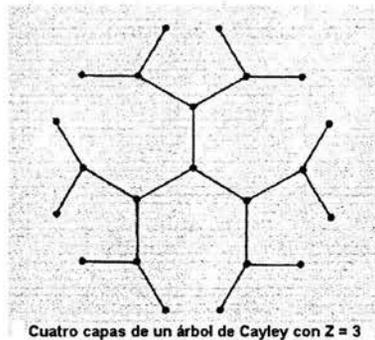


Figura 1.1.2

Algo importante a notar, es que a diferencia de las redes discutidas anteriormente, de dimensión espacial finita, se dice que los árboles de Cayley corresponden a la familia de dimensionalidad infinita. Hay por lo menos dos razones para decir esto:

1. Mientras que en 2 dimensiones el área de un círculo es proporcional a r^2 , su perímetro es proporcional a r . En 3 dimensiones el volumen de la esfera es proporcional a r^3 , y su área es proporcional a r^2 ; y en general se puede decir que en d dimensiones, el volumen de la hipersfera es proporcional a r^d , y su área a r^{d-1} . Por lo tanto: $\text{área} \propto \text{volumen}^{(1-1/d)}$ en d dimensiones. Cuando $d \rightarrow \infty$, el volumen es proporcional al área.

En un árbol de Cayley, su área es la última capa, y el número de nodos

conforme se avanza sobre las capas crece exponencialmente, de modo que la capa N tiene $Z(Z-1)^{N-1}$ nodos, con Z el número de vecinos (todos los nodos tienen el mismo número de vecinos). Sumando sobre capas, en la misma red, el número total de nodos en la red (volumen) es de $Z(Z-1)^N - (Z-1)$. Para N grande, resulta entonces que *área* \propto *volumen*, cosa que en redes hipercúbicas (redes ordenadas de dimensión mayor a 3) sólo ocurre cuando $d \rightarrow \infty$.

2. La cantidad de formas diferentes de encontrar una cadena de cuatro sitios (por decir un número) en una red hipercúbica de dimensión d , es proporcional a $(2d-1)^3$, en función de que, dado un nodo fijo, los otros tres pueden ser colocados en otro eje "adelante" o "atrás" del nodo anterior de la cadena. Análogamente, la cantidad de formas diferentes de encontrar un anillo de cuatro sitios es proporcional a $d(d-1)$. Por lo tanto, cuando $d \rightarrow \infty$, es mucho más probable encontrar una cadena que un ciclo. En los árboles de Cayley los ciclos estrictamente no existen, por lo que el resultado es el mismo que en d_∞ sobre redes hipercúbicas.

La cuestión de la dimensionalidad infinita de los árboles de Cayley es muy importante porque se sabe que hay una dimensión crítica d_c , tal que para $d < d_c$ algunos exponentes de la red dependen de d , pero para $d > d_c$ los exponentes no varían. Simulaciones numéricas muestran que la dimensión crítica superior en percolación es $d_c = 6$, pero solamente se ha probado rigurosamente para $d \geq 19$ (Hara & Slade, 1990).

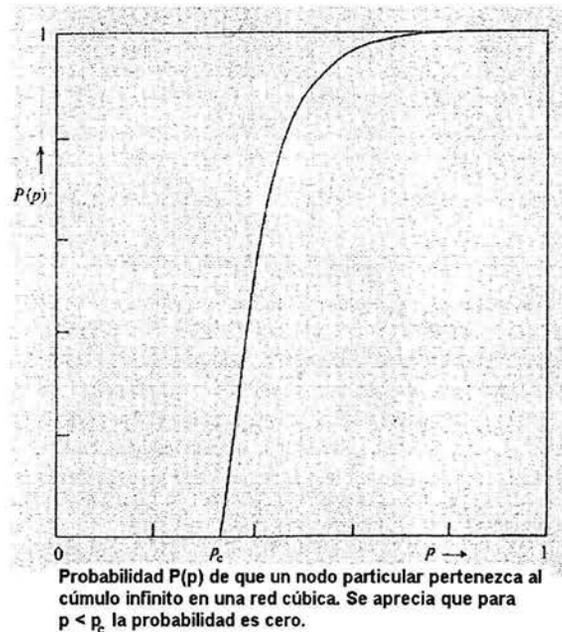


Figura 1.1.3

La forma de calcular el umbral de percolación en los árboles de Cayley es muy sencilla: empezando en el origen, la idea es encontrar un camino infinito de vecinos ocupados. En la siguiente capa hacia afuera siempre habrá $Z - 1$ nodos, ocupados cada uno con probabilidad p , independiente unos de otros, por lo que en general habrán $p(Z - 1)$ nuevos nodos por los que continuar el camino. Dado que cada nodo está ocupado o desocupado independientemente de los demás, la probabilidad de encontrar nodos ocupados a través de N capas es $[p(Z - 1)]^N$. Si $p(Z - 1) < 1$, la probabilidad de encontrar nodos ocupados mientras se avanza sobre el árbol va a decrecer rápidamente a cero. En cambio, si $p(Z - 1) > 1$ siempre habrá nodos ocupados hacia adelante. Por lo tanto, la probabilidad crítica es $p_c = \frac{1}{Z - 1}$. El argumento anterior funciona de la misma manera cuando en lugar de los nodos se considera que p actúa sobre los enlaces, pues al no haber redundancia, quitar un nodo inhabilita una rama del árbol de la misma manera que al quitar el enlace en el que aparece el nodo; de manera que en el árbol de Cayley los valores de percolación por nodo y por enlace son iguales.

En el árbol de Cayley el caso con $Z = 2$ es el mismo caso de la cadena unidimensional, pues todos los nodos tienen exactamente 2 vecinos, y el umbral de percolación es el mismo por las 2 derivaciones: $p_c = 1$.

La figura 1.1.3 muestra la probabilidad $P(p)$ de que un nodo particular pertenezca al cúmulo infinito en una red cúbica. Se aprecia que para $p < p_c$ la

probabilidad es cero.

1.2 Redes aleatorias

El modelo más conocido y estudiado de redes aleatorias fue introducido por P. Erdős y A. Rényi (E-R) en 1959 (Erdős y Rényi, 1959). Obtuvieron una gran cantidad de resultados analíticos sobre redes aleatorias, la mayoría de los cuales se pueden encontrar en el libro de Bollobás (1985).

Estrictamente hablando, hay dos modelos diferentes de redes aleatorias, sobre las que se basa el trabajo de E-R:

1. En el modelo de nodos, $G(n, m)$ es una red etiquetada con un conjunto de n nodos $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$, con m enlaces escogidos al azar, generalmente como función de n . Se abrevia como G_m .

2. En el modelo de enlaces, $G(n, p)$ es también una red etiquetada con un conjunto de nodos $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$, en donde cada uno de los posibles $\binom{n}{2}$ enlaces de cada nodo existe con probabilidad p , $0 < p < 1$, independiente de los demás enlaces. Se abrevia como G_p . (Véase la figura 1.2.1)

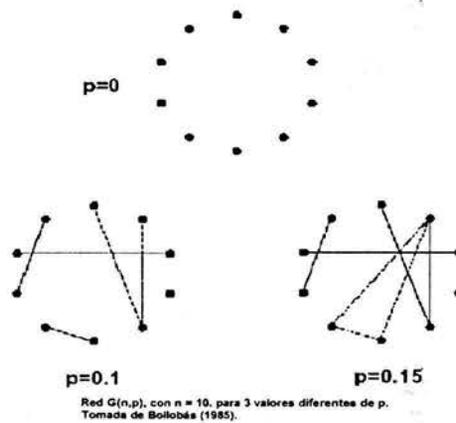


Figura 1.2.1

En general, ambos modelos son prácticamente intercambiables, pero los

teoremas que dan las propiedades de G_p son más sencillos porque los enlaces son independientes entre sí, mientras que en G_m existe una cierta dependencia al escoger un enlace basado en elecciones anteriores porque el número de enlaces es fijo.

El descubrimiento más importante de E–R fue que la mayoría de las propiedades monótonas (si una propiedad Q existe en una sección de la red, se dice que es monótona si existe en toda la red) aparecen de improviso para cierto valor crítico $p_{ER}(n)$ de la probabilidad. Es decir, existe una función umbral $M^*(m)$ o $M^*(p)$ que determina si en una red es muy probable o muy poco probable que exista una propiedad Q . Este tipo de cambio abrupto se parece mucho a las transiciones de fase típicas de problemas termodinámicos, en donde la parte "interesante" ocurre en una escala temporal mucho más chica que la de todo el proceso.

Las dos estructuras más sencillas que pueden aparecer en una red son los árboles y los ciclos. Un árbol es una sucesión de enlaces conectados que nunca se cierra: un árbol de orden γ es una gráfica conectada con γ nodos y $\gamma - 1$ enlaces. Por otro lado, un ciclo es una sucesión de enlaces que conectados cerrada: un ciclo de orden γ es una secuencia de γ enlaces, en la que cada 2 y sólo 2 enlaces consecutivos comparten el mismo nodo, compartido también entre el último y el primer enlace de la secuencia. Bajo esa notación, un triángulo es un ciclo de orden 3, y un cuadrado es un ciclo de orden 4.

Algunas de estas propiedades son las siguientes: cuando se tiene que $p_{ER} \sim c/n$, con c una constante menor que 1, y $n \gg 1$, casi todos los nodos pertenecen a árboles aislados, mientras que cuando $p_{ER} \sim 1/n$ hay un cambio abrupto y aparecen ciclos de todos los tamaños.

En la literatura de física estadística, el modelo E–R se suele llamar de percolación de dimensión infinita, perteneciendo a la clase universal de percolación de campo promedio, al igual que los árboles de Cayley en el capítulo anterior, aún a pesar de que estos últimos son estrictamente ordenados (Stauffer & Aharony, 1994). En este contexto, hay una probabilidad crítica $p_c \sim 1/n$, en donde para $p < p_c$ el sistema esté desconectado en muchos cúmulos pequeños, y para $p \sim p_c$ se forma un cúmulo infinito que contiene a todos los nodos.

Una sutileza en la que difieren el enfoque de la comunidad de redes aleatorias y la comunidad de percolación, estriba en que la construcción de redes aleatorias se conoce en la literatura matemática como evolución, en el sentido que

Capítulo 1

se empieza con una red muy desconectada y topológicamente desordenada, a la cual se van agregando enlaces buscando la aparición de propiedades monótonas (ver imagen 1.2.1). Por otro lado, el enfoque en problemas de percolación consiste en partir de una red muy conectada a la cual se le van quitando enlaces o nodos al azar (se puede hacer una analogía con una red de alambre atacada por un borracho con alicates). Ambos enfoques son perfectamente análogos.

Un famoso teorema de E-R (Erdős & Rényi, 1959) garantiza que casi cualquier red aleatoria con más de $k > n/2 \ln(n)$ enlaces (se puede aproximar como $k \gg \ln(n)$) estará conectada. También demostraron que la probabilidad de que un nodo cualquiera contenga k enlaces sigue una distribución que decae rápidamente con k :

$$P(k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!, \text{ con } \lambda = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}. \quad (1.2.1)$$

Otro resultado muy importante se refiere a la forma como crece el diámetro l de las redes aleatorias en función del número de nodos N y la conectividad promedio $\langle k \rangle$ entre ellos. El diámetro se define como el máximo entre las distancias mínimas entre todos los pares de nodos en la red. Esto se puede calcular de la siguiente manera: es razonable pensar en que a una distancia l de un nodo hay casi $\langle k \rangle^l$ nodos, pues es muy poco probable que dos nodos conectados a un tercero estén conectados a un tercero con p suficientemente chica. Las redes aleatorias están en la familia de redes de dimensión infinita, por lo que la mayoría de los nodos está en la superficie. Igualando $\langle k \rangle^l$ con el número de nodos, resulta que $l = \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}$, suponiendo que la red esté conectada. Si la red está desconectada, simplemente $l = \infty$. En redes cristalinas, por ejemplo, el diámetro es de la forma $l = N^{1/d}$, mucho más grande que para las redes aleatorias.

Un dato de gran importancia para este trabajo es la distancia característica, que está definida como el promedio de las distancias mínimas entre todos los pares de nodos de la red. No existe un resultado analítico para la distancia característica en redes aleatorias, aunque a primera aproximación se puede suponer que escala de igual manera que el diámetro ($l \equiv$ diámetro; $L \equiv$ distancia característica). La figura 1.2.2 muestra los datos para distintas redes reales, en las que se grafica la distancia característica como función del número de nodos y su conectividad promedio. La línea punteada corresponde a la ecuación $L \cdot \ln(\langle k \rangle) = \ln(N)$:

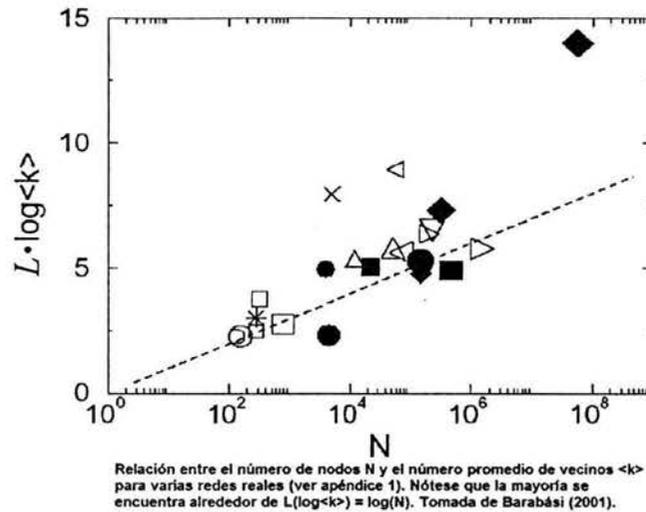


Figura 1.2.2

Nótese que la correspondencia está lejos de ser perfecta. Es importante notar que las redes representadas sobre la gráfica no tienen por qué ser redes aleatorias perfectas, así que en principio no sabemos si las imprecisiones se deben a que se trata de una aproximación burda, o simplemente a que las redes que no se comportan como redes aleatorias.

La distancia característica es importante en las redes exponenciales ordenadas de las que trata esta tesis porque se puede calcular de manera exacta. Generalmente se pensaba que la mínima distancia característica era la que presentaban las redes aleatorias, y sin embargo veremos más adelante que en el caso de la red exponencial ordenada, la distancia característica crece, con N y $\langle k \rangle$, de manera muy similar a como lo hace en las redes aleatorias, bajo la suposición de que éstas crezcan como $\frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}$.

1.3 Redes de Mundo Pequeño

Hasta hace pocos años, cuando algún problema era modelado sobre una red (caminantes aleatorios, sistemas de osciladores acoplados, arreglos de enlaces Josephson, redes neuronales, etc.), se suponía que la topología de los enlaces entre nodos era completamente ordenada o completamente al azar. Hay muchas redes reales que comparten con las redes ordenadas la propiedad de vecindad: cuando dos nodos en la red son vecinos, también tienen vecinos en común; lo cual no sucede en redes aleatorias. Pero también se ha observado en

Capítulo 1

muchas de estas redes que es posible llegar de un nodo a cualquier otro nodo en la red con muy pocos pasos; lo que claramente no sucede en redes estrictamente ordenadas.

Estos resultados sugieren que dichas redes están en algún punto entre los extremos de total orden-desorden. Algunas de estas redes son conocidas en la literatura como redes de mundo pequeño (S-W por sus siglas en inglés), a raíz del dicho popular que surge cuando dos personas de lugares completamente diferentes descubren que tienen conocidos cercanos en común, "mira que chiquito es el mundo". Estudios al respecto, apuntan a que en promedio hay una cadena de seis personas conocidas entre cualesquiera dos personas en la Tierra, lo cual es sorprendente para una población de seis mil millones de personas. Típicamente, las redes de mundo pequeño están altamente amalgamadas (si dos nodos están conectados a un tercero, es muy probable que también estén conectados entre sí) y sin embargo tienen un diámetro y distancia característica (definidos igual que para redes aleatorias en el capítulo anterior) muy pequeño en relación con redes similares ordenadas.

En el contexto de la red social de los conocidos de una persona, esto se expresa de la siguiente manera: dadas dos personas desconocidas entre sí y que viven en lugares muy distantes geográficamente, la red de conocidos de cada uno es en general muy local (amalgamada), pero es probable que al menos uno de sus conocidos viva en un lugar distante, y eso mismo es cierto sobre la red de conocidos del 'amigo distante'. Es precisamente la presencia de los amigos distantes (atajos) lo que hace que el diámetro sea tan pequeño. Como nota histórica, esta situación no era tan marcada antiguamente. Cuando no existían las comunicaciones que hay ahora, ni la capacidad de transporte, este efecto era mucho menor, aunque las redes de conocidos seguramente incluían personas de aldeas cercanas. Este hecho es muy notable al estudiar los registros de transmisión de epidemias antiguas y actuales (Pastor-Satorras & Vespignani, 2001).

La peste negra durante la edad media puede modelarse bastante bien como un fenómeno difusivo a lo largo de varios años; y sin embargo recientemente se vió como el SARS, de haber empezado probablemente en China, en muy poco tiempo aparecieron ondas difusivas independientes a escala local en otros países en varios continentes, haciendo mucho más difícil el control de la epidemia.

Estudios de transmisión de epidemias en redes de mundo pequeño muestran que el tiempo crítico de contagio, el tiempo que tarda en contagiarse la mitad de la población en la simulación, decrece muy rápidamente al añadirle unos

Capítulo 1

pocos (realmente muy pocos, estrictamente menos del 1% de los enlaces presentes en la red) atajos a una red ordenada, por el efecto mencionado anteriormente.

Además de estos tipos de redes sociales, hay numerosos casos de redes desordenadas en el mundo real con un diámetro muy pequeño respecto al tamaño de la red, y que son mucho más fáciles de medir y estudiar que las redes sociales de conocidos, en donde es muy difícil definir el concepto de "conocido", y entran en juego factores como la subjetivos como la memoria de los individuos:

- La red de los actores de películas, donde 2 actores están relacionados si han actuado juntos en alguna película.
- La red de autores de colaboraciones científicas, donde 2 autores están relacionados si han escrito al menos un artículo juntos.
- La red de neuronas en el cerebro, con las neuronas como los nodos y los axones como los enlaces entre ellas.
- La red de distribución de energía eléctrica, con las estaciones como nodos y las líneas de alta tensión como los enlaces.
- La red de páginas de internet, donde 2 páginas están relacionadas si existe un enlace que vaya de una página a la otra.

La característica clave de las redes de mundo pequeño, es la presencia de atajos, los cuales tienen un efecto altamente no lineal en el tamaño del diámetro. Cambiar unos pocos enlaces locales y convertirlos en atajos prácticamente no afecta la estructura local, pero el efecto de comunicar a larga distancia regiones, que estarían desconectadas en condiciones normales, reduce drásticamente el diámetro de la red.

El modelo más conocido para redes reales que presentan el fenómeno de mundo pequeño es el de Watts y Strogatz (W-S) (Watts & Strogatz, 1998), en el que se tiene originalmente una red unidimensional en la que cada nodo está conectado a sus Z vecinos más cercanos únicamente. A cada uno de los enlaces de la red se le asigna una probabilidad p de reconectarse a cualquier otro nodo de la red. Cuando $p = 0$ la red es ordenada, y con $p = 1$ la red se vuelve aleatoria.

Llamamos redes desordenadas a las redes en las que la probabilidad p se encuentra entre $0 < p < 1$. Para garantizar que toda la red esté conectada pero lejos de tener las combinaciones de $\binom{n}{2}$ enlaces de completa interconexión se pide que $N \gg Z \gg \ln(N) \gg 1$, con N el número total de nodos en la red.

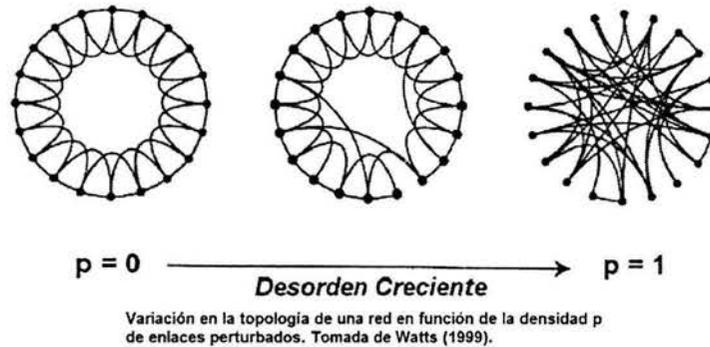


Figura 1.3.1

Para evaluar analíticamente una red y poder determinar de qué tipo de red se trata, hace falta definir dos cantidades: la distancia característica $L(p)$, y el coeficiente de aglomeramiento $C(p)$. El primero está definido como el número de enlaces por los que hay que pasar a través del camino mínimo entre dos nodos, promediado sobre todos los pares de nodos, definición que es enteramente equivalente a la de L en redes aleatorias. El segundo está definido como el número de enlaces que tiene un nodo con sus vecinos, dividido entre el número total de enlaces que tendría si estuviera conectado con todos sus vecinos, promediado sobre todos los nodos. En redes sin una topología espacial definida, $C(p)$ esta definida como el número de triángulos que tiene cada nodo (un triángulo es cuando dos nodos conectados a un nodo particular también están unidos entre sí), promediado sobre todos los nodos. Si un nodo tuviera k vecinos y estuviera conectado con todos ellos, tendría $k(k-1)/2$ enlaces. Ambas son funciones de p , que funciona como la medida del desorden de la red.

En redes aleatorias el coeficiente de aglomeración está dado por $C(p) = p = \frac{\langle k \rangle}{N}$, pues la probabilidad de que dos nodos unidos a un tercero estén conectados entre sí es simplemente p . En un anillo unidimensional donde cada nodo está unido a sus k vecinos más cercanos, el coeficiente de aglomeración es

$$C(p) = \frac{3(k-2)}{4(k-1)}, \quad (1.3.1)$$

Capítulo 1

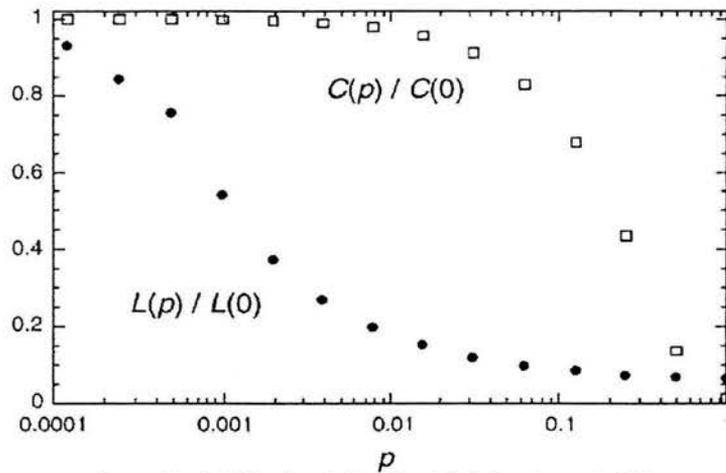
que se puede deducir al calcular el cociente entre el número de triángulos que forman los vecinos de cada nodo y el número total de pares que se pueden formar con sus vecinos. El número de triángulos que se forman es $(k/2 - 1) \cdot (k/2 + 1) + \sum_1^{k^2-2} k = \frac{3}{8} k \cdot (k - 2)$ número total de pares es $k \cdot (k - 1)/2$. $C(p)$ sólo está definido para k par en la red unidimensional.

En cuanto a la distancia característica en redes aleatorias, ésta crece como

$$L(p) = \frac{\ln(N)}{\ln(pN)} = \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}, \quad (1.3.2)$$

a lo más logarímicamente con el número de nodos. En cuanto a redes ordenadas de baja dimensión, la distancia característica escala como $L(p) = N^{1/d}$, con d la dimensión de la red; lo cual crece estrictamente más rápido en función de N que $L(p) \sim \ln(N)$.

Graficando los valores para $C(p)$ y $L(p)$ para una red según el modelo de W-S se obtiene la curva de la figura 1.3.2. Resulta inmediato en la gráfica que la distancia característica $L(p)$ es altamente sensible a la presencia de enlaces de larga distancia. Para valores de p en el orden de 0.001 la distancia característica es la mitad que en el caso completamente ordenado. Por otro lado, con el coeficiente de aglomeramiento $C(p)$ sucede lo contrario. Con aproximadamente el 5% de los enlaces perturbados $C(p)$ se mantiene prácticamente constante respecto a su valor en la red completamente ordenada.



Los rectángulos indican la variación del coeficiente de aglomeración $C(p)$ como función de la densidad p de enlaces perturbados. Los círculos representan la variación de la distancia característica $L(p)$ en función de la misma variable. Nótese que para $p = 5\%$ $L(p)$ se encuentra casi en su nivel mínimo, mientras que $C(p)$ prácticamente está en su valor original. Los datos fueron calculados sobre una red originalmente ordenada de 1000 nodos y con $k = 10$ vecinos iniciales. Tomada de Watts & Strogatz (1998)

Figura 1.3.2

Estudios recientes sobre los ejemplos de redes reales antes mencionados, señalan hacia una característica común a esas redes: comparando con el equivalente en red aleatoria (mismo número de nodos y de enlaces promedio) se puede ver que la distancia promedio entre nodos es ligeramente mayor en estas redes reales que su análoga aleatoria, pero el coeficiente de aglomeramiento es órdenes de magnitud mayor.

Estos dos parámetros son suficientes para permitirnos evaluar si una red real es tipo mundo pequeño o no. La condición para que sea de mundo pequeño es, entonces, que:

1. $L_{regular} \gg L_{mundopequeño} > L_{aleatoria}$
2. $C_{regular} > C_{mundopequeño} \gg C_{aleatoria}$

En general las redes reales no se suelen comparar con su equivalente ordenado porque casi nunca se dispone de datos sobre la topología de la red y se suele dar por sentado que cualquier red real va a ser intrínsecamente desordenada.

La tabla 1.3.1 presenta los resultados para tres redes reales, comparadas

Capítulo 1

con redes aleatorias con el mismo número de nodos y el mismo número promedio de enlaces por nodo, tomado de Watts & Strogatz (1998).

	L_{real}	$L_{aleatoria}$	C_{real}	$C_{aleatoria}$
Actores de películas	3.65	2.99	0.79	0.00027
Red eléctrica	18.7	12.4	0.080	0.005
C. Elegans (1)	2.65	2.25	0.28	0.05

Tabla 1.3.1

(1) *Caenorhabditis elegans* es un nemátodo, y fue el primer organismo del que se obtuvo un mapeo completo de la red neuronal.

En el primer caso de la tabla 1.3.1, los nodos son los actores de películas en todo el mundo. Dos actores están relacionados si han actuado juntos en una película. En el segundo caso, los nodos son las plantas y estaciones eléctricas, y los enlaces son las líneas de alta tensión. El tercer caso se refiere a la red de neuronas de C. Elegans, con las neuronas como los nodos y los axones como los enlaces.

Los tres casos cumplen las condiciones básicas de mundo pequeño en comparación con redes aleatorias. Hay numerosos otros casos de redes reales con las características de mundo pequeño. Para una lista más completa que la anterior, véase Albert & Barabasi (2001).

1.4 Redes Libres de Escala

El modelo de red que tratamos en esta sección, presenta una distribución libre de escala en la conectividad de los nodos, lo que le da el nombre. Las distribuciones libres de escala (S–F por sus siglas en inglés) también se conocen como leyes de potencias, y son de la forma

$$P(k) = \alpha \cdot k^{-\gamma}, \quad (1.4.1)$$

que en términos de redes S–F significa que la probabilidad de encontrar al azar un nodo que tenga k enlaces es $\alpha \cdot k^{-\gamma}$, con α una constante. En una red S–F

infinita, en principio se podrían encontrar nodos con cualquier número de enlaces, pero con mucha menor probabilidad que la de encontrar un nodo con pocos enlaces. La presencia de la distribución S–F es una consecuencia del proceso de creación de la red, como se verá a continuación. Cabe mencionar que últimamente se asocia mucho la geometría libre de escala con problemas de "frontera del caos", fractales, y autorganización (Mekler y Cocho, 1998), todo ello dentro de las últimas tendencias en los sistemas complejos.

Las redes S–F tienen la peculiaridad de que están definidas en un proceso dinámico de crecimiento de la red. Se comienza con un núcleo relativamente pequeño de nodos (m_0), conectados entre sí de manera aleatoria, y en cada unidad de tiempo se añade un nodo y m enlaces. A la manera de las redes aleatorias G_p (véase figura 1.2.1), cada uno de los $n_i(t)$ enlaces que pueden surgir entre cada nuevo nodo y un nodo preexistente i existe con una cierta probabilidad

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}, \quad (1.4.2)$$

con k_i el número de enlaces del nodo i , y con $\sum_j k_j$ el número total de enlaces en la red. La dependencia de Π_i con k_i implica que los nodos nuevos se conecten con mayor probabilidad a los nodos con mayor conectividad de la red. Ésto se conoce como acoplamiento preferencial, y a la larga produce algunos nodos muy conectados y muchos nodos poco conectados.

Se puede aplicar teoría de campo promedio (Barabási, 1999 B) para demostrar que una red creciendo con acoplamiento preferencial tiene una distribución de conectividad S–F, con exponente $\gamma = 3$ (ecuación 1.4.1), y también que la conectividad crece en el tiempo como \sqrt{t} .

Suponiendo que k es continua, la ecuación 1.4.2 puede interpretarse como la variación en el tiempo de k_i . Por lo tanto:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m\Pi(k_i) = m\frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (1.4.3)$$

Con m el número de enlaces añadidos en cada unidad de tiempo. Y dado que $\sum_j k_j = 2mt$

Capítulo 1

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t} \quad \rightarrow \quad k_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^{1/2}. \quad (1.4.4)$$

t_i es el tiempo en el que el nodo i se añadió a la red. Por lo tanto, todos los nodos evolucionan de la misma manera, también siguiendo una ley de potencias.

Usando la ecuación 1.4.4, la probabilidad de encontrar un nodo de grado $k_i(t)$ menor que una cierta k , puede ser escrita, en términos temporales, como:

$$P(k_i(t) < k) = P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right).$$

Dado que los nodos se añaden a la red a intervalos iguales de tiempo, los valores t_i tienen una densidad de probabilidad constante:

$$P(t_i) = \frac{1}{m_0 + t}, \quad (1.4.5)$$

y usando la ecuación 1.4.5 tenemos que:

$$P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right) = 1 - P\left(t_i < \frac{m^2 t}{k^2}\right) = 1 - \frac{m^2 t}{k^2(t + m_0)}.$$

La curva de distribución para $P(k)$ se obtiene derivando el resultado anterior respecto a k :

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{2m^2 t}{m_0 + t} \frac{1}{k^3}. \quad (1.4.6)$$

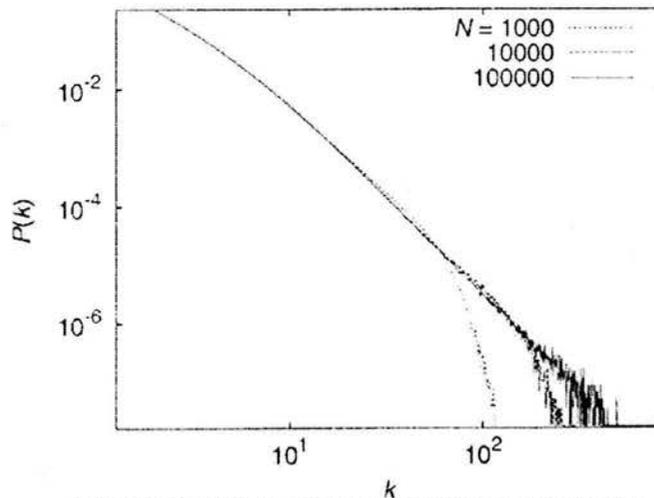
Y en el límite cuando $t \rightarrow \infty$:

$$P(k) \sim \frac{2m^2}{k^3}. \quad (1.4.7)$$

Cabe hacer notar que los resultados obtenidos por este método son asintóticamente exactos para el límite termodinámico de una red infinita, en donde $k \gg 1$; y las diferencias entre simulación y teoría resultan de la capacidad finita y

discreta del cómputo.

La figura 1.4.1 muestra una simulación en computadora del proceso de creación de una red con el método de acoplamiento preferencial, cuando $m_0 = 2$, graficando la curva de distribución $P(k)$.



Gráfica de la distribución de enlaces en 3 redes de 1000, 10.000 y 100.000 nodos; simuladas usando el algoritmo de acoplamiento preferencial. Las 3 redes tenían $m_0 = 2$. Tomada de Beon Jun (2001).

Figura 1.4.1

La conectividad de la red en la simulación se comporta a lo largo de un orden de magnitud como la ecuación 1.4.1, con $\gamma \sim 3$. El hecho de que el comportamiento S-F se presente solamente en un orden de magnitud se debe a la capacidad finita de cómputo, pues se observa en la figura 1.4.1 que el mejor ajuste se da en la red más grande.

En la figura 1.4.2 se midió la variación en el número de enlaces para un nodo particular elegido al azar, durante el crecimiento de la red.

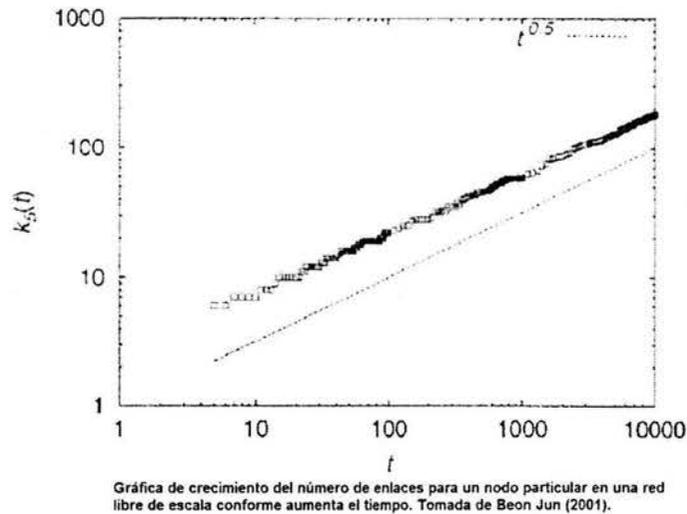


Figura 1.4.2

La relación obtenida de la simulación tiene un comportamiento en ley de potencias del tipo $k_i(t) \sim t^\alpha$, con $\alpha \sim 1/2$. Este resultado remite a la ecuación de transporte por difusión (John, 1971), en la que todas las longitudes características, dadas por $l \equiv \langle x^{2n} \rangle^{1/2n}$, crecen como $t^{1/2}$; lo que se puede interpretar como la distancia promedio a la que se encuentra un caminante aleatorio después de t unidades de tiempo.

Existen redes reales que crecen dinámicamente y lo hacen con algún tipo de acoplamiento preferencial. Esto resulta más o menos claro en los siguientes dos ejemplos: en la red de páginas de internet, una página nueva se va a enlazar con mayor probabilidad a páginas muy conocidas (muchos enlaces), que a páginas poco conocidas (pocos enlaces). En cuanto a la red de colaboraciones científicas, lo mismo sucede. Un autor nuevo siempre va a intentar publicar con alguien reconocido en su campo. En ambos ejemplos, las redes siempre están creciendo, por la aparición de nuevas páginas web, y por la creación de nuevos artículos, respectivamente.

En la figura 1.4.3 aparecen dos redes con el mismo número de nodos y la misma conectividad promedio. La red a corresponde a una red aleatoria y la red b corresponde a una red tipo S-F.

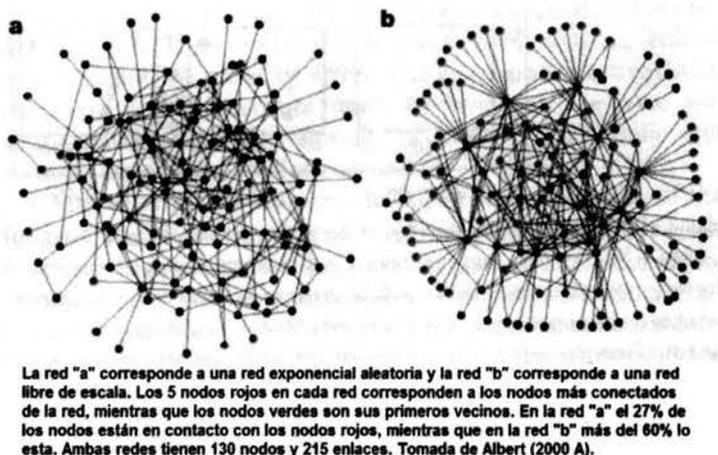


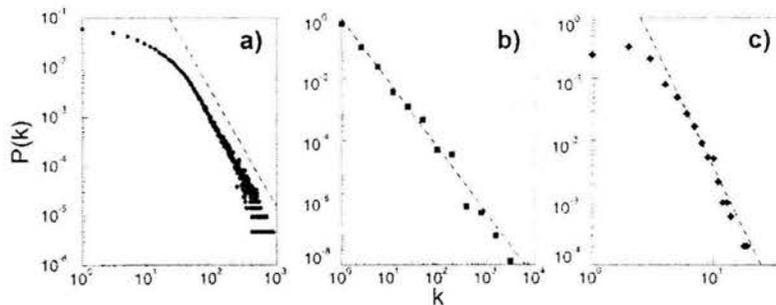
Figura 1.4.3

Es importante hacer notar que tanto las redes de mundo pequeño como las redes exponenciales comparten la característica de que sus curvas respectivas de conectividad $P(k)$ tienen distribuciones de Poisson con colas exponenciales. Las redes aleatorias tienen un máximo en $k = Np$, mientras que en las redes de mundo pequeño, $P(k)$ tiene un máximo en $k = Z$, con Z el número de coordinación.

La distribución de la conectividad, $P(k)$, es muy importante pues determina qué tan homogénea o inhomogénea es la red en función de la conectividad de cada nodo. En redes ordenadas y en el régimen de *Small-World*, por lo general $P(k)$ fluctúa poco (una interesante excepción está en Barabási (2002)), y entonces es posible definir un parámetro, $\langle k \rangle$ ó Z , como conectividad promedio, alrededor del cual están la mayoría de los nodos de la red. En redes libres de escala la conectividad fluctúa desde muy pocos nodos con conectividades altísimas, hasta una conectividad muy baja compartida por la mayoría de los nodos.

Actualmente hay datos disponibles sobre muchas redes reales, lo que hace posible obtener las curvas de conectividad para muchas de ellas, y averiguar si tienen un comportamiento libre de escala, como lo predice el modelo S-F; o tipo distribución de Poisson, de acuerdo a los modelos de redes aleatorias y de redes tipo S-W.

La figura 1.4.4 presenta las curvas de conectividad $P(k)$ para tres redes reales. La gráfica **A** corresponde a la red de actores de películas, la gráfica **B** a la red de páginas de Internet, y la gráfica **C** corresponde a la red de energía eléctrica del oeste de los Estados Unidos.



Las 3 gráficas superiores representan la probabilidad de que un nodo cualquiera en cada red tenga k enlaces. Nótese la relación potencial en los 3 casos, la mayoría de los nodos de las redes tienen muy pocos nodos, pero hay algunos nodos con suficientes enlaces para afectar la distribución. Tomada de Barabasi (1999).

Figura 1.4.4

En los tres casos de la figura 1.4.4, la curva $P(k)$ corresponde aproximadamente a una relación de tipo $P(k) = k^{-\gamma}$, con $\gamma = 2.3$ para la gráfica **a**), $\gamma = 2.1$ para la gráfica **b**), y $\gamma = 4.0$ para la gráfica **c**).

En las redes S-F, hay algunos nodos con muchos enlaces, suficientes para afectar la topología de la red al ser removidos, y es por eso que en este tipo de redes es importante hablar de robustez ante ataque al azar (fallos), y ante ataques dirigidos. En el caso de ataques al azar (remoción de nodos o enlaces con igual probabilidad a través de la red), los daños tardan mucho en sentirse en la red porque estadísticamente es mucho más probable que el ataque dañe un nodo con muy pocos enlaces que uno con muchos (los nodos más grandes se les conoce en la literatura como "*hubs*"). En la figura 1.4.5 se muestra la gráfica de la vulnerabilidad de redes libres de escala ante ataques al azar y dirigidos.

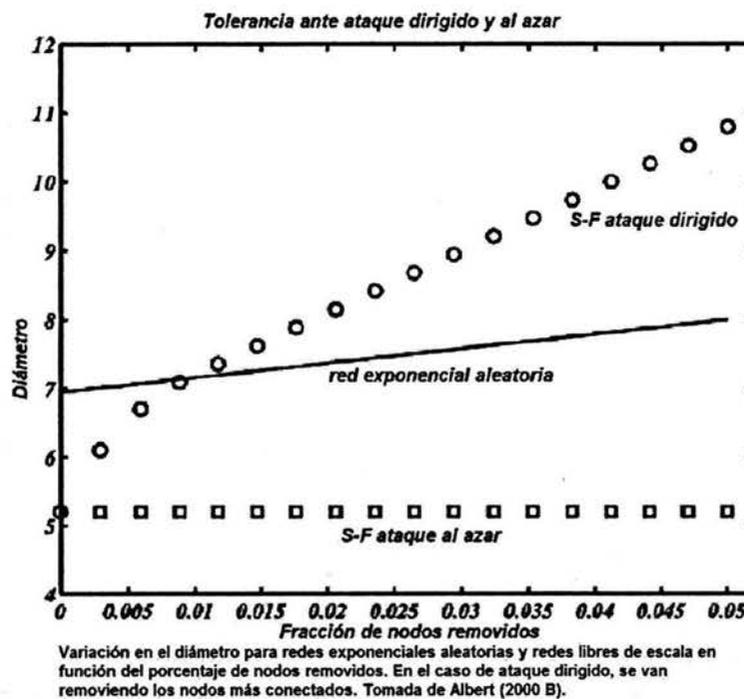


Figura 1.4.5

Aún cuando parecería difícil medir este tipo de parámetros en redes reales, existe una red particular sobre la que se pueden medir las características de robustez ante ataques al azar y dirigidos, y que actualmente tiene gran importancia mundial: Internet y la WWW (Internet es la red de servidores y "hardware" que físicamente soportan a la WWW, la red de páginas y links). Las redes libres de escala suponen un comportamiento especial en el crecimiento dinámico de la red: cada nueva página (o servidor) que se añade a la red se une preferentemente con páginas muy populares (muchos links entrando y saliendo) o con servidores locales o regionales muy interconectados, por lo tanto estos últimos aumentarán paulatinamente su conectividad y representan los "hubs" de la red. La figura 1.4.6 representa la manera como crece el diámetro de Internet conforme aumenta el número de nodos.

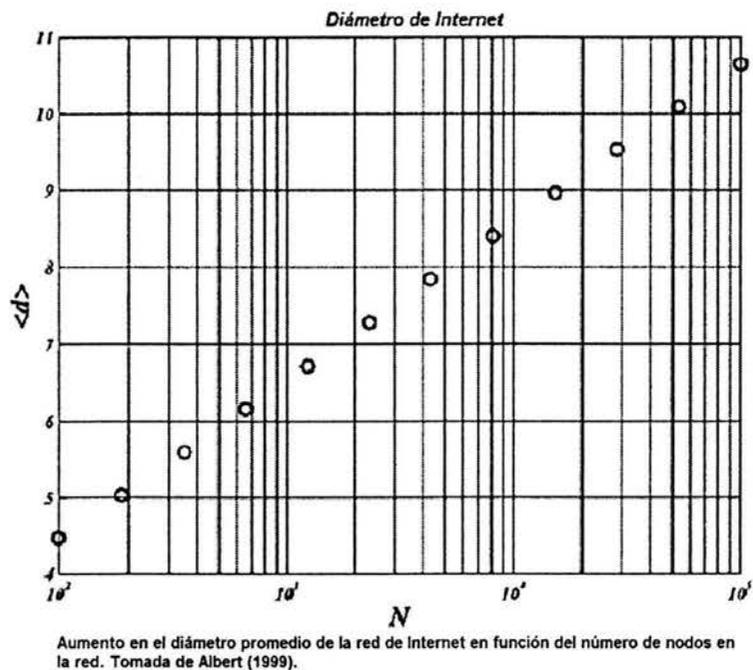


Figura 1.4.6

La WWW constantemente está sufriendo fallos y ataques de hackers, y conocer su topología, así como sus fortalezas y debilidades es de gran importancia pues de su buen funcionamiento depende mucho de las comunicaciones actuales. Las figura 1.4.7 presentan la variación en el diámetro de ambas redes ante ataques al azar (fallos) y ante ataques dirigidos hacia los nodos más conectados, en función de la fracción de nodos afectados en la red respectiva:

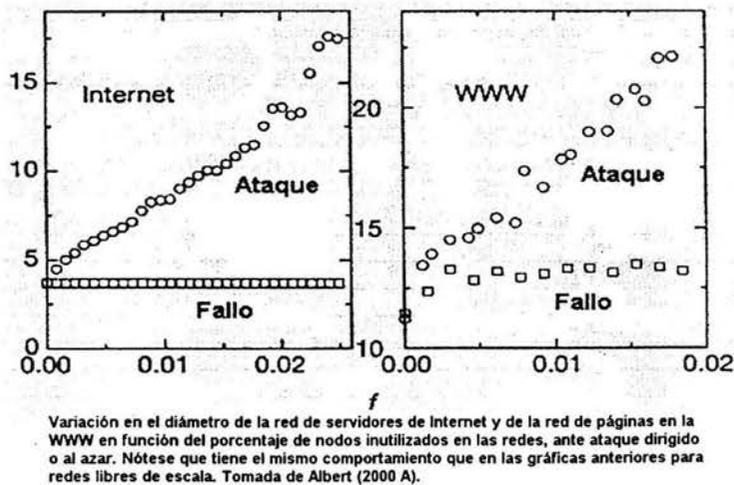


Figura 1.4.7

Resulta ser que tal y como predice el modelo S-F, daños a un pequeño porcentaje del total de los nodos, pero que corresponden a los nodos más pesados (Yahoo, T1MsN, etc. en la WWW) tienen efectos devastadores sobre la red. Ataques al azar se pueden ver como los fallos que constantemente hay sobre la red, tanto de servidores como de software, y afectan de manera mínima el desempeño de la red, a pesar de que el porcentaje de fallos en la red puede ser muy grande. Cabe mencionar que la posibilidad de un ataque terrorista a los servidores más importantes ha sido considerada, y los doce servidores más importantes de internet tienen una serie de medidas de seguridad impresionantes, empezando porque la mayoría están bajo tierra.

Hablando en términos de la distancia característica de las redes (L), resulta que en las redes S-F L crece un poco más rápido que en redes aleatorias en función del número de nodos en la red (véase figura 1.4.8).

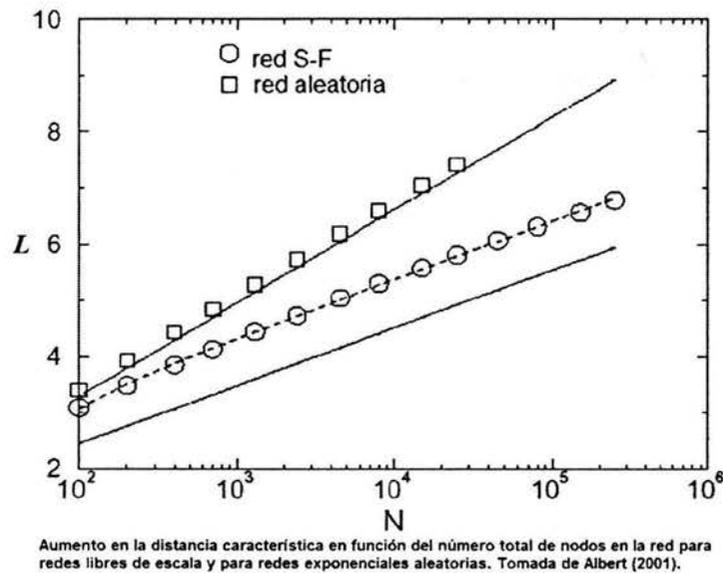


Figura 1.4.8

Esta eficiencia en la conectividad también se manifiesta en otro aspecto. Al modelar epidemias en redes S-F bajo los modelos SIS y SIR (Murray, 1993), resulta que desaparece el umbral epidémico (el porcentaje de población contagiado máximo, a partir del cual es muy probable que se inicie una epidemia), lo que provoca que la ocurrencia de epidemias sea mucho más difícil de controlar (Pastor-Satorras & Vespignani, 2001).

Capítulo 2: El Modelo: Redes Exponenciales Ordenadas

– 2.1 Motivación

La motivación para diseñar las redes exponenciales ordenadas surgió a partir de datos de una red real con propiedades muy interesantes y un gran campo de estudio: la red de neuronas del cerebro.

Datos experimentales muestran que la cantidad de neuronas en el cerebro es del orden de 10^{11} , cada una tiene alrededor de 10^3 neuritas conectadas a otras neuronas de la red. El número promedio de neuronas por las que pasa una señal entre dos neuronas es de 4 ó 5 (Poppler 1990). Considerando a las neuronas como los nodos de la red y las neuritas como los enlaces, podemos medir el diámetro esperado para una red aleatoria (sección 1.2), ya que escala como

$$\frac{\log(N)}{\log(\langle k \rangle)} = \frac{\log(10^{12})}{\log(10^3)} = 4. \quad (2.1.1)$$

El diámetro de una red aleatoria equivalente coincide con las mediciones experimentales. Sin embargo, los estudios señalan que la red es mucho más robusta de lo que se esperaría en una red aleatoria: Daño al 70% de los nodos en el núcleo supraquiasmático no afecta mayormente el funcionamiento de la red (Zhang, 1997).

Por otro lado, las redes S–F (sección 1.4) también tienen un diámetro muy pequeño, pero sucede que en la red de neuronas del cerebro, la coordinación (número de enlaces por nodo) de la red de neuronas es prácticamente la misma en todo el cerebro, mientras que en las redes S–F la conectividad tiene una distribución libre de escala (muchos nodos con pocos enlaces, y algunos nodos con muchísimos enlaces). La propiedad de S–F también implica la existencia de neuronas privilegiadas, que de ser dañadas afectarían mucho el desempeño de la red.

Análogamente, las redes de mundo pequeño (sección 1.3) tienen enlaces privilegiados (atajos), que de fallar afectarían mucho a la red.

Si ninguna de las redes anteriores es viable como modelo para la red de neuronas del cerebro, entonces, ¿en qué gráfica pueden coexistir diámetros

Capítulo 2

pequeños con número de coordinación Z constante? La respuesta es sencilla: el árbol de Cayley (sección 1.1). Sin embargo, el árbol de Cayley tiene una serie de defectos graves cuando se trata de usarlo para modelar la red: es abierto y es muy frágil pues no tiene caminos redundantes, no hay anillos.

Otro aparente defecto, que es más sutil, es que se trata de una red ordenada, en el sentido de que no hay desorden o azar involucrado en la construcción de la red. Esto es importante porque las redes que se conocen con diámetro pequeño y robustas ante daño y ataque son desordenadas: redes aleatorias, redes de mundo pequeño, y redes libres de escala

Después de todo lo visto anteriormente, parecería que las redes "eficientes", – queriendo decir con esto que su diámetro es pequeño y toleran considerables daños – son exclusivas de regímenes desordenados. Muchos autores (Barthélémy & Amaral, 1999) consideran que el fenómeno de *small-world* necesita únicamente de un poco de desorden en una red anteriormente ordenada, sin importar estrictamente la topología de la red ordenada. En el libro de Watts (1999), aplican el modelo $W-S$ a una serie de redes ordenadas, y en todos los casos al añadir enlaces de larga distancia el diámetro disminuye drásticamente. Cabe señalar que todas las redes eran de dimensión espacial finita. También se ha dicho (Albert et al., 2000) que las redes exponenciales que comparten la propiedad de poseer un diámetro (o distancia característica) pequeño, comparten las propiedades de tolerancia a daño y fragilidad ante ataques dirigidos. La cuestión es, entonces, si el desorden es indispensable para obtener estas propiedades.

2.2 Construcción

Proponemos la siguiente red: se toman dos árboles de Cayley finitos e idénticos, y se unen en la superficie (la costura), de tal manera que el anillo mínimo al que pertenecen todos los nodos sea del mismo tamaño (que la estadística de anillos sea constante), y que el número de coordinación sea el mismo para todos los nodos. Esto, junto con tener diámetro constante ($2N$) es equivalente a pedir que todos los nodos sean indistinguibles. Estas redes están definidas por 2 cantidades: el número de capas de cada árbol (N) y el número de coordinación de los nodos en la red (Z). Llamamos a estas redes exponenciales, pues están formados por árboles de Cayley, en los cuales el número de nodos aumenta de manera exponencial con el número de capas; y ordenadas, pues se tiene un algoritmo que define de manera estricta las conexiones entre todos los nodos de la red, de ahí que llamamos Redes Exponenciales Ordenadas (REO). Estrictamente hablando puede haber diferentes tipos de redes exponenciales

Capítulo 2

ordenadas, pero como el nombre no ha sido utilizado anteriormente en la literatura, escogimos el nombre un tanto genérico para referirnos a nuestras redes.

Con las constricciones anteriores, la gráfica más sencilla no trivial es el cubo $(Z, N) = (3, 2)$ (ver figura 2.2.1):

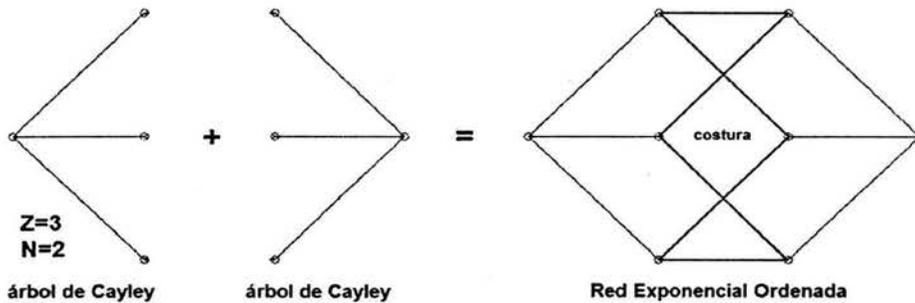


Figura 2.2.1

La condición de indistinguibilidad implica que a pesar de la estructura que se observa en función de las ramas y las capas de los dos árboles de Cayley, y de la aparente importancia de los nodos de los extremos, con las condiciones requeridas garantizamos que podemos torcer la red de manera que cualquier nodo se puede convertir en el extremo de la red, en otras palabras, que todos los nodos son topológicamente equivalentes. Si todos los nodos son equivalentes, no existe el riesgo de un ataque dirigido, pues simplemente no habría hacia quién dirigir el ataque: no hay nodos o enlaces más importantes estructuralmente.

Dado que el anillo mínimo debe ser constante en toda la red, ¿qué valor debe tener? La respuesta está en función del primer nodo de la red. El anillo mínimo al que él pertenece debe ser forzosamente el máximo respecto a los anillos mínimos de los demás nodos, pues no hay enlaces de regreso hasta que se cruce la última capa del árbol, y el primer nodo es el más alejado de dicha capa. Por lo tanto, el anillo mínimo para todos los nodos debe tener longitud $2N$.

Ahora, ¿se pueden construir las redes, o más específicamente, se pueden unir las últimas capas de los dos árboles de Cayley de forma que se cumplan las condiciones que garantizan la equivalencia topológica de los nodos? El problema no es trivial, y matemáticamente es un problema muy interesante, pues en Chung (1986) se habla de que solamente se conocen unas pocas redes que cumplan esas condiciones. De haber un algoritmo para generar estas redes exponenciales ordenadas, se tendrían innumerables redes con nodos topológicamente

equivalentes y una forma cerrada para la distancia característica.

El problema es, entonces, ver si se pueden construir redes para cualesquiera Z y N . Tenemos ya una red que sí funciona: el cubo, la red $(3,2)$. Es importante fijarse en que en la costura no se formen anillos menores a $2N$, y al revisar diferentes redes, resulta que no se puede construir una red en la que no haya por lo menos un anillo de tamaño 8, lo que restringe las redes a $N \leq 4$. La forma de demostrar lo anterior es muy sencilla:

1. En cada árbol hay Z subgrupos que surgen del primer nodo del árbol. A partir del primer nodo (nodo 1) del primer subgrupo en la última capa de un árbol, sale un enlace que va a dar a un nodo (nodo 2) en la última capa del otro árbol (figura 2.2.2).

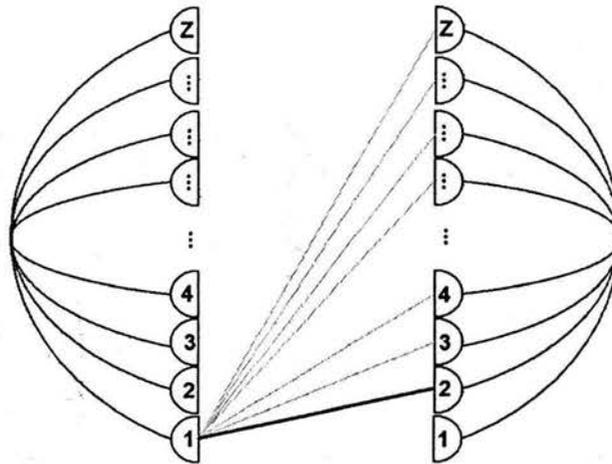


Figura 2.2.2

2. Del nodo 2 salen $(Z-2)$ enlaces, cada uno de ellos va a dar a un subgrupo diferente porque de lo contrario se formaría un anillo menor al mínimo. Tomamos uno de ellos, que sin pérdida de generalidad, va a dar al nodo 3 (figura 2.2.3).

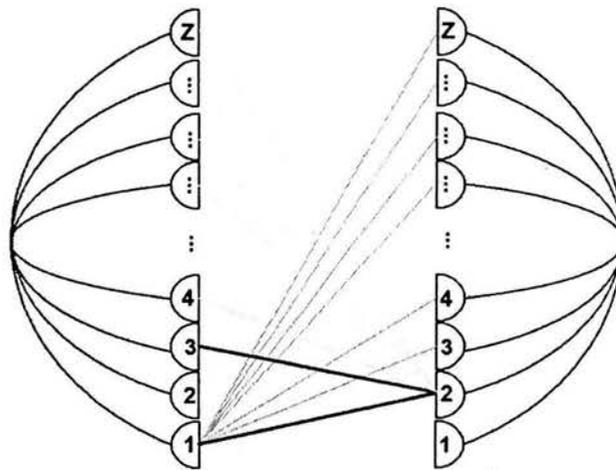


Figura 2.2.3

3. Del nodo 3 salen otra vez $(Z - 2)$ enlaces, necesariamente uno va a dar al subgrupo que se encuentra directamente enfrente al nodo 1. Llevamos 3 pasos recorridos (figura 2.2.4).

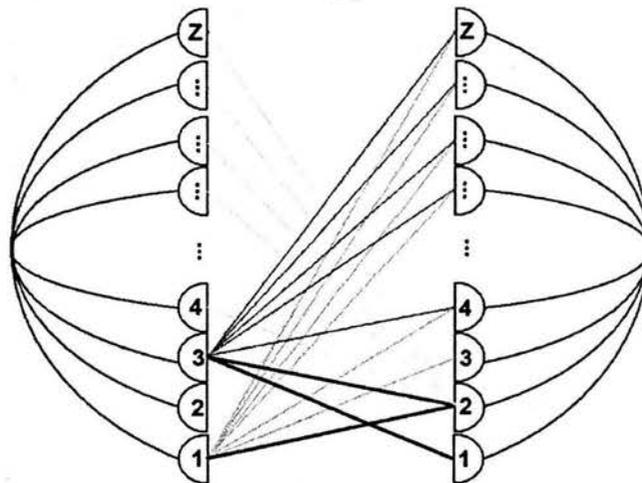


Figura 2.2.4

4. Del nodo 1 todavía se puede evitar brincar al primer subgrupo, tomamos un enlace a cualquier otro subgrupo (paso 4) (figura 2.2.5).

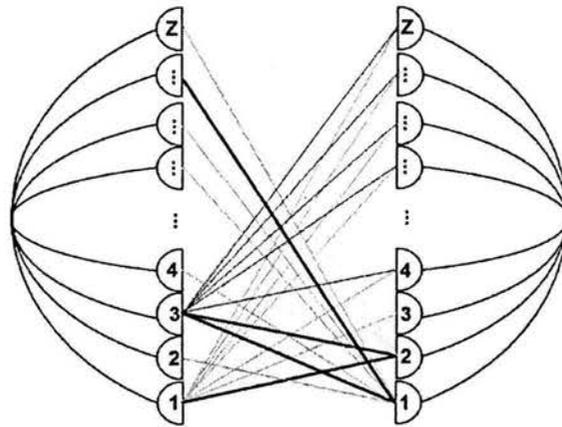


Figura 2.2.5

5. En el paso 5, llegamos a un nodo que necesariamente tiene que tener un enlace al primer subgrupo (figura 2.2.6).

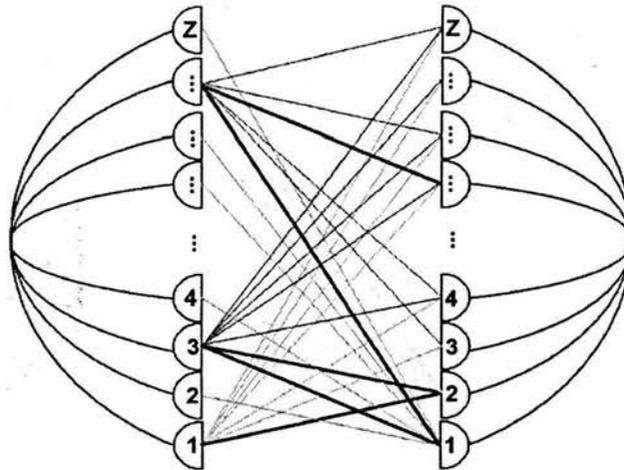


Figura 2.2.6

6. En el paso 6 regresamos al primer subgrupo. A lo más son necesarios otros 2 pasos para regresar al nodo inicial, subiendo a la penúltima capa del árbol y regresando al nodo inicial. En total 8 pasos (figura 2.2.7).

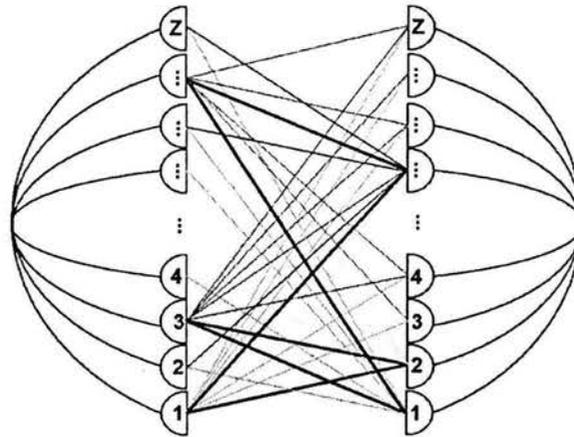


Figura 2.2.7

Nótese que en todo este proceso no hubo ninguna restricción sobre Z , entonces podemos en principio crear con este sencillo algoritmo redes de tamaño ilimitado, aunque no de capas ilimitadas.

Explícitamente, el algoritmo de creación de las redes exponenciales ordenadas se puede separar entonces en las redes con $N = 3$ y las redes con $N = 4$. Para $N = 2$ no hay ningún problema, pues es imposible hacer anillos menores que 4, siempre y cuando no haya enlaces dobles.

Para $N = 3$, se numeran los subgrupos (un subgrupo es el árbol que empieza en uno de los nodos directamente conectados al primer nodo de la red) de 1 a Z , y se numeran los $Z - 1$ nodos que cada subgrupo tiene, y que constituyen la tercera capa del árbol; y a cada nodo en la capa tres se le asigna una coordenada bidimensional con la primera coordenada para el número de subgrupo al que pertenece el nodo, y la segunda coordenada para el número de nodo dentro del subgrupo.

Por convención, los $(Z - 1)$ enlaces de cada nodo del primer subgrupo van a dar, en orden, a todos los subgrupos opuestos excepto el primero. Así por ejemplo, el nodo 3 del primer subgrupo $(1,3)$ va a dar a los nodos $(2,3)$, $(3,3)$, ..., $(Z,3)$ del árbol opuesto. Por simetría pedimos que si un enlace del nodo (i,j) en el primer árbol va a dar al nodo (k,l) del segundo árbol, entonces el nodo (k,l) del primer árbol tiene un enlace que viene del nodo (i,j) del segundo árbol.

Terminado el primer subgrupo, pasamos al segundo subgrupo. Por la consideración de simetría anterior, en el segundo subgrupo faltan $(Z - 2)$ enlaces

Capítulo 2

por nodo por asignar. Dado que ya hay enlaces con el primer subgrupo del segundo árbol, y por convención escogemos no mandar enlaces al mismo subgrupo del segundo árbol, se conectan los $(Z-2)$ con nodos del tercer subgrupo en adelante, pero permutados cíclicamente. Así por ejemplo, el nodo 5 del segundo subgrupo $(2,5)$ va a dar a los nodos $(3,6)$, $(4,6)$, ..., $(Z,6)$ del árbol opuesto.

A continuación pasamos al tercer subgrupo. Por la consideración de simetría, faltan por asignar $(Z-3)$ enlaces por nodo. Hacemos igual que en el segundo subgrupo, pero con una permutación cíclica diferente. Nótese que hay $(Z-1)$ permutaciones cíclicas diferentes, que son justo las necesarias, pues una vez terminado el penúltimo subgrupo se habrán asignado todos los enlaces necesarios.

Para $N = 4$, el procedimiento es muy parecido. Ahora en cada subgrupo habrá $(Z-1)$ sub-subgrupos, cada uno de ellos con $(Z-1)$ nodos. Asignamos a cada nodo una coordenada tridimensional, con el número de subgrupo, el número de sub-subgrupo, y el número de nodo como x,y,z respectivamente. Los enlaces del primer sub-subgrupo se asignan esencialmente igual que para $N = 3$, excepto que el número de sub-subgrupo coincide con el número de nodo: así, el nodo 1 del primer sub-subgrupo $(1,1,1)$ va a dar a los nodos $(2,1,1)$, $(3,1,1)$, ..., $(Z,1,1)$; el nodo 2 del primer sub-subgrupo $(1,1,2)$ va a dar a los nodos $(2,2,2)$, $(3,2,2)$, ..., $(Z,2,2)$. En los demás sub-subgrupos del primer subgrupo, los enlaces para cada nodo se permutan cíclicamente en la coordenada del sub-subgrupo: así, el nodo 4 del segundo sub-subgrupo $(1,2,4)$ va a dar a los nodos $(2,5,4)$, $(3,5,4)$, ..., $(Z,5,4)$, por ejemplo. Con los siguientes grupos se repiten las asignaciones en el mismo orden y con las mismas permutaciones en las coordenadas de los subgrupos, pero esta vez también se permuta la coordenada de los nodos. El nodo 3 del segundo sub-subgrupo del tercer subgrupo $(3,2,3)$ va a dar a los nodos $(4,3,4)$, $(5,3,4)$, ..., $(Z,3,4)$.

Al igual que para $N = 3$, por la consideración de simetría, al terminar de asignar los enlaces para el penúltimo subgrupo, se completan todos los enlaces, y coincide con número de permutaciones cíclicas posibles, tanto para los sub-subgrupos como para los nodos.

Este proceso fue implementado en MATLAB (ver apéndice 2). Se definió la matriz de conectividades de toda la red como la matriz de $M \times M$ elementos, con M los nodos en la red, y todos los nodos ordenados de manera normal, en donde el sitio (i,j) es cero si el nodo i no está conectado directamente con el nodo j , y es uno si están conectados. La submatriz S representa las conexiones en la costura, y

Capítulo 2

es ahí donde se ejecutan los pasos descritos arriba. La siguiente imagen corresponde a las redes (5,3) y (5,4) proyectadas en 2 y 3 dimensiones respectivamente (véase figura 2.2.8):

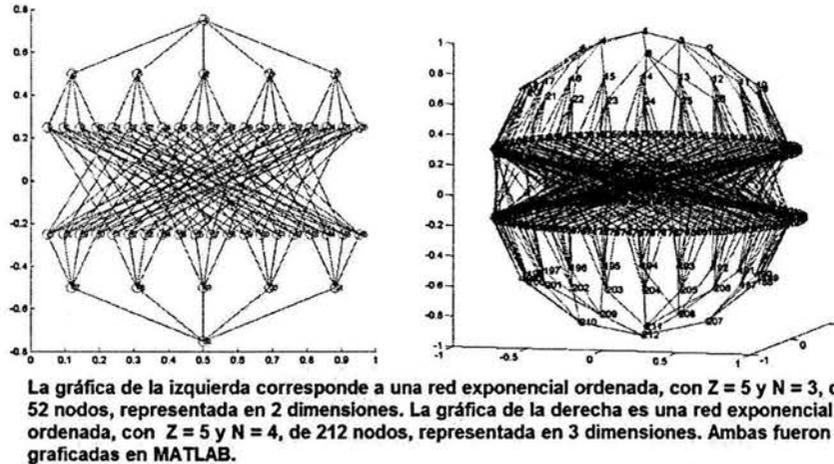


Figura 2.2.8

Es importante enfatizar que las dos proyecciones usadas son completamente arbitrarias. Para diseñar una proyección que no fuera arbitraria se podrían simular los enlaces como resortes y encontrar la distribución espacial que minimice el elongamiento de los enlaces.

– 2.3 Propiedades

Las redes (Z,N) tienen las siguientes propiedades:

1. Son gráficas cerradas, con número de coordinación (Z) constante.
2. Son estrictamente ordenadas y existe un número finito de permutaciones topológicamente equivalentes.
3. El número total de nodos en la red es de

$$N_T = \frac{2[Z(Z-1)^{(N-1)} - 2]}{Z-2}, \quad (2.3.1)$$

Capítulo 2

y el número total de enlaces es de

$$K_T = \frac{ZN_T}{2}. \quad (2.3.2)$$

4. El tamaño de los anillos mínimos es de $2N$, y la distancia característica es, exáctamente:

$$\langle l \rangle = \frac{(2N-1)}{2} \frac{N_T}{(N_T-1)}. \quad (2.3.3)$$

5. Todos los nodos son equivalentes, y el nodo más lejano a un cierto nodo lo está a distancia $2N-1$. Al reordenar una gráfica buscando que un nodo particular se vuelva el nuevo extremo de uno de los árboles, el extremo opuesto en la red corresponderá al nodo más alejado a él, que es único.

6. Son muy robustas ante ataque aleatorio y ante ataque dirigido. Dada una fracción f de nodos removidos, el diámetro de la red aumenta menos que en el caso de redes aleatorias.

7. Se puede remover una fracción muy grande de nodos o enlaces antes de producir cúmulos aislados.

8. Una perturbación en los enlaces produce un efecto peculiar en la distancia característica, muy diferente a lo ocurrido durante el fenómeno de SW (Watts & Strogatz, 1998). El decrecimiento es muy pequeño comparado con el de un anillo en SW. En el caso en que todos los enlaces de la red ordenada sean perturbados, la red se vuelve equivalente a una red exponencial aleatoria.

9. Las redes exponenciales ordenadas son filtros de frecuencias muy precisos. Simulando la red como una guía de ondas, al introducir ondas por un extremo de la red, la transmisión de la señal al otro extremo de la red es cero excepto en frecuencias muy específicas donde el coeficiente de transmisión es cercano a 1.

Las propiedades 1 y 2 no es necesario probarlas, pues representan las restricciones en la construcción de las redes.

Capítulo 2

La propiedad 3, que se refiere al número total de nodos en la red se calcula de la siguiente forma: Para un árbol, en la primera capa hay un nodo, y de ahí en adelante tenemos $Z(Z-1)^j$, con j variando continuamente de 1 a $N-2$. La suma de todo eso es:

$$1 + Z[1 + (Z-1) + (Z-1)^2 + (Z-1)^3 + \dots + (Z-1)^{(N-2)}] = \frac{Z(Z-1)^{N-1} - 2}{Z-2}.$$

El resultado para toda la red es simplemente el doble de lo anterior pues tenemos 2 árboles:

$$N_T = \frac{2[Z(Z-1)^{N-1} - 2]}{Z-2} \quad (2.3.1)$$

La figura 2.3.1 muestra el aumento en el número total de nodos de la red respecto a N y Z , respectivamente. Estoy suponiendo que ambos pueden variar entre 0 y 100, cosa que en realidad no es cierta para el caso de N (demostramos anteriormente que las redes funcionan solamente para $N \leq 4$), pero sirve de manera ilustrativa:

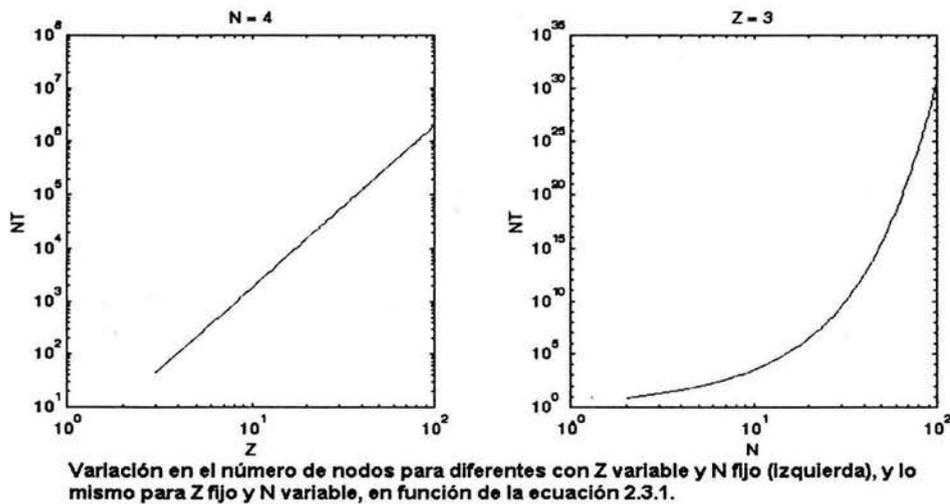


Figura 2.3.1

Como todos los nodos tienen el mismo número de coordinación, i.e.: el mismo número de enlaces k , y como un enlace siempre une a 2 nodos, el número

Capítulo 2

total de enlaces es:

$$K_T = \frac{ZN_T}{2}. \quad (2.3.2)$$

La primera parte de la propiedad 4 es también un axioma de construcción de la red: pedimos que el anillo mínimo sea el mismo para todos los nodos, y como el nodo más alejado tiene un anillo mínimo de tamaño $2N$, exigimos que el anillo mínimo para todos los demás nodos sea también de $2N$.

El cálculo de la distancia característica es muy sencillo. Cabe mencionar que en el artículo de Chung (1986), se habla de que el número de redes o gráficas cerradas para las cuales hay una fórmula cerrada es muy pequeño. Sin embargo, el hecho de utilizar árboles de Cayley –que como había mencionado antes pertenecen a las pocas redes reales en las cuales se puede resolver el problema de percolación de manera exacta– nos permite encontrar una forma cerrada para la distancia característica.

Para encontrar la distancia característica utilizamos el hecho de la invariancia de los nodos. Siempre es posible deformar la red sin romper ni cambiar los enlaces de tal manera que un nuevo nodo sea el extremo de la red. Por lo tanto consideramos la distancia característica como el promedio de las distancias del primer nodo de la red respecto a todos los demás nodos de la red, y que esa cantidad es la misma en todos los nodos, así que sobre eso se saca el promedio entre los demás nodos. Entonces, la distancia del nodo a la primera capa es 1, multiplicada por los Z nodos que hay en esa capa; a la segunda capa la distancia es simplemente 2 con $Z(Z-1)$ nodos, y se continua así con toda la red, promediada respecto al número total de nodos en la red.

El resultado de esa primera suma no es otra cosa que la media de la red, pues la red es perfectamente simétrica vista desde un extremo. Por lo tanto el resultado es el número de capas entre 2: $\frac{2N-1}{2}$. Este resultado hay que multiplicarlo por todos los nodos N_T y dividirlo entre N_T-1 pues no estamos considerando la distancia de un nodo respecto a sí mismo. La distancia característica es, entonces, exáctamente:

$$\langle l \rangle = \frac{2N-1}{2} \frac{N_T}{N_T-1}. \quad (2.3.3)$$

Capítulo 2

De manera más formal, se puede hacer la siguiente suma para calcular la distancia promedio desde el primer nodo:

$$\sum_{J=1}^{N-1} JZ(Z-1)^{N-1} + \sum_{J=1}^{N-1} (J+N-1)Z(Z-1)^{N-J-1}, \quad (2.3.4)$$

con el primer término como la suma de las distancias desde el origen hasta la costura, y el segundo término para las distancias de la costura hasta el otro extremo de la red. Descomponiendo las sumas en partes, y usando el hecho de que:

$$\sum_{x=a}^b xk^x = \sum_{x=a}^b k \frac{d}{dk} k^x, \quad (2.3.5)$$

y por linealidad de la derivada,

$$\sum_{x=a}^b xk^x = k \frac{d}{dk} \sum_{x=a}^b k^x, \quad (2.3.5)$$

donde ya se puede aplicar el resultado para sumas geométricas, quedando de la siguiente forma:

$$\sum_{x=a}^b xk^x = \frac{k^{a+1} - k^{b+2}}{(k-1)^2} - \frac{1}{k-1} [ak^a - (b+1)k^{b+1}]. \quad (2.3.5)$$

El resultado de todo es: $\frac{2N-1}{2}$, que multiplicado por los nodos de la red, y dividido entre $N_T - 1$ pues no se consideraron distancias de un nodo hacia sí mismo. El resultado es otra vez:

$$\langle l \rangle = \frac{2N-1}{2} \frac{N_T}{N_T-1} \quad (2.3.3)$$

Para verificar el resultado de la fórmula, comprobamos que pasa con la red $(Z, N) = (3, 3)$. Primeramente numeramos todos los nodos de la red (véase figura 2.3.2):

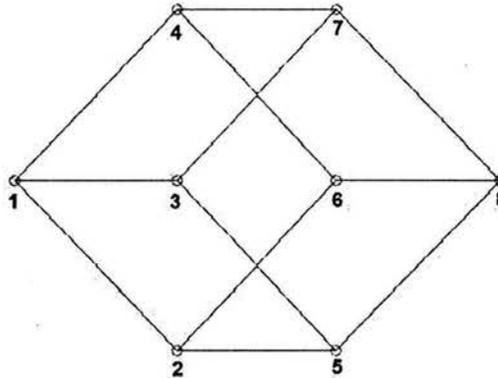


Figura 2.3.2

Posteriormente elaboramos la matriz de distancias, donde el sitio (i,j) en la matriz corresponde a la distancia entre el nodo i y el nodo j .

$d(i/j)$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	1	2	2	2	3
2	1	0	2	2	1	1	3	2
3	1	2	0	2	1	3	1	2
4	1	2	2	0	3	1	1	2
5	2	1	1	3	0	2	2	1
6	2	1	3	1	2	0	2	1
7	2	3	1	1	2	2	0	1
8	3	2	2	2	1	1	1	0

Nótese que la matriz es simétrica, la distancia del nodo i al nodo j es la misma que la del nodo j al nodo i . La diagonal de la matriz son ceros porque corresponde a $d(i,i) = 0$. También es importante notar que el promedio de los valores de cada renglón y cada columna es el mismo, lo que corresponde a la igualdad topológica entre los nodos.

El valor de $\langle l \rangle$ corresponde al promedio de la suma de los sitios de cualquier renglón o columna. El resultado es $\langle l \rangle = \frac{12}{7}$ (nótese que dividimos entre 7 en lugar de 8 porque no consideramos $d(i,i)$). Usando la fórmula deducida anteriormente, el resultado sería:

Capítulo 2

$$\langle l \rangle = \frac{2N-1}{2} \frac{N_T}{N_T-1} = \frac{3}{2} * \frac{8}{7} = \frac{12}{7}.$$

Una consecuencia de este resultado para el diámetro es que para una red exponencial ordenada, con N fijo, el diámetro de la red tiende a un valor constante conforme aumenta el número de nodos (dejando N fijo y aumentando Z). Y cómo el mínimo valor no trivial de N es 2, podríamos diseñar una red con un número infinito de nodos, y que sin embargo su diámetro fuera $\frac{2N-1}{2} = 3/2$. Dado que existe un límite para N ($N \leq 4$), la red con mayor diámetro sería la red con $Z = 3$ y $N = 4$, con $\langle l \rangle = 3.58$.

La propiedad 5 es también muy sencilla de probar usando otra vez que todos los nodos son equivalentes. Habíamos visto anteriormente que la red podía ser deformada de tal manera que cualquier nodo pasara a ser uno de los extremos, y que el nodo más lejano a él pasaría a ser el otro extremo de la red. Entonces, la distancia máxima para cada nodo corresponde a la distancia entre el primer y último nodo de la red. El número de capas que hay que atravesar para llegar de un extremo al otro es $2N - 1$, por lo tanto la distancia máxima es también $2N - 1$.

La propiedad 6 es un resultado en cierta forma inesperado. Los árboles de Cayley tienen como gran desventaja que son muy frágiles, y uno esperaría que esa propiedad se heredara cuando se unen dos árboles de Cayley. Sin embargo, simulaciones numéricas muestran lo contrario.

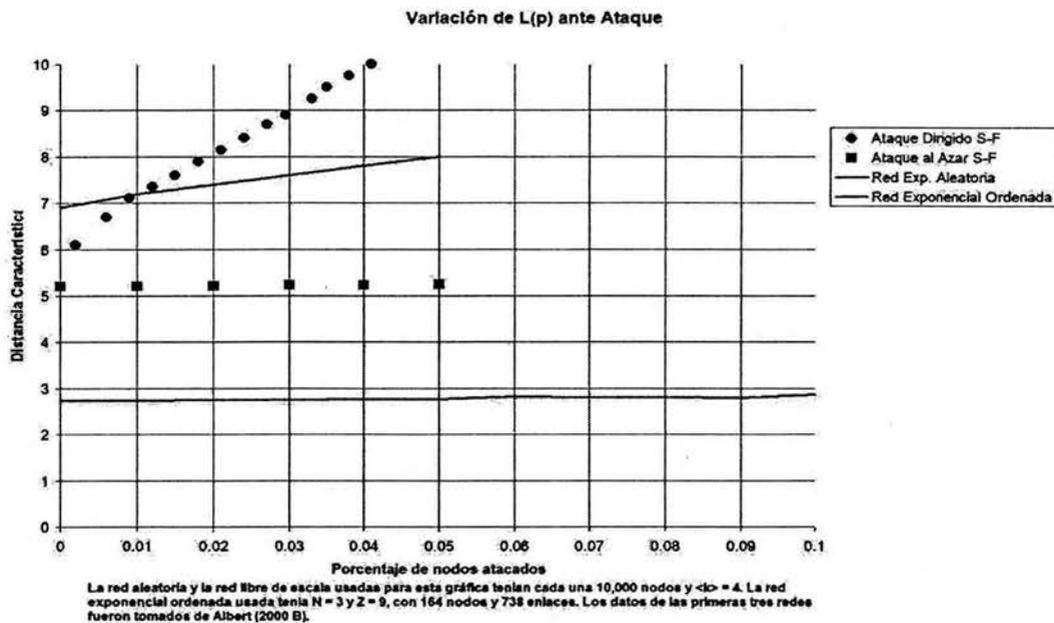


Figura 2.3.3

En la gráfica aparecen dos curvas para redes SF que corresponden a ataque dirigido y ataque aleatorio. Aparece también una única curva para redes exponenciales aleatorias pues no tiene sentido hablar de ataque dirigido cuando los nodos son esencialmente iguales. Estas 2 redes tienen 10,000 nodos y $\langle k \rangle = 4$. Aparece también la curva de una red exponencial ordenada con $N = 3$ y $Z = 9$, con 164 nodos y 738 enlaces. A pesar de no tener las dimensiones de las redes anteriores, lo importante es la manera como crece la distancia característica de la red ante ataque y daño. Es inmediato en la gráfica que la REO crece más lentamente que su contraparte aleatoria, y casi a la misma velocidad que la red libre de escala ante ataque al azar. La REO tiene la ventaja adicional de que no es vulnerable ante ataque dirigido, pues todos los nodos son exactamente iguales.

Para demostrar la propiedad 7, se midió la conductividad DC de la red. La idea detrás de ese método es básicamente suponer que la red está hecha de alambres conductores, se aplica una diferencia de potencial en los extremos, y se utilizan las leyes de Kirchoff para calcular las corrientes que pasan por cada nodo.

Suponiendo que todos los enlaces tienen la misma resistencia, las leyes de Kirchoff establecen que:

Capítulo 2

$$\sum_j V_j = 0 \quad (2.3.6)$$

en anillos cerrados, y que la corriente que circula por un nodo i es:

$$I_i = \sum_j (V_j - V_i) \sigma_{ij}, \quad (2.3.7)$$

donde V_j y V_i corresponden a los potenciales de los nodos i y j , respectivamente. $\sigma_{ij} = 0$ si el enlace entre los nodos i y j no existe, y $\sigma_{ij} = 1$ en caso contrario.

La corriente que circule por la red será una función de la conectividad de la red, entre más caminos existan dentro de la red, que conecten ambos extremos, mayor será la corriente que cruce de un lado a otro. Se mide entonces la corriente normalizada en función de una densidad aleatoria de enlaces removidos, y se busca la densidad crítica a la que la corriente que cruza la red es cero. Ese punto crítico coincide con el rompimiento de la red en cúmulos desconectados entre sí, también conocido como umbral de percolación. El valor crítico para redes exponenciales aleatorias es de $f = 0.28$.

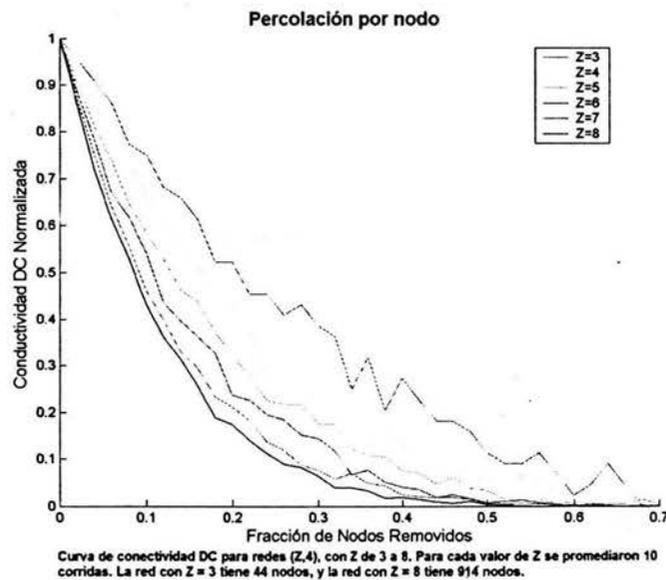


Figura 2.3.4

Capítulo 2

A partir de la figura 2.3.4, se observa que la corriente parece tender asintóticamente a cero, lo que no corresponde a los umbrales de percolación clásicos, por ejemplo el del árbol de Cayley, en donde la curva es prácticamente vertical al llegar al eje x. La única explicación que se nos ocurre para el cambio de comportamiento es que se deba a la robustez adquirida por la manera de conectar los 2 árboles.

La propiedad 8 es meramente empírica (por el momento). La figura 2.3.5 muestra las curvas para una red en régimen clásico de Mundo Pequeño y otra red exponencial ordenada. El cálculo se hizo sobre 2 redes inicialmente con 202 nodos y 10 vecinos por nodo, midiendo la distancia mínima entre todos los pares de nodos y promediando, para diferentes porcentajes de enlaces perturbados:

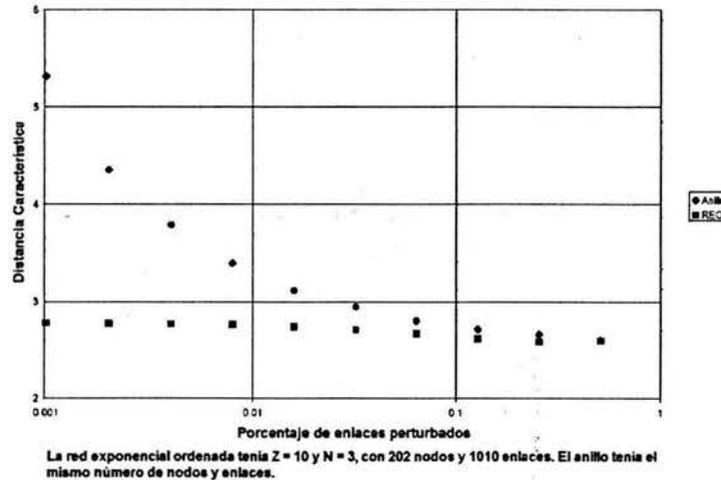


Figura 2.3.5

La otra variable relevante en la literatura de redes de mundo pequeño es el coeficiente de aglomeración $C(p)$. En las redes exponenciales ordenadas, $C(p)$ vale estrictamente cero, pues los Z vecinos de un nodo particular nunca están conectados entre sí. Perturbando los enlaces, el valor de $C(p)$ aumentaría hasta llegar al de una red exponencial aleatoria cuando todos los enlaces estuvieran perturbados.

La propiedad 9 se obtuvo a partir de un estudio de las propiedades resonantes de la red. Este resultado había sido trabajado de manera parcial en (del Río, 2002), simulando la red de venas y arterias del cuerpo como 2 árboles de Cayley encontrados en la superficie y conectados paralelamente. La red se comportaba como un filtro de frecuencias alrededor de la frecuencia de oscilación

Capítulo 2

del corazón.

La manera más sencilla de modelar una guía de ondas es como una colección de masas y resortes, en la que se introduce una señal oscilante por un nodo, y se estudia la salida por el nodo opuesto. La red se modeló con los nodos como masas M y los enlaces como una cadena de N masas m unidas entre sí por resortes con constante k , y a su vez unidas a los nodos por resortes de constante K . La figura 2.3.6 es para frecuencias entre 0 y π .

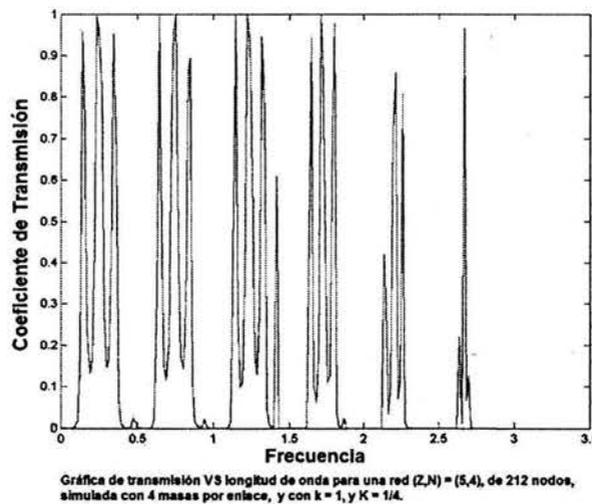


Figura 2.3.6

La impedancia de la red puede entonarse variando los parámetros mencionados anteriormente, lo que permite obtener gráficas como la anterior para cualquier frecuencia.

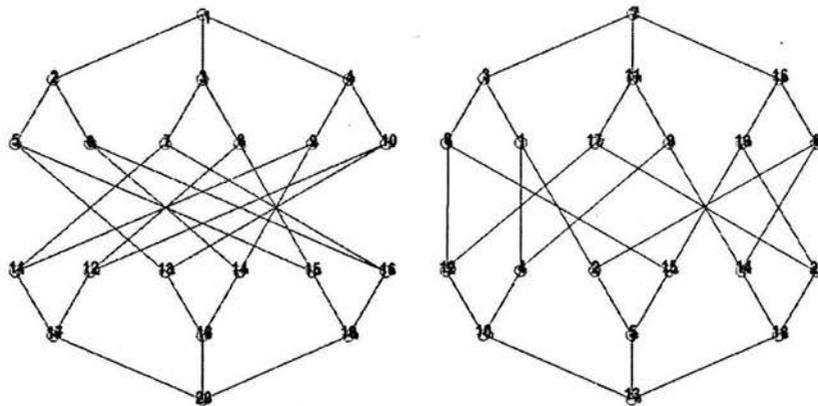
Para concluir este capítulo es necesario hablar de la prueba que garantiza que el algoritmo de construcción para las REO's efectivamente produzca redes con nodos intercambiables, en la que se puede medir la distancia característica de manera exacta.

La prueba, implementada también en MATLAB, escoge un nodo al azar en una red particular, y empieza a reordenar la red tomando como extremo el nodo escogido. Si es posible reordenar la red tal que quede exactamente igual que la red original, para cualquier nodo escogido, todos los nodos de la red son equivalentes topológicamente. La fórmula para la distancia característica depende estrictamente de esta condición, pues fue calculada en función de que los nodos

Capítulo 2

se podían reacomodar como extremos de la red.

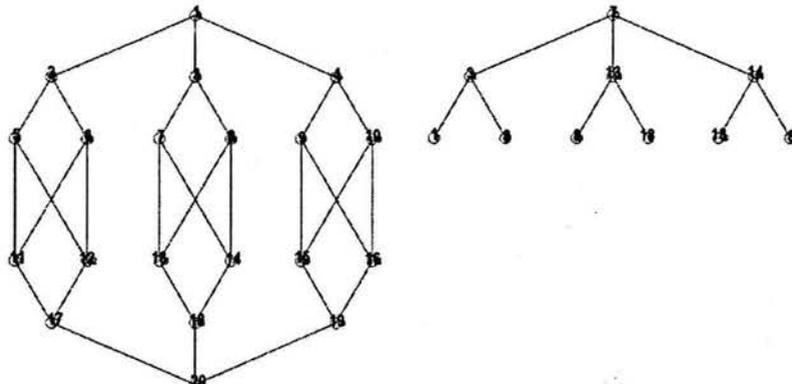
La siguiente gráfica presenta una red exponencial ordenada bien conectada, reacomodada tomando el nodo 7 como extremo de la red:



Reconexión en una red $Z = 3$ y $N = 3$, tomando como nuevo punto de inicio el nodo 7 de la red original (izq.), y reacomodando a partir del nodo (der.)

Figura 2.3.7

Para demostrar que la forma de conectar la red no es trivial, la gráfica a continuación presenta primero una red basada en dos árboles de Cayley iguales a los de la gráfica anterior, en la cual los dos árboles son conectados respetando el número de vecinos, pero creando anillos menores a $2N$. Se intenta reconectar también a partir del nodo 7, pero ya en la tercera capa se repite tres veces el nodo 8 y dos veces el nodo 18.



Reconexión en una red con $Z = 3$ y $N = 3$, que originalmente se encontraba mal conectada (izq.), pues a pesar de que todos los nodos tienen el mismo número de vecinos, el anillo mínimo es menor para los nodos del centro. Basta con intentar reconectar la primera mitad de la red para darse cuenta que es imposible reconstruir una red topológicamente equivalente

Figura 2.3.8

Capítulo 2

Mediante la prueba anterior podemos afirmar que las redes exponenciales ordenadas existen. Sabemos que es posible construir REOs de cualquier tamaño, mientras se respete que $N \leq 4$. Sabemos también, a partir de las figuras (2.3.3) y (2.3.5) que las REOs tienen las mismas propiedades de diámetro y distancia característica pequeña que las redes aleatorias, y de robustez ante fallos y ataques.

El paso siguiente en el estudio de las redes exponenciales ordenadas es aplicarlas a problemas reales.

Capítulo 3: Aplicaciones de Redes Exponenciales

Ordenadas

– 3.1 Problema del Caminante Dirigido

Esta primera aplicación de una red exponencial ordenada es importante pues muestra la utilidad que tienen este tipo de redes para resolver problemas de manera analítica. Así como el problema de percolación se puede resolver de manera analítica únicamente en el árbol de Cayley, y así como es posible encontrar una forma cerrada para el diámetro en redes exponenciales ordenadas, también es posible calcular de manera analítica diversos problemas. Uno de ellos es el siguiente:

¿Cuánto tiempo se tarda una partícula dirigida en cruzar de un lado a otro de una red exponencial ordenada de N capas y Z vecinos por nodo, con una densidad ρ de caminantes aleatorios moviéndose sobre la red?, avanzando un paso por unidad de tiempo cuando tiene al menos un nodo despejado adelante.

Supongo que el caminante se comporta "conductivamente", es decir, que al tener al menos un nodo despejado hacia adelante se mueve por él. Como la red es completamente isomorfa, puedo garantizar que una distribución uniforme de caminantes aleatorios se mantiene uniforme después de un tiempo, es decir, que no van acumulando en alguna zona particular de la red.

En la aproximación de campo medio, la probabilidad de que al menos un nodo esté abierto está dado por la suma de todos los casos posibles, así por ejemplo, la probabilidad de que todos los nodos estén despejados en una red con Z vecinos es $(1 - \rho)^Z$ y la probabilidad de que estén despejados $Z - 1$ nodos es $(Z - 1)(1 - \rho)^{Z-1} \rho$, y así en adelante. La fórmula general es

$$\sum_{k=0}^{z-1} C_{z-1}^k \rho^k (1 - \rho)^{z-k}, \quad (3.1.1)$$

con C_{z-1}^k las posibles combinaciones en donde al menos un nodo esté desocupado.

La ecuación anterior casi corresponde a la fórmula del binomio excepto por la falta del término ρ^z , por lo que la solución a la fórmula es

$(\rho + 1 - \rho)^Z - \rho^Z = 1 - \rho^Z$. El resultado anterior puede considerarse como la velocidad que tarda el caminante en cruzar a través de un nodo particular. Cuando $\rho = 0$ todos los sitios están desocupados por lo que la velocidad es máxima. Cuando $\rho = 1$, todos los sitios se encuentran ocupados y la velocidad es cero. La velocidad aumenta conforme Z lo hace porque significa que una mayor cantidad de sitios a los que puede acceder, y cuando $Z \rightarrow \infty$ la velocidad es 1, a menos que $\rho = 1$. En términos termodinámicos, lo anterior corresponde a difusión por saltos.

Supongamos que consideramos la red como una gráfica relacional, es decir, no nos interesa definir un parámetro de distancia espacial, y lo que hacemos en vez de eso es considerar que la distancia entre cualesquiera dos nodos unidos por un enlace es 1. En términos físicos lo anterior tiene sentido si se piensa en una red de telecomunicaciones en que el tiempo que tarda una señal que se mueve a la velocidad de la luz para cruzar dos nodos es despreciable respecto al tiempo que tarda en el nodo, por lo que el tamaño de los enlaces puede considerarse igual.

Usando cinemática básica, el tiempo que tarda el caminante en cruzar una capa de la red es distancia entre tiempo, y normalizamos la distancia entre dos capas a 1, $t = \frac{1}{1-\rho^Z}$ cuando el caminante avanza hacia una capa donde hay Z vecinos. El tiempo total en cruzar toda la red es entonces, la suma de los tiempos que se tarda el caminante en cada capa. En una red (Z, N) solamente el primer paso es hacia una capa con Z vecinos, posteriormente hay $N-1$ capas con $Z-1$ vecinos cada una, y otras $N-1$ capas (la segunda mitad de la red) en que solamente hay un vecino para cada paso. Por lo tanto,

$$t_T = \frac{1}{1-\rho^Z} + (N-1) \left(\frac{1}{1-\rho^{Z-1}} + \frac{1}{1-\rho} \right). \quad (3.1.2)$$

Una simplificación del procedimiento para encontrar el tiempo que tarda un caminante dirigido en atravesar la red de extremo a extremo es la siguiente: En cada paso, sólo hay una manera en que el caminante no pueda avanzar hasta la siguiente capa, y ésta es que toda la capa siguiente esté ocupada. Si hay una densidad ρ de sitios ocupados, y cada nodo tiene Z vecinos, la probabilidad de que no avance a la segunda capa es ρ^Z y de que no avance entre cualesquiera dos capas en la primera mitad de la red es de ρ^{Z-1} . Para la segunda mitad de la red, como sólo hay un camino por donde avanzar, la probabilidad es simplemente ρ . Como cada vez que cruza una capa el evento es independiente de los anteriores, el tiempo total en cruzar de un lado a otro la red es la suma de todas las demoras: $\frac{1}{1-\rho^Z} + (N-1) \left(\frac{1}{1-\rho^{Z-1}} + \frac{1}{1-\rho} \right)$.

Al modelar en la computadora el proceso, promediando sobre 5000 trayectorias, el resultado es la figura 3.1.1 (la línea continua representa la ecuación de campo promedio y las bolas representan la modelación):

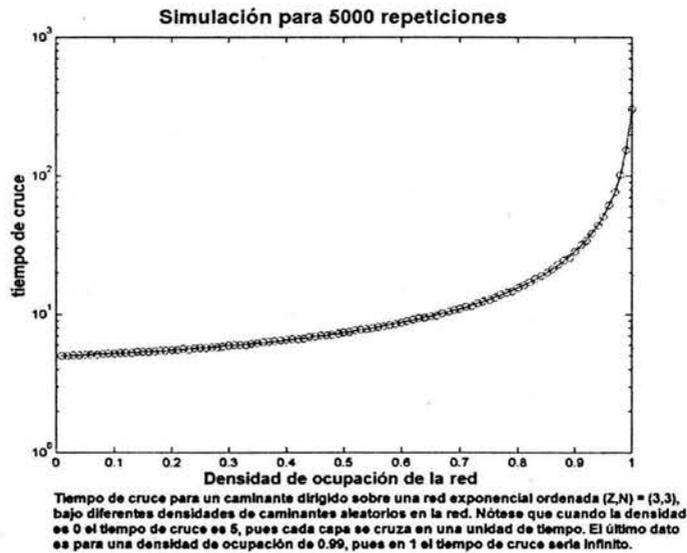


Figura 3.1.1

El modelo computacional consistió en un ciclo en el que los Z vecinos de una capa se representan por el mismo número de variables aleatorias k_a . En un intervalo en que el caminante quiera llegar a la otra capa, dado que hay una densidad de ocupación ρ , si en al menos una de las variables aleatorias la diferencia $k_a - \rho > 0$ entonces el caminante avanza a la siguiente capa. En caso contrario, el proceso se repite hasta que consiga avanzar de capa.

Al discutir el algoritmo de generación de una red de este tipo vimos que el punto crucial para asegurar que todos los nodos sean iguales radica en la forma de unir ambos árboles. Afirmamos a continuación que cuando la red está bien conectada el tiempo de cruce de una partícula corresponde al mínimo. Habría que considerar también que los caminantes aleatorios en la red ya no se mantendrían uniformemente distribuidos en el tiempo al no haber homogeneidad en los nodos.

El cálculo siguiente muestra la diferencia de tiempos al cruzar la costura entre una red perfecta y una red mal conectada. Para este primer caso la red está mal conectada en el sentido que la costura está formada solamente por uniones entre nodos paralelos.

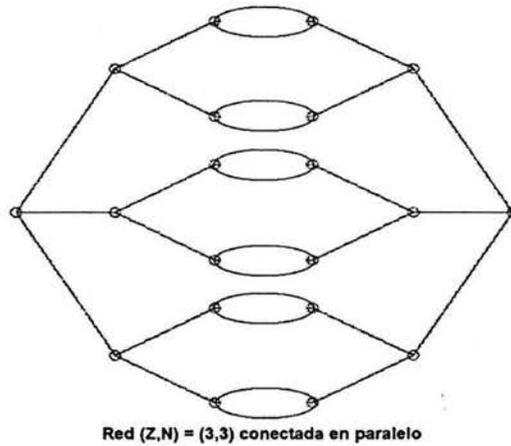


Figura 3.1.2

El tiempo de cruce de la partícula no varía más que en la costura, de tener Z vecinos en una red perfecta, pasa a tener solamente 1 vecino. Quiero mencionar que esto no es despreciable, pues mostramos anteriormente que las redes (Z,N) están limitadas para $N \leq 4$, así que en la red con $N = 4$ habría que cruzar 7 capas entre extremo y extremo, por lo que el cambio en una de ellas no puede ser despreciable.

Respecto al resultado sin perturbación, en la red $(3,3)$ el tiempo cambia únicamente en el paso de la capa 3 a la 4, que antes ocupaba un tiempo $\frac{1}{1-\rho^{z-1}}$ y ahora toma $\frac{1}{1-\rho}$. La ecuación completa es

$$t = \frac{1}{1-\rho^z} + N \frac{1}{1-\rho^{z-1}} + (N-2) \frac{1}{1-\rho}. \quad (3.1.3)$$

Se observa de inmediato que el tiempo también es mayor para cualquier densidad con la costura mal hecha. Otro hecho más sutil, que también depende de que la costura esté bien hecha, y que con eso se garantiza que todos los nodos sean indistinguibles, es que en el problema en cuestión estamos suponiendo que hay una cierta densidad de caminantes aleatorios vagando por la red; y es justamente el hecho de que topológicamente la red es igual en cualquier lugar el que permite suponer que después de cierto tiempo los caminantes siguen ocupando uniformemente la red. La siguiente gráfica corresponde a la diferencia en el tiempo de cruce para la red ilustrada anteriormente:

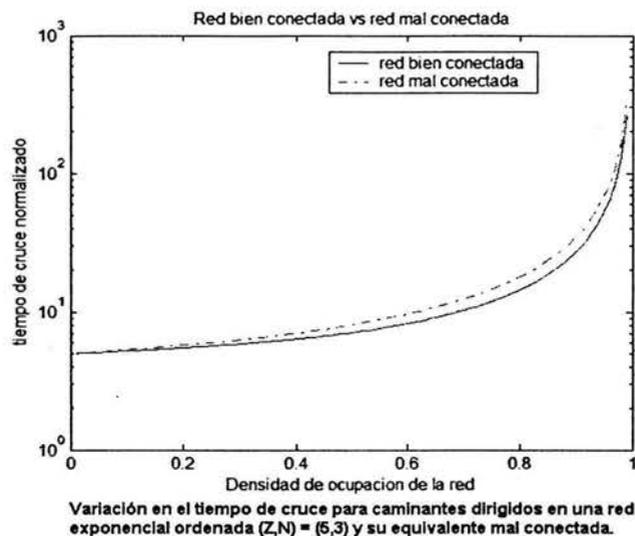


Figura 3.1.3

Los cálculos anteriores corresponden al tiempo de transporte sobre una red estrictamente ordenada. Al igual que en los problemas de percolación, el hecho de que la red esta formada por dos secciones de árboles de Cayley facilita mucho los cálculos, además de que el campo medio es exacto. La parte siguiente corresponde a la misma medición del tiempo de cruce, pero añadiendo desorden entre los nodos. Cuando el desorden es pequeño, aparece el fenómeno de mundo pequeño antes discutido, y cuando se desordenan todos los enlaces estamos ante una red aleatoria clásica. Sobre la parte de Mundo Pequeño, hay una parte en el libro "*Small World*" de Watts (1999), donde al querer comparar redes de mundo pequeño con redes aleatorias toman como aproximación a éstas últimas una red de Moore, que no es otra cosa que una red ordenada perfectamente expandiente (todos los nodos tienen k vecinos que no están interconectados entre sí) y perfectamente regular (nunca mencionan cómo se construyen esas redes). Localmente, las redes de Moore tienen la siguiente forma (véase figura 3.1.4), exactamente igual que un árbol de Cayley.

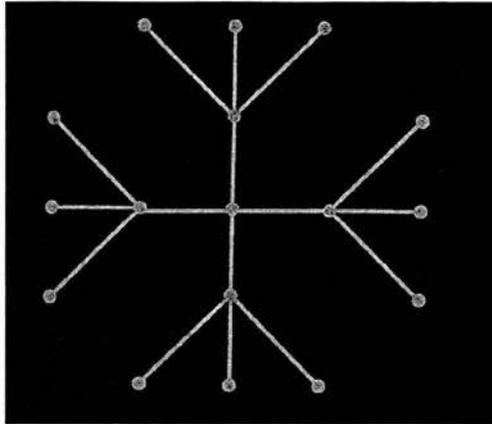


figura 3.1.4

Añadimos el desorden a la red exponencial ordenada de la siguiente manera: asociamos a cada enlace una probabilidad fija, que llamamos SW , de que cambie su posición y vaya a dar a otro lado, de manera equiprobable en todos los nodos de la red. Viendo a la red como capas con crecimiento exponencial en el número de nodos, la probabilidad de que un enlace perturbado vaya a dar a una capa particular de la red es simplemente el cociente entre el número de nodos en la capa y el número total de nodos en la red.

Cuando se añade el desorden en los enlaces, podemos pensar en un salto hacia adelante de n unidades como una disminución del tiempo que se demoraría la partícula en caminar del modo standard a través de las n capas. Análogamente un brinco hacia atrás implicaría un aumento equivalente al tamaño del salto en el tiempo de cruce. Para la partícula en una cierta capa, calculamos la probabilidad de que avance normalmente considerando los enlaces perturbados, y calculamos también la probabilidad de que avance o retroceda debido a algún enlace afectado por SW . La probabilidad de que el caminante salte de una posición en particular a otra capa es el producto de la probabilidad de que el enlace esté perturbado, multiplicado por el número de nodos de la capa nueva, dividido todo entre el número total de nodos en la red. Para cada paso de la partícula se pueden sumar las probabilidades de saltar a las capas de adelante y restarlo a la probabilidad de retroceso, y el resultado es el promedio de avance o retroceso mediante SW . Como el factor de interés aquí es el tiempo que se gana o pierde, cada salto hay que multiplicarlo por la escala que se esté utilizando en el caso clásico, es decir, $\frac{1}{1-\rho^z}$, $\frac{1}{1-\rho^{z-1}}$, ó $\frac{1}{1-\rho}$. Si con la perturbación el enlace vuelve a ir a dar a la capa siguiente, la ganancia es cero pues está avanzando en una unidad de tiempo lo mismo que haría por el modo estrictamente ordenado. Si el enlace va a dar a su misma capa, hay una pérdida de una unidad de tiempo, pues para llegar a la siguiente capa ya desperdició una unidad de tiempo en vano, y va a necesitar otra.

Por lo tanto, el factor temporal estrictamente debido a SW es la suma sobre cada capa de las probabilidades de avanzar a todas las otras capas, y tiene la siguiente forma:

$$t_{SW} = \frac{1}{N_T} \left[\sum_{i=1}^{2N-1} \left(\left(1 + \sum_{j=1}^N Z(Z-1)^{j-1} \right) \cdot f(t) + \left(1 + \sum_{j=N+1}^{2N} Z(Z-1)^{2N-j} \right) \cdot \right.$$

donde el primer componente de t_{SW} corresponde a la primera mitad de la red, hasta llegar a la costura. El segundo término de la suma corresponde a los cálculos para la segunda mitad de la red.

El tiempo debido a la parte clásica, pero con enlaces alterados es:

$$t_N = \frac{1}{1-\rho^2} + (N-1) \left(\frac{1}{1-\rho^{2-1}} + \frac{1}{1-\rho} \right). \quad (3.1.2)$$

El tiempo total es, estrictamente:

$$t_T = t_N \cdot (1 - SW) + t_{SW} \cdot SW. \quad (3.1.5)$$

El factor SW representa la probabilidad de perturbación de los enlaces. No se refiere necesariamente al régimen de mundo pequeño, que correspondería a valores pequeños de SW , pero tiene la ventaja que se puede modular entre redes ordenadas, redes de mundo pequeño, redes desordenadas y redes aleatorias. El factor N_T de la parte de t_{SW} representa el número total de nodos en la red, correspondiente a la fórmula explícita que se dió en el capítulo sobre la red exponencial ordenada. El factor $f(t)$, otra vez de la parte de t_{SW} , corresponde a la escala particular del salto que se usa en el caso clásico.

Una consideración importante para tener en cuenta, es que si se diera el caso de que la perturbación de SW coincidiera exactamente con la distribución anterior de los enlaces, el tiempo de cruce debería ser el mismo que en el caso no perturbado, por lo tanto los pasos hacia adelante sobre un enlace perturbado deben tomar el mismo tiempo que un paso sobre la red perfecta.

Lo que se busca conocer con estas ecuaciones es en cuál de los dos casos

el tiempo de cruce es menor: en la red estrictamente ordenada, o en la red perturbada, ya sea en el regimen de mundo pequeño o como red completamente aleatoria. Al hacer la comparación queda la siguiente ecuación:

$t_T \gtrsim t_N$, de donde resulta

$$t_N \gtrsim t_N \cdot (1 - SW) + t_{SW} \cdot SW. \quad (3.1.6)$$

Por lo tanto, lo que se busca es la relación $t_N \gtrsim t_{SW}$, independiente del factor la probabilidad SW .

La figura 3.1.5 es la red (3,2) que en 3 dimensiones se conoce como "cubo". Si numeramos las capas del 1 al 4 empezando desde la izquierda, la probabilidad de que un enlace perturbado vaya de la capa 1 a la capa 3 es simplemente $(\#de\ nodos\ capa\ 3) \div (\#de\ nodos\ totales) = 3/8$. En ese caso sería un paso que sale de la capa 1, le tomaría un tiempo $\frac{1}{1-\rho^2}$, y se ahorraría el paso de la capa 2 a la 3, por lo que la contribución de ese salto una vez que se sume sobre toda la red será de $\frac{1}{1-\rho^2} - \frac{1}{1-\rho^{2-1}}$



Con la red exponencial ordenada sin perturbación SW , para ir de la capa 1 a la capa 3 se requieren 2 pasos, mientras que cuando $SW > 0$ puede existir un salto que lleve de la capa 1 a la capa 3 en un sólo paso.

Figura 3.1.5

El problema para resolver la ecuación de t_{SW} de forma cerrada sería poder encontrar una expresión sencilla para $f(t)$, cosa que desgraciadamente no sucede, porque al avanzar sobre la red el número de vecinos hacia adelante es diferente, entre la capa 1 y la 2 y a partir de la capa $n + 1$. Es importante obtener soluciones exactas pues este tipo de redes tienen de 8 elementos en delante, y la característica de estas redes es precisamente que no es necesario crecer la red al infinito para garantizar que los nodos sean iguales y que no hay efectos de orilla. Entonces, la única manera de obtener soluciones exactas es para casos

particulares, y eso se logra descomponiendo los 2 elementos de la suma en 2 matrices, que después de obtenerse explícitamente, se multiplican coordenada a coordenada y se suman todas las componentes. Para mayor claridad la figura 3.1.6 muestra la red (3,3), sobre la que calculamos las 2 matrices:

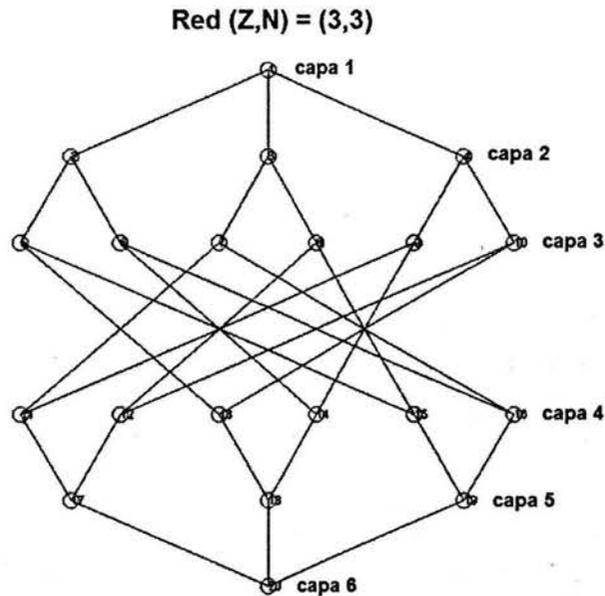


Figura 3.1.6

Las tres componentes de la suma son, respectivamente, distancias, número de nodos y tiempos:

Por simplicidad en la matriz de tiempos uso las siguientes abreviaturas:

$$k_1 = \frac{1}{1-\rho^2}$$

$$k_2 = \frac{1}{1-\rho^{2-1}}$$

$$k_3 = \frac{1}{1-\rho}$$

matriz de # de nodos →

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz representa el término $Z(Z-1)^r$ de la ecuación para t_{SW} . Si se quiere ir de la capa i a la capa h , basta con fijarse en el número de nodos en la capa h , representado en la coordenada (h, i) .

matriz de tiempos

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2k_1 & k_1 & k_1 - k_2 & k_1 - 2k_2 & k_1 - 2k_2 - k_3 & k_1 - 2k_2 - 2k_3 \\ k_1 + 2k_2 & 2k_2 & k_2 & 0 & -k_3 & -2k_3 \\ k_1 + 3k_2 & 3k_2 & 2k_2 & k_2 & k_2 - k_3 & k_2 - 2k_3 \\ k_1 + 2k_2 + 2k_3 & 2k_2 + 2k_3 & k_2 + 2k_3 & 2k_3 & k_3 & 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 & 2k_2 + 3k_3 & k_2 + 3k_3 & 3k_3 & 2k_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz representa el tiempo ganado o perdido en cada paso. Así, como mencionamos anteriormente, si la perturbación por el factor SW corresponde con la distribución original de los enlaces, en cada paso se avanzaría una unidad, y el factor de la matriz de tiempos correspondería a las coordenadas $(i, i+1)$, que son k_1 , k_2 , ó k_3 , manteniendo la equivalencia temporal. A partir de esta matriz ya es posible ver que la perturbación SW no hará más eficiente a la red, pues los elementos a la derecha de la diagonal dada por las coordenadas $(i, i+1)$ representan los factores de ganancia de tiempo, mientras que las coordenadas a la izquierda de la diagonal son los factores de pérdida de tiempo, y en este caso particular los primeros suman 10 elementos, y los segundos suman 15.

La figura 3.1.7 da los resultados de la comparación entre $t_N \gtrless t_{SW}$, para valores de la densidad de ocupación entre 0% y 80%.

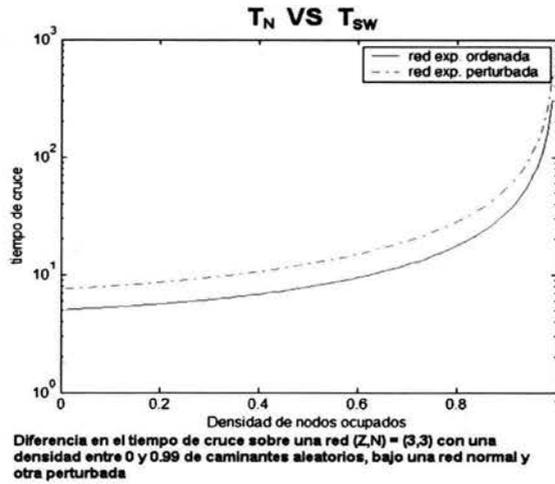


Figura 3.1.7

Se observa claramente que el tiempo de cruce es siempre mayor bajo el efecto de SW para cualquier valor de la densidad de ocupación. La figura 3.1.8 muestra varias curvas con diferentes valores de la probabilidad de perturbación de los enlaces. Por la gráfica anterior sabemos que el tiempo de cruce será mínimo cuando el parámetro de perturbación SW valga cero. En este contexto resulta que las redes en régimen de Mundo Pequeño ($SW \sim 0$) son más eficientes que las redes completamente aleatorias ($SW = 1$).

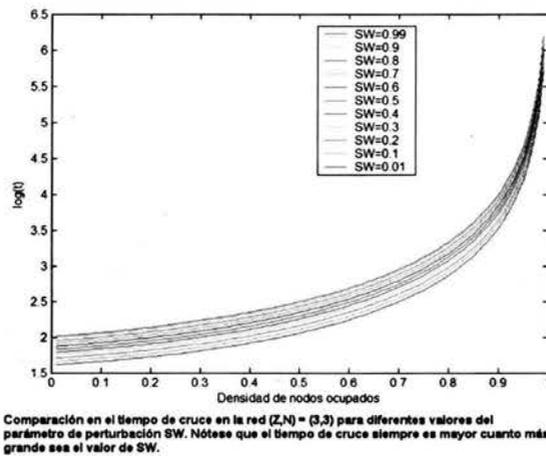


Figura 3.1.8

– 3.2 Modelación de una red de neuronas

Esta segunda aplicación de las redes exponenciales ordenadas tiene la intención de mostrar la utilidad de estas redes en el tratamiento de problemas reales, específicamente abordamos un problema de biomatemáticas. En contraste con el problema anterior, que permitía obtener el resultado analíticamente, en éste no es posible, pero aún así es posible reproducir resultados obtenidos en redes con muchas más restricciones que la red exponencial ordenada.

¿Existe alguna ventaja real al modelar una red de neuronas (bajo el modelo de Hodgkin y Huxley) usando el modelo REO, respecto a otros tipos de redes?

El estudio de los procesos biofísicos que ocurren dentro de una neurona (o red de ellas) tiene ya bastante tiempo, y el modelo más exitoso (Hodgkin & Huxley, 1952) (H&H) ya tiene más de 50 años, pero a pesar de ello, la neurofisiología se ha mantenido como una de las áreas con más cosas por descubrir. Una de las razones para ello es la inherente complejidad en las interacciones de redes de cientos a miles de millones de unidades, que individualmente resultan ser suficientemente complejas (el modelo de Hodgkin y Huxley para una neurona consiste en 4 ecuaciones diferenciales no lineales acopladas).

La motivación para trabajar en este problema surgió a partir del trabajo de Tiesinga & José (2000 A y B), en el que genera una red de neuronas H&H interconectadas entre sí en una red de todas con todas (para las K neuronas, cada una está conectada con todas las otras $K - 1$ neuronas en la red). El resultado importante en este cálculo consistió en que bajo esas condiciones, las neuronas de la red permanecen en el régimen oscilatorio de manera robusta (en un rango amplio en el espacio de parámetros). La pregunta que surgió a partir de ese trabajo fue si esa oscilación puede ser observada en otros tipos de redes, que no involucren neuronas conectadas todas con todas.

Bajo esa premisa, se procedió a modelar la red de neuronas en 3 tipos diferentes de redes: anillo de neuronas, red de Bethe y red exponencial ordenada, para comparar con los resultados obtenidos en la red de todas con todas.

El modelo clásico de Hodgkin y Huxley (Murray, 1993) está basado en estudios experimentales sobre el axón del calamar gigante. En él se establece, a partir de firme evidencia experimental, que las corrientes eléctricas en los nervios son debidas a membranas al interior de éstos, que son alternativamente

permeables a varios iones químicos, por ejemplo los iones de potasio (K^+) y de sodio (Na^+). La permeabilidad de las membranas depende de los diferentes iones y potenciales presentes. La ecuación que se obtiene a partir de las leyes de Kirchoff es:

$$I(t) = C \frac{dV}{dt} + I. \quad (3.2.1)$$

En la ecuación I corresponde a las corrientes iónicas, C a la capacitancia y V al potencial. Basados en sus experimentos, Hodgkin y Huxley concluyeron que el término I se podía expresar como $\sum_i I_i + I_L$, correspondiendo a las corrientes provocadas por los iones de potasio, sodio, calcio, etc., y por las fugas, respectivamente. En términos de los potenciales se tiene que:

$$I = g_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) + g_K n^4 (V - V_K) + g_L (V - V_L). \quad (3.2.2)$$

Las g_i 's corresponden a las conductancias constantes para cada ion, en este caso sodio y potasio, y los V_i 's son los potenciales asociados a cada uno. Las variables m, n y h están determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \quad (3.2.3)$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \quad (3.2.4)$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h \quad (3.2.5)$$

Las funciones $\alpha(V)$ y $\beta(V)$ fueron determinadas empíricamente, y son funciones tipo escalón (de tipo $(1 \pm \tanh(V))/2$).

En función de los varios parámetros, existen varios estados de estabilidad, que incluyen periodicidad. En este último rango, el comportamiento de una neurona individual se ve de la siguiente manera (figura 3.2.1):

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

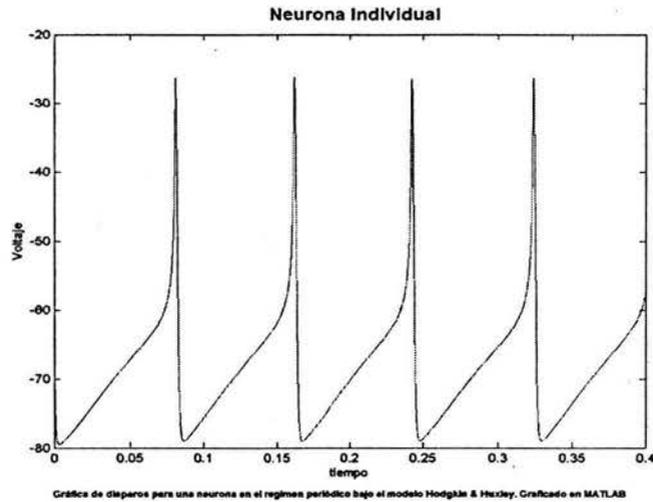


Figura 3.2.1

El modelo de Tiesinga y José es ligeramente diferente al modelo clásico de Hodgkin y Huxley. En él proponen la siguiente ecuación para el potencial en la membrana neuronal en una red de neuronas con canales lineales de calcio, conectados entre todos mediante sinapsis GABA (Tiesinga & José 2000 A):

$$C_m \frac{dV}{dt} = -I_{Ca} - I_L - C_m \xi, \quad (3.2.6)$$

Con C_m la capacitancia de la membrana y ξ ruido Gaussiano con media cero. Los términos para las corrientes son ecuaciones de primer orden en función de variables dinámicas de activación (m), desactivación (h) y sináptica (s):

$$I_L = g_L(V - E_L) \quad (3.2.7)$$

$$I_{Ca} = g_{Ca} m_i(V) h(V - E_{Ca}) \quad (3.2.8)$$

$$I_{syn} = g_{syn} s(V - E_{syn}) \quad (3.2.9)$$

Donde las g_i 's corresponden a las conductancias, y el resto de las ecuaciones son:

$$m_i(V) = \frac{1}{1 + e^{-(V+40)/7.4}} \quad (3.2.10)$$

$$\frac{ds}{dt} = k_f F(V)(1 - s) - \frac{s}{t_s} \quad (3.2.11)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h_i(V) - h}{t_h(V)} \quad (3.2.12)$$

Con k_f constante, t_s el tiempo característico dado por:

$$t_s(V) = \phi \frac{(t_0 + t_1)}{1 + e^{(V+50)/3}}. \quad (3.2.13)$$

Y $F(V)$ y $h_i(V)$ ecuaciones con la siguiente forma:

$$F(V) = \frac{1}{1 + e^{-(V+35)/2}} \quad (3.2.14)$$

$$h_i(V) = \frac{1}{1 + e^{(V+70)/4}} \quad (3.2.15)$$

Para obtener el voltaje en mV y el tiempo en ms , los parámetros deben tener los siguientes valores: $g_L = 0.4$, $g_{Ca} = 1.5$, $g_{syn} = 2$, $E_L = -70$, $E_{Ca} = 90$, $E_s = -85$, $C_m = 1$, $t_0 = 30$, $t_1 = 500$, $t_s = 16$, $k_f = 0.5$ y $\phi = 1.3$. Se resolvió el sistema con el método de Euler, con una resolución de $dt = 0.2 \text{ ms}$.

Los resultados obtenidos por Tiesinga y José muestran que la red se comporta como una sola neurona, la señal de toda la red se sincroniza. La figura 3.2.2 muestra la actividad de tres neuronas diferentes en la red de "todas con todas". Nótese que el período es el mismo para las tres.

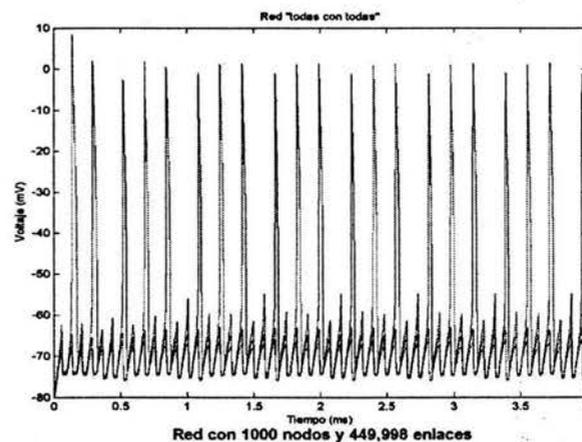


Figura 3.2.2

A partir de ese resultado, la pregunta obligada es si es posible reproducir los mismos resultados en otros tipos de redes. Para checar eso, modelamos el mismo sistema en tres redes diferentes: un anillo, una red de Bethe, y una red exponencial ordenada. Las tres redes tenían aproximadamente el mismo número de nodos y enlaces.

Las gráficas en la figura 3.2.3 a continuación representan la actividad de tres neuronas en diferentes lugares de las redes, traslapadas. Se observa de inmediato que las oscilaciones desaparecen después de un tiempo en el anillo y en la red de Bethe, mientras que se sostienen en la red exponencial ordenada.

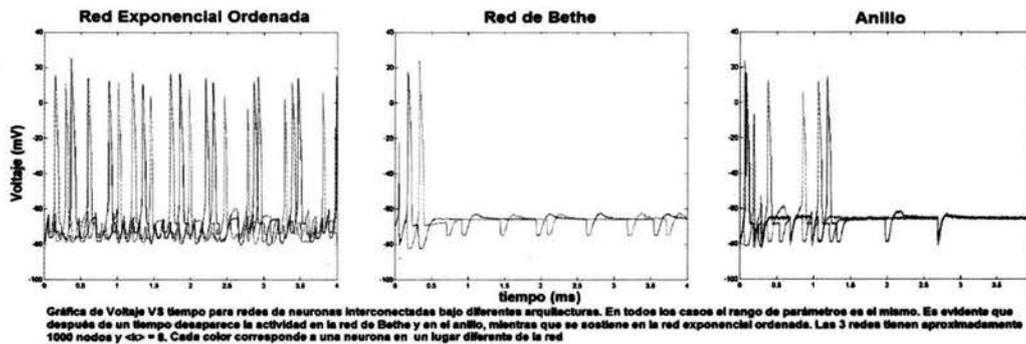


Figura 3.2.3

El hecho de que la actividad desaparezca en el anillo apunta a que la red tiene que estar eficientemente conectada, pues en el anillo el diámetro de la red crece de manera lineal. La red de todas con todas evidentemente no tiene ese problema. En la red de Bethe la actividad también desaparece después de un corto intervalo, lo que haría suponer que lo mismo pasaría en la red exponencial ordenada, que no es otra cosa que una red de Bethe conectada de manera diferente en la costura. Sin embargo, la actividad se mantiene en la red exponencial ordenada, de manera similar a la red de "todas con todas". Ese hecho apunta a que la indistinguibilidad de los nodos es una condición para que aparezca la oscilación. En la red de Bethe no se mantiene la condición del mismo diámetro para cada nodo. El paso siguiente consistiría en checar que ocurre con redes en el régimen de mundo pequeño y tipo libres de escala, y según los argumentos anteriores la oscilación debería desaparecer también.

De cumplirse la predicción anterior, las redes exponenciales ordenadas podrían ser usadas para modelar funciones más complejas en el cerebro. Una posibilidad sería investigar la manera de crear compuertas lógicas que aprovechen

la capacidad de las redes como filtros de frecuencias, y buscar crear un procesador analítico que funcione en el espacio de frecuencias.

A partir de estos dos problemas se observa que las redes exponenciales ordenadas tienen otras dos ventajas, adicionales a las mencionadas anteriormente:

- tienen una sencillez estructural tal que es posible obtener resultados analíticos, a diferencia de otros tipos de redes, en las que son necesarios cálculos mucho más complicados, y en las que se obtienen en todo caso aproximaciones.

- el hecho de tener una red eficiente en cuanto al diámetro, en la cual los nodos son equivalentes, permite obtener resultados que solamente eran posibles con redes con características muy diferentes a las redes reales. En las redes exponenciales ordenadas es posible modelar redes reales con características similares en cuanto a número de nodos y enlaces, además de conocer explícitamente la topología de la red.

Queda mucho trabajo por hacer, y el campo de trabajo con redes exponenciales ordenadas es muy amplio. El hecho de tener una red eficiente y robusta, de la que se conoce explícitamente el esquema de construcción por ser ordenada, permitiría usarla para reemplazar o reforzar redes que sean vulnerables; piénsese por ejemplo en los constantes ataques que sufren las páginas más importantes de Internet. Si cada página se convirtiera en una red de páginas bajo el modelo de una red exponencial ordenada, para que un ataque tuviera éxito tendría que afectar toda la red, en lugar de un sólo nodo. Con la red de energía eléctrica ocurre lo mismo. El tristemente famoso apagón del 2003 en Nueva York y el este de Canadá fue a causa de un fallo menor que ocasionó una reacción en cadena, afectando a millones de personas. Si las zonas vulnerables de la red eléctrica fueran reemplazadas por estructuras en la geometría de las redes exponenciales ordenadas, sería mucho más difícil que ese tipo de fallos ocurrieran.

Por todo lo anterior, las redes exponenciales ordenadas son un tema a la vez fascinante y muy útil y aplicable, pues a la par con la facilidad de su uso en problemas teóricos en matemáticas y física se puede aplicar a una cantidad muy grande de problemas reales. Con todos los cálculos anteriores demostramos que las REO tienen muchas ventajas sobre las redes clásicas con las que usualmente se trataban los problemas anteriores.

Conclusiones

– Diseñamos un algoritmo (modelo de red exponencial ordenada REO) mediante el cual es posible producir redes completamente ordenadas con las propiedades de eficiencia que tradicionalmente se asociaban únicamente a redes aleatorias (sección 2.2), basado en árboles de Cayley. El hecho de tener una red ordenada con las propiedades antes mencionadas es equivalente a tener una receta para diseñar redes eficientes y robustas de casi cualquier tamaño. Con redes de este tipo se podría mejorar secciones frágiles en redes reales, como la red eléctrica o redes de comunicaciones.

– En el modelo que diseñamos, además de cumplir con las características anteriores, todos los nodos de la red son equivalentes, permitiendo calcular de manera exacta diversos parámetros (ecuaciones 2.3.1, 2.3.2 y 2.3.3), y generando una red muy robusta ante fallos y ataques (figura 2.3.3).

– Al medir el umbral de percolación por nodo usando el método de conductividad DC, resultó que la concavidad de la curva estaba invertida respecto a la curva para un sólo árbol de Cayley. La conductividad de la red se fue a cero de manera casi asintótica en función de la fracción de nodos removidos (figura 2.3.4).

– Dado que el modelo es ordenado, perturbamos los enlaces de acuerdo al modelo W-S, y el resultado fue diametralmente opuesto a lo que sucede en redes ordenadas de dimensión espacial finita, pues la distancia característica en la REO no disminuyó prácticamente nada en comparación con la otra red (figura 2.3.5).

– Modelamos la red como una guía de ondas, y el resultado obtenido fue que la red se comporta como un filtro de frecuencias, que puede ser entonado según se modele la cavidad resonante. El resultado sugiere que se pueden utilizar arreglos de REOs para fabricar compuertas lógicas que funcionen en el espacio de frecuencias.

– A falta de un argumento matemático formal que garantice que todas las REOs con $N \leq 4$ cumplen la propiedad de equivalencia en los nodos, diseñamos un algoritmo para reacomodar la red y comprobar que mantenga su estructura original. El resultado indicó que el algoritmo de construcción es correcto (tanto para $N = 3$, como para $N = 4$).

– Encontramos una forma explícita para un caminante dirigido que cruza una REO en la que hay caminantes aleatorios (ecuación 3.1.2), y al comparar el resultado con una simulación computacional, la concordancia fue perfecta (figura 3.1.1).

– Calculamos el tiempo de cruce por el mismo caminante dirigido en una REO y en una red equivalente mal conectada (dos árboles de Cayley conectados en paralelo). El tiempo de cruce fue menor en la REO para cualquier densidad de caminantes aleatorios en la red (figura 3.1.3).

– Hicimos el mismo cálculo para una red exponencial ordenada en la que se perturbaban los enlaces al estilo del modelo W–S. Obtuvimos una expresión explícita para el tiempo de cruce del caminante en la REO perturbada (ecuaciones 3.1.4 y 3.1.5), y al comparar el tiempo de cruce con una REO equivalente no perturbada, el tiempo fue siempre menor en la REO perfecta (figuras 3.1.7 y 3.1.8).

– Se modeló una red de neuronas conectadas como una REO, bajo el modelo de Hodgkin & Huxley (ecuaciones 3.2.1 – 3.2.15). Obtuvimos actividad periódica en todos los nodos de la red, muy similar a los resultados obtenidos por Tiesinga & José (2000 B) en una red completamente conectada, con 1000 nodos y 449,998 enlaces (figura 3.2.2), pero en una REO también con 1000 nodos, pero con únicamente 8,000 enlaces. Intentamos obtener los mismos resultados en un anillo y una red de Bethe equivalente, pero la actividad desaparecía después de algunos pulsos iniciales (figura 3.2.3), lo que sugiere que ese tipo de actividad es exclusiva de redes con diámetro pequeño, con nodos equivalentes.

– Las perspectivas que nos parecen más interesantes en trabajos futuros con REOs son los siguientes: obtener un argumento matemático formal que justifique la existencia de las redes, para no tener que recurrir al algoritmo que reacomoda los nodos de la red. Modelar en la REO epidemias bajo los modelos SIS y SIR para ver si tampoco existe un umbral epidemiológico, como el las redes S–F. Diseñar todos los tipos de compuertas lógicas e intentar construir un circuito que resuelva operaciones aritméticas sencillas. Buscar datos experimentales en redes neuronales reales, que sirvan como punto de comparación con la REO, en particular, se cuenta ya con el mapa completo de la red neuronal del nemátodo *C. Elegans*. Modelar la red de neuronas de la sección 3.2 en redes en el régimen de mundo pequeño y en redes S–F, para ver si sostienen la actividad de las neuronas.

Apéndice 1: Redes Reales

<i>Red</i>	<i>Tamaño</i>	$\langle k \rangle$	l	$l_{aleatoria}$
○ Red de comida en el estuario de Ythan	134	8.7	2.43	2.26
○ Red de comida en el parque Silwood	154	4.75	3.40	3.23
★ Red de neuronas en C. Elegans	282	14	2.65	2.25
□ Red de substratos en E. Coli	282	7.35	2.9	3.04
□ Red de reacciones en E. Coli	315	28.3	2.62	1.98
□ Red metabólica en E. Coli	778	7.4	3.2	3.32
• Red de ruteadores en Internet	3,888	2.57	12.15	8.75
• Red de dominios en Internet	3,015 – 4,389	3.42 – 3.76	4	6.3
● Red de ruteadores de Internet	150,000	2.66	11	12.8
X Red de energía eléctrica en E.U.	4,941	2.67	18.7	12.4
△ Red de coautores de NCSTRL	11,994	3.59	9.7	7.34
△ Red de coautores de LANL	52,909	9.7	5.9	4.79
■ Sinónimos	22,311	13.48	4.5	3.84
■ Repetición de palabras	460,902	70.13	2.67	3.03
< Red de coautores de MEDLINE	1/520,251	18.1	4.6	4.91
< Red de coautores de SPIRES	56,627	173	4.0	2.12
♦ WWW	153,127	35.21	3.1	3.35
♦ WWW	325,729	4.51	11.2	8.32
♦ WWW	$2 \cdot 10^8$	7.5	16	8.85
▽ Red de actores de películas	225,226	61	3.65	2.99

La primera columna de la tabla anterior corresponde a los símbolos usados en una gráfica de la sección de redes libres de escala, la segunda columna tiene los nombres de las redes, la tercera tiene el número de nodos en cada red, la cuarta corresponde al número promedio de enlaces por nodo, la quinta columna corresponde a la distancia característica de la red: el promedio de las distancias entre todas las parejas de nodos en la red. La última columna representa lo que sería la distancia característica en una red aleatoria con el mismo número de nodos y de enlaces promedio, dado que (capítulo de redes aleatorias) $l = \frac{N_{total}}{\langle k \rangle}$ para redes aleatorias.

Apéndice 2: Programas en MATLAB

– Programa para generar una red con $N = 3$ en 2 dimensiones

```
clear all
clf
%-----data-----
Z=5;
N=2*(1+Z+Z*(Z-1));
%-----define the trees-----
M=sparse(N,N);
M(1,2:Z+1)=1;
dz=Z-1;
for i=2:Z+1
    M(i,dz*(i-2)+(Z+2):dz*(i-2)+(Z+2)+(Z-2))=1;
end
M(N:-1:N/2+1,N:-1:N/2+1)=M(1:N/2,1:N/2);
Q=M+M';
%-----connections of trees-----
n=1;
A=[1:1:Z-1];
for i=1:(Z-1):Z*(Z-1)
    W(1,i+Z-2)=n;
    n=n+1;
    W(2,i+Z-2)=A;
end
W(3,1:Z*(Z-1))=[1:1:Z*(Z-1)];
B=[W W(:,1:length(W)-Z+1)];
for i=1:Z-1
    P(:,1:Z*(Z-1),i)=B(:,1+i*(Z-1):i*(Z-1)+Z*(Z-1));
end
A1=W(2,:);
for i=1:Z-1
    for j=1:Z-2
        P(2,1+i*(Z-1):i*(Z-1)+(Z-1),j)=A1(Z-j:Z-j+(Z-1)-1);
    end
    P(2,1+i*(Z-1):i*(Z-1)+(Z-1),Z-1)=A1(abs(Z+1-i):abs(Z+1-i)+(Z-1)-1);
end
for j=1:Z-1
    for i=1:(Z-1):Z*(Z-1)
```

```

        if P(1,i,j)==1
            P(2,i:i+(Z-2),j)=P(3,i:i+(Z-2),j);
        end
    end
end
for j=1:Z-1
    for i=1:length(P)
        a=find(P(1,:,j)==W(1,i)&P(2,:,j)==W(2,i));
        P(3,a,j)=W(3,i)
    end
end
S1=sparse(Z*(Z-1),Z*(Z-1));
for i=1:Z*(Z-1)
    S1(W(3,i),P(3,i,1:Z-1))=1;
end
Q(2+Z:N/2,N/2+1:N/2+Z*(Z-1))=S1(1:Z*(Z-1),1:Z*(Z-1));
Q=Q+Q';
%—————two dimensional coordinates for plot of trees—————
p=[0 ones(1,Z) (W(1,:)+1)];
[x,y,h]=treelayout(p);
V=zeros(2,N);
V(:,1:N/2)=[x;y];
V(:,N/2+1:N-Z-1)=[x(Z+2:N/2);-y(Z+2:N/2)];
V(:,N-Z:N)=[x(2:Z+2);-y(2:Z+2)];
V(:,N)=[x(1);-y(1)];
V=V';
[l,J,dd]=find(Q);
%—————graphics bit—————
figure(1)
hold on
plot(V(:,1),V(:,2),'or','markersize',10)
for j=1:N
    text(V(j,1),V(j,2),int2str(j),'FontSize',8);
end
S=0*Q;
for i=1:length(dd)
    S(l(i),J(i))=1;
    line([V(l(i),1),V(J(i),1)],[V(l(i),2),V(J(i),2)]);
end
axis square
hold off

```

– Programa para generar una red con $N = 4$ en 3 dimensiones

```
clear all
clf
%-----data-----
Z=5;
N=2*(1+Z+Z*(Z-1)+Z*(Z-1)^2);
%-----define the trees-----
M=sparse(N,N);
M(1,2:Z+1)=1;           %capa 1
dz=Z-1;
for i=2:Z+1             %capa 2
    M(i,dz*(i-2)+(Z+2):dz*(i-2)+(Z+2)+(Z-2))=1;
end
for i=Z+2:Z+1+Z*(Z-1)  %capa 3
    M(i,i-Z*(Z-1)+(i-Z-2)*(Z-2):i+Z*(Z-1)+(i-Z-2)*(Z-2)+(Z-2))=1;
end
M(N:-1:N/2+1,N:-1:N/2+1)=M(1:N/2,1:N/2);
Q=M+M';
M;
%-----connections of trees-----
n=1;
A=[1:1:Z-1];
B=[1:1:Z-1 1:1:Z-1];
for i=1:(Z-1)*(Z-1):Z*(Z-1)^2    %creacion de los trivectores para permutacion
    W(1,i+(Z-1)*(Z-1)-1)=n;
    for j=1:Z-1
        W(2,i+(Z-1)*(j-1):i+(Z-1)*(j-1)+Z-2)=j;
    end
    n=n-1;
    for j=1:Z-1
        W(3,i+(j-1)*(Z-1):i+(j-1)*(Z-1)+Z-2)=A;
    end
end
for i=1:Z
    P(:,i)=W;
end
for i=1:Z-1                %primer renglon
    for j=1:Z*(Z-1)^2
        P(1,j,i+1)=i+1;
    end
end
end
```

```

for i=1:Z-1          %segundo renglon
    for j=1:Z-1
        for k=1:Z-1
            P(2,(i-1)*(Z-1)^2+(j-1)*(Z-1)+k,2:Z)=B(k+(j-1));
        end
    end
end
for i=1:Z-1          %tercer renglon
    for j=1:Z-1
        for k=1:Z-1
            P(3,(i-1)*(Z-1)^2+(j-1)*(Z-1)+k,2:Z)=B(k+(i-1));
        end
    end
end
end
for alf=2:Z          %algoritmo para cambiar de trivectores
    for kap=1:(Z-1)^2 %a la matriz de conectividades M
        for gam=alf:Z
            a1=P(1,kap+(alf-2)*(Z-1)^2,1);
            b1=P(2,kap+(alf-2)*(Z-1)^2,1);
            c1=P(3,kap+(alf-2)*(Z-1)^2,1);
            an=P(1,kap+(alf-2)*(Z-1)^2,gam);
            bn=P(2,kap+(alf-2)*(Z-1)^2,gam);
            cn=P(3,kap+(alf-2)*(Z-1)^2,gam);
            x1=1+Z+Z*(Z-1)+c1+(Z-1)*(b1-1)+(a1-1)*(Z-1)^2;
            x2=1+Z+Z*(Z-1)+Z*(Z-1)^2+cn+(Z-1)*(bn-1)+(an-1)*(Z-1)^2;
            M(x1,x2)=1;
            M(x1+Z*(Z-1)^2,x2-Z*(Z-1)^2)=1;
        end
    end
end
end
for i=1:N %asegurar que los enlaces siempre esten de mayor a menor
    for j=1:N
        if M(i,j)==1
            M(j,i)=1;
        end
    end
end
end
Q=M;
%-----data-----
dtet=pi/7;
tet=0:dtet:pi;
dfi=2*pi/(Z*(Z-1)^2);
fi=0:dfi:2*pi+dfi;
%-----coordinates of nodes-----

```

```

xx(1)=0;
yy(1)=0;
zz(1)=1;
xx(N)=0;
yy(N)=0;
zz(N)=-1;
xx(2:Z+1)=sin(tet(2))*cos(fi(1:(Z-1)^2:Z*(Z-1)^2));
xx(Z+2:Z+1+Z*(Z-1))=sin(tet(3))*cos(fi(1:(Z-1):Z*(Z-1)^2)-(Z-2)^2*dfi/2);
xx(Z+2+Z*(Z-1):N/2)=sin(tet(4))*cos(fi(1:Z*(Z-1)^2)-((Z-2)^2+(Z-2))*dfi/2);
xx(N/2+1:N/2+Z*(Z-1)^2)=sin(tet(5))*cos(fi(1:Z*(Z-1)^2)-((Z-2)^2+(Z-2))*dfi/2);
xx(N/2+Z*(Z-1)^2+1:N-Z-1)=sin(tet(6))*cos(fi(1:(Z-1):Z*(Z-1)^2)-(Z-2)^2*dfi/2);
xx(N-Z:N-1)=sin(tet(7))*cos(fi(1:(Z-1)^2:Z*(Z-1)^2));
yy(2:Z+1)=sin(tet(2))*sin(fi(1:(Z-1)^2:Z*(Z-1)^2));
yy(Z+2:Z+1+Z*(Z-1))=sin(tet(3))*sin(fi(1:(Z-1):Z*(Z-1)^2)-(Z-2)^2*dfi/2);
yy(Z+2+Z*(Z-1):N/2)=sin(tet(4))*sin(fi(1:Z*(Z-1)^2)-((Z-2)^2+Z-2)*dfi/2);
yy(N/2+1:N/2+Z*(Z-1)^2)=sin(tet(5))*sin(fi(1:Z*(Z-1)^2)-((Z-2)^2+Z-2)*dfi/2);
yy(N/2+Z*(Z-1)^2+1:N-Z-1)=sin(tet(6))*sin(fi(1:(Z-1):Z*(Z-1)^2)-(Z-2)^2*dfi/2);
yy(N-Z:N-1)=sin(tet(7))*sin(fi(1:(Z-1)^2:Z*(Z-1)^2));
zz(2:Z+1)=cos(tet(2));
zz(Z+2:Z+2+Z*(Z-1)-1)=cos(tet(3));
zz(Z+2+Z*(Z-1):N/2)=cos(tet(4));
zz(N/2+1:N/2+Z*(Z-1)^2)=cos(tet(5));
zz(N/2+Z*(Z-1)^2+1:N-Z-1)=cos(tet(6));
zz(N-Z:N-1)=cos(tet(7));
V=[xx',yy',zz'];
P1=[1:N];
%————permutations if needed————
Q1=0*Q;
Q1(:,:)=Q(P1,P1);
Q=Q1;
%————graphics bit————
figure(1)
clf
hold on
plot3(xx,yy,zz,'or','markersize',4)
for j=1:N
    text(V(P1(j),1),V(P1(j),2),V(P1(j),3),int2str(j),'FontSize',10);
end
[I,J,dd]=find(Q);
S=0*Q;
for i=1:length(dd)
    S(I(i),J(i))=1;
    line([V(I(i),1),V(J(i),1)],[V(I(i),2),V(J(i),2)],[V(I(i),3),V(J(i),3)])
end

```

```
for i=1:2*Z+2*Z*(Z-1)+Z*(Z-1)^2
    S(l(i),J(i))=1;
end
for i=length(dd)-(2*Z+2*Z*(Z-1)+Z*(Z-1)^2):length(dd)
    S(l(i),J(i))=1;
end
title(['permutation ' num2str(P1)],'fontsize',8);
view(15,6), axis square
hold off
```

Bibliografía

- Albert, R., H. Jeong & A.-L. Barabási, *Nature* **401**, 130 (1999).
- Albert, R. & A.L. Barabási, *Rev. of Mod. Phys.* **74**, 47 (2002).
- Albert, R., H. Jeong & A.-L. Barabási, *Nature* **406**, 378 (2000 A); Erratum, *Nature* **409**, 542 (2001).
- Albert, R. and A.-L. Barabási, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5234 (2000 B).
- Albert, R., & A.-L. Barabási, *Rev. of Mod. Phys.* (2001).
- Barabási, A.-L. & R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999 A).
- Barabási, A.-L., R. Albert & H. Jeong, *Physica A* **272**, 173 (1999 B).
- Barabási, A.-L., E. Ravasz & T. Vicsek, *Physica A* **299**, 599 (2001).
- Barrio, R.A., C. Varea, K. Kaski, & R. J. Elliot, *Proc. of the 21st IUPAP Conf. on Stat. Phys.* (2001).
- Barthélémy, M. & L. A. N. Amaral, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999).
- Beom Jun, K., *Scale-Free Networks*, Universidad Umea, Suecia (2001).
- Bhatt, R.N., P.A. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **34** (1982).
- Bollobás, B., *Random Graphs*, Academic Press, London (1985).
- Chung, F. R. K., *Pr. Sym. App. Math.*, **34** (1986).
- Erdős, P. & A. Rényi, *Publ. Math. Debrecen* **6**, 290 (1959).
- Erdős, P. & A. Rényi, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci* **5**, 17 (1960).
- Flory, P.J., *J. Am. Chem. Soc.*, **63** (1941).
- Frisch, H.L. & J.M. Hammersley, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **11** (1963).
- Hammersley, J.M., *J. Math. Phys.* **2** (1961).
- Hara, T. & G. Slade, *Comm. Math. Phys.* **128**, 333 (1990).
- Hodgkin, A.L. & A.F. Huxley, *J. Physiol.* **117** (1952).
- John, F., *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag (1971).
- Kauffman, S.A., *J. Theor. Biol.*, **22** (1969).
- Kirkpatrick, T.R. & D. Belitz, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996).
- Lahtinen, J., J. Kertés, & K. Kaski, *Phys. Rev. E*, **64** (2001).
- Mekler, G.M. & G. Cocho, *Al borde del milenio: Caos, Crisis, Complejidad*, en *Ciencias de la Materia: Génesis y evolución de sus conceptos fundamentales* (1998).
- Murray, J. D., *Mathematical Biology*, Springer-Verlag (1993).
- Pastor-Satorras, R. & A. Vespignani, *Phys. Rev. Lett.* **86**, (2001).
- Poppler, E., *Los límites de la conciencia*, Galaxia Gutenberg (1990).
- del Río, J.A., Resultados no publicados (2002).
- Rozada, I. & R. Barrio *Proc. of the 40th Cong. of the Mex. Soc. of Phys.* (2003).
- Rozada, I. & R. Barrio *Proc. of the Colloq. in Honor of Sir Roger Elliott* (2003).
- Stauffer, D. & A. Aharony, *Percolation Theory*, Taylor & Francis, London (1994).
- Tiesinga P. H. & J. V. José, *Network: Comput. Neural Syst.* **11** (2000 A).

Tiesinga P. H. & J. V. José, *J. Comp. Neuroscience*. **9**, 1 (2000 B)
Watts, D. J. & S. H. Strogatz, *Nature* **393**, 440 (1998).
Watts, D. J., *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1999).
Wiesenfeld, K., *Physica B* **222** (1996).
Zhang, L., R. A. Barrio & P. K. Maini, *Bull. Math. Biol.* **59/3** (1997).
Ziman, J.M., *Models of Disorder*, Cambridge University Press (1979).