

03060

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE GEOLOGÍA

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA



Modelación matemática de la evolución geométrica de fallas y fracturas*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

P R E S E N T A

ALEJANDRA AGUILAR HERNÁNDEZ

TUTOR: DR. GUSTAVO TOLSON JONES

2004



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Le agradezco a Klavdia Oleschko
todo su apoyo moral, económico y técnico.*

*También agradezco a Ángel Nieto el haberme
prestado sus imágenes, cuyo análisis fue
fundamental para validar mis resultados.*

*Y a mis hermanos y padres les agradezco
su cariño, comprensión y el apoyo
económico que me han brindado a lo
largo de mis estudios.*

CONTENIDO

RESUMEN	3
INTRODUCCIÓN	4
ANTECEDENTES	7
MARCO TEÓRICO	14
COMPONENTES DE ESFUERZO	15
COMPONENTES DE LA DEFORMACIÓN	18
DIAGRAMA DE MOHR	22
COHESIÓN INTERNA Y FRICCIÓN	23
ENVOLVENTE DE MOHR	25
PRESIÓN DE FLUIDO	28
TIPOS DE FRACTURAS	30
MECANISMOS DE FRACTURACIÓN	31
GRIETAS DE GRIFFITH	31
EXTENSIÓN DE GRIETAS	36
ZONAS DE PROCESO	37
EVOLUCIÓN POR SUCESIÓN	38
DESARROLLO DE FRACTURAS	41
ORIGEN DE LAS FRACTURAS	41
CRECIMIENTO DE FRACTURAS	43
DENSIDAD DE FRACTURAS	46
ENFOQUE FRACTAL	47
MUESTREO	48
PARÁMETROS FRACTALES	49
DISTRIBUCIONES FRACTALES	51
COMPORTAMIENTO DE FRACTURAS	55
EVOLUCIÓN DE FALLAS	58
AUTÓMATAS CELULARES	62
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	64
METODOLOGÍA	68
MODELO DE CRECIMIENTO	69
DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA	73
DESCRIPCIÓN DE LAS GRÁFICAS	79
DIMENSIÓN Y LAGUNARIDAD	81
RESULTADOS	84
INTERPRETACIÓN DE LAS GRÁFICAS	86
LAGUNARIDAD	93
DISCUSIÓN	103

CONCLUSIONES	108
BIBLIOGRAFÍA	109
APÉNDICES	115
A. PLANOS DE MÁXIMO ESFUERZO DE CIZALLA	115
B. LOGARITMOS Y LEYES DE POTENCIA	116
C. SUPERFICIES HOMEOMORFAS	121
D. ACERCA DE LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL	125

RESUMEN

En el presente trabajo se propone un modelo para la evolución geométrica de fallas con diferente orientación que en cada etapa de desarrollo presentan un incremento longitudinal. El incremento en cada falla está relacionado con su longitud antes de la etapa de crecimiento por medio de una ley de potencia; resultando incrementos grandes para fallas largas e incrementos chicos para falla cortas. En este trabajo y con el fundamento en algunos aspectos dinámicos de la fracturación, se ha condicionado el crecimiento de las fallas a su orientación respecto al campo regional de esfuerzos. La hipótesis aquí planteada, que se resuelve con la implementación del modelo, es que del crecimiento de fallas condicionado a su orientación resulta una distribución fractal de sus longitudes. El modelo se aplicó a poblaciones sintéticas de fallas con distribución espacial aleatoria y de misma longitud, con el fin de neutralizar el efecto del crecimiento de ley de potencia. La evolución de estos conjuntos homogéneos de fallas culminaron en una distribución fractal de sus longitudes.

Aunque el modelo considera poblaciones completas de fallas, el crecimiento de éstas se lleva a cabo sin considerar la interacción entre ellas. Esto es debido a que, por la compleja naturaleza de los factores que definen el mecanismo de fracturación, se ha decidido analizar cada uno de éstos en forma individual para determinar su influencia en la distribución de las longitudes alcanzadas. Por tal razón este modelo se enfoca sólo a las orientaciones de las fracturas respecto al campo de esfuerzos.

El modelo diseñado considera poblaciones de fallas con orientaciones aleatorias y pretende ser una generalización del modelo propuesto por Cladouhos y Marrett (1996), en el cual sólo se consideran poblaciones de fallas paralelas. Los resultados obtenidos con el modelo propuesto se consideran satisfactorios porque los patrones geométricos obtenidos a partir de éste coinciden con los observados en la naturaleza, además pueden ser visualizados con su versión computacional.

INTRODUCCIÓN

Una clasificación muy general de la deformación con base en las estructuras formadas es dúctil, dúctil-frágil y frágil; sin embargo, ninguno de estos tipos de deformación se presenta de manera absoluta porque las rocas deformadas suelen presentar los tres, desarrollados en diferentes escalas. La parte dúctil de la deformación presente en una roca se puede pensar, a groso modo, como aquella en la que las rocas pueden cambiar su forma sin romperse. La frágil es aquella en la que las rocas se rompen, y la dúctil-frágil es en la que las rocas alcanzan una deformación dúctil por medio de una frágil que ocurre en escalas menores (Hobbs, Means, Williams 1976).

Una de las estructuras básicas que se forman bajo la deformación frágil es la fractura . Una fractura es una superficie de discontinuidad de geometría plana a lo largo de la cual la roca ha perdido cohesión (Davis & Reynolds, 1996). Las diaclasas y fallas son ejemplos de fracturas.

Las fracturas juegan un papel fundamental en el proceso de flujo y almacenamiento de muchos tipos de fluidos a través de la corteza. En la industria del petróleo y gas es importante conocer la geometría de las fracturas porque ellas pueden constituir yacimientos productores de hidrocarburos. En el campo de la construcción el análisis de las fracturas también es importante porque a partir de su apreciación dentro de un área en particular, se puede determinar si en ella es posible llevar a cabo cierta construcción.

De los modelos, numéricos o estadísticos, del proceso de fracturación se han determinado parámetros que especifican, bajo ciertas restricciones, la ocurrencia de las fracturas (Cowie, et al. 1993) y la orientación del crecimiento de las mismas (Wei & Bremaecker, 1995). También se han obtenido otros que controlan la densidad de fracturas (Renshaw, 1997) y su conectividad (Bour & Davy, 1998). La importancia de la modelación de sistemas naturales radica en que combina un razonamiento formal con la intuición, lo cual contribuye a un mejor entendimiento de dicho sistema y asegura un beneficio para el hombre (Beltrami, 1998); por ejemplo Gabrielli (2002) ha modelado la evolución de las fracturas en cristales para diseñar nuevos materiales que sean más resistentes a la fracturación.

La credibilidad y utilidad de un modelo consiste en que represente con eficacia el proceso modelado, aún cuando el modelo corresponda sólo a una parte de ese proceso (Beltrami,

1998). Por ejemplo, se han identificado tres etapas en el crecimiento de las fracturas que son: iniciación, crecimiento e interacción-saturación (Tong, 2001); por lo que el modelo de la evolución de fracturas debe comprender estas tres etapas. También es importante que las simplificaciones hechas en el modelo sean válidas en un contexto geométrico, mecánico o matemático (Beltrami, 1998).

En el presente trabajo se consideran a las fallas como un tipo particular de fracturas y pretende elaborar un modelo geométrico que muestre el progreso longitudinal de éstas condicionándolo por sus orientaciones respecto al campo de esfuerzos. Como este modelo surge de la naturaleza geométrica de las fallas, una de las simplificaciones aquí hechas consiste en considerar a las fallas como líneas rectas. Esto no afecta el valor de sus longitudes porque a pesar de que las fallas no son líneas rectas, las longitudes sí se toman sobre líneas rectas entre sus extremos (Cowie & Scholz, 1992; Gillespie, et al., 1993; Scholz, et al., 1993; Wei & Bremaecker, 1994; Ouillon, et al., 1996; Bai & Pollard, 2000;). El objetivo principal del trabajo es determinar si una población de fallas uniforme resulta en una distribución fractal de longitudes a partir del crecimiento provisto por el modelo. Por esta razón, otra de las simplificaciones hechas en el modelo es la de partir de un sistema de fallas de igual longitud y distribución espacial aleatoria. Esta suposición corresponde a la idea de que las fallas se originan de grietas de Griffith y se propagan de acuerdo al modo II (Cladouhos & Marrett, 1996). La aleatoriedad espacial de dichas grietas se fundamenta en el hecho de que las grietas de Griffith son defectos en el material que propician zonas de debilidad y ocasionan su rotura y los cuales se forman de manera aleatoria (Ranalli, 1995). Para determinar si el comportamiento de las longitudes de las fallas es el esperado, se ha decidido enfocar el modelo al análisis fractal de ellas.

Para llevar a acabo los objetivos propuestos, se pretende desarrollar la versión computacional del modelo que genere poblaciones sintéticas de fallas de acuerdo a las especificaciones hechas, que simplifique el análisis fractal de dichas poblaciones, que exponga todo de manera gráfica y que use como herramienta básica los autómatas celulares.

Con la finalidad de dar una visión más amplia del problema aquí abordado, se incorpora en el primer capítulo una síntesis de un trabajo previo que es el punto de partida para el modelo propuesto, y se incluyen también las síntesis de algunos otros modelos sobre el

crecimiento de fracturas. El capítulo dos abarca la parte teórica que fundamenta el modelo propuesto en el trabajo. En el capítulo tres se especifican la hipótesis principal y se describe el modelo de la evolución longitudinal de fallas, en el cuatro se detalla su desarrollo e incluye una descripción de las herramientas computacionales que se emplearon para ello. En los capítulos cinco, seis y siete se describen los resultados obtenidos a partir del modelo, se abordan los *pro* y *contra* del mismo así como se señalan las conclusiones alcanzadas.

* Uso de acuerdo a la definición del Diccionario del Español Actual (Manuel Seco et al., 1999). “No hay fuente indigna para quien quiere saber cómo es realmente una lengua ...” (José Antonio Millán).

ANTECEDENTES

En este capítulo se presentan los resúmenes de algunos modelos del crecimiento de fallas elaborados previamente; el primero de ellos corresponde a la evolución geométrica de fallas y del cual se deriva el modelo objeto del presente trabajo, los demás corresponden a simulaciones numéricas o físicas de un aspecto mecánico del mismo fenómeno. Cada síntesis comprende tanto los aspectos importantes de los modelos como sus problemas y beneficios.

Modelo de crecimiento de fallas que propicia una distribución de ley de potencia de sus longitudes.

El modelo propuesto por Cladouhos y Marrett (1996) comprende la evolución longitudinal de fallas con una única orientación e involucra la interacción entre ellas con el fin de identificar el tipo de distribución de sus longitudes. Estos autores partieron de la idea de que las distribuciones de longitudes de fallas obedecen una ley de potencia, para proponer dos modelos de crecimiento de fallas. El primero considera el crecimiento de fallas individuales que se propagan por sus extremos durante eventos de deslizamiento, con un incremento $\Delta L = \lambda L_i^F$, donde L_i es la longitud de la falla antes del evento de deslizamiento y λ y F son constantes. El evento de deslizamiento tiene un intervalo de repetición $\tau = \tau_k L^E$, donde L es la longitud de la falla y τ_k y E son constantes. El crecimiento de las fallas a través de este mecanismo fue explorado en poblaciones de fallas sintéticas que inicialmente tenían una distribución de longitudes que obedecía a una ley de potencia, y se obtuvo que cuando $F - E = 1$ se mantenía ese comportamiento.

En el segundo modelo propuesto por Cladouhos y Marrett (1996) las fallas incrementan su longitud con la misma regla de crecimiento del primero, pero en éste se incorpora la coalescencia de fallas que toma en cuenta tanto su distribución como sus longitudes. El modelo parte del concepto mecánico de las grietas de Griffith, las cuales son microfracturas que constituyen zonas de debilidad en la roca. Cuando estas grietas de Griffith coalescen llegan a formar fracturas macroscópicas (Ranalli, 1995). Para este modelo se construyeron poblaciones unidimensionales de grietas de Griffith de igual longitud, a partir de las cuales

se generaron poblaciones de fallas con distribución de longitudes que satisface una ley de potencia.

En cada evento de deslizamiento la longitud de la falla aumenta de acuerdo con uno de dos mecanismos: si en una región circular de radio $r_{\max} = kL^F$ alrededor de los extremos de una falla (con el parámetro k ajustable que controla el radio del círculo) se encuentra el extremo de otra, las dos fallas se unen formando una nueva cuya longitud es la suma de las dos que se unieron. Si ninguna otra falla se localiza dentro de la región circular en los extremos de una falla, ésta crece de acuerdo a la regla del modelo anterior. El incremento es repartido en ambos extremos de la falla, de este modo la falla tiene un incremento $\Delta L = \frac{\lambda}{2} L^F$ en cada uno de sus extremos. Con este mecanismo de crecimiento las fallas que se unen forman otras más grandes y con la repetida coalescencia de fallas, las grandes crecen más rápido y entonces las longitudes se distribuyen de tal forma que satisfacen una ley de potencia Cladouhos y Marrett (1996).

El propósito de este modelo fue investigar el efecto de la coalescencia en la distribución de las longitudes de una población de fallas y no la modelación del mecanismo de coalescencia. Con ese fin Cladouhos y Marrett (1996) aislaron los efectos de la distribución de ley de potencia en la coalescencia de fallas considerando un crecimiento lineal ($F = 1$) y un intervalo constante de repetición ($E = 0$) que es igual a una etapa del modelo. Aunque estos valores no son apropiados para estados avanzado de deformación, sí pueden ser apropiados para estados tempranos en los cuales la distribución de ley de potencia está desarrollándose.

En el modelo de Cladouhos y Marrett (1996) se generaron poblaciones artificiales unidimensionales de 500 grietas de Griffith en un área cuadrada. Para disminuir los efectos de frontera usaron una función periódica que permite que cada falla que crezca y alcance un lado del cuadrado, reaparezca por el lado opuesto. Las etapas de crecimiento cesan cuando la falla más grande alcanza la longitud del lado del área cuadrada. El modelo calcula las frecuencias de las longitudes de las fallas y las grafica en un plano doble logarítmico, después ajusta una línea recta a los valores graficados y la pendiente de esa línea es el exponente de la ley de potencia.

Con los resultados obtenidos del análisis de 25 poblaciones con más de 30 fallas sintéticas generadas con 40 etapas de crecimiento, Cladouhos y Marrett (1996) mostraron que estas poblaciones se ajustaban a una distribución de longitudes que sigue una ley de potencia con un coeficiente de correlación mayor o igual a 0.95 para el 85 % de los resultados. Estos autores concluyeron que el comportamiento de las gráficas obtenidas era muy semejante al de las gráficas de datos reales, porque en todas se formaron apéndices en ambos extremos de las rectas ajustadas, lo que puede estar ocasionado por limitaciones del muestreo.

Cladouhos y Marrett (1996) determinaron que el exponente de la ley de potencia decrecía sistemáticamente conforme el número de etapas de crecimiento aumentaba, aunque no hubo evidencia de que ese exponente se aproximara a una constante. Pero si el exponente de la ley de potencia alcanzara un equilibrio respecto a la deformación por fallas en poblaciones naturales, podría dar indicios de que la coalescencia es un proceso importante del crecimiento de fallas. La disminución en el valor del exponente puede ser ocasionada al hecho de que no se generan nuevas grietas de Griffith que incremente el número de fallas pequeñas sin afectar la longitud de las fallas grandes, porque el nacimiento de fallas pequeñas preserva el valor del exponente de la ley de potencia y esto también debe ser considerado en el modelo.

Crecimiento de fracturas.

Wei y Bremaecker (1995) proponen un modelo de propagación de fracturas basado en la extensión de grietas. Este modelo sostiene que la orientación θ del crecimiento de la fractura es determinada por la maximización de la energía de deformación G liberada en esa dirección. El modelo es un esquema numérico que calcula G para un cuerpo fracturado, donde las fronteras de la fractura están en contacto y toma lugar la fricción por deslizamiento. Cuando las fronteras de la fractura están muy cercanas debido a un esfuerzo compresivo, ni el desplazamiento ni la tracción pueden ser especificados.

La trayectoria de fracturas desarrolladas con este modelo es aproximada por un número de segmentos lineales de longitudes cortas cuyas orientaciones están especificadas por el criterio de G_{max} . En este modelo se asume que cada uno de estos segmentos nace en uno de los extremos de la fractura.

El criterio de G_{max} establece que la orientación de cada incremento en una fractura es determinada por la máxima reducción de la energía de deformación liberada en el cuerpo. Es decir, la fractura se propaga hacia donde la energía de deformación es mayor.

El incremento de la energía liberada se obtiene por

$$\Delta S(\theta) = S^- - S(\theta),$$

donde S^- es la energía de deformación del cuerpo antes de la extensión de la fractura (bajo ciertas condiciones de frontera para el desplazamiento) y $S(\theta)$ es la energía de deformación que permanece después de la extensión de la fractura (bajo las mismas condiciones). En estos términos, la maximización de $\Delta S(\theta)$ es equivalente a la minimización de $S(\theta)$. La complejidad de este esquema numérico radica en la dificultad de encontrar una forma explícita para $S(\theta)$, porque tanto ésta como S^- están dadas en términos de los tensores de esfuerzo y deformación.

Cualquier desplazamiento en la extensión de la fractura debe satisfacer la restricción de no penetración y la tracción en los puntos de contacto debe satisfacer la ley de fricción, esto lleva a una complicación en la minimización de $S(\theta)$ porque en el caso de ocurrir desplazamiento, la fricción debe ser considerada. Por esto, el modelo implementa un esquema de repulsión que puede generar la solución al problema de fricción por contacto siempre y cuando la condición de no penetración y la ley de fricción sean cumplidas.

De este modelo se obtiene que para una única fractura preexistente que se propaga por una combinación de los modos I y II (ver Tipos de Fracturas) sometida a esfuerzos de tensión, la orientación de su primera extensión es de 70.5° respecto a ella. Esta orientación decrece conforme aumenta la intensidad de los esfuerzos (ver Extensión de Grietas), y alcanza 0° cuando el modo de propagación corresponde únicamente al modo I.

Cuando la única fractura preexistente se propaga de acuerdo a los modos II o III bajo un sistema de esfuerzos compresivos, la orientación de la primera extensión es menor que 70.5° . Cuando la compresión es significativa, la convexidad de la trayectoria de las extensiones es opuesta a la del caso tensional. Cuando se tienen dos fracturas que se propagan en los modos I y II, éstas se extienden separándose una de la otra si sus puntos medios están separados al menos 1.5 veces sus longitudes, y se extienden una hacia la otra si sus puntos medios están separados en menos que sus longitudes.

Modelo de fracturación que explica la relación entre desplazamiento y longitud.

El modelo propuesto por Cowie y Scholz (1992) toma en cuenta los procesos físicos que propician el crecimiento de las superficies de las fallas en los extremos de la misma. Con este modelo los autores determinan la razón entre el máximo incremento en un extremo de la falla y la resistencia al deslizamiento de la roca circundante. En este modelo todos los mecanismos de deformación inelástica están representados juntos por una creciente resistencia al deslizamiento alrededor de la superficie de la falla. En los extremos de la falla, donde se han formado fracturas pero la falla no está todavía bien desarrollada, el desplazamiento es menor y consecuentemente mayor la resistencia al deslizamiento. Conforme el desplazamiento tiende a cero la resistencia en la superficie de deslizamiento se aproxima a la resistencia al deslizamiento de la roca circundante. Hacia el centro de la falla, donde el desplazamiento es mayor, la resistencia decrece al mismo tiempo que el deslizamiento se desarrolla en su superficie.

El modelo es bidimensional y estrictamente aplicable a fallas grandes. Está parametrizado por el máximo desplazamiento de la falla (d_{max}), el desplazamiento por deterioro (d_0) y por la longitud de la falla registrada (L), la cual incluye una zona deterioro de longitud s . En el modelo el desplazamiento por deterioro se propaga de la parte inmadura de la falla situada en un extremo, a la parte madura ubicada al centro de la falla. La zona de deterioro es una zona alrededor de la superficie de la falla en la que la resistencia al deslizamiento excede al requerido para que el deslizamiento se de en la parte central de la falla. Para fallas naturales, esta zona de deterioro presenta una deformación inelástica cercana al extremo de la falla y en este caso la acumulación de deformación por deslizamiento en el extremo de la falla es determinada por la razón d_0/s .

El modelo requiere que los esfuerzos en los extremos de las fallas sean finitos pero que no excedan la resistencia al deslizamiento de la roca circundante. Para una falla activa, la roca en el extremo de la falla está siempre en el punto de quiebra mientras que afuera de la falla las rocas todavía se deforman elásticamente. Este modelo no requiere ninguna suposición acerca de la distribución de los eventos de deslizamiento para describir el desplazamiento acumulado, o de que la coalescencia sea el mecanismo de crecimiento dominante. El modelo predice la forma angosta del perfil del desplazamiento observado en la falla y da

una expresión que relaciona la distribución del desplazamiento con las propiedades del material de la roca circundante.

Cowie y Scholz (1992) mostraron, con este modelo, que cuando los esfuerzos remotos son constantes el desplazamiento máximo de una falla es directamente proporcional a su longitud. Ellos concluyeron que la falla mantiene un perfil de desplazamiento y una estructura auto-similar a través del tiempo, y que si el desplazamiento por deterioro se escala con la longitud de la falla, entonces la energía de deformación requerida para la propagación de fallas también se escala con la longitud.

Modelo estadístico de la evolución espacio-temporal de fallas.

Cowie, Vanneste y Sornette, 1993 proponen un modelo estadístico de la deformación de cizalla antiplanar en una placa elástica cuadrada. Uno de los lados de la placa se mantiene fijo mientras el lado opuesto se mueve a velocidad constante a lo largo de una frontera que ha sido usada para simular la deformación en grandes escalas de tiempo de la Corteza terrestre. El modelo consiste de la placa sobre la cual se encuentra una rejilla de elementos orientados a 45° de los lados de la placa y que pueden soportar esfuerzos finitos de acuerdo a las propiedades de material que es una variable aleatoria. Un elemento se rompe cuando los esfuerzos exceden cierto valor, por lo que el modelo aborda la dinámica de la rotura como instantánea. Después de la rotura los esfuerzos se relajan redistribuyéndose entre elementos vecinos por medio de las ecuaciones de elasticidad. Sin embargo, los elementos de rotura son instantáneamente “cicatrizados” de forma que el modelo puede soportar un esfuerzo finito otra vez. Este efecto de cicatrización permite modelar el desarrollo de las fallas o fracturas por cizalla.

El tiempo unitario en el modelo corresponde a 0.1 años o casi un mes, y el rango de deformación geológica se estima que es del orden de 10^{-7} años. Este rango de deformación se puede comparar con el rango de desplazamiento de 1mm por año para un único elemento y 10cm por año para la placa entera. La escala de tiempo más corta en el modelo, que corresponde a un temblor, es la rotura simultánea de los elementos vecinos. Una escala de tiempo intermedia, que corresponde a las variaciones de los momentos sísmicos, es de 500 a 1000 años. La tercera y más grande, que corresponde al tiempo en que una falla en particular es sísmicamente activa, es del orden de 1000 a 10000 años.

Las características espaciales y temporales del desarrollo de las fallas y temblores obtenidas con el modelo muestran una similitud con los conjuntos de datos reales, aunque los resultados no pueden ser interpretados como tiempo o desplazamiento predecibles. Algunas de las conclusiones a las que llegaron los autores a partir de los resultados obtenidos son: que tanto la distribución de tamaños de fallas como la energía elástica relajada en los temblores, obedecen una ley de potencia, y la estructura de las fallas tiene una geometría multifractal; la auto-organización de los patrones de fallas no requiere de componentes tensoriales de la deformación; y la rotura se da sin tener zonas de debilidad preexistentes.

MARCO TEÓRICO

Las fracturas pueden ser vistas como el producto del desarrollo de diferentes procesos que involucran fuerzas aplicadas a cuerpos. Estas fuerzas provocan cambios en las propiedades de los cuerpos modificando su estado original.

A las alteraciones del estado original de las rocas, que se presentan como respuesta a fuerzas que actúan sobre ellas, se llaman deformación. Entonces las fracturas en cuerpos rocosos son una manifestación del tipo de deformación. Existen diferentes clases de fracturas que surgen al variar las condiciones del proceso que les da origen. En este proceso, que se denomina la mecánica de la fracturación, se correlacionan todas las variables asociadas tanto a las características mensurables del material (parámetros de material) como a los rasgos de las fracturas (distribución, orientación, origen, morfología, densidad, abertura, longitud, ...).

Para establecer los fundamentos de la mecánica de la fracturación en las rocas, es necesario hacer una breve revisión del análisis de los esfuerzos y deformaciones así como las variaciones de las respuestas de las rocas a éstos en diferentes condiciones físicas.

Las fuerzas que actúan sobre cualquier punto en la Tierra y que tienden a desplazar la materia situada en éste son generalmente el peso de las rocas sobre ese punto, las que surgen de los movimientos tectónicos y la gravedad que actúa sobre cada elemento de roca. Estas fuerzas pueden ser pequeñas y de periodo corto que no provocan deformaciones significativas, pero también pueden ser grandes y de periodos largos que incluso pueden exceder el límite elástico de las rocas causando deformación permanente. Cuando se excede el límite de rotura, la deformación más notoria que se desarrolla es la fractura, sin embargo el proceso de deformación es más complicado porque depende de la interacción de diversos factores físicos y químicos entre los cuales están la temperatura y presión confinantes, presión de poro, rango de las fuerzas aplicadas y la respuesta deformante de las rocas que a su vez depende de la composición de éstas (Billings, 1972).

Si se desea medir la tasa de deformación de un cuerpo es necesario considerar los esfuerzos que la propician y las propiedades reológicas del material. De este modo se introduce el término de esfuerzo que se define como *cantidad de fuerza que actúa sobre una unidad de superficie de roca que puede producir deformación*. Los esfuerzos pueden aplicarse

uniformemente o no, contribuyendo de esta manera al surgimiento de diferentes tipos de deformación en las rocas. La deformación es definida como *cambio de forma o de volumen de una unidad de superficie de roca causada generalmente por esfuerzos* (Billings, 1972; Hobbs, Means & Williams, 1976; Goodman, 1989).

Para formar una idea clara de cómo, cuándo y por qué se fracturan las rocas, primero se repasarán de manera breve los conceptos de esfuerzo y deformación y se introducirán otros que serán de uso frecuente en este trabajo, posteriormente se abordará el proceso de fracturación.

COMPONENTES DE ESFUERZO

Para simplificar la representación geométrica de los esfuerzos, generalmente se parte de su aplicación a una figura simple y regular: el cubo. Se supone que este cubo de poco volumen, pertenece a una masa de rocas sujeta a esfuerzos, y se analizan los esfuerzos que actúan en él. No se debe olvidar que el cubo es parte de la roca y por lo tanto sus caras reaccionan de acuerdo al material que las constituye y que además cada partícula en este cubo es afectado por la gravedad. Entonces un sistema de fuerzas que actúe sobre el cubo incluye fuerzas que actúan sobre sus caras, y que tienden a cambiar la posición y forma del cubo dentro de la masa de roca. Los efectos que producen las fuerzas sobre las caras del cubo dependen del área de éstas, es decir los esfuerzos son la medida de los agentes deformantes (Hobbs, Means & Williams, 1976).

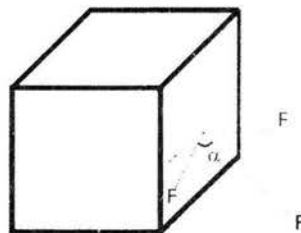


Figura 1. Componentes ortogonales (F_{\perp}) y paralelas (F_{\parallel}) de una fuerza (F) que actúa (con un ángulo α) sobre una de las caras de un cubo.

Las fuerzas que actúan sobre cada cara se pueden descomponer en dos elementos ortogonales entre sí, uno ortogonal a la cara y otro paralelo a ella, éste a su vez se descompone en dos elementos también ortogonales entre sí y paralelos a la cara (Fig. 1). Al

dividir las magnitudes de estas fuerzas por el área de la cara se obtienen los principales componentes del esfuerzo.

El componente del esfuerzo que corresponde a la fuerza ortogonal a la cara se llama esfuerzo normal (σ) y el que corresponde a la fuerza paralela a la cara se llama esfuerzo de cizalla (τ) y están dados por

$$\sigma = \frac{F_{normal}}{A} = F \frac{\sin \alpha}{A}$$

y

$$\tau = \frac{F_{paralela}}{A} = F \frac{\cos \alpha}{A},$$

donde A es el área de la cara y α el ángulo que forma el vector de fuerza con la cara.

De este modo, para cada cara se tiene un estado de esfuerzos sobre una superficie de área A, que puede ser determinado independientemente de la orientación que tenga la cara respecto a una línea de referencia, como por ejemplo la horizontal.

Si ϕ es el ángulo que forma la normal a una cara y la horizontal y si en esa cara actúan esfuerzos que pueden descomponerse en elementos verticales y horizontales (Fig. 2) y considerando que el esfuerzo paralelo a la cara es el mismo en cualquier dirección ($\tau_{vh}=\tau_{hv}$), entonces se puede describir σ y τ en términos de estos elementos

$$\sigma = \frac{\sigma_h + \sigma_v}{2} + \frac{\sigma_h - \sigma_v}{2} \cos 2\phi + \tau_{hv} \sin 2\phi$$

$$\tau = \frac{\sigma_h - \sigma_v}{2} \sin 2\phi - \tau_{hv} \cos 2\phi$$

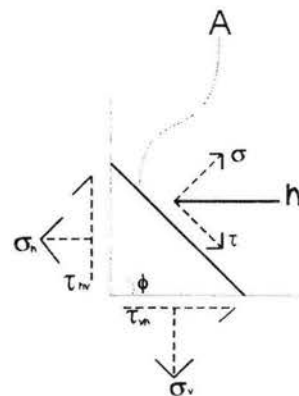


Figura 2. Componentes vertical y horizontal de un esfuerzo que actúa sobre un plano inclinado.

En general la magnitud del esfuerzo normal varía a través de la superficie de la cara dependiendo de los valores que toma ϕ y de acuerdo a éstos alcanza un valor máximo y uno mínimo, σ_1 y σ_2 respectivamente, que son llamados esfuerzos principales. Las direcciones

sobre las cuales se alcanzan estos valores se conocen como ejes de esfuerzos principales (Ramsay, 1977).

El esfuerzo normal y de cizalla en términos de los esfuerzos principales están dados por

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\phi$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \operatorname{sen} 2\phi.$$

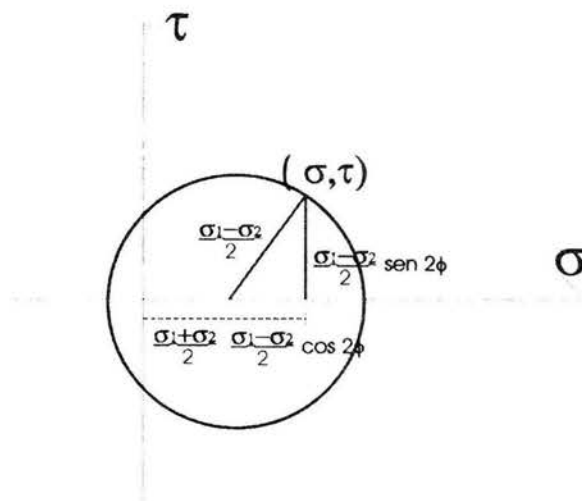


Figura 3. Círculo de Mohr que representa un estado de esfuerzos.

Como estas dos últimas fórmulas son representaciones paramétricas de la circunferencia, podemos expresar a los diferentes valores de los esfuerzos normal y de cizalla para diferentes ϕ 's en forma de una circunferencia llamada diagrama de Mohr (Ramsay, 1977) (Fig. 3).

Esta descripción se puede extender a tres dimensiones, donde para el caso de esfuerzos homogéneos, éstos se analizan en términos de tres esfuerzos principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Para el caso tridimensional también se utiliza el diagrama de Mohr, el cual consta en general de tres circunferencias.

Los esfuerzos también pueden ser descritos por una matriz, la cual recibe el nombre de tensor de esfuerzos. Para el caso de tres dimensiones, donde el marco de referencia corresponde a los eje perpendiculares x , y y z , se tiene que el tensor consta de seis valores

independientes: tres que representan los valores de los esfuerzos principales y tres que determinan sus orientaciones respecto a los ejes coordenados de un marco de referencia:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned}$$

En el caso de σ_1 , σ_2 , σ_3 , paralelos a x , y y z respectivamente, el tensor de esfuerzos se reduce a

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Cuando los esfuerzos son de tracción el valor máximo de σ_1 se relaciona con la máxima elongación e_1 (Ramsay, 1977). Existe una correspondencia matemática entre los esfuerzos y deformación siendo ambos cantidades tensoriales de segundo orden. La diferencia entre éstos radica en que sus expresiones tensoriales requieren, para tres dimensiones, de nueve términos para el caso de la deformación y de seis para el caso de los esfuerzos. Las ecuaciones que describen la deformación finita tienen similitudes matemáticas con las que describen los esfuerzos. Es por esto que tanto las variabilidades en los esfuerzos de cizalla y normales como los parámetros de deformación finita se representan en el diagrama de Mohr.

COMPONENTES DE LA DEFORMACIÓN

La deformación es una medida de los cambios geométricos del cuerpo deformado y está relacionada con la cuantificación de las propiedades intrínsecas del material que lo compone, llamadas “parámetros del material” (Ranalli, 1995).

Para simplificar la descripción de la deformación, ésta es considerada como el cambio de forma o de volumen o ambos del objeto original (Fig. 4), dejando a un lado las traslaciones y rotaciones de cuerpo rígido aunque en realidad todas ocurren conjuntamente.

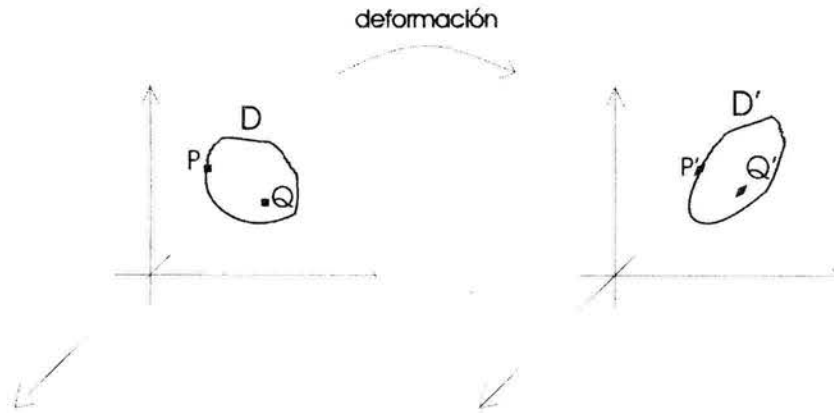


Figura 4. Los cambios de forma y volumen de un cuerpo afectan la posición relativa de sus partículas. Si P y Q son dos partículas situadas en el cuerpo D, al ser éste deformado en D', P y Q se posicionan en P' y Q' respectivamente.

La forma que adquiere un cuerpo al deformarse depende de las propiedades reológicas de éste (elasticidad, compresibilidad, viscosidad,...) las que a su vez dependen de los cambios en las condiciones externas (temperatura, presión y tiempo) (Ranalli, 1995). Entonces las condiciones externas y sus cambios controlan la deformación.

El proceso de deformación consiste de varias etapas cada una de las cuales puede ser considerada como un tipo de deformación. Estos diferentes tipos de deformación se clasifican de acuerdo a la alteración de las propiedades reológicas que se suscitan. Cuando no se sobrepasa el límite elástico de la roca (una propiedad reológica), la deformación que se produce se llama elástica. En este caso la roca puede regresar a su estado original. Por el contrario, si se ha sobrepasado el límite elástico, la roca presenta deformación permanente y se conservará en ese estado. A esta deformación se le llama plástica. La deformación frágil es permanente y en ésta no sólo se ha sobrepasado el límite elástico, también se sobrepasa el límite de rotura de la roca. Por lo tanto, este tipo de deformación se caracteriza por manifestarse como una discontinuidad en la roca, formada incluso sincrónicamente con ésta (Chernyshev, 1991; Resnick & Halliday, 1982; Ramsay 1977; Ranalli, 1995; Hobbs, Means & Williams, 1976; Billings, 1972).

La cuantificación de la deformación se hace con base en la variación de las distancias entre partículas que son desplazadas por la modificación de la forma, o también puede hacerse midiendo el cambio de orientación de la línea que une a esas partículas respecto a otra línea de referencia. La primera cuantificación se llama *deformación interna longitudinal* y la segunda, *deformación por cizalla*. Una deformación en general está compuesta por ambas.

Las expresiones matemáticas (Ramsay, 1977) de estas deformaciones están dadas por:

$$e = \frac{l_f - l_o}{l_o} ,$$

para la deformación interna longitudinal, donde l_o es la longitud inicial y l_f la longitud final, y que se define como el cambio de longitud por unidad de longitud, y

$$\gamma = \tan \psi ,$$

para la deformación por cizalla, donde ψ es la desviación respecto de la perpendicular de dos líneas previamente perpendiculares llamado ángulo de cizalla.

En geología es más común utilizar la *elongación cuadrática* para caracterizar el cambio de longitud, y ésta está dada por

$$\lambda = (1 + e)^2 .$$

Esta elongación cuadrática es definida como el cuadrado de la longitud de una línea con dimensión originalmente unitaria.

La deformación también tiene una representación matricial llamada tensorial por ser independiente del marco de referencia que se escoja. Este tensor, para el caso tridimensional, es asimétrico y de segundo orden y puede dividirse en dos partes, una simétrica asociada con la distorsión y otra antisimétrica asociada a la rotación. Las nueve cantidades de este tensor de segundo orden son independientes

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} .$$

Las dos matrices en las cuales se puede descomponer este tensor y que corresponden a la partes simétrica y asimétrica de la deformación están respectivamente dadas por:

$$\begin{bmatrix} a & \frac{b+d}{2} & \frac{c+g}{2} \\ \frac{b+d}{2} & e & \frac{f+h}{2} \\ \frac{c+g}{2} & \frac{f+h}{2} & i \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{b-d}{2} & -\frac{g-c}{2} \\ -\frac{b-d}{2} & 0 & \frac{f-h}{2} \\ \frac{g-c}{2} & -\frac{f-h}{2} & 0 \end{bmatrix} .$$

Ya que la deformación es un concepto geométrico, a ésta se ha asociado una elipse para el caso bidimensional y un elipsoide para el caso tridimensional, que representan tal deformación. Esta elipse o elipsoide resulta al deformar un círculo o una esfera unitaria que se supone se encuentra en el cuerpo deformado. Las magnitudes y orientaciones de los ejes de la elipse de deformación, representan los valores y ubicaciones de la máxima y mínima extensión cuadrática, λ_1 y λ_2 , que se dan con la deformación. Para el caso del elipsoide se tienen tres valores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$.

Tanto la deformación longitudinal como la deformación por cizalla pueden ser determinadas a partir de λ_1 y λ_2 tomando la forma

$$\lambda' = \frac{\lambda_1' + \lambda_2'}{2} - \frac{\lambda_2' - \lambda_1'}{2} \cos 2\theta'$$

$$\gamma' = \frac{\lambda_2' - \lambda_1'}{2} \operatorname{sen} 2\theta' \quad .$$

donde $\lambda' = 1/\lambda$, $\gamma' = \gamma/\lambda$ y $\lambda_1' = 1/\lambda_1$, $\lambda_2' = 1/\lambda_2$ y θ' es la orientación respecto a la máxima extensión, de la longitud en cuestión en el estado deformado. Los valores de λ' y γ' pueden, para diferentes valores de θ' , ser representados con el diagrama de Mohr (Fig. 5).

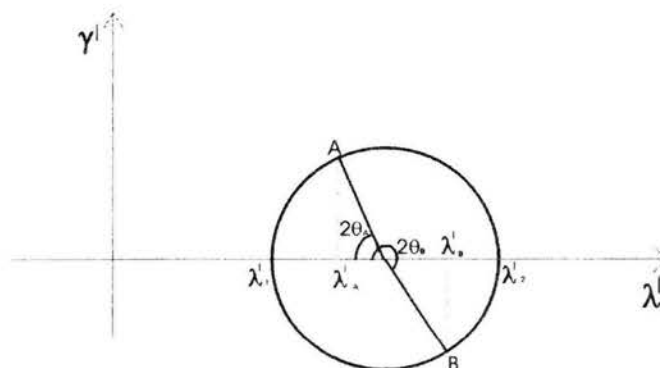


Figura 5. Círculo de Mohr que representa el estado deformado.

DIAGRAMA DE MOHR

La inferencia del sistema de esfuerzos para un estado deformado de rocas no es una tarea fácil porque su solución no es única (Billings, 1972) (Fig. 6). De aquí emana el hecho de que se ponga más énfasis en las propiedades inherentes a las rocas para determinar la evolución del proceso de deformación. Cuando se conoce el sistema de esfuerzos, sus consecuencias pueden ser anticipadas para materiales conocidos y el diagrama de Mohr se vuelve una herramienta útil para tal objeto.

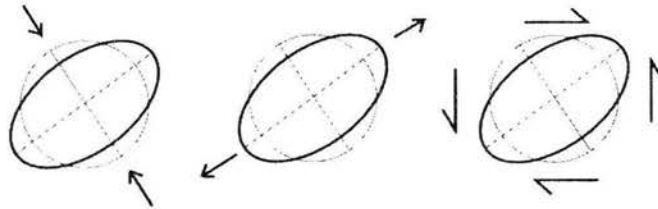


Figura 6. Diferentes campos de esfuerzos pueden llevar a la misma deformación.

El diagrama de Mohr es un método gráfico que representa sobre una circunferencia las variaciones de las componentes del esfuerzo normal y de cizalla que actúan sobre un plano (Hobbs, Means & Williams, 1976). Esto es posible debido a que tanto para los esfuerzos como para la deformación, sus componentes pueden ser descritas en forma similar a la que se usa para describir a la circunferencia.

En la construcción del diagrama de Mohr para un estado de esfuerzos, los componentes normal y tangencial de éstos en cada punto, se proyectan sobre un plano con coordenadas σ y τ formando de este modo una circunferencia. Las intersecciones de la circunferencia con el eje σ representan los esfuerzos principales (Fig. 3). Los planos, sobre los cuales actúan los esfuerzos normal y de cizalla, en el espacio físico quedan representados por radios de la circunferencia en el plano de esfuerzos $\sigma\tau$, y los ángulos entre normales a planos en el espacio físico son la mitad de los ángulos entre los correspondientes radios en el plano de esfuerzos (Ramsay, 1977) (Fig. 7).

La dirección del esfuerzo principal se puede determinar a partir del ángulo entre el radio correspondiente a un plano vertical y el radio que contiene al esfuerzo principal mayor. Por lo tanto el diagrama de Mohr caracteriza de manera gráfica el estado de esfuerzos en un

plano, de cualquier orientación, que pasa por un punto para el cual el tensor de esfuerzos está especificado (Ranalli, 1995).

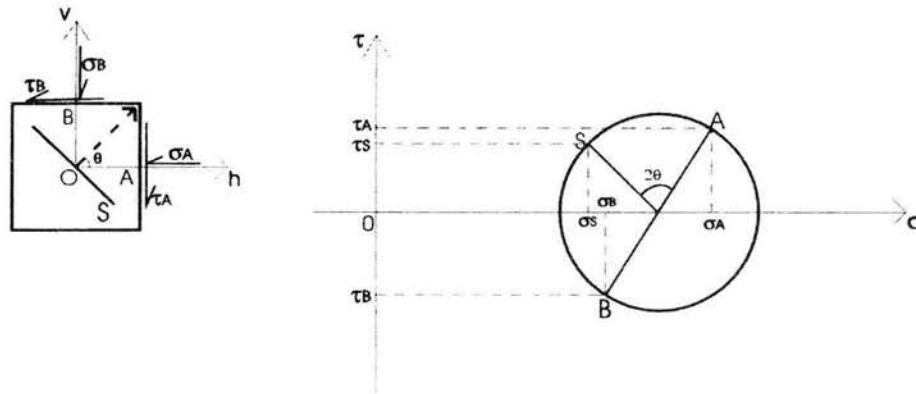


Figura 7. Los planos sobre los cuales actúan los esfuerzos normal y de cizalla son representados por radios de la circunferencia en el plano de esfuerzos $\sigma\tau$, y los ángulos entre las normales de estos planos son la mitad de los ángulos entre los correspondientes radios en el plano de esfuerzos principales.

El diagrama de Mohr para el estado deformado representa la deformación interna longitudinal y la deformación por cizalla a lo largo de una línea que forma un ángulo $2\theta'$ con la máxima deformación interna longitudinal mediante puntos de una circunferencia, independientemente de que haya o no cambio de área (Fig. 5). Esta construcción permite determinar fácilmente la elongación cuadrática λ y la deformación por cizalla γ de cualquier línea que forme un ángulo conocido con los ejes principales de deformación, antes o después de la deformación, sin recurrir a la solución numérica de las ecuaciones. Este diagrama resulta ser un método de manipulación de los datos obtenidos en rocas deformadas (Ramsay, 1977).

COHESIÓN INTERNA Y FRICCIÓN

De acuerdo a la primera ley de Newton un cuerpo se mantiene en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme a menos que una fuerza externa no equilibrada actúe sobre él. Esta ley también es conocida como la ley de la inercia. La inercia es una propiedad de la masa que le permite resistirse a la modificación de su estado de reposo o de movimiento.

Se puede pensar que la cohesión interna de una roca es el equivalente a su inercia en la fracturación. Para lograr que la roca se fracture se necesita una fuerza que en primera

instancia supere la cohesión y en segundo término a la fricción generada por las irregularidades de las superficies desplazadas.

Las fuerzas de fricción entre superficies se rigen por las dos siguientes leyes empíricas: (1) dentro de amplios límites es aproximadamente independiente del área de contacto y (2) es proporcional a la fuerza normal N con constante de proporcionalidad μ_k (Resnick & Halliday, 1982). Esta fuerza normal N , a su vez, se puede representar como la componente normal de la fuerza total que actúa sobre dicho cuerpo y la cual forma cierto ángulo α respecto a la dirección del movimiento. La componente de esta fuerza total paralela al desplazamiento F_{\parallel} es la que ocasiona este último (Fig. 8). Si el sistema está en equilibrio, entonces la constante de fricción cinética se puede describir en términos de la fuerza que ocasiona el movimiento y la fuerza normal

$$\text{Fricción} = \mu_k N$$

$$F_{\parallel} - \text{Fricción} = 0$$

$$\mu_k = \frac{F_{\parallel}}{N}$$

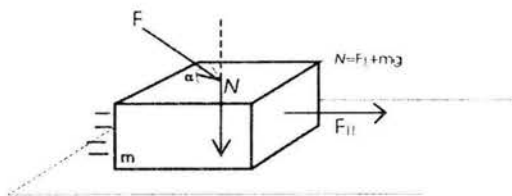


Figura 8. El desplazamiento es ocasionado por la componente de la fuerza que es paralela al plano de deslizamiento (F_{\parallel}).

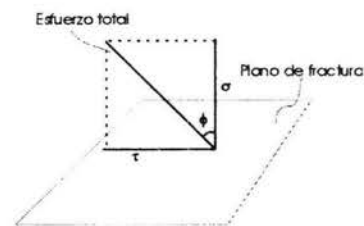


Figura 9. El ángulo ϕ formado por el esfuerzo total y la normal del plano, se llama ángulo de fricción interna.

En estos términos, para el caso de deslizamiento por fracturación a través de un plano en una roca, la constante de fricción de deslizamiento corresponde a la constante de fricción cinética. Esta constante puede representarse entonces como la razón del esfuerzo de cizalla y el esfuerzo normal en ese plano (Billings, 1972). La determinación de la constante de fricción en términos de esfuerzos no altera su adimensionalidad (Ranalli, 1995)

$$\mu_0 = \frac{\tau}{\sigma} = \tan \phi,$$

donde μ_0 representa la constante de fricción de deslizamiento y ϕ es el ángulo que forma el esfuerzo total en el plano con su normal llamado ángulo de fricción interna (Fig. 9).

De la relación anterior se tiene que en la fracturación, el esfuerzo de cizalla es directamente proporcional al esfuerzo normal y entonces se puede escribir

$$|\tau| = \mu_0 \sigma .$$

El valor absoluto se utiliza porque el signo del esfuerzo de cizalla no afecta la fricción y σ se supone positivo para un sistema compresivo.

Pero para que tenga lugar la fracturación, es necesario un esfuerzo que supere tanto a la cohesión como a la fricción, por lo que se sugiere que el esfuerzo de cizalla, que es el que provoca el desplazamiento, se exprese como

$$|\tau| = S_0 + \mu_0 \sigma ,$$

donde S_0 representa la cohesión de la superficie de contacto. Esta ecuación es una relación lineal en su forma más general.

De la ecuación anterior se puede deducir la importancia de la cohesión interna, porque en el caso de las rocas ésta no puede tener valor cero y en ausencia de esfuerzo normal sería la única oposición al deslizamiento.

La fricción es consecuencia de las irregularidades en la superficie donde ocurre el deslizamiento, por lo que las condiciones de esta superficie y todas las estructuras formadas por el deslizamiento afectan tanto al coeficiente de fricción como a la cohesión.

La presencia de agua, y consecuentemente la presión de fluido, a lo largo de la superficie de deslizamiento, disminuye el esfuerzo normal efectivo que actúa sobre la superficie y por lo tanto el esfuerzo de cizalla requerido para el deslizamiento (Ranalli, 1995).

ENVOLVENTE DE MOHR

Se dice que una roca es frágil si su cohesión interna se rompe como resultado de la deformación de su campo elástico. Las características del esfuerzo en el momento de la rotura definen el criterio del esfuerzo de la resistencia frágil. Los esfuerzos tienen una parte hidrostática que simplemente ocasiona cambio de volumen y una cortante que provoca

distorsión la cual puede culminar en fracturación (Ramsay, 1977; Hobbs, Means & Williams, 1976; Billings, 1972).

Las rocas están sometidas generalmente a esfuerzos compresivos cuya parte cortante puede ocasionar que se rompan si ésta se iguala a la cohesión que mantiene juntas las partículas. Los esfuerzos de cizalla corresponden a esa parte cortante de los esfuerzos que conducen a la formación de fracturas en las rocas. Aunque la fractura está controlada por la cizalla, no tiene lugar generalmente sobre aquellas superficies en las cuales actúa el máximo esfuerzo de cizalla situadas a 45° del esfuerzo principal compresivo (Ranalli, 1995; Ramsay, 1977; Hobbs, Means & Williams, 1976; Billings, 1972) (ver apéndice A).

Los estados de esfuerzo que conducen a la formación de la fractura son bien representados en el diagrama de Mohr. Como ya se ha mencionado, cualquier estado de esfuerzos puede representarse en el plano $\sigma\tau$ mediante un círculo con centro $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ y radio $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ que intersecta al eje σ en dos puntos con valores σ_1 y σ_2 , y que representa los esfuerzos principales en dos dimensiones.

Para llegar a esta representación se somete una roca al esfuerzo compresivo creciente variando sólo uno de los esfuerzos principales, en cuanto los otros se mantienen fijos. Los diversos estados cambiantes del esfuerzo se representan por una serie de círculos con diferentes radios. La roca se deforma elásticamente para algunos valores de esos esfuerzos, pero tan pronto como la compresión alcanza cierto valor crítico, la roca se rompe. Si las pruebas se repiten para otros valores de los esfuerzos que se mantienen fijos, se obtienen otros círculos límite para cada valor fijo mencionado (Fig. 10). En ese diagrama, por lo tanto, se distinguen aquellos estados de esfuerzo estable que conducen a la rotura de los que no lo hacen. La línea que forma la tangente a toda una serie de círculos límite de rotura se conoce como *envolvente de Mohr* y separa los campos de esfuerzo estables e inestables (Ramsay, 1977).

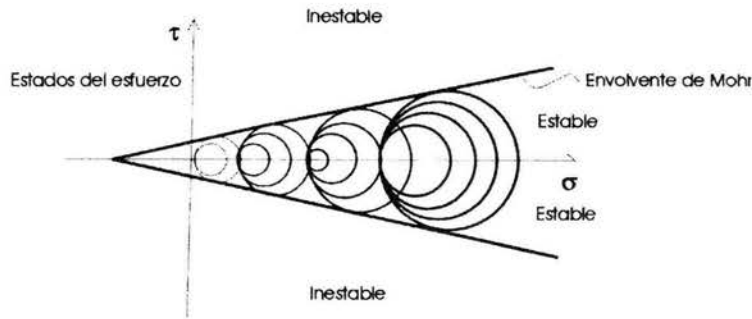


Figura 10. Construcción de la envolvente de Mohr a partir de los círculos de Mohr que representan los diferentes estados de esfuerzo a los que es sometida la muestra de un material para determinar los valores máximos de esfuerzo que ésta puede soportar antes de romperse.

Las condiciones de rotura dadas por la envolvente de Mohr, relacionan de forma funcional los esfuerzos normal y de cizalla. Establecen que las fracturas ocurren a través de un plano (o planos) cuando los esfuerzos de cizalla alcanzan un valor crítico que depende de los parámetros del material y del esfuerzo normal (Ranalli, 1995)

$$|\tau_{crit}| = f(\sigma).$$

La forma explícita de esta ecuación se determina experimentalmente para cada material y su aspecto más simple está dado por la siguiente expresión,

$$|\tau_{crit}| = S + \mu' \sigma,$$

donde S y μ' son parámetros del material, referidos a la cohesión y fricción interna respectivamente. La situación expresada por esta ecuación es conocida como el criterio de Navier-Coulomb y se representa gráficamente en el espacio de esfuerzos (Fig.11) por dos líneas rectas que intersectan al eje τ en $\pm S$ y cuyas pendientes son $\pm \mu' = \tan \phi$, donde ϕ es el ángulo de fricción interna (que en la mayoría de las rocas se aproxima asintóticamente a $\phi \approx 30^\circ$). Las líneas son la envolvente del diagrama de Mohr crítico. La orientación de los planos de fractura se puede determinar gráficamente y sus normales forman un ángulo de $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$ con la dirección del máximo esfuerzo compresivo.

El criterio de Navier-Coulomb tiene sus limitaciones, porque en un sentido práctico la fricción interna decrece en función del esfuerzo normal ocasionando que la envolvente se curvó hacia el origen. Sin embargo la comprobación empírica de la fracturación de las rocas es satisfactoria tanto en el laboratorio como en el campo (Ranalli, 1995).

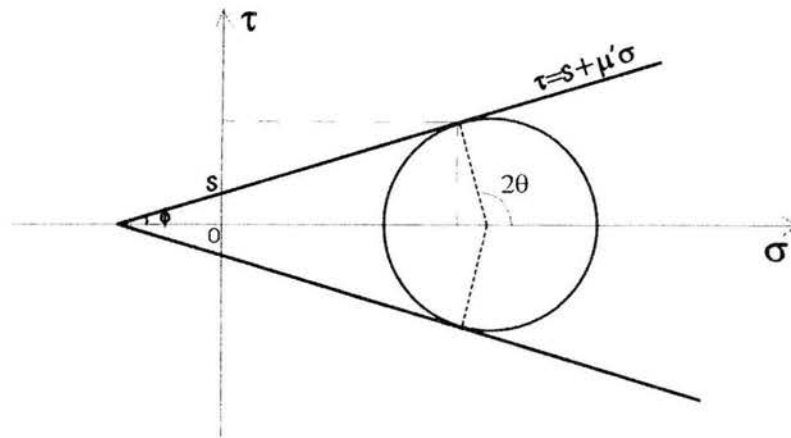


Figura 11. Representación del criterio de Navier-Coulomb en el espacio de esfuerzos. Este criterio divide al espacio de esfuerzos en dos áreas por medio de las rectas $\tau = S + \mu' \sigma$ y $\tau = S - \mu' \sigma$. La región convexa comprendida entre las rectas corresponde a una región de esfuerzos estables, la región cóncava corresponde a una región de esfuerzos inestables. La ruptura se da cuando los esfuerzos alcanzan valores situados sobre la recta.

Por otro lado, se puede argumentar que mientras no se tengan las condiciones necesarias para que de acuerdo al criterio de Navier-Coulomb se formen fracturas en una roca, ésta presenta deformación dúctil.

PRESIÓN DE FLUIDO

El esfuerzo efectivo necesario para la iniciación de las fracturas y el deslizamiento a lo largo de una superficie preexistente se ve afectado por la existencia de fluidos en las fracturas. Cuando los fluidos contenidos en las fracturas tienen presiones altas, los esfuerzos verticales que existen en la corteza son producidos, en primer lugar, por esas presiones y se les conoce como presión hidrostática normal, siendo

$$p_f = -\rho_f gh,$$

donde ρ_f es la densidad del fluido, g la aceleración de la gravedad y h la profundidad. En segundo lugar los esfuerzos son producidos por la presión litostática que se refiere al peso del material rocoso sobre el punto de observación,

$$p_l = -\rho_l gh,$$

donde ρ_l es la densidad de la roca. La presión de fluido soporta en parte el peso de la sobrecarga del material y, por lo tanto, el esfuerzo normal efectivo está dado, en cualquier

punto, por la diferencia entre la presión litostática y del fluido. La presión litostática es una cantidad fija, pero la presión de los fluidos en la roca puede variar. A medida que la presión en los fluidos se aproxima a un valor igual al de la presión litostática, el valor del esfuerzo efectivo decrece hacia cero. La presión de fluido se expresa como una fracción del esfuerzo normal que actuaría sobre la roca si los fluidos no estuvieran presentes (el cual en estos términos sería igual a la presión litostática $\sigma = p_l$),

$$p_f = \lambda \sigma .$$

El criterio de Mohr-Coulomb de rotura de rocas, considera que la rotura ocurrirá cuando el esfuerzo de cizalla alcance un valor igual a la cohesión más el coeficiente de fricción interna producido por el esfuerzo compresivo normal efectivo,

$$|\tau| = S + \mu'(\sigma - p_f)$$

y

$$|\tau| = S + \sigma \mu'(1 - \lambda) .$$

De esto se deduce que si λ aumenta su valor conforme aumenta la presión del fluido, la roca se rompe con mayor facilidad. Una vez que la roca ha comenzado a moverse, entonces las condiciones de fricción necesarias para que el movimiento continúe son

$$|\tau| = \mu_0 \sigma ,$$

o bien, cuando las rocas tienen una presión de fluido la ecuación se modifica a

$$|\tau| = \mu_0(\sigma - p_f)$$

y

$$|\tau| = \mu_0 \sigma (1 - \lambda) .$$

Esto indica que a medida que la presión de fluido aumenta, el deslizamiento corresponde a un valor crítico del esfuerzo de cizalla más bajo sin que exista alguna alteración del coeficiente de fricción interna (Ramsay, 1977).

Tanto en la rotura como en el deslizamiento, la presión de poro actúa en contra del esfuerzo normal del sólido, reduciendo efectivamente la resistencia a la fractura de cizalla y al deslizamiento. Por lo tanto la ocurrencia de la presión de fluido incrementa la probabilidad de fractura y deslizamiento porque reduce el esfuerzo de cizalla requerido para producirlos (Fig. 12). La fractura puede ocurrir no sólo porque los esfuerzos alcanzan los valores

críticos sino porque estos valores críticos disminuyen en consecuencia de un incremento en la presión del fluido en el poro.

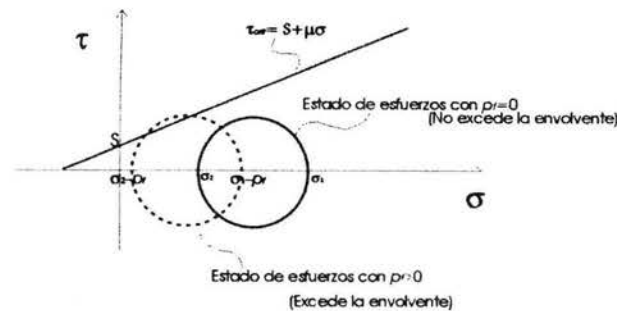


Figura 12 La presión de fluido disminuye el esfuerzo normal y por ende el de cizalla que es el que provoca el desplazamiento y la fracturación.

TIPOS DE FRACTURAS

Una fractura es una discontinuidad limitada por dos fronteras irregulares disyuntivas que pueden almacenar fluidos o minerales sólidos según su origen. En una fractura sus fronteras pueden desplazarse paralela o perpendicularmente. La distancia a lo largo de sus fronteras es mucho mayor que las distancias que las separan. La fractura es una estructura de dos o tres dimensiones que puede o no estar conectada a otras y que se origina como un resultado de diferentes procesos geológicos como hidrotermalismo, segregación magmática, extensión y acortamiento cortical, milonitización u otras (Billings, 1972; Hobbs, Means & Williams, 1976; Ramsay, 1977; Atkinson, 1987).

Cuando el desplazamiento entre las fronteras de la fractura no es apreciable a simple vista la discontinuidad se llama diaclasa, si el desplazamiento es grande se llama falla. Esta distinción puede no ser posible o significativa porque en un sólo conjunto de fracturas, algunas de éstas pueden mostrar evidencia de deslizamiento y otras no (Hobbs, Means & Williams, 1976).

Según su propagación, las fracturas pueden clasificarse como las de tensión o de cizalla. Las primeras son el resultado de esfuerzos que tienden a tirar de la roca separándola. Cuando la roca finalmente se rompe, las fronteras que así se forman se apartan una de la otra produciéndose un deslizamiento perpendicular a las fronteras. Las fracturas de cizalla resultan de los esfuerzos que tienden a deslizar una parte de la roca más allá de la parte

adyacente. En éstas, el deslizamiento que se produce es paralelo a la superficie de separación (Billings, 1972).

Las formas básicas de propagación de fracturas son tres: de tensión (Modo I), de cizalla (Modo II) y de tijera (Modo III) (Fig. 13). La superposición de estos tipos es suficiente para describir el caso más general de propagación de fracturas. Cada modo de propagación de fracturas está referido a un factor de intensidad de esfuerzos (ver Extensión de Grietas) en el extremo de la fractura en particular (National Research Council, 1996).

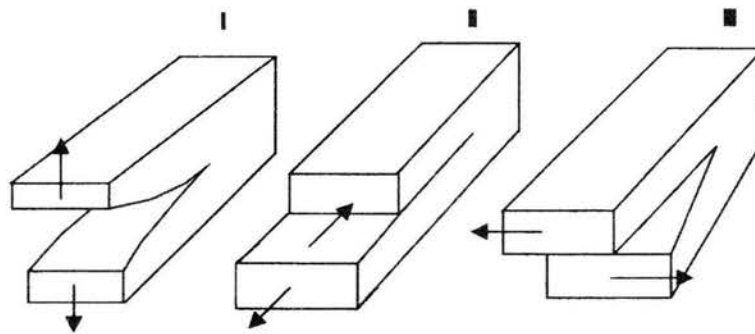


Figura 13 Modos de propagación de fracturas: de tensión (Modo I), de cizalla (Modo II) y de tijera (Modo III).

MECANISMOS DE FRACTURACIÓN

Muchas fracturas son reactivadas en diferentes etapas de la historia geológica de alguna roca y pueden ser atribuidas a algún tipo genético en particular. Para entender la evolución de estas fracturas es necesario conocer algunas teorías que explican los procesos que en ella intervienen, como son la teoría de Griffith, la extensión de grietas, las zonas de proceso y la evolución por sucesión que se revisarán a continuación.

GRIETAS DE GRIFFITH

Todas las teorías modernas acerca de la resistencia de materiales han aceptado, implícita o explícitamente, la existencia de imperfecciones en los materiales que propician su rotura con esfuerzos mucho menores que la resistencia teórica. Por ejemplo, en un hoyo circular en una placa carga con un esfuerzo de tensión uniforme σ_{∞} , la parte superior e inferior, de acuerdo a la teoría de elasticidad, son afectadas por un esfuerzo compresivo de magnitud σ_{∞} y los lados por un esfuerzo de tensión de dimensión $3\sigma_{\infty}$ (Fig. 14a). Esta concentración

de esfuerzos surge de la falta de capacidad de carga del hoyo y sus magnitudes son determinadas sólo por la geometría del hoyo y no por su tamaño. Si el hoyo es elíptico (Fig. 14b) con semiejes b y c ($c > b$), la concentración de esfuerzos en los vértices de la elipse incrementa proporcionalmente a la razón axial c/b de acuerdo a la fórmula

$$\sigma \approx \sigma_{\infty} (1 + 2c/b)$$

ó

$$\sigma \approx \sigma_{\infty} [1 + 2(c/\rho)^{1/2}] \approx \sigma_{\infty} (c/\rho)^{1/2}$$

para $c \gg b$ y donde ρ es el radio de curvatura en ese punto. Cuando las grietas son largas la resistencia teórica se alcanza en sus extremos si $\sigma_{\infty} \ll \sigma_t$, porque la ecuación anterior indica que la concentración de esfuerzos incrementa conforme aumenta la longitud de la grieta (Scholz, 2002).

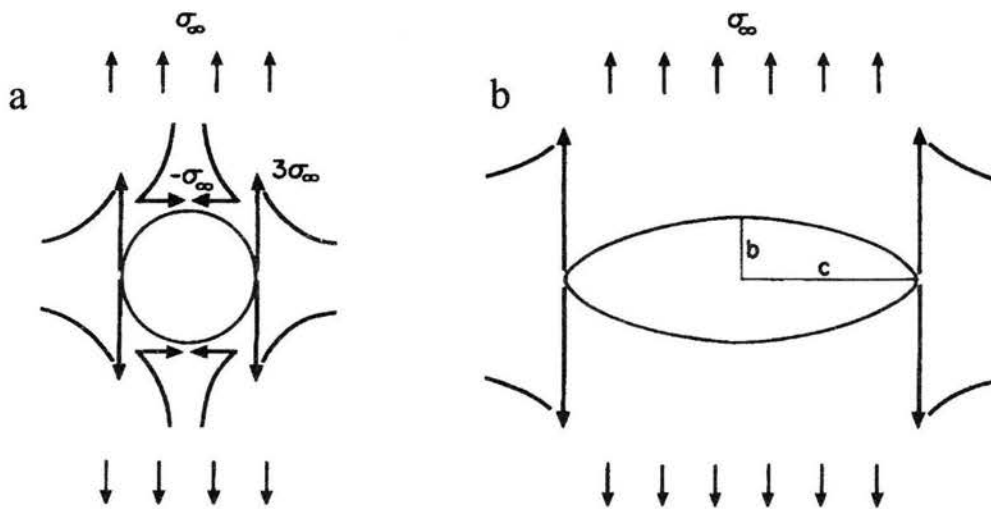


Figura 14. Concentración de esfuerzos alrededor de hoyos, circular (a) y elíptico (b), en una placa sujeta a tensión uniforme σ_{∞} (Scholz, 2002).

La teoría de las grietas de Griffith postula la existencia de defectos en el material consideradas como cavidades elipsoidales, las cuales generan concentración de esfuerzos en sus extremos, donde éstas llegan a ser mucho mayores que los esfuerzos aplicados. La concentración de esfuerzos en los extremos de las grietas de Griffith favorablemente orientadas respecto a los esfuerzos aplicados, causa propagación cuando los esfuerzos críticos son alcanzados localmente originando una fractura macroscópica de cizalla como

resultado de esta propagación y coalescencia de algunas grietas. Se asume que en un estado compresivo de esfuerzos las grietas están cerradas, y tomando en cuenta la fricción entre las paredes de éstas, la cohesión se puede representar en términos del esfuerzo de tracción del material en un sólo eje. En este caso el coeficiente de fricción estática es reemplazado por el de fricción de deslizamiento entre las paredes de la grieta. El desarrollo de las grietas también es afectado por la presión de los fluidos que puedan contener (Ranalli, 1995).

En la teoría de las grietas de Griffith se considera que la grieta se propaga con una energía balanceada, el sistema es como se muestra en la Figura 15(a) y consiste de un cuerpo elástico que contiene una grieta de longitud $2c$ en el cual actúan fuerzas en su frontera (Scholz, 2002). Si la grieta se extiende un incremento δc , el trabajo W realizado estará dado por las fuerzas externas y habrá un cambio en la energía de deformación interna U_e . También habrá un gasto de energía U_s cuando se cree una nueva superficie. Por lo tanto, la energía total U del sistema para una grieta estacionaria, será

$$U = (-W + U_e) + U_s.$$

El término en paréntesis es conocido como la energía mecánica. Si no existiera cohesión en el incremento δc de la superficie, la grieta se aceleraría a crecer con una nueva configuración de energía más baja. Por lo tanto, la energía mecánica debe disminuir con el crecimiento de la grieta. Sin embargo, el gasto de energía aumentará con la extensión de la grieta porque el trabajo se realiza contra las fuerzas de cohesión en el momento que se extienda la superficie de la grieta. Pero tanto la energía mecánica como el gasto de energía alcanzan un equilibrio cuando la energía total del sistema se reduce debido al crecimiento de la grieta. La condición para el equilibrio es

$$dU/dc = 0.$$

Para una varilla de longitud y , módulo de elasticidad E y sección transversal de área unitaria sujeta a un esfuerzo de tensión uniforme, tendrá una energía de deformación $U_e = y\sigma^2/2E$. Si se forma una grieta de longitud $2c$ en la barra, la energía de deformación se incrementará una cantidad $\pi c^2\sigma^2/2E$, de tal manera que U_e se convierte en

$$U_e = \sigma^2(y + 2\pi c^2)/2E.$$

La barra permite el agrietamiento con un módulo de Young efectivo de $\underline{E} = yE / (y + 2\pi c^2)$. El trabajo realizado en la formación de la grieta es $W = \sigma y (\sigma / \underline{E} - \sigma / E) = 2\pi c^2 \sigma^2 / E$ y el cambio en el gasto de energía es $U_s = 4c\gamma$, donde γ es el gasto de energía específico. Si se sustituyen los valores de la energía de deformación y el gasto de energía en la ecuación de energía total se obtiene

$$U = -\pi c^2 \sigma^2 / E + 4c\gamma$$

y aplicando la condición de equilibrio se obtiene una expresión para el esfuerzo crítico en el cual una grieta orientada favorablemente estará en equilibrio

$$\sigma_f = (2E\gamma / \pi c)^{1/2}$$

La energía del sistema mostrada en la Figura 15(b) y dada por la ecuación anterior, define una posición de equilibrio inestable: cuando se da esta condición, la grieta se propaga sin límite causando que el cuerpo se agriete macroscópicamente.

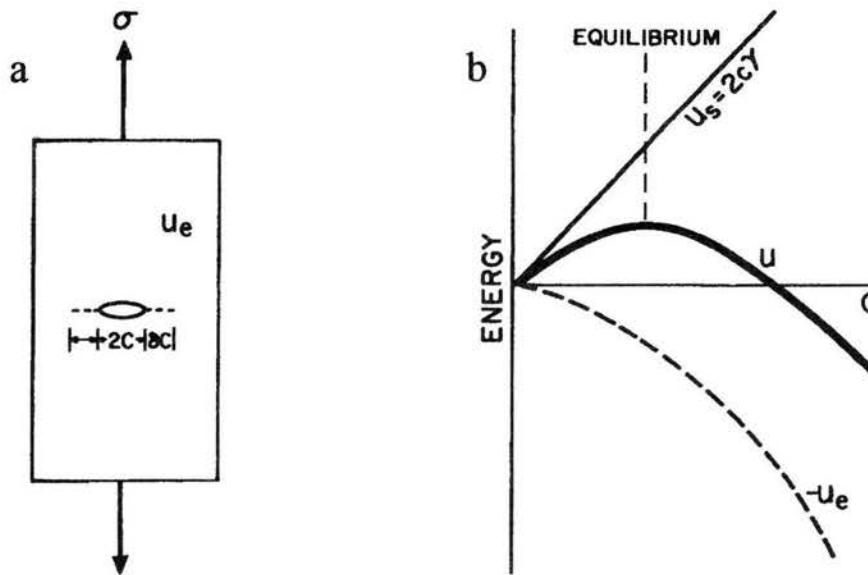


Figura 15. a) Modelo de Griffith para la propagación de una grieta en una varilla, y b) la partición de la energía para el proceso (Scholz, 2002).

Griffith experimentalmente probó esta teoría para medir la resistencia a la rotura de varillas de vidrio que habían sido marcadas a varias profundidades. Obtuvo un resultado experimental con la ecuación del esfuerzo crítico, extrayendo un valor para γ . De manera independiente estimó un valor para γ al medir el trabajo necesario para arrastrar la barra por

un conducto con temperaturas elevadas. El valor que obtuvo coincidieron con los derivados de las pruebas de resistencia. Los resultados de Griffith se originaron estrictamente de una consideración del equilibrio termodinámico.

¿La resistencia teórica se puede alcanzar en los extremos de la grieta cuando se da la condición de Griffith? ¿el esfuerzo es suficientemente alto para romper la unión?

Considerando una grieta atómica (como las descritas anteriormente) y la teoría atómica, la resistencia puede ser vista como el esfuerzo máximo que el material puede soportar bajo condiciones dadas. Las fracturas pueden involucrar el rompimiento de enlaces atómicos. Una estimación de la resistencia teórica de un sólido es, por lo tanto, el esfuerzo requerido para romper los enlaces a través de una estructura plana. Se aplican esfuerzos de tensión a un simple modelo disarmónico para las fuerzas entre los átomos en un sólido (Fig. 16) que producen un incremento en la separación atómica r de un espaciado equilibrado a . Ajustando una curva sinusoidal a la parte previa al máximo del modelo se puede aproximar la relación esfuerzo-desplazamiento

$$\sigma = \sigma_i \sin\left[\frac{2\pi(r-a)}{\lambda}\right].$$

Para pequeños desplazamientos donde $r \approx a$, se tiene

$$\frac{d\sigma}{d(r-a)} = \frac{E}{a} = \frac{2\pi}{\lambda} \sigma_i \cos\left[\frac{2\pi(r-a)}{\lambda}\right],$$

pero como $(r-a)/\lambda \ll 1$, el coseno es igual a 1 y $\sigma_i = \frac{E\lambda}{2\pi a}$. Cuando $r = 3a/2$ los átomos

están entre dos posiciones de equilibrio, entonces por simetría $\sigma = 0$ y $a \approx \lambda$. Por lo tanto la resistencia teórica es aproximadamente $E/2\pi$. El trabajo realizado al separar los planos por $\lambda/2$ es el gasto de energía específico γ , la energía por unidad de área requerida para romper el enlace es

$$2\gamma = \int_0^{\lambda/2} \sigma_i \sin\left[\frac{2\pi(r-a)}{\lambda}\right] d(r-a) = \frac{\lambda\sigma_i}{\pi},$$

la cual con $\sigma_i \approx E/2\pi$ que da un valor para γ aproximadamente igual a $Ea/4\pi^2$.

Sustituyendo $\sigma_i = \frac{E\lambda}{2\pi a}$ en la última ecuación se obtiene que

$$\sigma_i = (E\gamma/a)^{1/2}$$

que es el esfuerzo que existirá en los extremos de una grieta de longitud $2c$ cuando el esfuerzo macroscópico aplicado es $\sigma_t = 2\sigma_f(c/a)^{1/2}$ tal que $\sigma_f = (E\gamma/4c)^{1/2}$, lo cual es muy parecido a la expresión del esfuerzo crítico. La correspondencia de estos resultados muestra las condiciones suficientes y necesarias para la propagación de las grietas. El enfoque termodinámico de Griffith muestra la condición para la cual la grieta es energéticamente favorecida para su propagación, mientras que con la teoría atómica se muestra la condición en la cual los esfuerzos en los extremos de la grieta son suficientes para romper los enlaces atómicos. La formulación de Griffith tiene una inestabilidad implícita como consecuencia de la condición de frontera del esfuerzo constante (Scholz, 2002).

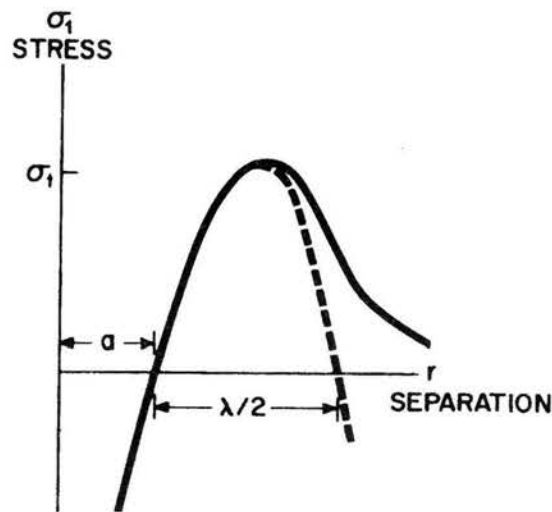


Figura 16. Diseño de un modelo disarmónico de fuerzas interatómicas que muestra la relación entre esfuerzo y separación atómica (curva continua) y una aproximación sinusoidal (curva punteada) (Scholz, 2002).

EXTENSIÓN DE GRIETAS

En lugar de considerar los esfuerzos en los extremos de las grietas, el mecanismo de fractura alternativo aproxima la propagación de la grieta G examinando la fuerza de su extensión. Las contribuciones de G vendrán de las regiones en los extremos de la grieta y de otros parámetros de todas partes del sistema. La fuerza de extensión de grieta, o el rango de energía de deformación liberada es menor que la energía por unidad de nueva área de separación de grieta formada durante un incremento en su extensión. G es calculada por incrementos infinitesimales de nuevas áreas de separación y puede ser aplicada tanto a

grietas estacionarias como activas. El rango de energía de deformación liberada se calcula respecto a la longitud de la grieta y no respecto al tiempo.

Para fracturas desarrolladas de acuerdo a alguno de los tres modos básicos de desplazamiento, la fuerza de extensión de grieta, para deformación plana y elasticidad lineal, está dada por las siguientes expresiones

$$G_I = K_I^2(1 - p^2)/E$$

$$G_{II} = K_{II}^2(1 - p^{2n})/E$$

$$G_{III} = K_{III}^2(1 + p)/E,$$

donde p es la razón de Poisson, E es el módulo de Young y K el factor de intensidad de esfuerzo para cada tipo de deslizamiento. Este último se refiere a la magnitud los esfuerzos en el extremo de la grieta, para un modo de propagación en particular, en un material linealmente elástico y homogéneo.

Hay dos tipos de leyes de extensión de grietas que describen el mecanismo de fracturación: la ley de equilibrio y la ley cinética.

La primera especifica que las grietas pueden extenderse estable o inestablemente en algún valor crítico de un parámetro característico del mecanismo de fracturación. La grieta se propaga cuando los valores críticos del factor de intensidad de esfuerzo (K) o la fuerza de extensión de grieta (G) son alcanzados o excedidos. Esta grieta se conoce como rápida o catastrófica porque su velocidad de propagación se puede aproximar a la del sonido en un medio en el que la grieta sea aislada y sus paredes son libres de tracción.

La segunda ley se refiere a ciertos valores subcríticos de parámetros que caracterizan el mecanismo de fracturación y establece que la grieta puede extenderse a una velocidad que está en función de la longitud de la grieta impulsada por la fuerza (Atkinson, 1987).

ZONAS DE PROCESO

En el mecanismo de fracturación clásico se hace referencia a una forma ideal de fractura. Esta representación es viable para cristales o para materiales policristalinos en un nivel microscópico. Un estudio a este nivel sostiene la suposición de que las fracturas se forman automáticamente y se propagan por rupturas secuenciales de sus bordes.

En un estudio a nivel macroscópico, sin embargo, se observa un comportamiento más complejo de las rocas y cerámicas. La Figura 17 muestra el desarrollo de una zona afectada por el proceso de fracturación que corresponde a una localidad donde existe un defecto que influye sobre el crecimiento de la fractura. Como resultado se forma un sistema de microfracturas con un comportamiento lineal. Conforme la densidad de las microfracturas aumenta, el comportamiento en la región del extremo de la grieta se vuelve no lineal. Finalmente la extensión de la macrofractura ocurre porque las microfracturas en la zona de proceso se unen entre sí. En algunos materiales la zona de proceso puede ser pequeña respecto a las dimensiones del cuerpo fracturado, por lo que es válido asumir una elasticidad lineal para el análisis del mecanismo de fracturación. El desplazamiento, δ , por abertura en el extremo de una grieta, es dado aproximadamente por la abertura en la intersección de la frontera y la región no lineal en el extremo de la fractura con la superficie (fig.18). La zona de proceso es idealizada como un círculo de radio r (Atkinson, 1987).

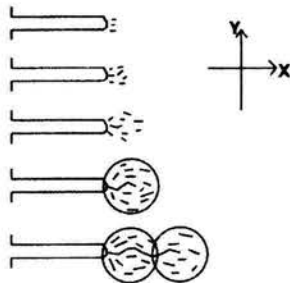


Figura 17. Desarrollo de una zona de proceso. La extensión de una fractura ocurre porque las microgrietas en la zona de proceso se unen.

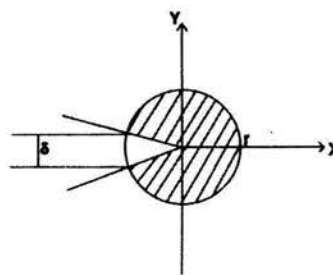


Figura 18. La abertura δ de una grieta es dada por la intersección de la frontera y la región no lineal en el extremo de la fractura.

En práctica, la propagación de una fractura activa puede acelerarse a fracciones significativas de la velocidad del sonido. Según las consideraciones inerciales, esta velocidad no puede ser mayor que la de las ondas Raleigh. Un incremento en una fractura impulsado por una fuerza, conduce a la propagación de ésta a su velocidad límite.

EVOLUCIÓN POR SUCESIÓN

El principio de sucesión es una de las ideas fundamentales que explican la evolución de las estructuras geológicas. Se basa en el hecho que la formación estructural se da por procesos progresivos de fracturación ya sea por sucesión o neogénesis de estructuras. En términos generales la sucesión es una evolución de estructuras mayores a expensas de estructuras

menores. Este proceso ha estado expuesto en los elementos de la corteza a través de la historia geológica de nuestro planeta. Junto con los rasgos heredados de estructuras geológicas están las estructuras sobrepuestas las cuales desentonan con el modelo tectónico previo. Las estructuras de neogénesis posiblemente poseen algunos de los rasgos principales de las viejas estructuras enfatizando la unidad entre sucesión y neogénesis (Chernyshev & Dearman, 1991).

La evolución sucesiva de fracturas puede ser afectada por la interacción que hay entre éstas. La interacción de fracturas puede ocasionar que una fractura deje de desarrollarse como resultado de la influencia de fracturas mayores cercanas o que se fusione con alguna de ellas formando otra fractura más grande. En el primer caso la energía necesaria para que la fractura crezca, es drenada por las fracturas mayores cercanas. En los extremos de las fracturas se concentran esfuerzos que propician la acumulación de energía elástica, la cual al ser liberada ocasiona que estos extremos alcancen a otra fractura propiciando el crecimiento de la discontinuidad. Entonces las fracturas que se aproximan unas a otras tienden a unirse. El crecimiento de las fracturas es el resultado de la localización de fuentes de energía que es relajada en la formación de fracturas de tensión. Esto provoca que se disipen los esfuerzos de tracción alrededor de estas fracturas en dirección perpendicular a sus planos. Esto se atribuye a que una superficie libre no soporta esfuerzos de cizalla. Después de que las fracturas se fusionan el esfuerzo se disipa a lo largo de dos planos mutuamente perpendiculares. El crecimiento de fracturas discontinuas es parecido al de las fracturas casi perpendiculares. Otra posible forma de crecimiento es vía la fusión de fracturas subparalelas. Las fallas tectónicas crecen con la coalescencia de fracturas grandes.

Los conjuntos transformados de fracturas tectónicas hacen variar los arreglos de los sistemas, en los cuales hay tanto fracturas que están uniéndose como fracturas que están surgiendo. Estos últimos resaltan la posibilidad de agrupar las fracturas en dos ordenes de magnitud: un grupo grande que comprende las fracturas que dejan de crecer y un grupo chico que incluye la nueva generación de fracturas grandes que crecen rápidamente. Este proceso de recurrencia genera un número de niveles de heterogeneidad en un sistema de fracturas. De acuerdo a la interacción entre fracturas, un sistema con jerarquía claramente definida comprende microfracturas, diaclasas y fallas.

Hay tres etapas de evolución de los sistemas de fracturas (Chernyshev & Dearman, 1991). La primera de ellas involucra fracturación uniforme de rocas, cuando las fracturas se originan en una roca sólida de manera independiente y simultánea. Aquí la distribución es aleatoria y su arreglo es irregular en relación a los ejes de esfuerzos principales normales. La distribución de la mayoría de los parámetros de fractura es casi homogénea. El espaciamiento entre fracturas varía conforme cambia la longitud de éstas.

En la segunda etapa las fracturas tienden a estar menos espaciadas y fusionarse. Esta etapa se caracteriza por existir las fuentes externas de esfuerzos. Hay más fracturas grandes que crecen por la coalescencia de unidades cercanas a ellas y éste es un factor importante en la formación de fallas. En esta etapa la distribución de las fracturas es afectada en un sentido estadístico por el crecimiento preferencial de fracturas cercanas entre sí y la distribución de los parámetros de fracturas se vuelve asimétrico. También aquí se incrementa la heterogeneidad del medio en una zona previamente fracturada.

La tercera etapa involucra crecimiento y fusión de fallas con su transformación a sistemas de macrofracturas. Las fallas se caracterizan por su evolución acelerada. Al unirse, principalmente las fallas mayores, aumenta un poco la heterogeneidad del conjunto de fracturas del nuevo nivel y al mismo tiempo en la roca aparecen los bloques de la falla. Un sistema de fallas en esta etapa es semiespaciado o muy poco espaciado. Surgen nuevos sistemas de fracturas debido a la energía relajada en el sistema de fallas y a otras fuentes de energía. Aquí la roca ya no es un solo cuerpo porque está dividido en dos bloques deslizados con fracturas rellenas por productos de la erosión o aplastamiento de rocas. El desplazamiento de los bloques desarrolla esfuerzos que originan nuevas fracturas de corta longitud. Estas fracturas destruyen modelos regulares de pequeñas fracturas convirtiéndose en sistemas caóticos de fracturas. Por otros procesos, como el metamorfismo, nuevos sistemas de fracturas se sobreponen a los viejos y comienzan a afectar su crecimiento u originan la primera etapa de evolución.

El principio de evolución sucesiva describe cómo se desarrollan las fracturas en diferentes etapas. A continuación se mencionan otros aspectos que intervienen en el crecimiento de las fracturas.

DESARROLLO DE FRACTURAS

En general las fracturas inician y se propagan cuando los esfuerzos llegan a ser iguales a la resistencia de la roca. Algunas posibles fuentes o mecanismos que son capaces de producir altos esfuerzos en la corteza de la Tierra son: (1) presión litostática (cambio en el peso del material rocoso sobre un punto de observación debido a sepultamiento, levantamiento o erosión); (2) presión de fluido; (3) fuerzas tectónicas asociadas con el movimiento de las placas tectónicas; (4) procesos termales (enfriamiento de rocas intrusivas y extrusivas, y el enfriamiento causado por levantamiento o erosión de la corteza); (5) impactos de objetos extraterrestres; y (6) otros procesos geológicos tales como plegamiento, actividad volcánica e intrusión salina (National Research Council, 1996). Sin embargo el proceso de fracturación de la corteza no es simple porque existen diferentes factores que intervienen en la formación de fracturas y se relacionan de maneras complejas. A continuación se hará una breve descripción de cómo surgen y se desarrollan las fracturas con la finalidad de establecer una relación entre esos factores.

ORIGEN DE LAS FRACTURAS

Para que una fractura se forme en una roca es necesario que haya pérdida de cohesión del material. Bajo ciertas condiciones externas, la roca cambia sus propiedades, lo que propicia dicha pérdida. Pero ¿de qué depende en qué parte del cuerpo rocoso habrá pérdida de cohesión del material? Según la teoría de Griffith dentro del material de una roca existen pequeñas imperfecciones, llamadas grietas de Griffith, que son puntos de debilidad de la roca donde los esfuerzos tienden a concentrarse. Esta concentración de esfuerzos ocasiona que se alcancen y se sobrepasen el límite elástico, plástico y el de rotura apareciendo finalmente la fractura.

Se sabe que la deformación puede manifestarse como cambio de volumen o de forma de una roca o ambas; en cualquiera de estos casos la deformación representa un desplazamiento de sus partículas. Al haber desplazamiento se realiza un trabajo y ese trabajo se debe a la energía acumulada en el sistema. Todas las condiciones físicas externas a la roca (como son presión y temperatura) contribuyen al acopio de energía que en algún

momento del proceso será liberada parcial o totalmente. Este relajamiento de energía que se llama energía de deformación liberada, se manifestará como deformación de la roca (Segall & Pollard, 1980).

La forma en que se origina una fractura se supone independiente de la manera en que ésta se propaga. Es decir la fractura se puede propagar por cualquiera de los tres modos básicos o por alguna combinación de ellos, pero al iniciarse la fractura siempre tiene que haber pérdida de cohesión, lo que conduce a un desplazamiento paralelo o perpendicular a sus fronteras (Atkinson, 1987).

Cuando una roca es sometida a un campo de esfuerzos, éstos provocan un desplazamiento de sus partículas que en primera instancia es elástico. Después se sobrepasa el límite elástico del material y el desplazamiento se vuelve plástico; cuando finalmente se sobrepasa el límite de rotura el desplazamiento se manifiesta en una superficie de discontinuidad donde la roca ha perdido su cohesión. Este proceso donde se origina la fractura no es tan simple porque el alcance de cada uno de los límites mencionados (elástico, plástico y de rotura) depende de las condiciones externas a la roca y de las propiedades mecánicas de la misma.

Hay dos criterios que predicen la rotura de una roca, el de la máxima energía de deformación liberada (G) y el de Mohr-Coulomb. El primero es el que relaciona los esfuerzos y la energía de deformación liberada con la fricción de deslizamiento. El deslizamiento relaja la energía acumulada por los esfuerzos en una vecindad de la fractura. Como el deslizamiento depende de la fricción, la energía de deformación también depende de la fricción (Wei & Bremaecker, 1995). El criterio de Mohr-Coulomb sugiere la aparición de la rotura donde el esfuerzo de cizalla alcanza un valor crítico, el cual depende de las propiedades internas del material (Ramsay, 1977).

Después de que la fractura se ha formado comienza una etapa de crecimiento en la que ésta se propaga de diferente forma según el tipo de esfuerzo y las propiedades del material. En el caso de las fallas, que en el contexto de este trabajo son consideradas como un tipo particular de fracturas, el esfuerzo que las ocasiona tiene una componente de cizalla que no se desvanece y que provoca el deslizamiento de sus fronteras en diferentes maneras formando tres tipos básicos de fallas.

CRECIMIENTO DE FRACTURAS

El crecimiento de las fracturas se caracteriza por una propagación paulatina de su superficie. La propagación se debe al deslizamiento, en alguna dirección, de las fronteras de la fractura a causa del relajamiento de la energía de deformación. Esto provoca que la roca pierda cohesión en diferentes direcciones. En el deslizamiento de las fronteras de una fractura están involucrados principalmente la fricción, la energía de deformación, el comportamiento del material en las zonas de proceso, la interacción con otras fracturas y la densidad de fracturas en el área fracturada. Pero para entender cómo se relacionan estos factores durante el proceso de fracturación a continuación se analizará con mayor detalle la propagación de las fracturas.

Cuando en la roca ya se inició la formación de la fractura por una pérdida inicial de cohesión, la discontinuidad comienza a crecer a partir de los extremos de la fractura inicial recién formada. La teoría del mecanismo elástico lineal de fractura señala que los esfuerzos son liberados en sus extremos vía la energía requerida para su propagación (Cowie & Scholz, 1992). Pero ¿por qué el proceso se realiza por los extremos de la fractura?

Se piensa que por los extremos de las grietas se da una fuga de la energía acumulada que aunada a la concentración de esfuerzos en esa parte, propicia su liberación, provocando un acomodo de la misma durante el desplazamiento (Goodman, 1989).

En el material circundante a la fractura existe deformación frágil la cual se concentra en una pequeña área que bordea sus extremos. En estas áreas inelásticas llamadas zonas de deterioro se generan sistemas de microfracturas de tensión que contribuyen a la propagación de la fractura mayor. El tamaño de la zona de deterioro depende del desplazamiento de la fractura (Shipton & Cowie, 2003).

En los extremos de la fractura se producen concentraciones de esfuerzos, y la deformación plástica en la zona de proceso se inicia si estos esfuerzos exceden el límite elástico del material. Entonces la fractura se extiende una distancia deformando plásticamente esta zona. La deformación continúa hasta que los esfuerzos en los extremos alcanzan el límite de rotura, en ese momento se crea un sistema de microfracturas en la zona de proceso. Cuando la densidad de microfracturas en el sistema aumenta, las microfracturas se unen y la fractura crece.

El crecimiento de la fractura se exhibe como desplazamiento de sus fronteras. Este desplazamiento se lleva a cabo con la energía que se libera en el proceso y es proporcional a la fricción que esta energía pueda vencer (Wei & Bremaecker, 1995). Al liberar la energía sólo una parte de ella se convierte en trabajo, es decir sólo una parte de esta provoca deslizamiento, el resto se pierde. Cuando la energía se disipa el deslizamiento cesa y termina la etapa de crecimiento, por lo menos hasta que se acumule en el sistema otra cantidad de energía capaz de vencer la resistencia del material al movimiento (Resnick & Halliday, 1982).

Algunas teorías (Cowie & Scholz, 1992) sostienen que, bajo condiciones idealizadas, el desplazamiento en cada etapa de deformación depende linealmente de la longitud de la fractura. Esto implica que la cantidad de energía de deformación acumulada por el sistema es proporcional al tamaño de la fractura, y entonces todos los factores que intervienen en el acopio de la energía en el sistema también dependen de este último. Se ha mencionado ya que los factores que intervienen en el proceso de fracturación están correlacionados, pero su correspondencia no tiene por qué ser lineal. Otros autores han propuesto que la relación entre el desplazamiento y la longitud de la fractura no necesariamente es lineal (Cladouhos & Marrett, 1996).

Lo que sí parece influir en un deslizamiento es la orientación de la fractura respecto al campo de esfuerzos. En un campo de esfuerzos compresivo, por ejemplo, las componentes de cizalla de los esfuerzos, que son las que provocan el deslizamiento, alcanzan su valor máximo a los 45° del máximo esfuerzo compresivo (criterio de Navier-Coulomb). Esto no quiere decir que en esa dirección se propicien las fracturas pero sí que las fracturas existentes que tengan esa orientación se vean favorecidas en su deslizamiento. Como en el deslizamiento intervienen otros factores como la fricción y la presión de fluido, la orientación del mismo se ve afectada por estos factores y en realidad el desplazamiento es favorecido a los 32° aproximadamente (Ranalli, 1995).

La interacción entre fracturas de un mismo sistema también es un factor que interviene en el crecimiento de éstas ya que puede facilitar el deslizamiento o inhibirlo. Su influencia depende de la distancia de separación entre las fracturas (Segall & Pollard, 1980) y de las propiedades del material. Si el espacio entre las fracturas es pequeño, su interacción es significativa porque esa cercanía altera el campo de esfuerzos en los extremos de otras

fracturas. La alteración que se provoca en el campo de esfuerzos depende de las propiedades reológicas del material y del campo de esfuerzos regional. Por ejemplo, en un caso de fracturas colineales sujetas a tensión uniforme, la cercanía entre éstas provocaría un aumento en la intensidad del campo de esfuerzos en los extremos de cada una de ellas que a su vez depende de su interacción elástica (Segall & Pollard, 1980), y esto podría estimular su crecimiento y quizás su unión.

En muchos casos la interacción entre fracturas no estimula su crecimiento porque el desplazamiento en una puede verse restringido por la presencia de otra. Cuando ésta se encuentran próximas y son de diferentes tamaños, la presencia de las grandes inhibe el crecimiento de las chicas (Chernyshev & Dearman, 1991). Al liberarse la energía de deformación acumulada en los extremos de las fracturas mayores, ésta circula a través de las superficies de las menores situadas junto a ellas, ocasionando que estas últimas también formen parte del deslizamiento de las mayores. Esto sucede sólo si la posición de las chicas es cercana a los extremos de las grandes. Cuando las fracturas menores se encuentran cerca de la superficie de las mayores pero no a sus extremos, la energía de deformación liberada en cada fractura menor se disipa hacia los extremos de la fractura mayor reteniendo el crecimiento de las chicas (Segall & Pollard, 1980; Atkinson, 1987).

Pero como la interacción de las fracturas depende de la distancia de separación entre estas, se piensa que existe una área de influencia, de forma irregular, alrededor de las fracturas en la cual los esfuerzos locales tienen cierto comportamiento que permite la coalescencia de fracturas. Como los esfuerzos se concentran en los extremos de las fracturas, las áreas de influencia deben tener mayor impacto en éstos, por lo que la coalescencia se ve favorecida a efectuarse por los extremos de las fracturas (Segall & Pollard, 1980).

La densidad tridimensional de fracturas también afecta su crecimiento porque afecta fuertemente la capacidad de transporte de fluidos y las propiedades mecánicas de la roca. Por ejemplo, existe un valor crítico para la densidad de fracturas en la roca, el cual si es excedido, se aumenta la capacidad de transporte de fluidos en la roca y disminuye la presión de los fluidos que las fracturas puedan contener, lo cual restringe su crecimiento (Renshaw, 1997).

DENSIDAD DE FRACTURAS

La densidad de fracturas se puede definir como el número de fracturas por unidad de área o por unidad de volumen, o como la longitud total de fracturas por unidad de área. Hay otras definiciones que involucran el cuadrado o el cubo de las longitudes para casos bi y tridimensionales respectivamente, sin existir una definición única.

Algunas parametrizaciones de la cantidad de fracturas utilizadas por Nieto *et. al.* (2003) son la intensidad, densidad y parámetro de concentración de fracturas obtenidas a partir de imágenes y las cuales están dadas por

$$FI = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{N_{tot}} l_k, \quad FD = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{N_{tot}} \frac{l_k^2}{4} \quad \text{y} \quad \chi = \mu^{-1/r} / l_{media}$$

respectivamente, donde l_k es la longitud de la k -ésima fractura, A el área de la imagen, $\mu = N_{tot}/A$, $r = 1, 2, 3$ la dimensión Euclidiana y l_{media} la longitud media de las fracturas.

En un sistema de fracturas, la densidad de grietas decrece con el incremento de longitud de las fracturas macroscópicas. Esto va acompañado de un cambio de orientación en las grietas respecto a las fracturas macroscópicas, adoptan una orientación preferencial cerca de éstas y una orientación aleatoria lejos de las mismas (Renshaw, 1997).

La densidad de las fracturas también se puede determinar con la inversión de datos sísmicos que están basados en modelos de efectos de fracturas en las propiedades elásticas de las rocas. A partir de este tipo de datos se ha observado que la densidad de las fracturas tiende a aumentar conforme se acerca a la superficie, aunque existe un límite en su densidad debido a la interacción de unidades de diferente tamaño dentro del mismo sistema. Cuando la densidad de fracturas alcanza o excede un valor crítico, la permeabilidad de la roca fracturada se aumenta debido al inicio de la percolación. Esto provoca una disminución en la presión de poro que, a su vez restringe el futuro crecimiento de las fracturas (Renshaw, 1997).

Como se vio antes, las zonas de proceso son regiones que se localizan en los extremos de las fracturas en donde se propagan. Estas regiones están afectadas por un gran número de microfracturas cuya densidad, en algún momento, alcanza un valor crítico, lo que hace que las zonas de proceso tengan un papel importante en la permeabilidad de las rocas fracturadas.

ENFOQUE FRACTAL

Las fracturas abarcan un amplio rango de escalas. Sus longitudes pueden variar desde fracciones de centímetros hasta decenas de kilómetros y este hecho es básicamente el responsable del efecto de escalamiento observado en las rocas fracturadas. Una distribución fractal de longitudes requiere que el número de éstas, mayores a una longitud determinada, obedezca una ley de potencia de longitudes. Una distribución de ley de potencia es la única que no incluye una escala característica, por lo que es aplicable a fenómenos invariantes de escala. Así como para un número específico de eventos que son estadísticamente independientes el teorema del límite central es la base para la aplicación de una distribución Gaussiana, la invariabilidad de escala constituye una base razonable para el uso de la ley de potencia, es decir la distribución fractal. Las distribuciones fractales pueden servir para cuantificar la invariabilidad de escala de los fenómenos, por lo que en la geología su aplicación tiene más fundamentos (Turcotte, 1997).

La geometría fractal es una herramienta analítica que permite identificar y cuantificar la geometría irregular de los objetos o conjuntos que se repite de una escala a otra. También ofrece un simple modo de medir el escalado y la distribución espacial total de escalas de las complejas redes de fracturas naturales y sintéticas, y es una forma de extrapolar las propiedades de las fracturas de muestras limitadas topológicamente al medio continuo.

El discernimiento cuantitativo del escalado y de la distribución espacial de las redes de fracturas, es fundamental para entender y expresar de esa manera el flujo a través de las rocas fracturadas tanto como sus propiedades. Esto se debe al hecho de que el flujo de fluidos y la deformación mecánica ocurren a todas las escalas abarcando el patrón jerárquico completo de fracturas. La distribución de las fracturas por tamaño obedece una ley de potencia, indicando que dentro del sistema abundan las fracturas pequeñas, cuya contribución al flujo de fluidos depende de su conectividad a la red de percolación completa. Cuando la mayoría de las fracturas están conectadas, la contribución de fracturas pequeñas es menos importante que la de las grandes. El comportamiento fractal de las longitudes de las fracturas nos dice cómo éstas se escalan sin especificar su contribución al flujo. El análisis de la distribución espacial y del escalamiento de los conectores dentro de

una red de fracturas permite reparar la alta o baja conductividad de ésta y habilita la participación de los segmentos de fracturas en el flujo de la red (Barton & La Pointe, 1995). Las fracturas se agrupan en conjuntos porque tradicionalmente la interpretación de su historia se visualiza en términos de la relación de fracturas a pliegues, las grandes fallas y otros rasgos tectónicos mayores. Las fracturas agrupadas en conjuntos definidos por frecuencias de orientación suprime la heterogeneidad de un sistema complejo. La posibilidad de reducir la complejidad de la representación de los patrones de fracturas por los modelos de alto orden depende de la disponibilidad de herramientas matemáticas que son útiles para esto. La geometría fractal es una de esas cajas de herramientas que permite cuantificar y modelar tanto patrones complejos en su heterogeneidad como los más ordenados (Turcotte, 1997).

A continuación se describirá la forma de muestreo adecuado para obtener una muestra representativa de roca para analizar la distribución espacial y escalado de su patrón de escalado. Además se discuten algunos rasgos del comportamiento fractal del objeto de interés que ayudarán a entender los modelos a estudiar. Posteriormente, se discuten de un modo sintetizado algunos modelos fractales de redes de fracturas que toman en cuenta diferentes características de éstas.

MUESTREO

El muestreo para el análisis de distribución espacial y escalado de fracturas en rocas se puede hacer en una, dos o tres dimensiones. El muestreo unidimensional se basa en la medición del espaciamiento entre fracturas a lo largo de superficies expuestas o en barrenos perforados en el subsuelo. El muestreo bidimensional se basa en el mapeo de fracturas expuestas a las superficies casi planas. El muestreo tridimensional requiere de imágenes obtenidas vía sensores remotos y mapeos de superficies de fracturas referidos a un volumen de roca. Para hacer el análisis fractal es necesario que las imágenes abarquen un amplio rango de escalas. Las muestras tridimensionales deben construirse por interpolación entre muestras unidimensionales muy cercanas o entre una sucesión de muestras bidimensionales paralelas espaciadas por distancias cortas y referidas a los mapas de fracturas. Aunque los patrones de fracturas obtenidos a diferentes escalas pueden presentarse en un sólo mapa,

también se puede trabajar con un mapa para cada escala de interés (Barton & La Pointe, 1995).

El tamaño finito de muestras analizadas, las limitaciones de resolución y la elección subjetiva de la región de muestreo ocasiona que muchas de las fracturas aparezcan incompletas dentro del área muestreada o que fracturas muy grandes o muy chicas sean omitidas de la misma. A esto se le conoce como efecto de muestreo. Los efectos de muestreo pueden causar perturbaciones en el análisis fractal, por lo que es recomendado tomar en cuenta su importancia durante la interpretación de los resultados para minimizar el sesgo por un muestreo ineficiente (Barton & La Pointe, 1995; Bonnet et al., 2001).

PARÁMETROS FRACTALES

Se espera que un fenómeno tenga el comportamiento fractal si es imposible describirlo en detalle con los modelos derivados de la geometría Euclidiana. Se puede decir que la geometría fractal se dedica a analizar la rugosidad de los objetos y fenómenos naturales, irregulares o fragmentados de los conjuntos (Mandelbrot, 2002).

Son tres conceptos básicos de la geometría fractal: autosimilitud, autoafinidad y multifractalidad. La autosimilitud es una propiedad de invariabilidad al cambio de escala que es propia de los fractales. Es decir, los fractales se agrupan en el espacio común Euclidiano de tal manera (heterogénea pero no aleatoria) que el patrón de la distribución de sus partes es igual o estadísticamente idéntico al original cuando estas se escalan por el mismo factor en dos direcciones principales. Por lo tanto, el grado de irregularidad o fragmentación es idéntico en todas las escalas (escalado). La autoafinidad es un caso más general que el de la autosimilitud cuando las partes del fractal se escalan por diferentes factores de diferente orden en las dos direcciones principales. La multifractalidad se refiere a un conjunto cuya dimensión es diferente en cada punto analizado. Se puede decir que un multifractal está formado por un número infinito de fractales o en otras palabras, un multifractal se puede ver como un patrón cuyos elementos básicos también son fractales (Mandelbrot, 1983).

Los dos descriptores o clasificadores básicos de los fractales son la dimensión fractal y la lagunaridad. Intuitivamente se puede referir a la dimensión fractal como una medida del

patrón de llenado del espacio por la masa que tiende a distribuirse heterogéneamente, así como de la rugosidad de las superficies, del grado de dentado de una línea, etc., de cuya irregularidad se deduce que su dimensionalidad no puede ser medida por un valor entero. Como la magnitud de la dimensión fractal está en función de los procesos físicos responsables de la formación del conjunto, se tiene que para un sólo fenómeno existen varias dimensiones fractales que caracterizan diferentes aspectos de éste y las cuales no necesariamente coinciden (Mandelbrot, 1983).

La lagunaridad de una construcción geométrica mide la invariabilidad de sus partes al traslado y caracteriza la distribución de huecos dentro un patrón geométrico. La lagunaridad es una medida estadística de la homogeneidad de la textura de ese patrón, y es igual a 1 (su límite topológico) en el caso de una distribución homogénea (Mandelbrot, 1983). La distribución fractal se describe analíticamente por medio de una ley de potencia (ver apéndice B), cuyo ejemplo más común relaciona el número N de los elementos básicos del fractal con una característica mensurable mayor que R de la siguiente manera

$$N \approx \frac{C}{R^D},$$

donde el exponente D representa la dimensión fractal del patrón. El aspecto asintótico de la relación contenida es básico para caracterizar un conjunto fractal.

Los elementos básicos de la distribución fractal se refieren a los conjuntos de datos cuyo patrón se ajusta una ley de potencia, y pueden ser las longitudes, espesores, orientaciones, temperaturas, etc., que se seleccionan como medidas básicas para describir un conjunto de manera cuantitativa (Bonnet et al., 2001).

Existen tres tipos de dimensiones que se usan comúnmente y son $D_0=D$ *dimensión de capacidad* que es la que define al objeto y no a la medida, D_1 *dimensión de información* que se refiere al grado de ocupación del espacio Euclidiano por el objeto y D_2 *dimensión de correlación* que define la interacción espacial entre las partes del objeto. Estas dimensiones son parte del espectro del objeto, el cual representa la distribución en el espacio y tiempo de los datos cuyo comportamiento se pretende describir (Bonnet et al., 2001).

Anderson et al., (1996) utilizaron la *dimensión fractal de superficie, de masa y espectral*, para analizar la estructura de varios tipos de suelos. La dimensión fractal de superficie indica la rugosidad o tortuosidad de una línea o superficie de un objeto, alcanzando valores

menores que uno para el caso de la línea y menores que dos para la superficie (Anderson et al., 1996), y es un ejemplo de dimensión de capacidad. La dimensión fractal de masa se usa para describir la heterogeneidad en la ocupación del espacio por un objeto. Esta dimensión alcanza valores menores que la dimensión topológica del espacio ocupado (Anderson et al., 1996); es decir si el objeto de interés se encuentra embebido en un plano, entonces la dimensión de masa será menor que dos, que es la dimensión topológica del plano. La dimensión de masa es un ejemplo de la dimensión de información. La dimensión fractal espectral mide propiedades mecánicas en redes fractales, es decir describe los procesos físicos contenidos en redes fractales como la percolación (Anderson et al., 1996).

Cabe aclarar que son necesarios varios conjuntos de datos que agrupen diferentes características de algún fenómeno para dar una interpretación fractal completa de su comportamiento, así como también es importante considerar los tres conceptos fundamentales de la geometría fractal en la interpretación de los resultados del análisis.

DISTRIBUCIONES FRACTALES

Un sistema de fracturas es el conjunto de éstas vistas en una superficie que puede ser de distinto origen y generación, de esta manera queda especificado que un sistema de fracturas se refiere a un perfil bidimensional. En cambio una red de fracturas es un conjunto tridimensional que no sólo las considera en un plano, sino en un volumen donde pueden ser detalladas sus orientaciones, su esparcimiento y su conectividad, entre otras cosas.

La fragmentación tiene un rol importante en muchos fenómenos geológicos, en la fracturación, por ejemplo, y advierte la iniciación de la propagación de fracturas. La propagación de fracturas es un proceso no lineal que requiere de modelos complejos para representar su configuración. La fragmentación considera la interacción entre fracturas en un amplio rango de escalas. Con la fragmentación de la corteza debida a procesos tectónicos, tiene lugar la generación de los diversos conjuntos de fracturas de diferente tamaño con ciertas características que les permiten ser representados por los conjuntos fractales. Sin embargo, hay una gran variedad de mecanismos que producen fracturación que no tienen un comportamiento fractal. El modelo de fragmentación también es aplicable a la fragmentación tectónica. En las superficies de las placas tectónicas, al evolucionar con el tiempo, se desarrollan incompatibilidades geométricas. Los bordes de las placas constan

de cordilleras oceánicas, zonas de subducción, y fallas transformantes que no pueden evolucionar en el tiempo sin desarrollar traslapes u hoyos. En consecuencia, la placa se deforma para acomodar estas incompatibilidades geométricas. Las fuerzas tectónicas quiebran la corteza continental en bloques de diferentes tamaños cuya distribución, por tamaños, tiende a ser fractal. Como estos bloques están limitados por fallas y tienen diferentes tamaños, esto indica que las fallas también tienen diferentes extensiones. De este modo podría ser que la distribución fractal de los tamaños de los bloques esté relacionada con la distribución fractal de las extensiones de las fallas (Turcotte, 1997).

La dimensión fractal de las distribuciones de longitudes de fallas puede ser calculada por diversos métodos. Las dimensiones obtenidas para los tres tipos de muestreo (1-D, 2-D y 3-D) se relacionan de la siguiente manera

$$D_3 = D_2 + 1 = D_1 + 2,$$

donde el subíndice indica la dimensión del espacio Euclidiano dentro del cual se realiza el muestreo.

Si D es la dimensión fractal para una distribución de longitudes lineales de fallas en un volumen de roca, el número de fallas N_f con una dimensión lineal característica mayor que r , en un área dada, se escala con r de acuerdo a

$$N_f = \frac{1}{r^D}.$$

Si suponemos que la falla permanece activa durante un tiempo τ_f , entonces el desplazamiento total δ de una falla de escala r está dado por

$$\delta = \tau_f r^{D-1}.$$

Esta ley de potencia describe una dependencia total del desplazamiento de la longitud de la falla, donde τ es constante para cada movimiento tectónico (Turcotte, 1997).

A partir de los desplazamientos en las fallas grandes, se puede determinar el desplazamiento de fallas pequeñas no observables usando la distribución fractal que establece la relación entre el número de fallas en función del tamaño y desplazamiento de éstas.

Se puede cuantificar la deformación ϵ en un volumen de roca V_0 con base en la relación entre el número de fallas, N_f , área de fallas, A_f , y desplazamiento total de las fallas, δ , por una simple relación

$$\varepsilon = \frac{N_f A_f \delta}{V_0}.$$

Esto indica que las fallas grandes dominan la deformación regional a la cual las fallas pequeñas no contribuyen notablemente (Turcotte, 1997).

Hay dos leyes de escalado que describen la distribución espacial y de tamaños de los sistemas de fallas. La relación entre sus exponentes fue analizada por Bour y Davy (1999) quienes obtuvieron una relación explícita y la aplicaron al modelo de falla de San Andrés.

Turcotte (1997) observó que algunas distribuciones de frecuencias de longitud de las fallas son fractales, y aunque es muy difícil cuantificarlas, porque la superficie donde se hallan es generalmente limitada, se ajustan a la siguiente ley de potencia

$$n(l) = al^{-a},$$

donde $n(l)$ es el número de fallas que tienen una longitud en el rango $(l, l+dl)$. El exponente a fija la acumulación relativa de fallas en función de su longitud l . La posición de las fallas está definida por sus centros cuya distribución espacial se supone fractal. El vínculo entre la distribución de tamaños y la distribución espacial involucra al menos la longitud de la falla y la distancia a las fallas vecinas. Una medida conveniente que puede ser fácilmente vinculada al exponente a y a la dimensión fractal, D , del sistema, es la distancia promedio (d) entre el centro de una falla de longitud l y sus vecinas cercanas de longitud mayor que l . De acuerdo a la definición de distribución fractal, el número de esferas $N(r)$ de radio r que se requiere para cubrir un sistema de aperturas del tamaño Λ debe variar de acuerdo a

$$N(r) = \left(\frac{\Lambda}{r}\right)^D,$$

donde D es la dimensión fractal del sistema.

En la teoría de los fractales, D está definido para un número grande de pequeñas esferas, es decir cuando ε tiende a cero. En práctica, para conjuntos finitos de datos, las escalas están limitadas por la distancia d entre los elementos del sistema. Si asumimos que las redes de fallas permanecen fractales después de eliminar pequeñas fallas, se puede usar esta propiedad para calcular la distancia $d(l)$ entre una falla y sus vecinas cercanas de longitud mayor que l

$$d(l) = \frac{\Lambda}{(C(l))^{1/D}},$$

donde $C(l)$ es el número de fallas más grandes que l . Para $a > 1$, $C(l)$ es dado por

$$C(l) = \int_l^{l_{\max}} \alpha l^{-a} dl \approx l^{-a+1},$$

lo cual conduce a una nueva ley de escalado, $d(l) \approx l^x$, vinculada a los exponentes a y D por medio de la relación

$$x = (a - 1) / D.$$

Esta última relación no necesariamente implica una correlación espacial entre la posición de las fallas y sus longitudes (Turcotte, 1997).

COMPORTAMIENTO DE FRACTURAS

Los sistemas y redes de fracturas pueden evolucionar paulatinamente de un patrón inicial ordenado a uno final desordenado. La complejidad de los sistemas aumenta con el tiempo conforme nuevas generaciones de fracturas se suman a las ya existentes. Las generaciones de fracturas se forman en episodios discretos, cada uno de los cuales registra un capítulo de la historia tectónica. Según Barton y La Pointe (1995), en la mayoría de los episodios de la fracturación no ocurren grandes deformaciones tectónicas, tales como plegamiento o fallamiento. La superposición de fracturas de diferente generación da origen a la interconexión entre ellas.

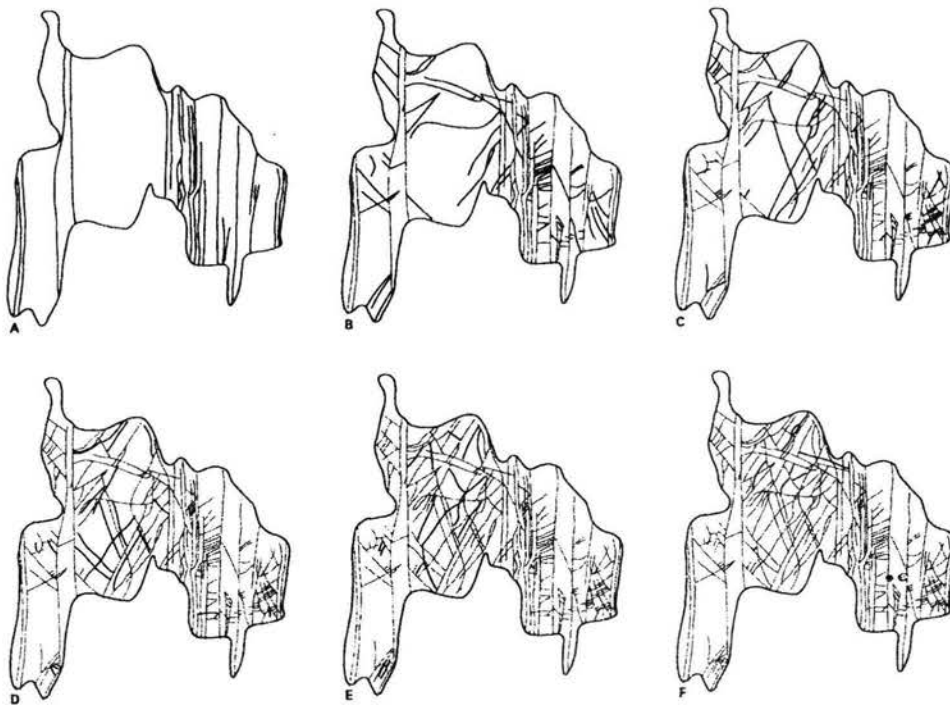


Figura 19. Fracturas agrupadas en seis relativas generaciones según sus limitaciones. A) Primera generación de fracturas; B-F) fracturas añadidas por generación (Barton & La Pointe, 1995).

El análisis, hecho por Barton y La Pointe (1995), de características de fracturas de una generación deriva el patrón de la próxima. En la primera generación de fracturas, éstas son largas, subparalelas y de pobre conectividad (Fig. 19A). En la segunda generación, las fracturas son cortas y lidian con las fracturas de la primera generación, la conectividad en el sistema aumenta, y a ángulos grandes se forman bloques poligonales (Fig. 19B). Las

fracturas de generaciones subsecuentemente más jóvenes son generalmente cortas, más diversamente orientadas, e incrementan considerablemente la conectividad del sistema (Fig. 19C-F). Las fracturas jóvenes generalmente definen bloques poligonales pequeños e irregulares limitados por viejas fracturas. Este modelo no se usa en la superposición de fallas porque las fallas jóvenes truncan a las viejas, sin embargo, la fallas de primera generación no se intersectan porque son subparalelas.

El patrón de evolución debe iniciarse nuevamente cuando minerales rellenan y “cicatrizan” las fracturas de generaciones previas. Cuando tienen lugar una o más etapas de relleno, se desarrollan patrones de alto orden con una o dos generaciones de fracturas.

La distribución espacial de fracturas en un sistema, evoluciona conforme nuevas fracturas se suman a ésta. La dimensión fractal de un sistema se incrementa con la adición de cada generación sucesiva de fracturas. Esto conduce a que los sistemas de fracturas con el tiempo exhiban un comportamiento multifractal (Fig. 19).

El flujo de fluidos a través de un sistema o una red de fracturas requiere de que éstas tenga conectividad. La conectividad de medios fracturados se ha estudiado por medio de los modelos de percolación. Una importante propiedad de los modelos de percolación es el umbral de percolación abajo del cual la conectividad está confinada a una región finita (Fig. 20a) y sobre el cual la conectividad se extiende a través del medio (Fig. 20b-c). El umbral de percolación depende de la topología del sistema y de su dimensión Euclidiana. En los sistemas concernientes a la teoría de percolación, el contraste entre los elementos permeables e impermeables se atribuye a las propiedades de conectividad que tiene consecuencias cruciales sobre las propiedades de transporte. Como las fallas son las vías principales para fluidos en las rocas cristalinas de muy baja permeabilidad, la aplicación de la teoría de percolación a redes de fallas es muy importante, al menos para caracterizar sus propiedades de conectividad. Se requiere de una adaptación de la teoría de percolación a la geometría de redes de fallas para definir sus propiedades físicas globales, y en particular el umbral de percolación.

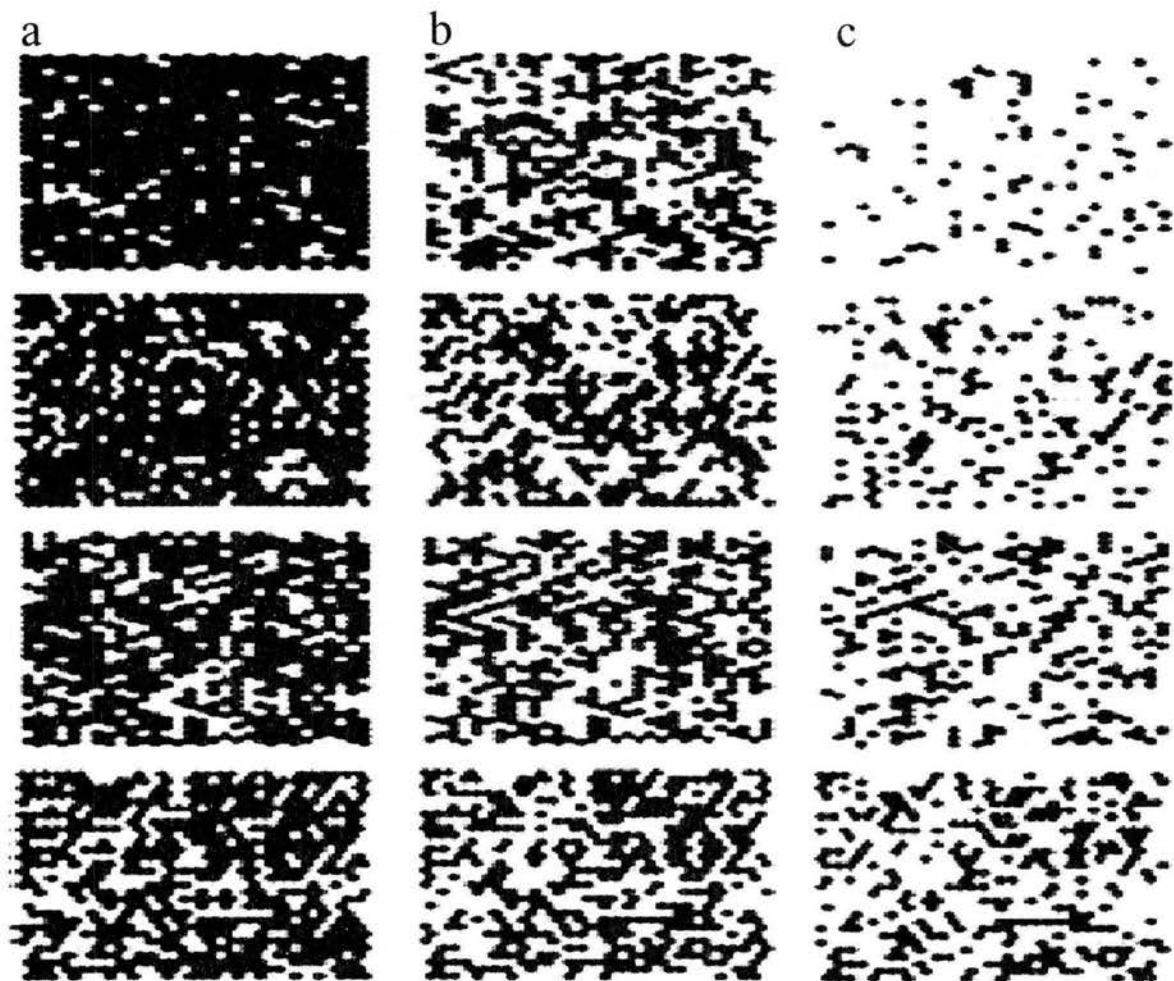


Figura 20. El umbral de percolación coincide con el valor crítico de la conectividad de los poros, derivado de su contenido porcentual dentro del sistema y sus características geométricas. a) Comúnmente la conectividad, y por ende el umbral de percolación, es confinada a una región finita. b-c) Sobre el umbral de percolación la conectividad se extiende a través del material (Peitgen, Jürgens & Saupe, 1997).

EVOLUCIÓN DE FALLAS

Las fracturas son la respuesta a un campo de esfuerzos, remoto o local, impuesto sobre un cuerpo rocoso frágil-elástico. Como ya se ha mencionado, en el contexto de este trabajo las fallas son consideradas como un tipo particular de fracturas. Los tamaños de éstas pueden variar de centímetros a kilómetros y presenta desplazamiento paralelo a sus fronteras, llamadas paredes. El movimiento registrado en las fallas ayuda a describir la evolución de la deformación del cuerpo en el que está presente la falla porque una gran variedad de estructuras se asocian a ella y permiten discernir este proceso evolutivo. Muchas de las fallas conocidas se encuentran expuestas a la superficie de la Tierra, por lo que es imposible que el hombre no se vea afectado por las consecuencias que éstas puedan acarrear, como son los derrumbes y sismos. Debido a lo anterior, la investigación acerca de las fallas es de especial interés para el hombre.

Las fracturas observadas en la superficie y en el subsuelo evidencian los eventos tectónicos. La interpretación de estas evidencias se apoya en el hecho de cómo se entienden los procesos de fracturación, específicamente aquellos que establezcan la relación entre la geometría de las fracturas y la correspondiente carga tectónica (Wei & Bremaecker, 1995). De aquí surge la importancia de la creación de modelos que describan la evolución del proceso de fracturación contestando las preguntas: cómo, cuánto y por dónde debe crecer una fractura.

Los modelos son simulaciones de los fenómenos naturales que idealizan las condiciones en las que se suscitan estos últimos; por ejemplo muchas de ellas parten de la suposición que un cuerpo rocoso es un medio continuo. La veracidad del modelo depende, entre otras cosas, de que las condiciones de frontera asemejen lo más fielmente posible los efectos del tamaño finito de las rocas (Beltrami, 1998).

En el desarrollo de un modelo, es importante tener en cuenta que si la masa de la Tierra es finita entonces la masa de cualquier cuerpo rocoso que en ella resida también será finita. Esto quiere decir que las fuerzas que provocan la fracturación de las rocas se propagan a través de un medio finito y cualquier deformación que se deriva de estas fuerzas también depende de la cantidad de material que se esté deformando. El tiempo en el que las fuerzas deformantes actúan sobre el cuerpo también es finito y este hecho también influye en la

deformación resultante. Las condiciones de frontera dentro del modelo son suposiciones en relación al tiempo y espacio que pretenden representar y simplificar estas circunstancias reales para el fenómeno modelado. Muchas veces las condiciones de frontera simplifican tanto el suceso natural que el modelo se vuelve una forma idealizada del mismo.

Otro aspecto que ayuda a simplificar la modelación de los fenómenos naturales, los cuales son muy complejos (como el de la fracturación de las rocas), es la restricción de éstos al caso bidimensional. En la representación bidimensional de fallas, éstas son sustituidas por secciones transversales, cuya geometría es bastante compleja y las cuales están constituidas por numerosos segmentos discretos de diferente longitud y orientación que pueden intersectar o interceptar a segmentos adyacentes (Segall & Pollard, 1980).

Independientemente del enfoque del modelo de fracturación, el proceso de desarrollo de fracturas es el mismo y las simplificaciones hechas a lo largo de la modelación permiten visualizar sus diferentes etapas, así como entender el porqué de su complejidad.

Cowie y Scholz (1992) piensan que la formación y crecimiento de una falla se da en forma gradual y continua (en un sentido de tiempo promedio) debido a la carga de un constante y remoto campo de esfuerzos que actúa a través de una región deformada. En cada etapa de crecimiento de la falla su superficie de discontinuidad se aumenta por deslizamiento hacia los extremos de la misma, y deja de crecer cuando se disipa la energía de deformación.

El modelo de fracturación propuesto en el presente trabajo está enfocado a la propagación de fallas la cual se da en un régimen de esfuerzos compresivos (modo II). Con el fin de simplificar el modelo, el caso se ha restringido a dos dimensiones. Como el desplazamiento se da a través de la superficie de discontinuidad y ésta ha sido remplazada en el caso bidimensional por una línea, el crecimiento de las fallas está representado por el aumento de longitud de esa línea.

Con el objeto de sustentar el desarrollo del modelo aquí propuesto, a continuación se presenta un esquema general de evolución de fallas, entendido como origen, crecimiento e interacción-saturación de las mismas, y que resume lo expuesto anteriormente.

El movimiento de la corteza terrestre ocasiona que fuerzas actúen a través de ella provocando su deformación. Debido a la heterogeneidad de la corteza, las fuerzas que se generan de su movimiento son heterogéneas y su propagación a través de las rocas las deforma de diferente manera. La deformación que se produce en la corteza depende tanto

de las fuerzas heterogéneas que en ella actúan como de las características de cada parte deformada.

Las fallas son el producto de esfuerzos remotos con componentes de cizalla significativos que provocan deformación frágil sobre las rocas. Cuando estos componentes de cizalla son mayores a la resistencia al movimiento del material de la roca, ésta se rompe en dos partes llamadas bloques que se deslizan una sobre la otra (Fig. 21). De acuerdo al tipo de deslizamiento que tenga lugar en los bloques, las fallas pueden clasificarse como normales, inversas o laterales.

Las fallas se originan cuando se pierde la cohesión de las rocas en algunas zonas de debilidad, llamadas grietas de Griffith, y se propagan según el modo II. El deslizamiento ocasionado por este tipo de propagación, para el caso de las fallas, debe ser significativo al grado de hacer notar la división de la roca en dos bloques. Si los esfuerzos siguen actuando, en el material de la roca se acumula energía elástica. Esta energía busca un camino para disiparse por lo que se acumula alrededor de la falla ya que la superficie de ésta es ahora una frontera del material. Como la parte más débil de esta nueva frontera es la que facilitará la disipación de la energía, ésta se concentra en los extremos de la falla, finalmente se libera y provoca el desplazamiento de los bloques.

La resistencia al deslizamiento es mayor en los extremos de la falla cuando ésta apenas comienza a formarse, pero cuando ya está bien desarrollada la resistencia decrece relativamente conforme se acumula el desplazamiento en la superficie de la falla. Como el desplazamiento hacia los extremos de la falla tiende a cero, la resistencia al deslizamiento de éstos debe aproximarse a la resistencia de la roca circundante.

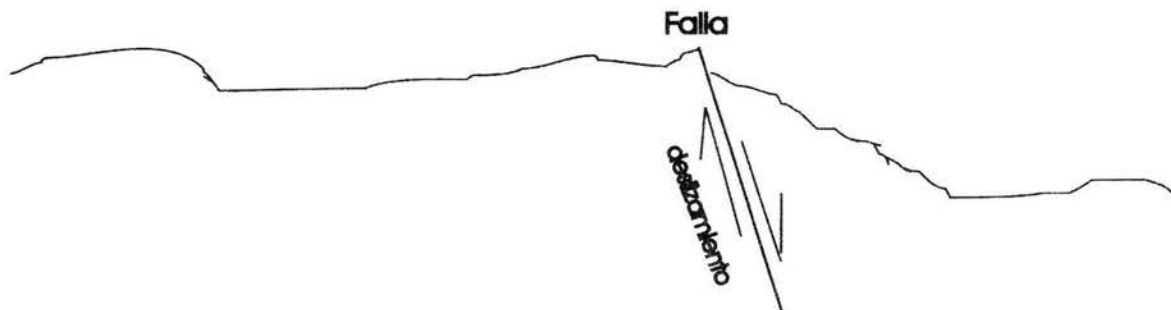


Figura 21. Falla: discontinuidad plana entre dos bloques de roca que han sido desplazados uno encima del otro, en una dirección paralela a la discontinuidad.

Según Cowie y Scholz (1992) el desplazamiento de la falla en cada etapa de crecimiento depende linealmente de la longitud de ésta. La cantidad de desplazamiento está controlada por la cantidad de energía de deformación liberada, por lo que la energía de deformación también está en función lineal de la longitud de la falla. En consecuencia el tamaño de las zonas de proceso alrededor de los extremos de la falla también depende de manera lineal de la longitud de ésta. Sin embargo, debido a la cantidad de restricciones impuestas en los experimentos que fundamentan su trabajo, se piensa que para el caso general de crecimiento de fallas el desplazamiento en cada etapa de crecimiento no necesariamente depende de manera lineal de la longitud de la falla (Cladouhos & Marrett, 1996), aunque pueda darse este caso bajo ciertas condiciones.

Las zonas de proceso aumentan de tamaño y cambian de posición en cada etapa de crecimiento. Al ir creciendo la falla, las zonas de proceso se recorren a los extremos de la falla recién crecida y van formando una zona de deterioro alrededor de la falla final. En la formación de la zona de deterioro contribuyen los esfuerzos y la energía de deformación que ahí fluye. Esta zona en general está formada por bandas de deformación frágil cuya densidad de deformación y espesor aumentan conforme se acumula el desplazamiento en la superficie de la falla (Shipton & Cowie, 2002).

Cuando la densidad de deformación en la zona de deterioro aumenta, ésta alcanza un valor crítico, entonces en esa zona se forman fallas secundarias y la superficie de la falla principal se conecta con ellas y adquiere una geometría compleja. La unión de las fallas depende, entre otras cosas, de su cercanía, de la naturaleza de los campos de esfuerzo local y regional, así como de su orientación respecto a este último, porque esto puede facilitar el deslizamiento o incrementar la resistencia a él. Si las fallas se unen, el mecanismo de deformación puede cambiar debido a la migración de fluidos y a la mineralización (Shipton & Cowie, 2002).

De la repetición del proceso de formación y crecimiento de las fallas a diferentes escalas puede derivarse el comportamiento fractal de algunos atributos de los sistemas y redes de éstas. Por ejemplo el espaciamiento entre fallas de un mismo sistema puede a veces ser descrito mediante una ley de potencia cuando la cantidad de espaciamientos aumenta conforme disminuye su tamaño. En muchas ocasiones la distribución de las fallas en el espacio es aleatoria mientras la distribución de longitudes puede tener similitudes

estadísticas con los patrones fractales. La conectividad del sistema que depende, entre otras cosas, de las propiedades geométricas de las fallas también puede presentar un comportamiento fractal. Hay otras características de las fallas que también pueden ajustarse a una ley de potencia, como son los desplazamientos, aberturas, densidad, rugosidad entre otros. No es que en un sistema de fallas todas sus características presenten este comportamiento al mismo tiempo ni con la misma ley de potencia pero si alguna lo hace, aquellas que estén correlacionadas con ésta posiblemente también presentarán un comportamiento similar (Turcotte, 1997; Barton & La Pointe, 1995).

Todas estas características de las fallas varían de una roca a otra debido a la diversidad de materiales que las constituye. Esto conduce a una gran dificultad para plantear un patrón general y detallado de crecimiento de fallas. Por esta razón se construyen modelos que describen el mecanismo de fracturación considerando sus características cuantificables bajo condiciones específicas que restringen y simplifican su desarrollo.

AUTÓMATAS CELULARES

Un autómata celular es un emplazamiento discreto que almacena de manera temporal una configuración numérica que describe las características de algún fenómeno (Margolus, 1984).

En cada paso discreto de tiempo el autómata celular cambia su configuración mediante una regla. La regla está en función de los valores anteriores de cada emplazamiento y de la misma configuración numérica, y se aplica iterativamente a lo largo de la modelación. Dicho de otra forma un autómata celular es un arreglo discreto de sitios que adquieren un conjunto finito de valores, los cuales evolucionan en pasos discretos de tiempo. La evolución de los valores de cada sitio discreto se da de acuerdo a una misma regla determinística. Las reglas de evolución de un sitio determinado dependen sólo de una región local de sitios en su alrededor (Wolfram, 1983; Margolus, 1984).

Con las reglas de evolución determinadas, en cada paso discreto de tiempo se resuelve la configuración de los valores de cada sitio, la cual puede describir las características de algún fenómeno en ese momento. Esto es equivalente a resolver la ecuación diferencial que describe los cambios en el mismo fenómeno. Al igual que en las ecuaciones diferenciales,

en los autómatas celulares deben ser considerados los problemas acarreados por los efectos de frontera, pudiendo minimizarlos con las mismas reglas de evolución. Algunos ejemplos de los fenómenos que se han modelado con autómatas celulares son el flujo térmico, las deformaciones frágil, plástica y elástica, los sistemas económicos y sistemas evolutivos entre otros (Wolfram, 1985).

Para la modelación del proceso de fracturación, en el presente trabajo se ha propuesto una versión computacional de la evolución de las fallas fundamentada en la programación orientada a objetos. En esta versión, los autómatas celulares consisten en los emplazamientos propiciados por los objetos que representan las longitudes y orientaciones de las fallas. Las longitudes incrementan su magnitud en cada etapa de crecimiento y aunque las orientaciones no cambian, éstas se consideran para determinar cuánto debe aumentarse cada longitud.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La elaboración de un modelo para algún fenómeno tiene que partir de los rasgos de éste que contribuyan a una caracterización más simple del mismo. En el caso de la modelación de la deformación frágil en las rocas, es posible tomar en cuenta el desplazamiento propiciado en cada etapa de crecimiento para describir la evolución de las fracturas. El desplazamiento de las fronteras de una fractura es parte de la deformación resultante (Wei & Bremaecker, 1995). Por medio de algunas pruebas de laboratorio se ha determinado que la relación del desplazamiento con la longitud de la falla es lineal. Pero para un caso general, es decir sin referir a las propiedades de un material en particular y a los efectos de tamaño finito de las muestras analizadas, Cladouhos y Marrett (1996) han propuesto relacionar el desplazamiento D con la longitud L de la falla vía una ley de potencia

$$D \propto L^n .$$

Se ha aceptado que la distribución de las longitudes de las fallas de un sistema sigue una ley de potencia de la siguiente forma

$$N(l \geq L) \propto \left(\frac{L}{L_{\max}} \right)^{-C} ,$$

donde L_{\max} es la longitud de la falla más grande en el sistema y N es el número de fallas con longitud mayor o igual a L (Cladouhos & Marrett, 1996). La gráfica que relaciona las longitudes l con el número de fallas N en un plano log-log ajusta los datos a una línea recta con pendiente $-C$ (Apéndice B).

Como el desplazamiento es un parámetro difícil de medir en un sistema de fallas, por ser este representado por una imagen bidimensional que consta sólo de las secciones transversales de las fallas, es conveniente utilizar para el modelo sólo la longitud de esas secciones y a la cual se le refiere como longitud de la falla. Si la longitud de las fallas está relacionada con el desplazamiento por una ley de potencia, entonces el incremento de la longitud de ésta en cada etapa de crecimiento se relaciona de alguna manera con el desplazamiento, y también está relacionada con la longitud de la falla antes del crecimiento mediante una ley de potencia.

$$\Delta L = \lambda L_i^F ,$$

donde ΔL es el incremento en la longitud, L_i la longitud antes de la etapa de crecimiento y λ y F son constantes.

El modelo de crecimiento de fallas propuesto por Cladouhos y Marrett (1996) establece la ley de potencia anterior para un modelo geométrico de crecimiento de fallas horizontales. Este modelo parte de una población de fallas con la misma longitud inicial distribuidas en forma aleatoria dentro de un plano cuadrado de lado fijo. En cada etapa de crecimiento las fallas crecen a razón de ΔL alcanzando una longitud final $L_f = L_i + \Delta L$.

Ahí la interacción de las fallas está condicionada por una zona de influencia de forma circular cuyo radio también está relacionado con la longitud de la falla por medio de una ley de potencia

$$r_{\max} = kL^F .$$

Las zonas de influencia se localizan en los extremos de las fallas y si el extremo de alguna falla vecina se encuentra dentro de la zona de influencia de la otra, estas coalescen y la longitud de la nueva falla que se forma será igual a la suma de las longitudes de ambas fallas.

Este modelo asume un campo de esfuerzos compresivos y limita los efectos de frontera cerrando la superficie por los lados perpendiculares a las fallas.

Con la versión computarizada de este modelo, aplicada a poblaciones de fallas sintéticas con las características antes descritas y con valores variables para λ , F y k , se han generado resultados que demuestran que a partir de una distribución homogénea de fallas se puede obtener una distribución de longitudes de fallas con comportamiento fractal si cada etapa de crecimiento se ajusta a una ley de potencia. Por supuesto que la coalescencia de fallas también es importante en el establecimiento de la ley de potencia y quizás contribuya en el equilibrio de esta ley si se relaciona con la generación de fallas secundarias (Cladouhos & Marrett, 1996; Cowie & Scholz, 1992).

A pesar de la simpleza del modelo, éste muestra adecuadamente la importancia de la naturaleza de la correlación de las características de las fallas para que asuman un comportamiento fractal.

Debido a la naturaleza de los modelos que aproximan este tipo de fenómenos, parece imposible tomar en cuenta todos los factores que intervienen en él. Por ejemplo si se quisiera describir el crecimiento de las fracturas, esto resultaría más fácil y comprensible si

cada fractura es representada como una formación lineal sin considerar la rugosidad de sus fronteras. Sin embargo, a pesar de que la reducción del número de elementos utilizados en la descripción del fenómeno ayuda a su entendimiento, cualquier simplificación aleja el modelo de la realidad.

Otro de los motivos por el cual ciertos aspectos se descartan de los fenómenos durante su modelación, es la diversidad del origen de los mismos. En el caso de las fracturas, por ejemplo, el tipo de propagación que sigue el patrón durante su evolución depende de la naturaleza del campo de esfuerzos, el cual es diferente para cada caso particular, lo que impide la elaboración de un modelo universal.

En consideración a lo anterior, el presente trabajo se limitó a desarrollar un modelo de evolución para un solo tipo de fracturas: las fallas; que surgen bajo un régimen de esfuerzos compresivos y que se propagan de acuerdo al modo II.

Si bien no se pretende hacer un modelo global de la evolución de fracturas, sí se planea construir uno que generalice el crecimiento longitudinal de las fallas, sin depender del tipo de material en particular y que reúna el mayor número posible de factores cuya interacción al proceso de fracturación se conoce hasta el momento.

Como punto de partida para la modelación planteada se tomó el modelo propuesto por Cladouhos y Marrett (1996) descrito anteriormente. Este modelo acepta que una población homogénea de fallas cuyas longitudes crecen de acuerdo a una ley de potencia, alcanza una distribución fractal después de determinado número de etapas de crecimiento. La pregunta es que si una población de fallas de diferente longitud y distribución aleatoria, que sigue las mismas reglas de crecimiento propuestas por estos autores también puede concluir, después de un cierto número de etapas de crecimiento, en una distribución fractal. Además, si se tomaran en cuenta algunos otros factores como la fricción, la orientación de cada falla respecto al campo de esfuerzos, la densidad de la población de fracturas ¿en qué resultaría la distribución de estas longitudes de fallas? En el caso de llegar a una distribución fractal, ¿cuál de todos estos factores sería el que determine dicho comportamiento? o ¿es posible que todos los factores contribuyan?

En el presente estudio, con base en el modelo geométrico de Cladouhos y Marrett (1996) se pretende construir otro modelo que describe la evolución del crecimiento de las longitudes de las fallas en general, es decir para poblaciones de fallas con cualquier orientación y

longitud. En cada etapa de crecimiento, este nuevo modelo tomará en cuenta la orientación de las fracturas respecto al campo de esfuerzos para controlar el incremento de longitudes bajo ciertas condiciones de frontera. A partir del nuevo modelo se intenta mostrar que la evolución longitudinal de una población homogénea de fallas, condicionada por su orientación respecto al campo de esfuerzos, concluye en una distribución fractal de sus longitudes.

METODOLOGÍA

Para analizar la modelación planteada, es necesario entender cómo son las relaciones entre los factores que intervienen en el proceso de fracturación para determinar su interacción dentro del modelo y entonces conocer los efectos que produce cada uno de ellos sobre el fenómeno que se está modelando. Por ejemplo, de la relación que existe entre la presión, la temperatura y algunas propiedades reológicas del material, se tiene que la temperatura es proporcional a la presión (Resnick & Halliday, 1982), es decir si la presión decrece la temperatura también y a temperaturas bajas la elasticidad del material disminuye lo que conduciría a una deformación plástica-frágil.

Con el fin de conocer los efectos que el campo de esfuerzos, la coalescencia de fracturas y algunos otros factores que intervienen en el proceso de fracturación producen sobre el crecimiento de las fallas, la construcción del modelo se ha dividido en varias etapas. En la primera, que es la que se discute en el presente trabajo, sólo se considera la influencia de un campo de esfuerzos regional en la distribución de las fallas y se determina cuál es su contribución a la distribución de la deformación resultante.

Este modelo describe el crecimiento de las fracturas que se forman bajo un campo de esfuerzos compresivos y las cuales se propagan de acuerdo al modo II. También se considera una población ya existente de estas fracturas, las cuales se supone que se originaron de acuerdo a la teoría de Griffith y donde ya el tipo de propagación es visible, es decir considera una población de fallas de longitudes pequeñas. Las orientaciones de estas fallas son aleatorias.

Para disminuir los efectos de tamaño finito del material se propuso cerrar la superficie donde las fallas yacen, asemejándola a superficie infinita. El tiempo en que los esfuerzos que ocasionan la fracturación se mantienen vigentes se considera finito, de modo que las etapas de crecimiento comienzan cuando las fallas ya existen y terminan cuando éstas alcanzan una cierta longitud.

Como en el modelo lo que se pretende es analizar la contribución de un campo de esfuerzos compresivos a la distribución de la deformación frágil, se ha fijado una dirección para el esfuerzo principal compresivo máximo y el crecimiento de las fallas se ha ponderado a su dirección respecto a este esfuerzo máximo.

El análisis del crecimiento de las fallas se hizo con base en su longitud, cuyo incremento en cada etapa de crecimiento sigue una ley de potencia (Cladouhos & Marrett, 1996)

$$\Delta L = \lambda L_i^F .$$

Para poder dar seguimiento a la ponderación del crecimiento según la orientación de las fallas respecto al esfuerzo compresivo máximo, se decidió comenzar con fallas de igual longitud. El crecimiento se ponderó en concordancia con el criterio de Navier-Coulomb que establece que el máximo esfuerzo de cizalla, que es el que provoca el deslizamiento de las paredes de las fallas, ocurre a los 45° del máximo esfuerzo compresivo. Cabe aclarar que no se consideró la fricción existente en el deslizamiento de las paredes de las fallas, por lo que la dirección de 45° para el máximo esfuerzo de cizalla no se vio afectada.

Como ya se mencionó, en este trabajo se presenta un modelo bidimensional de la evolución longitudinal de fallas en función de su orientación respecto al campo de esfuerzos, por lo que la coalescencia, generación de nuevas fallas, densidad de fallas, fricción, energía de deformación, presión, temperatura y propiedades reológicas del material no son consideradas.

MODELO DE CRECIMIENTO

El modelo describe el crecimiento de las fallas en función de su orientación respecto al máximo esfuerzo compresivo. El máximo esfuerzo compresivo se sitúa *a priori* en líneas horizontales que intersectan de lado a lado al plano cuadrado original que contiene las fallas.

La evolución del crecimiento de fallas se modela vía un programa computacional, el plano que las contiene es representado por un área cuadrada cuyo lado tiene una longitud de 650 unidades. La longitud del lado de este plano se tomó de manera arbitraria, esto quiere decir que no tiene ningún significado físico. El programa genera poblaciones sintéticas de fallas distribuidas aleatoriamente en el plano de 650 unidades cuadradas. Las fallas generadas son representadas por segmentos de rectas que tienen una longitud inicial diferente de cero. Se decidió visualizar las fallas mediante segmentos de líneas rectas para eliminar la influencia de la rugosidad de éstas ya que en este modelo sólo es de interés el incremento en la

longitud, y sus orientaciones están dadas por el ángulo que forman estos segmentos con la horizontal.

Las etapas de crecimiento también están definidas por el usuario y en cada una de ellas, la longitud de cada falla crece de acuerdo a la siguiente ley de potencia propuesta por Cladouhos y Marrett (1996)

$$\Delta L = \lambda L_i^F .$$

Es claro que si a una población de rectas de la misma longitud se les aplica la misma regla de crecimiento, las rectas crecerán, sin importar su orientación, en la misma razón.

Como lo que se pretende en el presente estudio es determinar la influencia de la orientación de las fallas respecto al campo de esfuerzos, se introdujo una función de ponderación del crecimiento que depende de la orientación de las fracturas.

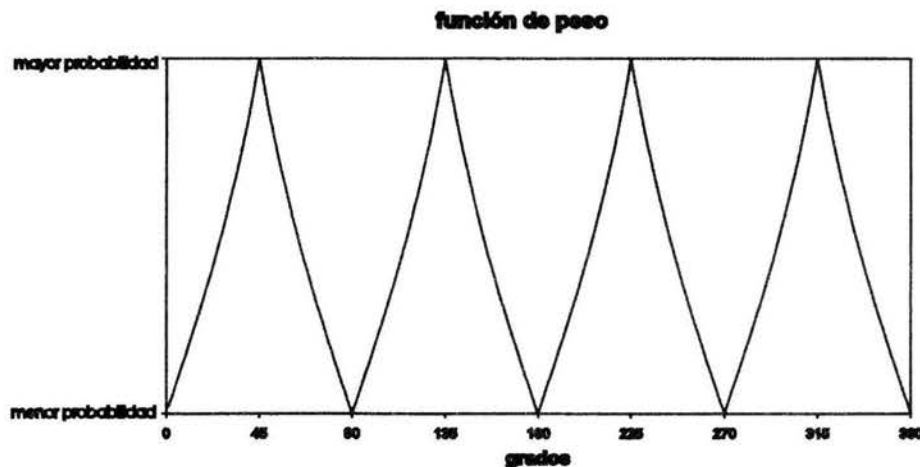


Figura 22. Función de peso que concede un valor máximo de crecimiento en las direcciones de 45, 135, 225 y 315° y un valor mínimo a los 0, 90, 180 y 270°.

Para esto se consideró que las fallas surgen en un campo de esfuerzos compresivos y que precisamente los componentes de cizalla de los esfuerzos ahí existentes son los responsables del desplazamiento observado en las paredes de las fallas que las caracteriza. Estos esfuerzos de cizalla, como ya se ha mencionado, alcanzan su valor máximo en una dirección de 45° respecto al máximo esfuerzo compresivo que para este caso tiene una orientación horizontal. Con base en lo señalado se propuso ponderar la regla de crecimiento vía una función que concediera un valor máximo de crecimiento a las direcciones de 45, 135, 225 y 315° y valores mínimos a los 0, 90, 180 y 270°.

Esta función de peso controla entonces la probabilidad de crecimiento en cada dirección, otorgando a los 45, 135, 225 y 315° la mayor probabilidad y en 0, 90, 180 y 270° la menor (Fig. 22). Con el propósito práctico se consideran como mismas las direcciones 0 y 180°, 45 y 225°, 90 y 270° y 135 y 315°. Esto reduce nuestra función de peso a dos periodos de 0 a 90 y de 90 a 180 grados, pero la función también se puede reducir a un sólo periodo si las direcciones de 91 a 179° se consideran como opuestas de las de 1 a 89°, es decir de -1 a -89°.

La función trigonométrica tangente del ángulo evaluada en 45° da un valor de 1 y decrece para los ángulos menores a 45°. Por esta razón se propuso a esta función como función de peso en el intervalo 0-90°. Como la tangente crece para los valores mayores a 45°, de 46 a 90° se convino tomar la tangente de 90° menos el ángulo en cuestión. Esto da como resultado un reflejo de la tangente evaluada en el intervalo 0-45° y la Figura 23 muestra su representación gráfica.

La función de peso $W(x)$ está dada por la ecuación

$$W(x) = \begin{cases} \tan(x) & 0 \leq x \leq 45 \\ \tan(90 - x) & 45 \leq x \leq 90 \end{cases}$$

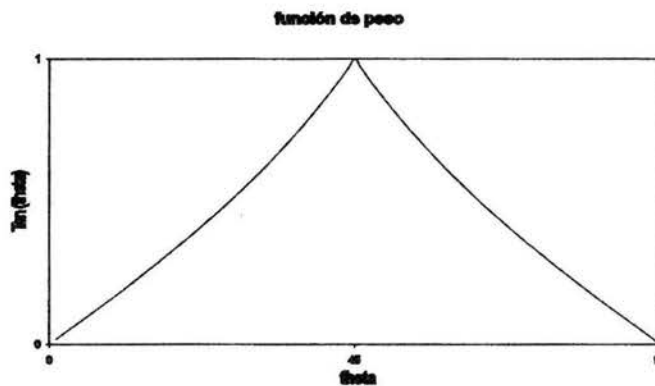


Figura 23. Función de peso restringida al intervalo 0-90°.

donde x es la orientación de la falla. Como el incremento de longitud se da en la misma razón en ambos extremos de la falla, Δl se multiplica por un factor de $\frac{1}{2}$ y representa el incremento de longitud en uno de los extremos de la falla, quedando la expresión de la siguiente forma

$$\Delta l = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda^F \cdot \tan(|\theta|) & 0 \leq |\theta| \leq 45 \\ \frac{1}{2} \lambda^F \cdot \tan(90 - |\theta|) & 45 \leq |\theta| \leq 90 \end{cases}$$

Para reducir los efectos de frontera del plano finito dentro del cual crecen las fallas, se decidió generalizar la condición de frontera propuesta por Cladouhos y Marrett (1996). Estos autores al tener sólo fracturas horizontales, cerraron la superficie cuadrada por los lados perpendiculares a las fallas como si éste fuese un tubo (Fig. 24A). Para el modelo aquí propuesto, en el que las fallas tienen orientaciones aleatorias, la superficie se cerró uniendo los lados opuestos como si fuese un toroide (Fig. 24B). Esto no quiere decir que la superficie de fracturación es un toroide sino que las fallas que crecen en el plano lo hacen como si estuvieran en él. Por ejemplo si se tienen una fractura situada en la esquina inferior izquierda del plano, ésta al cabo de algunas etapas de crecimiento, reaparecerá en la esquina superior derecha (Fig. 25)

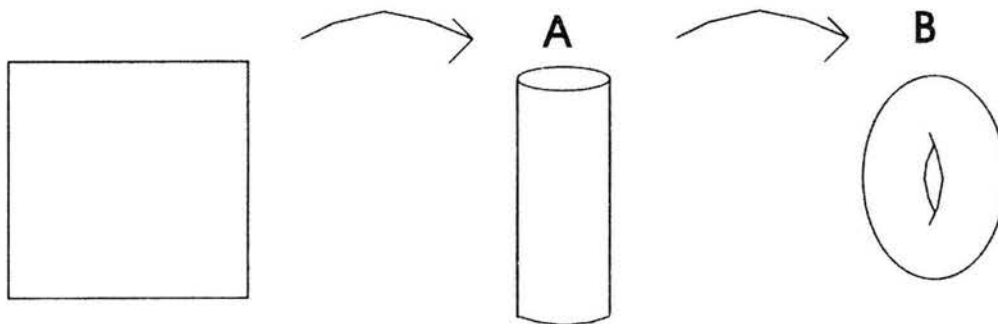


Figura 24. Construcción de un toroide a partir de un cuadrado: **A** unión de dos lados opuestos para formar un cilindro o tubo, **B** unión de las dos orillas del tubo para cerrarlo y formar una dona, cuya superficie de ésta es conocida como toroide.

Se hace la aclaración de que en realidad no se tiene un toroide, sino que a partir del homeomorfismo existente entre un plano cuadrado y él (ver apéndice C), se elimina la frontera del plano para que las fallas, representadas por segmentos de rectas, crezcan como si estuvieran dentro de un plano infinito. La ventaja de hacer esta similitud con el toroide radica en que la orilla del plano es eliminada sin la necesidad de transformar las coordenadas que describen las fallas en él.

Lo anterior no elimina por completo los efectos de frontera en el modelo, debido a que las fallas (o segmentos de recta) tienen una longitud inicial y éstas dejan de crecer cuando

alguna de ellas alcanza la longitud máxima igual al lado del plano. Además cada falla es por sí sola una frontera del plano.

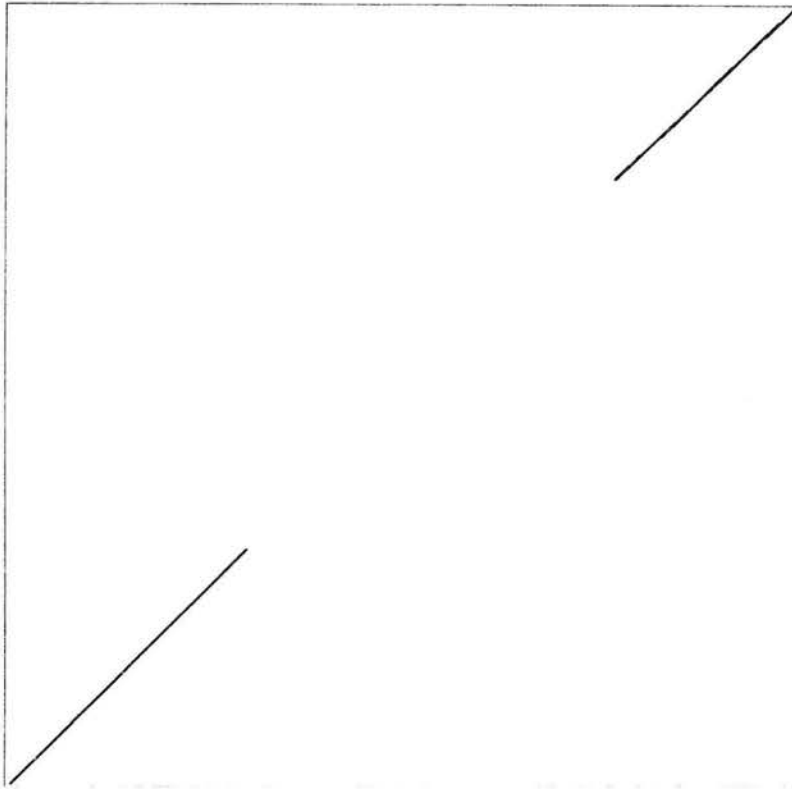


Figura 25. Apariencia de una fractura que ha crecido en una superficie homeomorfa a un toroide. Si la superficie se cierra para formar el toroide, la línea aparecerá como continua.

DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

El programa computacional (ver apéndice D) en el que se ha implementado el modelo arriba descrito, tiene un ambiente gráfico que consiste de tres ventanas con pestañas que permiten el acceso a éstas, en cada una de ellas se desarrollan diferentes aspectos del modelo.

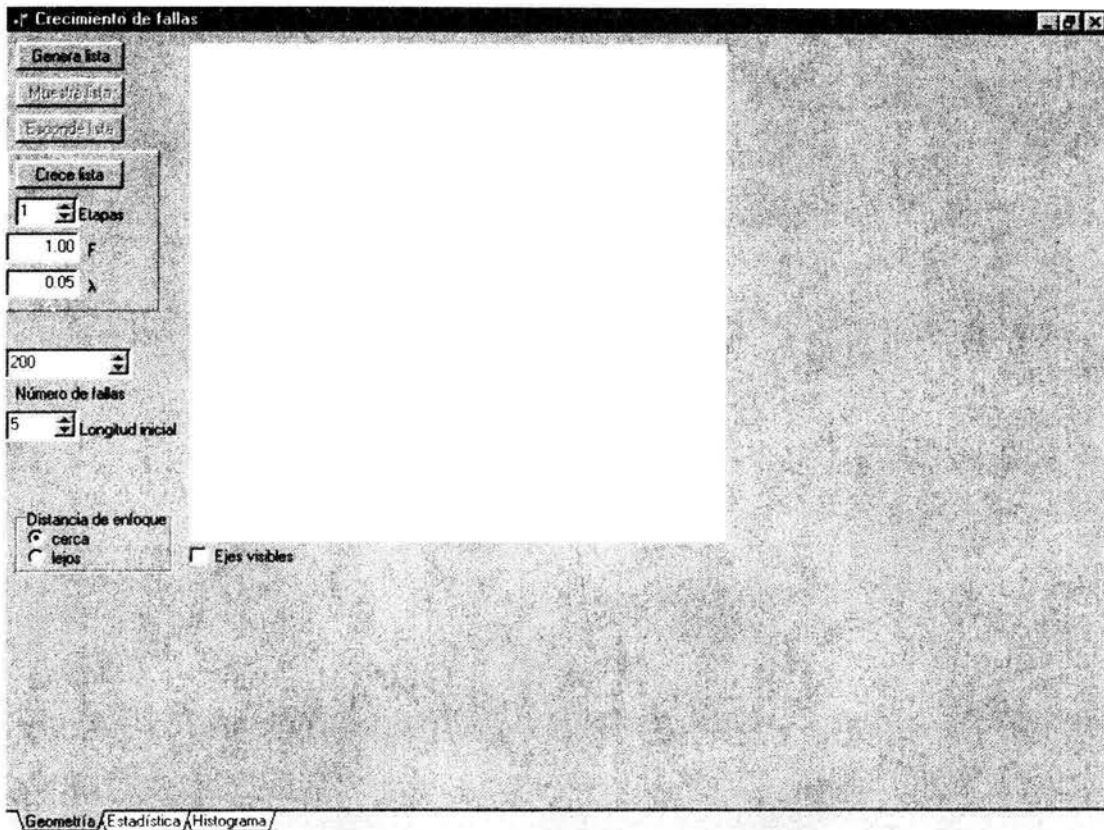


Figura 26. Apariencia gráfica del programa que implementa el modelo de crecimiento. Consta de tres ventanas, la primera aborda el aspecto geométrico del modelo.

La ventana de entrada que aparece al inicio del programa es la que aborda el aspecto geométrico del modelo y su pestaña correspondiente es etiquetada con el nombre de “Geometría”. En esta ventana se encuentra el plano original dentro del cual las fallas son representadas por segmentos de rectas. Es aquí donde el usuario propone e introduce los diferentes valores numéricos que se utilizarán en la regla de crecimiento como son el factor λ , la potencia F , el número de etapas de crecimiento y por supuesto el número de fallas deseado y su tamaño inicial (Fig. 26).

Después de que el usuario introduce los valores de interés para los diferentes parámetros requeridos, se pulsa el botón “Genera lista” y entonces se genera una lista que contiene la longitud y dirección del número de segmentos solicitado se despliega en el área blanca los segmentos de rectas correspondientes a esta lista. La población de segmentos tiene una distribución aleatoria y todos estos segmentos tienen la misma longitud inicial (Fig. 27).

Cuando se pulsa el botón con la etiqueta “Crece lista”, el programa recorre la lista de las longitudes y orientaciones correspondientes a los segmentos trazados en el área blanca e

incrementa su longitud de acuerdo a la regla antes mencionada. La cantidad de incrementos de longitud corresponde al número de etapas de crecimiento solicitadas.

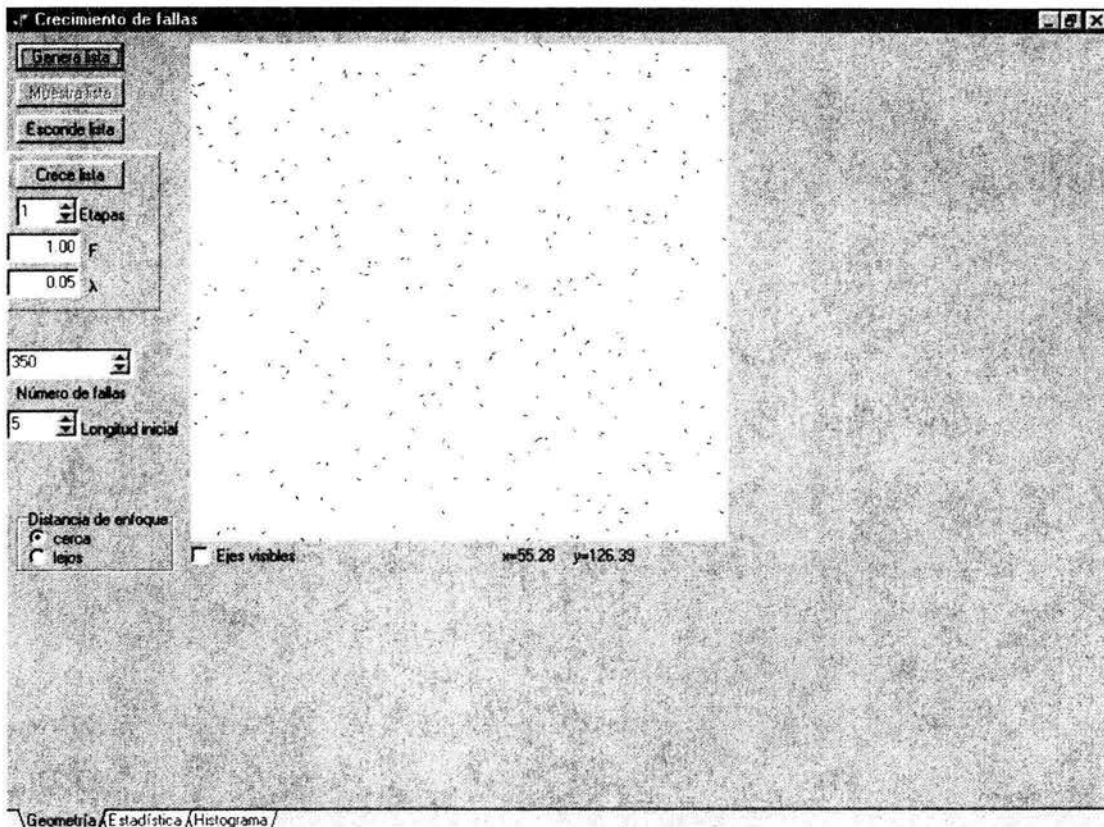


Figura 27. Las poblaciones de fallas generadas por el programa tienen distribución aleatoria y todas las fallas son generadas con la misma longitud inicial.

El incremento de las longitudes de los segmentos cesa cuando alguno de éstos alcanza la longitud máxima que es igual a la longitud del lado del cuadrado original (Fig. 28). Esto quiere decir que aunque se oprima de nuevo el botón “Crece lista”, si ya se ha alcanzado la longitud máxima, los segmentos no continuarán creciendo. Si dentro de las etapas de crecimiento solicitadas por el usuario se alcanza la longitud máxima, los segmentos dejan de crecer antes de terminar el número sugerido de etapas.

En esta ventana se da la opción de ver la población de segmentos generada desde dos distancias de enfoque con ejes o sin ejes. También se muestran las coordenadas del cursor dentro del área blanca.

La pestaña etiquetada como “Estadística” da acceso a la segunda ventana del programa donde, como su nombre lo indica, se abordan los aspectos estadísticos del banco de datos.

En esta ventana existe un plano donde se grafican las longitudes de los segmentos contra su frecuencia (Fig. 29). También existe la opción de graficar esta distribución de frecuencias en términos logarítmicos o acumulativos.

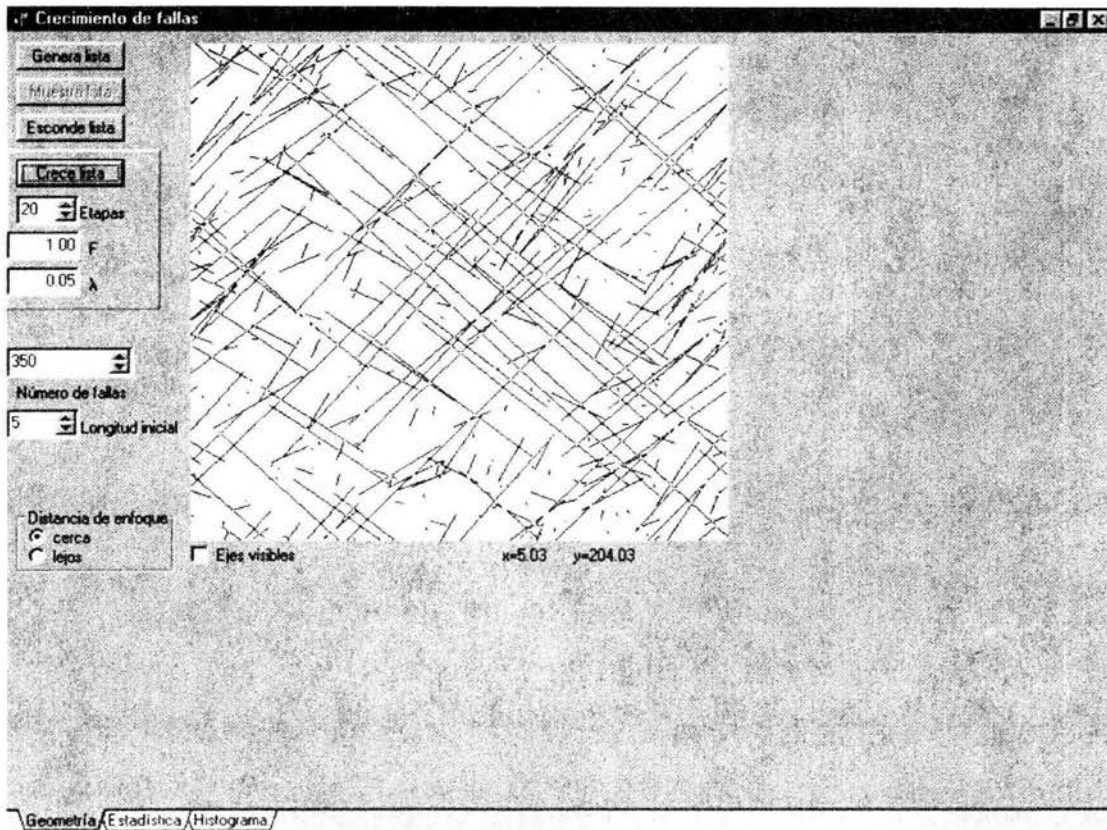


Figura 28. El crecimiento de fallas cesa cuando alguna de ellas alcanza una magnitud máxima igual a la longitud del lado del área cuadrada que contiene a la población.

En esta sección de estadística hay una tabla que muestra los valores graficados en el plano referidos a una distribución de interés (normal, acumulado en un plano real o logarítmico) (Fig. 29). Aquí el usuario introduce el tamaño del intervalo de clases en el cual quiere que sean analizados los datos. En esta ventana existen tres botones, uno guarda los valores mostrados en la tabla en un archivo de *Excel* y está etiquetado como “Guarda tabla”. El botón etiquetado como “Copiar gráfica” guarda la imagen de la gráfica en el portapapeles del ambiente Windows.

El tercer botón está etiquetado como “Generar estadística”, cuando éste es oprimido el programa recorre la lista de longitudes de los segmentos y los ordena por tamaño, del más grande al más chico. El número de clases se obtiene redondeando el cociente de la longitud

máxima que pueden alcanzar los segmentos con el tamaño del intervalo de clases y a esto se le suma uno. Las longitudes de la lista ya ordenada se revisa de una en una y se sitúan, en su turno, en la clase de tamaño que les corresponde; el contador para cada clase se incrementa en uno por cada longitud situada en cada clase. Cuando se solicita una gráfica acumulada, no sólo se incrementa en uno el contador de la clase seleccionada para la longitud en turno, sino que se incrementan en uno todos los contadores de las clases anteriores a ella.

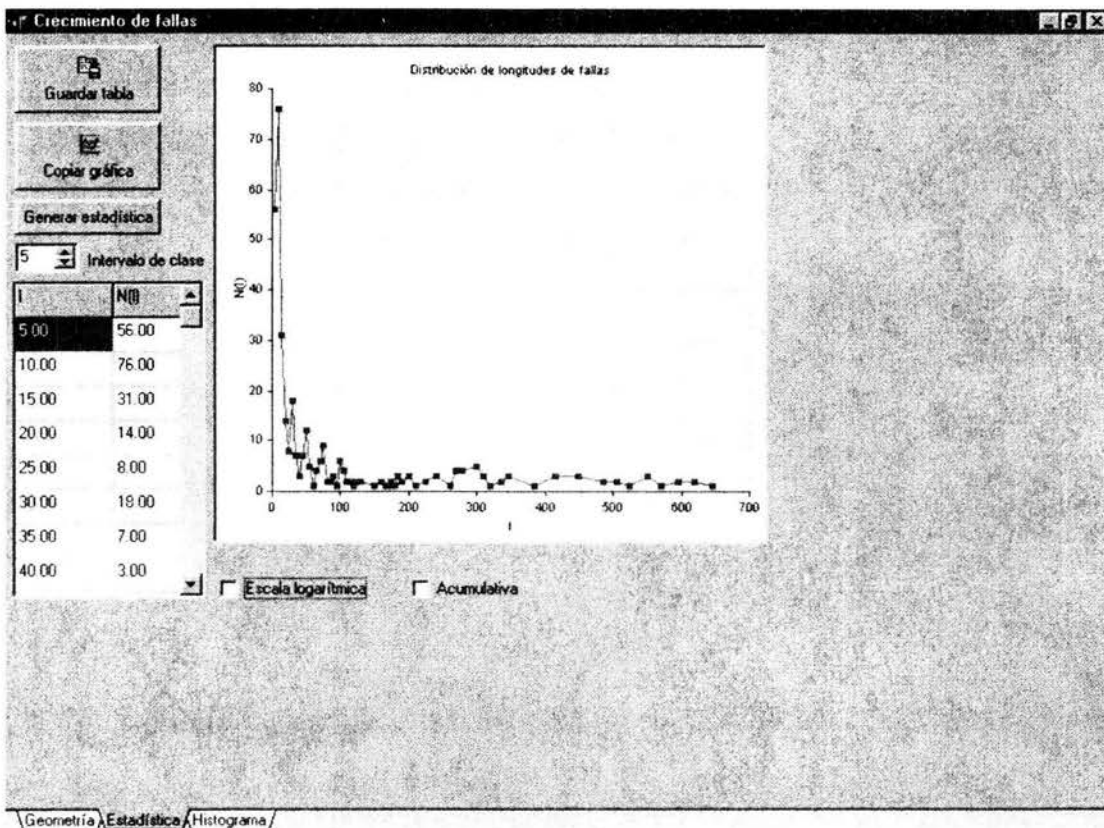


Figura 29. La ventana Estadística aborda los aspectos estadísticos de los datos generados. La gráfica de frecuencias de longitudes puede ser vista en forma normal, acumulada en escala real o logarítmica. También muestra una tabla con los valores graficados.

La información así obtenida se despliega en forma de gráfica, poniendo en el eje X las longitudes y en el eje Y las frecuencias normales o acumuladas. Si el usuario pide que se le muestren los datos en escala logarítmica, el programa calcula los logaritmos de las longitudes y las frecuencias, normales o acumuladas, y las despliega también en forma gráfica. Los rótulos de la gráfica en este caso se cambian a la escala logarítmica (Fig. 30).

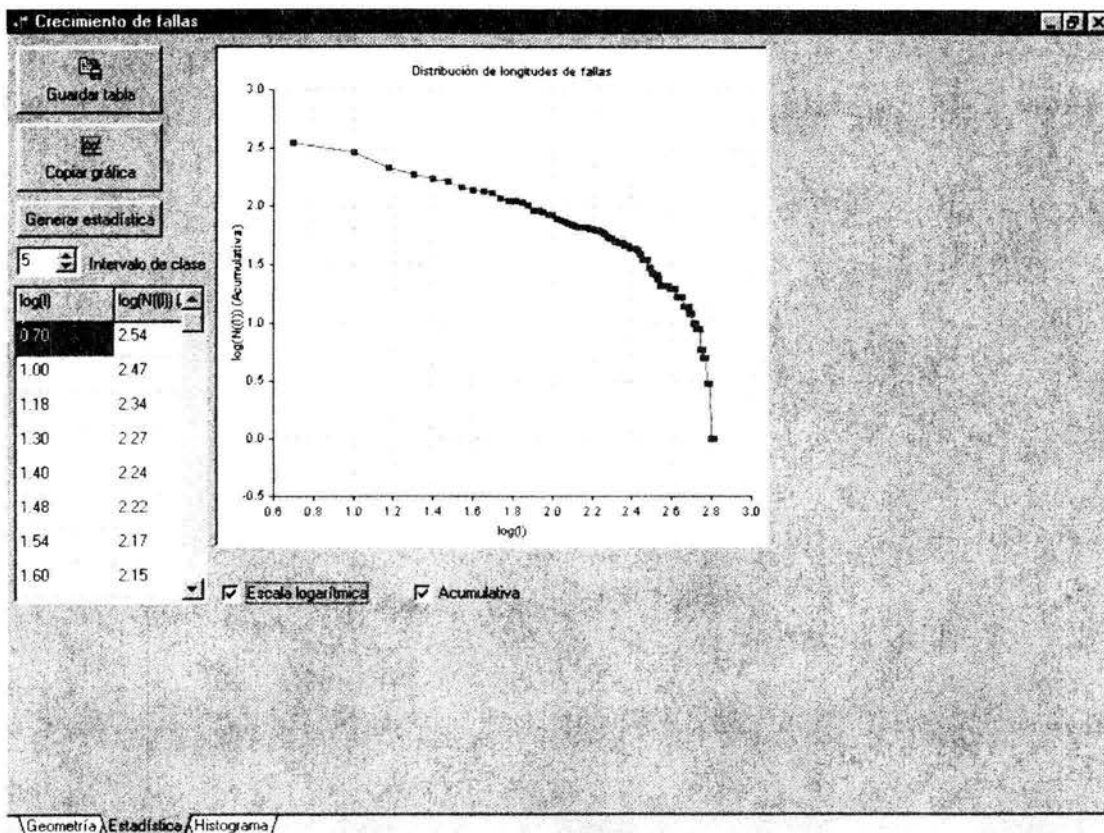


Figura 30. Frecuencias acumuladas en escala logarítmica.

En la tercer ventana, a la cual se tiene acceso por medio de la pestaña etiquetada como “Histograma”, también se presenta información estadística. Aquí se muestra una gráfica de la distribución de las longitudes en función con su orientación (Fig. 31).

En esta ventana también se muestra una tabla que despliega los valores graficados y también existe las opciones de guardar la tabla como hoja de cálculo *Excel* y copiar la gráfica en el portapapeles del sistema operativo.

Cuando se oprime el botón con la etiqueta “Generar gráfica” el programa realiza algo análogo a lo que hace en la ventana anterior, pero aquí se consideran las orientaciones de los segmentos. El número de clases se obtiene al redondear el cociente de 90 con el intervalo de clase introducido por el usuario y a esto le suma uno. Se obtiene la orientación de cada segmento y se les sitúa en alguna clase. El contador de cada clase registra el número de segmentos situados en cada una de ellas de acuerdo a su orientación. El

resultado es desplegado en la gráfica donde la orientación corresponde al eje X y la longitud al eje Y.

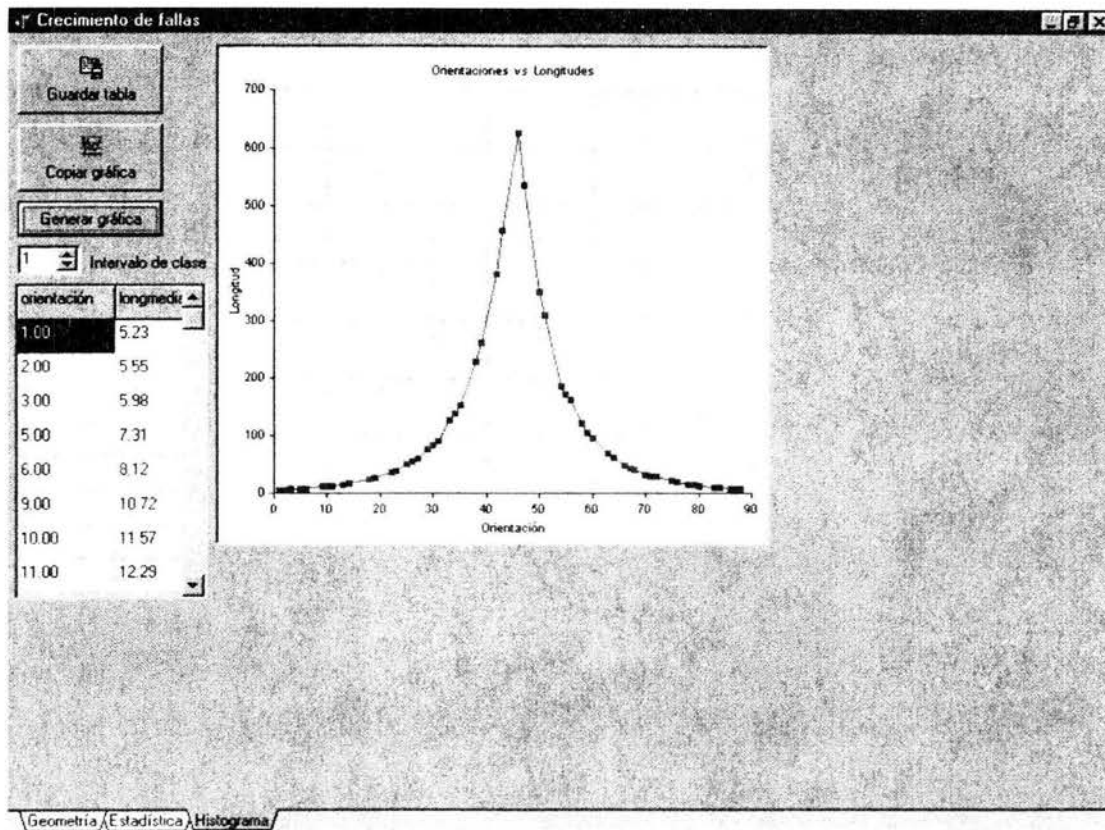


Figura 31. La ventana “Histograma” abarca parte de información estadística del modelo. Aquí se muestra una gráfica de la distribución de las longitudes de fallas de acuerdo con sus orientaciones. También se muestra una tabla de los valores graficados.

DESCRIPCIÓN DE LAS GRÁFICAS

La estadística matemática trata de la teoría y aplicación de métodos para coleccionar datos estadísticos, analizarlos y hacer deducciones a partir de ellos. Los datos estadísticos pueden consistir de números arreglados en forma tabular, o de representaciones gráficas. Las gráficas que se obtienen y muestran por el programa son vías útiles para decidir si el comportamiento de los datos es fractal o no. La información que se obtiene de estas gráficas está en función del comportamiento de las mismas y se evalúa en términos estadísticos.

Con base en lo anterior se pretende extraer información que confirme o rechace la hipótesis inicial de que la distribución de longitudes de las fallas, representadas aquí por segmentos de líneas rectas, en función de su orientación respecto al campo de esfuerzos, es fractal o no. Es decir, la pregunta es ¿si se puede llegar a la fractalidad de la distribución de longitudes de fracturas a partir de una distribución inicial homogénea sólo considerando un crecimiento preferencial?

El comportamiento fractal de longitudes significa un dominio de longitudes pequeñas sobre las grandes. Las gráficas que representan este comportamiento podrían ajustarse a una función hiperbólica de forma $y = k/x$ (con $k=cte$) cuyas asíntotas están dirigidas hacia donde los valores de la gráfica crecen y disminuyen drásticamente.

Las gráficas obtenidas por el programa describen la distribución de longitudes alcanzadas por las fallas en términos de su frecuencia. La información obtenida a partir de estas gráficas da indicio de los cambios en longitud presentados en estos sistema de fallas. Si estas gráficas se pueden ajustar a una función de la forma $y = k/x$ (con $k=cte$), entonces esta última representa en una forma general el comportamiento de las longitudes de las fallas en términos de su variación. Esto conduce a que los fenómenos cuyas variaciones se describen por la función antes mencionada, pueden también ser representados por funciones logarítmicas puesto que $y = k/x$ es la derivada de una función logaritmo y k puede escribirse como $\log_b e$, para alguna b .

Además, la función logaritmo es una función de potencia que puede modificar otras funciones de potencia eliminando sus exponentes y expresarlas en términos lineales.

Como el comportamiento fractal se describe vía una ley de potencia, con la función logaritmo se eliminan los exponentes de esta última expresándolos en una escala logarítmica como una relación lineal (ver apéndice B). Esto conduce a que en un plano doble logarítmico los datos que tienen un comportamiento fractal deben aproximarse a una línea recta. De este hecho se deriva que las gráficas en escala logarítmica son muy útiles para visualizar si el comportamiento de los datos es fractal o no.

Cuando se trata de una gráfica de frecuencias acumuladas la tendencia lineal se acentúa debido a la abundancia de datos puesto que a cada dato se añaden todos aquellos cuyo valor numérico es menor o igual. Por esta razón, la gráfica de este tipo de frecuencias presenta un

comportamiento escalonado. En escala logarítmica este tipo de gráficas se aproxima muy bien a una línea cuando los datos tienen un comportamiento fractal. Esto se debe al hecho de que este tipo de gráficas son las menos afectadas por el efecto de las grandes escalas (en este caso de longitudes mayores) ya que en ellas, por haber una gran cantidad de datos acumulados, el porcentaje de datos grandes tiene menor peso que en las gráficas de frecuencias normales (Pickering & Sanderson, 1995). Esto justifica el uso de las gráficas acumuladas en el estudio del comportamiento fractal de poblaciones de fallas.

Se ajustarán rectas a las gráficas de frecuencias acumuladas en planos doble logarítmicos para obtener la dimensión de fragmentación acumuladas (D_{fc}) (Nieto, et al, 2003) para cada una de ellas. La dimensión de fragmentación es una dimensión de capacidad (ver Parámetros Fractales), la cual se determina como la pendiente de la recta ajustada (ver Apéndice B). Esta dimensión servirá de apoyo al describir el comportamiento de los datos generados por las poblaciones de fallas sintéticas, es decir que ayudará a determinar si la distribución de longitudes de las fallas tiene conducta fractal o no.

DIMENSIÓN Y LAGUNARIDAD

Para describir la complejidad geométrica de los patrones de fallas resultantes del modelo, se harán algunos análisis de las imágenes de los mismos. Estos análisis generan parámetros que permiten especificar cuantitativamente si el comportamiento de las propiedades medibles del objeto presentes en la imagen corresponden a un fractal autoafín, autosimilar (ver Parámetros Fractales) o a ninguno de ellos.

La forma de caracterizar las propiedades medibles de una curva o superficie autoafín es con la dimensiones de caja (D_b) y del rango de reescalado (D_{rs}) (Balankin, 1997). La dimensión de caja se obtendrá analizando las imágenes de las poblaciones de fallas por medio de los programas “Fractal Analisis” (Tolson, 2003) que implementa el método de conteo de caja (Mandelbrot, 1983). Esta dimensión es de información y describe el comportamiento de un objeto en el espacio (ver Parámetros Fractales), por lo que a partir de ésta se determinará la conducta de la distribución de longitudes de fallas en el plano. El programa “Fractal Análisis” (Tolson, 2003) se ha incluido en la versión computacional del modelo en una cuarta ventana y su apariencia se muestra en la Figura 32. La dimensión del

rango de reescalado (D_{rs}) se determinará usando el programa “BENOIT” (SCION Corp. BENOIT 1.2) que implementa el análisis R/S (Mandelbrot, 1983). Este programa requiere de un arreglo lineal de datos que para el caso de las imágenes analizadas guardará los tonos de gris de cada píxel. La dimensión D_{rs} es una dimensión de capacidad (ver Parámetros Fractales) y hace referencia a la rugosidad de la distribución de los datos.

La autosimilitud es la propiedad que tienen algunas construcciones geométricas de que sus partes son similares al total y sus momentos estadísticos son los mismos para diferentes muestras. Los fractales autosimilares tienden a la invariabilidad ante traslaciones y se mide por la lagunaridad del fractal (Oleschko, 2004). La lagunaridad, como ya se mencionó, es un descriptor básico de los fractales y mide la invariabilidad del fractal al traslado caracterizando la distribución de huecos dentro un patrón fractal (ver Parámetros Fractales). Oleschko et al. (2004) introducen la variable $\Lambda(r)$, donde r es la escala, para medir la variación espacial de los tonos de gris de una imagen y determinar su invariabilidad ante traslación. $\Lambda(r)$ es llamada lagunaridad generalizada y se calcula con la razón entre la media del cuadrado de las fluctuaciones en la distribución de los tonos de gris $[Z_Q^2(r)]$ y el cuadrado de su media $[Z_Q(r)]^2$:

$$\Lambda(r) = \frac{Z_Q^2(r)}{[Z_Q(r)]^2}.$$

Para determinar el carácter autosimilar de las distribuciones de fallas generadas con el modelo propuesto en el presente trabajo, se analizarán las distribuciones de los tonos de gris de sus imágenes y se estimará su lagunaridad usando los programas “Histo_gene” y “Freque_hist” de Parrot (2003) y el programa Excel de Office 2000. El primero requiere de una imagen en formato *raw* en la cual está identificado el tono de gris de cada píxel. A partir de esta imagen, Histo_gene genera un archivo Excel con una lista de los tonos de gris de la imagen tomados de renglón por renglón. Con la lista de los tonos de gris de la imagen, el programa Freque_hist elabora un archivo Excel que contiene la frecuencia de la ocurrencia de cada tono de gris que está en la lista. Con las frecuencias determinadas se crean funciones en Excel que calculan la lagunaridad de acuerdo a la fórmula anterior, es decir se obtiene la media y la varianza de los tonos de gris para realizar el cociente que proporciona la lagunaridad.

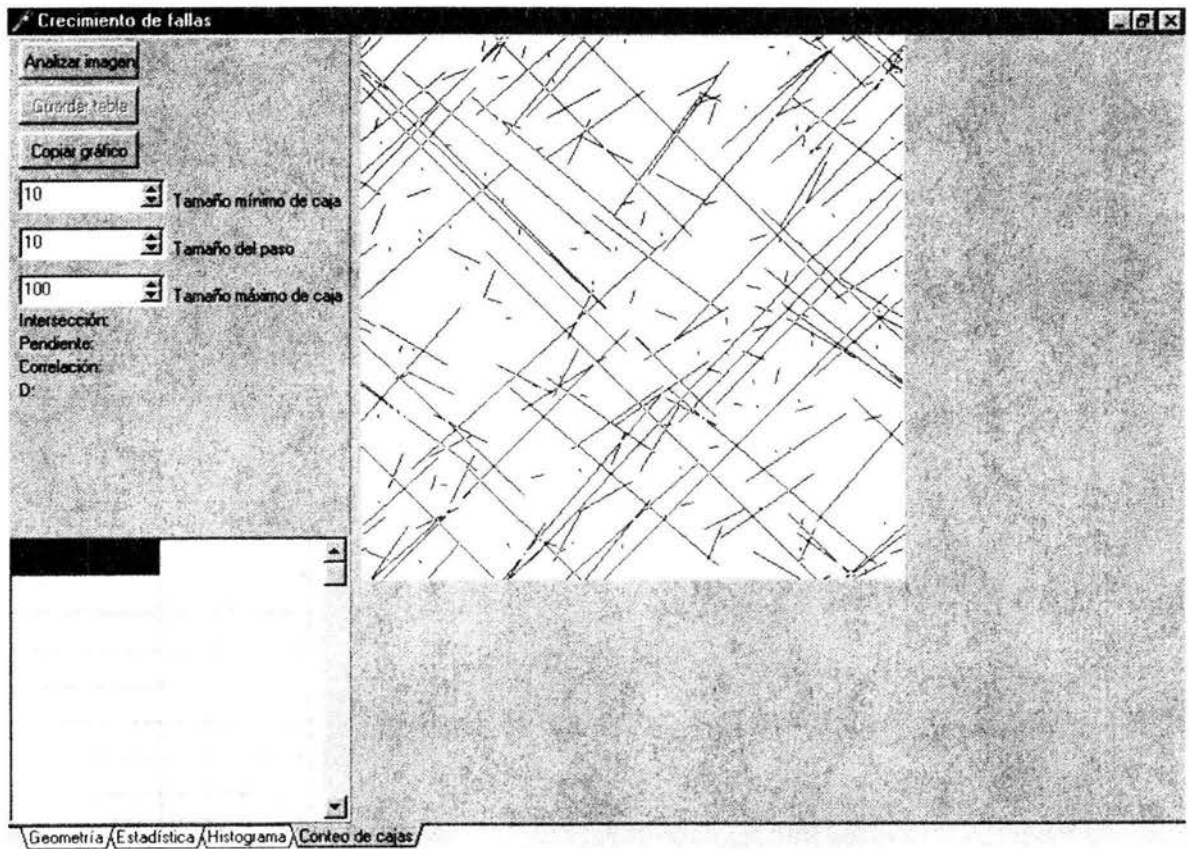


Figura 32. Apariencia gráfica del programa “Fractal Análisis” (Tolson, 2003), implementa el método de conteo de cajas para obtener la dimensión fractal de la imagen.

RESULTADOS

Con el programa diseñado se generaron y analizaron poblaciones sintéticas de fallas de diferentes tamaños (número de fallas) modificando los parámetros involucrados en la regla de crecimiento. El crecimiento se ve afectado por la variabilidad tanto de λ , como de F y de l (longitud de la falla). Entre más grande es l mayor es el incremento de longitud que corresponde a cada etapa de crecimiento, pero el cambio de este valor sólo está al alcance del usuario al inicio del programa, en el momento en que se genera la población de fallas sintéticas.

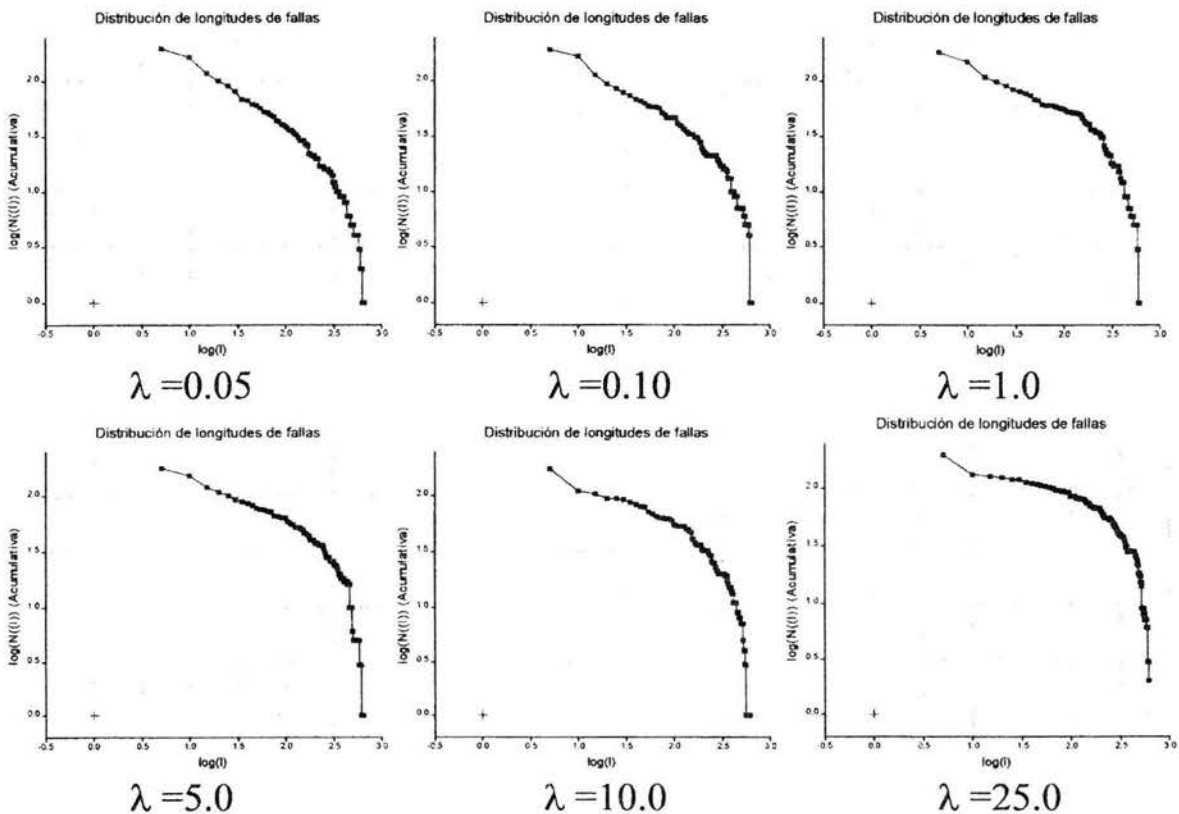


Figura 33. La variabilidad en el comportamiento de las gráficas de frecuencias acumuladas visto en escala logarítmica para diferentes valores de λ . La variabilidad de λ se analizó con un valor fijo de $F=1$.

El factor λ es un término lineal que afecta sólo el número máximo de etapas de crecimiento. Cuando λ se aumenta el número de pasos para alcanzar la longitud máxima

disminuye, es decir la rapidez de crecimiento está en función de λ . La variación de este factor no influye en el resultado estadístico del comportamiento de las longitudes, pues las gráficas obtenidas muestran las mismas tendencias (Fig. 33).

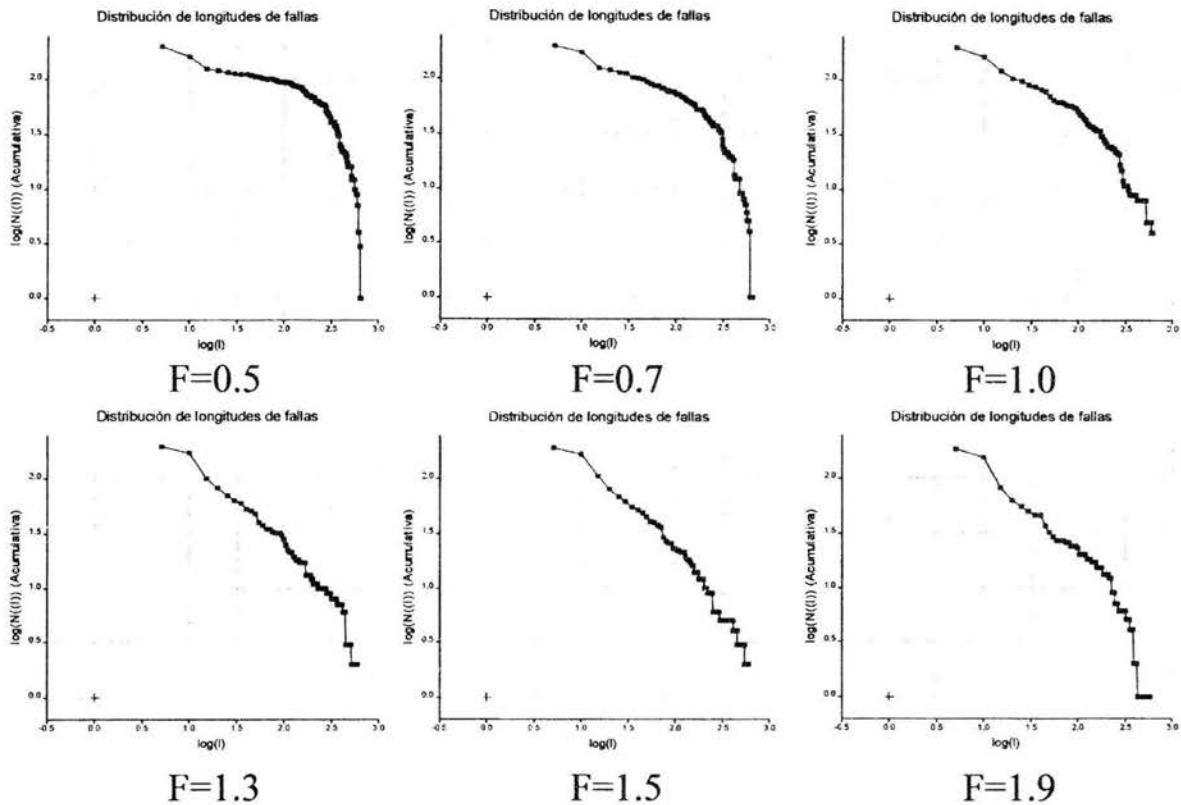


Figura 34. Variabilidad en el comportamiento de las gráficas de frecuencias acumuladas en escala logarítmica para diferentes valores de F . La variabilidad de F se analizó fijando los demás parámetros.

La potencia F afecta la regla de crecimiento de la siguiente manera: en cuanto menor a uno es F , más lento es el crecimiento, es decir en este caso se requiere de un mayor número de pasos para que alguna de las fallas alcance la longitud máxima. Cuando F es mayor que uno, el crecimiento es más rápido pues se requiere de menos etapas de crecimiento. Además, el comportamiento estadístico de las longitudes también cambia pues las gráficas resultantes muestran diferentes tendencias (Fig. 34).

Uno de los objetivos de la presente investigación es describir la distribución de las longitudes de fallas, a partir de la regla de crecimiento antes mencionada, por esto se generaron diferentes tipos de gráficas de frecuencias de longitudes ($N(l)$). A continuación

se presenta la interpretación de las gráficas obtenidas por el programa a partir de los datos generados para las diferentes poblaciones de fallas sintéticas.

INTERPRETACIÓN DE LAS GRÁFICAS

Las gráficas de la distribución de longitudes de fallas obtenidas a una escala real se caracterizan por una tendencia asintótica hacia ambos ejes reales (X y Y), alcanzando la frecuencia sus valores más grandes cuando la longitud adquiere los valores más bajos y los valores más chicos cuando la longitud llega a los valores altos (Fig. 35). La representación acumulada de estas gráficas acentúa estas tendencias asintóticas en ambos extremos de las gráficas (Fig. 36). Esto da indicios de que la mayoría de las fallas en una determinada población alcanzan longitudes mínimas y que un número progresivamente menor de fallas llegan a longitudes gradualmente mayores.

Como ya se mencionó, la linealidad de las gráficas acumuladas en un plano doble logarítmico sugiere la conducta fractal de propiedades mensurables del fenómeno de interés. Las gráficas de este tipo obtenidas con el programa diseñado muestran una tendencia lineal para diferentes rangos de longitudes (Fig. 34) indicando que no hay un comportamiento fractal ideal que describe el crecimiento de las fallas. De este modo, las gráficas quedan divididas en tres partes, una central y dos externas. La parte central representa el rango efectivo de longitudes para el cual la distribución de éstas obtenidas a partir del modelo, es fractal (Fig. 37). Las partes formadas en los extremos pueden estar ocasionadas por los efectos de frontera que no fueron eliminados completamente.

Las gráficas de frecuencias acumuladas en planos doble logarítmicos obtenidas con el programa, muestran esa tendencia lineal para un cierto intervalo de valores de la longitud situado en la parte central de la gráfica a la cual se ajusta una línea. El coeficiente de correlación (R^2) para las líneas ajustadas varía entre 0.95 y 0.99 (Fig. 38). Los valores de las dimensiones de fragmentación acumuladas (D_{fc}) oscilan entre 0.63 y 1.2, para diferentes valores de F y poblaciones de 200, 500 y 1000 fallas (Fig. 38), algunos de estos valores se muestran en la tabla 1. Los valores de D_{fc} aquí obtenidos, corresponden a los reportados por Cladouhos & Marrett (1996), Bonnet et al. (2001), Gillespie et al. (2001) y Nieto et al., (2003).

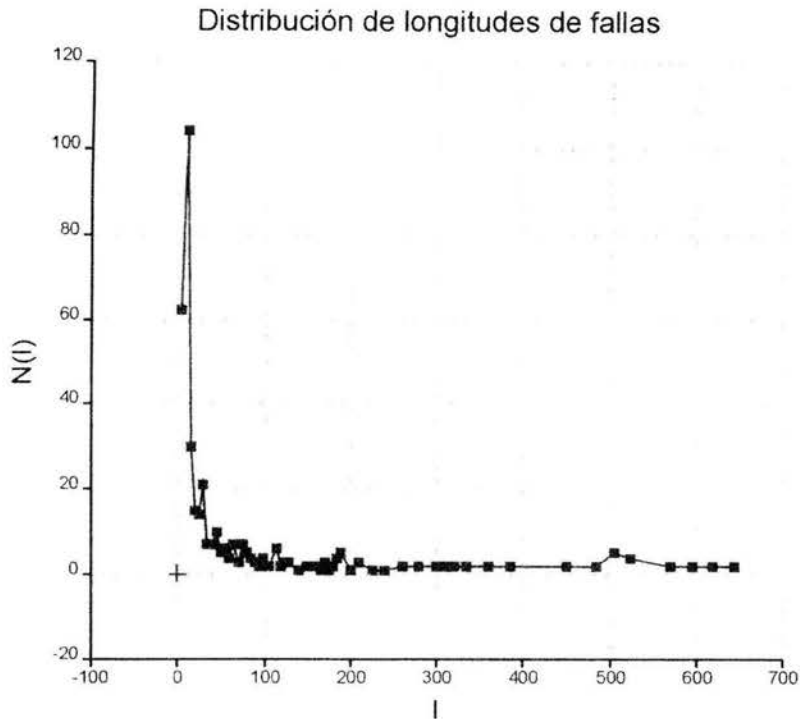


Figura 35. La distribución de las fallas a escala real muestra una tendencia asintótica hacia ambos ejes reales (X y Y), alcanzando la frecuencia los valores más altos en cuanto la longitud adquiere sus valores más bajos y viceversa, para los valores más chicos que corresponden a los valores más grandes de la longitud.

La gráfica de la distribución de longitudes por orientaciones (Fig. 39), muestra que efectivamente la longitud máxima de falla corresponde a los 45° que es donde se sitúa el esfuerzo de cizalla máximo. Esta gráfica también muestra una disminución simétrica y pronunciada de las longitudes hacia 0 y 90° que refleja la simetría del sistema de esfuerzos. La apariencia geométrica de los sistemas de fallas generados con el programa es consistente a la interpretación estadística de las distribuciones analizadas. Es decir, a pesar de que se modeló la distribución espacial aleatoria de las fallas, el comportamiento fractal de la distribución de sus longitudes dentro del sistema fue visible, por lo que se crearon pocas fallas grandes y muchas chicas. Además, esta apariencia es semejante a la que muestran algunos sistemas naturales analizados por Nieto et al. (2003) (Fig. 40). Con el análisis fractal de las imágenes de los sistemas de fallas generados se mostró que en realidad la distribución espacial de las fallas tiene comportamiento fractal.

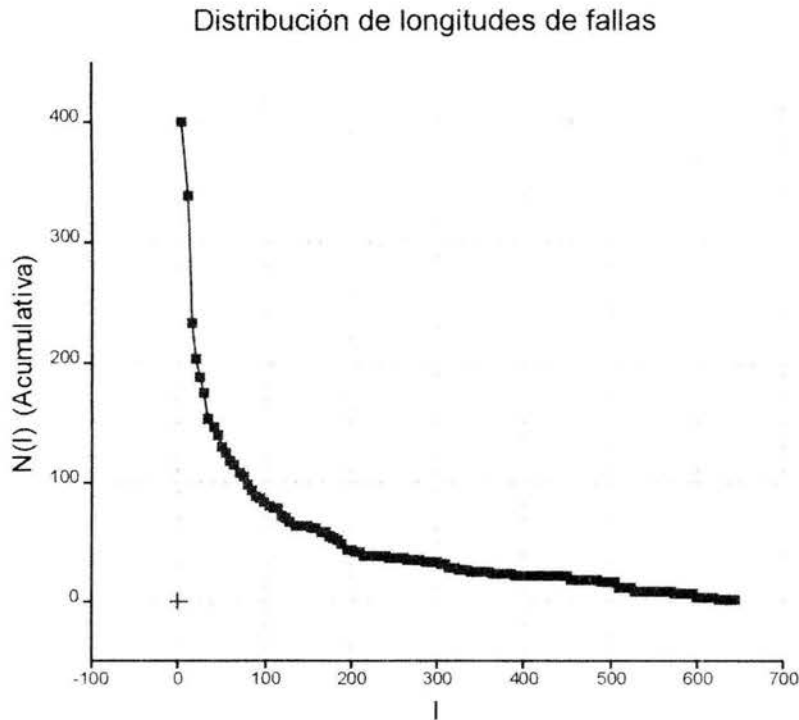


Figura 36. La gráfica acumulada acentúa la tendencia asintótica de las frecuencias de las longitudes. Corresponde a una población de 400 fallas, $F=1$, $\lambda=0.05$ y longitud inicial es igual a 5 unidades.

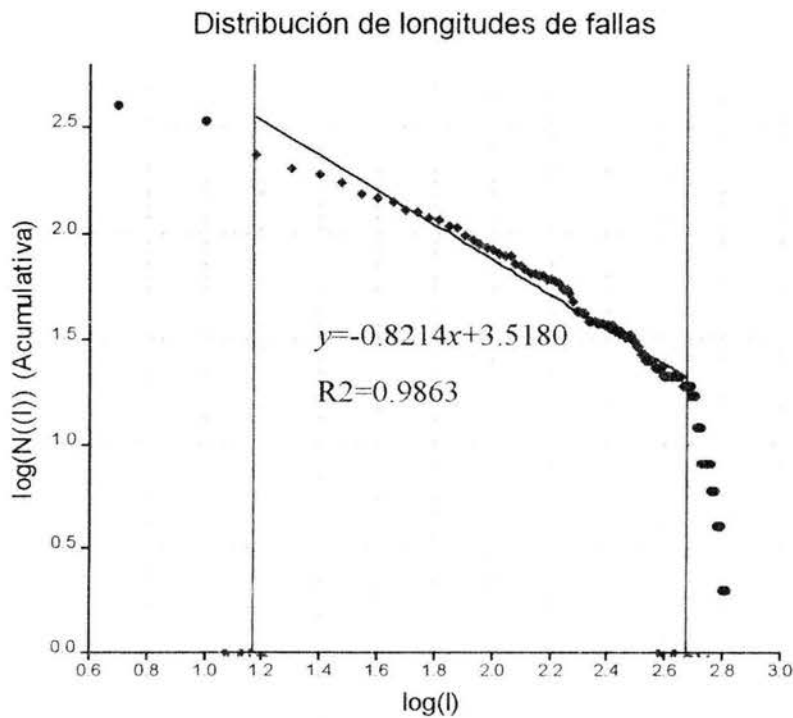


Figura 37. Existe un rango efectivo de longitudes para el cual la distribución de éstas obtenidas a partir del modelo, presenta un comportamiento fractal. Esta gráfica corresponde a una población de 400 fallas con $F=1$, $\lambda = 0.05$ y la longitud inicial es de 5 unidades.

Las dimensiones de caja D_b obtenidas de este análisis, fluctuaron entre 1.64 y 1.84 como se muestra en la tabla 2 y estos valores también corresponden a los reportados de sistemas de fallas naturales por Bonnet et al. (2001) y Nieto et al. (2003).

La Figura 41 muestra la variabilidad tanto en D_{fc} como en D_b , para diferentes valores de F , junto con sus respectivos coeficientes de correlación.

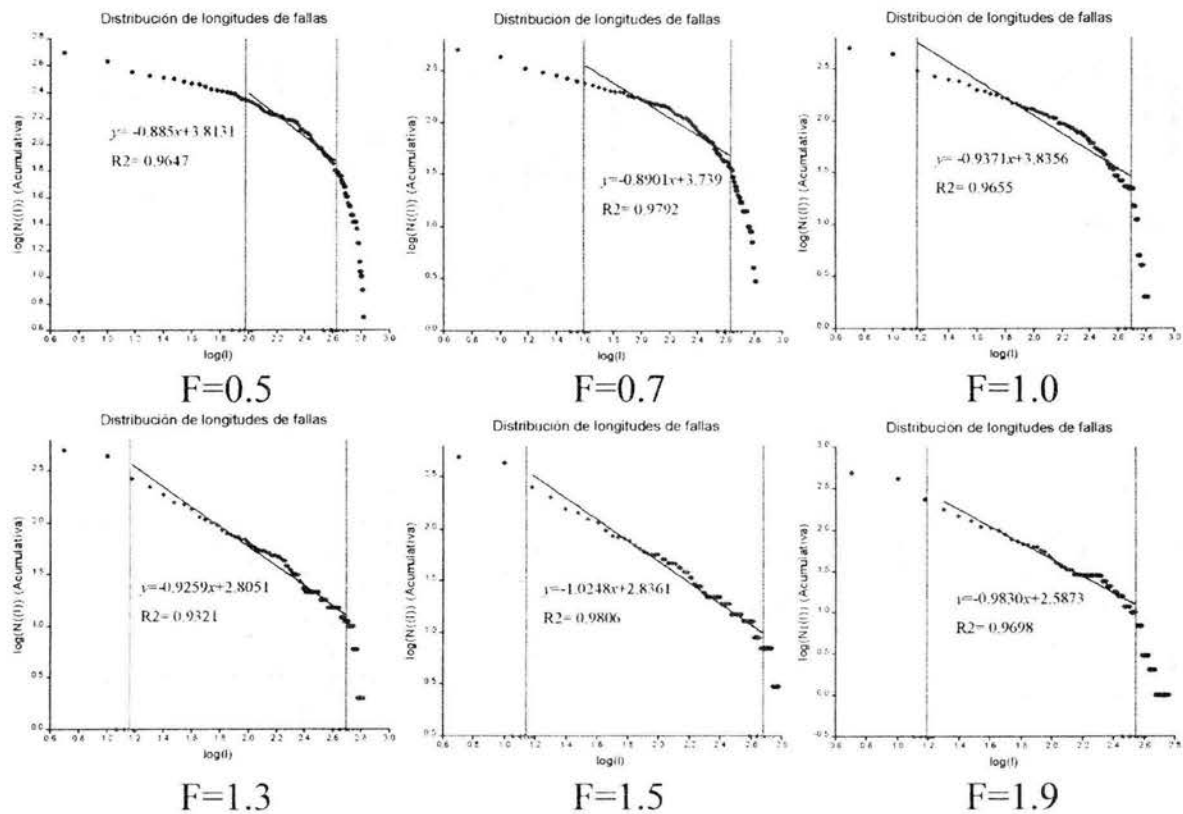


Figura 38. Frecuencias acumuladas en planos doble logarítmicos para diferentes valores de F y poblaciones de 500 fallas muestran la tendencia lineal de los datos. R^2 varía de 0.9634 a 0.9806.

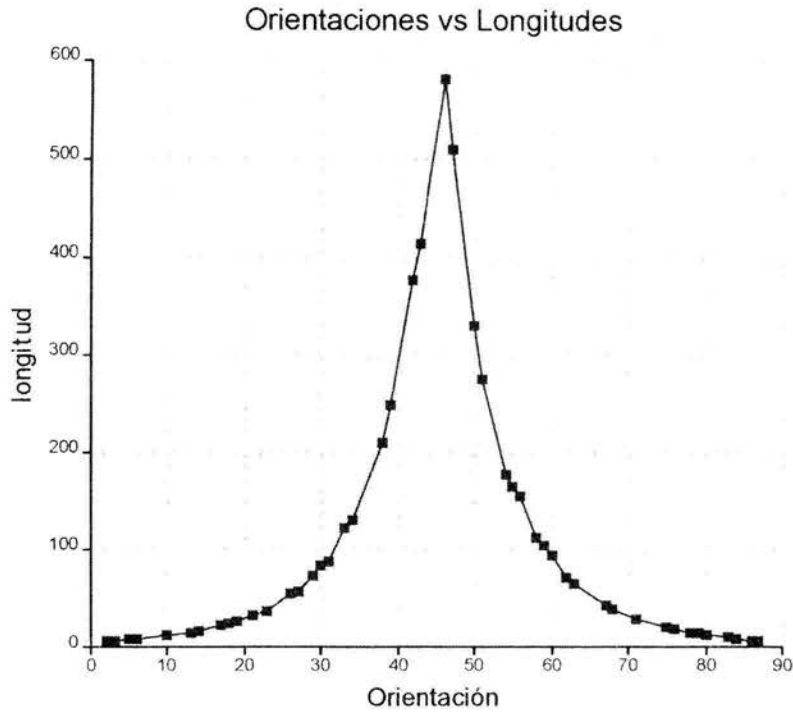
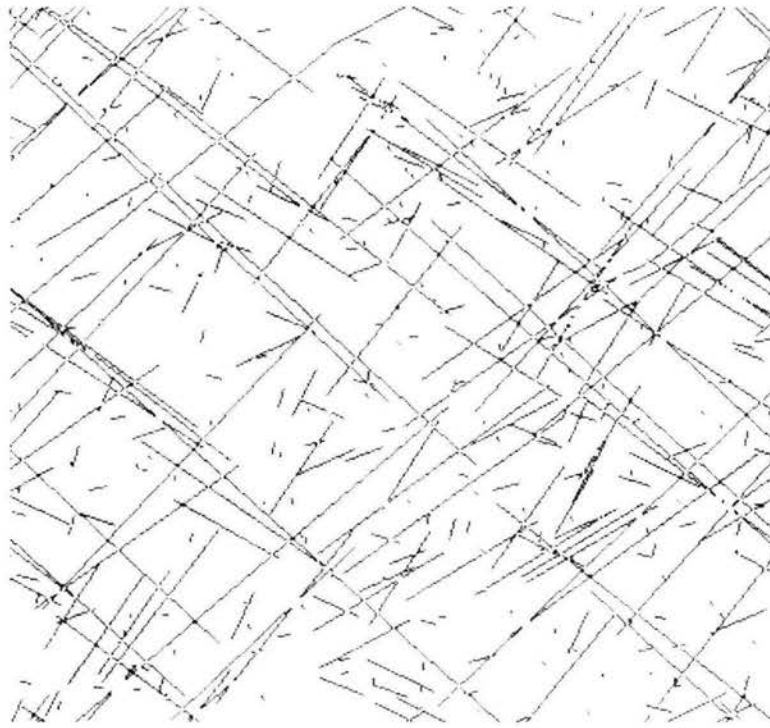


Figura 39. La distribución de longitudes según su orientación. La longitud máxima de 650 unidades se alcanza a los 45°. Se observa la disminución simétrica de las longitudes de fallas hacia 0 y 90° ($F=1$, $\lambda=0.05$ y la longitud inicial es de 5 unidades).

F	200 fallas		500 fallas		1000 fallas	
	D_{fc}	R^2	D_{fc}	R^2	D_{fc}	R^2
0.5	0.633	0.97	0.885	0.96	0.847	0.97
0.7	0.767	0.97	0.890	0.97	0.979	0.96
1.0	0.824	0.99	0.937	0.96	1.203	0.96
1.3	0.844	0.96	0.745	0.99	0.888	0.99
1.5	0.885	0.97	1.024	0.98	0.936	0.99
1.9	1.037	0.95	0.983	0.96	0.848	0.98

Tabla 1. Muestra los diferentes valores de D_{fc} en poblaciones con distintos números de fallas para diferentes valores de F.

a



b

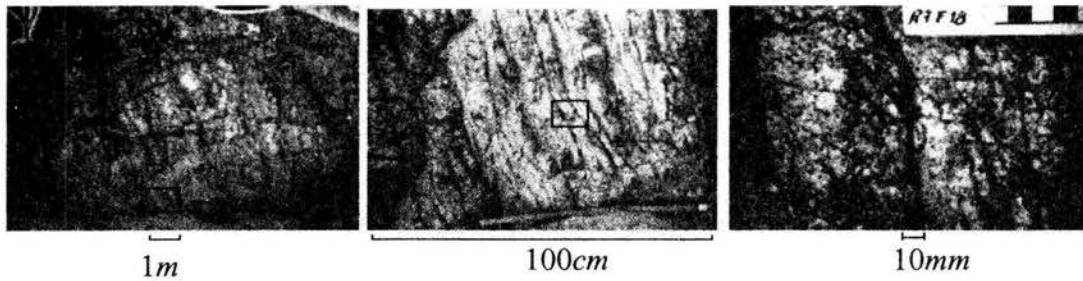
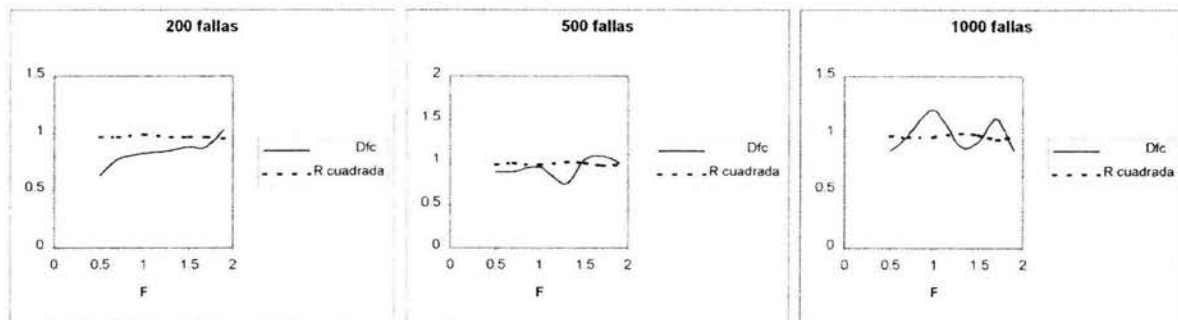


Figura 40. a) Apariencia geométrica de las poblaciones de fallas desarrolladas a partir del modelo. Esta población tiene 200 fallas y $F = 1$ y $\lambda = 0.05$. b) Sistemas de fallas naturales en diferentes escalas (Nieto et al., 2003). Se aprecia la similitud entre el patrón de fallas generado sintéticamente y el patrón de fallas naturales.

F	200 fallas		500 fallas		1000 fallas	
	D_b	R^2	D_b	R^2	D_b	R^2
0.5	1.77	.99	1.84	.99	1.84	.99
0.7	1.77	.99	1.83	.99	1.84	.99
1.0	1.73	.99	1.84	.99	1.83	.99
1.3	1.73	.99	1.84	.99	1.84	.99
1.5	1.75	.99	1.84	.99	1.84	.99
1.9	1.64	.99	1.80	.99	1.84	.99

Tabla 2. Muestra los diferentes valores de D_b en poblaciones con distintos números de fallas para diferentes valores de F.

Dimensión de fragmentación acumulada D_{fc}



Dimensión de caja D_b

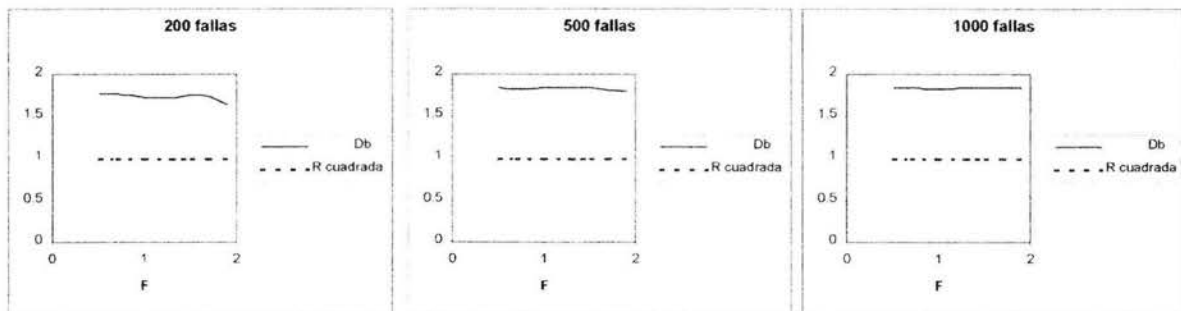


Figura 41. Variabilidad de las dimensiones de fragmentación D_{fc} y caja D_b en función de F.

LAGUNARIDAD

La distribución resultante de las poblaciones de fallas generadas por el modelo presenta variaciones geométricas significativas para los diferentes valores de F . Las gráficas de las distribuciones por orientaciones reflejan estas diferencias (Fig. 42). Como ya se mencionó, la lagunaridad de una construcción geométrica es una medida de la invariabilidad al traslado de sus partes (ver Parámetros Fractales), por lo que las diferencias en las distribuciones de fallas podrían ser caracterizadas por su lagunaridad. La lagunaridad de las imágenes completas ($A(1)$) de las distribuciones de fallas generadas con diferentes valores de F se extrajo utilizando el método de Oleschko et al. (2004). La Figura 43 muestra algunos de los valores de la lagunaridad para poblaciones de 200 fallas. De las lagunaridades resultantes se concluyó que no existe una lagunaridad característica de las poblaciones de fallas para cada valor de F , sin embargo si parecen existir rangos de lagunaridad de acuerdo al número de fallas (ver Tabla 3).

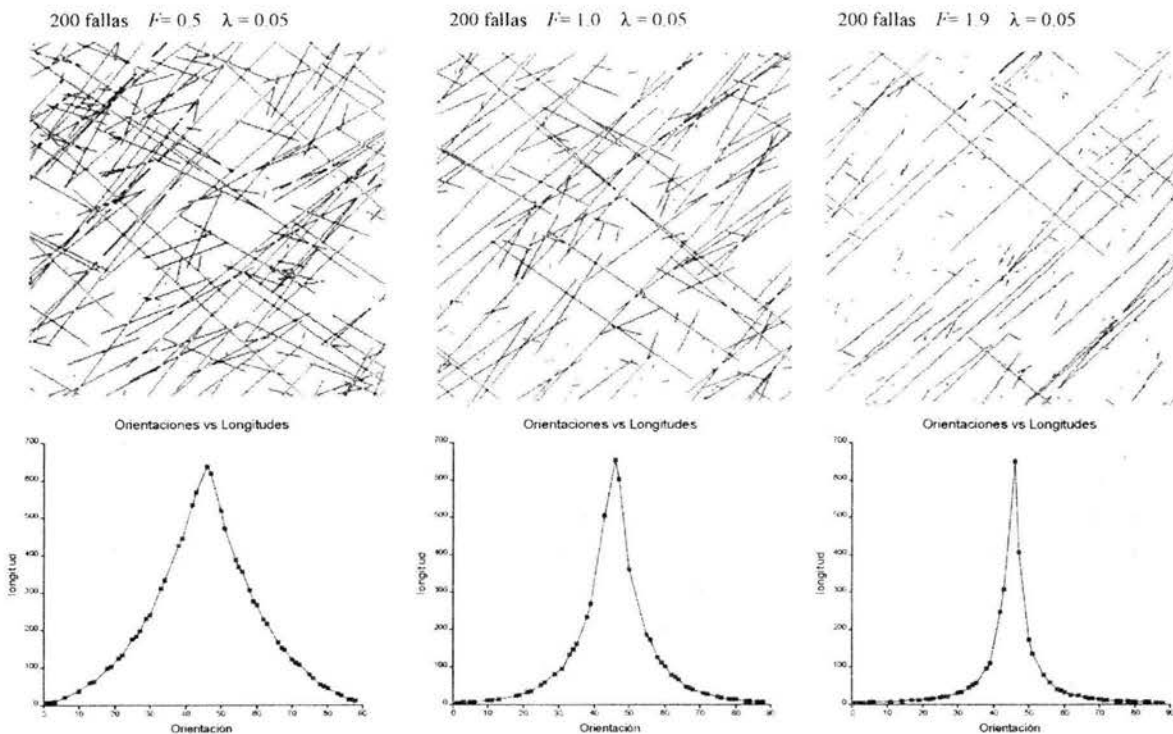


Figura 42. Las diferencias de la construcción geométrica de las distribuciones de fallas generadas con el modelo concuerdan con las variaciones en las gráficas de distribuciones de longitudes en función de la orientación.

La semejanza geométrica entre las imágenes obtenidas por el modelo aquí propuesto y las imágenes de fracturas naturales utilizadas por Nieto et al. (2003) es evidente (Fig. 40). Con el fin de comparar los parámetros que caracterizan ambos patrones, se decidió extraer la lagunaridad de los esquemas de fracturas creados a partir de las imágenes de la Figura 40. La lagunaridad del esquema correspondiente a la imagen en la escala de metros de la Figura 40b se comparó con la del esquema 40a y se le denominó lagunaridad de la escala uno $\Lambda(1)$; la que está en escala de centímetros de la Figura 40b se comparó con la de la ampliación de una pequeña área seleccionada al azar del esquema 40a y se le denominó lagunaridad de la escala dos $\Lambda(2)$ (Fig. 44). Debido a las limitaciones en escalas de las distribuciones de fallas generadas por el modelo, sólo se compararon dos escalas de fracturas. La lagunaridad $\Lambda(1)$ de la Figura 40a tuvo un valor de 1.0211 y la del de 40b de 1.0259; los valores de $\Lambda(2)$ fueron de 1.0345 y 1.0481 para las Figuras 40a y 40b respectivamente, estos valores se muestran en la Figura 44 y son del mismo orden de magnitud que los mostrados en la Tabla 3 para poblaciones de 200 fallas. Para corroborar este hecho, se analizaron los esquemas correspondientes a algunos de los sistemas naturales (en escala de metros) estudiados por Nieto et al. (2003) y se muestran en la figura 45. La concordancia entre las lagunaridades de los sistemas sintéticos y naturales es reflejada en la figura 46.

F	200 fallas	500 fallas	1000 fallas
0.5	1.0578	1.1143	1.1878
0.7	1.0444	1.1000	1.1643
1.0	1.0384	1.1071	1.1767
1.3	1.0436	1.1056	1.1702
1.5	1.0500	1.1029	1.1541
1.9	1.0354	1.0762	1.1233

Tabla 3. Valores de la lagunaridad de las imágenes de poblaciones de fallas generadas a partir del modelo con diferentes valores de F .

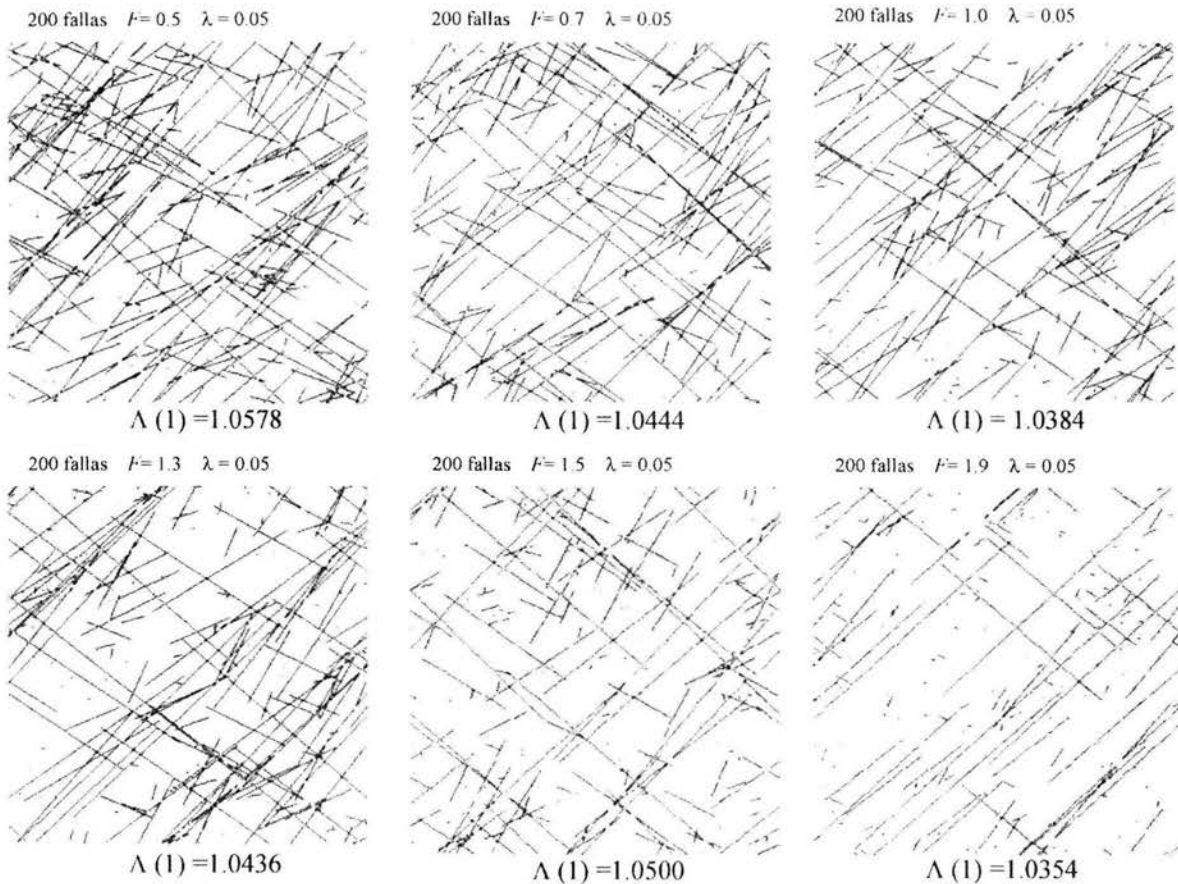
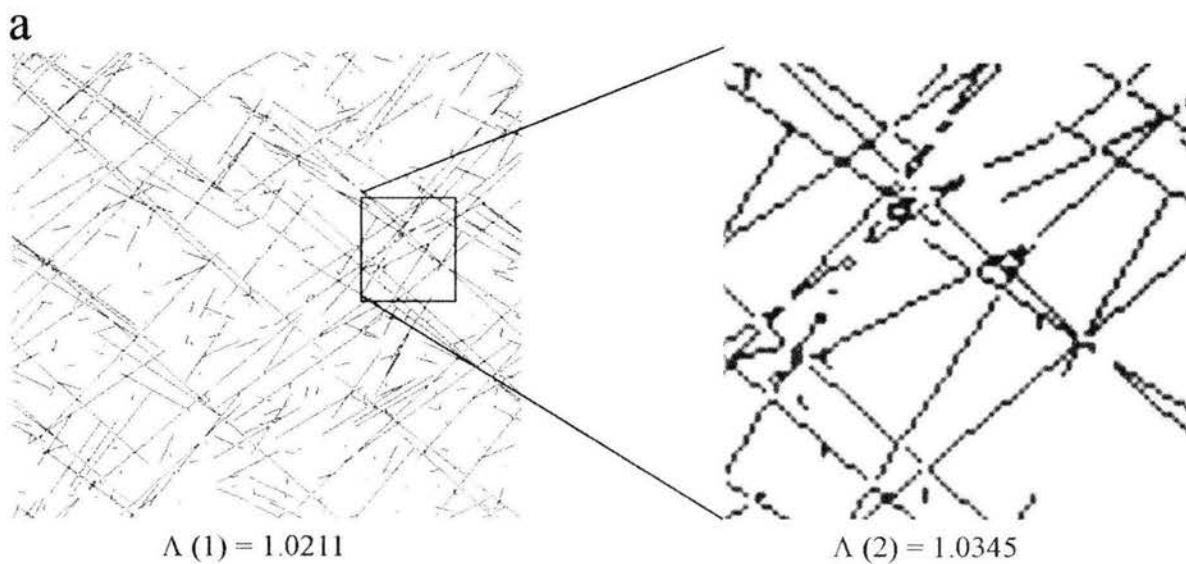


Figura 43. Los diversos valores de la lagunaridad para poblaciones de 200 fallas generadas con diferentes valores de F . Parece no existir una discrepancia notable entre los valores aquí presentados.



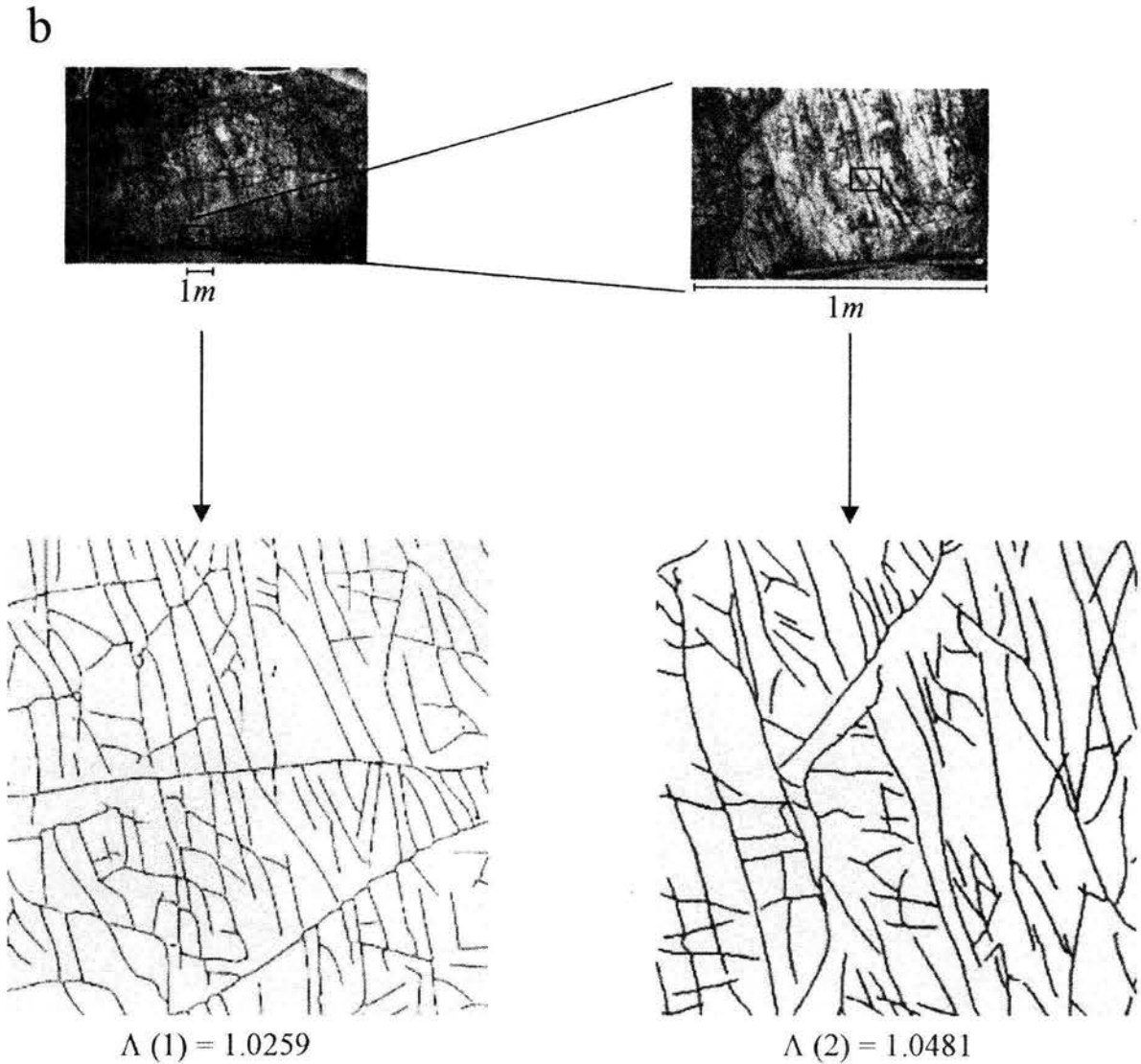


Figura 44. a) Lagunaridad de una distribución generada por el modelo, el área seleccionada se amplió un 300% para su análisis. b) Esquemas de sistemas naturales de fallas, los valores de $\Lambda(1)$ y $\Lambda(2)$ son del mismo orden de magnitud que en a.

También se calcularon las lagunaridades de las imágenes (fotos) de la figura 40b y se obtuvieron los valores de 1.0417 y 1.0450 para las escalas en metros y centímetros respectivamente. Una imagen preserva las características de un sistema natural y su *firmagrama*, que es la gráfica de la lista que contiene todos los tonos de gris de esa imagen, también lo refleja porque la distribución de los tonos de gris construye un perfil de la imagen mostrando todos los cambios en la densidad de fracturas en una superficie con la precisión de un píxel (Oleschko, 2004). Por esta razón, la lagunaridad de una imagen queda impresa en su *firmagrama*. Cuando la lagunaridad es baja (cercana a 1), el *firmagrama* muestra ciertos patrones de repetición que manifiestan la invariabilidad de las partes de la

imagen cuando son trasladadas. Por el contrario, cuando la lagunaridad es alta el firmagrama no presenta algún patrón de repetición. En la Figura 47 se muestran los firmagramas de las imágenes de uno de los sistemas naturales de fracturas (en dos escalas, metros y centímetros) estudiado por Nieto et al. (2003) y de las poblaciones de fallas generadas por el modelo.

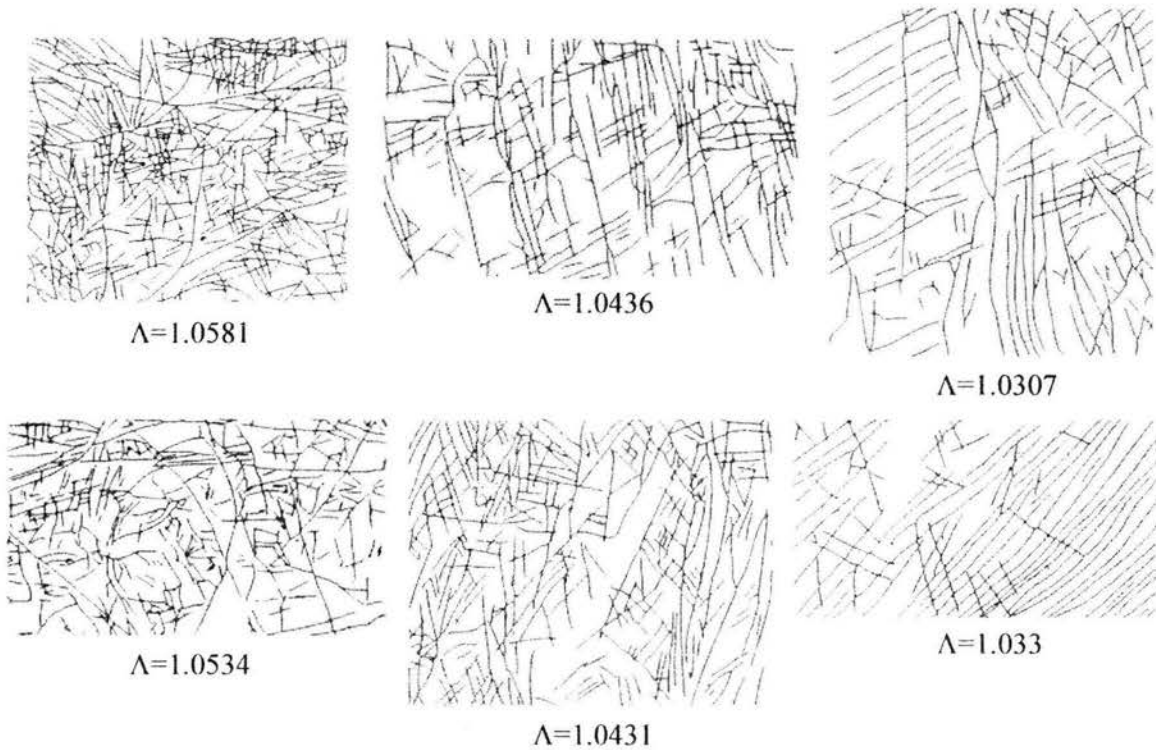


Figura 45. Lagunaridades de los esquemas obtenidos a partir de diferentes sistemas naturales de fracturas (Nieto et al., 2003).

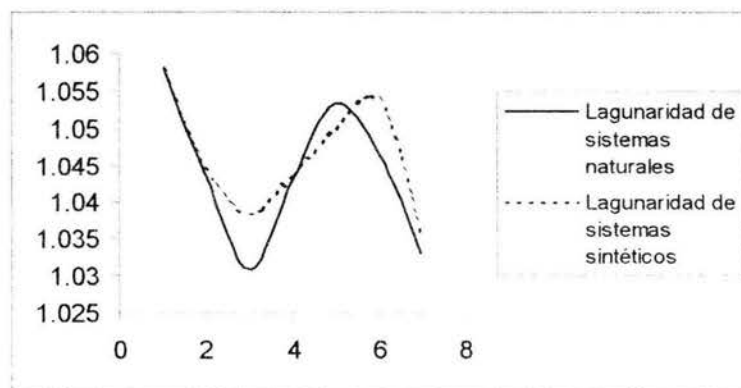
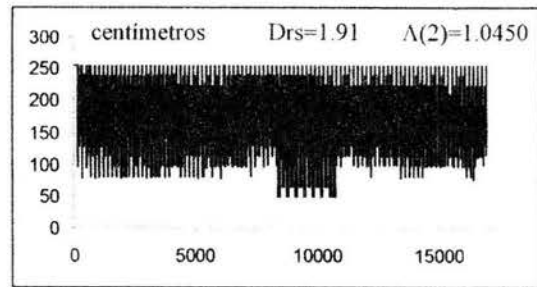
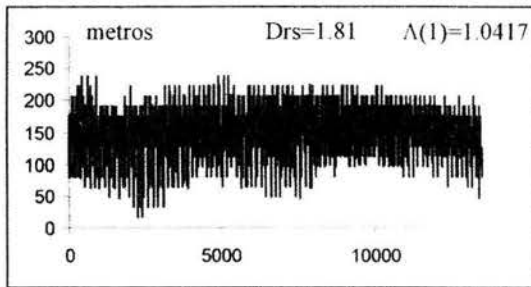
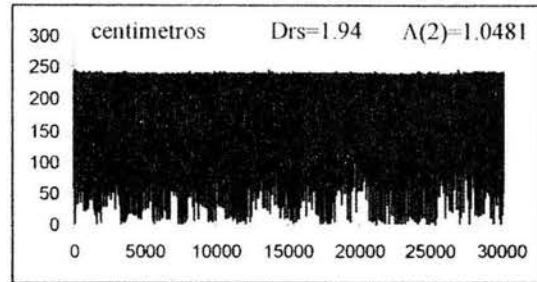
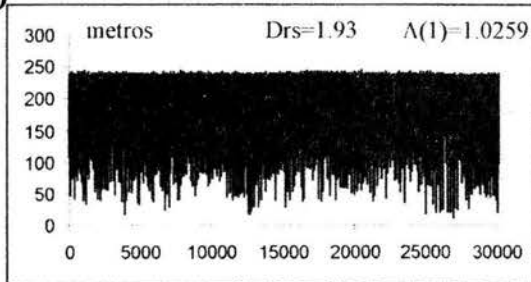


Figura 46. El rango de valores para la lagunaridad de sistemas de fallas generadas por el modelo corresponde al de los sistemas naturales de fracturas. El eje X de la gráfica corresponde a las diferentes poblaciones naturales (ordenadas por escala) y sintéticas (ordenadas de acuerdo al valor del parámetro F) y el eje Y a la lagunaridad.

a



b



c

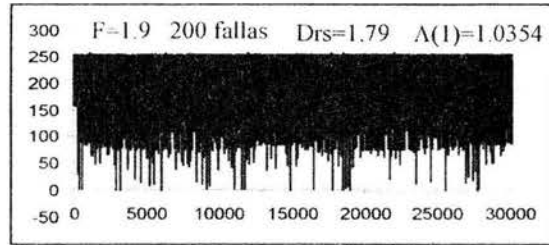
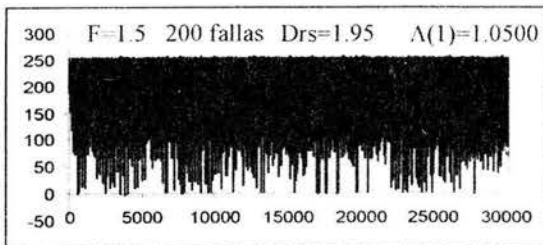
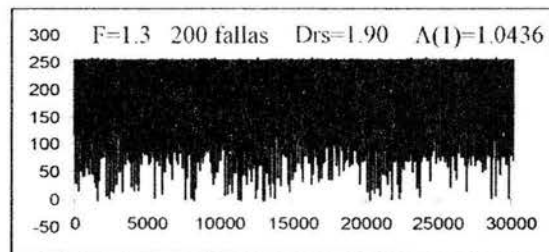
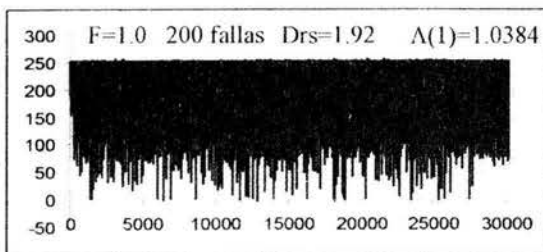
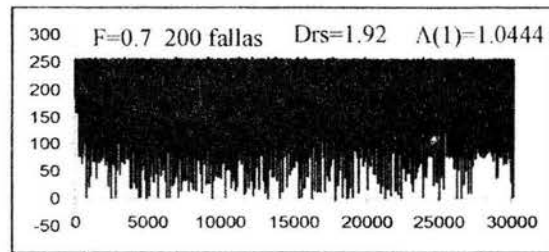
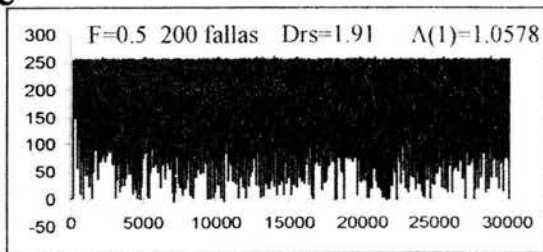


Figura 47. Firmagramas (Oleschko, 2004) de imágenes de sistemas naturales (a), de sus respectivos esquemas (b) y de los sistemas de fallas generados por el modelo (c). La alineación cerca del tono 250 en los firmagramas de los esquemas corresponde al dominio del tono blanco de sus fondos. El eje X corresponde a los píxeles y el eje Y a los tonos de gris.

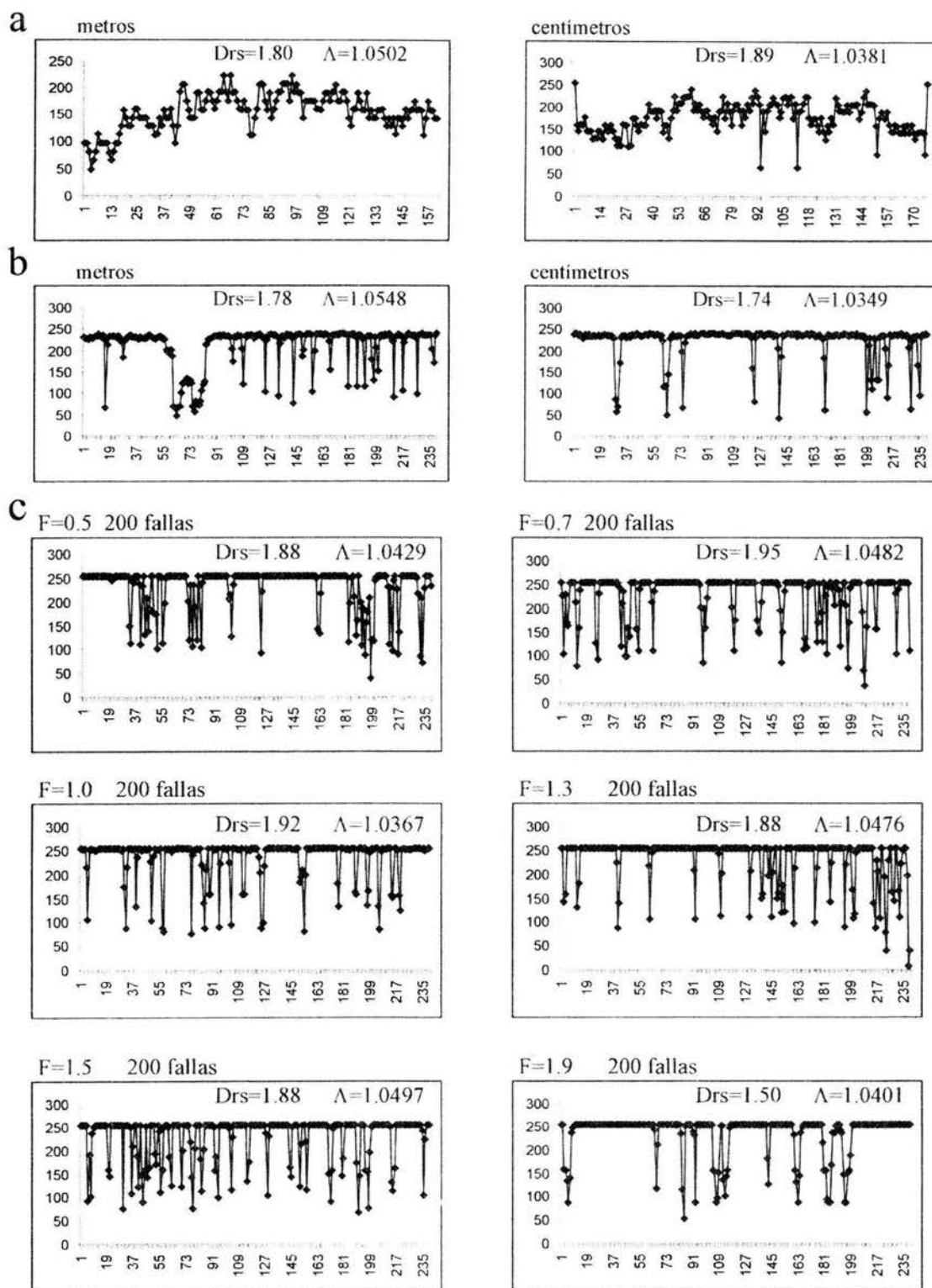


Figura 48. Distribución de los tonos de gris en una línea de referencia de las imágenes de sistemas naturales de fracturas (a), de sus respectivos esquemas (b) y de los esquemas de los sistemas de fallas generados por el modelo (c). La línea de referencia fue tomada a la mitad de las imágenes y esquemas de acuerdo al método de Oleschko et al. (2004). El eje X corresponde a los píxeles y el eje Y a los tonos de gris.

Muchas veces las lagunaridades son tan parecidas que es difícil establecer la causa de las diferencias entre los firmagramas. La dimensión fractal del rango de reescalado (D_{rs}) caracteriza la rugosidad de una curva o superficie, y cuando dos curvas o superficies tienen la misma dimensión D_{rs} éstas son homeomorfas (Balankin, 1996). En estos términos las diferencias presentadas en los firmagramas están relacionadas con sus dimensiones D_{rs} , y cuando dos o más firmagramas o líneas de referencia tienen la misma dimensión del rango de reescalado existe una función que permite pasar y regresar de una distribución de tonos de gris a otra. Esto indica que cuando D_{rs} es la misma para diferentes poblaciones de fallas, éstas se pueden transformar en otras que tienen la misma dimensión D_{rs} .

Se calculó también la lagunaridad en una línea de referencia de las imágenes y esquemas estudiados. Estas líneas de referencia muestran el comportamiento de las fallas de manera local, así como la posición de las fracturas que cortan (Fig. 48). Las lagunaridades de esas líneas aparte de ser muy similares entre ellas, son del mismo orden de magnitud que las lagunaridades de las imágenes completas de sistemas sintéticos y naturales.

Como ya se mencionó, el patrón geométrico de los sistemas de fallas generados con el modelo varía conforme cambian los parámetros de su regla de crecimiento y también lo hacen las gráficas de las distribuciones de longitudes de fallas en función de su orientación (Fig. 42). Esto puede indicar que la lagunaridad de los esquemas de sistemas de fallas sintéticos está relacionado con algún parámetro de esa distribución como lo es la longitud media. Por esta razón se calculó la longitud media de cada una de estos sistemas de fallas y se observó que la tendencia general de ese parámetro es disminuir conforme lo hace la lagunaridad. Estos resultados se muestran en la Tabla 4 y la tendencia general de los valores puede ser comparada con los contenidos en la Tabla 3. De las dos imágenes de sistemas naturales analizadas se obtuvo que la frecuencia de tono de gris media aumentó cuando lo hizo la lagunaridad, es decir para la imagen correspondiente a la escala en metros se obtuvo una frecuencia media de 269 ($\Lambda=1.0417$) y para la de escala en centímetros fue de 658 ($\Lambda=1.0450$). Al menos estos dos valores corresponden a la tendencia mostrada por los parámetros obtenidos de los sistemas generados por el modelo. La tendencia de la lagunaridad y de la longitud media para los sistemas sintéticos se muestra en la Figura 49.

F	200 fallas	500 fallas	1000 fallas
0.5	141	205.85	206.45
0.7	111.6	154.5	153.75
1.0	42.065	64.99	63.8
1.3	21.025	31.405	31.455
1.5	14.535	22.595	23.855
1.9	20.97	22.255	23.83

Tabla 4. Los valores de las longitudes medias en general tienden a disminuir conforme aumenta el valor de F y a aumentar cuando aumenta el número de fallas en el sistema.

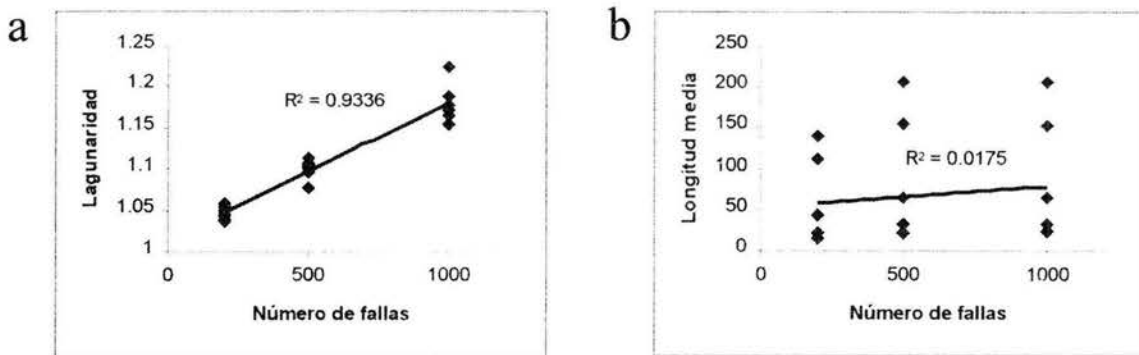


Figura 49. La tendencia de la lagunaridad (a) y de la longitud media (b) conforme aumenta el número de fallas. La lagunaridad para diferentes poblaciones de fallas generadas por el modelo está mejor correlacionada que su longitud media.

A pesar de no haber una caracterización de los patrones geométricos de fallas mediante la lagunaridad, las diferencias geométrica están presentes y uno de los rasgos que permite distinguir la geometría de una distribución a otra es la formación de diversos grupos de fallas. Se identificaron principalmente tres grupos de fallas que resaltan en las distintas distribuciones generadas por el modelo con diferentes valores de F . Se propone entonces una clasificación geométrica para estos conjuntos de fallas y se definen las siguientes familias:

Familia P : en ésta están consideradas las fallas paralelas y subparalelas, es decir cuando las fallas forman ángulos que están entre 0 y 9 grados (Fig. 50a).

Familia O : es la que está formada por fallas oblicuas entre sí, es decir aquellas que forman ángulos entre 10 y 39 grados aproximadamente (Fig. 50b).

Familia *C*: es la que contempla las fallas que al intersectarse forman ángulos rectos o mayores y parece que fueran conjugadas (Fig. 50c).

Las distribuciones de fallas generadas por el modelo se ven predominadas por alguna familia para los diferentes valores de *F*. Por ejemplo cuando *F* toma valores entre 0.5 y 1, las distribuciones geométricas de fallas se ven dominadas por la familia *O*; mientras que para valores de *F* entre 1.3 y 1.9 resaltan las familias *P* y *C* (Fig. 43). Estas familias también están presentes en los sistemas naturales y el dominio de cada una de ellas en la distribución depende de la escala (Fig.44 y 45).

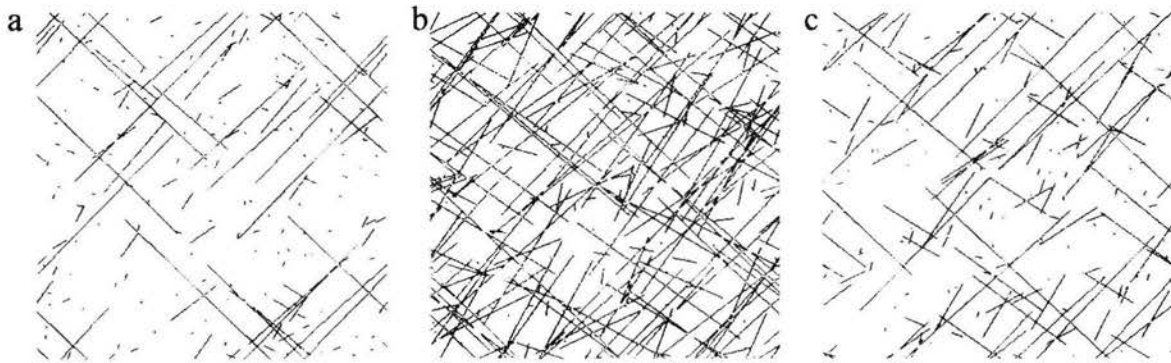


Figura 50. En los diferentes patrones de distribución se forman tres grupos geométricos de fallas llamados falimias. a) Familia *P*, formada por fallas subparalelas, b) Familia *O*, compuesta por fallas oblicuas entre sí y c) Familia *C*, integrada por fallas que se intersectan a 90° o más.

DISCUSIÓN

Una de las condiciones que propicia la formación de fracturas en las rocas, es la liberación de la energía acumulada o relajación de esfuerzos cuando se alcanza un valor crítico. Independientemente de la forma en que se propaguen las fracturas, la distribución de los esfuerzos es un factor clave en la determinación de la geometría de la próxima etapa del proceso de fracturación (Bonnet, et. al., 2001).

La distribución de parámetros de fracturas llega a ser asimétrico debido a un crecimiento preferencial de longitudes de fracturas (Chernyshev & Dearman, 1991). La variabilidad de longitudes de fallas refleja la heterogeneidad del campo de esfuerzos con una orientación preferencial que está inducida por la existencia de fallas ya formadas (Cowie, Vanneste y Sornette, 1993).

Por lo anterior, en el modelo desarrollado en el presente trabajo, se dio preferencia al crecimiento de fallas que satisfacen el criterio de Navier-Coulomb. Es decir a aquellas fracturas que se encuentran a 45° del máximo esfuerzo compresivo. La función que cumple con esta tarea no tiene ningún significado físico, ni estadístico sino más bien geométrico porque se eligió de acuerdo al comportamiento de la tangente en el intervalo de 0 a 45° , cuando esta función alcanza su valor máximo a 45° . Sin embargo, los resultados obtenidos demuestran que la tangente como función de ponderación del crecimiento de las fallas, puede ser vista como una función de distribución de probabilidades de ocurrencia de las fracturas de una longitud dada en el intervalo $0-45^\circ$

$$P(0^\circ \leq x \leq 45^\circ) = \sum_{0^\circ \leq x_j \leq 45^\circ} f(x_j) = \sum_{0^\circ \leq x_j \leq 45^\circ} p_j,$$

la cual para el valor de $x = 45^\circ$ tiene un valor de 1 que corresponde a la suma de las probabilidades del total de la muestra. Si estos valores de la tangente se refiere a la línea de 45° , también se llega a una función de distribución de probabilidades para el intervalo de 45 a 90° . En este último caso la función de peso estaría formada por dos funciones de distribución de probabilidades que coinciden en $x = 45^\circ$.

Aparentemente la función de peso que pondera el crecimiento de las fallas propuesto por el modelo, contribuye a que una población de fallas con una distribución de longitudes

originalmente homogénea alcance, después de un cierto número de etapas de crecimiento, una distribución fractal, dentro de la cual no exista una longitud de falla característica.

El comportamiento fractal que se observó en la distribución de longitudes de fallas modeladas está restringido por un cierto rango de escalas. Esto puede deberse en primer lugar a que los efectos de frontera no son eliminados del todo en el modelo, ya que a pesar de contar con una superficie cerrada las fallas tienen una longitud inicial y existe una longitud máxima que pueden alcanzar pero no superar. Los efectos de tamaño finito presentes en el modelo son consistentes con los del muestreo de los sistemas de fallas naturales, ya que las muestras obtenidas de éstos incluyen un tamaño mínimo de fallas debido a la resolución del método para obtener la muestra y uno máximo ocasionado por el truncado de fallas al hacer el muestreo. De este hecho se tiene que el sistema natural no está fielmente representado por la muestra.

El concepto de fractal conlleva al concepto de infinito, el cual es concebido en el seno de la abstracción, por lo que en la naturaleza es imposible encontrar un fractal. Todo aquello presente en la naturaleza que parece comportarse como un fractal se llama *prefractal*. Esto conduce a que la representación matemática de algún fenómeno real sólo mostrará tendencias asintóticas de la representación matemática de un caso ideal. Para el caso de las fallas, éstas presentarán siempre efectos del tamaño finito porque aunque fuera posible muestrear fielmente un sistema natural, en este habría siempre un tamaño mínimo que no sea representado (por ejemplo el de los átomos) y uno máximo que se debe a la cantidad finita de masa de las rocas analizadas, por esta razón las fallas no podrían presentar un comportamiento fractal ideal. Este hecho está reflejado en los sistemas de fallas generados a partir del modelo aquí propuesto y se ve favorecido por la concordancia con los datos reportados por Cladouhos & Marrett (1996), Bonnet et al. (2001), Gillespie et al. (2001) y Nieto et al., (2003). Aunque cabe aclarar que en el modelo implementado en el programa de cómputo no se han considerado todos factores que también intervienen en el proceso de fracturación y por ende en el desarrollo de fallas.

Las gráficas acumuladas en escala logarítmica presentadas por Cladouhos y Marrett (1996) también favorecen los resultados obtenidos en el presente trabajo, puesto que las obtenidas con el modelo presentan comportamientos similares (Fig.51).

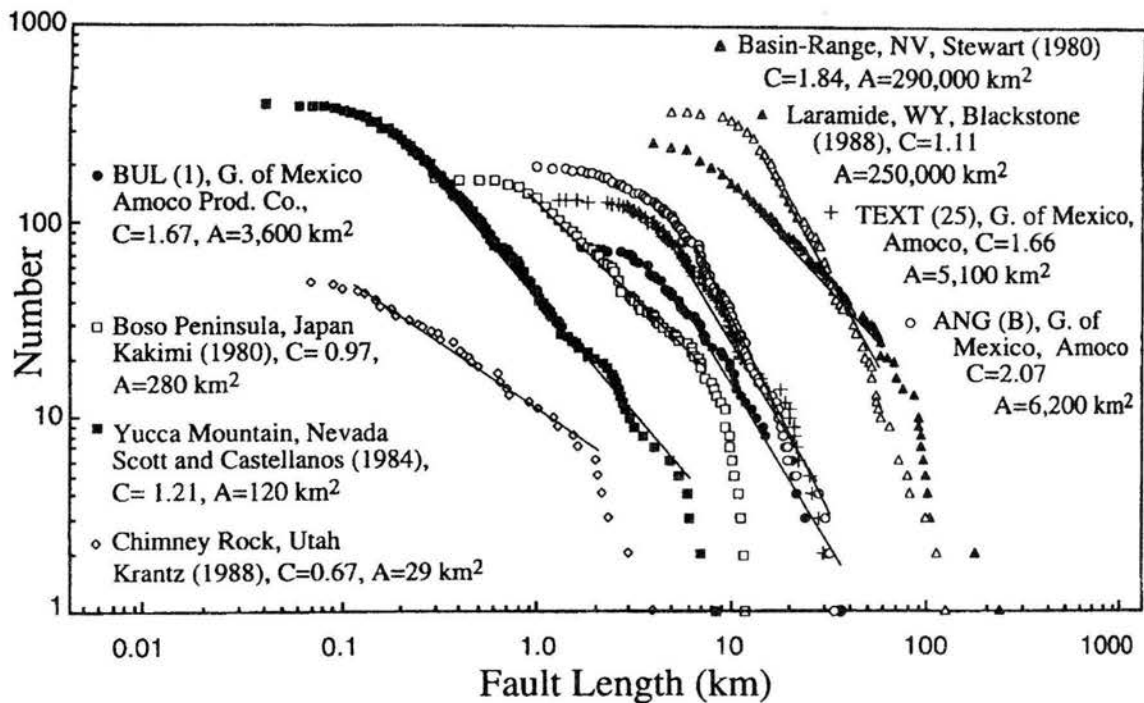


Figura 51. Gráficas acumuladas en escala logarítmica presentadas por Cladouhos y Marrett (1996) y obtenidas con datos de sistemas de fallas naturales.

De las gráficas obtenidas por el modelo sólo se consideró la parte central como el rango efectivo para el cual las longitudes obedecen una ley de potencia. La selección de ese rango es arbitraria porque no existe un criterio físico o estadístico que intervenga en esa elección, por este motivo la determinación del exponente de la ley de potencia a partir de la pendiente de la recta ajustada en esa parte de la gráfica también resulta algo ambiguo. Hasta el momento la versión computacional del modelo permite seleccionar el rango de longitudes para el cual se ajustará una recta, escogiendo por inspección visual la parte central que tenga una tendencia lineal marcada.

Podría ser el caso de que la interacción de todos los factores que toman lugar durante el desarrollo de fallas, como son la fricción, interacción entre fallas, generación de nuevas fallas, densidad de fallas, presión, temperatura, etc. contribuyan a acentuar la tendencia lineal de las gráficas acumuladas en escala logarítmica, es decir que incrementa el rango de longitudes para el cual éstas manifiestan un comportamiento fractal.

Para este modelo se decidió dividir el incremento total de la longitud de la falla en dos partes iguales, cada una de las cuales se refirió a uno de los extremos de la falla. Esto se debió a que en esta etapa sólo se pretendió estudiar el comportamiento de la distribución de

las longitudes en función de su orientación, lo cual no se ve afectado por la manera de acomodar el incremento. Además, la simple forma simétrica elegida para representar las fallas, sustenta la suposición de un crecimiento bilateral (Shipton & Cowie, 2003), aunque esto no tendría por qué ser así si se considerara la interacción entre fallas.

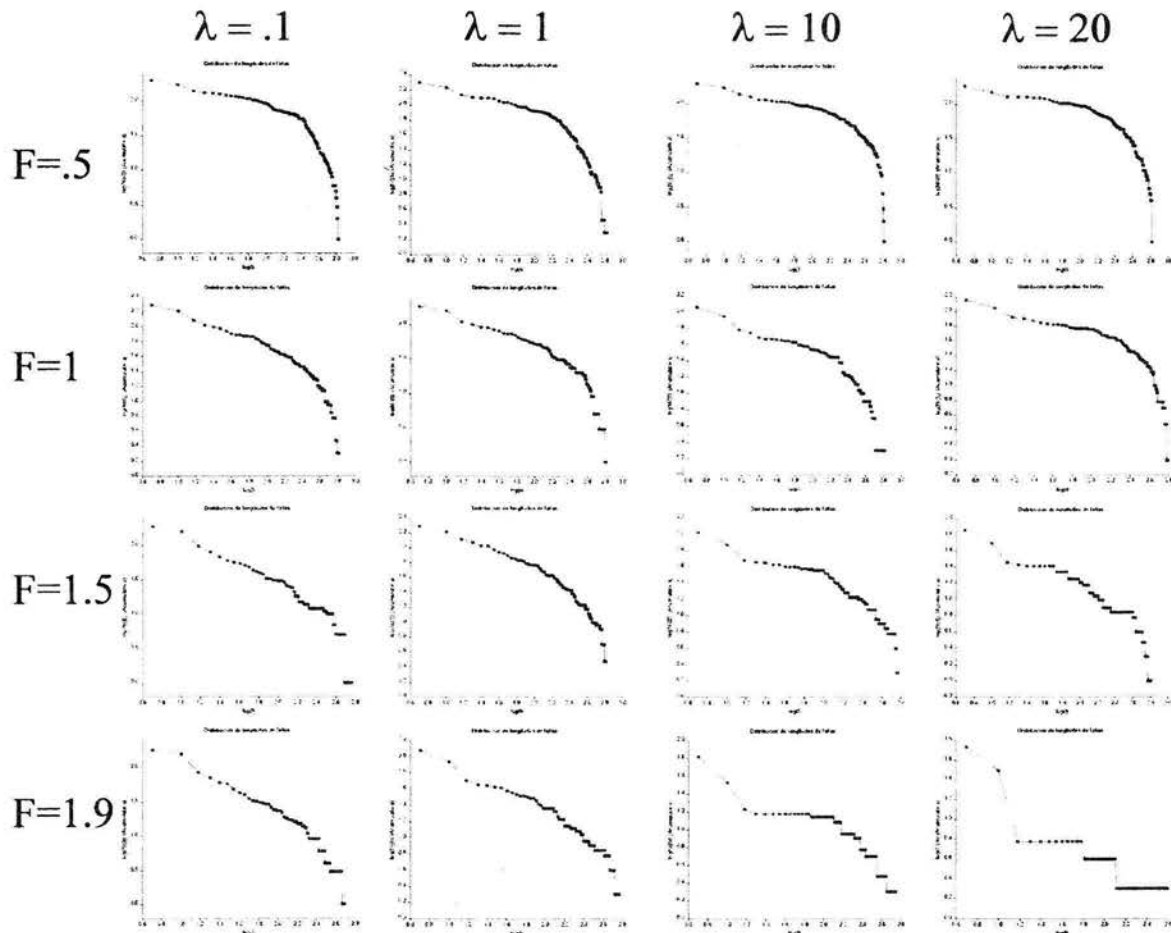


Figura 52. Gráficas en escala logarítmica de las frecuencias acumuladas de las longitudes alcanzadas por las fallas de las poblaciones sintéticas de acuerdo al modelo de crecimiento propuesto en este trabajo, para diferentes valores de F y λ .

El modelo está sujeto a las variaciones de los parámetros que interviene en la regla de crecimiento, y estas variaciones afectan de manera definitiva la distribución de las longitudes de las fallas que crecen de acuerdo a esta regla. Por esa razón, en la Figura 52 se presentan diferentes gráficas en escala logarítmica de las frecuencias acumuladas de las longitudes alcanzadas por las fallas de las diferentes poblaciones sintéticas generadas por el modelo.

Las gráficas muestran que para valores pequeños de λ , entre 0.1 y 1, y para valores de F entre 1.5 y 1.9 existe una tendencia más general por parte de los datos ahí graficados. Esto manifiesta que para ese rango de valores de F y λ , el carácter fractal es mantenido en un rango más amplio de longitudes de fallas. Cuando λ toma valores grandes, de 10 o más, parece perderse el carácter fractal. Quizás esto se deba a la magnitud del tamaño máximo que pueden alcanzar las fallas y al hecho de que con un factor lineal grande, este tamaño máximo se alcanza con menos etapas de crecimiento provocando una variación más abrupta de las longitudes alcanzadas por las fallas.

CONCLUSIONES

El modelo aquí elaborado corresponde a una primera aproximación a un modelo general bidimensional de la evolución longitudinal de fallas que abarca los factores que intervienen en el proceso de fracturación. Esta etapa del modelo general se enfoca a la influencia en el incremento de longitud de las fallas en función de su orientación respecto al máximo esfuerzo compresivo.

El análisis de poblaciones sintéticas de fallas demostró que la orientación de éstas dentro del campo de esfuerzos, es responsable de su crecimiento, lo cual constituye un factor importante para generar una distribución fractal de las longitudes de las fallas. Es decir que si se considera un crecimiento preferencial del patrón en una dirección fija, la población de fallas de igual longitud adquiere al cabo de algunas etapas de crecimiento una distribución fractal de sus longitudes.

De acuerdo a las estadísticas calculadas, el comportamiento fractal de las longitudes de las fallas sintéticas, se observa dentro de un rango de longitudes. El rango de longitudes en el cual se presenta el comportamiento fractal varía de población a población y por supuesto conforme varían los parámetros involucrados en la regla de crecimiento, lo que le propicia al modelo la versatilidad necesaria para representar un amplia gama de patrones observados en condiciones naturales.

Se ha demostrado que resultados obtenidos en esta etapa del modelo son concordantes con la geometría de los patrones de fracturas de los sistemas naturales reportados por la literatura. Sin embargo, en el futuro es necesario analizar los demás factores que intervienen en el proceso de fracturación e integrarlos en el modelo para ampliar el rango de los sistemas con distribución fractal de longitudes, que pueden ser modelados.

A pesar de las simplificaciones hechas en el modelo, éstas no afectaron los parámetros a analizar (longitudes y orientaciones) y han facilitado su implementación en un programa computacional que visualiza la evolución geométrica de patrón de fallas y agiliza el análisis estadístico.

BIBLIOGRAFÍA

- Anderson, A. N., McBratney, A. B. and FitzPatrick,** Soil mass, surface and spectral fractal dimensions estimated from thin section photographs, Soil Sci. Soc. Am. J, Vol 60, pp 962-969, 1996.
- Atkinson, B.K.,** Fracture Mechanics of rock, edited by Barry Kean Atkinson, Department of Geological Sciences, University College London, 1987.
- Bai, Taixu and Pollard, David D.,** Closely spaced fractures in layered rocks: initiation mechanism and propagation kinematics, Journal of Structural Geology, Vol. 22, pp 1409-1425, 2000.
- Balankin Alexander,** Physics of fracture and mechanics of self-affine cracks, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 57, No. 2/3, pp 135-203, 1997.
- Barton & La Pointe,** Fractals in the Earth Sciences, edited by Christopher C. Barton & Paul R. La Pointe, New York, 1995.
- Beltrami, Edward,** Mathematics for dynamic modeling, Academic, Boston, 1998.
- Ben-Zion, Yehuda and Sammis Charles G.,** Characterization of fault zones, Pure and Applied Geophysics, Vol. 160, pp 677-715, 2003.
- Billings, Marland, P.,** Structural geology, Third edition, Prentice-Hall, New Jersey, 1972.
- Bonnet, E., Bour, O., Odling, N.E., Davy, P., Main, I., Cowie, P., and Berkowitz, B.,** Scaling of fracture systems in geological media, Reviews of Geophysics, Vol. 39, No. 3, pp 347-383, 2001.
- Bour, O. & Davy, P.,** Connectivity of random fault networks following a power law fault length distribution, Water Resources Research, Vol. 33, No. 7. pp. 1567-1583, 1997.
- Bour, O. and Davy, P.,** Clustering and size distributios of fault patterns: theory and measurements, Geophysical Research Letters, Vol. 26, No. 13, pp 2001-2004, 1999.
- Bour, O. and Davy, P.,** On the connectivity of three-dimensional fault networks, Water Resources Research, Vol. 34, No. 10, pp 2611-2622, 1998.
- Burda, A. & Färber, G.,** El gran libro de Delphi, Ed. Marcombo, España, 1996.
- Chernyshev S. N., Dearman, W. R.,** Rock Fractures, Butterworth-Heinemann, 1991.

- Cladouhos, T.T. & Marrett, R.,** Are fault growth and linkage models consistent with power-law distributions of fault length?, Journal of Structural Geology, Vol. 8, Nos 2/3, pp 281 to 293. 1996.
- Cowie, P., Vanneste, C. and Sornette, D.,** Multifractal scaling properties of a growing fault population, Geophys. J. Int., Vol. 122, pp 457-469, 1995.
- Cowie, P., Vanneste, C. and Sornette, D.,** Statistical Physics Model for the Spatiotemporal Evolution of Faults, Journal of Geophysical Research, Vol. 98, No. B12, pp 21809, 21821, 1993.
- Cowie, P.A. and Scholz, C.H.,** Displacement-length scaling relationship for faults: data synthesis and discussion, Journal of Structural Geology, Vol. 14, No. 10, pp 1149 to 1156, 1992.
- Cowie, P.A. and Scholz, C.H.,** Physical explanation for the displacement-length relationship of faults using a post-yield fracture mechanics model, Journal of Structural Geology, Vol. 14, No. 10, pp 1133 to 1148, 1992.
- Davis, George Herbert and Reynolds, Stephen J.,** Structural geology of rocks and regions, Wiley, New York, 1996.
- Davy, Ph., Sornette, A. and Sornette, D.,** Some consequences of a proposed fractal nature of continental faulting, Letters to Nature, Vol. 348. pp 56-58, 1990.
- Eichhubl, Peter and Aydin, Atilla,** Ductile opening-mode fracture by pore growth and coalescence during combustion alteration of siliceous mudstone, Journal of Structural Geology, Vol. 25, pp 121-134, 2003.
- Engelder, T.,** Transitional-tensile fracture propagation: a status report, Journal of Structural Geology, Vol. 21, pp 1049-1055. 1999.
- Escuder Viruete, J., Carbonell, R., Jurado, M. J., Martín, D. y Pérez-Estaún, A.,** Two-dimensional geostatistical modeling and prediction of the fracture system in the Albala Granitic Pluton, sw Iberian Massif, Spain, Journal of Structural Geology, Vol 23, pp 2011-2023, 2001.
- Gabrielli, P. G.,** Strength and fracture in strong glasses, Philosophical Magazine B-Physics of Condensed Matter Statistical Mechanics Electronic Optical and Magnetic Properties, Vol. 8, No. 4, pp 439-445, 2002.

- Gillespie**, P. A., Howard, C. B., Walsh, J. J. and Wtterson, J., Measurement and characterization of spatial distributions of fractures, Tectonophysics, No. 226, pp 113-141, 1993.
- Goodman**, Richard E., Introduction to rock mechanics, Second edition, John Wiley & Sons, Canada, 1989.
- Hines**, William W., Montgomery, Douglas C., Probabilidad y estadística para ingeniería, CECSA, tercera edición, México, 1998.
- Hobbs**, B. E., Means, W. D. and Williams, P. F., An outline of structural geology, John Wiley & Sons, Inc., USA, 1976.
- Jassen** C., Wagner F. C., Zang A., Dresen G., Fracture process zone in granite: a microstructural analysis, Earth Sciences, Vol. 90, pp 46-59, 2001.
- Kim**, Young-Seog, Peacock, David C. P. and Sanderson, David J., Fault damage zones, Journal of Structural Geology, Vol. 26, pp 503-517, 2004.
- Kinsey**, L. Christine, Topology of surfaces, Springer-Verlag, New York, 1993.
- Kreyszig**, Erwin., Estadística matemática, principios y métodos, Ed. Limusa, México, 1974.
- Lefschetz**, Solomon, Algebraic topology, American Mathematical Society, 1942.
- Mandelbrot**, Benoit B., Gaussian self-affinity and fractals, Springer, United States of America, 2002.
- Mandelbrot**, Benoit B., The fractal geometry of nature, W.H. and Company, New York, 1983.
- Margolus**, Norman, Physics-like models of computation, Physica, Vol. 10D, pp 81-95, 1984.
- Martin**, O., Odlyzko, A. M. and Wolfram, S., Algebraic properties of Cellular Automata, Communications in Mathematical Physics, Vol. 93, pp 219-258, 1984.
- Means**, W. D., Stress and strain, basic concepts of continuum mechanics for geologists, Springer-Verlag, México, 1976.
- National** Research Council, Rock fractures and fluid flow, National Academy Press, Washington, D. C., 1996.
- Nieto**, A., Alanis, S., Tolson, G., Oleschko, K., Xu, S., Pérez, J., Spatial distribution, scaling and self-similar behavior of fracture arrays, en revision.

- Oleschko**, Klavdia, Parrot, Jean-Francois, Ronquilo, Gerardo, Shoba, Sergey, Stoops, Georges and Marcelino, Vera, Weathering: Toward a universal fractal quantifying, en revisión, 2004.
- Olson**, Jon E., Joint Pattern Development: effects of subcritical crack growth and mechanical crack interaction, Journal of Geophysical Research, Vol. 98. No. B7, pp 12251-12265, 1993.
- Ouillon**, G., Castain, C. & Sornette, D., Hierarchical geometry of faulting, Journal of Geophysical Research, Vol. 101, No. B3, pp 5477-5487, 1996.
- Parrot**, Jean Francois, Histogene y Frecuencia, Instituto de Geología, Universidad Nacional Autónoma de México, 2003.
- Peacock**, D. C. P., Displacements and segment linkage in strike-slip fault zones, Journal of Structural Geology, Vol. 13, No. 9, pp 1025-1035, 1991.
- Peitgen**, Heinz-Otto, Jürgens, Hartmut and Saupe, Dietmar, Fractals for the classroom, Part I, Springer-Verlag and National Council of Teachers of Mathematics, New York, 1997.
- Pickering**, G., Bull, J. M. & Sanderson, D. J., Sampling power-law distributions, Tectonophysics No. 248, pp 1-20, 1995.
- Potts**, Graham J. and Reddy, Steven M., Application of younging tables to the construction of relative deformation histories –1: Fracture systems, Journal of Structural Geology, Vol. 22, pp 1473-1490, 2000.
- Ramsay** John G., Plegamiento y fracturación de las rocas, versión española Bastida, F. Y Gil, I., H. Blume Ediciones, España, 1977.
- Ramsay** John G., The techniques of Modern Structural Geology, M. I. Huber, 1987.
- Ranalli** Giorgio, Rheology of the Earth, Ottawa, Canada, 1995.
- Regenauer-Lieb**, K. and Yuen, D. A., Modeling shear zones in geological and planetary sciences: solid and fluid-thermal-mechanical approaches, Earth-Science Reviews, Vol. 63, pp 295-349, 2003.
- Renshaw** Carl E. & Schulson, Erland M., Universal Behaviour in compressive failure of brittle materials, Nature, Vol. 412, pp 897-900, 2001.
- Renshaw** Carl E., Mechanical controls on the spatial density of opening-mode fracture networks, Geology, v. 25, no. 10, pp 923-926, 1997.
- Resnick**, Robert and Halliday, David, Física, Parte I, Editorial Continental, México, 1982.

- Scholz** C. H., The mechanics of earthquakes and faulting, Cambridge University Press, Second edition, 2002.
- Scholz**, C. H., Dawers, N. H., Yu, J. Z., Anders, M. H. and Cowie, P. A., Fault Growth and fault scaling laws: preliminary results, Journal of Geophysical Research, Vol. 98, No. B12, pp 21951-21961, 1993.
- Schröder**, Manfred., Fractal, chaos, power laws, W. H. Freeman and Company, New York, 2000.
- Seco**, Manuel, Andrés, Olimpia y Ramos, Gabino, Diccionario del Español Actual, Ed. Aguilar, Vol. 2, p 3099, Madrid, 1999.
- Segall**, P. and Pollard, D. D., Mechanics of Discontinuous Faults, Journal of Geophysical Research, Vol. 85, No. B8, pp 4337-4350, 1980.
- Shipton**, Z. K. & Cowie, P. A., A conceptual model for the origin of fault damage zone structures in high-porosity sandstone, Journal of Structural Geology, Vol. 25, pp 333-344, 2003.
- Sirat**, M. and Talbot, C. J., Application of artificial neural networks to fracture analysis at the Äspö HRL, Sweden: fracture sets classification, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol. 38, pp 621-639, 2001.
- Stein**, Sherman K., Cálculo y geometría analítica, Tercera edición, McGraw-Hill, México, 1992.
- Tolson**, Gustavo, Fractal Análisis, Instituto de Geología, Universidad Nacional Autónoma de México, 2003.
- Tong**, J., Three stages of fatigue crack growth in GFRP composite laminates, Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the Asme, Vol. 123, No. 1, pp 139-143, 2001.
- Turcotte** D. L., Fractals and Chaos in Geology and Geophysics, New York, 1997.
- Wei**, K. and De Bremaecker, J. Cl., Fracture grow I. Formulation and implementations, Geophysics, No. 122, pp 735-745, 1995.
- Wei**, K. and De Bremaecker, J. Cl., Fracture grow II. Case studies, Geophysics, No. 122, pp 746-754, 1995.
- Wolfram**, Stephen., Statistical mechanics of cellular automata, Reviews of Modern Physics, Vol. 55, No. 3, pp 601-643, 1983.

Wolfram, Stephen., Twenty problems in the theory of cellular automata, Physica Scripta, Vol. T9, pp 170-183, 1985.

Zhen, Yadong, Wang, Tao, Ma, Mingbo and Davis, Gregoty A., Maximum effective moment criterio and the origin of low-angle normal faults, Journal of Structural Geology, Vol. 26, pp 271-285, 2004.

APÉNDICES

A. PLANOS DE MÁXIMO ESFUERZO DE CIZALLA

(Tomado del libro de Ramsay, 1977)

Los planos de máximo esfuerzo de cizalla se determinan encontrando los valores máximos de la ecuación que resuelve los esfuerzos de cizalla que actúan en una superficie plana y la cual está dada por

$$\tau = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin 2\phi \quad (A1)$$

donde τ representa el esfuerzo de cizalla, σ_1 , y σ_2 son los esfuerzos principales y ϕ el ángulo donde el esfuerzo de cizalla es definido.

Los valores máximos de los esfuerzos de cizalla se dan en los valores estacionarios de la función y para encontrarlos se debe derivar la ecuación (A1) con respecto a ϕ e igualar a cero la derivada.

$$\frac{d\tau}{d\phi} = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\phi = 0 \quad (A2)$$

Debido a que $(\sigma_1 - \sigma_2)$, generalmente no es igual a cero, se tiene que (A2) es cero si $\cos 2\phi = 0$. De esto se obtiene que los valores estacionarios son $\pm 45^\circ$. Como $(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\phi$ es positiva para los valores estacionarios, se tiene que estos definen dos máximos de $\tau = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin 2\phi$. Entonces los esfuerzos de cizalla máximos son definidos en ángulos de $\pm 45^\circ$.

B. LOGARITMOS Y LEYES DE POTENCIA

(Tomado del libro de Stein, 1992)

Si b y c son números positivos, $b \neq 1$, y

$$b^x = c$$

entonces el número x es el *logaritmo* de c en base b , y se escribe

$$\log_b c$$

Cualquier función exponencial puede traducirse en una ecuación logarítmica $x = \log_b c$, igual que cualquier frase en español puede traducirse al inglés.

Puesto que $b^x = c$ es equivalente a $x = \log_b c$, se sigue que

$$b^{\log_b c} = c$$

lo cual reformula la definición del logaritmo.

Puesto que cada ecuación exponencial se traduce en otra logarítmica, toda propiedad de las exponenciales lleva asociada una propiedad para los logaritmos. Por ejemplo, la información de que

$$b^0 = 1$$

se traduce al lenguaje de los logaritmos como

$$\log_b 1 = 0,$$

el logaritmo de 1 en cualquier base es 0. Otro ejemplo es

$$b^1 = b$$

que quiere decir que el logaritmo de b (la base) en base b es 1,

$$\log_b b = 1.$$

La siguiente tabla es una lista de propiedades fundamentales de las funciones exponenciales junto con sus asociadas para los logaritmos

Exponentes	Logaritmos
$b^0 = 1$	$\log_b 1 = 0$
$b^{1/2} = \sqrt{b}$	$\log_b \sqrt{b} = \frac{1}{2}$

$b^1 = b$	$\log_b b = 1$
$b^{x+y} = b^x b^y$	$\log_b cd = \log_b c + \log_b d$
$b^{-x} = \frac{1}{b^x}$	$\log_b \left(\frac{1}{c}\right) = -\log_b c$
$b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}$	$\log_b \left(\frac{c}{d}\right) = \log_b c - \log_b d$
$(b^x)^y = b^{xy}$	$\log_b c^m = m \log_b c$

Para hallar la derivada de $\log_b x$ primero se analizará el siguiente límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$$

Una doble influencia opera sobre $(1+h)^{1/h}$ cuando $h \rightarrow 0$. (por sencillez se tomará h positivo). En primer lugar la base es casi 1, de manera que hay cierta esperanza de que $(1+h)^{1/h}$ sea cercano a 1. Pero el exponente se hace arbitrariamente grande. Así que también cabe esperar que $(1+h)^{1/h}$ se haga grande por estar la cantidad $1+h$ elevada a un exponente enorme.

Los valores numéricos para $(1+h)^{1/h}$ indican que ambas influencias consiguen un equilibrio. Cuando $h \rightarrow 0$ por valores positivos, $(1+h)^{1/h}$ da la impresión de tender a un número cuya expresión decimal empieza por 2.718. Análogamente, cuando $h \rightarrow 0$ por valores negativos, $(1+h)^{1/h}$ parece aproximarse a ese mismo número.

Con el fin de obtener la forma explícita de la derivada de las funciones logarítmicas, se supondrá que $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$ existe. Este límite se denota e en honor al matemático Leonhard Euler y se define como

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} \approx 2.718281828$$

Como $(1+h)^{1/h} \rightarrow e$ cuando $h \rightarrow 0$, se puede decir que

$$(1 + \text{número pequeño})^{\text{recíproco del mismo número pequeño}} \approx e.$$

En consecuencia, para x fijo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = e$$

Para encontrar la derivada de la función logaritmo se partirá de la definición de la derivada mediante límites

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_b(x + \Delta x) - \log_b x}{\Delta x}$$

Antes de hacer que $\Delta x \rightarrow 0$, se reescribirá el cociente de incrementos $\frac{\log_b(x + \Delta x) - \log_b x}{\Delta x}$,

usando álgebra y propiedades de los logaritmos, como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\log_b(x + \Delta x) - \log_b x}{\Delta x} &= \frac{\log_b\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_b\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\ &= \log_b\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_b\left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_b\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \end{aligned}$$

Si ahora se toman los límites se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_b(x + \Delta x) - \log_b x}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_b\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_b\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{x} \log_b\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right) = \frac{1}{x} \log_b e \end{aligned}$$

Por lo tanto la derivada de la función logaritmo está dada por

$$(\log_b x)' = \frac{\log_b e}{x}$$

¿Para qué b la fórmula $\frac{\log_b e}{x}$ adquiere una forma más simple? Es aquella para la cual $\log_b e = 1$, es decir b^1 es igual a e . En este caso b es e y así la derivada de la función logaritmo está dada por

$$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{\log_e e}{x} = \frac{1}{x}$$

y $\log_e x$ recibe el nombre de logaritmo natural y se denota por $\ln(x)$.

Si se tiene una función de potencia de la forma

$$f(x) = cx^r$$

y se toman los logaritmos (en cualquier base) de ambos lados de la igualdad se tiene algo de la forma

$$\log_b f(x) = \log_b cx^r = \log_b c + \log_b x^r = \log_b c + r \log_b x$$

entonces la función de potencia toma la forma de una recta en una escala logarítmica, donde r es la pendiente y se resuelve como

$$r = \frac{\log_b f(x) - \log_b c}{\log_b x} = \frac{\log_b \frac{f(x)}{c}}{\log_b x}$$

Cuando en una función de potencia $r < 0$ se llama función hiperbólica porque la gráfica de esta función es como una hipérbola y al tomar los logaritmos se transforma en una recta con pendiente negativa.

Una ley de potencia es una relación fundamentada en una función de potencia en la cual generalmente no se da la igualdad. Esto es debido a que esta ley de potencia asigna un valor promedio para algún número de elementos en el dominio que la satisfacen, pudiendo no ser éste el número real de elementos en el dominio que lo hace. Una ley de potencia tiene la forma

$$f(x) \propto cx^r \quad x \geq X$$

y entonces una función de potencia es un caso particular de esta ley que adquiere un valor promedio para un único elemento en el dominio que satisface $x = X$ dándose entonces la igualdad.

Como una ley de potencia es una regla que se cumple en promedio, su gráfica describe sólo la tendencia del comportamiento de los elementos que la satisfacen. Si se cambia la escala de esta gráfica a una escala logarítmica, la tendencia del comportamiento comprendido en ésta debe ser lineal.

Cuando una ley de potencia es homogénea el exponente r no varía, entonces el suceso asociado a ésta tiene el mismo comportamiento en todas las escalas y puede ser escalado por medio de r y recibe el nombre de auto-similar. La gráfica en escala logarítmica para una ley de potencia con r fija marca una tendencia lineal general cuya línea de regresión tiene pendiente r .

En general en una ley de potencia r no tiene por qué ser fija, ni si quiera tiene por qué variar en los números enteros. El caso más general de una ley de potencia es cuando r varía en los reales. La gráfica en escala logarítmica de este caso está formada por secciones con tendencia lineal escalonadas, en la cual cada sección se ajusta a una línea de pendiente r para los diferentes valores que toma r .

C. SUPERFICIES HOMEOMORFAS

(Tomado del libro de Kinsey, 1993)

Dos objetos son topológicamente idénticos si existe una deformación continua de uno a otro. El desarrollo geométrico de esta idea requiere de la definición y estudio de congruencias porque éstas dan noción de la igualdad geométrica. Las figuras geométricas deben tener las mismas propiedades geométricas: longitudes de lados correspondientes, medidas de ángulos, área, volumen, perímetro y curvatura, entre otros.

Una relación *equivalencia* en un conjunto de datos es una relación en el conjunto tal que:

- (1) Para toda x en el conjunto, $x \sim x$ (reflexividad)
- (2) Si $x \sim y$, entonces $y \sim x$ (simetría)
- (3) Si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces $x \sim z$ (transitividad)

Una relación de equivalencia es una relación entre objetos que actúa como igualdad. Por ejemplo los triángulos A y B de la Figura C1 tienen lados y ángulos correspondientes con iguales magnitudes y tienen la misma área y perímetro, pero estos triángulos no son iguales puesto que consisten de diferentes puntos. La congruencia entre figuras no dice nada acerca de su posición, o de su color, o de su tamaño; sólo da información de sus propiedades geométricas.

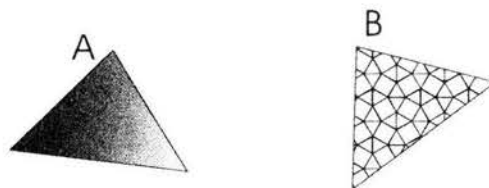


Figura C1 Triángulos congruentes

Otra relación de equivalencia geométrica es la similitud. Las figuras similares tendrán las mismas magnitudes en sus ángulos correspondientes, sus lados correspondientes serán proporcionales y sus áreas y perímetros no tendrán la misma magnitud. La relación de equivalencia apropiada depende del contexto y del objetivo propuesto. Los diferentes campos en las matemáticas requieren de diferentes relaciones de equivalencias, definidas para los objetos de interés y para las propiedades que se desean preservar. Una igualdad topológica determina cuando dos objetos son los mismos topológicamente aunque ellos difieran geométricamente o en otros aspectos.

Dos espacios topológicos A y B son topológicamente *equivalentes* u *homeomorfos* si existe una función continua e invertible $f: A \rightarrow B$ con inversa continua $f^{-1}: B \rightarrow A$. La función f es llamada *homeomorfismo*.

Una operación que es no continua corta una figura en dos. La inversa de cortar es pegar, la cual invierte la operación cortar y esto no es un homeomorfismo. Considere los ejemplos de la Figura C2.

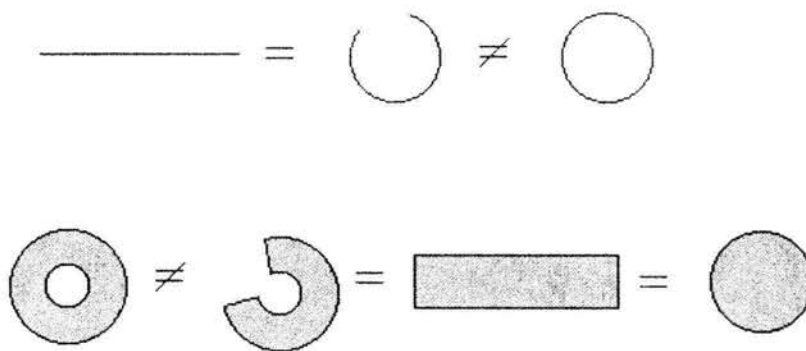


Figura C2 Más ejemplos de homeomorfismos.

Los homeomorfismos existentes entre espacios topológicos generalmente son muy complejos de definir explícitamente, aunque en algunos casos se puede deducir de algunas construcciones topológicas. Por ejemplo, el cuadrado es homeomorfo a la superficie de una dona, llamada toroide, y para éste homeomorfismo no existe una forma explícita de escribirlo pero se puede inferir esta relación de equivalencia de las siguientes construcciones.

Como el cuadrado y el toroide son espacios topológicos que se construyen a partir del producto (cartesiano) entre otros espacios más simples que ellos, se aprovechará este hecho para mostrar que existe un homeomorfismo entre el cuadrado y el toroide.

Si X y Y son dos espacios cualesquiera, su producto (cartesiano) se define como el conjunto de todos los pares ordenados (x,y) tales que x está en X y y está en Y y se escribe como

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Por lo tanto $\mathfrak{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathfrak{R}\} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$. De manera análoga, si I denota el intervalo $[0,1]$ y S^1 el círculo unitario, entonces $I \times I$ es el cuadrado unitario, $S^1 \times I$ un cilindro y $S^1 \times S^1$ el toroide (Fig. C3).

Cualesquier topologías dadas en X y Y inducen topologías en $X \times Y$.

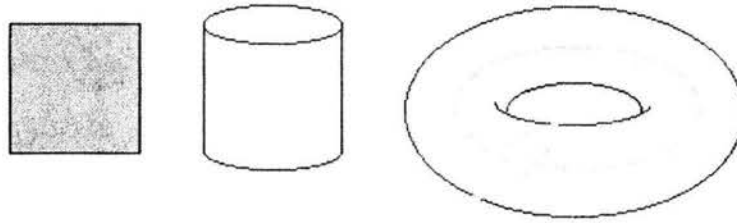


Figura C3 Espacios producto

Ahora, se sabe que existe una función $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ de los números reales al círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ definida por

$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Note que $f(t) \in S^1$ ya que $\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t) = 1$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Entonces $f(0) = (1, 0)$, $f(1/4) = (0, 1)$, $f(1/2) = (-1, 0)$, ..., $f(1) = (1, 0)$, etc. La acción de f puede ser plasmada como cubierta de línea en sentido antihorario alrededor de un círculo, tal que $f(0) = f(1) = \dots = f(n)$ con $n \in \mathbb{Z}$ y donde \mathbb{Z} denota los enteros (Fig. C4).

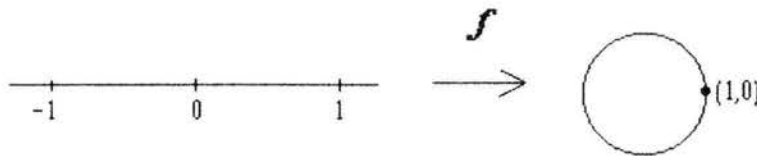


Figura C4 \mathbb{R} con la identificación definida por f cubre la línea alrededor del círculo.

Como esta función f se repite para cada intervalo de longitud uno, se puede restringir el dominio de f al intervalo I para tener una función que relacione el intervalo unitario con el círculo unitario. Retomando que el cuadrado es definido por $I \times I$ y el toroide por $S^1 \times S^1$ y como existe $f: I \rightarrow S^1$, entonces puede existir una función $g: I \times I \rightarrow S^1 \times S^1$ que relacione el cuadrado unitario con el toroide. Para mostrar la existencia de tal función g se hará la siguiente construcción:

Tómese una pieza cuadrada y únense dos lados opuestos para formar un tubo o cilindro, después flexiónese éste hasta que sus dos extremos se unan y formen un toroide como se muestra en la Figura C5. Es claro que existe una función del cuadrado al toroide puesto

que cada punto del cuadrado es enviado al toroide por la función, pero existe otra forma más simple de describir la acción: se mueven los puntos del interior y orilla del cuadrado de modo que los puntos correspondiente de los lados opuestos queden pegados. Por supuesto que se necesitan reglas sensibles para el pegado antes de hacerlo. Las reglas naturales son:

- (1) Ningún punto x puede quedar pegado en él mismo.
- (2) Si x es pegado a y , entonces y es pegado a x .
- (3) Si x es pegado a y y y es pegado a z , entonces x es pegado a z .

Si lo anterior se define con clases de equivalencia a partir de una relación de equivalencia se obtiene:

Si X es un espacio topológico con \sim una relación de equivalencia definida en X , se definen clases de equivalencia de $x \in X$ por

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

La identificación del espacio X/\sim es definida como el conjunto de clases de equivalencia de la relación \sim , entonces

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

El espacio X/\sim es precisamente una forma fantasiosa de decir que el nuevo espacio es creado al tomar el espacio X y pegar x a cualquier y que satisfaga $y \sim x$.

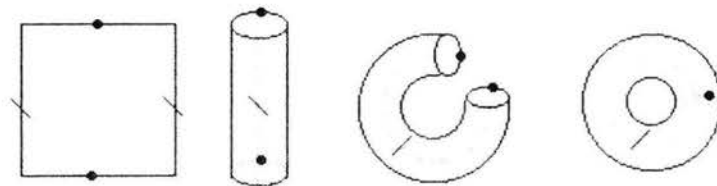


Figura C5 Diagrama plano del toroide.

D. ACERCA DE LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL

La versión computacional del modelo de crecimiento de fallas está elaborado en *Delphi* versión 5 que es una herramienta para desarrollar programas que permite la creación de aplicaciones para Windows 3.1/3.11, 95, 98 y NT. Las aplicaciones pueden colocarse de forma simple en la pantalla, para lo que se dispone de una paleta con una gran variedad de componentes, algo así como los bloques de construcción de cada programa. *Delphi* permite crear herramientas de dos formas: una de forma visual en la pantalla y la otra a través de la programación convencional, para lo cual *Delphi* dispone del lenguaje de programación llamado *Object Pascal*.

El punto de partida de esta versión computacional es el llamado archivo de proyecto, que es el programa principal de una aplicación creada en *Delphi* y que contiene sólo el código fuente Pascal. La aplicación aquí creada dispone de cuatro componentes formularios (o simplemente formularios) insertadas en un formulario principal y que es el que corresponde al programa principal. En esos formularios representan las ventanas donde se abordan los aspectos geométrico y estadístico del modelo.

Cada formulario tiene su propio código fuente y *Delphi* almacena estas partes en archivos separados, por lo que de cada formulario resultan dos archivos. Uno contiene todo el entorno gráfico del formulario y el otro contiene el código fuente en texto ANSI (secuencia especial de caracteres que interpreta como comandos y ejecuta) y la conexión de éstos está en sus nombres.

Tanto la estructura visual del programa como el código que permite el intercambio de ventanas mediante pestañas es de Renate Schaaf, así como su componente *TMathImage*.

Los cuatro formularios son *MainUnit*, *GeomUnit*, *DatosUnit* y *HistoUnit*. El primero es un formulario base que alberga a los otros tres que representan las tres ventanas o páginas que pueden mostrar el programa en el que están implementadas la partes geométrica y estadística del modelo de crecimiento de fallas. El intercambio de formularios ocurre a partir de su selección por medio de pestañas en el borde inferior del formulario principal.

El componente principal de la unidad de código de los formularios *DatosUnit* y *HistoUnit* que permite la salida gráfica de datos estadísticos de las poblaciones de fracturas modeladas en *GeomUnit*, es el objeto gráfico *XYGraph1* de Grahame Grieve. En estos formularios

también se incorpora un objeto StringGrid para almacenar los datos numéricos en forma tabular.

En la unidad de código que representa la página de caracterización geométrica de los datos de las fallas que se modelan, consiste en un lienzo gráfico (MathImage1) sobre el cual se grafican los elementos que se modelan. La parte izquierda del formulario contiene distintos controles gráficos que permiten el control y la ejecución del modelo, así como la entrada de los distintos parámetros del modelo (Fig. D6).

En el apéndice E se anexa el listado del programa en formato digital, el cual se encuentra documentado para un mejor entendimiento del mismo. Cabe aclarar que la programación en Delphi se realiza por eventos por lo que la secuencia del listado no influye en la ejecución del programa.

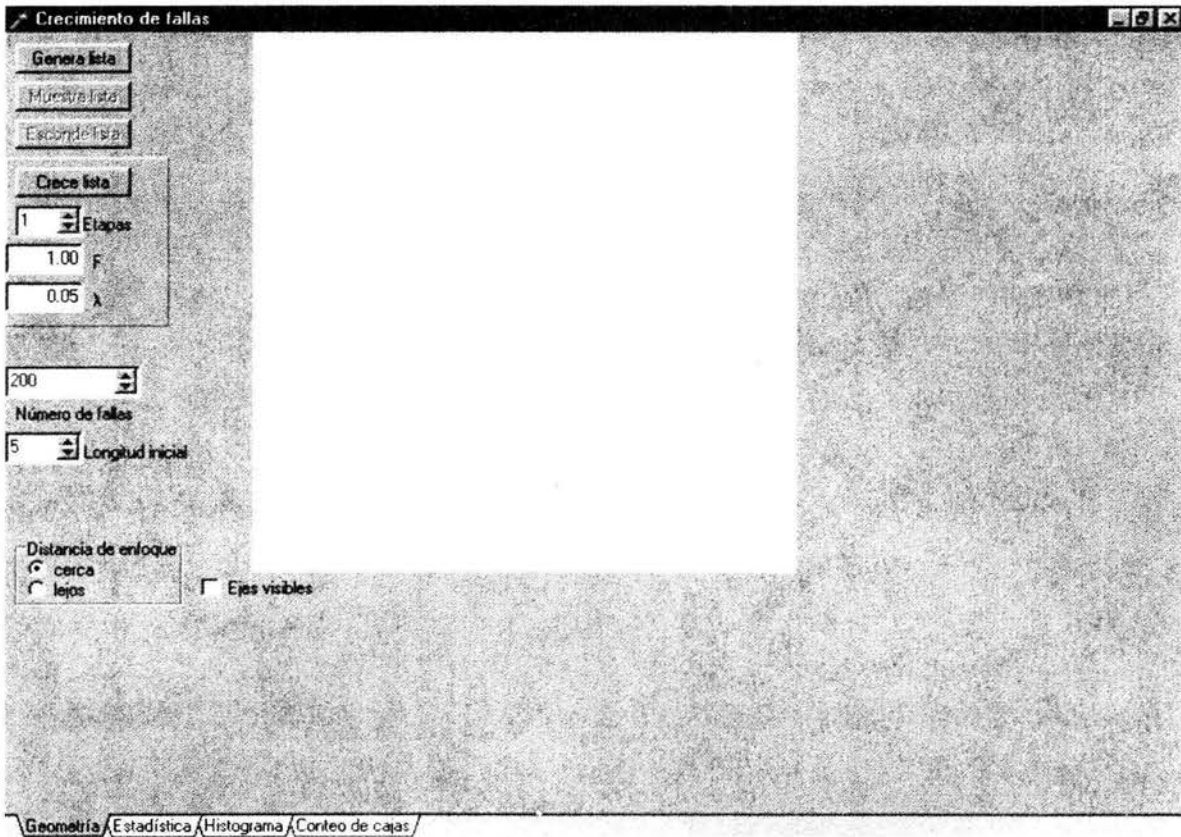


Figura D6 Estructura visual del programa.