



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGÓN**

**“CONCEPTOS GENERALES Y TEORÍA DEL
MOVIMIENTO DE FLOTADORES”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

I N G E N I E R O C I V I L

P R E S E N T A:

JAVIER COCONE DANIEL

ASESOR:

ING. VALENTE TORRES ORTIZ

MÉXICO

2004.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGÓN
DIRECCIÓN

JAVIER COCONE DANIEL
Presente

Con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobado su tema de tesis y asesor.

TÍTULO:
"CONCEPTOS GENERALES Y TEORÍA DEL MOVIMIENTO DE FLOTADORES"

ASESOR: Ing. VALENTE TORRES ORTIZ

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
San Juan de Aragón, México, 9 de junio de 2009

LA DIRECTORA

ARQ. LILIA TURCOTT GONZÁLEZ



C p Secretaria Académica
C p Jefatura de Carrera de Ingeniería Civil
C p Asesor de Tesis

LTG/AIR/lla



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
 ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES CAMPUS ARAGÓN
 JEFATURA DE CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL



LIC. ALBERTO IBARRA ROSAS
 JEFE DE LA UNIDAD ACADÉMICA
 PRESENTE

San Juan de Aragón, Estado de México, a 12 de Noviembre de 2003.

Por este conducto, me permito informarle que el (la) alumno(a) de la Carrera de Ingeniería Civil,

COCONE APELLIDO PATERNO	DANIEL APELLIDO MATERNO	JAVIER NOMBRE(S)	No. de Cuenta: 09302504-1
----------------------------	----------------------------	---------------------	------------------------------

Ha concluido su trabajo de tesis denominado:



CONCEPTOS GENERALES Y TEORIA DEL MOVIMIENTO DE FLOTADORES.

Considerando que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el Examen Profesional correspondiente.

Por lo que le solicito, tenga a bien autorizar, la continuación de los trámites para su titulación.

Sin mas por el momento, agradezco de antemano su amable atención y quedo a sus apreciables órdenes.

ATENTAMENTE

 ING. VALENTE TORRES ORTIZ Director de Tesis	 Ing. Martín Ortiz León Jefe de Carrera de Ingeniería Civil
--	--

- c c p - Lic. Ma. Teresa Lima Sánchez - Jefa del Departamento de Servicios Escolares
- c c p - Ing. Martín Ortiz León - Jefe de la Carrera de Ingeniería Civil
- c c p - Ing. Karla Ivonne Gutiérrez Vázquez - Secretaria Técnica de Ingeniería Civil
- c c p - Asesor de Tesis
- c c p - Interesado



*Hijo mío, si recibieres mis palabras,
y mis mandamientos guardares dentro de ti,
haciendo estar atento tu oído a la sabiduría;
si inclinares tu corazón a la prudencia,
si clamares a la inteligencia,
y a la prudencia dieres tu voz;
si como a la plata la buscares,
y la escudriñares como a tesoros,
entonces entenderás el temor de Jehová,
y hallarás el conocimiento de Dios.
Por que Jehová da la sabiduría,
y de su boca viene el conocimiento
y la inteligencia.*

*El provee de sana sabiduría a los rectos;
es escudo a los que caminan rectamente.*

*Entonces entenderás justicia, juicio,
y equidad, y todo buen camino.*

*Cuando la sabiduría entrare en tu corazón,
y la ciencia fuere grata a tu alma,
la discreción te guardará;
te preservará la inteligencia.*



A MIS PADRES.

*Por darme la vida, por su amor y fortaleza,
por que gracias a su lucha, enseñanza, formación
y esfuerzo me es posible estar donde me encuentro
papá, gracias por el cariño que siempre me tuviste,
te llevo siempre en mi corazón.*

*mamá, gracias por estar siempre conmigo, apoyándome
en todo momento, por ser mi motivación y fortaleza,
gracias mamá.*

Con admiración cariño y respeto.

Albino Cocone D.

Ma. de los Ángeles Daniel C.

A MIS HERMANOS.

*Cristina, Santiago, Leopoldo, Pascual,
Alicia, Heriberto, Martha, Isabel,
Humberto, Adrián, Eva y Ángeles.*

*Por que siempre están cuando los necesito,
apoyándome y alentándome siempre
a seguir adelante, sobre todo por cuidar de mí.
Adrián gracias por ser más que un hermano.*



*Sea el presente un pequeño homenaje a
quienes nos han legado su luz.
Con gratitud y cariño a*

*Universidad Nacional Autónoma de México.
Escuela Nacional de Estudios Profesionales Aragón.*

*A mi amada Universidad por ser mi casa durante tanto tiempo,
a todo lo que ella comprende,
y muy en especial al Ing. Valente Torres Ortiz.*

*A todos los maestros que intervinieron
desde mi educación básica, hasta la profesional.
¡Muchas gracias!*

*A la colaboración de todos mis amigos y compañeros
que compartieron clases, experiencias, alegrías y tristezas
pero sobre todo su amistad.
A todos ellos ¡muchas gracias!*



INDICE



INDICE

Página

CAPITULO I.

INTRODUCCION.	1
----------------------	---

CAPITULO II.

CONCEPTOS GENERALES DEL MOVIMIENTO DE FLOTADORES.	5
II.1. COMPONENTES DEL MOVIMIENTO DE UN FLOTADOR BIDIMENSIONAL.	6
II.2. COMPONENTES DEL MOVIMIENTO DE UN FLOTADOR TRIDIMENSIONAL.	6
II.3. CONCEPTO GENERAL DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE FLOTADORES.	7
II.3.1. LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON.	7
II.4. VELOCIDAD, ACELERACION, VELOCIDAD ANGULAR Y ACELERACION ANGULAR.	8
II.5. CENTRO DE GRAVEDAD.	9
II.6. MOMENTO DE INERCIA.	10
II.7. MEDICION DEL CENTRO DE GRAVEDAD Y MOMENTO DE INERCIA.	13
II.7.1. METODO DEL PENDULO.	14
II.7.2. MEDICION DEL CENTRO DE GRAVEDAD.	15
II.7.3. OBTENCION DEL MOMENTO DE INERCIA.	17

CAPITULO III.

FUERZAS EXTERIORES QUE ACTUAN SOBRE LOS FLOTADORES.	19
III.1. TIPOS DE FUERZAS EXTERIORES.	20
III.2. GRAVEDAD.	20
III.3. EMPUJE HIDROSTATICO.	20
III.4. METACENTRO.	21
III.5. FUERZAS DE LAS AMARRAS Y ATRAQUE.	23
III.6. REACCION DINAMICA DEBIDA AL AGUA PERIFERICA.	25
III.7. FUERZAS DEL AMBIENTE.	25
III.7.1. OLEAJE.	27
III.7.2. VIENTO.	33
III.7.3. CORRIENTES.	34



CAPITULO IV.

MOVIMIENTO DE FLOTADORES SIN EL EFECTO DEL OLEAJE Y TEORIA DE CATENARIA.	36
IV.1. MOVIMIENTO DE FLOTADORES SIN EFECTO DEL OLEAJE.	37
IV.1.1. ECUACIONES BASICAS.	37
IV.1.2. OBTENCION DE K Y k DEL FLOTADOR LIBRE Y RECTANGULAR.	38
IV.1.3. SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES.	39
IV.1.4. OBTENCION DE LOS COEFICIENTES DEL EXPERIMENTO.	42
IV.2. TEORIA DE CATENARIA.	43
IV.2.1. ECUACIONES BASICAS.	43
IV.2.2. CONDICIONES DE LA CADENA.	46
IV.2.3. METODO DE ANALISIS.	50
IV.2.4. METODO DE NEWTON RAPSHON.	53
IV.3. LEY DE SIMILITUD.	55
IV.3.1. LEY DE SIMILITUD DE FROUDE.	55
IV.3.2. OBTENCION DE LA DEFENSA Y AMARRA.	57

CAPITULO V.

TEORIA DEL MOVIMIENTO DE FLOTADORES.	59
V.1. INTRODUCCION A LA TEORIA DEL MOVIMIENTO DE FLOTADORES.	60
V.1.1. DEFINICION DEL PROBLEMA.	60
V.1.2. FUERZAS QUE ACTUAN SOBRE EL FLOTADOR OCASIONADAS POR EL OLEAJE.	61
V.1.3. REACCION DINAMICA POR EFECTO DEL MOVIMIENTO DE DERIVA.	67
V.1.4. REACCION DINAMICA POR EFECTO DEL MOVIMIENTO DE ARZADA.	70
V.1.5. REACCION DINAMICA POR EFECTO DEL MOVIMIENTO DE BALANCEO.	73
V.2. MOVIMIENTO DE FLOTADORES RECTANGULARES BIDIMENSIONALES.	76
V.2.1. DEFINICION DEL PROBLEMA.	76
V.2.2. ACCION POR EL OLEAJE.	79
V.2.3. EMPUJE HIDROSTATICO.	80
V.2.4. REACCION DINAMICA DEBIDA AL AGUA PERIFERICA.	81
V.2.5. FUERZA POR RESORTES.	83
V.2.6. MATRIZ DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO.	83
V.2.7. MATRIZ DE NUMEROS COMPLEJOS.	83
V.2.8. EJEMPLO DE CÁLCULO DE UN FLOTADOR BIDIMENSIONAL.	84
V.2.9. CARACTERISTICAS DEL MOVIMIENTO DEL FLOTADOR.	90

CAPITULO VI.

CONCLUSIONES.	93
BIBLIOGRAFIA.	97
ANEXO.	99



CAPITULO I
INTRODUCCION

CAPITULO I.

INTRODUCCION.

El Movimiento de flotadores está especialmente afectado por agentes externos, entre los que destacan, los oleajes, los vientos y las corrientes.

Un flotador es un sistema dinámico con seis grados de libertad, tres lineales y tres angulares de tal modo que su análisis, requerirá la solución de un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas. Las seis ecuaciones dinámicas deben solucionarse para analizar los movimientos del flotador exactamente. La complicación es que los seis diferentes movimientos no son independientes.

Los seis movimientos de un flotador, son nombres individuales especificados como se muestra en la siguiente figura.

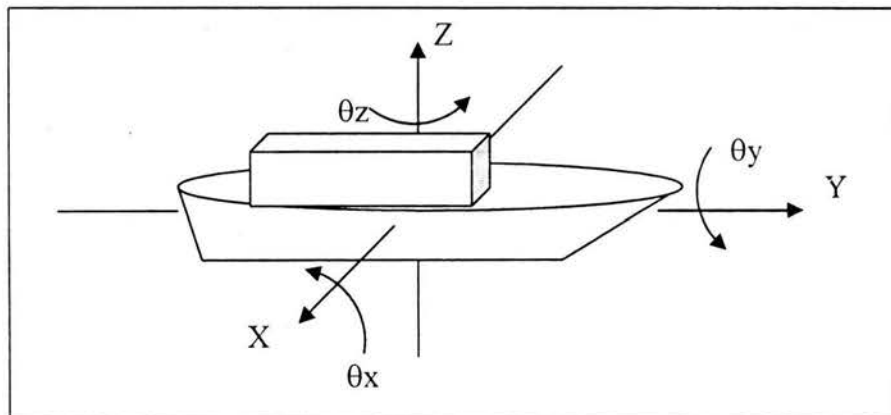


Figura 1. Movimientos de un flotador.

Generalmente el centro de gravedad de un flotador se utiliza como el centro de los movimientos.

El movimiento de un desplazamiento en la dirección longitudinal (X) es llamado "Deriva" y el movimiento rotacional (θ_x) alrededor del eje longitudinal (x) es llamado "Cabeceo". El movimiento de un desplazamiento transversal (Y) se denomina "Vaiven", y el movimiento de rotación (θ_y) alrededor del eje transversal (Y) se le llama "Balanceo". El movimiento de un desplazamiento vertical (Z) se le llama "Arzada", y el movimiento de rotación (θ_z) alrededor del eje vertical (Z) se denomina "Guiñada".

Los movimientos de "Cabeceo" y "Balanceo", están generalmente relacionados a los de "Vaiven" y "Deriva" respectivamente, como se mencionó anteriormente, una componente de los movimientos del flotador induce a otra componente del movimiento.



Por ello, y a efecto de simplificar el estudio dinámico, de un flotador se acostumbra a analizar los movimientos por grupos según el tipo de problema que se desea estudiar, haciendo caso omiso de la interacción con los otros movimientos.

Siendo el objetivo del presente trabajo, el estudio del movimiento de flotadores, analizando los movimientos de Arzada, Deriva y Balanceo.

El presente trabajo consta de seis capítulos, por lo que a continuación se da un breve resumen y descripción de los temas que se tratan en cada uno de ellos.

En el capítulo I, se da una descripción general acerca del contenido del presente trabajo, mencionando las características y nombres de las componentes que integran el movimiento de un flotador tridimensional, definiendo así la forma en que se analizan estas componentes de acuerdo al problema a estudiar, ya que los movimientos como se mencionó anteriormente no son independientes de sí.

En el capítulo II, se definen los conceptos generales que integran el movimiento de flotadores, se plantea el problema a analizarse, comenzando por la definición de las componentes del movimiento de un flotador bidimensional, posteriormente se definen las componentes de un flotador tridimensional, lo cual determina el grupo de movimientos a estudiar en el presente trabajo. Por lo que para realizar el estudio de los movimientos que realiza un flotador, aunque tratándose de un problema tridimensional este se analiza como un problema bidimensional con algunas suposiciones, basándose en la Ley de Newton se da el concepto general de las ecuaciones del movimiento de flotadores, también se da una descripción del método para llevar a cabo, la medición del centro de gravedad y momento de inercia del modelo de una embarcación.

En el capítulo III, se mencionan las fuerzas exteriores que actúan directamente al flotador y que son los factores que se consideran para llevar a cabo este análisis, estas fuerzas exteriores, las cuales constituyen la ecuación general del movimiento de flotadores se clasifican como sigue:

- Gravedad, que es la fuerza constante que actúa al centro de gravedad en la dirección negativa al eje Z.
- Empuje hidrostático, que es una fuerza en la dirección positiva al eje Z.
- Fuerza de las amarras y atraque, si el flotador está atado recibe la fuerza de amarras, para analizar la fuerza de las amarras y de atraque es importante obtener sus características, es decir, la relación entre deformación y la fuerza de reacción.
- Reacción dinámica debida al agua periférica, cuando se mueve el flotador dentro del agua, recibe una reacción dinámica, esta reacción proporcional a la aceleración o aceleración angular del movimiento, se le llama masa adicional o momento de inercia adicional.
- Fuerzas del ambiente, siendo las principales el oleaje, el viento y las corrientes las fuerzas del ambiente que actúan sobre el flotador, estos fenómenos son muy complejos y requieren estudios detallados y sistemáticos en relación al lugar donde se lleva a cabo dicho estudio, ya que tienen una serie de movimientos que son los



que contribuyen a proporcionar energía al sistema, de los anteriormente mencionados, el oleaje es la principal fuente de energía, ya que el viento al soplar sobre la superficie, dependiendo de su intensidad, define la altura, longitud y periodo de las olas, afectando directamente al comportamiento del movimiento del flotador.

En el capítulo IV, en este capítulo se estudia el movimiento de flotadores sin el efecto del oleaje y la teoría de catenaria. La teoría de Catenaria, que es una curva en suspensión, es el análisis de un flotador cuando está atado por cadenas, así por medio de esta teoría se puede calcular la fuerza de las amarras mediante las diferentes condiciones en que podría estar dichas amarras, en este capítulo también se habla de la Ley de similitud de Froude, misma que se emplea para realizar estudios en modelos que se utilizan para la simulación y el diseño de estructuras y elementos marítimos, para dar seguimiento al estudio del presente trabajo se obtiene el modelo de la defensa y las amarras.

En el capítulo V, en este capítulo el cual es la teoría del movimiento de flotadores, define el movimiento de los mismos. Esta teoría presenta la fuerza del oleaje y la reacción dinámica debida al agua periférica que actúa en los flotadores rectangulares bidimensionales, al calcular estas fuerzas actuantes, suponemos que el flotador se encuentra inmóvil y considerando todos los elementos que lo integran, tales como; la masa del flotador, el momento de inercia, el centro de gravedad del flotador, suponiendo que el flotador está amarrado por resortes, densidad del agua, aceleración de gravedad, oleaje incidente. Los movimientos de Deriva, Arzada y Balanceo, al centro de gravedad, así como la matriz de Fuerzas exteriores, la cual consiste en las siguientes partes: oleaje, empuje hidrostático, reacción dinámica debida al agua periférica y la fuerza por resortes.

En capítulo VI, se presentan las conclusiones obtenidas con respecto a este trabajo.



CAPITULO II

**CONCEPTOS GENERALES DEL
MOVIMIENTO DE FLOTADORES**



CAPITULO II

CONCEPTOS GENERALES DEL MOVIMIENTO DE FLOTADORES.

II.1. Componentes del movimiento de un flotador bidimensional.

Se tienen tres componentes del movimiento de un flotador bidimensional como lo muestra la figura 2.1.

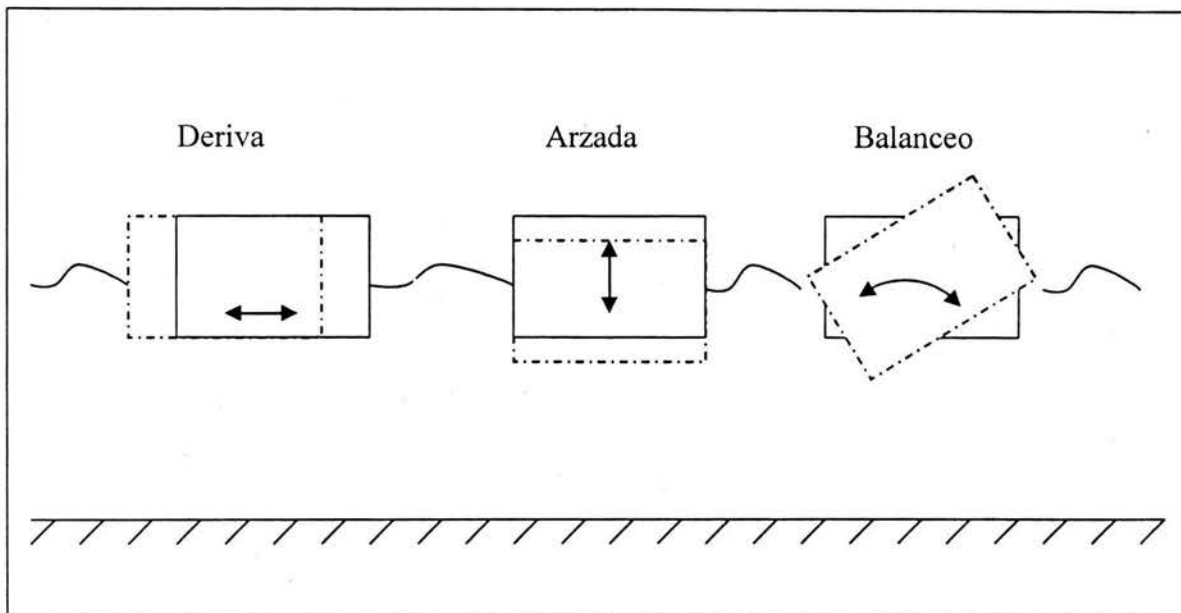


Figura 2.1 Componentes del movimiento bidimensional

De la figura 2.1 se tiene que:

Deriva: Movimiento Horizontal.

Arzada: Movimiento Vertical.

Balanceo: Movimiento de Rotación.

Como el movimiento del flotador bidimensional es una combinación de estas tres componentes, para analizar el movimiento es necesario separar cada una de las componentes. La ecuación del movimiento bidimensional contiene tres ecuaciones con tres variables desconocidas.

II.2. Componentes del movimiento de un flotador tridimensional.

Cabe mencionar que el movimiento general de un flotador está compuesto de seis grados de libertad, tres desplazamientos y tres giros, obteniéndose así seis componentes del movimiento de un flotador tridimensional como lo muestra la figura 2.2.

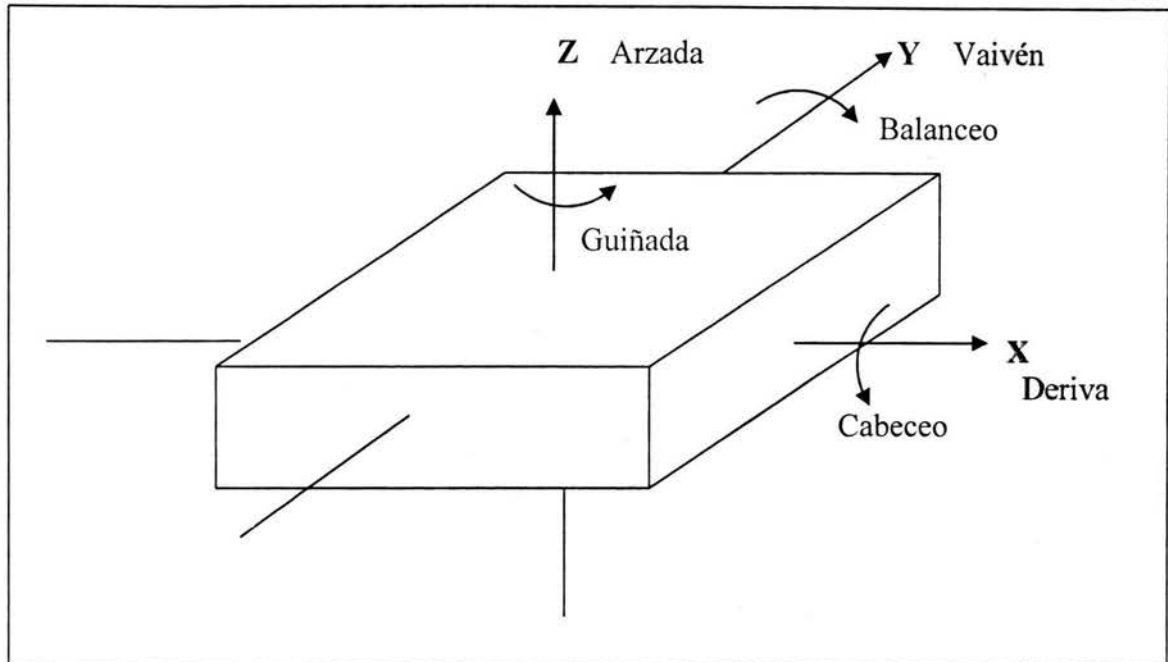


Figura. 2.2 Componentes del movimiento tridimensional.

De la figura 2.2 se tiene:

- X, Y : Ejes horizontales.
- Z : Eje vertical.
- Deriva : Movimiento horizontal al eje X.
- Vaivén : Movimiento horizontal al eje Y.
- Arzada : Movimiento vertical al eje Z.
- Cabeceo : Rotación al eje X. (θ_x)
- Balanceo : Rotación al eje Y. (θ_y)
- Guiñada : Rotación al eje Z (θ_z)

Como hay seis componentes, el movimiento tridimensional es más complicado que el movimiento bidimensional. La ecuación del movimiento tridimensional contiene seis ecuaciones con seis variables desconocidas. Por eso, aunque el problema real sea tridimensional frecuentemente se analiza como un problema bidimensional con algunas suposiciones.

II.3. Concepto general de las ecuaciones del movimiento de flotadores.

II.3.1 Leyes del movimiento de Newton.

Primera Ley: Todo cuerpo continúa en estado de reposo, o de movimiento uniformemente en línea recta, a no ser que una fuerza lo obligue a modificar su estado de reposo o movimiento.



Segunda Ley: El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza aplicada, y se efectúa a lo largo de la recta en la que actúa la fuerza. La fuerza aplicada es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Esta ley algunas veces es definida como: Una fuerza sin oposición actuando sobre un cuerpo, produce una aceleración del cuerpo en la dirección de la fuerza y de magnitud proporcional a ésta e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

Tercera Ley: Para toda acción hay siempre una reacción igual; en otras palabras, si una fuerza actúa para cambiar el estado de movimiento de un cuerpo, éste ofrece una resistencia igual y directamente opuesta a la fuerza.

El concepto general de las ecuaciones del movimiento de flotadores está basado por la Ley de Newton, como se muestra en la ecuación (2.1).

$$\text{Masa o Momento de inercia} \times \text{Aceleración o Aceleración angular} = \text{Fuerza exterior o Momento exterior.} \quad (2.1)$$

El movimiento de rotación de flotadores está basado en el centro de gravedad del flotador. Por eso la fuerza exterior y el momento exterior también tienen que considerarse con respecto al centro de gravedad del flotador.

II.4. Velocidad, aceleración, velocidad angular y aceleración angular.

La velocidad y velocidad angular se definen como la derivada del movimiento y rotación con respecto al tiempo. La aceleración y aceleración angular están definidos como; la derivada de la velocidad y velocidad angular con respecto al tiempo. Por eso, para un flotador bidimensional, la velocidad y aceleración están definidos como sigue:

- (i) Deriva (Movimiento horizontal al eje X).

$$\begin{aligned} \text{Velocidad} & \quad dx / dt \\ \text{Aceleración} & \quad d^2x / dt^2 \end{aligned}$$

- (ii) Arzada (Movimiento vertical al eje Z)

$$\begin{aligned} \text{Velocidad} & \quad dz_z / dt \\ \text{Aceleración} & \quad d^2z / dt^2 \end{aligned}$$

- (iii) Balanceo (Rotación al eje y θ y)

$$\begin{aligned} \text{Velocidad angular} & \quad d\theta_y / dt \\ \text{Aceleración angular} & \quad d^2\theta_y / dt^2 \end{aligned}$$

Los ejes X, Y y Z son trasladados al centro de gravedad del flotador.

Donde X y Y son ejes horizontales, (si es un flotador bidimensional, no hay movimiento al eje Y) y Z es el eje vertical positivo en la dirección hacia arriba. La variable θ_y , es la rotación del centro de gravedad del flotador al eje Y, y se expresa en radianes.

II.5. Centro de gravedad.

El centro de gravedad de un cuerpo es el punto por el que pasa la resultante de todas las fuerzas de gravedad que obran sobre él.

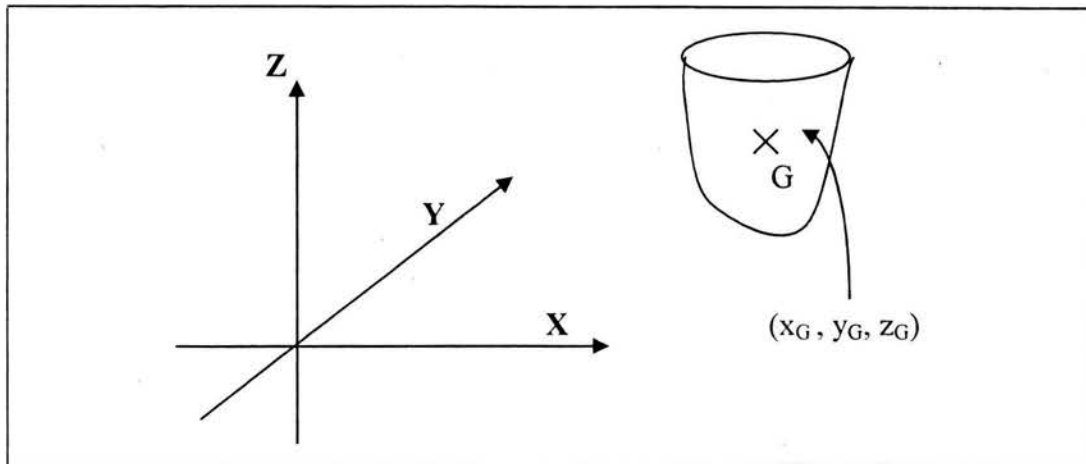


Figura 2.3 Centro de gravedad

El centro de gravedad, $G(x_G, y_G, z_G)$, de un flotador en cualquier coordenada está definido con las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4).

$$x_G = \int x \delta (x, y, z) dV / M \quad (2.2)$$

$$y_G = \int y \delta (x, y, z) dV / M \quad (2.3)$$

$$z_G = \int z \delta (x, y, z) dV / M \quad (2.4)$$

Donde:

M: Masa total del flotador.

$\int dV$: Integral total dentro del flotador.

$\delta (x, y, z)$: Densidad del flotador en el punto (x, y, z) .

Por ejemplo, calculamos las coordenadas (x_G, z_G) , del centro de gravedad de un material bidimensional que consiste en tres masas, representadas en la Figura 2.4.

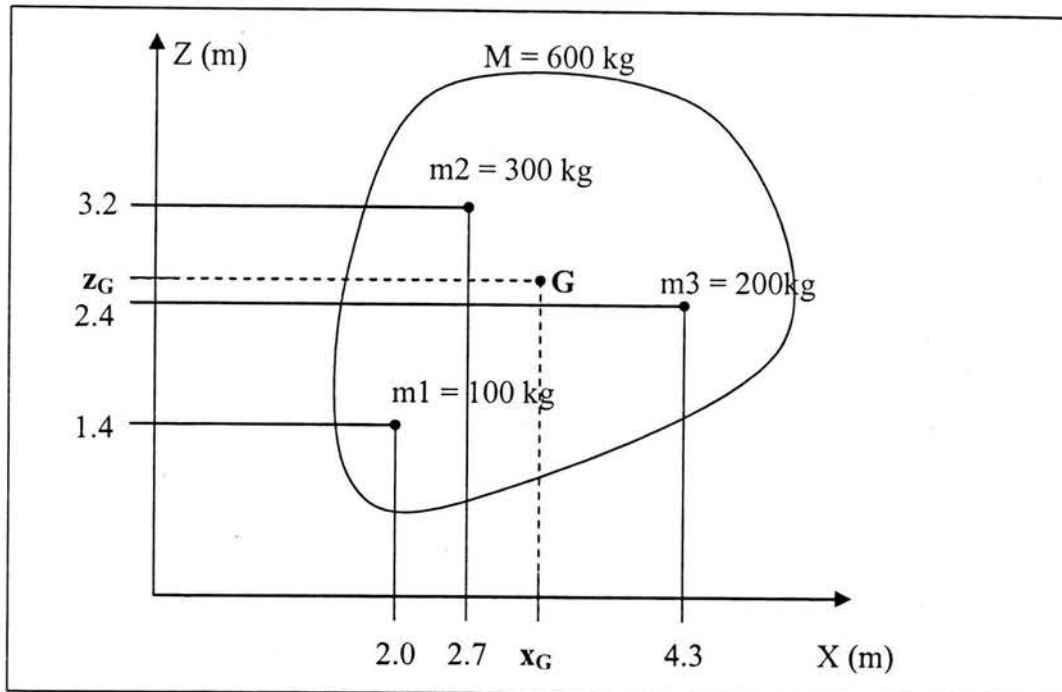


Figura 2.4 Material bidimensional que consiste en tres masas.

$$X_G = \frac{(2.0 \cdot 100) + (2.7 \cdot 300) + (4.3 \cdot 200)}{600} = 3.12(m)$$

$$z_G = \frac{(1.4 \cdot 100) + (3.2 \cdot 300) + (2.4 \cdot 200)}{600} = 2.63(m)$$

II.6. Momento de inercia.

El momento de inercia de un cuerpo, con respecto a su eje es la suma de los productos multiplicando la masa de cada partícula elemental por el cuadrado de su distancia a dicho eje. De aquí que el momento de inercia de un mismo cuerpo varía según la posición del eje. Alcanza su valor mínimo cuando el eje pasa por su centro de gravedad. El momento de inercia es numéricamente igual a la masa de un cuerpo que, si se pudiera concebir como concentrada a la distancia unitaria del eje de rotación, podría, si estuviera solicitada por las mismas fuerzas, girar con la misma velocidad angular que la del cuerpo de que se trate. En otras palabras, el momento de inercia está en la misma rotación respecto a la aceleración angular que la masa respecto a la aceleración lineal. Cuando el término momento de inercia es empleado con frecuencia a áreas, es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando cada área elemental por el cuadrado de su distancia al eje. Los momentos de inercia de superficies son útiles especialmente para el cálculo de las resistencias de las vigas.

El momento de inercia al centro de gravedad; θ_x (cabeceo), θ_y (balanceo) y θ_z (guiñada), está definido en las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7).



$$I_{x_G} = \int \{ (y - y_G)^2 + (z - z_G)^2 \} \delta (x, y, z) dV \quad (2.5)$$

$$I_{y_G} = \int \{ (z - z_G)^2 + (x - x_G)^2 \} \delta (x, y, z) dV \quad (2.6)$$

$$I_{z_G} = \int \{ (x - x_G)^2 + (y - y_G)^2 \} \delta (x, y, z) dV \quad (2.7)$$

El momento de inercia se puede definir en cualquier punto P (x_P, y_P, z_P) como se muestra en las ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10).

$$I_{x_P} = \int \{ (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 \} \delta (x, y, z) dV \quad (2.8)$$

$$I_{y_P} = \int \{ (z - z_P)^2 + (x - x_P)^2 \} \delta (x, y, z) dV \quad (2.9)$$

$$I_{z_P} = \int \{ (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 \} \delta (x, y, z) dV \quad (2.10)$$

Las relaciones entre I_{x_G} , I_{y_G} , I_{z_G} , I_{x_P} , I_{y_P} e I_{z_P} que se muestran en las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13) son importantes.

$$I_{x_P} = I_{x_G} + \{ (y_G - y_P)^2 + (z_G - z_P)^2 \} M \quad (2.11)$$

$$I_{y_P} = I_{y_G} + \{ (z_G - z_P)^2 + (x_G - x_P)^2 \} M \quad (2.12)$$

$$I_{z_P} = I_{z_G} + \{ (x_G - x_P)^2 + (y_G - y_P)^2 \} M \quad (2.13)$$

Como los segundos términos de la parte derecha en las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13) son siempre más grandes o iguales a cero, son correctas las siguientes relaciones:

$$I_{x_P} \geq I_{x_G} \quad (2.14)$$

$$I_{y_P} \geq I_{y_G} \quad (2.15)$$

$$I_{z_P} \geq I_{z_G} \quad (2.16)$$

Las ecuaciones (2.14), (2.15) y (2.16) muestran que el momento de inercia tiene su valor mínimo al centro de gravedad.

Por ejemplo calculamos el momento de inercia de la figura 2.4. Como es un material bidimensional, solo hay que pensar en I_y (balanceo).

$$I_{y_G} = 100 * \{ (2.0 - 3.12)^2 + (1.4 - 2.63)^2 \} + 300 * \{ (2.7 - 3.12)^2 + (3.2 - 2.63)^2 \} + 200 * \{ (4.3 - 3.12)^2 + (2.4 - 2.63)^2 \}$$

$$I_{y_G} = 715 \text{ kg m}^2$$



Si tomamos el punto P con coordenadas (0, 0), entonces I_{yP} está dado como sigue:

$$I_{yP} = 100 * (2.0^2 + 1.4^2) + 300 * (2.7^2 + 3.2^2) + 200 * (4.3^2 + 2.4^2)$$

$$I_{yP} = 10705 \text{ kg m}^2$$

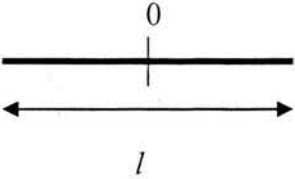
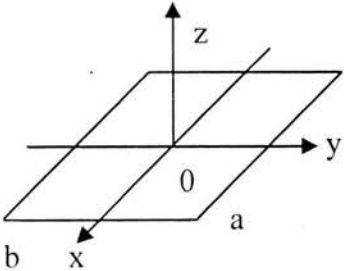
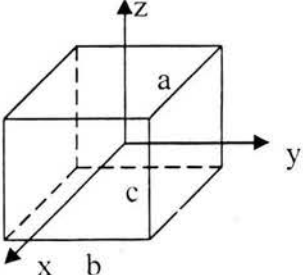
Para comprobar las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13) calculamos de la siguiente manera:

$$I_{yP} - I_{yG} = 10705 - 715 = 9990 \text{ kg m}^2$$

$$M \{ (z_G - z_P)^2 + (x_G - x_P)^2 \} = 600 * (2.63^2 + 3.12^2) = 9990 \text{ kg m}^2$$

Por lo tanto las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13) son correctas.

La figura 2.5 muestra los valores calculados del momento de inercia, donde M es la masa total del material, suponiendo que la densidad δ es constante dentro del material.

	<p>Barra</p> $I = M \frac{l^2}{12}$
	<p>Rectángulo</p> $I_x = M \frac{b^2}{12}, \quad I_y = M \frac{a^2}{12}, \quad I_z = M \frac{a^2 + b^2}{12}$
	<p>Cubo</p> $I_x = M \frac{b^2 + c^2}{12}, \quad I_y = M \frac{c^2 + a^2}{12},$ $I_z = M \frac{a^2 + b^2}{12}$



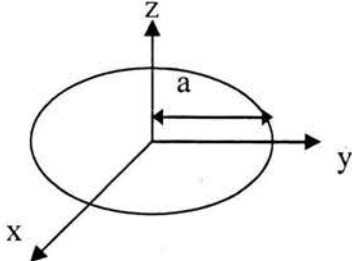
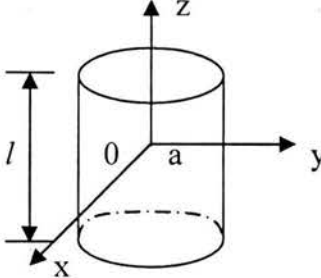
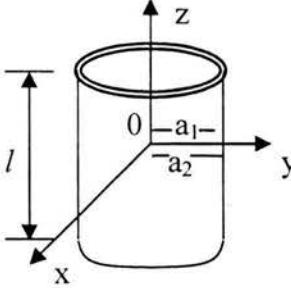
	<p>Circulo</p> $I_x = I_y = M \frac{a^2}{4}, \quad I_z = M \frac{a^2}{2}$
	<p>Cilindro</p> $I_x = I_y = M \left(\frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right), \quad I_z = M \frac{a^2}{2}$
	<p>Cilindro tubular</p> $I_x = I_y = M \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right), \quad I_z = M \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$

Figura 2.5 Tabla de momentos de Inercia.

II.7. Medición del centro de gravedad y momento de inercia.

Para determinar el centro de gravedad y el momento de inercia de un modelo de barco, primero es necesario balancear el peso del modelo, mediante la distribución de bloques de pesas, de tal manera que el centro de gravedad del modelo se determine con precisión y que los periodos naturales de balanceo y de cabeceo sean los correctos. El balanceo es de tipo estático, se necesita suspender el barco de proa y popa mediante barras, mismas que son contrabalanceadas antes de colocar el modelo, como se muestra en la figura 2.6.

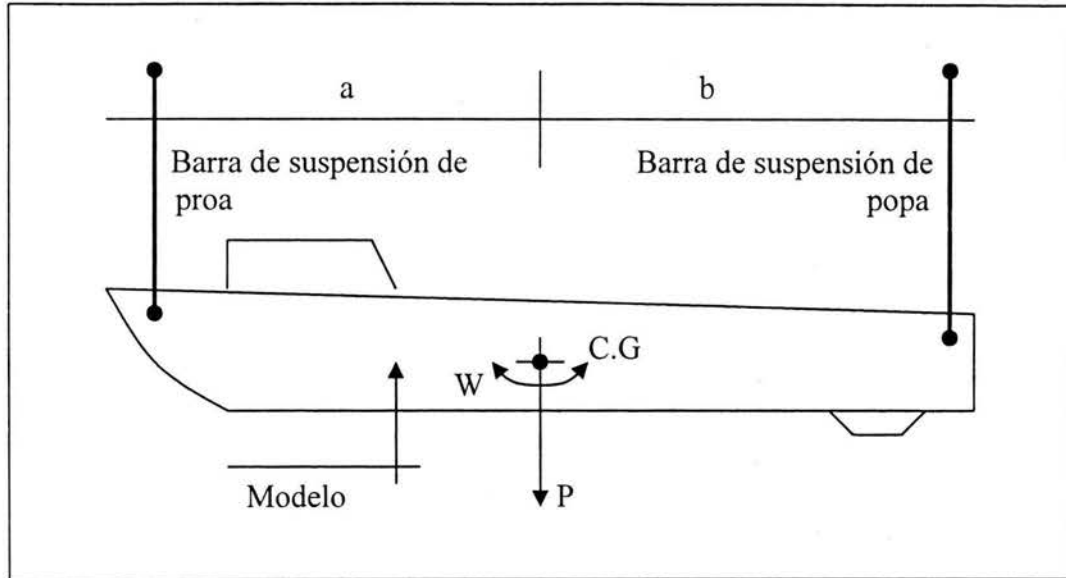


Figura 2.6 Balanceo del modelo del barco

Tomando momentos con respecto a la barra de suspensión de popa se calcula la distancia y posición de los pesos de las piezas para balancear el modelo y, así también, determinar la distancia horizontal al centro de gravedad homólogo al prototipo.

II.7.1. Método del péndulo.

Para medir el centro de gravedad y el momento de inercia de un modelo de barco, se usa un péndulo como lo muestra la figura 2.7.

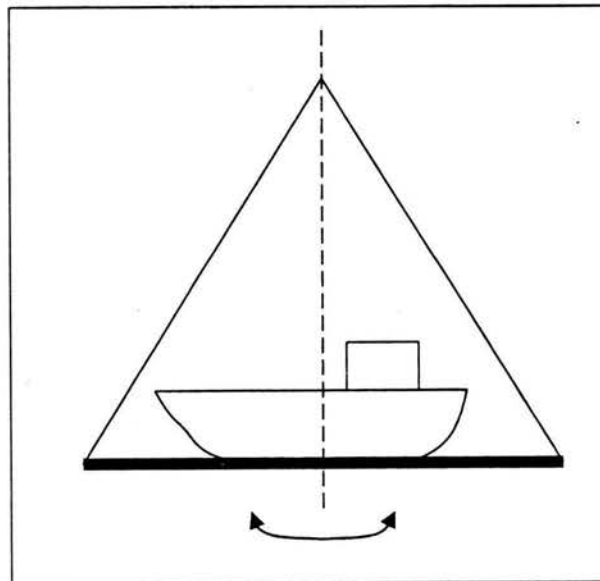


Figura 2.7 Péndulo para medir el centro de gravedad y el momento de inercia.

El péndulo oscila con poca resistencia, cargando el modelo del barco. Arriba del péndulo hay una aguja con graduaciones para leer la inclinación.

II.7.2. Medición del centro de gravedad.

Definimos las coordenadas, tal como lo muestra la figura 2.8 en donde X y Y son ejes horizontales y Z es el eje vertical. Cuando el péndulo carga al modelo del barco, definimos $Z = 0$ a la base del péndulo (al fondo del barco).

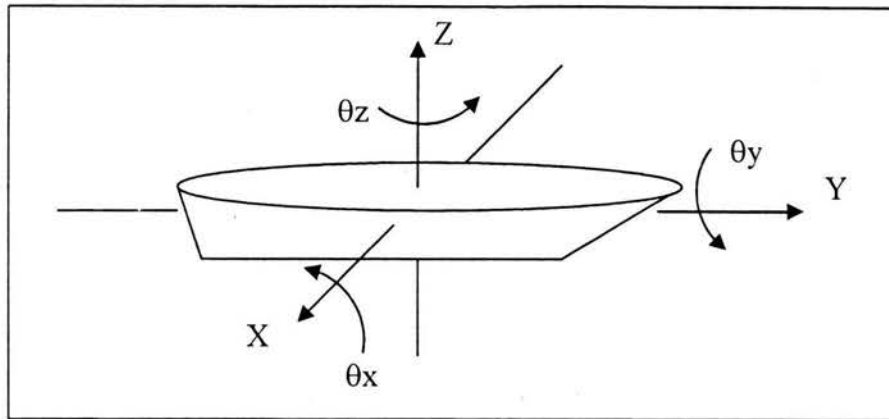


Figura 2.8 Definición de los ejes X, Y y Z.

II.7.2.1. Obtención de x_G y y_G del centro de gravedad del modelo.

Para obtener x_G y y_G del centro de gravedad, sólo hay que colocar el modelo del barco en péndulo evitando la inclinación ($\theta = 0$) como se muestra en la figura 2.9. El centro de gravedad está en el eje vertical del centro del péndulo.

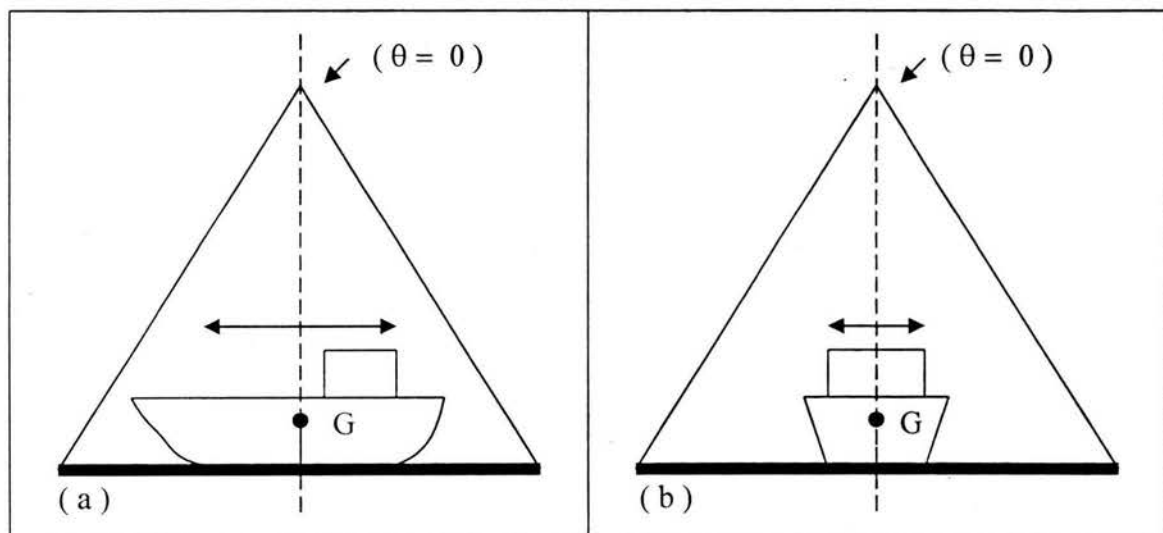


Figura 2.9 Obtención de x_G y y_G del centro de gravedad.

II.7.2.2. Obtención de z_G del centro de gravedad del modelo.

Para simplificar la explicación despreciamos la masa y el momento de inercia del péndulo.

Para obtener z_G , se usa un peso adicional y se mide la inclinación θ del péndulo como lo muestra en la figura 2.10.

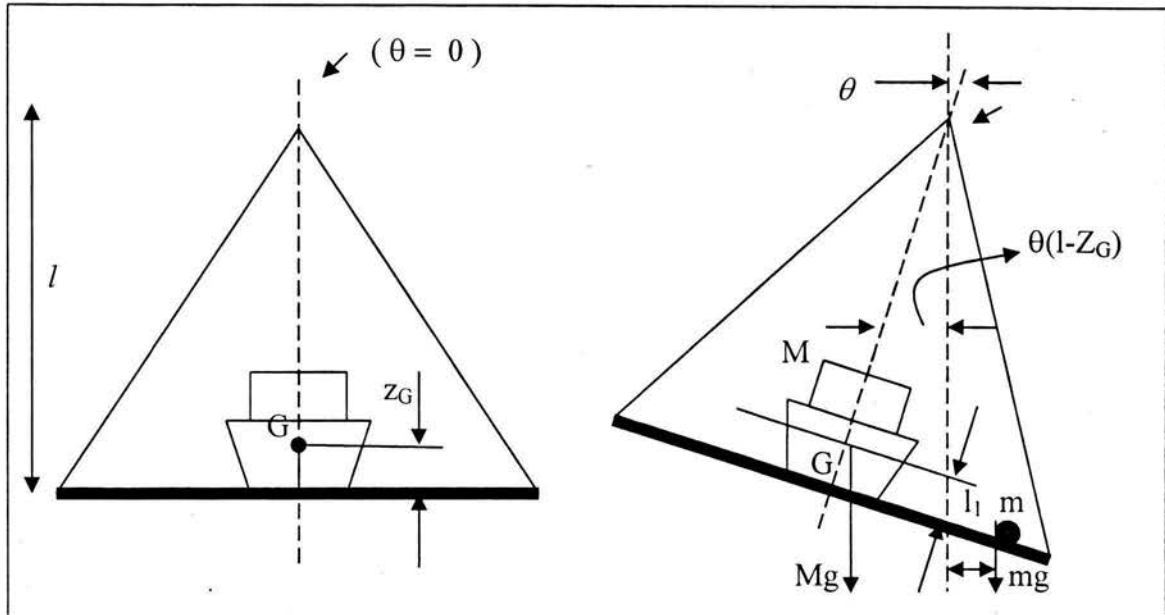


Figura 2.10 Obtención de z_G del centro de gravedad.

De la figura 2.10 se tiene que:

z_G : Incógnita

l : Altura del péndulo

M : Masa del modelo del barco (dato)

m : Masa del peso adicional (dato)

l_1 : Distancia entre el peso adicional y el eje vertical en el centro (dato medido)

θ : Inclinación (dato medido en radianes)

g : Aceleración de la gravedad (9.8 m / seg^2)

Por el equilibrio de momentos, en la ecuación (2.17) es válida.

$$Mg \theta (l - z_G) = m g l_1 \quad (2.17)$$

Desarrollando la ecuación (2.17) obtenemos la ecuación (2.18)

$$z_G = l - \frac{m l_1}{M \theta} \quad (2.18)$$

Por eso midiendo θ y l_1 se obtiene z_G .



II.7.3. Obtención del momento de inercia.

Con este péndulo, la manera de obtener el I_{x_G} (cabeceo) e I_{y_G} (balanceo) son iguales. La diferencia solamente es la dirección del modelo como lo indica la figura 2.9. Para obtener el I_{x_G} , hay que colocar el modelo tal como se muestra la figura 2.9 (a), y para obtener I_{y_G} hay que colocar el modelo como lo muestra la figura 2.9 (b).

Es posible teóricamente obtener I_{z_G} si se coloca el modelo verticalmente. Sin embargo prácticamente es muy difícil colocar el modelo del barco verticalmente. Por eso la obtención de I_{z_G} es difícil. Sin embargo, como la longitud del barco es más grande que la altura y el ancho del barco, se puede suponer la ecuación (2.19) con poco error.

$$I_{z_G} \cong I_{x_G} \quad (2.19)$$

Ahora se explicará la obtención de I_{y_G} . Para simplificar la explicación despreciamos la masa y el momento de inercia del péndulo como lo muestra la Fig. 2.11.

Para obtener I_{y_G} sólo hay que oscilar el péndulo como lo muestra la siguiente figura y medir el periodo de oscilación T (seg.). Para mejorar la precisión de T , es recomendable oscilar el péndulo más de 20 veces continuamente y medir el tiempo total de oscilación. El periodo está dado en la ecuación (2.20).

$$T = (\text{tiempo total}) / (\text{número de oscilaciones}). \quad (2.20)$$

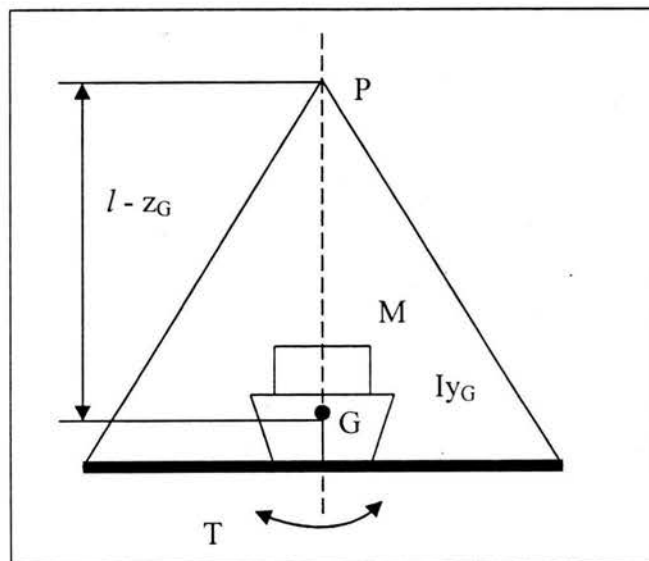


Figura 2.11 Obtención de I_{y_G} .

Aplicando la ecuación (2.12), se considera el punto P como el centro del péndulo, el momento de inercia al centro del péndulo I_{y_P} está dado en la ecuación (2.21).

$$I_{y_P} = I_{y_G} + M (l - z_G)^2 \quad (2.21)$$



Donde M , l y z_G están definidos en la Fig. 2.10.

Si el péndulo se inclina en θ radianes, el momento de restauración es $M g (l - z_G) \theta$ como en la ecuación (2.17). Por lo tanto, aplicando la ecuación (2.1) obtenemos la ecuación (2.22).

$$I_{y_P} (d^2\theta / dt^2) = -Mg (l - z_G) \theta \quad (2.22)$$

Suponiendo que el periodo de la oscilación es T (seg.) y la amplitud es θ_0 (rad), θ está dada en la ecuación (2.23).

$$\theta = \theta_0 \text{ sen } (\sigma t + \varepsilon) \quad (2.23)$$

Donde:

$$\sigma : 2 \pi / T \quad (1/\text{seg})$$

$$\varepsilon : \text{Fase de la oscilación (entre } 0 \text{ y } 2\pi \text{)}.$$

De las ecuaciones (2.22) y (2.23) se puede obtener la ecuación (2.24) de la siguiente manera:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sigma \theta_0 \cos (\sigma t + \varepsilon)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\sigma^2 \theta_0 \text{ sen } (\sigma t + \varepsilon) = -\sigma^2 \theta$$

$$I_{y_P} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\sigma^2 \theta I_{y_P} = -Mg (l - z_G) \theta$$

$$I_{y_P} = Mg (l - z_G) / \sigma^2 \quad (2.24)$$

De las ecuaciones (2.21) y (2.24) I_{y_G} está dada como sigue:

$$I_{y_G} = \frac{Mg(l - z_G)}{\sigma^2} - M(l - z_G)^2 \quad (2.25)$$

Como; M , g , l y z_G son conocidos, con la medición de T se puede calcular I_{y_G} .



CAPITULO III

**FUERZAS EXTERIORES QUE
ACTUAN SOBRE LOS FLOTADORES**



CAPITULO III

FUERZAS EXTERIORES QUE ACTUAN SOBRE LOS FLOTADORES.

III.1. Tipos de fuerzas exteriores.

Las fuerzas exteriores que actúan sobre un flotador son representadas en la ecuación (2.1), se pueden clasificar como sigue:

- (i) Gravedad.
- (ii) Empuje hidrostático.
- (iii) Fuerzas de las amarras y atraque.
- (iv) Reacción dinámica debida al agua periférica.
- (v) Fuerzas de ambiente.
 - a) Oleaje
 - b) Viento
 - c) Corriente

III.2 Gravedad.

Es la fuerza que constantemente actúa al centro de gravedad (G) en la dirección negativa al eje Z. La fuerza está dada como: $(M)(g)$, donde; M es la masa del flotador y g es la aceleración de gravedad (9.8 m/seg^2).

III.3. Empuje hidrostático.

Es una fuerza en la dirección positiva al eje Z. La fuerza está dada como: $(P)(V)(g)$, donde; P es la densidad del agua (1000 kg / m^3) y V es el volumen del flotador debajo de la superficie del agua.

La fuerza y el centro de (C) del empuje hidrostático cambian debido al movimiento del flotador.

Si no actúa ninguna otra fuerza sobre el flotador, se divide en dos partes esta fuerza, una parte estacionaria y otra parte de fluctuación.

La parte estacionaria está siempre en equilibrio con la gravedad. Por lo tanto, en el movimiento del flotador solamente se estudia la parte de fluctuación. El centro y el valor de la parte de fluctuación dependen del movimiento vertical (arzada) y la inclinación (guiñada y balanceo) del flotador.

III.4. Metacentro.

El metacentro (GM) indica la estabilidad del flotador. La Fig. 3.1 muestra la definición de (GM) de un flotador.

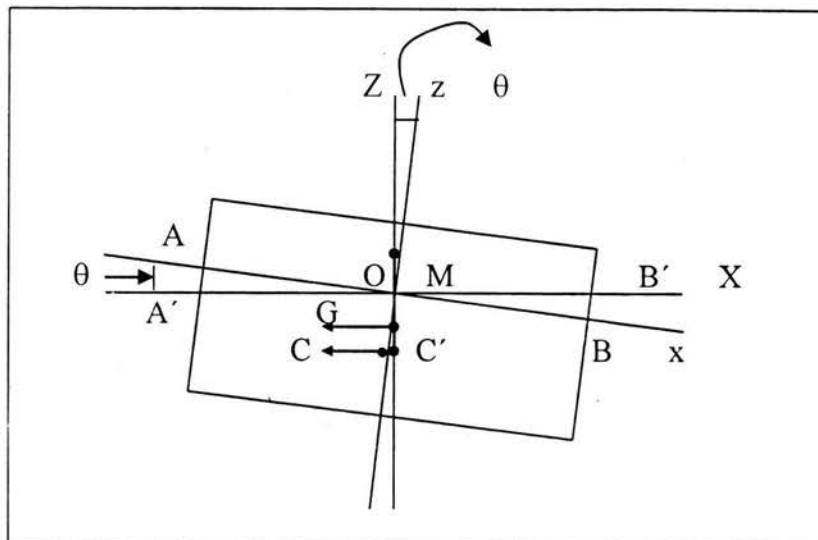


Figura 3.1 Definición de (GM)

En la figura; el punto O es el centro de rotación del flotador a la superficie del agua, X y Z son los ejes horizontales y verticales fijos. Además, x y z son los ejes del flotador y giran en el sentido de la rotación del barco como lo muestra la figura 3.1. El punto G es el centro de gravedad del flotador. θ es el ángulo de la rotación en radianes. El punto C es el centro del empuje hidrostático cuando no existe rotación.

Cuando existe rotación, el punto del centro del empuje hidrostático, cambia del punto C al punto C'. El punto M se define como la intersección entre el eje z del barco y la línea vertical que pasa por el punto C'. El metacentro (GM) está definido como la distancia entre los puntos G y M.

El momento de fuerza (Mf), necesario para regresar a la posición original ($\theta = 0$) del flotador con la rotación θ , está dado por la ecuación (3.1).

$$M_f = M_b g (GM) \theta \quad (3.1)$$

Donde; M_b es la masa del flotador y g es la aceleración de gravedad.

Como se muestra en la ecuación (3.1), M_f es proporcional con (GM). Por lo tanto (GM) muestra la estabilidad del flotador debido a que: si aumenta el valor de (GM) aumenta M_f .

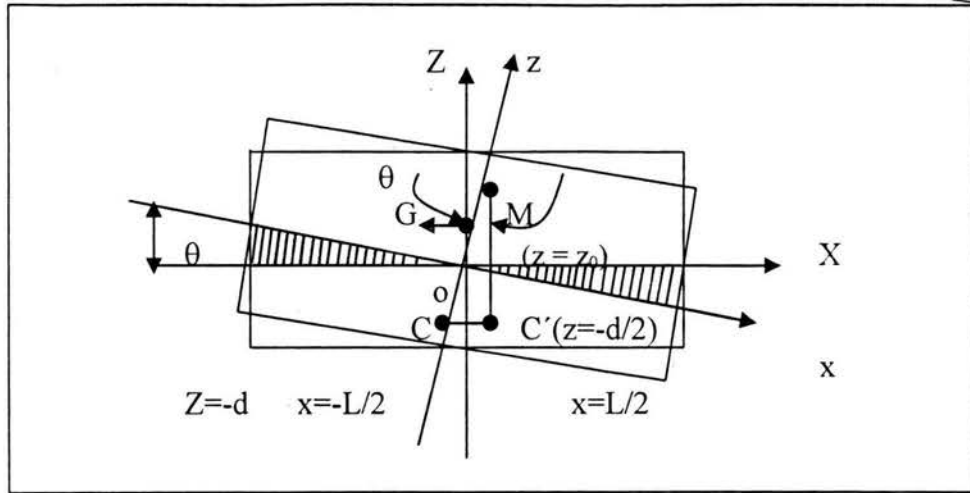


Figura 3.2 Obtención de (GM) del flotador rectangular.

La figura 3.2 muestra la obtención de (GM) del flotador rectangular.

De la figura se tiene que:

L: Ancho del flotador

d: Calado del flotador.

Z_0 : La coordenada Z del centro del gravedad

θ : Angulo de la rotación en radianes

La coordenada Z del punto C, es igual a $-d/2$ debido a que el flotador es rectangular.

La distancia horizontal entre los puntos C y C' se da introduciendo el concepto de Momento de Volumen.

$$Ld (CC') = \int_{-L/2}^{L/2} x (x\theta) dx \quad (3.2)$$

$$(CC') = 2\theta / Ld \int_0^{L/2} x^2 dx = \frac{2\theta}{Ld} \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{\theta}{3d} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad (3.3)$$

La ecuación (3.2) muestra el equilibrio del desplazamiento horizontal del Momento del Volumen dado en la figura 3.2. Donde, Ld es el volumen total del empuje hidrostático.

De la ecuación (3.3) y la Fig. 3.2 obtenemos (GM) como sigue:

$$(GM) = \frac{(CC')}{\theta} - (GO) - (OC) = \frac{(CC')}{\theta} - z_0 - \left(\frac{-d}{2}\right)$$

$$(GM) = \frac{1}{3d} \left(\frac{L}{2}\right)^2 - z_0 + \frac{d}{2} \quad (3.4)$$



III.5. Fuerzas de las amarras y atraque.

El impacto entre dos cuerpos puede ser elástico o inelástico. Cuando este sea elástico, las deformaciones continúan mientras estos actúan uno sobre otro y se moverán hasta que la energía cinética del cuerpo móvil, es decir, el que causa el impacto, se ha transformado en trabajo de deformación interna. Así el principio de la absorción de impactos de flotadores es que la energía cinética se utiliza en deformar la estructura o una parte de ella. De acuerdo con su movimiento, y si esto sucede elásticamente, ésta regresará a su posición original cuando el total de la energía se ha absorbido, o en otras palabras, el flotador llega al reposo y ha cesado de apoyarse en la estructura. La inercia de una estructura contribuye a la absorción de la energía, por lo que en una estructura masiva, el impacto importa más bien desde el punto de vista de efectos locales y del flotador en sí.

La energía de un flotador se absorbe en la siguiente forma para llegar al reposo:

- Trabajo de deformación del mismo flotador.
- Resistencia del agua durante los cambios en dirección del flotador.
- Calor debido a fricción entre el flotador y la estructura o las defensas mientras se logra el reposo.
- Trabajo de deformación de la estructura y las defensas.
- Restricción de los cabos de las amarras.

El fenómeno de transmisión y absorción de energía requiere de más pruebas e investigaciones, pero se puede afirmar que nunca se transmite a la estructura el total de la energía de una embarcación, excepto en casos de impactos de punta en los que se tenga incertidumbre de cómo se absorbe la energía. Tanto esto, como considerar en general una transmisión de la mitad de la energía, nos coloca del lado de la seguridad.

III.5.1. Estructuras de atraque.

En general y en cuanto a su localización, se presentan los siguientes tipos de estructuras de atraque:

- 1) Marginales o paralelas a la costa.
- 2) Normales a la costa o tipo espigón.
- 3) Cuando en la costa no se tienen condiciones adecuadas para la cimentación o cuando se requieren dragados excesivos para obtener la profundidad requerida del agua, se localizará el muelle a la distancia necesaria para unirlo a tierra con una pasarela de acceso. Se acostumbra denominar a este tipo de muelle en L o en T.
- 4) Instalaciones alejadas de la costa.



Los tipos 1) y 2), son muy convenientes principalmente en el caso de que se tengan que cargar o descargar los barcos cerca de las bodegas haciendo uso de grúas y montacargas, o para el caso de terminales de pasajeros.

Cuando los movimientos de la carga se realizan en forma mecanizada como en el caso de productos conducidos por tubería utilizando bombas y transportados en grandes barcos, tales como los buque-tanques petroleros, la experiencia ha demostrado que el tipo 3) es el más indicado, ya que en esta forma se tiene más libertad para las maniobras y al tenerse menores cargas verticales las pasarelas de acceso son más ligeras en comparación a lo que resulta en los casos anteriores. El tipo 4) es una solución muy simple, rápida y económica para la carga y descarga de grandes barcos en lugares en donde no se tienen las instalaciones portuarias adecuadas y principalmente se carece del calado necesario y espacio para las maniobras de ciaboga.

Si el flotador está atado recibe la fuerza de las amarras. Como en el empuje hidrostático, la fuerza de las amarras también tiene dos partes, la parte estacionaria y la parte de fluctuación. La parte de fluctuación depende del movimiento del flotador. Cuando el flotador está atado por amarras, para analizar la fuerza de las amarras es importante obtener sus características, es decir la relación entre deformación y la fuerza de reacción.

Cuando el flotador está atado por cadenas, la fuerza se puede calcular por la teoría llamada de "Catenaria" (una curva en suspensión).

III.5.2. Sistemas de defensa.

Es evidente la ventaja de las defensas, puesto que al ser elementos más deformables en comparación con la estructura, absorben energía con mayor desplazamiento y menor fuerza.

Prácticamente se tienen los siguientes tipos de defensas:

- Fijas.
- Colgantes.
- Con pilotes.
- De Gravedad.
- Otras.

En el tipo fijas, elementos flexibles fijos en la pantalla de atraque absorben energía al deformarse durante el impacto. Las más comunes consisten de grandes masas de hule.

En cuanto al tipo Colgantes, pueden estar constituidas por piezas colgantes de hule, pantallas de madera o una combinación de ambas.

Posiblemente el caso Con Pilotes, es el más aceptado para absorber energía en una forma sencilla y económica. En general, sobre los pilotes se apoya una pantalla de madera y estos



a su vez, se apoyan en sus cabezas sobre elementos elásticos como bloques de hule. Casi siempre se prefiere utilizar pilotes de madera.

El de tipo de gravedad, podría incluirse el tipo colgantes y en general, son defensas que absorben energía al incrementar la energía potencial gravitatoria de masas y vencer la fricción. Existen varios sistemas de este tipo que, en los últimos años han demostrado gran efectividad principalmente para el atraque de grandes embarcaciones.

Refiriéndonos a otras, podemos mencionar algunos tipos de defensas en las cuales se aprovecha la resistencia del agua para absorber energía y algunos sistemas poco comunes a base de arreglos complicados de resortes, pistones, piezas de hule, madera o cualquier elemento elástico, que absorben energía combinados entre sí o con alguno de los tipos anteriores.

III.6. Reacción dinámica debida al agua periférica.

Cuando se mueve el flotador dentro del agua, éste recibe una reacción dinámica debida al agua periférica. Como una parte del agua se mueve con el movimiento del flotador, aparentemente la masa y el momento de inercia del flotador aumentan en la ecuación (2.1). Es una reacción proporcional a la aceleración o a la aceleración angular del movimiento, y se llama masa adicional o momento de inercia adicional.

Otro tipo de reacción para deducir el movimiento es la reacción proporcional a la velocidad, o a la velocidad angular del movimiento y se llama coeficiente de disminución del movimiento. Los valores de las reacciones son funciones de la frecuencia del movimiento.

III.7 Fuerzas de ambiente.

El oleaje, el viento y la corriente son las fuerzas del ambiente que actúan sobre el flotador.

Los fenómenos que tienen lugar en la Tierra son muy complejos y requieren de estudios detallados y sistemáticos en la zona que se desea estudiar; las condiciones de un lugar a otro y el comportamiento de una determinada obra pueden variar de manera importante en ellas.

La mayor parte de esta rama de la ingeniería tiene mucho de investigación y experiencia práctica.

Los fenómenos atmosféricos tienen una serie de movimientos que son los que contribuyen a proporcionar energía del sistema, según se mencionó anteriormente, siendo los principales el oleaje, el viento y las corrientes.



De los anteriores, el oleaje es la principal fuente de energía, ya que el viento al soplar sobre la superficie, dependiendo de su intensidad podrá formar olas desde unos cuantos centímetros, hasta de varios metros (30 m.).

El oleaje generado por viento queda definido por su altura, longitud y periodo, como se muestra en la figura 3.3.

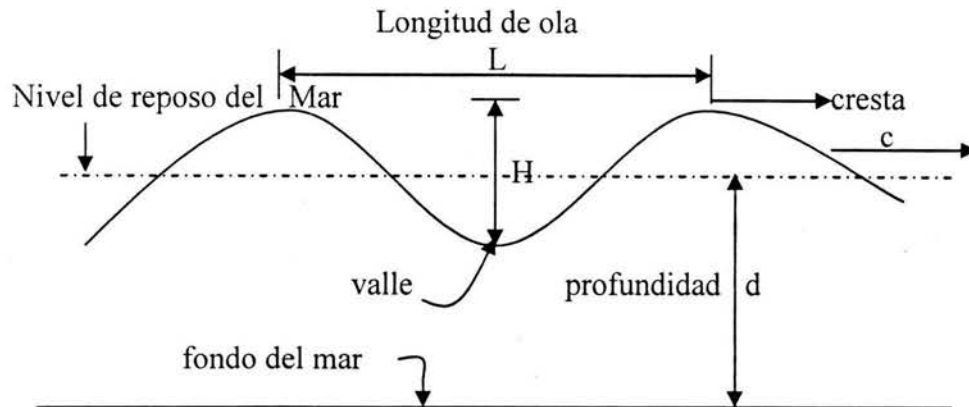


Fig. 3.3. Definición de las características del oleaje.

Un poco más adelante nos referiremos con detalle a las teorías que existen para representar de una manera matemática a este fenómeno.

La altura de ola es la distancia vertical que existe entre una cresta y un valle y se designa generalmente como H .

La longitud de la ola se refiere a la distancia horizontal que existe entre dos crestas o dos valles consecutivos y se les designa comúnmente como L .

El periodo de la ola se refiere al tiempo que transcurre entre el paso consecutivo de dos crestas o dos valles por el mismo punto.

Las características anteriores en un determinado sitio del océano quedan determinadas por el fetch, que es la distancia en la que actúa el viento sobre la superficie del mar, la velocidad del viento, su duración que es el tiempo durante el cual actúa y la distancia de decaimiento, que es la distancia que viaja la ola después de dejar la zona de generación y la profundidad.

En general, para fetch, velocidades y duraciones grandes, el oleaje generado será también grande.

Si el oleaje en una determinada zona no sale del área de generación, sus características son irregulares y se denomina oleaje local (sea). Los periodos son cortos con longitudes de onda de 10 a 20 veces la altura.



Cuando el oleaje se genera por una tormenta muy distante, éste deberá viajar muchos cientos o miles de kilómetros antes de llegar a la playa, y en estas condiciones, el oleaje se vuelve más regular y con alturas menores. El oleaje así generado se denomina oleaje distante (swell).

Las mareas son ondas creadas por la fuerza gravitacional de la Luna y en menor grado, el Sol. Debido al constante movimiento de la Tierra, Sol y Luna, las aguas de los océanos y cuerpos cerrados como bahías, se mueve en la forma de una onda con un periodo muy largo, lo cual trae como consecuencia el aumento y disminución del nivel del mar en un determinado punto de la costa.

La mayor parte de los lugares en la Tierra tienen dos mareas por día, aunque algunos otros sólo una en 24 horas.

Es importante hacer notar que el nivel del mar por este fenómeno de las mareas, se encuentra en una constante variación, por lo que el oleaje cambia su posición de incidencia en las playas constantemente, es decir, se acerca o se aleja dependiendo de dicha variación.

Las corrientes son desplazamientos de masas del mar provocadas por la presencia de mareas distintas en dos sitios por diferencia de densidades o temperaturas. El viento también puede producir corrientes, pero estas son superficiales generalmente.

La marea de tormenta es un fenómeno que se presenta cuando los ciclones o huracanes que tienen vientos muy intensos, originan una corriente superficial que obligará a que el agua se apile sobre la costa incrementando su nivel. Este fenómeno es más importante cuando la pendiente de la playa es más tendida y las profundidades son más pequeñas.

III.7.1. Oleaje.

Podemos afirmar que uno de los fenómenos más importantes dentro de la Ingeniería de Costas es el oleaje, que además será el principal elemento para el diseño de las estructuras que se utilizan en la zona costera o playera.

El fenómeno es muy complejo y difícil de representar de una manera matemática, sin embargo, existen teorías que pretenden interpretarlo y calcular sus efectos. Es importante cuando menos tener una idea de estas teorías y entender la matemática del fenómeno, lo cual nos ayudará a resolver problemas relacionados con el mismo.

Dependiendo de las condiciones particulares de un problema dado, existirá para este una teoría aplicable.

III.7.1.1. Clasificación de las ondas.

Existen diversos tipos de ondas que se presentan en el océano y tratando de hacer una clasificación de acuerdo a su periodo, tenemos las de la Tabla 3.1.



Periodo	Tipo	Fuerza que la produce	Fuerza que la restaura
Menor de 0.1 seg.	Capilares	Viento	Tensión superficial
De 0.1 a 1 seg.	Ultragravedad	Viento	Tensión superficial, Fuerza de Gravedad
De 1 a 30 seg.	Gravedad	Viento	Gravedad
De 30 seg. A 5 min.	Infragravedad	Viento	Gravedad
5 min. A 12 horas	Largo periodo	Tormentas y Tsunamis	Fuerza de Coriolis
De 12 a 24 horas.	Largo periodo	Sol y Luna	Fuerza de Coriolis
De 24 horas o más	Muy largo periodo	Sol y Luna	Fuerza de Coriolis

Tabla 3.1. Clasificación de diversos tipos de ola de acuerdo a su período.

Tipos de olas.

a) Olas capilares.

Este tipo de ola esta afectada más por la tensión superficial que por la gravedad. De manera muy tosca, se pueden incluir olas con periodos menores de 0.1 seg y longitudes menores de 2.5 cm. La velocidad se incrementa con la disminución del período y de la longitud, pero siempre excede a 23 cm/seg.

b) Olas de gravedad Ordinaria y Ultragravedad.

El origen de estas olas es el viento; los mecanismos por medio de los cuales el viento las genera y hace crecer, son: 1°. Un exceso de presión en el lado donde el viento actúa sobre la ola y una disminución del lado contrario. 2°. Un empuje tangencial sobre la superficie del agua, suponiendo que las olas tienen transporte de masa, de acuerdo con la teoría irrotacional..

c) Olas de Infragravedad.

Una serie de altas rompientes de olas de gravedad ordinaria eleva temporalmente el nivel del agua y siempre está sucedida por una serie de bajas rompientes, lo cual permite que el nivel descienda. Esta oscilación se propaga hacia el mar desde la zona de rompientes. La amplitud de oscilación en dirección al mar es del orden del 10% de la rompiente principal.



d) Olas de largo periodo.

En general son muy pequeñas, del orden de los 5 centímetros de amplitud y con periodos de 15 a 20 minutos. Se producen ondas de periodo semejante debidas a terremotos con epicentro en los fondos submarinos, dándoles el nombre japonés de “Tsunamis”, que en ocasiones tienen alturas considerables.

e) Ondas de Marea Ordinaria.

Las ondas de marea ordinaria son causadas por la atracción del Sol y la Luna, siendo la acción de la Luna 2.18 veces la acción del Sol, ya que los factores que intervienen son las masas de los dos cuerpos celestes y sus distancias a la Tierra.

f) Ondas de Transmarea.

Existen variaciones en los niveles del agua, que parecen obedecer a los ciclos climáticos o a otras componentes de las mareas solares y lunares y a factores meteorológicos.

III.7.1.2 Teoría elemental del oleaje progresivo.

La descripción más simple de una onda senoidal nos la da la Física y recordemos que queda representada por su longitud, altura, periodo y profundidad medida al nivel de reposo.

Si llamamos, de acuerdo con la figura 3.5.:

C: Celeridad (m/s).

L: Longitud de ola (m).

d: Profundidad (m).

H: Altura de la ola (m).

a: Semiamplitud o semialtura (m).

n: Desplazamiento vertical con respecto al Nivel de Reposo del Mar.

T: Periodo (s).

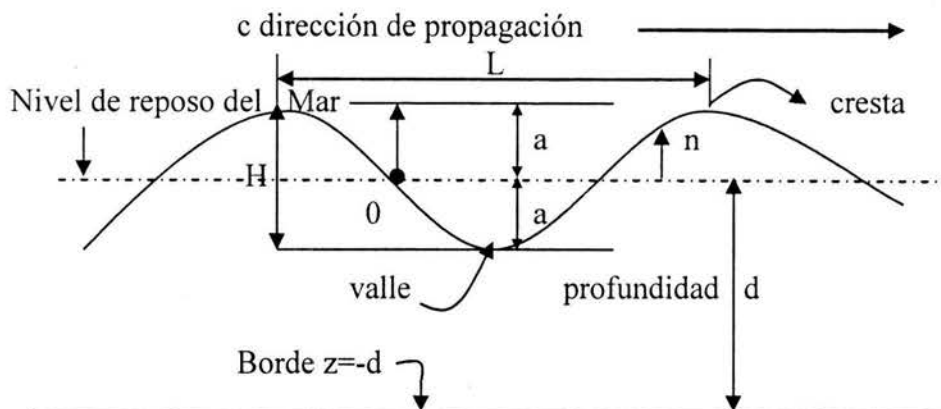


Figura 3.4. Definición de términos para una onda progresiva senoidal.

En este capítulo no desarrollaremos la teoría matemática, sino sólo describiremos las ecuaciones principales que definen al fenómeno.

La celeridad de la ola es la velocidad con que se desplaza y la podemos calcular como:

$$C = \frac{L}{T} \quad (3.5)$$

Pero también, de acuerdo a la teoría, la celeridad es:

$$C = \frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (3.6)$$

Y de aquí:

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (3.7)$$

En las expresiones anteriores podemos llamar:

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad \text{Número de ola.} \quad (3.8)$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad \text{Frecuencia angular de la ola.} \quad (3.9)$$

Combinando las ecuaciones (3.6) y (3.7), se puede obtener la ecuación que nos da la longitud de la ola en función de la profundidad y el periodo:



$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (3.10)$$

Como puede apreciarse en la ecuación anterior, el término L aparece en ambos lados y se resuelve por tanteos.

III.7.1.3. Refracción, difracción y reflexión del oleaje.

El oleaje al propagarse sobre la superficie del mar, va sufriendo deformaciones por efecto del fondo o por el encuentro con obstáculos, los que originan en el primer caso el fenómeno de refracción y en el segundo de difracción y reflexión.

Refracción del oleaje.

De acuerdo con la teoría lineal del oleaje que se analizó anteriormente, recordando la ecuación que nos da la celeridad de la ola:

$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} \quad (3.6)$$

se puede afirmar que la celeridad varía con la profundidad de la zona de donde se propaga, consecuentemente se producirá una variación en la longitud de onda.

El efecto que el fondo tiene sobre el oleaje es el de un freno y este tiende a deformarse adaptándose a la configuración de las curvas batimétricas.

Este fenómeno es similar al de la refracción de las ondas de sonido o de luz al pasar de un medio de una determinada densidad a otro diferente.

En general, y a partir del punto donde este efecto de freno se hace notable, ocurre cuando la profundidad es igual a la semilongitud de onda, los frentes de onda sufrirán cambios en su alineación que tienden a hacerlo paralelos con los distintos escalones de profundidad representados por las líneas batimétricas.

El estudio del fenómeno de refracción del oleaje es de gran importancia para el proyecto de una obra marítima, ya que permite determinar las características del oleaje y de sus acciones, pues en general la información del oleaje, medida o inferida a través de los métodos de predicción, corresponde a la zona que hemos denominado aguas profundas por lo que será necesario trasladar hasta el sitio mismo de estudio.

Por medio del conocimiento de este fenómeno de refracción podremos conocer la altura de ola, ángulo de incidencia de la ola, sitios con concentración de energía, etc.



El cálculo de la refracción del oleaje se puede realizar, en la actualidad, mediante métodos numéricos y gráficos.

Difracción de las olas.

La difracción de las olas es en esencia un fenómeno de transferencia de la energía de unas zonas a otras. Se produce cuando la ola encuentra en su camino un obstáculo que impide su paso a la zona posterior del mismo. Es el caso de los diques, islas naturales o artificiales, etc. En efecto, si se supone un dique que impide el paso de la onda, se pueden distinguir varias zonas con características de agitación diferentes.

De una a otra por diferencia en los niveles de agitación existe un intercambio de energía que generará en la zona resguardada una agitación de características particulares.

Es fácilmente comprensible el interés que tiene el estudio de este fenómeno para el diseño y explotación de un gran número de obras e instalaciones marítimas. La resonancia en las dársenas, las condiciones de entrada a un puerto, los azolvamientos y las variaciones de las playas próximas a una obra son algunos de los casos comunes en los que la difracción del oleaje juega un papel principal.

Esto, sin embargo, no quiere decir que para el estudio definitivo de una obra, en la que intervenga notablemente los fenómenos de refracción-difracción, sea siempre recomendable la realización de un ensayo experimental en modelo reducido que no precisa de las hipótesis previas simplificativas que todos los métodos teóricos necesitan para su aplicación, sobre todo cuando existan problemas de batimetría irregular o posible formación de cáusticos.

Reflexión.

El comportamiento de las ondas tras encontrar un obstáculo en su trayectoria, ya sea una isla, un dique o la propia playa o costa, puede ser muy variado. Su energía puede sufrir las modificaciones siguientes:

- a) Disiparse, como lo hace, por ejemplo, ante un fondo rugoso o una estructura porosa.
- b) Transmitirse parcialmente tras el obstáculo, tal y como sucede en el caso de diques de escollera o diques flotantes.
- c) Reflejarse en dirección distinta a la de incidencia en el obstáculo.

Si bien es posible, que la energía que incide en un obstáculo, se transforme exclusivamente según una de las tres formas, en la práctica el fenómeno suele ser mixto entrando en juego dos o tres formas de modificación al tiempo. En algunos casos de incidencia del oleaje con un dique o muro vertical el fenómeno de reflexión puede darse en forma pura, sin embargo, además de que las condiciones han de ser muy propicias siempre hay una cierta pérdida de energía por turbulencia o razonamiento. De este caso al de una playa tendida en la que la reflexión es casi nula, existe una gran gama de situaciones que



hace que el estudio de la reflexión sea de gran interés dentro de las técnicas de puertos y costas.

Desde el punto de vista cuantitativo, se va a circunscribir el estudio de la reflexión a los casos de diques o muros verticales y al de playas. Este último caso, así como los estados intermedios, como es el de diques en talud de escolleras, no admite estudios teóricos y un análisis se basa en resultados experimentales tanto en la naturaleza como en el modelo reducido. Esto se debe al gran número de variables que intervienen en el fenómeno de reflexión en estos casos.

Para el estudio cuantitativo de la reflexión se emplea, como indicador fundamental, el índice de reflexión c , que no es más que el cociente o relación entre la ola incidente y la reflejada.

III.7.2. Viento.

El viento se define, en general, como el movimiento de las masas de aire. Sin embargo, una definición aceptada técnicamente, apoyada en meteorología, es: corriente horizontal (o casi) de aire que circula con relativa proximidad a la superficie terrestre. Una variación a esta definición está representada por los “vientos orográficos” que circulan en forma ascendente.

El viento se atribuye a las desigualdades de la densidad del aire, y a las presiones bajas y altas. El excesivo calentamiento del aire hace que éste se dilate y se anime de un movimiento ascendente dejando un lugar vacío en el lugar en donde se dilató, conocido como centro de baja presión barométrica; este vacío se llena con aire más denso que procede de otras regiones o lugares de alta presión. Consecuentemente, podemos decir que la causa inicial del viento es la diferencia de temperaturas, la que a su vez, engendra la diferencia de presiones y por último el viento.

Los movimientos verticales del aire (cuando ocurren) tienen gran importancia en la formación de nubes, tormentas eléctricas, precipitaciones, etc. Sin embargo su magnitud es bastante inferior con respecto a los movimientos horizontales. El viento es el principal generador de oleaje y su efecto sobre la costa es permanente, provocando, además, mareas de vientos y fuerzas sobre las estructuras, de ahí la importancia de su estudio desde el punto de vista de las obras marítimas y la ingeniería de costas.

A la velocidad con que sopla el viento se le denomina intensidad y se expresa en unidades de longitud sobre las de tiempo (m/seg, Km/seg, nudos); para su medición se utiliza la escala internacional llamada de Beaufort (modificada), que se presenta en la Tabla. 3.2.



III.7.2.1. Clasificación de los vientos.

Clasificación		Velocidad del viento a 10 metros de altura (km/h)	Altura promedio de las olas en metros
0	Calma	0 - 1	0
1	Brisa	1 - 5	0
2	Viento suave	6 - 11	0 - 0.3
3	Viento leve	12 - 19	0.3 - 0.6
4	Viento moderado	20 - 28	0.6 - 1.2
5	Viento regular	29 - 38	1.2 - 2.4
D.T.6	Viento fuerte	39 - 49	2.4 - 4
D.T.7	Ventarrón	50 - 61	4 - 6
T.T.8	Temporal	62 - 74	4 - 6
T.T.9	Temporal Fuerte	75 - 88	4 - 6
T.T.1	Temporal muy fuerte	89 - 102	6 - 9
T.T.1	Tempestad	103 - 117	9 - 14

Tabla. 3.2 Escala de Beaufort.

III.7.3. Corrientes.

En general, se puede definir a las corrientes como los desplazamientos de masas de agua, determinadas por dos características: Dirección y velocidad.

La dirección de una corriente es el rumbo hacia el cual se dirige; es decir, la forma de designar la dirección de una corriente es contraria a la que se utiliza en los vientos, ya que la dirección estos se consideran de dónde sopla y no hacia donde sopla. La velocidad de una corriente se expresa tradicionalmente en nudos, cuando se trata de aspectos relativos a la navegación (1nudo = 1 milla náutica por hora = 1,853 m/h), o bien en m/seg.

Existen muchos y variados tipos de corrientes, y se han clasificado tomando como base las causas que las generan. Se hará solamente una breve relación de sus características, sin mencionar los efectos que pudiesen tener, ya que su influencia, o bien es puramente local o, por el contrario, es factor determinante en la climatología y fauna marítima, materias prácticamente ajenas a nuestro propósito.

III.7.3.1. Clasificación de las corrientes.

Corrientes oceánicas.

Son desplazamientos de masas del mar provocadas por la presencia de mareas distintas en dos sitios (diferencias en niveles) por diferencia de densidades o temperaturas.



Corrientes de marea.

Se originan en los sitios donde existen discontinuidades de la costa, tales como esteros, marismas, albuferas y bahías, que comunican al mar con pasos estrechos, originando corrientes que pueden tener gran importancia para las obras portuarias.

Corrientes de viento.

Cuando un viento constante actúa sobre una área de agua se forman corrientes bien definidas, llamadas corrientes de viento, que arrastran las capas superficiales del agua.

Corrientes de salinidad.

Las aguas oceánicas tienen variaciones de salinidad y, consecuentemente, unas son más densas que otras, produciéndose intercambios entre las aguas más densas y las más ligeras. Dichos intercambios generan las llamadas corrientes de salinidad.

Corrientes de presión.

Cuando existen diferencias de presión barométrica, el agua puede, en condiciones favorables, actuar en forma de corriente definida, de la región de alta presión a la de baja.

Corrientes de olas.

Algunos autores afirman que en las olas normales, a lo largo de una misma cresta, se tienen diferentes alturas, fenómeno notable en las zonas bajas, donde al originarse una pendiente hidráulica, se presentan corrientes transversales a lo largo de las crestas de las olas. Tales corrientes transversales son las que originan las corrientes de olas.



CAPITULO IV

MOVIMIENTO DE FLOTADORES SIN EL EFECTO DEL OLEAJE Y TEORIA DE CATENARIA



CAPITULO IV.

MOVIMIENTO DE FLOTADORES SIN EL EFECTO DEL OLEAJE TEORIA DE CATENARIA.

IV.1. Movimiento de flotadores sin el efecto del oleaje.

IV.1.1. Ecuaciones básicas.

La ecuación (4.1) muestra los movimientos de Arzada, Deriva y Vaiven del **flotador** cuando no hay acción del oleaje.

$$(m_o + m_a)\ddot{x} + n\dot{x} + kx = 0 \quad (4.1)$$

Donde:

x: Desplazamiento de Arzada, Deriva o Vaiven, en m.

\dot{x} : Velocidad del movimiento, en m/s.

\ddot{x} : Aceleración del movimiento, en m/s²

m_o: Masa del flotador, en kg.

m_a: Masa adicional, en kg.

n: Coeficiente de disminución del movimiento, en N/(m/s).

k: Coeficiente de restricción, en N/m.

Las variables m_a y n_d se producen por la reacción dinámica debida al agua periférica del flotador, k es el coeficiente de restricción debido al empuje hidrostático y al sistema de amarras. Si el flotador no está amarrado (en la condición libre), el valor de k para los movimientos de deriva y cabeceo es cero.

La ecuación (4.2) muestra las rotaciones de balanceo, cabeceo y guiñada del **flotador** sin efecto de oleaje.

$$(I_o + I_a)\ddot{\theta} + N_d \dot{\theta} + K \theta = 0 \quad (4.2)$$

Donde:

θ : Desplazamiento de rotación en radianes.

$\dot{\theta}$: Velocidad angular de la rotación en 1/s.

$\ddot{\theta}$: Aceleración angular de la rotación, en 1/s².

I_o: Momento de inercia del flotador, en kg*m².

I_a: Momento de inercia adicional, en kg*m².

N_d: Coeficiente de disminución de la rotación, en Nm/s.

K: Coeficiente de restricción, en Nm.

Al Igual que en la ecuación (4.1), las variables I_a y N_d se producen por la **reacción** dinámica debida al agua periférica del flotador, K es el coeficiente de **restricción**



ocasionado por el empuje hidrostático y por el sistema de amarras. Si el flotador no está amarrado el valor de K para el movimiento de arzada es cero.

IV.1.2. Obtención de K y k del flotador libre y rectangular.

Los valores de k y K están dados por el sistema de amarras. Para simplificar el problema suponemos que el flotador no está amarrado (en la condición libre) y es rectangular como lo muestra la figura 4.1. Además suponemos que el centro de gravedad es $(0, 0, Z_0)$ en las coordenadas que se muestran en la figura 4.1.

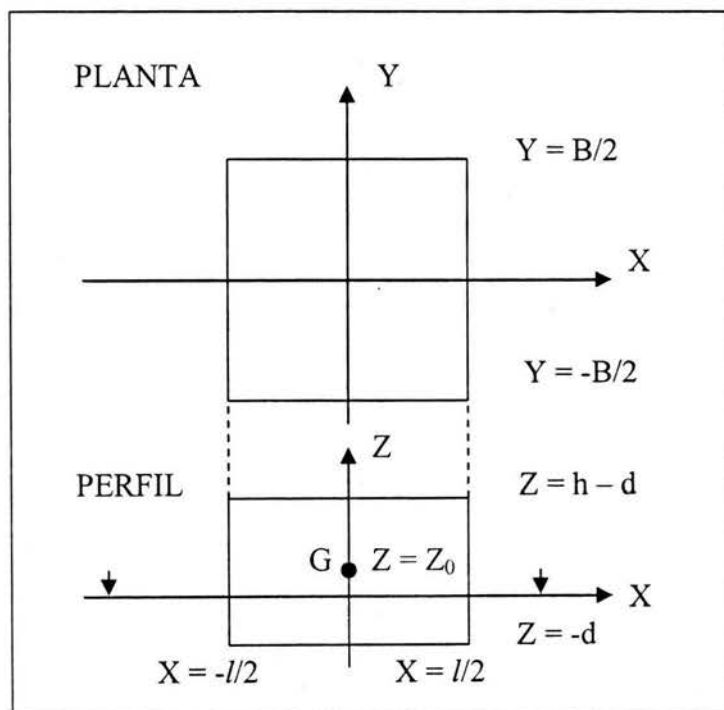


Figura 4.1 Flotador rectangular.

De la figura se tiene que:

X, Y : Ejes horizontales.

Z : Eje vertical hacia arriba de la superficie del agua.

d : Calado del flotador.

l : Ancho del flotador.

B : Longitud del flotador.

h : Altura del flotador.

m_o : Masa del flotador.

I_y : Momento de inercia del flotador para el movimiento de balanceo.

I_x : Momento de inercia del flotador para el movimiento de cabeceo.

ρ : Densidad del agua (1000 kg/m^3).

g : Aceleración de la gravedad (9.8 m/seg^2).



Por el equilibrio del empuje hidrostático y de la gravedad, se da la ecuación. (4.3).

$$M_o = \rho g B d \quad (4.3)$$

Si la distribución de la masa es uniforme dentro del flotador, las ecuaciones (4.4) y (4.5) son válidas para la figura 1.5.

$$I_y = \frac{m_o}{12} (l^2 + h^2) \quad (4.4)$$

$$I_x = \frac{m_o}{12} (B^2 + h^2) \quad (4.5)$$

El coeficiente k para el movimiento de arzada está dado por la ecuación (4.6)

$$k = \rho g B l \quad (4.6)$$

El coeficiente K_Y para el movimiento de balanceo está dado por la ecuación (4.7), según las ecuaciones (3.1) y (4.3).

$$K_Y = m_o g (GM)_Y = \rho g B l d (GM)_Y \quad (4.7)$$

Donde $(GM)_Y$ es el metacentro para el movimiento de balanceo y está dado por la ecuación (4.8) según la ecuación (3.4)

$$(GM)_Y = \frac{1}{3d} \left(\frac{L}{2} \right)^2 - z_o + \frac{d}{2} \quad (4.8)$$

De la misma manera K_X para el movimiento de cabeceo se da como sigue:

$$K_X = m_o g (GM)_X = \rho g B l d (GM)_X$$

$$(GM)_X = \frac{1}{3d} \left(\frac{B}{2} \right)^2 - z_o + \frac{d}{2} \quad (4.9)$$

IV.1.3. Soluciones de las ecuaciones.

La ecuación (4.1) se puede escribir como la ecuación (4.10).

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \sigma^2 x = 0 \quad (4.10)$$

Donde:

$$\lambda = n d / (m_o + m_a) \quad (4.11)$$



$$\sigma^2 = k / (m_0 + m_a) \quad (4.12)$$

Cuando no existe la disminución ($nd = \lambda = 0$) la solución de la ecuación (4.10) es como sigue:

$$X = x_0 \cos(\sigma t) \quad (4.13)$$

Donde x_0 es la amplitud de la oscilación (un valor constante) y t es el tiempo (cuando $t=0$, $x=0$).

La ecuación (4.13) muestra una oscilación del periodo T_0 , donde T_0 es:

$$T_0 = 2\pi / \sigma = 2\pi \sqrt{(m_0 + m_a) / k} \quad (4.14)$$

En caso de que nd y λ sean diferentes de cero, la solución de la ecuación (4.10) es como sigue:

$$X = x_0 \cos\left(\sqrt{\sigma^2 - \frac{\lambda^2}{4}} t\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{2} t\right) \quad (4.15)$$

Donde x_0 es el desplazamiento inicial de la oscilación. El periodo T_N de esa oscilación es como sigue:

$$T_N = \frac{2\pi}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{\lambda^2}{4}}} \quad (4.16)$$

Comparando las ecuaciones (4.14) y (4.16), observamos que $T_N \geq T_0$, y esto muestra que por el efecto de disminución el periodo de la oscilación se prolonga.

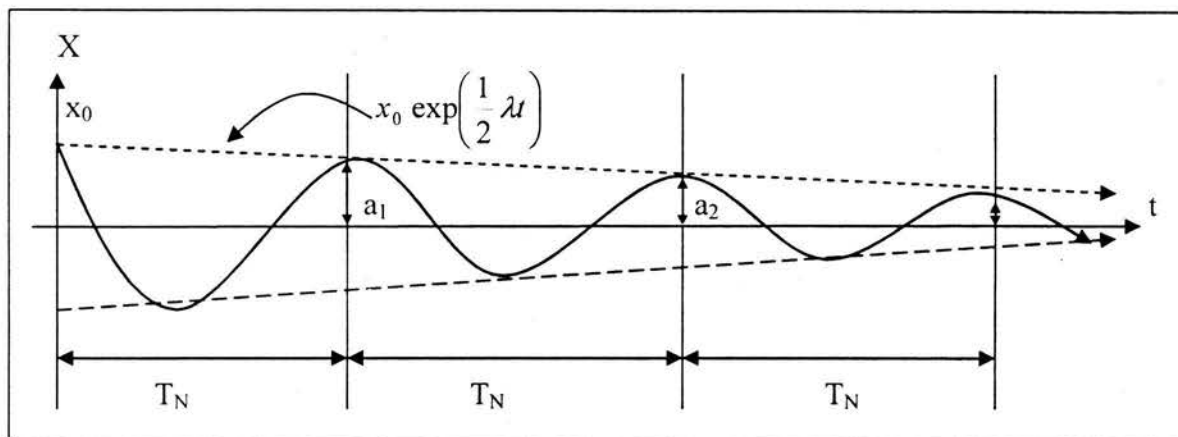


Fig. 4.2 Solución de la ecuación (4.10).



La figura 4.2 muestra gráficamente la ecuación (4.15), y se observa en la figura, que la amplitud disminuye durante la oscilación.

Durante el tiempo de T_N , que es el periodo de la oscilación, el cociente de disminución es como sigue:

$$\frac{a_2}{a_1} = \exp\left(-\frac{\lambda}{2} T_N\right) \quad (4.17)$$

De las ecuaciones (4.17) y (4.11) se obtienen las ecuaciones (4.18) y (4.19).

$$\lambda = \frac{2}{T_N} \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \quad (4.18)$$

$$nd = \frac{2(mo + ma)}{T_N} \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \quad (4.19)$$

De la misma forma, la solución de la ecuación (4.2) es como sigue:

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\sigma^2 - \frac{\lambda^2}{4}} t\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{2} t\right) \quad (4.20)$$

Donde:

$$\sigma = K / (I_o + I_a) \quad (4.21)$$

$$\lambda = Nd / (I_o + I_a) \quad (4.22)$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{(I_o + I_a)}{K}} \quad (4.23)$$

$$T_N = 2\pi / \sqrt{\sigma^2 - \frac{\lambda^2}{4}} \quad (4.24)$$



IV.1.4. Obtención de los coeficientes del experimento.

En la ecuación (4.1), m_a y n_d no están dados. Tampoco I_a y N_d en la ecuación (4.2). Sin embargo, se pueden obtener los coeficientes mediante un experimento. Si se obtiene T_N y a_1/a_2 , experimentalmente, los coeficientes están dados como sigue:

De las ecuaciones (4.16), (4.12) y (4.18) se puede obtener m_a .

$$\sigma^2 = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{4\pi^2}{T_N^2}$$

$$\frac{k}{m_o + m_a} = \frac{1}{T_N^2} \left[\left\{ \ln \frac{a_1}{a_2} \right\}^2 + 4\pi^2 \right]$$

$$m_a = \frac{kT_N^2}{\left[\left(\left\{ \ln \left(\frac{a_1}{a_2} \right) \right\}^2 + 4\pi^2 \right) - m_o \right]} \quad (4.25)$$

El valor de n_d está dado en la ecuación (4.19) con el factor de m_a de la ecuación (4.25).

$$n_d = \frac{2(m_o + m_a)}{T_N} \ln \left(\frac{a_1}{a_2} \right) \quad (4.19)$$

De la misma manera los valores de I_a y N_d , de la ecuación (4.2), están dados como sigue:

$$I_a = \frac{KT_N^2}{\left[\left(4\pi^2 + \left\{ \ln \left(\frac{a_1}{a_2} \right) \right\}^2 \right) - I_o \right]} \quad (4.26)$$

$$N_d = \frac{2(I_o + I_a)}{T_N} \ln \left(\frac{a_1}{a_2} \right) \quad (4.27)$$

Prácticamente, el valor de $4\pi^2 = 39.48$ es mucho más grande que $\{\ln(a_1/a_2)\}^2$. Por ejemplo si $a_1/a_2 = 2.0$ (en un periodo se disminuye la amplitud hasta 50%), $\{\ln(a_1/a_2)\}^2 = 0.48$. Por tal razón, en las ecuaciones (4.25) y (4.26) se puede eliminar $\{\ln(a_1/a_2)\}^2$ sin tener un error importante.



IV.2. Teoría de Catenaria.

IV.2.1. Ecuaciones Básicas.

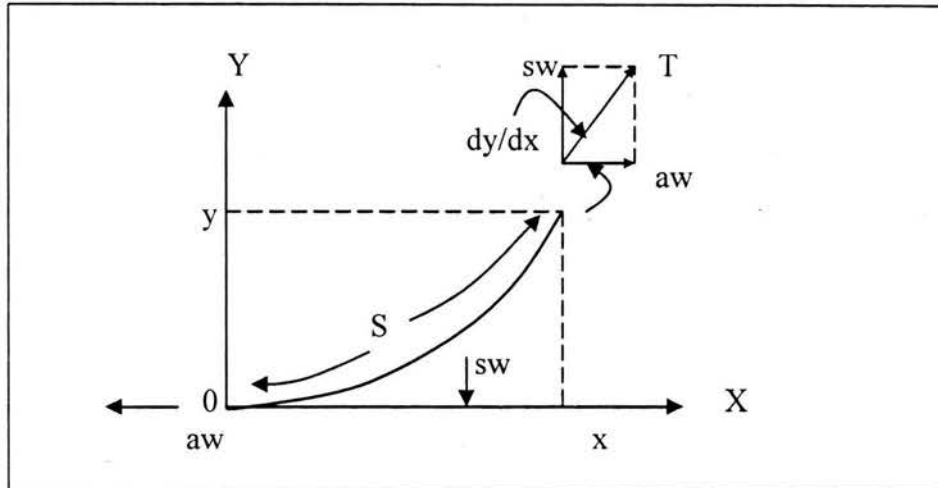


Figura 4.3 Definición del problema.

La Catenaria es una línea determinada por la gravedad, como en las cadenas. Suponemos que la línea es flexible y no hay extensión de ella.

La línea tiene masa. Por eso para levantar la línea, alguna fuerza contra la gravedad es necesaria y cierta tensión se produce dentro de la línea por la gravedad.

La figura 4.3 muestra la definición del problema.

Donde:

X: Coordenada horizontal.

Y: Coordenada vertical.

S: Longitud de la cadena.

sw: Peso de la cadena por unidad de longitud.

T: Tensión de la cadena.

aw: Tensión horizontal de la cadena.

dy/dx: Pendiente de la cadena.

Por el equilibrio de la fuerza vertical. La ecuación (4.28) está dada como sigue:

$$S = a \frac{dy}{dx} \quad (4.28)$$

Donde:

$$S = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (4.29)$$



Por lo tanto:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (4.30)$$

La solución de la ecuación (4.30) tiene que satisfacer las siguientes condiciones, que se indican en la figura 4.3.

- (i) Cuando; $x=0$, $y=0$
- (ii) Cuando; $x=0$, $dy/dx=0$
- (iii) Cuando; $x>0$, $dy/dx>0$
- (iv) Cuando; $x>0$, $d^2y/dx^2>0$

La condición (i) muestra que la línea empieza en el punto 0 de la figura 4.3.

La condición (ii) muestra que la pendiente es cero en el punto 0. La condición (iii) muestra que el valor y aumenta con el valor de x . La condición (iv) muestra que la pendiente también aumenta al incremento del valor x .

Tomando en consideración las condiciones mencionadas anteriormente, suponemos la solución de la ecuación (4.30) en forma de la ecuación (4.31) y obtenemos los valores de los coeficientes A y B .

$$y = A(\cosh Bx - 1) \quad (4.31)$$

Donde A y B son diferentes de cero y tienen un cierto valor positivo.

De la ecuación (4.31), obtenemos dy/dx y d^2y/dx^2 como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = AB \sinh Bx \quad (4.32)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = AB^2 \cosh Bx \quad (4.33)$$

La ecuación (4.30) se puede escribir como sigue:

$$a^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 = 0 \quad (4.34)$$



Con las ecuaciones (4.32),(4.33)y (4.34) obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$a^2 A^2 B^4 \cosh^2 Bx - A^2 B^2 \sinh^2 Bx - 1 = 0 \quad (4.35)$$

$$\cosh^2 Bx = \frac{1}{2} (\cosh 2Bx + 1) \quad (4.36)$$

$$\sinh^2 Bx = \frac{1}{2} (\cosh 2Bx - 1) \quad (4.37)$$

Con las ecuaciones (4.36) y (4.37) son válidas, obtenemos la ecuación (4.38).

$$\left(\frac{1}{2} a^2 A^2 B^4 - \frac{1}{2} A^2 B^2 \right) \cosh 2Bx + \left(\frac{1}{2} a^2 A^2 B^4 + \frac{1}{2} A^2 B^2 - 1 \right) = 0 \quad (4.38)$$

Para satisfacer la ecuación (4.38) para cualquier valor de x las ecuaciones (4.39) y (4.40) son necesarias.

$$\frac{1}{2} A^2 B^2 (a^2 B^2 - 1) = 0 \quad (4.39)$$

$$\frac{1}{2} a^2 A^2 B^4 + \frac{1}{2} A^2 B^2 - 1 = 0 \quad (4.40)$$

De la ecuación (4.39) se obtiene B como sigue:

$$\begin{aligned} a^2 B^2 - 1 &= 0 \\ B &= \frac{1}{a} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Como se observa en la ecuación (4.31), el valor de B tiene que ser positivo.

De las ecuaciones (4.40) y (4.41), obtenemos el coeficiente A.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{A^2}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{A^2}{a^2} - 1 &= 0 \\ A &= a \end{aligned} \quad (4.42)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación (4.30) ya está dada en la ecuación (4.43).

$$y = \cosh \frac{x}{a} - a \quad (4.43)$$

Con las ecuaciones (4.28) y (4.43) obtenemos la ecuación (4.44).



$$S = a \operatorname{senh} \frac{x}{a} \quad (4.44)$$

Y con las ecuaciones (4.42), (4.43) y (4.44) obtenemos la ecuación (4.45).

$$S^2 = a^2 \operatorname{senh}^2 \frac{x}{a} = a^2 \cosh^2 \frac{x}{a} - a^2$$

$$S^2 = \left(a \cosh \frac{x}{a} + a \right) \left(a \cosh \frac{x}{a} - a \right) = y(y + 2a) \quad (4.45)$$

$$S = \sqrt{y(y + 2a)}$$

Utilizando las ecuaciones (4.43), (4.44) y (4.45), es posible obtener la tensión de la línea como sigue, si están dados x_D , y_D y S .

Donde:

- x_D : Distancia horizontal entre los dos puntos.
- y_D : Distancia vertical entre los dos puntos.
- S : Longitud de la cadena.

IV.2.2. Condiciones de la cadena.

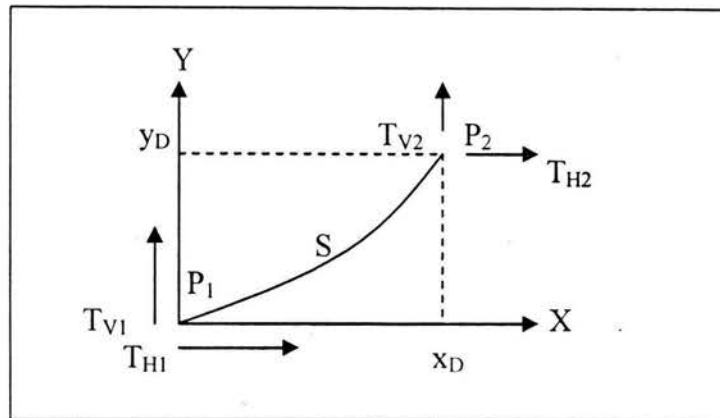


Figura 4.4 Definición de las tensiones.

La figura 4.4 muestra la definición de las tensiones de ambos lados de la cadena.

La variable T_{H1} es el componente horizontal y T_{V1} es el componente vertical de la fuerza que actúa al punto P_1 por la cadena, la variable T_{H2} es el componente horizontal y T_{V2} es el componente vertical de la fuerza que actúa al punto P_2 por la cadena.



Como se observa en la figura 4.4, los signos de T_{H1} , T_{V1} , T_{H2} y T_{V2} , están dados como sigue:

$$\begin{aligned} T_{H1} &\geq 0 \\ T_{V1} &\leq 0 \\ T_{H2} &\leq 0 \\ T_{V2} &\leq 0 \end{aligned}$$

Para obtener los valores de T_{H1} , T_{V1} , T_{H2} y T_{V2} , de los datos dados x_D , y_D , S y w , es necesario tomar en consideración que existen las siguientes seis condiciones en la cadena.

IV.2.2.1. Condición 1.

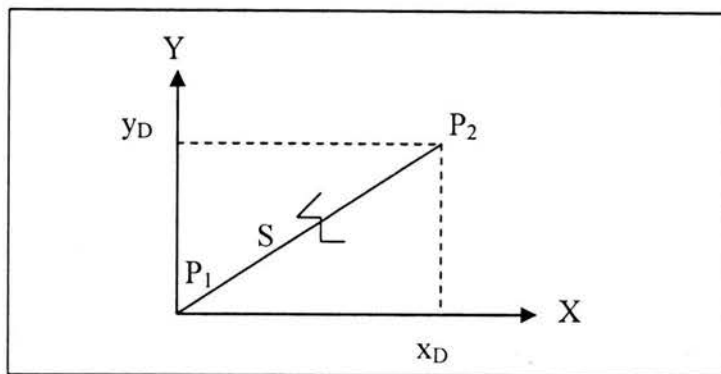


Figura 4.5 Condición 1

Esta Condición se produce al satisfacer la siguiente condición.

$$S \leq \sqrt{x_D^2 + y_D^2} \quad (4.46)$$

En la condición 1, la cadena es demasiado corta para conectar los dos puntos P_1 y P_2 y es imposible calcular T_{H1} , T_{V1} , T_{H2} y T_{V2} .

IV.2.2.2. Condición 2.

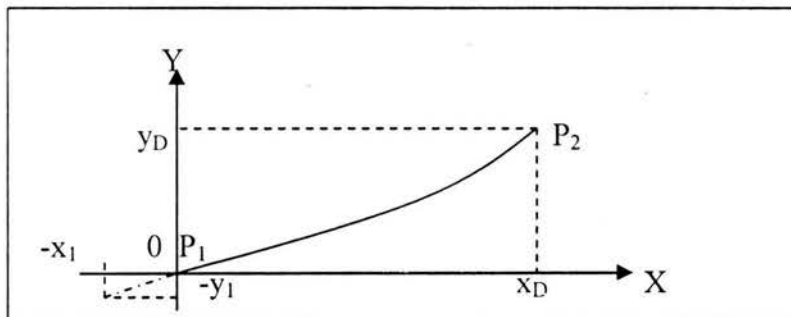


Figura 4.6. Condición 2.



En esta condición, la cadena es relativamente corta y el punto P_1 tiene pendiente positiva. Como se muestra en la figura 4.6, el punto $(-x_1, -y_1)$ es el inicio de la curva de Catenaria. En la condición 2, existen las siguientes relaciones de las tensiones.

$$\begin{aligned} T_{H1} &= -T_{H2} \\ T_{V1} &> 0 \\ T_{V2} &= -T_{V1} - Sw \end{aligned}$$

IV.2.2.3. Condición 3.

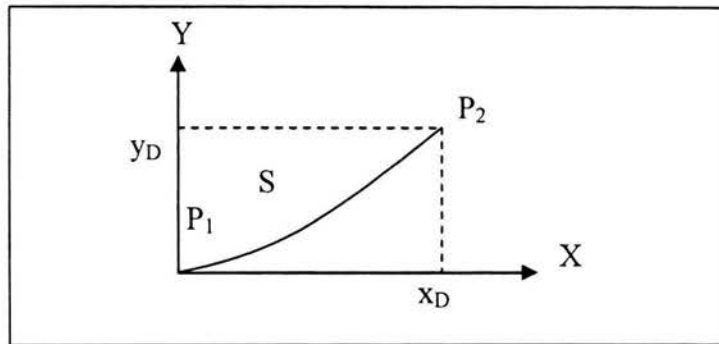


Figura 4.7 Condición 3.

En esta condición el Punto P_1 es el inicio de la curva de Catenaria.

En la condición 3 existen las siguientes relaciones de las tensiones.

$$\begin{aligned} T_{H1} &= -T_{H2} \\ T_{V1} &= 0 \\ T_{V2} &= -Sw \end{aligned}$$

IV.2.2.4. Condición 4.

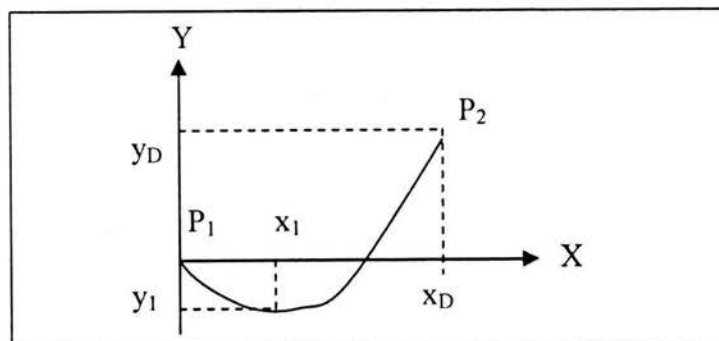


Figura 4.8 Condición 4.



En esta condición el Punto P_1 tiene pendiente negativa. Como se muestra en la figura 4.8 el punto $(x_1, -y_1)$ es el inicio de la curva de Catenaria.

En la condición 4 existen las siguientes relaciones de las tensiones.

$$\begin{aligned} T_{H1} &= -T_{H2} \\ T_{V1} &< 0 \\ T_{V2} &< 0 \\ T_{V1} + T_{V2} &= -Sw \end{aligned}$$

IV.2.2.5. Condición 5.

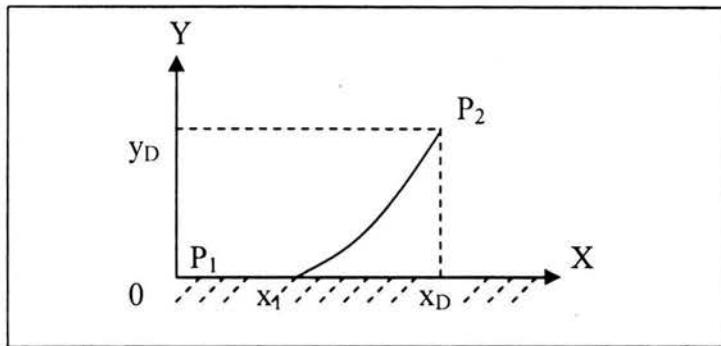


Figura 4.9 Condición 5.

En esta condición existe la tierra en $y=0$ y la curva de Catenaria se inicia en el punto $(x_1,0)$. En esta condición existen las siguientes relaciones en las tensiones.

$$\begin{aligned} T_{H1} &= -T_{H2} \\ T_{V1} &= 0 \\ -Sw &< T_{V2} < -y_D w \end{aligned}$$

IV.2.2.6. Condición 6.

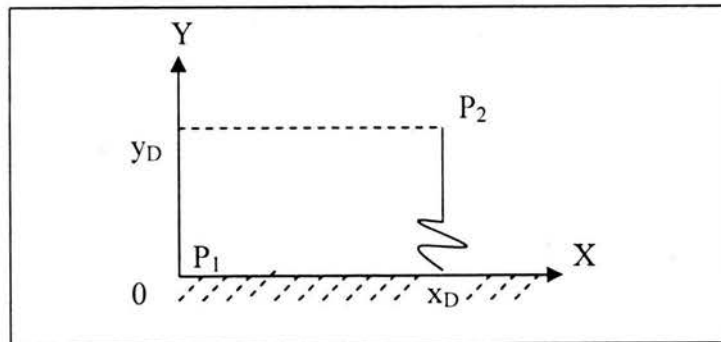


Figura 4.10 Condición 6.



Esta condición se produce con la existencia de la tierra en $y=0$ y se debe satisfacer las siguiente condición.

$$S \geq x_D + y_D \quad (4.47)$$

En esta condición, la cadena es demasiado larga para formar la curva de Catenaria. Donde T_{H1} , T_{V1} , T_{H2} y T_{V2} están dados como sigue:

$$\begin{aligned} T_{H1} &= 0 \\ T_{V1} &= 0 \\ T_{H2} &= 0 \\ T_{V2} &= -y_D w \end{aligned}$$

V.2.3. Método de análisis.

La figura 4.11 muestra el diagrama de flujo del análisis de la tensión de la cadena.

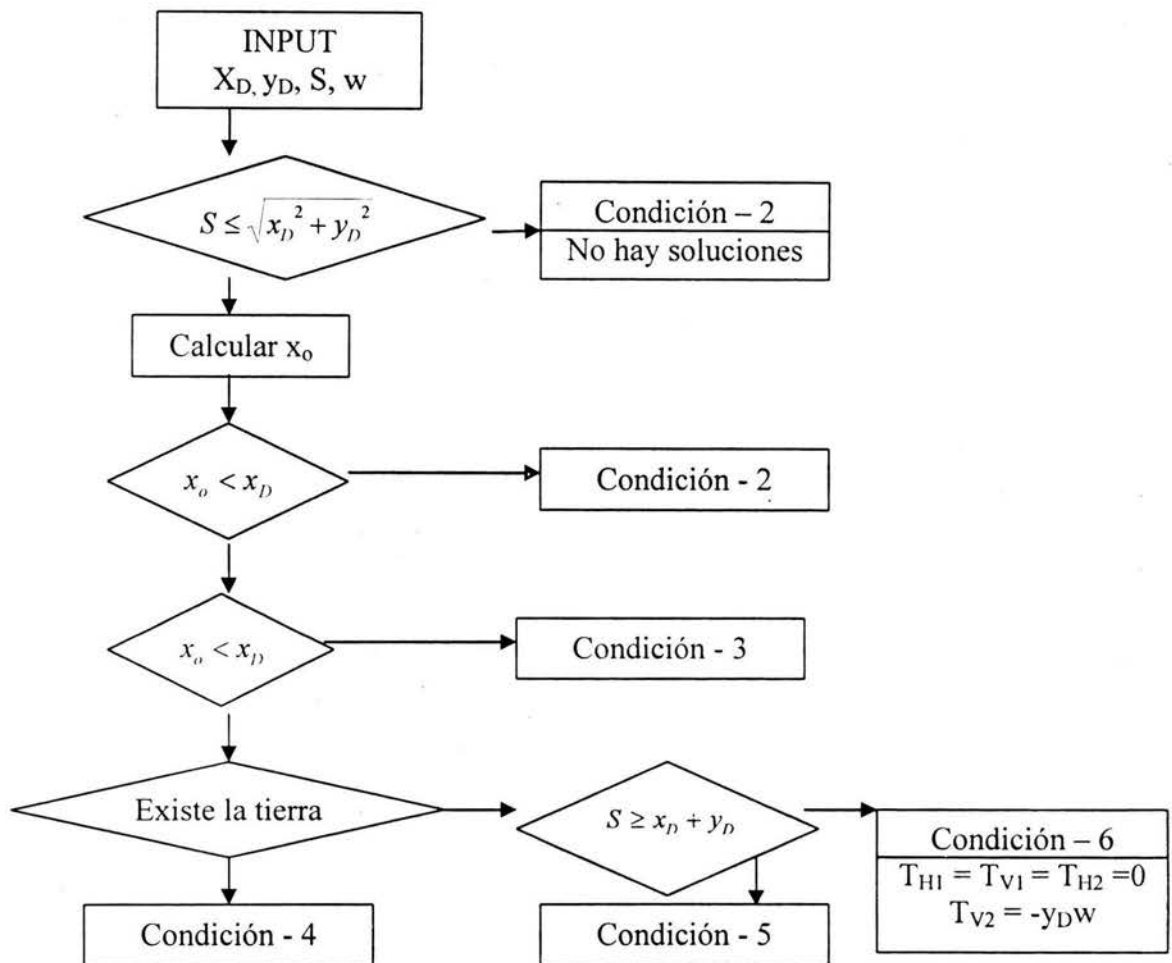


Figura 4.11 Análisis de la tensión de la cadena.



La clasificación de las condiciones se efectúa comparando x_0 con x_D , donde x_0 es un valor calculado por y_D y S en las ecuaciones siguientes.

La ecuación (4.45) muestra que si están dados y y S se puede calcular el valor de a . Por eso está dada la ecuación (4.48).

$$a_o = \frac{(s^2 - y_D^2)}{(2y_D)} \quad (4.48)$$

La ecuación (4.46) muestra que si están dados S y a , se puede calcular el valor de x . Por eso, está dada la ecuación (4.49).

$$x_o = a_o \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{S}{a_o} \right) \quad (4.49)$$

$$x_o = a_o \ln \left\{ \frac{s}{a_o} + \sqrt{1 + \left(\frac{s}{a_o} \right)^2} \right\}$$

Si x_0 es igual a x_D , esta igualdad muestra la condición 3. Las soluciones de la condición 3 están dadas como sigue:

$$\begin{aligned} T_{H1} &= a_o w \\ T_{V1} &= 0 \\ T_{H2} &= -a_o w \\ T_{V2} &= -S w \end{aligned}$$

Si x_0 es menor que x_D , ésto muestra la condición 2. Si x_0 es mayor de x_D , ésto muestra las condiciones 4, 5 y 6 dependiendo de la existencia de la tierra.

Las soluciones de las condiciones 2, 4 y 5 están dadas como sigue:

IV.2.3.1. Condición 2.

De la ecuación (4.43).

$$y_D = a \cosh \left(\frac{x_1 + x_D}{a} \right) - a \cosh \left(\frac{x_1}{a} \right) \quad (4.50)$$

De la ecuación (4.44).

$$S = a \operatorname{senh} \left(\frac{x_1 + x_D}{a} \right) - a \operatorname{senh} \left(\frac{x_1}{a} \right) \quad (4.51)$$



En las ecuaciones (4.50) y (4.51), a y x , son desconocidas. Como hay dos variables desconocidas y dos ecuaciones, las dos variables se pueden calcular. Las soluciones son como sigue:

$$\begin{aligned} T_{H1} &= aw \\ T_{V1} &= aw \operatorname{senh}\left(\frac{x_1}{a}\right) \\ T_{H2} &= -aw \\ T_{V2} &= -T_{V1} - Sw \end{aligned}$$

IV.2.3.2. Condición 4.

De la ecuación (4.43).

$$y_D = a \cosh\left(\frac{x_D + x_1}{a}\right) - a \cosh\left(\frac{x_1}{a}\right) \quad (4.52)$$

De la ecuación (4.44).

$$S = a \operatorname{senh}\left(\frac{x_D + x_1}{a}\right) - a \operatorname{senh}\left(\frac{x_1}{a}\right) \quad (4.53)$$

Las dos variables desconocidas a y x_1 , se pueden calcular de las dos ecuaciones (4.44) y (4.45) las soluciones son como sigue:

$$\begin{aligned} T_{H1} &= aw \\ T_{V1} &= -aw \operatorname{senh}\left(\frac{x_1}{a}\right) \\ T_{H2} &= -aw \\ T_{V2} &= -aw \operatorname{senh}\left(\frac{x_D - x_1}{a}\right) = -T_{V1} - Sw \end{aligned}$$

IV.2.3.3. Condición 5.

De la ecuación (4.43).

$$y_D = a \cosh\left(\frac{x_D - x_1}{a}\right) - a \quad (4.54)$$



De la ecuación (4.45).

$$x_1 = S - \sqrt{y_D(y_D + 2a)} \quad (4.55)$$

Por eso:

$$y_D = a \cosh \left\{ \frac{x_D - S + \sqrt{y_D(y_D + 2a)}}{a} \right\} - a \quad (4.56)$$

En la ecuación (4.56) sólo a es una variable desconocida. Por eso el valor de a se puede calcular de la ecuación (4.56). Si está dada a , x_1 está dado de la ecuación (4.55). Las soluciones son como sigue:

$$\begin{aligned} T_{H1} &= aw \\ T_{V1} &= 0 \\ T_{H2} &= -a w \\ T_{V2} &= -(S - x_1)w \end{aligned}$$

IV.2.4. Método de Newton Raphson.

Para obtener la solución de las ecuaciones (4.50), (4.51), (4.52), (4.53) y (4.56) el método de Newton Raphson es útil. Es un método que consiste en buscar el mejor valor cuando se da un valor inicial.

La figura 4.12 muestra el concepto general del método de Newton Raphson, donde $y=f(x)$ es una función dada y la curva AB muestra la función.

El problema es buscar el valor de x_T que satisface $f(x_T)=0$. En la figura 4.12 x_1 es el valor inicial de x .

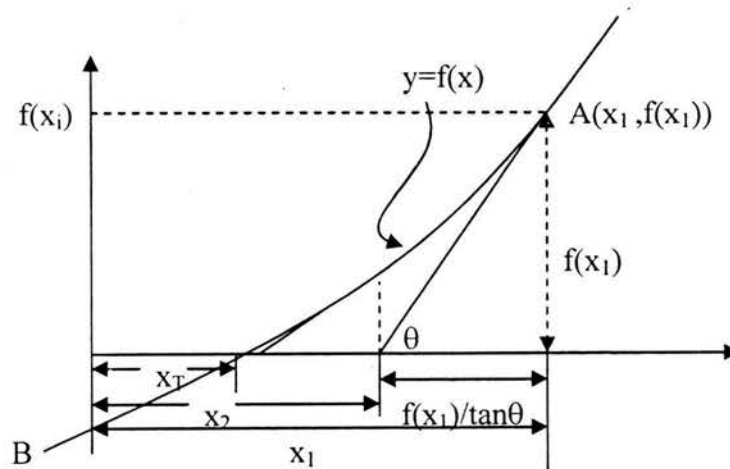


Figura 4.12 Concepto general del método de Newton Raphson.



El método consiste en buscar un mejor valor de x_2 que sea próximo a x_T que el valor inicial x_1 .

Cuando $x=x_1$ el valor de y es $f(x)$, y la pendiente de la curva $\tan \theta$ es $(df/dx)_{x=x_1}$. La pendiente θ se obtiene numéricamente de la ecuación (4.57).

$$\tan \theta = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_1} = \frac{f(x_1 - \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (4.57).$$

Donde Δx es un valor pequeño.

Como se muestra en la figura 4.12, x_2 está dado como sigue:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2) \tan \theta &= f(x_1) \\ x_2 &= \frac{x_1 - f(x_1)}{\tan \theta} = \frac{x_1 - f(x_1)}{(df/dx)_{x=x_1}} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Una vez que se obtiene x_2 , se puede repetir el mismo cálculo suponiendo que $x_1=x_2$. Con la repetición se obtiene la solución de $f(x)=0$ con suficiente precisión.

El método de Newton Rapshon se puede aplicar a un problema de dos variables desconocidas y dos ecuaciones dadas. En este caso la figura 4.12 tendría que ser tridimensional y es difícil explicarlo gráficamente.

El problema está dado como sigue:

$$\begin{aligned} z &= f_1(x_T, y_T) = 0 \\ z &= f_2(x_T, y_T) = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Donde f_1 y f_2 son funciones de x y y . (x_T, y_T) es la solución de la ecuación (4.59) que satisface $f_1=0$ y $f_2=0$. Suponemos que (x, y) son los valores iniciales y buscamos los mejores valores (x_2, y_2) . De la misma manera como se obtuvo la ecuación (4.56), primero se obtienen estos cuatro valores diferenciales.

$$\beta_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{f_1(x_1 + \Delta x, y_1) - f_1(x_1, y_1)}{\Delta x} \quad (4.60)$$

$$\beta_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{f_1(x_1, y_1 + \Delta y) - f_1(x_1, y_1)}{\Delta y} \quad (4.61)$$

$$\beta_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{f_2(x_1 + \Delta x, y_1) - f_2(x_1, y_1)}{\Delta x} \quad (4.62)$$



$$\beta_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{f_2(x_1, y_1 + \Delta y) - f_2(x_1, y_1)}{\Delta y} \quad (4.63)$$

Donde Δx y Δy son valores pequeños.

En la misma forma de la ecuación (4.57) obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$(x_1 - x_2)\beta_{11} + (y_1 - y_2)\beta_{12} = f_1(x_1, y_1) \quad (4.64)$$

$$(x_1 - x_2)\beta_{21} + (y_1 - y_2)\beta_{22} = f_2(x_1, y_1) \quad (4.65)$$

De las ecuaciones (4.64) y (4.65), obtenemos x_2 y y_2 como sigue:

$$x_2 = x_1 + \frac{-\beta_{22}f_1(x_1, y_1) + \beta_{12}f_2(x_1, y_1)}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}} \quad (4.66)$$

$$y_2 = y_1 + \frac{\beta_{21}f_1(x_1, y_1) - \beta_{11}f_2(x_1, y_1)}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}} \quad (4.67)$$

Repitiendo el cálculo de las ecuaciones entre (4.60) y (4.67), obtenemos x_T y y_T con suficiente precisión.

IV.3. Ley de Similitud.

IV.3.1. Ley de Similitud de Froude.

La ley de similitud en los experimentos de flotadores sigue la ley de similitud de Froude.

En la Ley de Froude se tienen tres unidades fundamentales que son: longitud, masa y tiempo que tienen similitud entre los prototipos y los modelos, donde l_r es la escala del modelo.

Longitud [L] l_r

Masa [M] l_r^3

Tiempo [T] $\sqrt{l_r}$

Todos los conceptos que se utilizan en el experimento hidráulico tienen unidades de combinación de estas tres unidades fundamentales. Por eso con las relaciones mencionadas, la similitud se obtiene fácilmente.



Por ejemplo, la fuerza tiene una dimensión de ($N=kgm/s^2$). Por eso la unidad está dada como (ML/T^2). La similitud se da como sigue:

$$[M][L]/[T^2] = l_r^3 l_r / \sqrt{l_r^2} = l_r^3$$

A continuación se da un resumen de la Ley de similitud de Froude empleadas para un modelo.

IV.3.1.1. Modelo del flotador.

Concepto	Unidad	Similitud
Longitud	[L]	l_r
Ancho	[L]	l_r
Altura	[L]	l_r
Calado	[L]	l_r
Masa	[M]	l_r^3
Peso	[ML/T ²]	l_r^3
Densidad	[M/L ³]	1
Momento de Inercia	[ML ²]	l_r^5

IV.3.1.2. Oleaje y movimiento.

Concepto	Unidad	Similitud
Altura del oleaje	[L]	l_r
Periodo del oleaje	[T]	$\sqrt{l_r}$
Velocidad	[L/T]	$\sqrt{l_r}$
Aceleración	[L/T ²]	1
Velocidad angular	[1/T]	$1/\sqrt{l_r}$
Aceleración angular	[1/T ²]	$1/l_r$
Densidad del agua	[M/L ³]	1
Fuerza	[ML/T ²]	l_r^3
Presión	[M/T ² /L]	l_r



IV.3.1.3. Modelo de la defensa y amarras.

Concepto	Unidad	Similitud
Peso por unidad de longitud	$[M/T^2]$	l_r^2
Tensión	$[ML/T^2]$	l_r^3
Coefficiente de resortes	$[M/T^2]$	l_r^2
Coefficiente de Young	$[M/T^2/L]$	l_r
Deformación (%)	1	1
Energía de absorción	$[ML^2/T^2]$	l_r^4
Área de la sección	$[L^2]$	l_r^2

En la Ley de similitud de Froude, la densidad es constante entre el prototipo y el **modelo**. Por eso el modelo del flotador se puede hacer del mismo material que el prototipo. Además en el experimento hidráulico generalmente se utiliza agua.

La aceleración también es constante entre el prototipo y el modelo, porque no es **posible** cambiar y ajustar la aceleración de la gravedad.

IV.3.2. Obtención del modelo de la defensa y amarras.

Como el movimiento del flotador cambia mucho dependiendo de las características **de las** restricciones, la similitud de la defensa y amarras (cuerda o cadenas) es importante.

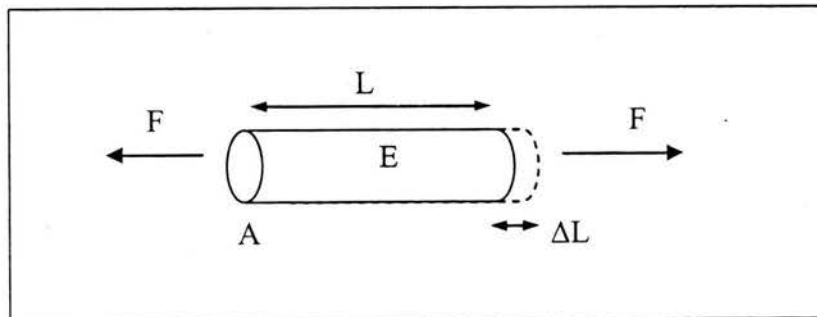


Figura 4.13 Modelo de la cuerda.

La figura 4.13 muestra el modelo de una cuerda.

De la figura se tiene que;

F: Tensión. (N)

A: Área de la sección. (m^2)



L: longitud de la cuerda. (m)

ΔL : Extensión de la cuerda. (m)

E: Coeficiente de Young. (N/m²)

Según la Ley de Young está dada la ecuación (4.68).

$$\Delta L = \frac{LF}{AE} \quad (4.68)$$

Suponiendo que se tiene un modelo de cuerda a una escala 1/S. La ecuación (4.68) para el modelo está dada en la ecuación (4.69) donde el subíndice m indica el modelo.

$$\Delta L_m = \frac{L_m F_m}{A_m E_m} \quad (4.69)$$

Según la Ley de similitud de Froude, ΔL_m , L_m , F_m y A_m se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta L_m &= \Delta L / S \\ L_m &= L / S \\ F_m &= F / S^3 \\ A_m &= A / S^2 \end{aligned} \quad (4.70)$$

Con las ecuaciones (4.68), (4.69) y (4.70) se obtiene el valor de E_m que está dado como sigue:

$$E_m = \frac{L_m F_m}{A_m \Delta L_m} = \frac{(L/S)(F/S^3)}{(A/S^2)(\Delta L/S)} = \frac{1}{S} \frac{LF}{A\Delta L} = \frac{1}{S} E \quad (4.71)$$

Por eso el material del modelo de la defensa y de la cuerda tienen que ser diferentes al material del prototipo, por que el coeficiente de Young es diferente. En el modelo hay que usar el material de (1/S) veces de E que en el prototipo. Esto significa que el material es el modelo de la defensa y el de la cuerda tienen que ser más deformables que el prototipo. En cambio, el modelo de la cadena se puede hacer con el mismo material del prototipo (acero). La tensión de la cadena depende de la teoría de Catenaria. Por eso, el peso de la línea determina la tensión de la línea.



CAPITULO V

TEORIA DEL MOVIMIENTO FLOTADORES



CAPITULO V.

TEORIA DEL MOVIMIENTO DE FLOTADORES.

V.1. Introducción al movimiento de flotadores.

V.1.1. Definición del problema.

Esta teoría nos da la fuerza del oleaje y la reacción dinámica debida al agua periférica que actúa en los flotadores rectangulares bidimensionales.

La teoría fue desarrollada por el Dr. Ito (1972).

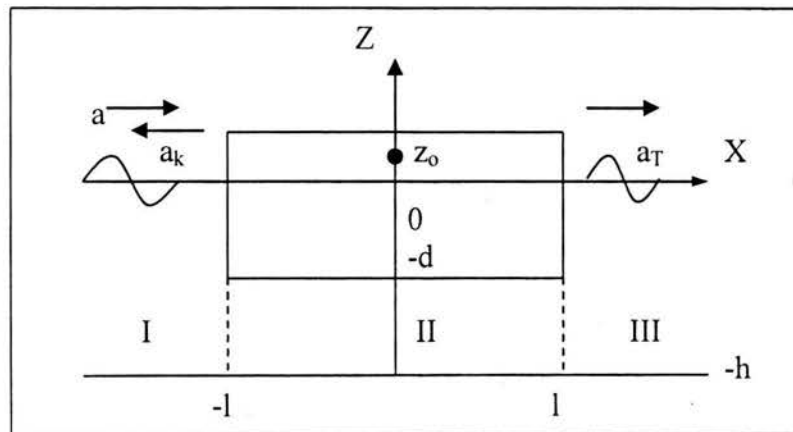


Figura 5.1 Definición del problema.

La figura 5.1 muestra la definición del problema.

De donde se tiene que:

a : Amplitud del oleaje incidente.

a_k : Amplitud del oleaje reflejado.

a_T : Amplitud del oleaje transmitido.

X : Eje horizontal.

Z : Eje vertical.

h : Profundidad.

l : Ancho medio del flotador.



d: Calado del flotador.

z_0 : Centro de gravedad del flotador.

I: Zona izquierda del flotador.

II: Zona abajo del flotador.

III: Zona derecha del flotador.

V.1.2. Fuerzas que actúan sobre el flotador ocasionadas por el oleaje.

V.1.2.1. Velocidad potencial de cada zona.

Al calcular las fuerzas que actúan sobre un flotador, suponemos que este se encuentra inmóvil.

La velocidad potencial Φ_I en la zona I es la suma del oleaje incidente y reflejado y está dada en las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3).

$$\Phi_I = \phi_I e^{i\sigma t} = (\phi_{IN} + \phi_R) e^{i\sigma t} \quad (5.1)$$

$$\phi_{IN} = \frac{iga \cosh k(h+z)}{\sigma \cosh kh} \exp\{-k(x+l)i\} \quad (5.2)$$

$$\phi_R = \frac{iga_k \cosh k(h+z)}{\sigma \cosh kh} \exp\{k(x+l)i\} \quad (5.3)$$

Donde:

i: $\sqrt{-1}$

g: Aceleración de la gravedad (9.8 m/seg²)

σ : Frecuencia angular del oleaje ($\sigma=2\pi/T$).

k: Numero del oleaje ($k=2\pi/L$).

T: Periodo del oleaje.

L: Longitud del oleaje.

De igual forma la velocidad potencial Φ_{III} en la zona III se da como:



$$\Phi_{III} = \phi_{III} e^{i\sigma t} = \phi_T e^{i\sigma t} \quad (5.4)$$

$$\phi_T = \frac{iga_T}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \exp\{-k(x-l)i\} \quad (5.5)$$

La velocidad potencial Φ_{II} en la zona II tiene que satisfacer las siguientes condiciones.

$$\Phi_{II} = \phi_{II} e^{i\sigma t} \quad (5.6)$$

$$v = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z} = 0 \quad (\text{en } z=-d \text{ y } z=-h) \quad (5.7)$$

$$u = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} = c_o e^{i\sigma t} \quad (\text{constante en } -l < x < l) \quad (5.8)$$

Donde:

U: Velocidad horizontal de la partícula del agua.

V: Velocidad vertical de la partícula del agua.

La ecuación (5.7) muestra que no existe movimiento vertical ni en el fondo del flotador ni en el fondo del agua. La ecuación (5.8) muestra la continuidad del volumen del agua en la zona II. Como se supuso que el flotador se encuentra inmóvil, entonces la velocidad horizontal de la partícula tiene que ser constante en el intervalo $-l < x < l$.

Por lo tanto, la ecuación (5.6) queda como:

$$\phi_{II} = C_o x + D_o \quad (5.9)$$

Donde C_o y D_o son constantes.

V.1.2.2. Presión y fuerza hidráulica en la zona II.

La presión P en la zona II está dada como:

$$P = -\rho \left(\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} \right) = -i\sigma\rho\phi_{II} e^{i\sigma t} = -i\sigma\rho(C_o x + D_o) e^{i\sigma t} \quad (5.10)$$

Donde:

ρ : Densidad del agua (1000 kg/m³)



Después se omite $e^{i\sigma t}$ en el desarrollo, porque en todos los conceptos ya está incluido, teniendo en consideración que la derivada con respecto al tiempo de la velocidad potencial es $i\sigma$. Por lo tanto se multiplicará y se tomará este término solamente en el desarrollo.

La presión P_l con $x=l$ y la presión P_{-l} con $x=-l$ están dadas como:

$$P_l = -i\sigma\rho(Co_l + Do) \quad (5.11)$$

$$P_{-l} = -i\sigma\rho(-Co_l + Do) \quad (5.12)$$

Sumando y restando las ecuaciones (5.11) y (5.12) tenemos que:

$$P_l + P_{-l} = -2i\sigma\rho Do \quad (5.13)$$

$$P_l - P_{-l} = -2i\sigma\rho Co \quad (5.14)$$

La fuerza vertical que actúa en el flotador para la zona II se da como sigue:

$$\begin{aligned} P_w &= \int_{-l}^l P dx = -i\sigma\rho \int_{-l}^l (Cox + Do) dx \\ &= -i\sigma\rho \left[\frac{Co}{2} x^2 + Dox \right]_{-l}^l = -2i\sigma\rho l Do \quad (5.15) \\ &= l(P_l + P_{-l}) \end{aligned}$$

El momento actuante al flotador en la zona II es como sigue:

$$\begin{aligned} M_w &= \int_{-l}^l xP dx = -i\sigma\rho \int_{-l}^l (Cox^2 + Dox) dx \\ &= -i\sigma\rho \left[\frac{Co}{3} x^3 + \frac{Do}{2} x^2 \right]_{-l}^l = -\frac{2}{3} i\sigma\rho l^3 Co \quad (5.16) \\ &= \frac{l^2}{3} (P_l - P_{-l}) \end{aligned}$$

V.1.2.3. Continuidad de la presión.

La ecuación (5.17) muestra la continuidad de la presión en $x=l$:

$$P_l e^{i\sigma t} = \frac{1}{h-d} \int_h^d \left(-\rho \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial t} \right)_{x=l} dz \quad (5.17)$$



Donde el término a la derecha es la presión promedio en el intervalo $-h < z < -d$ de la zona III. Desarrollando la ecuación (5.17), se obtiene la ecuación (5.18).

$$P_l = \frac{-i\sigma\rho}{h-d} \int_h^{-d} (\Phi_T)_{x=l} dz = \rho g a_T f_B \quad (5.18)$$

Donde:

$$f_B = \frac{1}{h-d} \int_h^{-d} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz = \frac{1}{k(h-d)} \frac{\operatorname{senhk}(h-d)}{\cosh kh} \quad (5.19).$$

De la misma manera P_{-l} se da en la ecuación (5.20).

$$P_{-l} = \rho g (a + a_\kappa) f_B \quad (5.20)$$

V.1.2.4. Continuidad de la velocidad horizontal.

La continuidad de la velocidad horizontal entre las zonas II y III se da como sigue:

Para $x=l$.

$$\begin{aligned} -d < z < 0 & \quad 0 = \left(\frac{\partial \Phi_T}{\partial x} \right)_{x=l} \\ -h < z < -d & \quad C_0 = \left(\frac{\partial \Phi_T}{\partial x} \right)_{x=l} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Integrando ambos términos de la ecuación (5.21), desde el fondo ($z=-h$) a la superficie ($z=0$) y multiplicándolo por $\{\cosh k(h+z)/\cosh kh\}$.

La multiplicación de $\{\cosh k(h+z)/\cosh kh\}$ se considera según la teoría del Dr. Ijima (1971).

$$\int_h^{-d} C_0 \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz = \int_h^0 \left(\frac{\partial \Phi_T}{\partial x} \right)_{x=l} dz \quad (5.22)$$

$$= \frac{gka_T}{\sigma} \int_h^0 \frac{\cosh^2 k(h+z)}{\cosh^2 kh} dz$$

Donde.

$$a_T = \frac{C_0 k (h-d)}{\sigma n} f_B \quad (5.23)$$



$$n = \frac{gk^2}{\sigma^2} \int_h^0 \frac{\cosh^2 k(h+z)}{\cosh^2 kh} dz \quad (5.24)$$

$$f_B = \frac{1}{k(h-d)} \frac{\operatorname{senhk}(h-d)}{\cosh kh} \quad (5.19)$$

En la misma manera la continuidad de la velocidad horizontal entre las zonas I y II están dada como sigue, para $x=-1$.

$$a - a_K = \frac{Cok(h-d)}{\sigma n} f_B \quad (5.25)$$

De las ecuaciones (5.23) y (5.25) se obtiene la ecuación (5.26).

$$a - a_T - a_K = 0 \quad (5.26)$$

V.1.2.5. Obtención de las variables desconocidas.

De las ecuaciones (5.18), (5.20) y (5.14) se obtiene la ecuación (5.27).

$$\begin{aligned} \rho g f_B (a_T - a - a_K) &= -2i\sigma pl Co \\ Co &= -\frac{igf_B}{2\sigma l} (a + a_K - a_T) \end{aligned} \quad (5.27)$$

De las ecuaciones (5.27), (5.26) y (5.23) se obtiene a_T y a_K .

$$\begin{aligned} a_T &= \frac{k(h-d)f_B}{\sigma n} Co = \frac{k(h-d)f_B}{\sigma n} \left(-\frac{igf_B}{2\sigma l} \right) * 2(a - a_T) \\ a_T &= \frac{-igk(h-d)f_B^2}{\sigma^2 nl} (a - a_T) = -iy_B (a - a_T) \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} a_T &= \frac{-iy_B}{1-iy_B} a = \frac{y_B^2 - iy_B}{1+y_B^2} a \\ a_K &= a - a_T = \frac{1+iy_B}{1+y_B^2} a \end{aligned} \quad (5.29)$$

Donde:

$$y_B = \frac{gk(h-d)f_B^2}{\sigma^2 nl} \quad (5.30)$$



Por lo tanto la fuerza horizontal que actúa en el flotador debido al oleaje se da como F_{Hf} .

$$F_{Hf} = \int_{-d}^0 - \{ -i\sigma\rho(\phi_{III})_{X=l} + i\sigma\rho(\phi_I)_{X=-l} \} dz$$

$$F_{Hf} = i\sigma\rho \left(\frac{igd}{\sigma} \right) f_H (-a - a_K + a_T) \quad (5.31)$$

$$F_{Hf} = 2\rho g d f_H \frac{1 + iy_B}{1 + y_B^2} a$$

donde:

$$f_H = \frac{1}{d} \int_{-d}^0 \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz = \frac{\operatorname{senh}kh - \operatorname{senh}k(h-d)}{kd \cosh kh} \quad (5.32)$$

La fuerza vertical F_{Vf} se deduce de las ecuaciones (5.15), (5.18) y (5.20).

$$F_{Vf} = P_w = l(P_l + P_{-l})$$

$$F_{Vf} = \rho g l f_B (a + a_K + a_T) = 2\rho g l f_B a \quad (5.33)$$

El momento M_f se obtiene de las ecuaciones (5.16), (5.18), (5.20), (5.28) y (5.29) de la siguiente manera:

$$M_f = M_w + \int_{-d}^0 - \{ -i\sigma\rho(\phi_{III})_{X=l} + i\sigma\rho(\phi_I)_{X=-l} \} (z - z_0) dz$$

$$M_f = \frac{1}{3} l^2 (P_l - P_{-l}) - \sigma\rho(a + a_K - a_T) \int_{-d}^0 (z - z_0) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz$$

$$M_f = \frac{1}{3} \rho g f_B l^2 (a_T - a - a_K) + \sigma\rho(a_T - a - a_K) d l f_{MH} \quad (5.34)$$

$$M_f = -2\rho g d l f_M \frac{1 + iy_B}{1 + y_B^2} a$$

Donde:

$$f_{MH} = \frac{1}{dl} \int_{-d}^0 (z - z_0) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz$$

$$f_{MH} = \frac{1}{kdkl \cosh kh} \{ -kz_0 \operatorname{senh}kh + k(d + z_0) \operatorname{senh}k(h-d) - \cosh kh + \cosh k(h-d) \} \quad (5.35)$$

$$f_{MH} = f_{MH} + \frac{l}{3d} f_B$$



V.1.3. Reacción dinámica por el efecto de Deriva.

V.1.3.1. Descripción del problema.

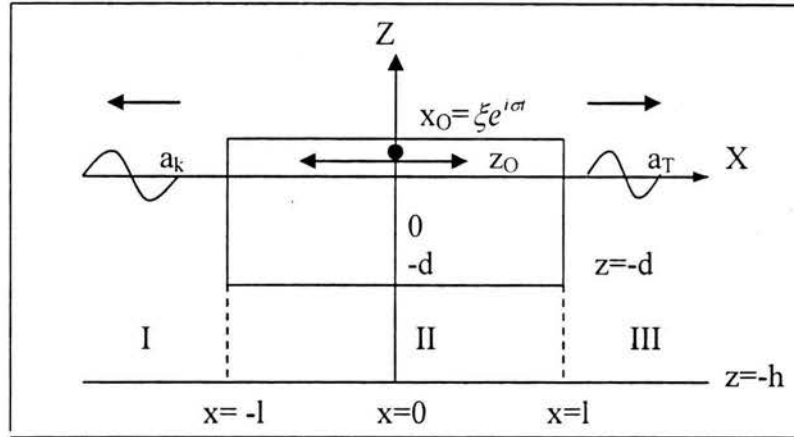


Figura 5.2 Efecto del movimiento de Deriva.

La figura 5.2 muestra el efecto del movimiento de Deriva. Aquí se menciona cómo se calcula la amplitud del oleaje causado por el movimiento de deriva y las fuerzas que actúan en el flotador por la reacción del agua. En la figura 5.2 la variable ξ es la amplitud del movimiento de Deriva dada y σ es la frecuencia angular del movimiento de Deriva.

V.1.3.2. Velocidad Potencial de cada zona.

Suponiendo que a_T y a_K , son la amplitud de oleaje dadas por el movimiento de Deriva, la velocidad potencial de las zonas I y III se obtienen como sigue:

$$\Phi_I = \phi_R e^{i\sigma t} \quad (5.37)$$

$$\Phi_{III} = \phi_T e^{i\sigma t} \quad (5.38)$$

$$\phi_R = \frac{iga_K}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \exp\{k(x+l)i\} \quad (5.39)$$

$$\phi_T = \frac{iga_T}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \exp\{-k(x-l)i\} \quad (5.40)$$

Tomando en consideración la simetría del problema, se entiende que el oleaje en la zona I y el oleaje en la zona III tienen la misma amplitud. La diferencia de la fase entre los dos oleajes es π , éste muestra que cuando el nivel del agua en $x=1$ es el máximo (cresta), el nivel del agua $x=-1$ es el mínimo (valle). Por lo tanto se obtiene la ecuación (5.41).

$$a_K = -a_T \quad (5.41)$$



La velocidad potencial en la zona II está dada en las ecuaciones (5.42) y (5.43) de igual forma que las ecuaciones (5.6) a (5.9).

$$\Phi_{II} = \phi_{II} e^{i\sigma t} \quad (5.42)$$

$$\phi_{II} = C_o x \quad (5.43)$$

La diferencia entre las ecuaciones (5.43) y (5.9) es que $D_o=0$ en la ecuación (5.43) por la simetría del problema.

Por lo tanto, de las ecuaciones (5.39), (5.40), (5.41) y (5.43) se concluye que existen dos variables desconocidas C_o y a_T . Para resolver las dos variables, se utiliza la continuidad de la Presión y la continuidad de la velocidad.

V.1.3.3. Continuidad de la presión.

De la misma forma que se obtuvieron las ecuaciones (5.18) y (5.19), se obtiene P_1 con las ecuaciones (5.40) y (5.19).

$$P_1 = \rho g a_T f_B \quad (5.44)$$

De la ecuación (5.43) se obtiene P_1 como sigue:

$$P_1 = -i\sigma\rho l C_o \quad (5.45)$$

Por eso:

$$C_o = \frac{ig f_B a_T}{\sigma l} \quad (5.46)$$

V.1.3.4. Continuidad de la velocidad.

De la misma forma que se obtuvo la ecuación (5.21) se obtiene la ecuación (5.47) para $x=l$.

$$\begin{aligned} -d < z < 0 & \quad i\sigma\xi = \left(\frac{\partial\phi_T}{\partial x} \right)_{x=l} \\ -h < z < -d & \quad C_o = \left(\frac{\partial\phi_T}{\partial x} \right)_{x=l} \end{aligned} \quad (5.47)$$



De la ecuación (5.22) se obtiene la ecuación (5.48).

$$\int_{-d}^0 i\sigma\xi \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz + \int_h^d C_O \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz$$

$$= \frac{gka_T}{\sigma} \int_h^0 \frac{\cosh^2 k(h+z)}{\cosh^2 kh} dz$$
(5.48)

Desarrollando la ecuación (5.48) y sustituyéndola en (5.46) se obtiene la ecuación (5.49).

$$a_T = \frac{kdf_H - y_B + i}{n \quad 1 + y_B} \xi$$
(5.49)

Donde y_B , f_H y n están dados en las ecuaciones (5.30), (5.32) y (5.24) respectivamente.

Las ecuaciones (5.49) y (5.46) son las soluciones de a_T y C_O .

V.1.3.5. Reacción dinámica por efecto del movimiento de Deriva.

La fuerza horizontal F_{Hh} por efecto del movimiento de deriva está dada de la misma manera que se obtuvo la ecuación (5.31).

$$F_{Hh} = -i\sigma\rho \int_{-d}^0 (\phi_I - \phi_{III}) dz$$

$$F_{Hh} = -2\rho gdf_H a_T$$
(5.50)

$$F_{Hh} = \frac{\rho gkd^2 f_H^2}{n} \frac{y_B - i}{1 + y_B} \xi$$

Fuerza vertical F_{Vh} , por efecto del movimiento de Deriva es cero.

$$F_{Vh} = -i\sigma\rho \int_I \phi_{II} dx$$

$$F_{Vh} = -i\sigma\rho \int_I C_O X dx = 0$$
(5.51)



El momento M_h por efecto del movimiento de Deriva se obtiene como sigue:

$$M_h = -i\sigma\rho \int_{-l}^l X\phi_{II} dx + i\sigma\rho \int_{-d}^0 (z-z_0)(\phi_I - \phi_{III}) dz$$

$$M_h = \frac{2\rho g k d^2 l f_H f_M}{n} \frac{-y_B + i}{1 + y_B^2} \xi \quad (5.52)$$

Donde n , f_H , f_M y y_B están dados en las ecuaciones (5.24), (5.32), (5.36) y (5.30), respectivamente.

V.1.4. Reacción dinámica por efecto del movimiento de Arzada.

V.1.4.1. Descripción del problema.

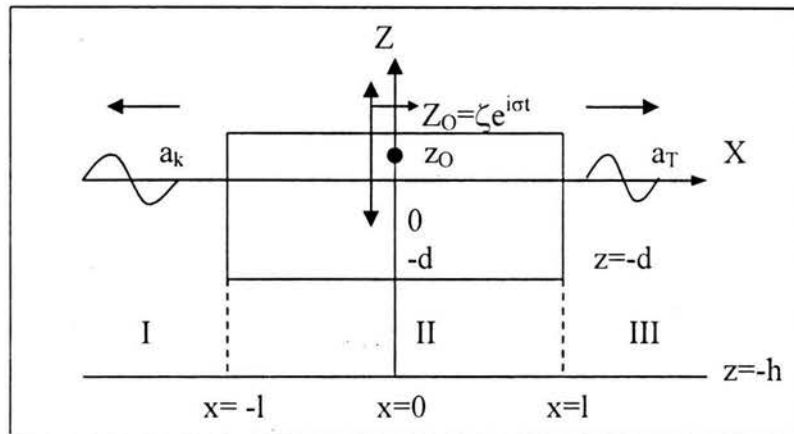


Figura 5.3 Efecto del movimiento de Arzada.

La figura 5.3 muestra el efecto del movimiento de Arzada. La variable ζ es la amplitud del movimiento de arzada y σ es la frecuencia angular.

V.1.4.2. Velocidad potencial de cada zona.

Las variables a_k y a_T son amplitudes del oleaje. Las ecuaciones (5.37) a (5.40) son válidas para este caso también. Tomando en consideración la simetría de la figura, a_k y a_T tienen los mismos valores. La fase de los oleajes es igual, esto muestra que cuando el nivel del agua $x=l$ es máximo (cresta), el nivel del agua en $x=-l$ es también máximo (cresta). Por lo tanto se obtiene la ecuación (5.53).

$$a_k = a_T \quad (5.53)$$



La velocidad potencial en la zona II tiene que satisfacer las siguientes condiciones:

$$\left(\frac{\partial\phi_{II}}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0 \quad (5.54)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_{II}}{\partial z}\right)_{z=-d} = i\sigma\zeta \quad (5.55)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_{II}}{\partial x}\right)_{x=l} = -\frac{i\sigma l}{h-d}\zeta \quad (5.56)$$

La ecuación (5.54), es la condición para el fondo del agua y la ecuación (5.55) es la condición para el fondo del flotador donde se mueve por el movimiento de Arzada. La ecuación (5.56), es la continuidad de la cantidad de agua desplazada entre las zonas II y III.

Con las ecuaciones (5.54), (5.55) y (5.56) se obtiene la velocidad potencial de la zona II.

$$\phi_{II} = \frac{i\sigma\zeta}{2(h-d)} \{-x^2 + (h+z)^2 + E_0\} \quad (5.57)$$

Donde E_0 es un coeficiente desconocido.

En las ecuaciones (5.39), (5.40), (5.53) y (5.57) existen dos variables desconocidas que son a_T y E_0 . Para la solución se utiliza la continuidad de la velocidad y la presión.

V.1.4.3. Continuidad de la velocidad.

En la misma forma como se obtuvo la ecuación (5.21), se obtiene la continuidad de la velocidad empleando las ecuaciones (5.56) y (5.40).

$$\begin{aligned} -d < z < 0 & \quad 0 = \left(\frac{\partial\phi_T}{\partial x}\right)_{x=l} \\ -h < z < -d & \quad -\frac{i\sigma l\zeta}{h-d} = \left(\frac{\partial\phi_T}{\partial x}\right)_{x=l} \end{aligned} \quad (5.58)$$

De la ecuación (5.22) se obtiene la ecuación (5.59).

$$\int_{-h}^{-d} \left(-\frac{i\sigma l}{h-d}\zeta \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\right) dz = \int_h^0 \left(\frac{gka_T}{\sigma} \frac{\cosh^2 k(h+z)}{\cosh^2 kh}\right) dz \quad (5.59)$$

$$a_T = -\frac{iklf_B}{n}\zeta$$



Donde f_B y n se encuentran en las ecuaciones (5.19) y (5.24) respectivamente.

V.1.4.4. Continuidad de la presión.

Para $x=l$, se obtiene la siguiente relación empleando las ecuaciones (5.40) y (5.57).

$$\int_h^d \phi_T dz = \int_h^d \phi_{II} dz$$

$$\frac{iga_T}{\sigma} \int_h^d \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz = \frac{i\sigma\zeta}{2(h-d)} \int_h^d \{-l^2 + (h+z)^2 + E_o\} dz \quad (5.60)$$

$$= \frac{i\sigma\zeta}{2} (-l^2 + E_o) + \frac{i\sigma\zeta}{\sigma} (h-d)^2$$

$$E_o = l^2 - \frac{(h-d)^2}{3} + \frac{2igkl(h-d)f_B^2}{\sigma^2 n}$$

Las ecuaciones (5.59) y (5.60) son las soluciones.

V.1.4.5. Reacción dinámica por efecto del movimiento de Arzada.

Por la simetría del problema, no existe la fuerza horizontal F_{Vh} ni el momento M_V .

$$F_{Vh} = 0 \quad (5.61)$$

$$M_V = 0 \quad (5.62)$$

La fuerza vertical F_{Vu} está dada como sigue:

$$F_{Vu} = \int_{-l}^l -i\sigma\rho\phi_{II} dz$$

$$F_{Vu} = -i\sigma\rho \frac{i\sigma\zeta}{2(h-d)} \int_{-l}^l \{-x^2 + (h-d)^2 + E_o\} dx \quad (5.63)$$

$$F_{Vu} = \left[\frac{2\sigma^2\rho l}{3(h-d)} \{l^2 + (h-d)^2\} - \frac{2i\rho gkl^2 f_B^2}{n} \right] \zeta$$



V.1.5. Reacción dinámica por efecto del movimiento de Balanceo.

V.1.5.1. Descripción del problema.

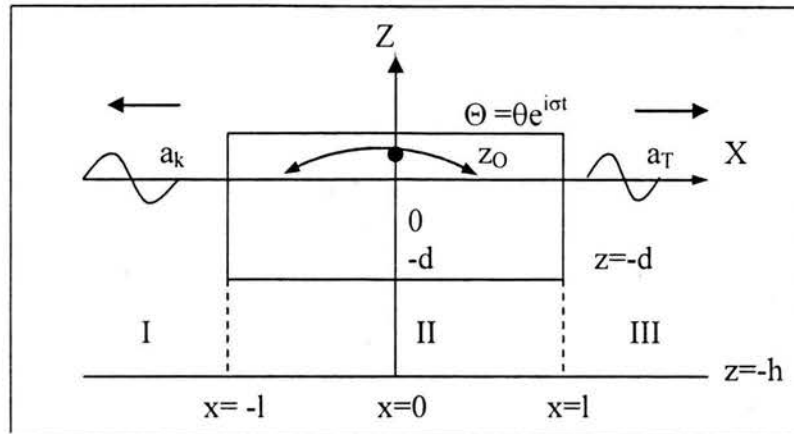


Figura 5.4 Efecto del movimiento de Balanceo.

La figura 5.4 muestra el efecto del movimiento de Balanceo. La variable θ es la amplitud del movimiento de Balanceo, en radianes, y σ es la frecuencia angular.

V.1.5.2. Velocidad potencial en cada zona.

Las ecuaciones (5.37) a (5.40) también son válidas. Tomando en consideración la simetría del problema, obtenemos la ecuación (5.64).

$$a_k = -a_T \quad (5.64)$$

La velocidad potencial en la zona II tiene que satisfacer las siguientes condiciones:

$$\left(\frac{\partial \phi_{II}}{\partial z} \right)_{z=-h} = 0 \quad (5.65)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_{II}}{\partial z} \right)_{z=-d} = i\sigma x \theta \quad (5.66)$$

La ecuación (5.65) muestra la condición en el fondo del agua y la ecuación (5.66) muestra la condición al fondo del flotador.

La velocidad potencial en la zona II está dada en la ecuación (5.67), tomando en consideración la simetría.



$$\phi_{II} = \frac{i\sigma\theta x}{2(h-d)} \left\{ -\frac{x^2}{3} + (h-z)^2 + E_o \right\} \quad (5.67)$$

Donde E_o es un valor constante.

De la ecuación (5.67) se obtiene la velocidad horizontal (u), promedio, entre $z=-h$ y $z=-d$ como sigue:

$$u = \frac{1}{h-d} \int_{-h}^{-d} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} dz = \frac{i\sigma\theta}{2(h-d)} \left\{ -x^2 + \frac{(h-d)^2}{3} + E_o \right\} \quad (5.68)$$

Por lo tanto u_o (valor de u en $x=0$) y u_l (en $x=l$) están dados.

$$u_o = \frac{i\sigma\theta}{2(h-d)} \left\{ \frac{(h-d)^2}{3} + E_o \right\} \quad (5.69)$$

$$u_l = u_o - \frac{i\sigma l^2 \theta}{2(h-d)} \quad (5.70)$$

De la ecuación (5.67) se obtiene la presión P promedio entre $z=-h$ y $Z=-d$ como sigue:

$$P = \frac{-i\sigma\rho}{h-d} \int_{-h}^{-d} \phi_{II} dz = \frac{\sigma^2 \rho \theta x}{2(h-d)} \left\{ -\frac{x^2}{3} + \frac{(h-d)^2}{3} + E_o \right\} \quad (5.71)$$

Por lo tanto P_l (valor de P en $x=l$) está dado.

$$P_l = \frac{\sigma^2 \rho \theta l}{2(h-d)} \left\{ -\frac{l^2}{3} + \frac{(h-d)^2}{3} + E_o \right\} \quad (5.72)$$

$$P_l = -i\sigma\rho l u_o = \frac{\sigma^2 \rho l^3 \theta}{\sigma(h-d)}$$

Despejando u_o de la ecuación (5.72) se obtiene la ecuación (5.73).

$$u_o = \frac{P_l}{\sigma\rho l} i + \frac{i\sigma l^2 \theta}{\sigma(h-d)} \quad (5.73)$$



V.1.5.3. Continuidad de la presión.

Con las ecuaciones (5.40) y (5.72) se obtiene la ecuación (5.74).

$$P_l = \frac{-i\sigma\rho}{h-d} \int_h^d \phi_T dz = \rho g f_B a_T \quad (5.74)$$

Donde f_B está dado en la ecuación (5.19). Sustituyendo la ecuación (5.74) en la ecuación (5.73) se obtiene u_o .

$$u_o = \frac{igf_B a_T}{\sigma l} + \frac{i\sigma^2 \theta}{\sigma(h-d)} \quad (5.75)$$

V.1.5.4. Continuidad de la velocidad.

La continuidad de la velocidad horizontal para $x=l$ está dada como sigue:

$$\begin{aligned} -d < z < 0 & \quad -i\sigma(z-z_o)\theta = \left(\frac{\partial \phi_T}{\partial x} \right)_{x=l} \\ -h < z < -d & \quad u_l = u_o - \frac{i\sigma^2 \theta}{2(h-d)} = \left(\frac{\partial \phi_T}{\partial x} \right)_{x=l} \end{aligned} \quad (5.76)$$

En la misma manera de la ecuación (5.22), se obtiene la ecuación (5.77).

$$\begin{aligned} -i\sigma\theta \int_d^0 (z-z_o) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz + \frac{igf_B a_T}{\sigma l} \int_h^{-d} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz + \\ \frac{i\sigma^2 \theta}{\sigma(h-d)} \int_h^{-d} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz = \frac{gka_T}{\sigma} \int_h^0 \frac{\cosh^2 k(h+z)}{\cosh^2 kh} dz \end{aligned} \quad (5.77)$$

Desarrollando la ecuación (5.77) se obtiene a_T .

$$a_T = \frac{k d l f_M}{n} \frac{y_B - i}{1 + y_B^2} \theta \quad (5.78)$$

Donde f_M , n y y_B están dados en las ecuaciones (5.36), (5.24) y (5.30) respectivamente.



V.1.5.5. Reacción dinámica por efecto del movimiento de Balanceo.

Resolviendo la velocidad potencial se obtiene la reacción dinámica.

La fuerza horizontal F_{Hr} se da como:

$$F_{Hr} = \frac{2\rho g k d^2 l f_H f_M}{n} \frac{-y_B + i}{1 + y_B^2} \theta \quad (5.79)$$

La fuerza vertical F_{Vr} es cero por la simetría.

$$F_{Vr} = 0 \quad (5.80)$$

El momento M_r se da como:

$$M_r = \frac{2\sigma^2 \rho l^3}{h-d} \left\{ \frac{l^2}{45} + \frac{(h-d)^2}{9} \right\} \theta + \frac{2\rho g k d^2 l^2 f_M^2}{n} \frac{y_B - i}{1 + y_B^2} \theta \quad (5.81)$$

V.2. Movimiento de flotadores rectangulares bidimensionales.

V.2.1. Definición del problema.

La figura 5.5 muestra la definición del problema del movimiento de flotadores rectangulares bidimensionales.

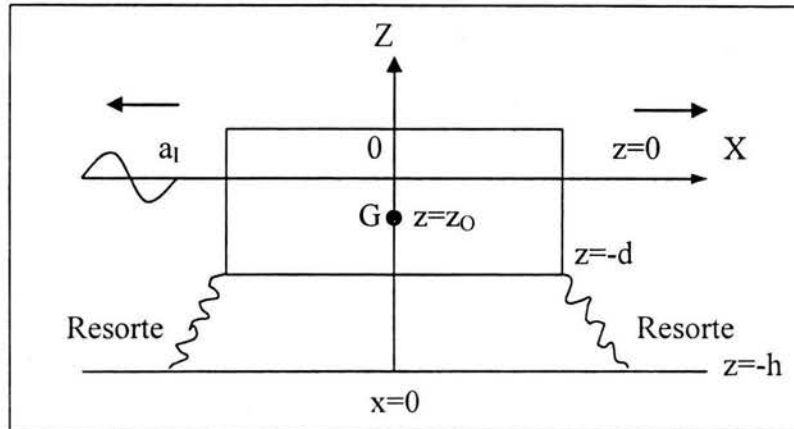


Figura 5.5. Definición del problema.

De la figura se tiene que:

X: Eje horizontal (m).

Z: Eje vertical positivo hacia arriba y cero a la superficie del agua (m).

d: Calado.

l: Mitad del ancho del flotador (m).

z_0 : Eje Z del centro de gravedad (m).

h: Profundidad del agua.

La masa del flotador es M (kg) y el momento de inercia del centro de gravedad es I (kg/m^2). Suponemos que el flotador está amarrado por resortes.

La densidad del agua ρ (1000 kg/m^3) y la aceleración de gravedad g (9.8 m/seg^2) son constantes.

El oleaje incidente tiene amplitud a_1 (m) y periodo T (seg) (frecuencia angular $\sigma=2\pi/T$ (1/seg)).

Los movimientos de Deriva x_G , Arzada z_G y Balanceo Θ , al centro de gravedad G , están dados en las ecuaciones (5.82), (5.83) y (5.84).



$$x_G = \xi e^{i\sigma t} \quad (5.82)$$

$$z_G = \zeta e^{i\sigma t} \quad (5.83)$$

$$\Theta = \theta e^{i\sigma t} \quad (5.84)$$

Donde ξ (m), ζ (m) y θ (rad) son números complejos. Los valores absolutos $|\xi|$, $|\zeta|$ y θ son la amplitud de cada movimiento y la combinación de la parte real e imaginaria muestran la fase del movimiento.

De las ecuaciones (5.82), (5.83) y (5.84) se obtienen la velocidad y la velocidad angular de Deriva, Arzada y Balanceo como sigue:

$$\frac{dx_G}{dt} = i\sigma\xi e^{i\sigma t} \quad (5.85)$$

$$\frac{dz_G}{dt} = i\sigma\zeta e^{i\sigma t} \quad (5.86)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = i\sigma\theta e^{i\sigma t} \quad (5.87)$$

De la misma forma se obtiene la aceleración y aceleración angular.

$$\frac{d^2x_G}{dt^2} = -\sigma^2\xi e^{i\sigma t} \quad (5.88)$$

$$\frac{d^2z_G}{dt^2} = -\sigma^2\zeta e^{i\sigma t} \quad (5.89)$$

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\sigma^2\theta e^{i\sigma t} \quad (5.90)$$

La ecuación del movimiento se basa en la Ley de Newton en la forma de la ecuación (2.1). Como existen tres componentes del movimiento, la ecuación del movimiento está dada en la matriz (5.91). Dado que $e^{i\sigma t}$ se encuentra en ambos lados de la ecuación, se omite.



$$\begin{bmatrix} -\sigma^2 M & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 M & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma^2 M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \\ \theta \end{bmatrix} = [\text{Fuerzas exteriores}] \quad (5.91)$$

La matriz de Fuerzas Exteriores consiste en las partes siguientes:

- (i) Acción por el oleaje.
- (ii) Empuje hidrostático.
- (iii) Reacción dinámica debida al agua periférica.
- (iv) Fuerza por resortes.

V.2.2. Acción por el oleaje.

La acción por el oleaje está dada como sigue.

Fuerza horizontal F_{Hf} (N).

$$\frac{F_{Hf}}{\rho g d a_l} = \frac{2f_H}{1 - iy_B} = \frac{2f_H}{1 + y_B^2} + \frac{2f_H y_B}{1 + y_B^2} i \quad (5.92)$$

Fuerza vertical F_{Vf} (N)

$$\frac{F_{Vf}}{\rho g l a_l} = f_B \quad (5.93)$$

Momento M_f (Nm)

$$\frac{M_f}{\rho g d l a_l} = \frac{-2f_M}{1 - iy_B} = \frac{-2f_M}{1 + y_B^2} - \frac{2f_M y_B}{1 + y_B^2} i \quad (5.94)$$

Donde:

$$f_B = \frac{\text{sen}hk(h-d)}{k(h-d) \cosh kh} \quad (5.95)$$

$$f_H = \frac{\text{sen}kh - \text{sen}hk(h-d)}{kd \cosh kh} \quad (5.96)$$



$$f_M = f_{MH} + \frac{l}{3d} f_B \quad (5.97)$$

$$f_{MH} = \frac{1}{kdkl \cosh kh} \left\{ -kz_o \operatorname{senh} kh + k(d + z_o) \operatorname{senh} k(h-d) - \cosh kh + \cosh k(h-d) \right\} \quad (5.98)$$

$$y_B = \frac{g}{\sigma^2 l} \frac{k(h-d)}{n} \quad (5.99)$$

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh} \right) \quad (5.100)$$

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (L = \text{longitud del oleaje}) \quad (5.101)$$

Donde k está dado en la ecuación de dispersión.

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (5.102)$$

La matriz por la acción del oleaje está dada en la ecuación (5.103) y es independiente de los movimientos ξ, ζ, θ .

$$[\text{matriz por la acción del oleaje}] = \begin{bmatrix} F_{Hf} \\ F_{Vf} \\ M_f \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

Donde F_{Hf} , F_{Vf} , M_f son números complejos.

V.2.3. Empuje hidrostático.

El empuje hidrostático se produce con el movimiento de Arzada y Balanceo, como lo muestran las siguientes ecuaciones.

V.2.3.1. Por Arzada.

$$F_{VS} = -2\rho gl\zeta \quad (5.104)$$

V.2.3.2. Por Balanceo.

$$M_S = -2\rho gdl\overline{GM}\theta \quad (5.105)$$



Donde:

$$\overline{GM} = \frac{l^2}{3d} - \frac{d}{2} - z_o \quad (5.106)$$

Por eso la matriz por el empuje hidrostático esta dada en la ecuación (5.107).

$$[\text{matriz por empuje hidrostático}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{VS} & 0 \\ 0 & 0 & M_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \\ \theta \end{bmatrix} \quad (5.107)$$

V.2.4. Reacción dinámica debida al agua periférica.

V.2.4.1. Por Deriva.

Por el movimiento de Deriva, se produce la reacción dinámica debida al agua periférica, no sólo en la fuerza horizontal F_{Hh} , sino en el momento exterior M_{ho} , las variables F_{Hh} y M_h , están dados es las ecuaciones (5.108) y (5.109).

$$\frac{F_{Hh}}{\rho g d \xi} = - \frac{2i}{1 - iy_B} \frac{kdf_H}{n} \quad (5.108)$$

$$\frac{F_{Hh}}{\rho g d \xi} = - \frac{2i}{1 + y_B^2} \frac{kdf_B^2}{n} + \frac{2y_B}{1 + y_B^2} \frac{kdf_H^2}{n}$$

$$\frac{M_h}{\rho g d l \xi} = \frac{2i}{1 + y_B^2} \frac{kdf_H f_M}{n} - \frac{2y_B}{1 + y_B^2} \frac{kdf_H f_M}{n} \quad (5.109)$$

Como se muestra en las ecuaciones (5.82) y (5.85), la amplitud de la velocidad horizontal del flotador es $i\sigma\xi$ (imaginario) y la amplitud de la aceleración horizontal es $-\sigma^2\xi$ (real). Por lo tanto, el primer término de la parte derecha de la ecuación (5.108) (termino imaginario) es una fuerza resistente proporcional a la velocidad y el segundo término es una fuerza resistente a la aceleración.

El segundo término funciona como la masa del flotador que aumenta debido al movimiento del agua periférica.



V.2.4.2. Por Arzada.

Por el movimiento de Arzada, se produce una reacción dinámica debida al agua periférica sólo en la fuerza vertical F_{VU} , porque el oleaje producido por el movimiento de Arzada es simétrico al eje Z ($x=0$). F_{VU} está dado en la ecuación (5.110).

$$\frac{F_{VU}}{2\rho g l \zeta} = -\frac{iklf_B^2}{n} + \frac{\sigma^2}{3g(h-d)} \{l^2 + (h-d)^2\} \quad (5.110)$$

El segundo término de la parte derecha de la ecuación (5.110) es la fuerza resistente proporcional a la aceleración vertical. La masa adicional M_I , está dada en la ecuación (5.111).

$$M_I = \frac{2\rho l}{3(h-d)} \{l^2 + (h-d)^2\} \quad (5.111)$$

V.2.4.3. Por Balanceo.

Por Balanceo se produce reacción dinámica por el agua periférica, no sólo el momento exterior M_r , sino también fuerza horizontal F_{Hr} , M_r y F_{Hr} están dados en las ecuaciones (5.112).

$$\begin{aligned} \frac{M_r}{\rho g d l * l \theta} = & -\frac{2i}{1+y_B^2} \frac{kdf_M^2}{n} + \frac{2y_B}{1+y_B^2} \frac{kdf_M^2}{n} \\ & + \frac{2\sigma^2 l}{gd(h-d)} \left\{ \frac{l^2}{45} + \frac{(h-d)^2}{9} \right\} \end{aligned} \quad (5.112)$$

$$\frac{F_{Hr}}{\rho g d l \theta} = \frac{2i}{1+y_B^2} \frac{kdf_H f_M}{n} - \frac{2y_B}{1+y_B^2} \frac{kdf_H f_M}{n} \quad (5.113)$$

El tercer término de la parte derecha de la ecuación (5.112) muestra el momento de inercia adicional por el movimiento del agua periférica.

El momento de inercia adicionada I_I esta dado en la ecuación (5.114).

$$I_I = \frac{2\rho l^3}{h-d} \left\{ \frac{l^2}{45} + \frac{(h-d)^2}{9} \right\} \quad (5.114)$$



complejos como las ecuaciones (5.119), (5.120) y (5.121), hay que hacer una matriz de la ecuación (5.122).

$$ax = b \quad (5.118)$$

$$a = a_1 + ia_2 \quad (5.119)$$

$$x = x_1 + ix_2 \quad (5.120)$$

$$b = b_1 + ib_2 \quad (5.121)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (5.122)$$

Por eso para resolver la matriz (5.117), hay que elaborar una nueva matriz con dimensión de (6 x 6).

Para resolver una matriz, se utiliza el método de eliminación.

V.2.8. Ejemplo de cálculo de un flotador bidimensional.

V.2.8.1 Condiciones dadas.

Suponemos un flotador rectangular como se muestra en la figura 5.6.

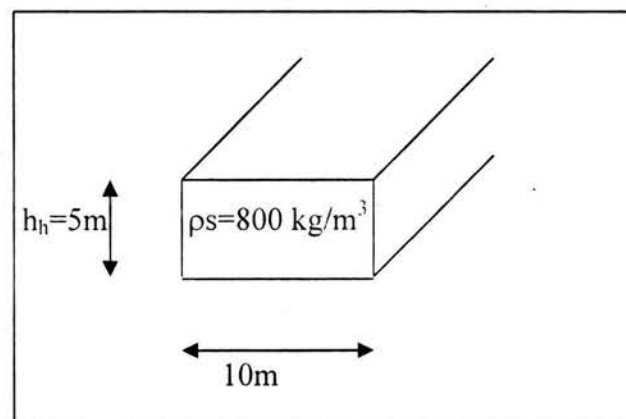


Figura 5.6. Ejemplo del flotador.

Donde ρ_s es la densidad del material. El calado d está dado con la siguiente ecuación, donde la densidad del agua ρ es 1000 kg/m^3 .

$$\rho d = h_h \rho_s.$$

Por eso; $d = (h_h \rho_s) / \rho = 5 \times 800 / 1000 = 4 \text{ m}$



Como l es la mitad del ancho del flotador, l está dado como sigue. $l = 10 / 2 = 5\text{m}$.

Suponemos $h=10\text{m}$, $a_1 = 0.5\text{ m}$ y $T = \text{seg}$ como muestra la figura 5.7.

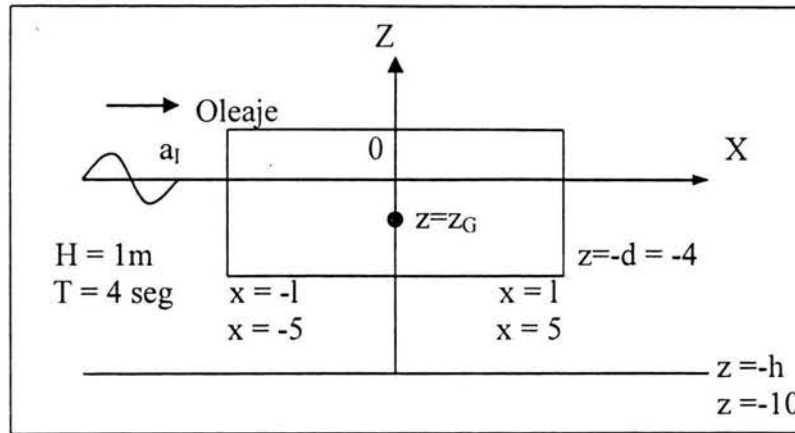


Figura 5.7. Ejemplo de cálculo.

La coordenada Z del centro de gravedad z_G está dada como sigue: $z_G = -1.5\text{ m}$.

La masa M del flotador está calculada como sigue:

$$M = 2lh_h\rho_s = 2 * 5 * 5 * 800 = 40,000\text{kg}$$

El momento de inercia I se calcula utilizando la figura 2.5.

$$I = \frac{M}{12} \left\{ (2l)^2 + h_h^2 \right\} = \frac{1}{12} * 40000 * (10^2 + 5^2) = 417,000\text{kg} / \text{m}^2$$

V.2.8.2. Cálculo de la ecuación de dispersión.

Los valores de σ , k y kh están dados como sigue utilizando la ecuación (5.102).

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} = 1.5708(1/\text{seg})$$

$$kh = 2.548$$

$$k = 0.2548(1/\text{m})$$

Por eso, la longitud del oleaje L es 24.66 m.



Los siguientes valores son conocidos.

$$k(h-d) = 1.529$$

$$\operatorname{senh} kh = 6.351$$

$$\operatorname{senh} k(h-d) = 2.198$$

$$\operatorname{cosh} kh = 6.429$$

$$\operatorname{cosh} k(h-d) = 2.416$$

V.2.8.3. Acción por el oleaje.

De las ecuaciones (5.92) a (5.100), obtenemos los siguientes valores:

$$f_B = \frac{\operatorname{senh} k(h-d)}{k(h-d) \operatorname{cosh} kh} = \frac{2.198}{1.529 * 6.429} = 0.224$$

$$f_H = 0.634$$

$$f_{MH} = -0.0224$$

$$f_M = 0.0707$$

$$y_B = 0.114$$

Por eso:

$$F_{Hf} = \rho g d a_1 * \frac{2 f_H}{1 - i y_B} = \frac{2 \rho g d a_1 f_H}{1 + y_B^2} (1 + i y_B)$$

$$= \frac{2 * 1000 * 9.8 * 4 * 0.5 * 0.634}{1 + 0.114^2} (1 + 0.114i)$$

$$= (2.45 + 0.28i) * 10^4 (N)$$



$$|F_{Hf}| = \sqrt{2.45^2 + 0.28^2} * 10^4 (N)$$

$$F_{Vf} = 1.10 * 10^4 (N)$$

$$|F_{Vf}| = 1.10 * 10^4 (N)$$

$$M_f = -(1.37 + 0.16i) * 10^4 (Nm)$$

$$|M_f| = 1.38 * 10^4 (Nm)$$

V.2.8.4. Empuje hidrostático.

De las ecuaciones (5.104), (5.105) y (5.106), obtenemos los siguientes valores.

$$F_{VS} = -9.8 * 10^4 * \zeta (N)$$

$$M_S = -62.05 * 10^4 * \theta (Nm)$$

V.2.8.5. Reacción debida al agua periférica.

De las ecuaciones (5.108), (5.109), (5.110), (5.111) y (5.112) obtenemos los siguientes valores.

$$F_{VU} = (8.36 - 1.17i) * 10^4 * \zeta (N)$$

$$|F_{VU}| = 8.44 * 10^4 * |\zeta| (N)$$

$$F_{Hh} = (0.68 - 5.97i) * 10^4 * \xi (N)$$

$$|F_{Hh}| = 6.01 * 10^4 * |\xi| (N)$$

$$M_h = (-0.38 + 3.33i) * 10^4 * \xi (Nm)$$

$$|M_h| = 3.35 * 10^4 * |\xi| (Nm)$$



$$M_r = (47.05 - 1.85i) * 10^4 * \theta(Nm)$$

$$|M_r| = 47.09 * 10^4 * |\theta|(Nm)$$

$$F_{Hr} = (-0.38 + 3.33i) * 10^4 * \theta(N)$$

$$|F_{Hr}| = 3.35 * 10^4 * |\theta|(N)$$

V.2.8.6. Solución del movimiento del flotador sin restricción por resorte.

De la ecuación (5.117), los coeficientes de la matriz de la ecuación (5.123) están dados como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (5.123)$$

Los valores a_{11} , a_{33} y b_1 , b_3 están dados de la ecuación (5.115) como sigue:

$$a_{11} = (-10.55 + 5.97i) * 10^4$$

$$a_{13} = a_{31} = (0.38 - 3.33i) * 10^4$$

$$a_{22} = (-8.43 + 1.17i) * 10^4$$

$$a_{33} = (-87.87 + 1.85i) * 10^4$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{32} = a_{23} = 0$$

$$b_1 = F_{Hf} = (2.45 * 0.28i) * 10^4$$

$$b_2 = F_{Vf} = 1.10 * 10^4$$

$$b_3 = M_f = -(1.37 + 0.16i) * 10^4$$



Resolviendo la matriz de la ecuación (5.123), obtenemos las siguientes valores.

$$\xi = -0.161 - 0.121i$$

$$\xi_1 = 0.202(m)$$

$$\xi = -0.127 - 0.018i$$

$$\xi_1 = 0.129(m)$$

$$\theta = 0.0101 + 0.0076i$$

$$\theta = 0.0127(rad)$$

V.2.8.7. Solución del movimiento del flotador con restricción por resorte.

Suponemos que el flotador está amarrado con dos resortes como se muestra en la figura (5.8).

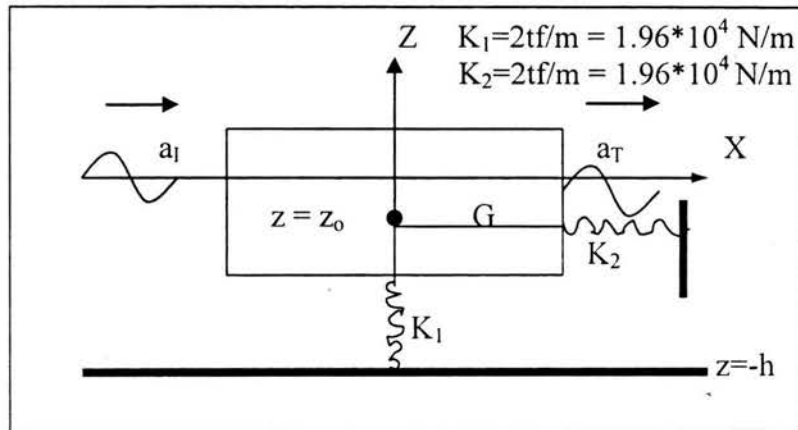


Figura 5.8. Flotador amarrado por dos resortes.

Donde K_1 es un resorte vertical colocado en $X=0$ y K_2 es otro resorte horizontal en $Z=Z_0$.

Los coeficientes de resortes en la matriz (5.116) son.

$$K_{XX} = K_2 = 1.96 * 10^4 N / m$$

$$K_{ZZ} = K_1 = 1.96 * 10^4 N / m \quad (5.124)$$

$$K_{XZ} = K_{XR} = K_{ZX} = K_{ZR} = K_{RX} = K_{RZ} = K_{RR} = 0$$

Por el efecto de los resorte los valores de a_{11} y a_{12} cambian como.

$$a_{11} = (-8.59 * 5.97i) * 10^4$$

$$a_{22} = (-6.47 * 1.17i) * 10^4$$



Resolviendo la matriz, se obtiene el siguiente resultado.

$$\xi = -0.347 - 0.312i \qquad |\xi| = 0.467(m)$$

$$\zeta = -0.328 - 0.059i \qquad |\zeta| = 0.333(m)$$

$$\theta = 0.0175 + 0.0157i \qquad |\theta| = 0.0235(rad)$$

V.2.9. Características del movimiento del flotador.

Las figuras (5.9) y (5.10) muestran los resultados del movimiento de un flotador, variando el periodo del oleaje.

ξ , ζ y $l\theta$
 a_l , a_l a_l

— ξ Deriva

- - - ζ Arzada

- - - $l\theta$ Balanceo

..... δ Partícula de agua

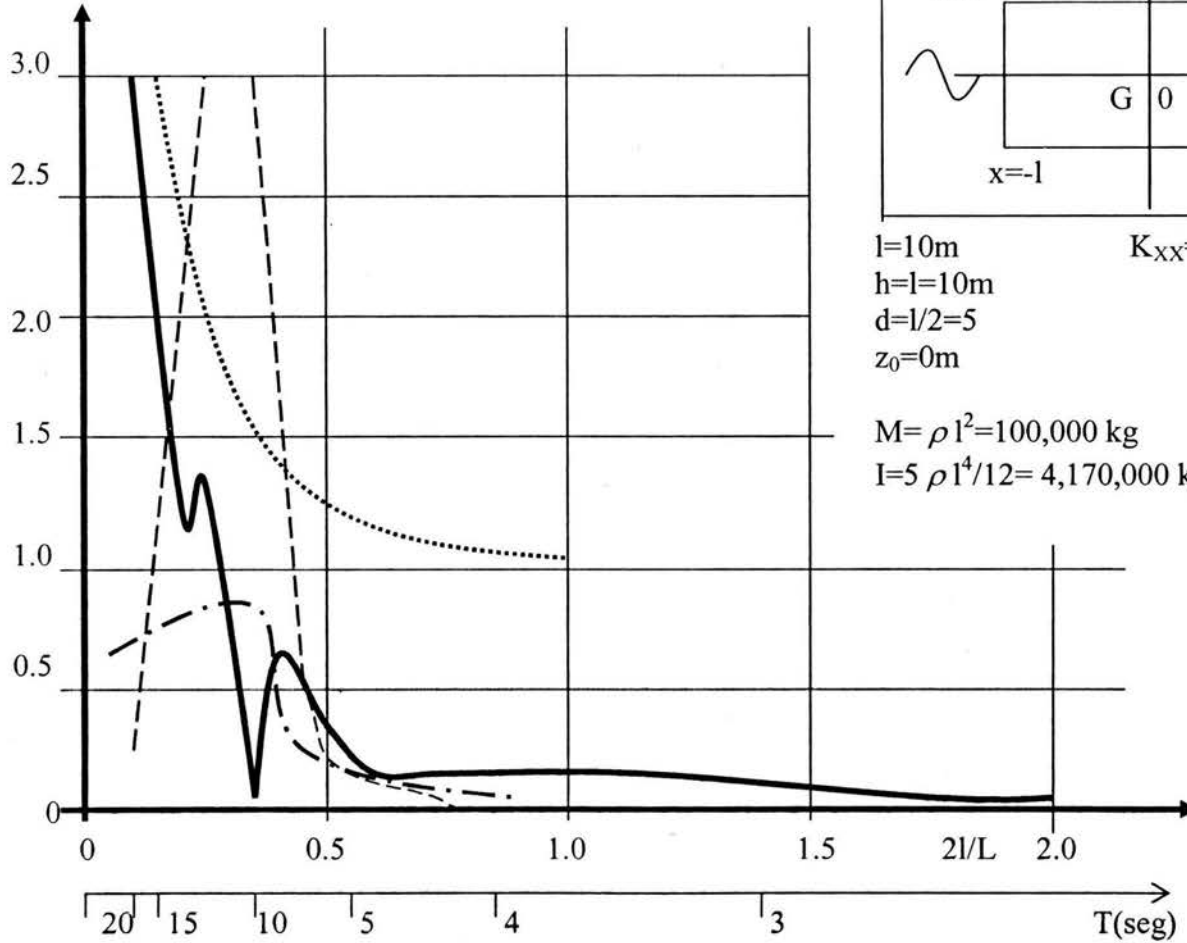


Fig. 5.9. Movimiento de un flotador sin restricción.





ξ , ζ y $l\theta$ ξ Deriva ζ Arzada $l\theta$ Balanceo δ Partícula de agua
 a_t , a_t y a_t a_t a_t a_t

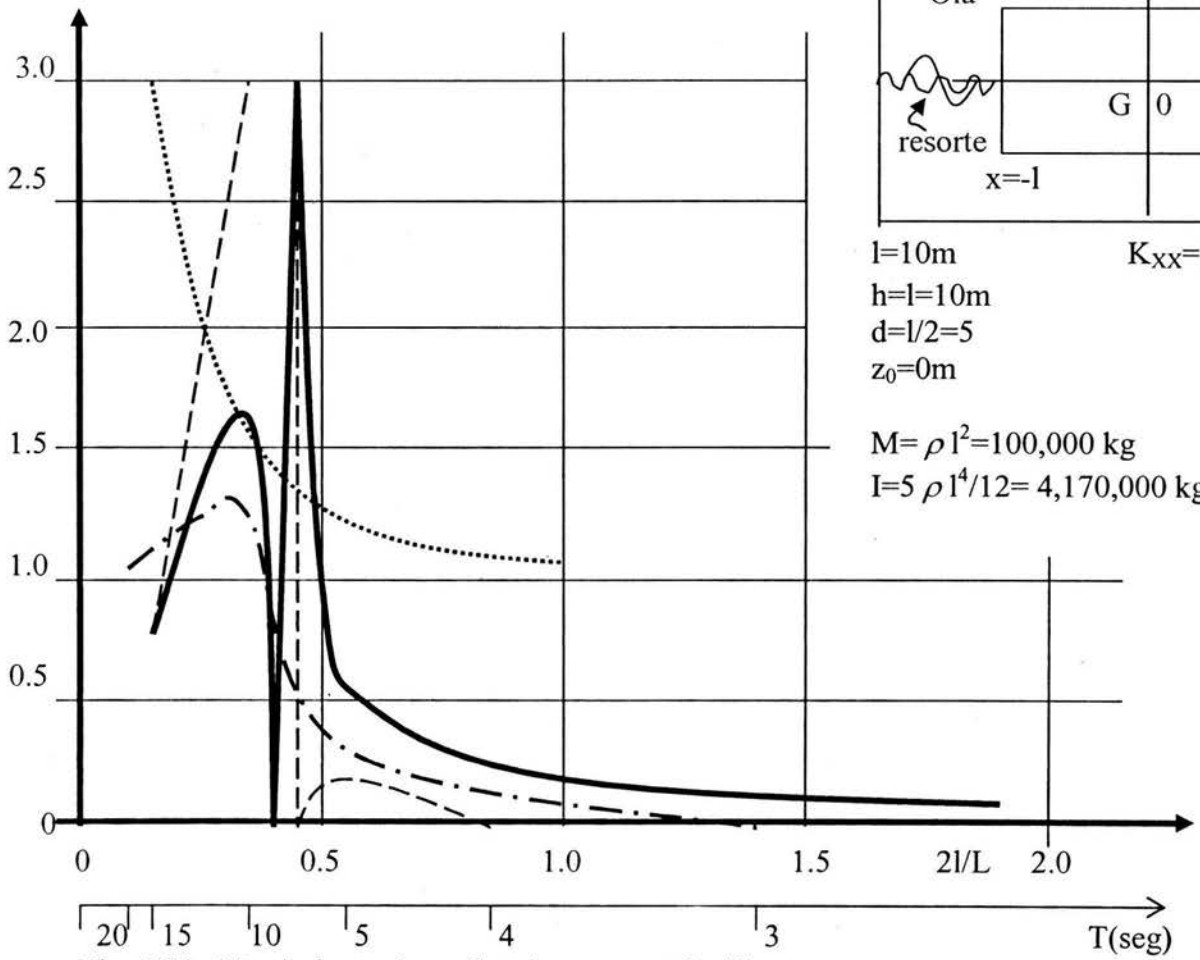


Fig. 5.10. Movimiento de un flotador con restricción.



El eje horizontal es el cociente entre el ancho del flotador $2l$ y la longitud del oleaje L . Como la longitud del oleaje se determina si están dados la profundidad del agua h y el periodo del oleaje T , el valor de $2l/L$ corresponde al valor de T . En las figuras se muestra T junto con $2l/L$.

El eje vertical es el movimiento del flotador adimensional. Donde $|\xi|$ es la amplitud de Deriva (m), $|\zeta|$ es la amplitud de Arzada (m), $|\theta|$ es la amplitud de Balanceo (rad), a_1 es amplitud de oleaje incidente (m) y l es la mitad del ancho del flotador (m).

Las dimensiones están indicadas en las figuras como sigue:

l : Mitad del ancho del flotador (10m).

h : Profundidad del agua (10m).

d : Calado (5m).

Z_0 : Centro de gravedad (0m a la superficie del agua).

M : Masa (100,000 kg).

I : Momento de inercia (4,170,000 kgm²).

(Suponiendo que la densidad del flotador es uniforme 500 kg/m³)

La figura 5.9 muestra el movimiento del flotador sin restricciones por resortes y la figura 5.10 muestra el movimiento con restricciones por un resorte horizontal.

Suponiendo que el resorte está a la misma altura de la superficie del agua y del centro de gravedad, el resorte sólo restringe el movimiento de Deriva y no restringe el de Balanceo. Por eso en la figura 5.10 sólo K_{XX} tiene valor (98000N/m) y los otros coeficientes de restricción en la ecuación (5.116) son igual a ceros.

En las figuras 5.9 y 5.10, además de mostrar otros tres movimientos, muestra la amplitud horizontal del movimiento de la partícula del agua a la superficie del agua, para compararla con el movimiento de Deriva. La amplitud horizontal de la partícula del agua δ está dada en la ecuación (5.125).

$$\delta = \frac{a_1}{\tanh(2\pi h / L)} \quad (5.125)$$

Donde L es la longitud del oleaje.



CAPITULO VI
CONCLUSIONES



CAPITULO VI.

CONCLUSIONES.

Una vez hecho el análisis del grupo de movimientos que afectan el movimiento de flotadores, y graficando dichos movimientos en las Figuras 5.9 y 5.10 las siguientes características del movimiento del flotador son entendibles.

- Deriva.

La Figura 5.9 (sin restricción) muestra que para un oleaje de periodo corto ($2l/L > 1.0$), la amplitud del movimiento de Deriva se acerca a cero cuando disminuye el periodo de oleaje. Para un oleaje de periodo largo ($2l/L < 0.2$), la amplitud del movimiento de Deriva es mayor con el aumento de periodo del oleaje y se acerca al movimiento horizontal de la partícula del agua.

Como no hay resorte para restringir el movimiento de Deriva, no hay un periodo del oleaje, donde la amplitud de Deriva sea infinitamente grande, (un periodo de resonancia).

Sin embargo, como hay una estrecha relación entre el movimiento de Deriva y el de Balanceo, el movimiento de Deriva contra el periodo del oleaje es complicado cerca del periodo donde hay resonancia del movimiento de Balanceo. En un periodo ($2l/L = 0.295$), la amplitud de Deriva es cero por efecto de la resonancia de Balanceo.

Comparando las Figuras 5.9 y 5.10, observamos que un resorte de restricción tiene mucha influencia en el movimiento de Deriva.

Para el oleaje de periodo largo ($2l/L < 0.2$), la amplitud del movimiento de Deriva se acerca a cero al aumentar el periodo del oleaje con el efecto del resorte. En un periodo ($2l/L=0.31$), la amplitud del movimiento de Deriva es infinitamente grande ocasionado un fenómeno de resonancia.

La teoría mencionada en este capítulo, no incluye la no linealidad del fenómeno. Por eso en el periodo de resonancia, el resultado del cálculo muestre posiblemente un valor infinitamente grande. Sin embargo, en el fenómeno real, no es posible un movimiento infinitamente grande por el efecto de la no-linealidad.



- Arzada.

Comparando las Figuras 5.9 y 5.10, se observa que el movimiento de Arzada es igual en las dos figuras. Esto muestra que la restricción horizontal no influye en nada al movimiento de Arzada.

Para los oleajes de periodo corto ($2l/L > 1.0$), la amplitud del movimiento de Arzada es poca y se acerca a cero al disminuir el periodo del oleaje. Para los oleajes de periodo largo ($2l/L < 0.15$), la amplitud de Arzada es casi igual a la amplitud del oleaje. ($\zeta = a_1$).

En el movimiento de Arzada, como el empuje hidrostático sirve como un resorte de restricción, hay un fenómeno de resonancia en $2l/L = 0.25$. Sin embargo, por el efecto del primer término de la parte derecha de la ecuación (5.110), la amplitud no es infinita.

- Balanceo.

En el movimiento de Balanceo también el empuje hidrostático sirve como un resorte de restricción. Por eso, en la Figura 5.9 en un periodo de oleaje ($2l/L = 0.3$), hay un fenómeno de resonancia y la amplitud del movimiento de Balanceo es infinitamente grande. Para los oleajes de periodo corto ($2l/L > 1.0$) la amplitud es poca y se acerca a cero al disminuir el periodo. Para los oleajes de periodo largo ($2l/L < 0.2$), la amplitud disminuye y se acerca a cero al aumentar el periodo del oleaje.

El resorte en la Figura 5.10 no restringe el movimiento de Balanceo. Sin embargo, el movimiento de Deriva influye al movimiento de Balanceo. Por eso hay diferencia de Balanceo entre las Figura 5.9 y 5.10. En la Figura 5.10, la amplitud del movimiento de Balanceo es cero al tener ($2l/L = 0.37$) por efecto del movimiento de Deriva.

En términos generales la teoría del movimiento de flotadores nos permite llevar a cabo el análisis matemático del comportamiento de un flotador en el agua afectado por las fuerzas exteriores, siendo esta una teoría básica en términos de técnica hidráulica también nos da una idea general y los elementos necesarios para analizar problemas de navegabilidad, maniobrabilidad y sobre todo de anclaje de una embarcación, cuando se halla bajo el efecto de las fuerzas de las amarras y de atraque, donde es de vital importancia analizar su comportamiento bajo tales circunstancias, ya que al obtener los resultados de dicho análisis estos facilitan la realización de los modelos y simulaciones que servirán para llevar a cabo la ejecución de obras y elementos portuarios que den soluciones a los problemas que se pudiesen presentar en las operaciones que se llevan a cabo dentro de instalaciones portuarias.



BIBLIOGRAFIA



BIBLIOGRAFIA.

- Características generales de las ondas progresivas.
Sato Shoji. Noviembre 1985.
- Teoría básica sobre el movimiento de flotadores.
Nagai Toshihiko. Marzo 1988.
- Técnicas de modelación en hidráulica.
Miguel A. Vergara S.
1995 Alfaomega, Grupo Editor, S.A. de C.V.
Instituto Politécnico Nacional.
- Ingeniería marítima y portuaria.
1995 Alfaomega, Grupo Editor, S.A. de C.V.
Facultad de Ingeniería.
División de Educación continua.
- Ingeniería marítima.
Ediciones Temas Marítimos S. de R. L. 1976.
- Manual universal de la técnica mecánica.
Eric Oberg y F.D. Jones.
Editorial Labor, S.A. 1979.
- Manual de formulas de ingeniería.
Rafael García Díaz.
Limusa, Noriega Editores. 1996.
México, España, Venezuela, Colombia.



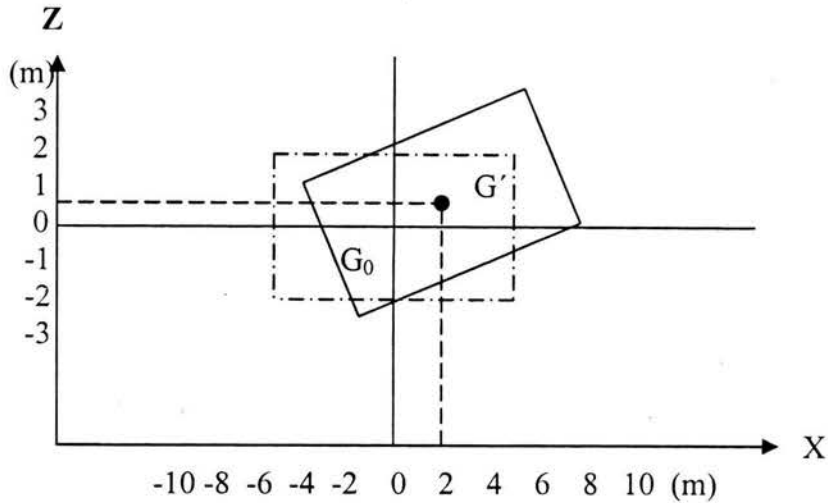
ANEXO



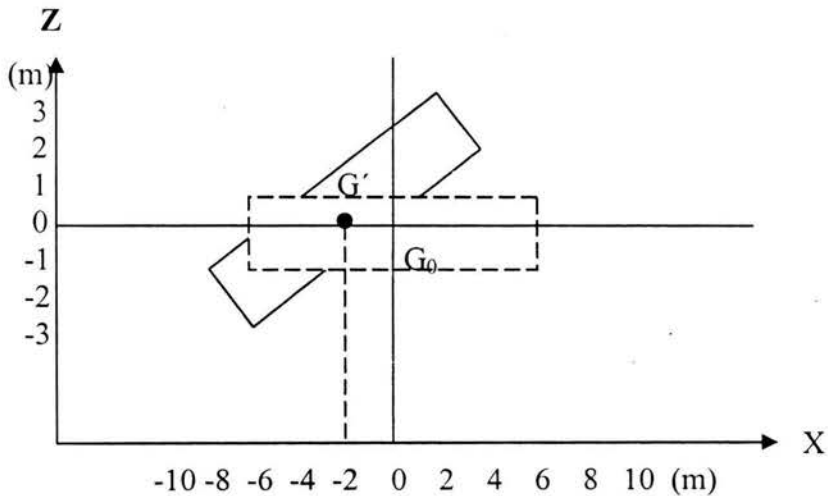
EJERCICIOS.

1. Obtener Deriva, Arzada y Balanceo en los siguientes movimientos.

(1)



(2)



2. Dibujar EL movimiento del centro de gravedad de un flotador durante un periodo de 2 segundos, cuando Deriva X (m) y Arzada Z (m), están dados como sigue:

- (1) $X = 3 \text{ sen } (3.1415 t)$ $Z = 2 \text{ sen } (3.1415 t)$
- (2) $X = 3 \text{ sen } (3.1415 t)$ $Z = 2 \text{ cos } (3.1415 t)$
- (3) $X = 3 \text{ sen } (3.1415 t)$ $Z = -2 \text{ sen } (3.1415 t)$
- (4) $X = 3 \text{ sen } (3.1415 t)$ $Z = -2 \text{ cos } (3.1415 t)$



3. Obtener velocidad y aceleración a la dirección X (Deriva) si el movimiento está dado como sigue:

(1) $X = 5 \text{ sen}(1.2566 t) \text{ (m)}$

(2) $X = 3 \text{ cos}(2.0944 t) \text{ (m)}$

4. Obtener la velocidad angular y la aceleración angular de θ_y (Balanceo) si la rotación está dada como sigue:

(1) $\theta_y = 0.1 \text{ sen}(1.2566 t) \text{ (rad)}$

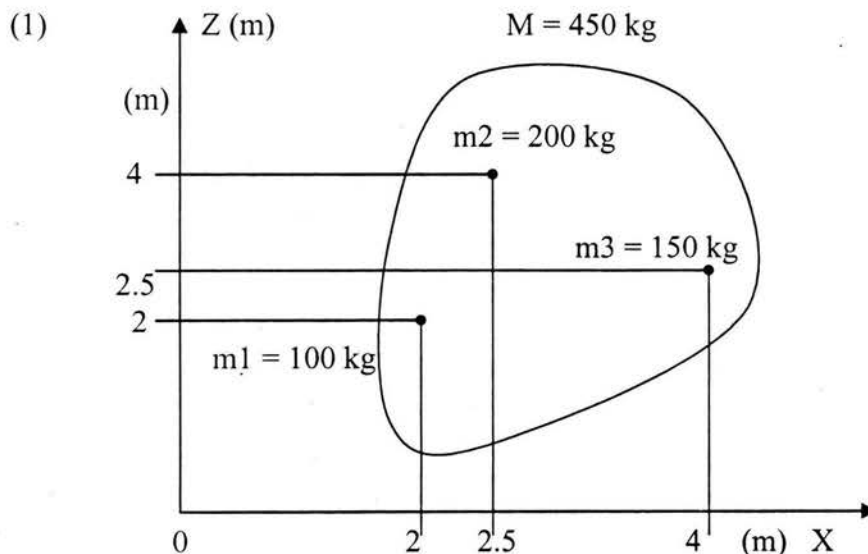
(2) $\theta_y = 0.2 \text{ cos}(0.6283 t) \text{ (rad)}$

5. Obtener la amplitud del movimiento a la dirección Z (Arzada) si la relación está dada como sigue:

(1) $\frac{d^2 z}{dt^2} = 5 \text{ sen}(1.2566 t) \text{ (m/seg}^2\text{)}$

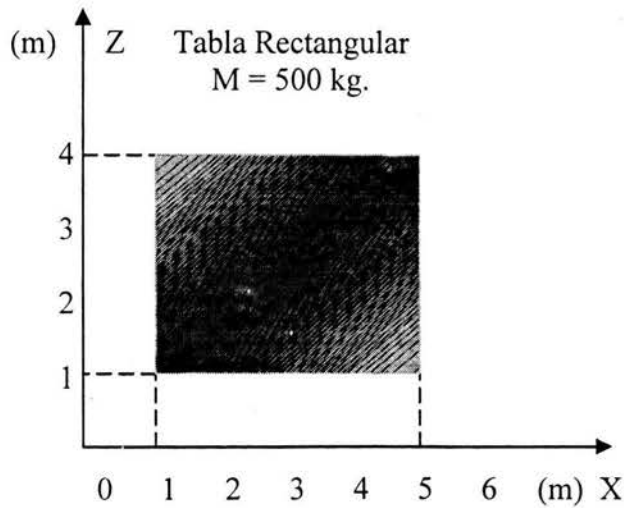
(2) $\frac{d^2 z}{dt^2} = 3 \text{ cos}(2.0944 t) \text{ (m/seg}^2\text{)}$

6. Obtener (X_G, Z_G) , I_{YG} y I_{YO} de los siguientes materiales bidimensionales.

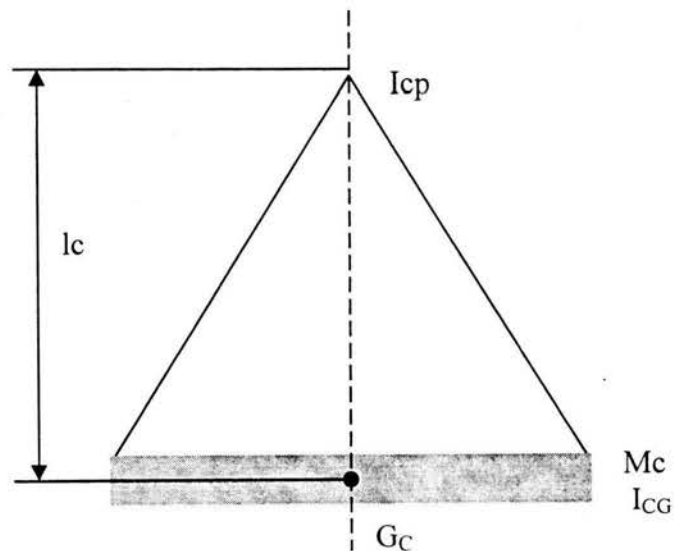




(2)



7. Cambiar las ecuaciones (2.17) y (2.25) considerando la masa y el momento de inercia del péndulo como sigue:



Donde:

G_C : Centro de gravedad del péndulo.

l_c : Distancia entre el punto p y G_C

M_C : Masa del péndulo

I_{cp} : Momento de inercia del péndulo al punto ($I_{cp} = I_{CG} + M_C l_c^2$)



8. Al oscilar el péndulo del ejercicio 7 sin cargar el modelo del barco, el período T era de 2 segundos con las condiciones siguientes: Obtener I_{cp} ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$) e I_{CG} ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$).

$$M_C = 10 \text{ kg}$$

$$l_c = 0.8 \text{ m}$$

9. Obtener Z_G e I_{yG} del modelo del barco, con las siguientes condiciones. En las mediciones se utilizó el péndulo del ejercicio 8.

- (1) Obtener Z_G

$$l = 0.8 \text{ m.}$$

$$M = 30 \text{ kg.}$$

$$m = 5 \text{ kg.}$$

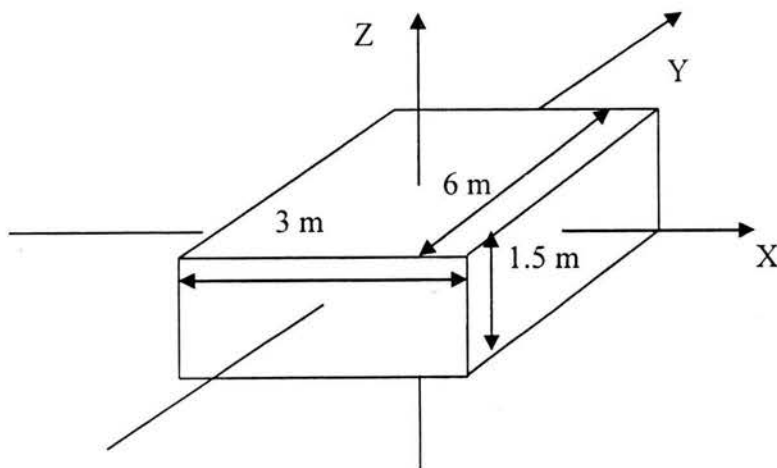
$$l_1 = 0.4 \text{ m.}$$

$$\theta = 3.95 = 0.069 \text{ rad.}$$

- (2) Obtener I_{yG}

$$T = 1.85 \text{ seg.}$$

10. Hay un flotador rectangular de Madera. La densidad es uniforme ($\rho_f = 500 \text{ kg/m}^3$)



Obtener:

- (1) Masa del flotador.
- (2) Momento de inercia I_{xG} , I_{yG} e I_{zG} .
- (3) El calado del flotador en el agua de la densidad $\rho_a = 1000 \text{ kg/m}^3$.
- (4) Para dar movimiento de Arzada en 10 cm. ¿Cuánta fuerza exterior es necesaria?



11. Verificar que la ecuación (4.43) es la solución de la ecuación (4.30).
12. Verificar la ecuación (4.45), utilizando las ecuaciones (4.43) y (4.44).
13. Desarrollar las ecuaciones (4.66) y (4.67) de las ecuaciones (4.64) y (4.65).
14. Haciendo una matriz, resolver las siguientes ecuaciones, donde $i = \sqrt{-1}$

(1) $(1 + i)x = 2 + 4i$

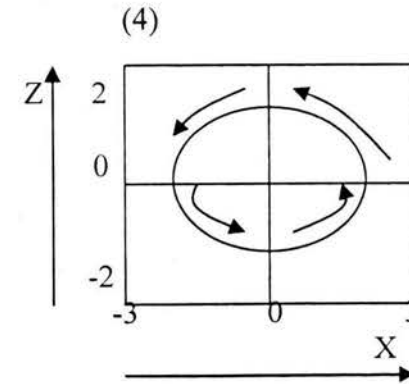
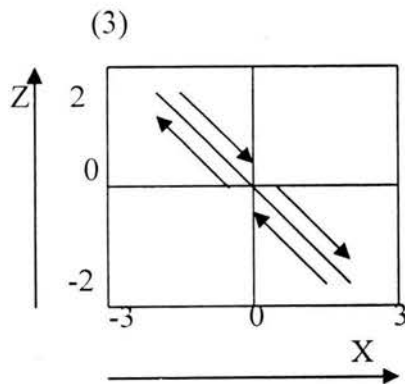
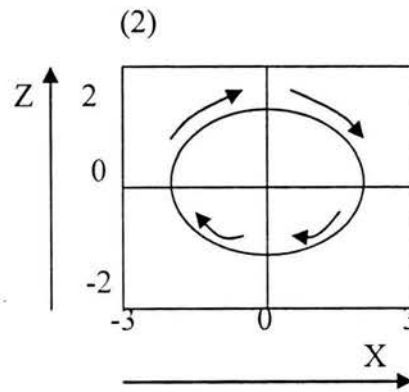
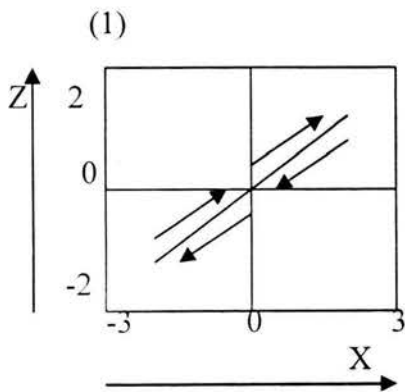
(2)
$$\begin{cases} x + 3y = 1 + 2i \\ 2x + y = 5i \end{cases}$$



Solución de los ejercicios.

- (1) Deriva: $X = 2m$, Arzada: $Z = 1m$, Balanceo: $30^\circ = \pi/6$
 (2) Deriva: $X = 2m$, Arzada: $Z = 0m$, Balanceo: $45^\circ = \pi/4$

T (seg)	$3\text{sen}(\pi t)$	$2\text{sen}(\pi t)$	$2\text{cos}(\pi t)$	$-2\text{sen}(\pi t)$	$-2\text{cos}(\pi t)$
0	0	2.0	2.0	0	-2.0
0.25	2.12	1.41	1.41	-1.41	-1.41
0.5	3.0	2.0	0	-2.0	0
0.75	2.12	1.41	-1.41	-1.41	1.41
1.0	0	0	-2.0	0	2.0
1.25	-2.12	-1.41	-1.41	1.41	1.41
1.5	-3.0	-2.0	0	2.0	0
1.75	-2.12	-1.41	1.41	1.41	-1.41
2.0	0	0	2.0	0	-2.0





$$3. \quad (1) \quad \frac{dx}{dt} = 7.8955 \cos(1.2566t) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -9.9214 \operatorname{sen}(1.2566t)$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = -6.2832 \operatorname{sen}(2.0944t) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -13.1595 \cos(2.0944t)$$

$$4. \quad (1) \quad \frac{dx}{dt} = 0.1257 \cos(1.2566t) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -0.1579 \operatorname{sen}(1.2566t)$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = -0.1257 \operatorname{sen}(0.6283t) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -0.07895 \cos(0.6283t)$$

$$5. \quad (1) \quad 5/1.2566^2 = 3.17 \text{ (m)}$$

$$(2) \quad 3/2.0944^2 = 0.68 \text{ (m)}$$

(6) (1)

$$x_G = \frac{100 * 2 + 200 * 2.5 + 150 * 4}{450} = 2.89m$$

$$z_G = \frac{100 * 2 + 200 * 4 + 150 * 2.5}{450} = 3.06m$$

$$I_{yG} = 100 * \left\{ (2 - 2.89)^2 + (2 - 3.06)^2 \right\} + 200 * \left\{ (2.5 - 2.89)^2 + (4 - 3.06)^2 \right\} \\ + 150 * \left\{ (4 - 2.89)^2 + (2.5 - 3.06)^2 \right\} \\ = 631 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{y0} = 100(2^2 + 2^2) + 200(2.5^2 + 4^2) + 150(4^2 + 2.5^2) = 8588 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$(2) \quad x_G = \frac{1+5}{2} = 3 \quad z_G = \frac{1+4}{2} = 2.5$$

De la figura, ejercicio 6 (2).

$$a = 4 \quad b = 3$$

$$I_{yG} = 500 * \frac{4^2 + 3^2}{12} = 1042 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



$$I_{y0} = I_{yG} + 500 * (x_G^2 + z_G^2) = 1042 + 500(3^2 + 2.5^2) = 8667 \text{kg.m}^2$$

7. La ecuación (2.17) cambia como sigue:

$$Mg\theta(l - z_G) + Mcg\theta c = mgl_1$$

Por eso.

$$z_G = l - \frac{ml_1}{M\theta} + \frac{Mclc}{M}$$

La ecuación (2.25) cambia como sigue.

$$(I_{yp} + I_{cp}) \frac{d^2}{dt^2} = -\{Mg(l - z_G) + Mcglc\}\theta$$

Por eso.

$$I_{yG} = \frac{g}{\sigma^2} \{M(l - z_G) + Mccl\} - M(l - z_G)^2 - I_{cp}$$

8.

$$I_{cp} = \frac{gMc}{\sigma^2} = 9.8 * \left(\frac{2}{2\pi}\right)^2 * 0.8 * 10 = 7.94 \text{kg.m}^2$$

Por eso.

$$I_{CG} = I_{cp} - Mccl^2 = 7.94 - 10 * 0.8^2 = 1.54 \text{kg.m}^2$$

9.

$$z_G = l - \frac{ml_1}{M\theta} + \frac{Mclc}{M} = 0.8 - \frac{5 * 0.4}{30 * 0.069} + \frac{10 * 0.8}{30} = 0.1 \text{m}$$

$$\begin{aligned} I_{yG} &= \frac{g}{\sigma^2} \{M(l - z_G) + Mccl\} - M(l - z_G)^2 - I_{cp} \\ &= 9.8 * \left[\frac{1.85}{2\pi}\right]^2 * \{30 * (0.8 - 0.1) + 10 * 0.8\} - 30 * (0.8 - 0.1)^2 - 7.94 \\ &= 2.0 \text{kg.m}^2 \end{aligned}$$

10. (1) $3 * 6 * 1.5 * 500 = 13500 \text{ kg.}$

(2) De la figura donde $a = 3 \text{ m}$ $b = 6 \text{ m}$ $c = 1.5 \text{ m}$



$$I_{xG} = 13500 \frac{6^2 + 1.5^2}{12} = 43031 \text{kg.m}^2$$

$$I_{yG} = 13500 \frac{1.5^2 + 3^2}{12} = 12656 \text{kg.m}^2$$

$$I_{zG} = 13500 \frac{3^2 + 6^2}{12} = 50625 \text{kg.m}^2$$

$$(3) \frac{13500}{3 \cdot 6 \cdot 1000} = 0.75 \text{m}$$

$$(4) 3 \cdot 6 \cdot 1000 \cdot 9.8 = 17640 \text{ N.}$$

$$y = a \cosh \frac{x}{a} - a$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{senh} \frac{x}{a}$$

$$11. \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}$$

$$\frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \text{senh}^2 \frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \sqrt{\cosh^2 \frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}$$

(porque $\cosh^2 x = \text{senh}^2 x + 1$)

$$\text{Por eso } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}$$

$$12. \sqrt{y(y+2a)} = \sqrt{\left(a \cosh \frac{x}{a} - a\right) \left(a \cosh \frac{x}{a} + a\right)} = \sqrt{a^2 \cosh^2 \frac{x}{a} - a^2} = a \text{senh} \frac{x}{a}$$

$$13. \beta_{11}(x_1 - x_2) + \beta_{12}(y_1 - y_2) = f_1(x_1, y_1) \text{ (i)}$$

$$\beta_{21}(x_1 - x_2) + \beta_{22}(y_1 - y_2) = f_2(x_1, y_1) \text{ (ii)}$$

$$(i) \cdot \beta_{22} - (ii) \cdot \beta_{12}$$



$$(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12})(x_1 - x_2) = \beta_{22}f_1(x_1, y_1) - \beta_{12}f_2(x_1, y_1)$$

$$\therefore x_2 = x_1 + \frac{1}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}} \{-\beta_{22}f_1(x_1, y_1) + \beta_{12}f_2(x_1, y_1)\}$$

$$-(i) * \beta_{21} + (ii) * \beta_{11}$$

$$(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12})(y_1 - y_2) = -\beta_{22}f_1(x_1, y_1) - \beta_{11}f_2(x_1, y_1)$$

$$\therefore y_2 = y_1 + \frac{1}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}} \{-\beta_{21}f_1(x_1, y_1) + \beta_{11}f_2(x_1, y_1)\}$$

$$14. (1) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$x = 3 + i$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 13/5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x = -1/5 + 13/5i \\ y = 2/5 - 1/5i \end{cases}$$