

20485



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN**

**“ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL EN LA CARRERA  
DE MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN:  
UNA EXPERIENCIA NUEVA”**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**P R E S E N T A :**

**SILVIA LARRAZA HERNÁNDEZ**

**ASESOR: M. EN C. JUAN B. RECIO ZUBIETA**



**NAUCALPAN, EDO. DE MÉXICO**

**ABRIL, 2004**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

## AGRADECIMIENTOS

Antes que nada quiero agradecer a Dios.

A mi director de tesis, Mtro. Juan B. Recio Zubieta por su invaluable orientación en el desarrollo y conclusión de esta tesis.

Al P. Armando Garza Dávila S.J., con cariño por su apoyo incondicional, su ejemplo de vida y su ayuda en todos sentidos.

Al Movimiento del Sagrado Corazón de Jesús por su amistad, paciencia y comprensión.

A mi amigo Hugo Reyes por sus importantes comentarios y sugerencias.

A mi familia, con cariño.

A mis maestros.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: SILVIA LARRAZA  
HERNANDEZ  
FECHA: 13/04/09  
FIRMA: *Sarraza*

# ÍNDICE

	Página
<b>INTRODUCCIÓN</b>	1
<b>I MARCO CONCEPTUAL</b>	
Antecedentes	4
Entrevistas con expertos en la enseñanza del Álgebra Lineal	4
Trabajos de investigación enfocados a la enseñanza del Álgebra Lineal	10
Importancia del problema	12
Planteamiento del problema	12
<b>II MARCO TEÓRICO</b>	
Teorías del aprendizaje	15
<b>III MARCO METODOLÓGICO</b>	
Introducción	21
Descripción de una clase	24
Las entrevistas	28
<b>IV MARCO OPERATIVO Y RESULTADOS</b>	
Descripción	34
Cuadro de resultados	38
<b>CONCLUSIONES GENERALES</b>	43
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	47

# introducción

*si buscas resultados distintos,  
no hagas siempre lo mismo.*  
Albert Einstein

El presente trabajo es fruto de un estudio por años y consideraciones propias acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje sobre Álgebra Lineal aplicado a alumnos del segundo semestre de la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la FES Acatlán. Dicho estudio fue tomando forma y sentido con la literatura y enseñanzas aprendidas en la Maestría en Educación Matemática, concretándose finalmente en esta tesis: "Enseñanza del Álgebra Lineal en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación: una experiencia nueva".

Como se puede apreciar, el objetivo de la investigación consiste en intentar que el alumno consiga un aprendizaje significativo en la materia de Álgebra Lineal I.

La justificación de esta investigación es que algunos estudiantes de la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación (MAC) en el 2º semestre, no vinculan la teoría con la práctica, en especial los temas de Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales, es decir: los estudiantes manejan con soltura las operaciones mecánicas, pero parece que no tienen idea de lo que hacen. Por lo que en este trabajo se plantea la enseñanza del Álgebra Lineal en términos del aprendizaje en los alumnos buscando alcanzar mayor independencia en su aprendizaje al no requerir de la presencia directa del maestro y en su lugar el libro como apoyo, es decir, una redistribución de las responsabilidades entre el maestro y el alumno.

Se presenta el primer capítulo, el Marco Conceptual, donde se describen los antecedentes, la importancia, el planteamiento, los alcances y límites de la investigación. En el segundo capítulo, el Marco Teórico, se plasman los supuestos aceptados sobre los

que se apoyó el presente trabajo, que básicamente tuvo como fundamento a Ausubel y Jean Piaget. En el capítulo tercero, el Marco Metodológico, se plantea la hipótesis, la variable del problema de investigación, el ambiente o entorno, la descripción de una clase y las entrevistas que se hicieron a los alumnos cuyo objetivo fue investigar cómo se iban sintiendo con el nuevo método de enseñanza, consistente básicamente en el uso del libro. En el capítulo cuarto, el Marco Operativo y Resultados, se hace la descripción del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal durante todo el período al grupo 2201 de la carrera de MAC, y finalmente se presenta una comparación de los resultados de la enseñanza de la materia antes y después de experimentar este nuevo método. Finalmente se dan las conclusiones generales de la experiencia que se tuvo al aplicar el nuevo enfoque y método de enseñanza en la materia de Álgebra Lineal.

# **capítulo uno**

## **marco conceptual**

*lo urgente generalmente atenta contra lo necesario.*

Mao Tse Tung



## Antecedentes

En la presente investigación una de las observaciones centrales que durante aproximadamente 14 años ha causado considerable inquietud en la labor docente, tal y como se menciona en la Introducción, es que algunos estudiantes del 2º semestre de la carrera de MAC, no vinculan la teoría con la práctica en la materia de Álgebra Lineal I. Este problema es especialmente tangible en los temas de Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales.

Con la intención de profundizar en el problema identificado, se buscó entrevistar a dos expertos en la materia; uno con la forma de enseñanza tradicional y otra con la forma de enseñanza no tradicional, pero ambos siendo profesores con una trayectoria exitosa. Adicionalmente se pretende indagar sobre trabajos de investigación relacionados con el tema, que a continuación se presentan.

### **Entrevistas con expertos en la enseñanza del Álgebra Lineal**

En entrevista hecha al M. en I. Víctor J. Palencia Gómez, experto en la enseñanza del Álgebra Lineal, con 25 años de impartirla, tanto en la Facultad de Ingeniería de la UNAM como en la carrera de MAC, en la ENEP Acatlán, se logró extraer lo siguiente:

P. ¿Podría usted platicarnos cómo da su clase de Álgebra Lineal I?

R. "Normalmente siempre empiezo con un resumen de la clase anterior, les escribo en el pizarrón las ideas más importantes y según el tema que me toque cubrir ese día a veces puede ser que empiece - sobre todo al inicio de los temas - con definiciones y trato de ilustrar en todos los casos, hasta donde pueda, con ejemplos tanto para las definiciones como para los teoremas. En muchas ocasiones presento el enunciado de un teorema, hago un ejemplo de cómo se aplica y después entro a demostrarlo. En otras ocasiones primero pongo el enunciado del teorema, lo demuestro y posteriormente hago un ejemplo o varios. Otras veces empiezo con un ejemplo de lo que voy a plantear después como un enunciado de un teorema y hago uno, dos, tres ejemplos más que me llevan a los mismos resultados de alguna u otra manera y entonces les digo : 'vamos a ver si esto es un caso

general o si han sido “casualidades” que esto haya salido siempre’, y ya de ahí tratamos de plantearlo en forma general ; entonces les pregunto: ‘¿cómo lo podríamos enunciar en forma general?’, y ya que lo tenemos como enunciado vemos si lo podemos probar. O sea, va cambiando, no es una forma única. En general yo expongo, no me gusta que los alumnos expongan definitivamente; yo expongo los temas y no hago que pasen demasiado al pizarrón; sí lo hago, pero no muy frecuentemente. O sea, en el semestre que está por acabar fueron 22 ocasiones en las que pasaron alumnos al pizarrón a resolver algún ejercicio. La mayoría de los ejercicios los voy resolviendo yo, pero de una manera que trato de hacer lo más participativa con el grupo, o sea, les voy preguntando los pasos: ¿qué sugieren?, ¿cómo le hacemos?, ¿cuánto da esto?, ¿cómo lo vamos trabajando?. Es decir, no es nada más ponerlo en el pizarrón y que ellos lo copien sino lo vamos haciendo conjuntamente. Yo voy escribiendo, pero voy escribiendo lo que ellos me van diciendo. Y desde luego voy dando pistas a veces y algunas cosas las voy haciendo yo para hacer más rápido el trabajo. Más o menos esa es la forma general de una de mis clases”.

P. Según lo que acaba de decir, ¿cree usted que se adapta su método de enseñanza a los alumnos o los alumnos se adaptan a su método de enseñanza?

R. “Yo creo que el método se adapta a los alumnos. Cuando menos trato de hacerlo según las respuestas del grupo. A veces hay grupos mejores, a veces hay grupos menos entusiastas o con menos capacidad de algunos alumnos y entonces, pues a algunos grupos les puedo sacar mucho más provecho para que ellos vayan haciendo las cosas, de manera que casi ellos me vayan dictando. En otros grupos sí tengo que ser mucho más yo el expositor, por decirlo de alguna manera. Digamos, voy adaptando el método de alguna manera, aunque sí creo también finalmente que los alumnos se adaptan, que se tienen que ir acomodando a la manera en la que yo lo voy planteando. Al principio les cuesta trabajo, no les gusta mucho la idea de participar, pero al terminar el semestre, por ejemplo, las últimas clases, ellos van haciendo las cosas, y yo casi nada más las voy escribiendo.”

P. ¿Dónde cree usted que se encuentran los principales problemas en la enseñanza de Álgebra Lineal, o más bien, sus principales problemas en la enseñanza del Álgebra Lineal?

R. “Yo creo que a los alumnos les cuesta mucho trabajo el formalismo. De alguna manera yo sostengo que la enseñanza de Álgebra Lineal, independientemente de que les sirva para que conozcan algunos aspectos operacionales y algunos conceptos y que la puedan utilizar después, es una materia muy formativa en términos de rigor matemático; en que las cosas hay que probarlas, de cómo se hacen las pruebas de las cosas , y eso a los alumnos les cuesta mucho trabajo, no están acostumbrados a hacer demostraciones de ninguna manera. Independientemente, varios de ellos traen deficiencias serias previas de

cosas más o menos elementales, digamos factorizaciones, trabajo con quebrados, etc., pero creo que la dificultad más fuerte con la que los alumnos se encuentran y consecuentemente, la que a mí me cuesta más trabajo lograr como objetivo del curso, es el que adquieran esa habilidad o ese rigor o esa forma de pensar que las matemáticas implican: de un orden, de no saltarse pasos en una prueba, saber probar cosas, básicamente; lo demás, los otros aspectos son muy operacionales y con esos no hay demasiada dificultad; yo creo que lo que les cuesta muchísimo trabajo es eso y a mí me cuesta trabajo tratar de despertar en ellos la capacidad del rigorismo, del pensamiento matemático finalmente”.

P. ¿Por qué cree usted que se dan estos problemas?

R.” Bueno, yo creo que simplemente ellos no han estado acostumbrados a hacerlo a lo largo de toda la formación que han tenido hasta que llegan al curso de Álgebra Lineal, salvo algunos que han tenido cierta experiencia en el Bachillerato, particularmente en el CCH o en algunos otros lados donde se trabajan un poco más los aspectos de la investigación y del trabajo por su cuenta, pues están muy acostumbrados a que las cosas se les dan, no a hacerlas ellos; y en ese sentido yo siento que les cuesta trabajo porque es una de la primeras asignaturas en las que se enfrentan con eso, a la necesidad de hacerlo ellos; simplemente no saben hacerlo, no lo han manejado nunca antes o casi nunca. Y a mí me cuesta trabajo porque honestamente tampoco sé realmente cuál es la forma en la cual se puede despertar en ellos eso”.

P. ¿Cuál o cuáles cree usted que sean los temas cruciales en Álgebra Lineal I?

R. “Transformaciones Lineales, porque incluye entre otras cosas a los Espacios Vectoriales; o sea, yo creo que la esencia del Álgebra Lineal es el estudio de los Espacios Vectoriales y las operaciones entre ellos, o sea, las Transformaciones Lineales”.

P. ¿Se encontró usted con algún problema para terminar a tiempo el temario?

R. “No”.

P. ¿Opina usted que el número de horas y el tiempo que se da de parte de la Sección de Matemáticas es el adecuado para cubrir el curso de Álgebra Lineal I?

R. “Sí”.

P. Y para los alumnos, ¿será suficiente el tiempo para asimilar?

R. “Sí. Yo creo que independientemente de la realidad de los alumnos, el tiempo que tiene la materia es más que suficiente para que asimilen el curso, porque asumiría que son alumnos que no simplemente asisten a clase sino que además hacen tarea en su casa, o en la biblioteca o en otra parte, es decir, el alumno tiene que hacer ejercicios por su cuenta, y

tiene que leer los libros y eso no es parte del horario de las clases; entonces, el tiempo sobra para eso cuando tienes alumnos que tienen un mínimo de voluntad y de interés para ello”.

Posteriormente se hicieron las siguientes preguntas en entrevista a la Dra. Asuman Oktaç, profesora-investigadora de Álgebra Lineal del Cinvestav del I.P.N.:

P. ¿Cuál cree usted que sea el tema crucial de Álgebra Lineal, y por qué?

R. “Yo creo que un tema crucial son las Transformaciones Lineales porque muestran cómo una estructura se transforma en otra estructura sin cambiar algunas propiedades de las mismas; entonces es un tema importante. También el tema de Espacios Vectoriales, pues nos da una estructura que pone juntas todas las ideas de Álgebra Lineal mostrándonos mediante axiomas, mediante propiedades esa estructura que organiza, que unifica todo el conocimiento de Álgebra Lineal. Yo lo veo como un total del Álgebra Lineal, porque todo se combina dentro de un Espacio Vectorial, todas estas ideas: matrices, transformaciones lineales, etc., pero es difícil ver esa totalidad y ahí está el problema”.

P. ¿Usted qué sugeriría para hacer el aprendizaje más cómodo a los alumnos?

R. “En primer lugar yo creo que no hay que hablar tanto sobre la comodidad porque aprender tiene que ser un poco incómodo, porque si es muy cómodo quiere decir que ya lo sabías, y para poder aprender tenemos que pasar por los obstáculos; entonces, pienso que hay que dar la confianza al estudiante para que poco a poco pueda sentir ese gusto cuando descubra algo, cuando pueda llegar al resultado matemático que no es tan obvio. Una vez que el estudiante empiece a descubrir estas situaciones por sí mismo y empiece a apreciar esa estructura, no va a tener la necesidad de sentirse cómodo. Esa necesidad existe muy al principio; entonces mediante secuencias bien diseñadas, el estudiante poco a poco tiene que construir su propio conocimiento y al mismo tiempo apreciar la estructura matemática y las relaciones matemáticas. Una vez que eso sea suficiente, la abstracción y los niveles de abstracción se verían como un gusto; entonces la enseñanza tiene que tener ese objetivo de darle el gusto al estudiante de estudiar la Matemática”.

P. ¿Dónde cree usted que se encuentran los principales problemas en el aprendizaje de los alumnos en Álgebra Lineal, independientemente del profesor, de los alumnos, del sistema educativo, etc.?

R. “Es una pregunta importante porque aquí podemos hablar de la naturaleza, el status de Álgebra Lineal comparado con las otras ramas, comparado con otros temas matemáticos. En la escuela francesa por ejemplo, hay una teoría que se llama teoría de situaciones

didácticas. La idea en esta teoría es trabajar situaciones donde un concepto matemático va a surgir como una herramienta que el estudiante va a necesitar para resolver algún problema. Entonces, si podemos, si somos capaces de trabajar, preparar ese tipo de situaciones, lo que tenemos que hacer es aplicarlo a los estudiantes, donde el estudiante trata de resolver el problema. Para resolverlo va a necesitar el concepto, digamos de transformación lineal, entonces poco a poco va construyendo esa herramienta que necesita para resolver su problema. Sin embargo, los investigadores como Sierpinski, como Dorier dicen que en Álgebra Lineal es muy difícil y tal vez imposible preparar este tipo de situaciones porque conceptos como Espacio Vectorial no aparecen como herramientas para resolver problemas, sino son conocimientos que organizan, son maneras de unificar y generalizar los conceptos que tenemos, no son herramientas para resolver problemas concretos. Son herramientas solamente en la dimensión infinita, pero a nivel universitario donde nosotros les estamos dando las clases de Álgebra Lineal, al estudiante no le estamos dando nada de teoría de los espacios de dimensión infinita, ni llegamos a esos niveles. Entonces ¿qué sentido tiene enseñar al estudiante el concepto de Espacio Vectorial, si ese concepto no le sirve para resolver algún tipo de problema? Ahí está el punto principal, porque por ejemplo, en Cálculo se puede pensar en situaciones donde la idea de función aparece como una herramienta útil para resolver cierto tipo de problemas, o hacer una gráfica, etc., pero en Álgebra Lineal la situación es muy diferente y ahí está la explicación del status, que es diferente en Álgebra Lineal. Entonces, ¿cuál puede ser la solución? Una solución puede ser olvidarnos de estos conceptos y no enseñarlos.

Otra posición puede ser tratar de enseñarlos de otra manera. Ahora, ¿de qué otra manera puede ser? Ya sabemos que la manera tradicional no funciona: vas a la clase y empiezas a poner los teoremas y proposiciones y los estudiantes se pierden fácilmente porque los conceptos son muy abstractos. Entonces tenemos que buscar otras maneras de poder llegar a eso.

Ahora, hay propuestas que se han hecho por varios investigadores; por ejemplo, Sierpinski se concentra en las relaciones que existen entre los modos de pensamiento geométrico y analítico. Ahí veo un gran problema. Por ejemplo, cuando planteamos un problema en un modo analítico, para el estudiante es difícil pasar a representarlo en un modo geométrico. O viceversa, cuando se le hace una pregunta al estudiante sobre una transformación lineal geoméricamente y después se le pregunta cuál puede ser la fórmula de esa transformación o que dé una ecuación que pueda formular qué está haciendo esta transformación, el estudiante va a tener muchos problemas, porque esas conexiones entre lo geométrico y lo algebraico no lo ha trabajado en la escuela. Hasta los sistemas de ecuaciones de dos dimensiones, tres dimensiones presentan muchas dificultades en los estudiantes.

Parece que por separado el estudiante más o menos puede manejar las ideas, pero al momento de combinarlas, ya no puede; es decir, ahí hay una conexión que falta, entonces esto puede ser un ejemplo, un acercamiento.

Por otro lado, gente como Dorier dicen que como los conceptos de Álgebra Lineal son conceptos unificadores, analizadores, etc., hay que hacer comprender al estudiante esta naturaleza de Álgebra Lineal, para que tenga conciencia de la naturaleza abstracta de los conceptos, para que se prepare de una manera psicológica para poder manejarlos. Entonces él propone, por ejemplo, unas actividades introductorias para llevar a los estudiantes a entender los conceptos de espacios vectoriales, donde realmente lo que está haciendo es hablar con los estudiantes y decirles: 'mira, te voy a enseñar el concepto de espacio vectorial; es importante porque es un concepto que generaliza todo lo que hemos aprendido de transformaciones lineales, de ecuaciones, de vectores, etc., por lo que te pido de favor que sigas estas actividades, porque al final sí vas a entender qué es un espacio vectorial y en qué sirve'.

Estos son diferentes acercamientos que se pueden manejar. Hay otros investigadores, como Dubinsky, por ejemplo, que dan una teoría general que aplica a varios conceptos matemáticos o a varias áreas de Matemáticas, como Análisis Matemático, Cálculo, Álgebra Abstracta, y tiene la idea de que se puede aplicar a Álgebra Lineal también. Su idea es que el conocimiento tiene que pasar por construcciones mentales, etapas bien específicas, porque cada quien tiene que construir su propio conocimiento. Primero dice que hacemos acciones, por ejemplo, en el caso de funciones, lo que primero hacemos es si nos dan una fórmula, podemos sustituir 2 en  $\mathbb{R}^2$ ; no tenemos que en ese nivel entender qué es una función, estamos haciendo acciones. Cuando repetimos acciones las convertimos en procesos, entonces podemos aprender o entender una función como un proceso, como una máquina que toma entradas y que nos da salidas; es como una concepción dinámica de qué es lo que hace una función. Después dice que tenemos que convertir, encapsular estos procesos en objetos: para poder sumar dos funciones tengo que considerarlas como dos objetos en los cuales se pueden hacer cosas, por ejemplo, aplicar operaciones, etc. En su opinión, la dificultad del estudiante está en no poder interiorizar las acciones para poder convertirlas en procesos o bien, no poder encapsular los procesos para poder convertirlos en los objetos.

Sí es cierto que los estudiantes tienen muchas dificultades porque parece que están trabajando con un tema formal, muy abstracto y están manejando símbolos; pero muchas veces caen en un concepto que se introdujo por los investigadores franceses que se llama "obstáculo de formalismo": al pedirle al estudiante una demostración empieza a hacer cosas, a veces hace errores pero no se da cuenta porque lo que está haciendo es memorizar un algoritmo, tratar de aplicarlo, escribir y a veces piensa que tiene que escribir estos símbolos para mostrar al profesor que lo está haciendo bien en lugar de

conceptualizar. Entonces esa es la dificultad: ¿cómo hacer que el estudiante conceptualice?”.

Estas dos entrevistas, tanto la aplicada al M. en I. Víctor J. Palencia, como la aplicada a la Dra. Asuman fueron audiograbadas.

### **Trabajos de investigación enfocados a la enseñanza del Álgebra Lineal**

I) En una de las tesis dirigida por la Dra. Oktaç titulada "Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas" (Mora, 2001) se encontró lo siguiente:

“Al inicio de la investigación se diseñó un cuestionario con la finalidad de explorar el desempeño analítico-aritmético de los estudiantes. El cuestionario se constituyó de tres actividades que se ordenaban gradualmente tomando en cuenta el nivel de dificultad para los estudiantes, es decir, de lo más sencillo a lo más complicado. Este cuestionario se aplicó a estudiantes que tenían ya los conceptos básicos. Son estudiantes de primer año universitario y han recibido un curso introductorio de Álgebra Lineal, estudiando álgebra de matrices y el método de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Las preguntas fueron de un estilo típico, es decir, como las que se acostumbra hacer en la enseñanza tradicional. El propósito de este cuestionario fue observar el desempeño analítico de los estudiantes ante problemas típicos” (Mora, pp.45).

Mora posteriormente aplicó una entrevista a cuatro estudiantes de la carrera de Mecatrónica del I.P.N. que habían tratado con sistemas de ecuaciones y álgebra de matrices. La entrevista que se realizó fue de tipo clínico, es decir, se planteó la pregunta al estudiante verbalmente y de acuerdo a la respuesta obtenida se planteaban nuevas preguntas. Las entrevistas fueron audiograbadas, y además se pidió a los estudiantes que escribieran en hojas blancas las respuestas a las preguntas planteadas, así como sus observaciones y comentarios al respecto.

En una tercera etapa de la investigación, se aplicó una secuencia de problemas a siete estudiantes de nivel licenciatura en su tercer semestre de la carrera de Ingeniería en Alimentos del I.P.N. Son estudiantes que han tratado con los sistemas de ecuaciones lineales y álgebra de matrices. Se trabajó en equipos, en donde se les fueron proporcionando las actividades una por una y se esperaba que escribieran todo lo que pensarán respecto a cada uno de los problemas en hojas blancas.

Se llegó a la siguiente **conclusión**: "se confirma la hipótesis de que el pensamiento analítico-aritmético es el dominante en la enseñanza. Se reporta que aún cuando en las actividades se intenta fomentar el uso de un pensamiento geométrico, los estudiantes tienden a buscar soluciones en el uso de métodos analíticos y algoritmos que sin comprender claramente su significado les da confianza para creer que han llegado a la respuesta correcta" (Mora, pp.105).

Y añade : ... "se pudo constatar que los estudiantes manejan un pensamiento analítico y un pensamiento geométrico más o menos elaborado, pero no logran establecer una relación clara entre ambos pensamientos que fortalezcan sus nociones y conceptos. Se observó, por otra parte, que cuando intentan relacionar ambas representaciones quedan en un nivel superficial y no comprenden profundamente ninguna de las dos. Sin embargo, mediante una interacción entre ellos, llegan a una conclusión y a una respuesta correcta". (Mora, pp. 106).

**II)** En otra tesis, dirigida también por la Dra. Oktaç, titulada "Estudio de la interpretación geométrica del concepto de solución en los sistemas de ecuaciones lineales", la investigación realizada se desarrolló sobre la base de una entrevista, "partiendo de una descripción verbal e implementando simultáneamente las representaciones gráficas, asociadas al concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales, en dos y tres dimensiones, con el objetivo de recabar un conjunto de datos e información respecto a las concepciones que conforman los sujetos de estudio, que en este caso son un grupo de docentes del nivel de educación superior, en relación al concepto de solución, particularmente visto en los modos de pensamiento sintético-analítico" (Guadarrama Méndez, 2000, pp. 63).

Las **conclusiones** a las que se llegaron fueron: "a partir de las observaciones generales y el análisis de las mismas, se verificó que todos los entrevistados apelaron a la permanencia de su representación gráfica asociada a la solución que desarrollan en su necesidad de búsqueda y significación que le dan al concepto de solución, y que se traduce en el sentido de que si les funciona, lo aplican. Evidenciarán, de esta manera, la noción y el nivel del concepto que manejan respecto a la solución gráfica en el plano y en el espacio" (Guadarrama, pp. 80).



### Importancia del problema

Sin embargo, aunque la temática de estas dos tesis es sobre Álgebra Lineal, la metodología, el objetivo y el alcance son muy diferentes con respecto a la presente tesis, ya que en ningún momento en aquéllas se muestra una preocupación de cómo hacer que la clase funcione de la mejor manera para que el alumno **aprenda**, mediante la prueba e implementación continua de nuevos métodos y actitudes que funcionen en clase.

Desgraciadamente, no se encontraron más tesis de maestría relativas al aprendizaje y enseñanza del Álgebra Lineal, ya que parece que la investigación educativa en el nivel licenciatura no está muy difundida, como ocurre a nivel primaria, secundaria y bachillerato.

### Planteamiento del problema:

Por un lado, lo que más parece está afectando la situación ( que algunos estudiantes no vinculan la teoría con la práctica en la materia de Álgebra Lineal I, especialmente en los temas de Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales) es que los estudiantes no tienen o no se les da el tiempo suficiente para madurar los conceptos, conocimientos y teorías correspondientes, ya que se tiene que cubrir el extenso temario de la materia en la fecha establecida por el Programa de MAC que coincide con el fin de clases, y el tiempo no es suficiente para ello.

Por tal motivo, después de todos estos años se plantea la siguiente pregunta: ¿qué es más importante, terminar el temario a tiempo o que los alumnos aprendan bien la materia?. Dicho de otra forma, ¿qué es más importante: trabajar para cubrir un temario en un determinado lapso de tiempo, o trabajar para que el temario cubra las necesidades fundamentales del Plan de Estudios de la carrera?

No ha sido sino después varios ensayos y mucho trabajo, observación y autocrítica durante los diferentes semestres, que se ha encontrado, hasta hoy, la "mejor" combinación para trabajar con los grupos. Para ello, en el semestre 2003-II se intenta un nuevo enfoque de la enseñanza con el grupo 2201 de la carrera de MAC, que consiste en usar sistemáticamente el libro base en clase junto con los alumnos y ligar desde el inicio del semestre el tema de los Espacios Vectoriales con cada uno de los demás temas que se vayan enseñando, de manera que el estudiante relacione los conceptos anteriormente aprendidos con los conceptos nuevos. Bajo esta convicción se decide utilizar el tiempo

que sea necesario para que los alumnos relacionen, maduren y asimilen los conocimientos necesarios, sin importar si se requiere mayor tiempo del propuesto por la Sección de Matemáticas. El resultado de esta medida tendrá que reflejarse en un mediano plazo y en un mayor aprendizaje de los alumnos.

El libro utilizado es el de Álgebra Lineal de Stanley Grossman, el cual se considera muy pedagógico. Con este enfoque de la enseñanza, el libro y los alumnos son los protagonistas principales en la academia, y el pizarrón y el maestro vienen a ser meros facilitadores del aprendizaje, los alumnos pierden el miedo a familiarizarse con el libro cuestionan tanto a Grossman como al profesor el por qué se tiene una solución de determinada manera y no de otra, empiezan a pensar en otras alternativas de solución a problemas, en otros modos de demostrar teoremas, en una manera diferente de pensar y se vuelven más creativos e inquisitivos.

Por otro lado, la estrategia para lograr el objetivo inmediato (intentar que el alumno consiga un aprendizaje significativo) consistió en 4 puntos:

1. Dar los temas **sin prisas**, sin temor a no poder cubrir el temario.
2. Contestar en el momento cualquier pregunta hecha por cualquier alumno, sin posponerla.
3. Abandonar la técnica tradicional de los apuntes escritos en el pizarrón para que el alumno los copie, y en su lugar, que los alumnos tengan como apoyo fundamental el libro, y sólo en caso necesario utilizar el pizarrón.
4. Abandonar poco a poco la postura del profesor tradicional paternalista.

Las razones de estos cuatro puntos fueron fundamentalmente porque el tiempo para terminar el temario era insuficiente, por lo tanto el espacio para preguntas tenía que ser muy reducido; los apuntes escritos en el pizarrón eran resúmenes del libro y los alumnos se limitaban tan solo a copiarlos y a creer ciegamente en ellos sin preocuparse por desarrollar la crítica hacia los contenidos de la materia. Al usar el libro, todo esto se acabaría y a los alumnos se les abriría un panorama mucho más amplio de verdad de conocimientos utilizándolo directamente; además el libro es lo que van a tener a su disposición en su desarrollo profesional, por lo cual se considera que es conveniente que aprendan a usarlo y a trabajar con él, y por último, se necesitaba modificar el esquema de enseñanza para lograr el aprendizaje significativo en los alumnos. Esto último fue resultado de los estudios realizados en la maestría en Educación Matemática.

# capítulo dos

## marco teórico

*Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría éste: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averigüese esto y enséñese consecuentemente.*

Ausubel

## **Teorías del Aprendizaje**

Desde el punto de vista de Ausubel (Ausubel, 1983), la Psicología Educativa es una disciplina aplicada independiente, cuya función básica en la empresa de la educación es ocuparse de la naturaleza, las condiciones y la evaluación del aprendizaje en el salón de clases o de la materia de estudio junto con los factores que lo influyen (la estructura cognoscitiva, el desarrollo, la capacidad intelectual, la práctica, la motivación, la personalidad, el material de instrucción, la sociedad y los profesores). La psicología educativa debe concentrarse en la naturaleza y facilitación del aprendizaje de la materia de estudio; por tal motivo se considera que es de suma importancia para el desarrollo del presente trabajo.

Esta tesis pretende ocuparse fundamentalmente del aprendizaje significativo por recepción y del aprendizaje significativo por descubrimiento guiado, basándose en David P. Ausubel. A continuación se muestran las definiciones y conceptos principales necesarios sobre los que se fundamenta este trabajo.

### **Significado y aprendizaje significativo**

El aprendizaje significativo comprende la adquisición de nuevos significados y, a la inversa, éstos son producto del aprendizaje significativo. Es decir, el surgimiento de nuevos significados en el alumno refleja la consumación de un proceso de aprendizaje significativo. El significado en sí es un producto del proceso de aprendizaje significativo.

### **La adquisición de significados**

En el aprendizaje significativo, el mismo proceso de adquirir información produce una modificación tanto de la información recién adquirida como del aspecto específicamente pertinente de la estructura cognoscitiva con el que aquélla está vinculada.

Para connotar que el aprendizaje significativo involucra una interacción entre la información nueva y las ideas preexistentes de la estructura cognoscitiva, emplearemos el

término *afianzamiento* para sugerir la función de la idea preexistente. Por ejemplo, en la inclusión (proceso de vinculación de la información nueva con los segmentos preexistentes de la estructura cognoscitiva), las ideas preexistentes proporcionan afianzamiento para el aprendizaje significativo de información nueva.

El aprendizaje significativo por recepción involucra la adquisición de significados nuevos. Requiere tanto de una actitud de aprendizaje significativo (es decir, una disposición de parte del alumno para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva), como de la presentación al alumno de material potencialmente significativo (es decir, relacionable con su estructura de conocimiento sobre una base no arbitraria y no al pie de la letra).

Debido a que la estructura cognoscitiva de cada alumno es única, todos los significados nuevos que se adquieren son únicos en sí mismos. En el aprendizaje por recepción, el contenido total de lo que se va a aprender se le presenta al alumno en su forma final. En la tarea de aprendizaje por recepción el alumno no tiene que hacer ningún descubrimiento independiente. Se le exige sólo que internalice o incorpore el material que se le presenta de modo que pueda recuperarlo o reproducirlo en fecha futura. En este sentido se intentó desarrollar en los alumnos esa internalización del material presentado en clase, lográndose paulatinamente resultados positivos en cuanto a este tipo de aprendizaje por recepción significativo.

En el aprendizaje por descubrimiento significativo, el contenido principal de lo que va a ser aprendido no se da, sino que debe ser descubierto por el alumno antes de que pueda incorporar lo significativo de la tarea a su estructura cognoscitiva. El alumno relaciona intencionada y substancialmente proposiciones de planteamiento de problemas con su estructura cognoscitiva, pero no para entender y recordar lo que significan como fin en sí mismo, sino para transformarlas en nuevas proposiciones de resolución de problemas que sean potencialmente significativas para él.

En el curso de la práctica, las respuestas del alumno pueden estar, por una parte, completamente desprovistas de ayuda o, por otra, beneficiarse con grados variables de ayuda externa. En una situación de aprendizaje por descubrimiento, la ayuda adopta la forma de guía, que consiste en suministrar indicios que disminuyen la oportunidad de que el alumno haga descubrimientos autónomos. Por consiguiente, la guía se refiere y afecta a la dimensión recepción-descubrimiento del aprendizaje. El descubrimiento guiado, por ejemplo, consiste frecuentemente en :

1. Interrogatorio socrático o retórico.
2. El arreglo de una serie jerárquica de ejemplos de problemas de dificultad graduada que, una vez resuelto por el alumno, producen casi siempre el principio o la generalización correctos.
3. El suministro de una regla general, sin ejemplos, o la provisión de ejemplos elaborados sin una guía .
4. El suministro de instrucciones verbales que guían el descubrimiento.
5. Demostraciones, ejercicios especiales o enseñanza didáctica que subrayan los principios sustanciales, la forma correcta, los indicios críticos o las mejores estrategias de ataque. .

En el caso particular de este trabajo de tesis, el aprendizaje por descubrimiento que se hizo en clase fue por descubrimiento *guiado* al estar principalmente usando el libro como guía y desarrollando los puntos 1,2,4 y 5 anteriores.

Después de realizado el aprendizaje por descubrimiento, el contenido descubierto se hace significativo, en gran parte, de la misma manera que el contenido presentado se hace significativo en el aprendizaje por recepción.

El conocimiento que se adquiere a través del aprendizaje por recepción se usa también para resolver problemas de la vida diaria, y el aprendizaje por descubrimiento se emplea comúnmente en el salón de clases para aplicar, extender, aclarar, integrar y evaluar el conocimiento de la materia de estudio y para poner a prueba la comprensión.

En ambos casos (aprendizaje por recepción y por descubrimiento) hay aprendizaje significativo si la tarea de aprendizaje puede relacionarse de modo no arbitrario y sustancial con lo que el alumno ya sabe y si éste adopta la actitud de aprendizaje.

#### Teoría de la asimilación.

El proceso de aprendizaje significativo es el proceso más importante que se ha de realizar en el aprendizaje escolar. La base en la que se apoya este proceso es la teoría de la asimilación.

“La asimilación es el proceso en virtud del cual un estímulo o problema se resuelve de inmediato y automáticamente por medio de los esquemas que ya dominamos” (Good y Brophy, 1980, pp. 44). Este mecanismo de adaptación se halla presente en toda conducta.

Para introducirnos en esta teoría es necesario citar al gran psicólogo suizo Jean Piaget. Una de las características centrales del pensamiento de Jean Piaget es la consideración del niño como sujeto activo en su proceso de evolución. A diferencia de otros psicólogos, Piaget entiende que el niño, desde el mismo instante de su nacimiento, desarrolla estructuras de conocimiento, que se renuevan incesantemente a partir de la experiencia. Puesto que la inteligencia es adaptación y ésta consiste en un "equilibrio ... entre dos mecanismos indisociables: la asimilación y la acomodación", el niño comienza su desarrollo buscando un equilibrio (precario) entre su acomodación<sup>1</sup> a la realidad externa y la asimilación de ésta, aunque teniendo en cuenta que ambos aspectos se hallan inicialmente confundidos debido a que el pensamiento infantil, en sus orígenes, no percibe con claridad la distinción entre yo y mundo externo. (Piaget, 1975, Introducción).

En este sentido, en el proceso de aprendizaje significativo el resultado de la interacción (el significado) que tiene lugar entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognoscitiva existente constituye una *asimilación* de significados nuevos y antiguos para formar una estructura cognoscitiva más altamente diferenciada. Este resultado interactivo constituye el núcleo del proceso de *asimilación*. (Ausubel, 1983).

La nueva información es vinculada a los aspectos *relevantes y preexistentes* en la estructura cognoscitiva, y en el proceso se modifican la información recientemente adquirida y la estructura preexistente. En esencia, la mayor parte del aprendizaje significativo consiste en la *asimilación* de la nueva información.

#### Estructura cognoscitiva y transferencia

Entre los factores cognoscitivos del aprendizaje de salón de clases, la estructura de conocimientos existentes en el momento del aprendizaje es la que merece mayor atención. En el libro *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo* encontramos lo siguiente: "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría éste: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averigüese esto y enseñese consecuentemente" (Ausubel et al, 1983, pp. 151).

---

<sup>1</sup> Por acomodación debe entenderse un mecanismo de adaptación que supone cambios que correspondan a las exigencias del ambiente. Comprende la obtención de esquemas enteramente nuevos y la adaptación de otros ya aprendidos, todo ello para ajustarse a las necesidades específicas de estímulos o situaciones nuevas.

La transferencia en el aprendizaje escolar consiste principalmente en moldear la estructura cognoscitiva del alumno, manipulando el contenido y la disposición de sus experiencias de aprendizaje previas dentro de un campo de estudio específico, de modo que se faciliten al máximo las experiencias de aprendizaje subsiguientes. Habrá pues, una situación de transferencia siempre que la estructura cognoscitiva existente influya en el funcionamiento cognoscitivo nuevo, independientemente de que esté en relación con el aprendizaje por recepción o con la resolución de problemas.

Adicionalmente, muchas investigaciones experimentales (Duncan, 1959; Morrisett y Hovland, 1959) han confirmado la afirmación de que los aprendizajes previos no serán transferibles a nuevas tareas de aprendizaje en tanto no se sobreaprendan. El sobreaprendizaje requiere, a su vez, de un número adecuado de repeticiones y revisiones adecuadamente espaciadas, de suficiente repetitividad dentro de la tarea antes de la diversificación dentro y entre tareas, y de la oportunidad para que se realicen prácticas diferenciales de los componentes más difíciles de la tarea.

La manera más eficaz de fomentar la transferencia es incorporar a la estructura cognoscitiva ideas inclusivas, claras, estables e integradoras, por ejemplo, con sólo decir a los alumnos que los aprendizajes previos pueden ser de utilidad para ellos en otras situaciones, se aumenta la transferencia.

#### Organizador de avance

Es una afirmación de introducción de una relación o un concepto de alto nivel lo suficientemente amplia para comprender toda la información que se dará a continuación.



## **capítulo tres**

### **marco metodológico**

*el cambio no es sólo parte esencial de la vida, es la vida.*

Alvin Toffler

## Introducción

En esta tesis se usó una **metodología cualitativa de tipo etnográfico**<sup>2</sup> mediante la observación en el aula de un grupo de 60 alumnos y la aplicación de una entrevista a una pequeña muestra de alumnos de este grupo. Además se llevó a cabo otra entrevista a profesores expertos en la materia de Álgebra Lineal en su lugar de trabajo.

Las entrevistas que se efectuaron tanto a los alumnos como a los profesores expertos fueron del tipo semiestructuradas, en donde algunas preguntas que se plantearon a los sujetos de la investigación fueron estructuradas y otras en donde se esperaba de respuestas más amplias o de opinión por parte del entrevistado.

La **variable** del problema de investigación fue el aprendizaje. Para los fines del presente estudio, se entiende por aprendizaje la definición de Ausubel de aprendizaje significativo por recepción y por descubrimiento guiado. Esto fue tratado anteriormente en el Marco Teórico.

Se manejan dos hipótesis en este trabajo:

**1ª hipótesis** de la investigación: si los alumnos trabajan directamente con el libro dentro y fuera del salón de clase, entonces lograrán un mejor aprendizaje.

**2ª hipótesis** de la investigación: si se cuenta con el tiempo necesario y suficiente para que el alumno asimile y madure el conocimiento, entonces redundará en un mejor aprendizaje.

Para explorar la situación de si la clase estaba funcionando de la mejor manera con el objeto de lograr el óptimo aprendizaje del alumno, se recurrió a la investigación etnográfica en la educación, a la entrevista y a la observación en clase, tomando como apoyo el punto de vista de Peter Woods (Woods, 1987).

Woods establece que los maestros suelen actuar por intuición, pero se trata de una intuición que en general descansa en una sólida base de conocimiento aprendido. En cierto sentido, la certeza y el conocimiento son requisitos profesionales del maestro.

---

<sup>2</sup> El sentido en que se toma este término antropológico será explicado en la página 22.

Además, él estima que gran parte del tiempo del maestro se invierte en trabajo etnográfico, observando, escuchando, tratando de comprender a sus alumnos y colegas.

Precisamente el uso pedagógico más importante de la etnografía es el que se relaciona con la comprensión de la especie humana, de cómo vive la gente, cómo se comporta, qué la motiva, cómo se relacionan los individuos entre sí, las reglas que rigen su conducta, el lenguaje, la apariencia, la conducta.

En este sentido el etnógrafo trata de hacer todo esto desde *dentro* del grupo y desde las perspectivas de los miembros del mismo. Lo que cuenta son los significados e interpretaciones del grupo y para comprenderlos se ha de penetrar sus fronteras y observarlos desde el interior. Eso significará una permanencia relativamente prolongada en el seno del grupo, primero para romper las fronteras y ser aceptado y después para aprender la cultura. El etnógrafo se interesa por lo que hay detrás, por el punto de vista del sujeto.

Los etnógrafos se introducen en el “campo” para “observar” cómo ocurren las cosas en su estado natural, con frecuencia mediante su propia participación en la acción, en calidad de miembros de la organización o grupo.

De acuerdo con esto Woods plantea que entre la etnografía y la enseñanza hay ciertos paralelismos: ambas investigan, preparan sus respectivos terrenos, analizan y organizan y, finalmente, presentan su trabajo en forma de comentario sobre determinados aspectos de la vida humana. Además, la etnografía, lo mismo que la enseñanza, es una mezcla de arte y ciencia, ya que la manera en que se identifica a las formas culturales de los distintos grupos de individuos, se les comprende y se les procesa es una cuestión de estilo, de percepción, de procesos interpretativos, de “sensibilidad”, todas las cuales son propiedades esencialmente artísticas que pueden ser de utilidad para el maestro.

La etnografía se aprende a hacer a medida que se hace, hasta convertirla en una búsqueda personal, tanto por el método como por el tema. Así como se trabaja en el perfeccionamiento de un cuestionario, así debe trabajarse en el desarrollo de las cualidades personales de curiosidad, penetración intuitiva, discreción, paciencia, decisión, vigor, memoria y el arte de escuchar y observar. Todas estas cualidades, se piensa, el maestro las debe desarrollar en su ámbito de trabajo.

Por otro lado, los maestros cuentan con una notable experiencia como observadores participantes. Este es el método más importante de la etnografía, que en la práctica viene siendo un estilo de investigación, en donde el investigador se convierte en miembro y puede operar por reflexión y analogía, analizando sus propias reacciones, intenciones y

motivaciones, cómo y cuando ocurren en el curso del proceso del que forma parte. Al participar se actúa sobre el medio y al mismo tiempo se recibe la acción del medio. Así, pues, la etnografía ofrece a los maestros un compromiso con la investigación y una orientación hacia ella.

No hemos de suponer que los maestros enseñan y los alumnos aprenden "en un grado o en otro". Por el contrario, debemos comenzar por preguntar "¿Qué sucede aquí?"; por lo cual es imprescindible ser capaz de mantenerse fuera de uno mismo, salirse de sí mismo.

Los maestros deben ser de mentalidad abierta y flexible. Tienen que saber algo del lenguaje de los alumnos, de sus creencias, valores y costumbres y saberlo pronto, para estar en condiciones de comunicarse en iguales términos. Sin duda el observar y el escuchar, así como el discutir con otros, es una gran ayuda en este sentido. Pero es imprescindible la prudencia, pues nada odian más los alumnos que la falta de sinceridad y el intento hipócrita de congraciarse con ellos; constantemente han de ganarse el respeto. Por lo cual, la mayor tarea es la de establecer una relación y generar confianza, mostrar que se es una persona de cierto valor e integridad.

Sin embargo, aunque la observación constituye el corazón de la etnografía pura, la mayor parte del trabajo de investigación educativa realizado en Gran Bretaña se ha fundamentado principalmente en las entrevistas. "A menudo es éste el único modo de descubrir lo que son las visiones de las distintas personas y de recoger información sobre determinados acontecimientos o problemas, pero es también un medio de "hacer que las cosas sucedan" y de estimular el flujo de datos...." (Woods, pp. 77).

Tal fue la intención de las entrevistas que se hicieron a los alumnos del grupo 2201 de la carrera de MAC.

La clave del éxito de la entrevista descansa en la persona y disposición del etnógrafo. Los principales atributos personales que se requieren en las entrevistas son los mismos que en otros aspectos de la investigación y giran siempre en torno a la confianza, la curiosidad y la naturalidad.

Con respecto a la confianza, Woods menciona que un buen test de lo que lleva implícito esta cualidad reside en pensar a qué tipo de persona estaría uno dispuesto a confiar algunos de sus más íntimos secretos. Tendría que tratarse de una persona comprensiva consciente, bien informada y honrada y que no cayera fácilmente en ninguna de las distorsiones de la verdad que el entrevistado pudiera intentar. Debiera ser una relación tal que trascendiera la investigación, que promoviera un vínculo de amistad, un sentimiento de solidaridad y unión en persecución de una misión común que planeara por encima del yo de cada cual.

El segundo atributo es la curiosidad, es decir, un deseo de saber: en este caso, de conocer las opiniones y las percepciones que las personas tienen de los hechos, oír sus historias y descubrir sus sentimientos.

El tercer elemento es la espontaneidad. Así como en la observación se procura no interferir, así también en las entrevistas, el objetivo es el de captar lo que se encuentra en el interior de los entrevistados, sin la coloración ni la distorsión que el entrevistador pueda imprimirle. Ser “natural” o ser “espontáneo” significa que no se adopta ninguna postura especial en calidad de investigador, experto, burócrata, etc., sino que lo que se hace es relacionarse con las gentes sobre la base del vínculo de persona a persona.

Por último, la habilidad del entrevistador consiste en crear una relación, una situación y una atmósfera adecuadas, y tiene que dar las seguridades usuales de confidencialidad y anonimato.

Todo lo anteriormente expuesto acerca de la investigación etnográfica en la educación, la observación y las entrevistas se han tomado muy seriamente en cuenta durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos de la materia de Álgebra Lineal, desde el semestre 2003-II a la fecha.

A continuación se describe una clase con los alumnos del grupo 2201 desde el inicio hasta el final de la misma.

## **DESCRIPCIÓN DE UNA CLASE**

### **Tema propuesto: Subespacios Vectoriales**

Una vez que se llega al salón, se saluda y se espera un tiempo prudente para que acaben de llegar los alumnos que faltan, se sienten los que todavía no lo han hecho y se dispongan a empezar la clase. A continuación se pregunta por las dudas que pudieron haber tenido en la resolución de los problemas de tarea. Si la duda es generalizada, se explica con detalle en el pizarrón; si la duda es de unos pocos, entonces se hace pasar al pizarrón o desde su lugar a alguien que haya resuelto el problema para que dé una explicación de cómo resolvió el problema. Si hay alguien que lo haya resuelto de otra manera, también pasa al pizarrón a mostrar cómo lo hizo. Mientras, doy un paseo por el salón observando y escuchando al grupo, con el objeto de conocerlos más de cerca y percibir su manera de ser y de relacionarse entre ellos mismos, con el libro y conmigo,

tomando muy en cuenta lo que comenta Woods en cuanto a investigación etnográfica y observación.

Una vez resueltas todas las dudas se pregunta qué fue lo que se vio la clase anterior. Se dan unos minutos esperando respuesta. Algunos alumnos empiezan a recordar y a exponer complementándose entre sí las explicaciones. En caso necesario se hacen preguntas para conocer si entendieron bien los conceptos. Si se nota que para algunos no quedó clara la explicación de la clase anterior, se repasa nuevamente hasta que no queden dudas.

Cuando ya no hay dudas se les expone a grandes rasgos lo que tratará la clase de ese día a manera de organizador de avance (Ausubel). Se les pide que abran el libro. Se señala a alguien que lea el primer párrafo, deteniéndonos en los ejemplos que presenta el libro de espacios vectoriales, los cuales previamente se analizaron la clase anterior.

A continuación, se lee la definición de **subespacio**: "Sea  $H$  un subconjunto no vacío de un espacio vectorial  $V$  y suponga que  $H$  es en sí un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en  $V$ . Entonces se dice que  $H$  es un subespacio de  $V$ " (Grossman, 1996, pp. 299). Se anota en el pizarrón lo más relevante. Se vuelve a leer tantas veces como sea necesario. Se continúa con el teorema 1: *Un subconjunto no vacío  $H$  de un espacio vectorial  $V$  es un subespacio de  $V$  si se cumplen las dos reglas de cerradura, las cuales se anotan en el pizarrón. Se observan detenidamente y se analizan para tratar de entenderlas. Se les hace hincapié en que no es necesario que se cumplan los 10 axiomas de espacios vectoriales previamente vistos la clase anterior para tener un subespacio vectorial. Algunos alumnos se muestran escépticos al respecto, ya que casi no pueden creer que únicamente con las dos cerraduras se puede descartar si un subconjunto dado de un espacio vectorial es subespacio o no. Ante tal escepticismo se les hizo notar que un subespacio es parte de un espacio vectorial y por lo tanto, "hereda" las operaciones del mismo. Se probaron las propiedades asociativa, conmutativa, distributiva y multiplicativa en  $H$  ilustrando con ejemplos lo anterior:*

1. Si  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in H$  y  $H \subset V$ , entonces  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .
2. Si  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$  y  $H \subset V$ , entonces  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ .
3. Si  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$  y  $H \subset V$  y  $\alpha$  es un escalar, entonces  $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ .
4. Si  $\mathbf{a} \in H$  y  $H \subset V$  y  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares, entonces  $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ .
5. Si  $\mathbf{a} \in H$  y  $H \subset V$  y  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares, entonces  $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$ .
6. Para cada  $\mathbf{a} \in H$  y  $H \subset V$ ,  $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ .

Para la existencia del idéntico aditivo se sabe que para todo  $\mathbf{a} \in V$   $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Por lo tanto se cumple para cualquier vector en  $H$  por ser  $H \subset V$ . Por lo tanto  $\mathbf{0} \in H$ .

Para la existencia del inverso aditivo se sabe que si  $a \in V$ , entonces  $(-1)a = -a$ . Por lo tanto se cumple lo mismo para cualquier vector en  $H$ .

Por lo tanto, lo único que sí se debe probar son las dos cerraduras, porque no se puede garantizar que si  $a, b \in V$   $a + b \in H$ , ni tampoco que  $\alpha a \in H$ .

Ya que todo el grupo asimiló lo anterior, se hizo la siguiente pregunta: ¿cómo garantizan la existencia del inverso exclusivamente con la cerradura? ¿cómo lo harían?. Se espera un tiempo razonable. Nadie contesta: se les había olvidado el producto escalar. En este punto se confirmó lo mencionado en el Marco Teórico en cuanto a sobreaprendizaje y transferencia se refiere (Duncan, 1959; Morrisett y Hovland, 1959).

Por lo tanto se les hace ver que una vez que se garantizan las dos cerraduras, se puede garantizar la existencia del inverso, y teniendo un elemento y su inverso se puede garantizar la existencia del idéntico aditivo. Por lo tanto, continuando con Grossman, se puede entender que: *todo subespacio de un espacio vectorial  $V$  contiene al  $0$ .*

Para poner en práctica todas estas ideas empezamos con un ejemplo:

*Ejemplo 1:* El subconjunto  $\{0\}$  de cualquier espacio vectorial  $V$  es un subespacio y se llama subespacio trivial.

Por ser el primer problema se resuelve en el pizarrón haciéndolo cuidadosamente paso por paso y tratando de que los alumnos intervengan lo más posible. Se les dice: "propongamos dos elementos del subconjunto". Espero respuesta hasta que contesten "el 0 y el 0". Se aplica la cerradura para la suma:  $0 + 0 = 0$  y se nota que  $0 \in \{0\}$ . Posteriormente se aplica la cerradura para el producto por un escalar  $\alpha$ :  $\alpha 0 = 0$  y nuevamente se les hace notar que  $0 \in \{0\}$ . Como se cumplen las dos reglas de cerradura, se concluye que el subconjunto  $\{0\}$  es un subespacio de  $V$ .

Se propone otro problema:

*Ejemplo 2:* Sea  $H = \{(x,y): y = mx\}$ . Para la solución de este segundo problema se les pregunta qué hay que hacer. Al no obtener respuesta, doy el primer paso: propongo dos elementos de  $H$ :  $X = (x_1, y_1)$ ,  $Y = (x_2, y_2)$  y un escalar  $\alpha \in R$ .

Entonces, les pregunto, ¿qué sigue?. Si hay alguien que responda correctamente, lo pasa a escribir al pizarrón. Nos explica cómo se cumplen las dos cerraduras, y se llega a la conclusión final. Si, por otro lado las respuestas son algunas correctas y otras

incorrectas, se anotan en el pizarrón solamente las correctas, apoyándose unos con otros hasta completar el resultado final. En el caso de que las respuestas sean totalmente incorrectas o nadie conteste, se procede a guiar el razonamiento del grupo hasta llegar a la respuesta correcta.

Si no hay más preguntas acerca del ejercicio, se esperan unos cuantos minutos para que acaben de asimilar los conceptos. Si sí hay preguntas se dispone a contestarlas hasta que se agoten.

En seguida se continúa con el siguiente problema que obviamente es de mayor grado de complejidad. Se lee detenidamente el enunciado tratando de entender lo que se pregunta, qué datos se dan y con qué conocimientos se cuenta para resolverlo. Se lee tantas veces como sea necesario (Polya, 1945). Se intenta resolverlo en el pizarrón lentamente, de manera que puedan seguir el libro y atender a la explicación. Se hacen preguntas a los alumnos y se da un tiempo razonable para que contesten, o si no, ellos hacen las preguntas y siempre se busca que alguien conteste antes de emitir la respuesta.

Si no hay más preguntas acerca del ejercicio, se esperan unos cuantos minutos para que acaben de asimilar los conceptos y copien lo necesario del pizarrón.

Posteriormente se pasa a alguien al pizarrón a hacer otro ejercicio o se organizan en equipos de dos o tres para resolver un ejercicio. En el primer caso, el grupo va haciendo las correcciones que sean necesarias al alumno que está en el pizarrón. Solo en caso muy necesario intervengo yo. Cuando trabajan en equipo ellos escogen con quién hacerlo. Intentan llegar a la solución sin ayuda y solo cuando ya no pueden continuar acuden a mí. Cuando se ve que la mayoría va por mal camino, se pasa a algún equipo a que lo resuelva en el pizarrón para ir rectificando y/o ratificando los pasos hasta llegar a la solución. En general, tiendo a alejarme del pizarrón lo más posible para lograr que el alumno interactúe con el objeto del conocimiento, sea más creativo, participativo y crítico y se sienta más libre. Cuando alguna explicación del libro no queda clara, con frecuencia alguien se ofrece a explicar a su manera lo que entendió, ya sea desde su lugar o pasando al pizarrón.

En caso de que la mayoría de los equipos estén funcionando correctamente, después de un tiempo determinado se recoge el trabajo que hicieron en equipo para calificarlo y tomarlo en cuenta como participación.

Dependiendo de cómo se vayan sintiendo los alumnos en cuanto a la adquisición de conocimientos y habilidad para resolver problemas, se resuelven más ejercicios. Si no hay



necesidad de hacer más, se deja una tarea para la siguiente clase y se pasa al siguiente tema o subtema y se relaciona con lo que se acaba de ver, de manera que los alumnos no se encuentren con conceptos aislados, sino relacionados entre sí para que de este modo vaya teniendo significado el aprendizaje en clase. (Ausubel).

Al finalizar la clase toda esta información se recapitula y se comparte con ellos para cerrar.

En distintos momentos de las clases se percibe que los alumnos hojean el libro con curiosidad e interés, inclusive a veces ellos encuentran errores y los señalan y corrigen, no sin antes preguntar. Además proponen diferentes maneras de demostrar teoremas e inclusive de resolver problemas, lo cual motiva el desarrollo de su creatividad.

## **LAS ENTREVISTAS**

Dos días después de aplicar el 2º examen parcial, durante el periodo 2003-2, se aplicó una entrevista a una muestra de 6 alumnos aleatoriamente escogidos del grupo 2201, del 2º semestre de la carrera de MAC. La selección estuvo condicionada a que 2 alumnos hubieran sido de los mejores, otros dos de los regulares, y por último, otros dos fueran de los menos sobresalientes. El promedio de edad de los alumnos fue de 19 años, dos de ellos siendo del sexo femenino y los otros cuatro del sexo masculino. El lugar de la entrevista fue mi cubículo, ubicado en la planta alta de la Unidad de Seminarios. Se entrevistó a los alumnos uno por uno; las entrevistas fueron grabadas, previo consentimiento del alumno entrevistado y con carácter confidencial.

En la entrevista hecha a los alumnos las preguntas y respuestas fueron las siguientes:

### **ALUMNO 1 ( de los mejores)**

1. ¿Qué piensas acerca de que se esté dando la clase con el método de apoyarse en el libro y pizarrón y no solamente con el pizarrón, es decir, con apuntes?

Se me hace muy interesante, porque así uno tiene herramientas para ver lo que usted está desarrollando en el pizarrón y al mismo tiempo comparar con lo que está en el libro, y si surge alguna duda en ese momento, la expresamos.

2. ¿Cómo te sientes con este método?

Yo me siento bien; me da más seguridad para poder aprender.

3. ¿Por qué?

Porque así tengo la oportunidad de estudiar el libro en la casa y llegar con más conocimientos al salón y las dudas que tengo las puedo aclarar por mi cuenta o si no, las pregunto en clase.

4. ¿Qué problemas o ventajas estás teniendo al trabajar con el libro?

Ventajas: yo puedo irme al libro y con seguridad explorar lo que hay en él. Creo que este método es el mejor.

5. ¿Qué sugerencias podrías aportar para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en Álgebra Lineal I con el método de apoyarse en el libro que estamos llevando?

Detenernos un poquito en algún tema y hacer uno o más ejercicios en clase para que se refuerce el conocimiento.

ALUMNA 2 (de los regulares)

1. ¿Qué piensas acerca de que se esté dando la clase con el método de apoyarse en el libro y pizarrón y no solamente con el del pizarrón, es decir, con apuntes?

Pienso que está bien porque algunas cosas que vienen en el libro usted nos las explica en el pizarrón y nosotros sabemos de lo que nos está hablando; como el libro lleva una secuencia, sabemos cómo vamos, o sea, lo que está sucediendo. Yo sí estoy de acuerdo con ese método.

2. ¿Qué problemas o ventajas estás teniendo al trabajar con el libro?

En el libro viene un ejercicio por tema y cuando nos deja tarea y no la entiendo, regreso al libro y veo paso por paso cómo lo desarrollaron y entonces lo intento hacer por mi cuenta y por eso me gusta trabajar con el libro. Desventajas no le veo.

3. ¿Qué sugerencias podrías aportar para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en Álgebra Lineal I con el método de apoyarse en el libro que estamos llevando?  
Así como estamos trabajando está bien, porque usted nos va dejando tarea y nos estamos basando en el libro. Si no tuviéramos el libro no sabríamos a dónde recurrir, en caso de que tuviéramos alguna duda.

ALUMNO 3 (de los regulares).

1. ¿Qué piensas acerca de que se esté dando la clase con el método de apoyarse en el libro y pizarrón y no solamente con el del pizarrón, es decir, con apuntes?

A mí se me ha hecho muy interesante. Yo ya había cursado Álgebra Lineal y creo que el método es muy bueno; hay que seguirlo porque es en lo que se basa usted para dar la clase. Está muy bien el plan de trabajo.

2. ¿Qué problemas o ventajas estás teniendo al trabajar con el libro?

Problemas ninguno. Las ventajas es que se desengaña uno muchas veces; el libro es como la guía, el camino. Y además uno hace ejercicios y resuelve sus dudas individualmente.

3. ¿No habías tenido antes en ninguna materia esta manera de trabajar?

No. El profesor viene y ya se sabe todo de memoria.

ALUMNO 4 (de los menos sobresalientes)

1. ¿Qué piensas acerca de que se esté dando la clase con el método de apoyarse en el libro y pizarrón y no solamente con el del pizarrón, es decir, con apuntes?

Está bien porque así aprendemos a manejar el libro, para posteriormente nosotros por nuestra cuenta estudiar, pero ya tenemos una idea de cómo se hacen los ejercicios y cómo se van resolviendo.

2. ¿Cómo te sientes con este método?

Me siento bien porque me da la oportunidad de que en un caso extremo que falte a clase, tengo un recurso en qué apoyarme.

3. ¿Qué sugerencias podrías aportar para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en Álgebra Lineal I con el método de apoyarse en el libro que estamos llevando?  
Dejarnos estudiar un tema del libro para exponerlo nosotros; en caso de que estemos en un error usted nos orienta para que nosotros aprendamos por nuestra cuenta a estudiar en los libros.

ALUMNO 5 (de los mejores)

1. ¿Qué piensas acerca de que se esté dando la clase con el método de apoyarse en el libro y pizarrón y no solamente con el del pizarrón, es decir, con apuntes?  
Me parece bien porque cuando estudiamos nada más del libro, uno como estudiante no puede resolver todas las dificultades. Necesitamos un poco más de orientación de cómo se hace el ejercicio, para poder entender bien lo que se nos está pidiendo.

2. ¿Cómo te sientes con el libro?  
A mí se me hace luego confuso, pero ya con la explicación en clase se me hace más fácil.

3. ¿Qué ventajas o desventajas estás teniendo al trabajar con el libro?  
Ventajas: que podemos estar repasando cuando nos atrasemos en cualquier punto.  
Desventajas: algunas veces no son suficientes las explicaciones que tiene el libro.

3. ¿Qué sugerencias podrías aportar para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en Álgebra Lineal I con el método de apoyarse en el libro que estamos llevando?  
Haciendo ejercicios obligatorios, porque siento que casi nadie hace los ejercicios en forma voluntaria. Es por eso que casi nadie hace las tareas, y solo se basan en los ejercicios que hacemos en clase, y pienso que no es suficiente. Yo prefiero que nos presione un poco más.

ALUMNA 6 (de los menos sobresalientes)

1. ¿Qué piensas acerca de que se esté dando la clase con el método de apoyarse en el libro y pizarrón y no solamente con el del pizarrón, es decir, con apuntes?

A mí se me hace más fácil así como da su clase, ya que yo llevé Álgebra Superior y el maestro nada más apuntaba en el pizarrón y no le daba a uno la confianza de preguntar lo que no entendía. Con usted no, porque aparte de que tenemos el libro, está con nosotros, y nos pregunta.

2. ¿Cómo te sientes con este método?

Bien. Funciona más.

3. ¿Por qué?

Porque usted lo que explica nosotros lo estamos viendo en el libro y entonces ya contamos con dos oportunidades diferentes de entenderle más, y no nada más estar viendo lo que usted está haciendo en el pizarrón.

4. ¿Qué sugerencias podrías aportar para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en Álgebra Lineal I con el método del libro que estamos llevando?

Yo digo que está bien todo.

# **capítulo cuatro**

## **marco operativo y resultados**

*los pequeños actos que se ejecutan son mejores  
que todos aquellos grandes que se planean.*

George Marshall

## Descripción

El primer día de clases, después de presentar el temario en el pizarrón, se les dijo a los alumnos cómo se iba a evaluar:

- Primer Final : dividido en 3 exámenes parciales, que contarían el 100% de la calificación final.  
apuntes en limpio : un punto adicional  
participación libre : puntaje adicional a quien hubiera participado.  
Segundo Final : 2º ordinario ( en fecha de acuerdo a aviso del Programa de MAC).  
La exención sería con 6.

Puesto que se está tratando con jóvenes de 19, 20 y 21 años, se quiso iniciar el semestre asumiendo que el alumno era el único responsable de su propia educación, por lo que se les comunicó que las tareas no contarían para la evaluación, pero que era su responsabilidad hacerlas. Esta medida se tomó en primer lugar porque se planeaba dejar atrás el paternalismo que tradicionalmente se venía dando en la materia; en segundo lugar, las experiencias en años anteriores me hicieron caer en la cuenta de que pocos alumnos hacían las tareas y el resto se limitaba a copiarlas, y por lo tanto a obtener un porcentaje gratuito en su calificación parcial y , por último porque "la escuela, naturalmente, no puede asumir nunca la completa responsabilidad de que el estudiante aprenda. Éste debe realizar su propia parte, aprendiendo activa y críticamente, persistiendo en comprender y retener lo que se le enseña, integrando las nuevas tareas de aprendizaje con los conocimientos previos y la experiencia idiosincrática, traduciendo los nuevos enunciados a su propio lenguaje, esforzándose por cuenta propia en dominar las materias nuevas y difíciles....." (Ausubel, pp. 45).

Los temas que se enseñan en esta materia son los siguientes:

- I Sistemas de Ecuaciones Lineales
- II Matrices
- III Determinantes
- IV Espacios Vectoriales
- V Transformaciones Lineales.

Las clases comenzaron con el método previamente mencionado en el Marco Conceptual utilizando el libro como apoyo fundamental. Hacia el 30% del semestre se aplicó el primer examen parcial. El promedio del grupo fue de 3.6. Este primer parcial abarcó los dos primeros temas: Sistemas de Ecuaciones Lineales y Matrices.

Dos días después del examen se entrevistó a 6 alumnos aleatoriamente escogidos, pero la selección estuvo condicionada a que 2 alumnos hubieran sido de los mejores, otros dos de los regulares, y por último, otros dos fueran de los menos sobresalientes. El objetivo de la entrevista fue investigar cómo se iban sintiendo los alumnos con el nuevo método de enseñanza, consistente básicamente en el uso del libro. En el Marco Metodológico se pueden consultar las preguntas que se hicieron y las respuestas dadas por los estudiantes.

El tercer tema impartido fue el de Determinantes, el cual, al igual que los dos temas anteriores, fue también muy operacional.

Dado que entre los tres primeros temas (Sistemas de Ecuaciones Lineales, Matrices y Determinantes) y el cuarto (Espacios Vectoriales) se da un brinco cognitivo en el nivel de dificultad debido a que este último se caracteriza por ser muy abstracto, a diferencia de los tres anteriores que son fundamentalmente operacionales, se tuvo especial cuidado en que se entendiera perfectamente el tema, para que posteriormente los alumnos pudieran vincular más fácilmente la teoría con la práctica (Ausubel, 1983; Piaget, 1975; Polya, 1945).

En el cuarto tema, Espacios Vectoriales, el primer obstáculo con el que se enfrentaron los alumnos fue con el manejo del lenguaje matemático: los alumnos no podían traducir el problema, a partir de su planteamiento, a una notación matemática. No fue sino después de muchos ejercicios, muchas tareas y muchas consultas al libro que lo lograron: traducir un cierto enunciado de un problema a lenguaje matemático.

En el 60% del semestre, antes del segundo examen parcial, dando marcha atrás al hecho de no pedirles las tareas, se tomó la medida de solicitarles el 80% de las mismas como requisito para tener derecho a examen; esto fue necesario debido a que como antes no se recogían, pocos alumnos las hacían y por lo tanto se veía reflejado en las calificaciones de sus exámenes parciales y, además esta medida se tomó como último recurso, ya que anteriormente se pensaba que no era necesario ejercer ninguna presión sobre ellos porque se creía que podían ser tratados como personas adultas. Sin embargo, su comportamiento no se manifestó como tal. Por otro lado, ya algunos alumnos habían sugerido que se les pidiera las tareas en forma obligatoria, porque solo así las harían. El resultado fue que, a diferencia de semestres anteriores, la mayor parte de los alumnos se



mostraron interesados en su calificación y aprendizaje y estaban entregando tareas, aún los alumnos insalvables.

El 2º examen parcial abarcó el tema de Determinantes y una parte de Espacios Vectoriales, correspondiente a la verificación de cuándo tenemos un espacio o subespacio vectorial. El promedio general del grupo para este examen parcial fue de 4.3. Aunque esta calificación parece muy pobre, refleja por un lado un avance con respecto a la calificación del primer examen parcial, y por el otro, aunque parezca contradictorio, una reacción de los chicos, tanto al ser tratados como personas adultas como a ser tratados bajo presión como una respuesta a su apatía. Esta reacción ha de ser confirmada al término del semestre, después del tercer examen parcial.

Se piensa que esta calificación pudo haber sido más alta en caso de no haber considerado importante el ritmo de los demás profesores y en su lugar se hubiera seguido el paso que marcaban los alumnos. Lo anterior tiene como fundamento los resultados del maestro M.F. Rubenstein.

Para Rubenstein, dos de los principios que le sirvieron de ayuda en sus esfuerzos para producir el aprendizaje y desarrollo fueron :

- "Estimule las preguntas. Algunas preguntas son tan relevantes que no deben echarse a perder a través de una respuesta inmediata; debemos tomarnos el tiempo necesario para considerarlas. Si éste es el caso, dígaselo a sus alumnos.
- *No diga a la clase: 'estamos atrasados'. ... Cada clase es única; adapte sus planes a la clase y siempre irá según el programa, sea lo que sea."* (Rubenstein, 1975, pp. 26, en Nikerson, Perkins y Smith, 1998, pp. 225).

Terminada la etapa del 2º examen parcial se continuó con los subtemas de Combinación Lineal y Espacio Generado. Dada la abstracción del tema el resultado fue que a los alumnos les costó un poco más de trabajo entenderlo. Llegó a un momento en que a pesar de estar con un poco de retraso en el temario con respecto a los demás profesores de la materia, se tuvo que disponer de una clase extra para poder dar un repaso de todas las definiciones, propiedades y teoremas anteriormente vistas con el objetivo de que las tuvieran más presentes y además tuvieran más claro el panorama; es decir, se aplicó el sobreaprendizaje (Duncan, 1959; Morrisett y Hovland, 1959). La respuesta del grupo fue positiva en cuanto a mayor captación de los conceptos y resolución de problemas.

A estas alturas del semestre, a pesar del atraso, un dato importante que se observó, a diferencia de otros semestres, fue que casi todos los alumnos estaban en la clase (45 aproximadamente), y la razón es que querían seguir aprendiendo (los otros 15 ya hacía tiempo que no asistían a clase. En la materia de Álgebra Lineal hay una gran deserción y esto sucede semestre a semestre).

Para el 75% del semestre se me hizo saber por algunos de mis alumnos y por alumnos de otros grupos, que para ellos era demasiada la información que tenían que asimilar y almacenar. Sin embargo no se hacía nada al respecto por parte de la Sección de Matemáticas. Por mi parte intenté respetar los tiempos de aprendizaje que los alumnos me marcaban.

Finalmente se aplicó el 3° examen parcial que abarcó desde la continuación de Espacios Vectoriales (Independencia Lineal, Bases, dimensión, etc.), hasta donde fue posible avanzar en el último tema de Transformaciones Lineales. El promedio que el grupo logró alcanzar en este tercer examen parcial fue de 7.68.

Lo anterior indica que entre el primero y el tercer parcial se logró un aumento significativo en la calificación del 113.3% y entre el segundo y el tercer parcial la calificación se incrementó en un 78.6%. Se toma como referencia el tercer parcial porque fue el resultado de todo el trabajo hecho anteriormente en clase y en exámenes, basándose en todos los autores citados anteriormente.

Haciendo una comparación en nueve generaciones anteriores que atendí impartiendo la misma materia se registraron los siguientes datos, correspondientes a las calificaciones de los tres exámenes parciales:

### CUADRO DE RESULTADOS

renglón	n número de alumnos	Media de las calificaciones finales de alumnos aprobados	Media del 1er examen	Media del 2° examen	Media del 3er examen
1	70	6.5	3.9	2.8	4.6
2	69	6.7	4.13	4.06	5.73
3	74	7.0	4.12	4.3	5.51
4	74	7.0	3.05	4.3	6.44
5	74	7.0	3.1	2.71	4.03
6	71	6.47	2.94	3.49	4.84
7	65	7.14	4.02	5.03	5.4.6
8	74	7.5	4.45	4.24	5.91
9	65	6.4	5.23	3.86	3.66
10	60	7.8	3.6	4.3	7.68

En el renglón 10 se registraron los datos correspondientes al semestre 2003-II, motivo de esta tesis. Como se puede observar en ese renglón, la media de las calificaciones finales de los alumnos aprobados supera a todas las medias anteriores. Si se revisa en los renglones 3,4, 6 y 7, se infiere que la media de las calificaciones de los exámenes parciales se incrementa progresivamente. Lo mismo ocurre en el renglón 10, de manera discreta del 1er al 2° examen pero de manera sustantiva del 2° al 3er examen. Por lo cual se concluye con gran seguridad que con el método de apoyo con el libro y dando un tiempo suficiente para la maduración de los conceptos, se lograron resultados ascendentes y no poco significativos en los exámenes parciales.

Ya no es tema de esta tesis, pero en el siguiente semestre se pensó hacer un seguimiento a través de una entrevista a siete alumnos que habían cursado la materia conmigo para saber si estaban aplicando el método de seguir el libro en sus otras materias como lo habían anteriormente hecho, y analizar cómo les estaba funcionando. Quería cerciorarme de si habían adquirido el hábito de estudiar apoyándose en el libro base de sus materias subsecuentes y a no depender exclusivamente del maestro o de las notas escritas en el pizarrón.

Cinco de los alumnos estaban cursando Álgebra Lineal II conmigo y habían sido entrevistados anteriormente; los dos restantes no estaban llevando Álgebra Lineal II conmigo y no habían sido entrevistados.

A continuación se enlistan las preguntas y respuestas hechas a los alumnos:

#### ALUMNA 1

1. En este semestre 2004-I ¿utilizas un libro base como apoyo en tus nuevas materias?  
¿ Sigues el método que llevamos el semestre pasado de apoyarse directamente en el libro?  
No. Sólo en Cálculo al principio del semestre y en Álgebra Lineal II.
2. ¿Cómo te fue en tus evaluaciones?  
En Cálculo en la primera evaluación obtuve 6 de calificación. En la segunda, ya sin usar el libro obtuve 3. La tercera evaluación todavía no la hacen. En Álgebra Lineal II obtuve 5.2 en el primer examen y 7.3 en el segundo.
3. ¿Piensas seguir con esta metodología de apegarte a los libros en alguna otra materia?  
Sí. Nada más que el inconveniente es que los tengo que cargar todo el día y la mochila pesa mucho.

#### ALUMNO 2

1. En este semestre 2004-I ¿utilizas un libro base como apoyo en tus nuevas materias?  
¿ Sigues el método que llevamos el semestre pasado de apoyarse directamente en el libro?  
Sí.
2. ¿En qué materias?  
En Cálculo III y en Álgebra Lineal II. Me ha servido mucho utilizar el libro.
3. ¿En qué sentido?  
Lo que más me ayuda es estudiar en el libro porque vienen ejemplos.

4. ¿Cómo te ha ido en las evaluaciones?

En Cálculo III en mi primer parcial obtuve 5.5 y el segundo todavía no sé. En Álgebra Lineal II saqué 5.5 en el primer parcial y en el segundo parcial también, pero fue por causas de trabajo ajenas al libro, pero le entiendo bien, que es lo importante.

#### ALUMNA 3

1. En este semestre 2004-I ¿utilizas un libro base como apoyo en tus nuevas materias?  
¿ Sigues el método que llevamos el semestre pasado de apoyarse directamente en el libro?

Sí.

2. ¿En qué materias?

En Economía, Métodos Numéricos y Álgebra Lineal II.

3. ¿Cómo te fue en tus evaluaciones?

En Economía no nos hacen evaluaciones. En Métodos Numéricos en el primer examen obtuve 7.5 y no nos han hecho otra evaluación. En Álgebra Lineal II me saqué 7.5 en la primera y 8.5 en la segunda.

#### ALUMNO 4

1. En este semestre 2004-I ¿utilizas un libro base como apoyo en tus nuevas materias?  
¿ Sigues el método que llevamos el semestre pasado de apoyarse directamente en el libro?

Sí.

2. ¿En qué materias?

En Álgebra Lineal II, aunque el maestro que tenemos no sigue el mismo método.

3. ¿Me puedes decir por qué tú sí lo sigues?

Considero que el libro es bueno y se me quedó el hábito.

4. ¿Cuáles han sido tus evaluaciones?

En el primer examen me saqué 4.5 y en este segundo examen me fue mejor, salí con un 9. En Cálculo también sigo el libro y me saqué 6 en el primer examen y 5 en el segundo examen.

5. ¿Piensas seguir utilizando los libros de aquí en adelante?

Sí, para pasar las materias bien y además porque aprendo mucho.

#### ALUMNO 5.

1. En este semestre 2004-I ¿utilizas un libro base como apoyo en tus nuevas materias?.

¿ Sigues el método que llevamos el semestre pasado de apoyarse directamente en el libro?

Sí, porque siguiendo el libro me ha ido bien. Me apoyo mucho en las definiciones.

2. ¿En qué materias?

En Geometría Analítica y en Álgebra Lineal II.

3. ¿Cuáles han sido tus evaluaciones?

En Álgebra Lineal II, en el primer examen tuve 5.8 y en el segundo sí lo pasé, pero todavía no nos entregan calificaciones. En Geometría Analítica pasé con 10 el primer examen, apoyándome en el libro.

4. En las otras materias, ¿usas los libros?

Por mi cuenta sí; cuando nos dejan tareas, me apoyo en los libros.

5. ¿Piensas seguir con esta dinámica en tus futuras materias?

Sí, porque pienso que los maestros nada más son un simple apoyo, porque lo que ellos nos dan está en los libros.

#### ALUMNO 6

1. En este semestre 2004-I ¿utilizas un libro base como apoyo en tus nuevas materias?.

¿ Sigues el método que llevamos el semestre pasado de apoyarse directamente en el libro?

Sí.

2. ¿En qué materias?

En Cálculo II, aunque el maestro no se basa en ningún libro en especial, yo sí recurro a un libro de Cálculo, y en Álgebra Lineal II.

3. ¿Cuáles han sido tus evaluaciones?

En la primera tuve 6.5 y la segunda no nos han dado la calificación. Pasaron muy pocos. En Álgebra Lineal II me ha ido bien con el método; saqué 7.5 en el primer parcial y 8.3 en el segundo.

#### ALUMNA 7

1. En este semestre 2004-I ¿utilizas un libro base como apoyo en tus nuevas materias?  
¿ Sigues el método que llevamos el semestre pasado de apoyarse directamente en el libro?

Sí.

2. ¿En qué materias?

En Álgebra Lineal II.

3. ¿Cuáles han sido tus evaluaciones?

En el primer examen obtuve 6 de calificación y en el segundo 6.5.

## conclusiones generales

*sólo triunfa en el mundo quien se levanta  
y busca a las circunstancias y las crea  
si no las encuentra.*

George Bernard Shaw

En México son muchas las corrientes teóricas existentes acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje, pero son pocos los intentos prácticos por probar técnicas que fortalezcan el aprendizaje de los alumnos.

En el salón de clase, los profesores pueden adoptar sólo dos procedimientos alternativos en su búsqueda de prácticas de enseñanza fructíferas: confiar en las prescripciones tradicionales presentes en el sistema educativo y en los ejemplos de sus propios maestros o colegas, o bien, pueden tratar de descubrir técnicas eficaces de enseñanza a través del ensayo y corrección continuos. Para este último caso se recomienda que los profesores generen el interés por la materia de estudio, inspiren el empeño por aprender, motiven a los alumnos y los ayuden a inducir aspiraciones realistas de logro educativo.

Los profesores deben decidir lo que es importante que los alumnos asimilen, averiguar qué es lo que están listos para aprender, conducir la enseñanza a un ritmo apropiado y decidir la magnitud y el nivel de dificultad propios de las tareas de aprendizaje.

Regresando al objetivo del presente estudio, plasmado en la Introducción, se puede afirmar que éste se alcanza cuando se logra que el alumno desde el principio se apoye en el libro para iniciar su proceso de independencia académica.

La gran ventaja que se observa al estar el estudiante en contacto directo con el libro en clase, es que libremente puede hojearlo, explorarlo tantas veces como le sea necesario, compararlo con otros libros, inclusive con sus mismas ideas, hipótesis, teorías y



demonstraciones, corregir posibles errores que pueda encontrar aumentando de esta manera no solo sus conocimientos, sino su madurez académica, su autoestima y su creatividad; adelantarse a consultar otros temas o al contrario, revisar conceptos anteriores que no hayan quedado claros. En el último de los casos puede poner atención a lo que se está revisando en clase; es decir, en pocas palabras, el alumno hace suyo el conocimiento.

Con esta técnica se pretende que los alumnos vinculen simultáneamente la teoría con la práctica, lográndose así un aprendizaje significativo siempre que sea posible; que reaccionen de inmediato para que de la misma manera lo hagan en exámenes y tareas y no perciban a la teoría separada de la práctica.

Cuando se empezaron a resolver problemas los alumnos no encontraban fácilmente la manera de expresar la solución: era una forma de pensar nueva para ellos que tenían que integrar a su forma de pensar anterior, dando como resultado la asimilación de significados nuevos y antiguos. El verdadero problema para el estudiante en este tema de espacios y subespacios vectoriales es el manejo del lenguaje matemático: les cuesta mucho trabajo traducir el planteamiento de un problema para después escribirlo en notación matemática.

Es interesante vivir esta experiencia sabiendo que alguien como Polya lo expone en su libro "Cómo plantear y resolver problemas", ya que nunca se había observado tan de cerca el problema de la traducción, es decir, que los alumnos no leen bien (¿o no entienden bien?). Polya identifica etapas fundamentales en el proceso de resolver problemas, y una de ellas, la primera, para ser más específicos, es precisamente la de entendimiento del problema. En esta fase se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones del mismo. Por ejemplo, ¿cuál es la información dada en él (datos)?, ¿cuál es la incógnita?, y ¿cuáles son las condiciones que relacionan los datos en el problema?, son algunas preguntas que merecen atención en la fase de entendimiento del problema.

En cuanto a las entrevistas a los alumnos hubo situaciones que no se esperaban, por ejemplo, que el alumno estuviera descubriendo que los libros tienen una secuencia y una estructura, que pueden estudiar en su casa con el libro, que este les enseña y que ellos pueden aprender de él, que lo que no entendieron en clase lo pueden entender repasando el libro, etc. Sin embargo resulta triste observar que el alumno de 2º semestre empiece a ver la importancia del manejo de un libro hasta entonces. A pesar de todo, a una buena parte de ellos se les creó el hábito de consultar continuamente un libro y a ser más independientes del maestro, y esto se espera que lo sigan practicando por el resto de su carrera.

Por otro lado, desde mi punto de vista, los temarios en general y en particular el de Álgebra Lineal, no están planeados para educar o para que el alumno aprenda, sino que están enfocados para que el maestro enseñe, a pesar de que “la facilitación del aprendizaje es tan sólo uno de los fines propios de la enseñanza. Aprender sigue siendo todavía la única medida factible del mérito de la enseñanza”. (Ausubel, pp.26). Es decir, a nivel educativo en general no hay preocupación por el aprendizaje de los alumnos .

Tal como lo establecí en la Introducción, es decir, decidir utilizar el tiempo que sea necesario para que los alumnos relacionen, maduren y asimilen el conocimiento indispensable, se reflejó en un mediano plazo y en un mayor y mejor aprendizaje de los alumnos, tal como se puede ver en el Cuadro de Resultados de la página 38. Estoy convencida de que es preferible dar un tiempo necesario y suficiente para la asimilación si hay la posibilidad de llegar a una mejor comprensión a cubrir un temario por cubrirlo y con la urgencia impuesta por terminar en el tiempo establecido sin reparar en el buen o mal aprendizaje de los alumnos. Además para mí es fundamental disfrutar lo que hago y pienso que en la medida en la que un profesor imparte su clase presionado o no, los alumnos responden mejor en este último caso (Wilson, 1987).

Con relación a las hipótesis, ambas influyeron de manera muy importante sobre los resultados de las evaluaciones finales en los exámenes parciales. Sin embargo, no se puede precisar cuál de las dos influyó más o tuvo más peso sobre el resultado final. Estoy convencida que se debió a los dos hechos en forma conjunta; ¿en qué porcentaje?. No lo puedo precisar. El estudio no contempla este punto, es decir, poder diferenciar cuál de las dos hipótesis aportó más al resultado. Lo que sí se puede estimar es el progreso logrado a partir de la diferencia entre el nuevo método donde se alcanzó un promedio final de 7.8 menos el promedio final de los nueve años de enseñanza tradicional, que fue de 6.86, lográndose una mejora de casi un punto porcentual (o del 9.5%).

De acuerdo con el Cuadro de Resultados de la página 38, la 8va. observación alcanzó su punto óptimo en 7.5 con el método tradicional, mientras que mi primera experiencia con la propuesta de enseñanza de Álgebra Lineal rebasa en 3 décimas el máximo rendimiento alcanzado después de muchos años de utilizar la técnica tradicional. De manera que se espera que en un par de años se pueda alcanzar con cierta facilidad el 8.8 de promedio de calificación final de alumnos aprobados. Lo verdaderamente difícil será alcanzar el escenario ideal de 9.8 de calificación final de alumnos aprobados en cuatro años más (año 2010).

Esta propuesta fomenta la independencia en los alumnos. De la entrevista se desprende que esta técnica ofrece otras posibilidades de acercarse al conocimiento, apoyándose en el libro, en los apuntes elaborados por los alumnos y en el uso del pizarrón. Aparte de

todo otro beneficio que trae este método es también un intento por despertarles el gusto por la lectura.

Por último, quisiera detenerme en las siguientes dos reflexiones:

“Si realmente se desea cambiar la forma en que las matemáticas son aprendidas, debe subrayarse y prestar especial atención a la forma en que son enseñadas”. (García, E. 2002, pp. 32).

Pero se concluye algo más: si realmente se desea cambiar la forma en que las matemáticas son enseñadas, debe prestarse especial atención a la forma en que son aprendidas (Larraza, 2004).

Sin embargo, cualquiera de los dos planteamientos anteriores, si se consideran seriamente, pueden contribuir significativamente en el avance de la actual educación que se imparte a los alumnos en cualquier nivel.

## BIBLIOGRAFÍA

- Ausubel, D.P., Novak, J.D., y Hanesian H. (1983). *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo*. 2ª edición. Editorial Trillas, México.
- Burgos, Juan. (1990). *Algebra Lineal*. Editorial Limusa. 2ª edición. México.
- Carver, Ch.S y Scheier, M.F. (1997). *Teorías de la personalidad*. 3ª edición. Prentice-Hall Hispanoamericana, México.
- Davidoff, L.L., (1980). *Introducción a la Psicología*. 2ª edición. Mc Graw-Hill de México, S.A. de C.V., México.
- Divas, E.J., & Cooney, T.J. (1977). *Identifying errors in solving certain linear equations*. MATYC Journal, II, 170-176.
- Dorier, J.L. (1998). *The role of formalism in the teaching of theory of vector spaces*. Linear Algebra and its Applications .Vol. 275-276, 141-160.
- Duncan, C.P. (1959). *Recent Research on human problem solving*. Psychological Bulletin, 56,397-429.
- Gagné, R.M. (1967). *Instruction and the conditions of learning*, en L. Siegel, *Instruction: Some contemporary viewpoints*, Chandler, San Francisco.
- García Santibáñez y Sánchez, E. (2002), *El profesor de matemáticas en secundaria. Formación y desempeño en el aula*, tesis de maestría, Programa de Posgrado, ENEP Acatlán, México.
- Good, T.L. y Brophy, J.E. (1983). *Psicología Educativa*. 2ª edición. Nueva Editorial Interamericana, S.A. de C.V., México.
- Grossman, Stanley. (1996). *Algebra Lineal* . 5ª edición. Mc Graw Hill. México.
- Guadarrama Méndez, J. (2000). *Estudio de la Interpretación Geométrica del concepto de solución en los sistemas de ecuaciones lineales*, tesis de maestría, Depto de Matemática Educativa del CINVESTAV del I.P.N. México.
- Harel, Guershon. (1989). *Learning and Teaching Linear Algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing Concepts and Processes* . Illinois: Northern Illinois University, Spring edition, Volume 11: Number 2.7.

- Henderson, K.B. (1967). *A comparison of three stratagems for teaching mathematical concepts and generalizations by guided discovery*. The Arithmetic Teacher, 14, 583-588.
- Howard, Anton. (1991). *Introducción al Álgebra Lineal*. 3ª edición. Editorial Limusa. México .
- Kieran, C. (1984). *A comparison between novice and more-expert algebra students on tasks dealing with the equivalence of equations*. Madison, Wisconsin: J.M. Moser, (pp. 83-91).
- Kim, M y Bingaman, S. ( 1987 ). *Actividades y decisiones educativas*. Research Ideas for the Classroom, High School Mathematics, compilado por Wilson, P.
- Mora B. (2001) . *Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*, tesis de maestría, Depto de Matemática Educativa del CINVESTAV del I.P.N., México.
- Morrisett, L. y Hovland, C.I. (1959). *A comparison of three kinds of training in human problem solving*, Journal of Experimental Psychology, 58, 52-55.
- Nickerson, R.S., Perkins, D.N., y Smith, E.E. (1985). *Enseñar a pensar: Aspectos de la aptitud intelectual*. Paidós, Barcelona, España.
- Ocáriz Castelazo. (2002). *Concepciones Espontáneas de Fuerza de Alumnos de Ingeniería*. México.
- Piaget, J. (1975). *Seis estudios de Psicología*. Ariel Seix Barral, S.A., Cía Editorial, México.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton : Princeton University Press.
- Rubenstein, M.F. (1975) *Patterns of problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Santos Trigo, L.M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Scott, P. (1991). *Introducción a la Investigación y Evaluación Educativa*. Lecturas en Educación Matemática No. 6. U.A.C.P.Y.P. , C.C.H., UNAM., México.

Sierpiska, A. (2000). On some aspects of student's thinking in linear algebra. Research on the teaching and learning of linear algebra conducted at the Concordia University by A. Sierpiska and J. Hillel. Montreal, Canada.

Steinberg et al. (1990). *Algebra Students' Knowledge of Equivalence of Equations*. Journal for Research in Mathematics Education, Vol 22. No.2, 112-121, University of Stanford, California.

Steinberg, R., & Sleeman, D. (1985). Procedural and conceptual knowledge in learning algebra. Unpublished manuscript. Stanford University, School of Education, California.

Woods, P. (1987). *La escuela por dentro*. Editorial Paidós, Barcelona, España.