UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL SURGIMIENTO DEL ESTADO. UN ENFOQUE DE TEORIA DE JUEGOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICA

PRESENTA:

ANA RAQUEL VANOYE CARLO

DIRECTORA DE TESIS:

M. EN C. MARIA DE LA PALOMA ZAPATA LILLO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

Universidad Nacional Autónoma de México

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Ana Raquel Vanoye Carlo
FECHA: 31/03/04
FIRMA:

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"El surgimiento del Estado.Un enfoque de Teoría de Juegos".

realizado por Ana Raquel Vanoye Carlo con número de cuenta 09850817-0

quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. María de la Paloma Zapata Lillo
Propietario	M. en C. Sergio Hernández Castañeda
Propietario	Act. Claudia Villegas Azcorra
Suplente	Mat. César Eduardo Sousa Mondragón
Suplente	Dra. Catherine García Reimbert

Consejo Departamental de Matemáticas

P.A.

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A Gustavo

Índice general

Prefacio

Este trabajo se basa en el artículo desarrollado por Akira Okada (Universidad de Kioto) y Kenichi Sakakibara (Universidad de Saitama): "The Emergence of the State: A Game Theoretic Approach to Theory of Social Contract", que expone como un estado democrático puede surgir como resultado de un contrato social y como (el estado) se desarrolla dentro de una sociedad que enfrenta el dilema del prisionero.

En el trabajo estudiamos las posibilidades de que un número significativo de miembros de la comunidad formen una organización para remontar la dispersión a la que los confronta el dilema del prisionero, asimismo nos interesa establecer los factores de los que depende la formación de esta organización y las condiciones necesarias para sostener dicha organización a lo largo del tiempo.

En general los argumentos económicos no son muy elaborados, preferentemente ofrecemos interpretaciones de las estructuras matemáticas que van surgiendo.

La exposición esta organizada de la siguiente manera: En la introducción presentamos brevemente las características del problema así como una descripción general del modelo del juego que utilizamos para tratar de solucionar el conflicto, en el capítulo uno explicamos los conceptos necesarios de la Teoría de Juegos para poder entender el modelo del juego, posteriormente en el capítulo dos explicamos los fundamentos económicos y el problema en el que la comunidad esta inmersa y describimos de manera formal y detallada el modelo del juego que año tras año realizan los individuos de la sociedad, ofrecemos también una breve explicación de la forma como resolveremos dicho modelo.

En el capítulo tres caracterizamos la solución no cooperativa del juego, mientras que en el capítulo cuatro desarrollamos el modelo descrito arriba en un ambiente dinámico lo que nos permite discutir la robustez del estado conforme el tiempo pasa utilizando un proceso de acumulación de capital.

Finalmente damos algunas conclusiones.

Introducción

En este trabajo exponemos la manera en que un estado surge como resultado de un contrato social, asimismo discutimos la forma (dinámica) como evoluciona una sociedad que cuenta con un bien público y cuyos individuos confrontan el dilema del prisionero.

Para alcanzar estos objetivos los individuos de la sociedad establecen un juego de arreglos institucionales, en el cual hay dos tipos de participantes: el primero en la forma de una entidad coercitiva que se encarga de cobrar impuestos y tiene poder de castigo y el segundo tipo representado por un conjunto de jugadores obligados a pagar impuestos.

A partir de esto obtenemos como resultados principales los siguientes dos incisos:

a) El estado surge con probabilidad positiva si y sólo si la productividad de la sociedad es menor a un cierto nivel que esta determinado por la población y por la productividad marginal del bien público que en este caso es un sistema de riego.

b) El estado desaparece cuando la productividad de la sociedad supera este nivel.

Presentación del problema

Un punto de vista tradicional atribuye el surgimiento del estado al resultado de un contrato social que las personas establecen. Hobbes consideraba que, a la construcción de este poder llegan los individuos a través de sus decisiones libres y no por una imposición externa:

"El único modo de erigir un poder común que pueda defenderlos (a cada uno de los individuos) de la invasión de los extraños y de injurias entre ellos mismos, dándoles la seguridad de que podrán alimentarse con el fruto de su trabajo y de esta manera llevar una vida satisfecha, es el de conferir todo su poder y toda su fuerza individuales a un sólo hombre o a una asamblea de hombres, que pueda reducir las voluntades de todos a una sola voluntad, es decir, nombrar a un individuo o a una asamblea de individuos para que representen a todos, y responsabilizarse cada uno como autor de todo aquello que haga o promueva esta representación en asuntos que afectan la paz y la seguridad comunes y consecuentemente someter sus voluntades a la voluntad de ese representante, y sus juicios respectivos a ese juicio".

Este trabajo considera la posibilidad del surgimiento del estado, dentro de una sociedad que confronta el dilema del prisionero, el cual consiste de un sistema de autoforzamiento que le permite a cada individuo mejorar el resultado que obtiene con el dilema del prisionero original en que se encuentra la sociedad.

En otras palabras lo que nos interesa determinar es el momento y la manera en que una entidad de forzamiento puede nacer y evolucionar como resultado de una decisión voluntaria de las personas de la sociedad con la finalidad de obtener un mejor resultado social, a pesar de que el establecimiento de este sistema provoque el surgimiento de clases.

En particular estudiamos un estado democrático en el sentido de que todas las reglas son decididas por personas que reciben el mismo trato independientemente de la voluntad de la fuerza coercitiva.

Características del modelo de Okada y Sakakibara

En primer lugar se trabaja con una línea de tiempo finita y discreta, en la que la unidad de tiempo es del tamaño de un año, y con los siguientes tres bienes: trabajo, arroz y un bien público en la forma de un sistema de irrigación llamado "dam".

El trabajo y el arroz son bienes perecederos, mientras que el sistema de irrigación no se deprecia. Además en la sociedad nacen un cierto número de individuos al principio de cada año y la misma cantidad muere al final de cada año.

Cada uno de los individuos con su trabajo puede producir arroz y "unidades" del sistema de irrigación (dam), entonces con lo anterior establecemos la siguiente relación: cada individuo invierte una unidad de arroz para la construcción del dam, esta unidad invertida genera una unidad de incremento en el nivel del sistema de riego. Asimismo cada unidad del sistema de riego retribuye β unidades adicionales de arroz a cada individuo, por lo tanto β representa la productividad marginal del sistema de riego, la cual en los primeros años, cuando el nivel del dam era relativamente pequeño, fue suficientemente grande, (mayor que la inversión) entonces cada individuo muy probablemente invertía arroz para la construcción de manera voluntaria, ya que la ganancia neta de su inversión era positiva.

Sin embargo, conforme pasa el tiempo, el crecimiento en el nivel del sistema de riego causa un decrecimiento de su productividad marginal y cuando esta productividad se vuelve menor que uno ($\beta < 1$) la inversión nunca vuelve a llevarse a cabo sin recurrir a un cierto tipo de mecanismo de forzamiento. Año con año para vencer esta situación social los individuos participan en el siguiente juego de convenios institucionales el cual es una versión modificada del modelo de Okada.

1. Cada individuo decide si participa, o no, en una organización cuyo objetivo es decidir los términos en los que se establece un sistema de forzamiento el cual se aplicará a cada uno de los miembros de la organización que se desvíen de los acuerdos establecidos dentro de la misma. La organización tiene como objetivo la construcción del sistema de riego de manera conjunta. Los que deciden no participar en la asamblea pueden cooperar en el esfuerzo común aunque no están obligados a ello, por lo que no serán castigados si no lo hacen.

2. Todos los participantes de la organización deciden quien entre ellos tomará el papel de la fuerza coercitiva. El trabajo de esta entidad es vigilar el cumplimiento de los acuerdos establecidos en el inciso anterior, y castigar cualquier incumplimiento. Asumimos que dicha entidad no dispone de tiempo para cultivar arroz para sí mismo; entonces los miembros de la asamblea formada en el paso anterior deciden la fracción de arroz que, de los recursos obtenidos por cooperación voluntaria, pagarán al forzador como salario, así como la cantidad de castigo que le será otorgada.

3. Todos los participantes en la asamblea excepto la fuerza coercitiva deciden las acciones cooperativas, es decir, deciden si contribuyen con su unidad de arroz para la inversión y de esta forma incrementar el nivel del sistema de riego.

4. Finalmente todos los individuos de la sociedad (tanto los que participan en la organización como los que no participan), excepto el forzador, deciden de manera independiente si contribuyen o no con una unidad de arroz para la construcción del sistema de riego.

Después de que el juego anterior finaliza el nivel del sistema de riego no necesariamente experimenta un incremento, pero al año siguiente este mismo juego es llevado a cabo por los individuos de una nueva generación a partir del nuevo o del viejo nivel del sistema de riego.

Este proceso se repite en cada uno de los puntos de la línea discreta de tiempo mencionada anteriormente.

El resultado principal de este trabajo es que la entidad coercitiva se establece con probabilidad positiva si y sólo si la productividad de la sociedad es más baja que un cierto nivel el cual esta determinado por la producción y el número de individuos que integran la sociedad. Si la productividad de la sociedad es mayor que el nivel anteriormente *mencionado,* entonces la entidad de forzamiento no se construye nunca. Esto sucede porque en este caso el salario del forzador debe ser suficientemente grande para compensar su costo de oportunidad, es decir, si la productividad de la sociedad es mayor que el nivel máximo permitido entonces la fracción del salario del forzador en el presupuesto total (formado por los recursos obtenidos de la cooperación voluntaria de los miembros de la comunidad) es muy grande, mientras que la fracción del presupuesto para inversión es muy pequeña, debido a esto los participantes en la construcción de la obra comunitaria no obtienen una ganancia neta cuando deciden establecer un sistema de forzamiento.

Algunas ideas sobre la acumulación y la robustez del estado

Los elementos mencionados más arriba implican que la acumulación de capital a través del sistema coercitivo converge a un rango que tiene límites superiores e inferiores. Es decir, si la productividad inicial de la sociedad es más pequeña que el rango mencionado anteriormente la entidad de forzamiento puede ser establecida y entonces el nivel del sistema de riego se incrementa a través de la fuerza coercitiva, consecuentemente la productividad de la sociedad se incrementa.

Pero una vez que la productividad marginal entra en el rango mencionado anteriormente el sistema de autoforzamiento jamás es vuelto a establecer. Esto implica que el desarrollo de una sociedad en la que se organiza democráticamente un sistema de forzamiento tiene su fin en un proceso de acumulación de capital.

Finalmente diremos que el rango al cual el nivel de capital converge es afectado cuando los dos parámetros: la productividad marginal β y la población de la sociedad n cambian. Un incremento en n siempre resulta en un incremento en la productividad de la sociedad a largo plazo. Sin embargo un incremento en β no siempre implica un incremento en la productividad de la sociedad en el largo plazo.

Capítulo 1

Definiciones y resultados básicos de la Teoría de Juegos No Cooperativos

En este capítulo recordamos las definiciones básicas de la Teoría de Juegos No Cooperativos y enunciamos, sin demostrar algunos resultados importantes de esta Teoría que nos servirán para el estudio de la problemática planteada en la Introducción.

1.1. Juegos rectangulares.

Definición 1.1.1 (de juego rectangular). Un juego rectangular consta de un conjunto N, de un conjunto D_j para cada $j \in N$ y de una función $\varphi\colon D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_N \to R^n$.

A N le llamamos el conjunto de jugadores, a D_j el conjunto de estrategias puras del jugador j y a φ la función de pago. A los elementos de $D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_N$ se les llama *perfiles de estrategias puras.*

Definición 1.1.2 (de juegos rectangulares finitos e infinitos). Si N y los conjuntos D_j son finitos se dice que el juego es finito, de lo contrario el juego es infinito.

Definición 1.1.3 (de equilibrios de Nash en estrategias puras). Decimos que s^* en D es un equilibrio de Nash en estrategias puras (ep) si para toda j en N se cumple la siguiente propiedad $\varphi_j(s^*) \geq \varphi_j(s^*|s^j)$ para toda s^j que esta en D_j.

Ejemplo 1.1.4. A continuación explicamos brevemente el problema que exponemos en este trabajo.

En la introducción de este trabajo brevemente explicamos el problema de una comunidad campesina y esbozamos el modelo del juego que la comunidad lleva a cabo con la finalidad de darle una solución a este problema. Abordamos de manera detallada el mismo problema en el capítulo dos de este mismo trabajo, en donde proponemos un juego de cinco etapas en el cual, la primera etapa consiste en la integración de una organización por parte de una sociedad de individuos la cual tiene como objetivo implementar medidas que permitan a la sociedad superar el problema, en la segunda etapa los miembros de la organización definen como medio para lograr la solución de su problema la existencia de una fuerza coercitiva que los obligue a no desviarse del acuerdo, decidiendo la cantidad de recursos necesarios para mantenerla, así como la cantidad de castigo que los miembros de la asamblea necesitan para no desviarse de los acuerdos establecidos mientras que, en la etapa tres los miembros de la organización definen la forma de esta entidad de forzamiento, y en la etapa cuatro cada uno de los individuos de la organización ratifica los acuerdos establecidos en las dos etapas anteriores, por último en la etapa cinco cada uno de los miembros integrantes de la asamblea más otros miembros de la sociedad llevarán a cabo los acuerdos establecidos para lograr el mejor uso de los recursos de la comunidad.

Los integrantes de la asamblea serán nuestro conjunto de jugadores N, los conjuntos de estrategias puras disponibles (D) para cada uno de ellos dependen de la etapa del juego en que nos encontremos, en la etapa uno las estrategias puras disponibles son formar parte de la organización (1 participar) o no formar parte de la organización (0 no participar), es decir $\mathcal{D} = \{0, 1\}$, mientras que el conjunto de estrategias puras disponibles en la etapa dos del juego es más amplio: en realidad consta de infinitas estrategias, cada una de ellas compuesta por dos números θ la cantidad de recursos necesarios para mantener un poder de forzamiento y p la cantidad de castigo necesaria para no desviarse de los acuerdos, es decir $\mathcal{D} = \{(\theta_1, p_1), (\theta_2, p_2), \dots\}$. En la etapa tres el subconjunto de estrategias puras para cada uno de los jugadores se reducen a dos elementos: si el campesino quiere formar parte de la entidad de forzamiento (A) o si no quiere hacerlo (NA), es decir $\mathcal{D} = \{A, NA\}$ de la misma forma en la etapa cuatro podemos identificar un subconjunto de estrategias que tiene dos alternativas: la primera de ellas es ratificar los acuerdos establecidos en las dos etapas anteriores (F firmar) o no ratificar dichos acuerdos (NF no firmar), entonces el subconjunto esta definido como $\mathcal{D} = \{F, NF\}$ por último la etapa cinco del juego vuelve a tener subconjuntos de estrategias de tamaño dos para los jugadores, en el caso de que decidan apegarse a los acuerdos establecidos jugarán con la acción (C) cooperar y si no lo hacen estarán usando la acción del juego (D) desertar, por lo tanto $\mathcal{D} = \{C, D\}$. La unión de cada uno de los subconjuntos $\mathcal{D}$ forma el conjunto de estrategias D_i disponibles para el jugador i que esta contenido en el conjunto de estrategias D.

Una vez que hemos establecido la estructura del juego podemos decir que cada uno de los miembros de la sociedad puede jugar de varias maneras, la primera formando parte de la organización, cooperando en el establecimiento de los acuerdos, ratificando los acuerdos y finalmente cumpliendo con estos acuerdos, una segunda manera de comportamiento es no formar parte de la organización, y por lo tanto no formar parte en el establecimiento y ratificación de los acuerdos, sin embargo, observar el cumplimiento de los acuerdos alcanzados y cooperar en la etapa correspondiente, otra forma de participar en el juego es abstenerse desde participar en la organización, hasta cooperar para mejorar el bienestar de la comunidad. Una última forma de participación cuyas consecuencias serán explicadas más adelante es cuando un individuo con su manera de participar logra impedir que el juego pase a la siguiente etapa.

A cada una de estas formas de participar se le asocia una función φ que determina el pago correspondiente para cada uno de los jugadores, intuitivamente podemos observar que estos pagos son diferentes, unos son mejores que otros, en realidad estamos interesados en las formas de participación (estrategias de juego) que tienen asociado un pago que nos da el máximo beneficio, estas estrategias de juego las llamaremos equilibrios de Nash, brevemente diremos que es mejor seguir una estrategia de participación y cooperación a tener una estrategia cuyo resultado no nos lleve a la formación de una asamblea, al establecimiento de acuerdos y a la cooperación.

Una vez que hemos presentado el modelo de Teoría de Juegos podemos ejemplificar la definición de equilibrio de Nash en estrategias puras, utilizamos la etapa dos del modelo, en ella participan los jugadores de la asamblea, lo que corresponde definir en esta etapa es la cantidad de castigo que recibirá cada jugador que se desvíe de los acuerdos y el costo de sostener una fuerza coercitiva, entonces el conjunto de estrategias puras de cada jugador tiene infinitos elementos, ya que se pueden proponer diferentes parejas de números para determinar el castigo y el costo, aunque después la asamblea deberá llegar a un acuerdo y proponer un único número p como el castigo, y un único número θ como el costo, a continuación definimos los pagos correspondientes a esta etapa, supongamos que los jugadores llegaron a un acuerdo y tienen un parámetro p como castigo y un parámetro θ como costo, y logran establecer una entidad de forzamiento, además de que cada uno de los miembros de la asamblea firma los acuerdos y la cooperación es significativa entonces el pago correspondiente a este escenario es, si el jugador forma parte de la asamblea $\gamma/s + \{\beta(s-1-\gamma)+\gamma-1\}(s-1)/s$ (en el capítulo tres lo explicaremos con detalle) y si no forma parte de la asamblea $\beta(s-1-\gamma)+\gamma$, en cambio si los individuos no logran ponerse de acuerdo en la cantidad de castigo y en el costo del sistema de forzamiento, o no logran definir dicho sistema, o bien alguno de ellos no firma los acuerdos previamente establecidos o la cooperación es muy pequeña entonces el pago para todos los miembros de la comunidad es γ (en el capítulo dos explicamos con detalle esta conclusión) Cualquiera de los dos primeros pagos es un pago mejor que γ en general, en el capítulo tres mostramos que ambos son equilibrios de Nash, para diferentes jugadores.

A continuación presentamos algunos otros ejemplos:

Ejemplo 1.1.5 (Un juego simétrico con equilibrios de Nash en estrategias puras simétricas con distintos pagos para los jugadores). Dos países petroleros tienen dos posibles políticas a seguir: la primera de ellas es ponerse de acuerdo para reducir su plataforma petrolera (R) o la segunda mantener una alta producción (NR). Si los dos deciden reducir la cantidad de petróleo que producen, entonces los precios del hidrocarburo subirán, beneficiándolos a ambos, si por el contrario los dos permanecen con la misma producción, seguira la tendencia a la baja de los precios pero también puede ocurrir que uno de ellos reduzca su producción y el otro no, entonces los precios se estancarán y el que no ha bajado su nivel de producción tendra mayores beneficios. En la siguiente matriz se tienen los pagos para cada uno de los jugadores: Los equilibrios de Nash en estrategias puras

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{R} & \mathrm{NR} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{R} \\ \mathrm{NR} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,2) & (-2,1) \\ (1,-2) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

son (R,R) y (NR,NR). El primer equilibrio les da una mayor ganancia, pero existe el riesgo para ambos de obtener un pago inconveniente.

Ejemplo 1.1.6 (Un juego simétrico con equilibrios no simétricos). En la literatura de teoría de juegos aparece frecuentemente un ejemplo al que llaman batalla de los sexos, un matrimonio donde a la mujer le gusta el ballet y al hombre el boxeo, debido a esto tienen el conflicto de si irán al ballet o al boxeo. Podemos construir otra version del conflicto de pareja, en donde el hombre tiene dos esquemas (estrategias) de conducta, una autoritaria (A) y la otra comprensiva (C), la mujer por su parte podría escoger entre un comportamiento dócil y abnegado (D) o un comportamiento rebelde (R). Si estamos ante un hombre autoritario (A) y una mujer rebelde (R), los dos resultarán dañados, si ella es dócil (D) y él autoritario (A), él impondrá sus decisiones y ella evitará problemas, pero si él es comprensivo (C) y ella es rebelde (R), él cederá en cada enfrentamiento y ella hará lo que le convenga, pero si ella es dócil (D) y él compresivo (C) nadie saldrá lastimado.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} R & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} (-10,-10) & (1,0) \\ (0,1) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

En este caso los equilibrios de Nash en estrategias puras son (A, D) y (C, R). A cada uno de los jugadores le conviene uno de los equilibrios y no existen equilibrios en estrategias puras que sean simétricos.

Ejemplo 1.1.7 (Un juego no simétrico con equilibrio en estrategias puras). En febrero de 1943, el general George Churchill Kenney tuvo que enfrentarse al siguiente problema. Los japoneses estabán tratando de reforzar su ejercito en Nueva Guinea y para ello tenían que decidirse por transportar sus fuerzas por dos rutas alternativas. Podía navegar o bien al norte (N) de Nueva Guinea, donde el tiempo era lluvioso, o por el sur de la misma en el que el tiempo era generalmente bueno. En ambos casos el viaje duraba tres días. El general Kenney tenía que decidir donde debía concentrar el grueso de sus aviones de reconocimiento. Los japoneses por su parte deseaban que su flota estuviese expuesta el menor tiempo posible al bombardeo de sus enemigos. El general Kenney por supuesto deseaba lo contrario. A continuación presentamos la matriz de pagos

Las Letras N y S significan concentrar el grueso de los aviones o barcos en el norte o en el sur. El único equilibrio de Nash en este ejemplo es la pareja (Norte, Norte) y no es un equilibrio estricto.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Japoneses} \\ & & \begin{array}{cc}\text{N} & \text{S}\end{array} \\ \text{Aliados} & \begin{array}{c}\text{N}\\ \text{S}\end{array} & \begin{pmatrix} (2,2) & (-2,1) \\ (1,-2) & (0,0)\end{pmatrix}\end{array}$$

Ejemplo 1.1.8 (Un juego simétrico sin equilibrio en estrategias puras). Dos amigos quieren decidir a quien le toca ir a comprar los cigarros, uno saca una moneda y la coloca sobre la mesa cubriéndola con la mano, le pide a su compañero que adivine cuál es la posición en que la puso, si es descubierto tendrá que ir él mismo pero si no, le tocará al segundo amigo. La matriz de pago es:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{A} & \text{S}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{A}\\ \text{S}\end{array} & \begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1)\end{pmatrix}\end{array}$$

Este juego no tiene equilibrios de Nash.

Definición 1.1.9 (de estrategias mixtas). Dado el juego $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$, decimos que y que pertenece a R^{l_j} es una estrategia mixta del jugador j si para toda s^j que pertenece a D_j y $y_{s^j} \geq 0$ se tiene el siguiente resultado $\sum_{s^j\in D_j} y_{s^j} = 1$. En donde l_j denota el número de estrategias del jugador j.

La letra M_j denotará al conjunto de estrategias mixtas del jugador j y la letra M al producto cartesiano de los conjuntos M_j. A cada elemento de M le llamaremos un perfil de estrategias mixtas.

Ejemplo 1.1.10. En el problema que hemos utilizado, en las últimas cuatro etapas hay estrategias mixtas particulares ya que la distribución de probabilidades que tenemos asigna probabilidad uno a una de las acciones del jugador y cero a las demás, por ejemplo en la etapa tres en la que se decide quien entre los participantes de la asamblea desempeñara el papel de la entidad de forzamiento cada uno de los jugadores dará su respuesta (A aceptar, NA no aceptar) dependiendo de algunas condiciones: por ejemplo si el salario que va a recibir es muy pequeño entonces seguramente la estrategia "no aceptar" tendrá probabilidad uno y la estrategia "aceptar" tendrá probabilidad cero. En la etapa cuatro, en la que se ratifican las decisiones tomadas en las etapas anteriores, es decir, se ratifica la cantidad de castigo, el costo (salario) de la entidad coercitiva y quien desempeña este papel, la estrategia seguida por cada uno de los jugadores depende de si están o no de acuerdo con los tres parámetros anteriores, si un jugador esta de acuerdo con ellos entonces la estrategia "firmar" tiene probabilidad uno, mientras que la estrategia "no firmar" tiene probabilidad cero, y viceversa si no esta de acuerdo con la persona que será el forzador, por ejemplo, entonces la estrategia "no firmar" es la que tiene probabilidad uno.

En la etapa uno necesitamos, para encontrar la solución, de estrategias mixtas que no tienen la particularidad que señalamos en el párrafo anterior, es decir, dado que la etapa uno de este modelo no tiene soluciones en estrategias puras es necesario darle una cierta probabilidad a la estrategia "cooperar" mayor a cero y menor a uno y asignarle a la estrategia "desertar" el complemento de esta probabilidad.

Utilizando una estrategia mixta se llega a un resultado en donde es posible formar una asamblea.

Podemos considerar que $D_j \subset M_j$, en un sentido amplio, considerando que la estrategia s^j es la estrategia mixta $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, donde el 1 corresponde a la probabilidad asignada a s^j. Es decir, el conjunto de estrategias puras esta contenido en el conjunto de estrategias mixtas.

Definición 1.1.11 (de pago esperado o función de esperanza de pago). La función $E\colon M \to R^n$, definida como $E(y) = \sum\limits_{s \in D} y^1_{s^1} y^2_{s^2} \dots y^n_{s^n} \varphi(s)$ se llama la función de pago esperado o la función de esperanza de pago.

En el contexto de las estrategias puras, si s es el perfil de estrategias puras $(s^1, s^2, \dots, s^j, \dots, s^n)$, denotaremos como $s \Big| \widehat{s^j}$ a $(s^1, s^2, \dots, \widehat{s^j}, \dots, s^n)$.

Análogamente en el contexto de las estrategias mixtas, si y es el perfil de estrategias mixtas, $(y^1, y^2, \dots, y^j, \dots, y^n)$, denotaremos como $y \Big| \widehat{y^j}$ a $(y^1, y^2, \dots, \widehat{y^j}, \dots, y^n)$.

Definición 1.1.12 (de equilibrio de Nash en estrategias mixtas). La estrategia y^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas (em) si para toda j en N se tiene lo siguiente

$$E_j(y^*) \geq E_j(y^* | y^j) \; \forall \, y^j \in M_j.$$

Ejemplo 1.1.13. Retomamos el ejemplo (1.1.4) de este capítulo y recordamos los pagos obtenidos al finalizar el juego de arreglos institucionales: $\gamma/s+\{\beta(s-1-\gamma)+\gamma-1\}(s-1)/s$ si el jugador forma parte de la asamblea y coopera y $\beta(s-1-\gamma)+\gamma$ si no forma parte de la asamblea y no coopera, en el capítulo tres explicaremos en detalle las siguientes afirmaciones cada uno de los pagos obtenidos en el juego independientemente del grupo al que pertenezca el jugador los obtenemos de la siguiente manera: en las etapas cinco, cuatro, tres y dos utilizamos estrategias puras mientras que en la etapa uno utilizamos una estrategia mixta que asigna la probabilidad π^* a cada miembro de la sociedad de participar en la asamblea y la probabilidad $1-\pi^*$ de no participar.

Para los juegos que ya tenían equilibrio de Nash en estrategias puras la situación no se alterará con el nuevo equilibrio de Nash, el de estrategias mixtas, como establece la siguiente proposición.

Proposición 1.1.14. *Si s^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras del juego, el perfil de vectores estandar correspondientes a s^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

Teorema 1.1.15 (de existencia de equilibrio de Nash (em) para juegos finitos). *Para todo juego regular finito existe al menos un punto de equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

Definición 1.1.16 (de juego simétrico). Los juegos simétricos son aquellos en los que los jugadores pueden cambiar sus papeles unos por otros.

Los ejemplos (1.1.5) y (1.1.6) ilustran este concepto.

Definición 1.1.17 (de equilibrio de Nash simétrico). Un equilibrio de Nash es simétrico si cada uno de los jugadores utiliza la misma estrategia de juego y por lo tanto obtienen el mismo pago.

Todos los equilibrios que usamos en el juego de la comunidad campesina, son simétricos (los jugadores se comportan de la misma manera).

Definición 1.1.18 (de equilibrio no dominado). Un equilibrio σ^* de un juego es no dominado con respecto de cualquier otro equilibrio σ del mismo juego si se tiene la siguiente relación $\varphi(\sigma^*) \geq \varphi(\sigma)$ es decir, el pago asociado a σ^* es mayor o igual que el pago asociado a cualquier otra estrategia.

Ejemplo 1.1.19. En el problema de la comunidad campesina consideramos estrategias de juego simétricas, sin embargo, existen algunos casos en los que obtenemos dos estrategias de juego simétricas que son equilibrios de Nash, debido a esto utilizamos la definición anterior y tomamos como equilibrio de la etapa correspondiente a la estrategia que tiene un pago mayor. Esto sucede en la etapa cuatro donde los individuos deciden ratificar los acuerdos cooperativos. Tanto la estrategia "firmar" como la estrategia "no firmar" seguida por todos los integrantes de la comunidad es un equilibrio de Nash, sin embargo, escogemos como el único equilibrio de Nash en la etapa cuatro a la estrategia "firmar" ya que asigna un pago mayor a cada uno de los participantes.

El ejemplo (1.1.5) de este capítulo tiene dos equilibrios de Nash simétricos (R, R) y (NR, NR), sin embargo, (NR, NR) esta dominado por (R, R) ya que este último tiene un pago mayor.

1.2. Algunas definiciones de gráficas.

Los juegos Extensivos se definen en términos de algunos conceptos de Teoría de Gráficas que introducimos en esta sección.

Definición 1.2.1 (de gráfica). Una *gráfica* es una pareja de conjuntos (V, A), donde $A \subseteq \{\{x, z\} \mid x \text{ y } z \text{ están en } V\}$.

A los elementos del conjunto V se les llama *vértices o nodos* y a los del conjunto A *aristas.*

Definición 1.2.2 (de trayectoria). Una *trayectoria* es una sucesión de vértices $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots\}$ tales que x_i, x_j son distintos, si $i \neq j$ y $\{x_i, x_{i+1}\}$ está en A, para toda i.

Si $l = \{y = x_1, x_2, \ldots, x_m = z\}$ es una trayectoria finita, decimos que l es la trayectoria que une a y con z.

Definición 1.2.3 (de gráfica conexa). (V, A) es una *gráfica conexa* si para cada pareja de vértices x_i, x_j existe una trayectoria que los une.

Definición 1.2.4 (de gráfica conexa y sin ciclos). Decimos que la gráfica conexa (V, A) no tiene ciclos si para cada pareja de vértices x_i, x_j la trayectoria que los une es única.

Una gráfica conexa sin ciclos se le conoce como árbol. El árbol es finito si tiene un número finito de vértices y por lo tanto de aristas.

Definición 1.2.5 (de árbol con raíz). Una pareja (Γ, U) es un *árbol con ráíz* si Γ es un árbol y U es un vértice del árbol.

Definición 1.2.6 (de un orden parcial entre los vértices de un árbol con raíz). Decimos que en el árbol con raíz (Γ, U) el vértice x es menor que el vértice y, $(x \leq y)$ si x está en la trayectoria que une a U con y. Además $x < y$ si $x \leq y$, pero $x \neq y$.

El vértice x es menor que el vértice y $(x < y)$ si $x \leq y$ pero x es diferente a y.

Definición 1.2.7 (de alternativa). El vértice z es una alternativa del vértice x si se tiene la relación $x < z$ y además la pareja $\{x, z\}$ está en el conjunto de aristas del árbol.

Definición 1.2.8 (de vértice final). El vértice x es un vértice final si no tiene alternativas.

1.3. Los juegos extensivos

Ahora ya estamos preparados para la definición de juego extensivo.

Definición 1.3.1 (de Juego Extensivo). Un juego extensivo n-personal consta de:

a) Un conjunto N de jugadores.

b) Un árbol con raíz (Γ, U), tal que en cada vértice x, el conjunto $\mathrm{Alt}(x)$ tiene más de un elemento, o bien es vacío.

c) Una partición de los vértices no finales en una colección de subconjuntos, de tal manera que existe una biyección entre dicha colección de subconjuntos y el conjunto $N \cup \{0\}$, el conjunto S_j es el conjunto de vértices del jugador j en N, y S_0 es el conjunto de jugadas de azar.

d) Para cada vértice x de S_0 tenemos una distribución de probabilidad positiva $P(|x)$ entre los vértices del conjunto $\mathrm{Alt}(x)$.

e) Para $j \neq 0$ una partición de S_j en una colección de subconjuntos $\{S_i^j\}_{i \in K_\varphi}$ tal que dicha partición cumple con las siguientes dos propiedades:

e_1) Para cada S_i^j, existe I_i^j y una función $\varepsilon\colon \mathrm{Alt}(x) \to I_i^j$ biunívoca para toda x en S_j y además,

e_2) Si x y z están en S_i^j, entonces x no es mayor que z y z no es mayor que x.

f) Una función de pago $\varphi\colon T \to R^N$. Donde T es el conjunto de vértices finales.

Ejemplo 1.3.2. Brevemente en la introducción se establece el problema de una comunidad campesina y el modelo del juego que los ayuda a vencer su situación social actual, este problema se expone detalladamente en el capítulo dos de este trabajo, así como el modelo sugerido en la introducción, en este mismo capítulo concluimos que la representación del modelo del juego se puede hacer recurriendo a la definición de juego extensivo (ver figura 2.7).

A continuación explicamos como cada uno de los elementos de la definición anterior aparecen en el problema que estamos trabajando. Los miembros de la comunidad campesina pueden ser identificados como los N jugadores de nuestra definición, además hay un único vértice cuya etiqueta es el número "1" que representa la raíz del árbol, dicho vértice tiene un par de aristas que representan las alternativas del jugador uno, en este caso las alternativas para el jugador son C (cooperar) y D (desertar). De la misma forma cada uno de los vértices (excepto los finales) presenta este conjunto de alternativas.

El tercer inciso de la definición nos pide identificar los conjuntos de información en nuestro árbol de juego, la raíz del árbol (el vértice) constituye el primer conjunto de información del jugador uno, que puede escoger una de sus dos alternativas, sin embargo dado que todos los jugadores eligen al mismo tiempo el siguiente jugador, el número dos, no puede saber cual ha sido la estrategia elegida del jugador uno, es decir, no sabe si éste eligió participar o desertar, debido a este hecho el árbol presenta al jugador dos colocando un vértice al final de cada una de las dos aristas del jugador uno, ambos vértices, etiquetados con el número 2 están dentro de un área punteada y constituyen el primer conjunto de información del jugador 2, y así sucesivamente para cada uno de los N jugadores.

Como el juego incluye la elección de una entidad de forzamiento, según la introducción, a través de un juego de lotería, tenemos que el jugador cero, el azar, esta presente en la tercera etapa del juego, entonces decimos que el vértice etiquetado con el número 0 pertenece al conjunto de información S_0 además tenemos una distribución de probabilidad positiva que asigna a cada una de las aristas la probabilidad $1/s$, más adelante explicaremos con detalle como obtener estas distribuciones de probabilidad.

El juego con el que trabajamos en la tesis es infinito, pero sin trayectorias infinitas, además todos sus vértices de azar tienen un número finito de elementos, esto hace que la teoría de la probabilidad que necesitamos sea sumamente sencilla.

Cada uno de los jugadores escoge solamente una acción y el conjunto de estas acciones forman la estrategia de juego que sigue cada uno de los jugadores, al final estas estrategias tienen asociadas un unico pago como el inciso f de la definición lo indica.

Definición 1.3.3 (de juego de información perfecta). Un juego extensivo Γ es de información perfecta si para cada jugador todos sus conjuntos de información constan de un sólo elemento.

Definición 1.3.4 (de estrategia de un jugador en un juego extensivo). Sea un juego extensivo Γ, una estrategia s^j para el jugador j en Γ es una función que a cada conjunto de información de j, S_i^j, le asocia un elemento del conjunto de índices I_i^j.

Denotemos como Σ^j al conjunto de estrategias del jugador j en Γ, y definimos $\Sigma = \Sigma^1 \times \Sigma^2 \times \cdots \times \Sigma^n$. Los elementos de Σ se llaman perfiles de estrategias de Γ.

Ejemplo 1.3.5. Para ejemplificar el concepto anterior utilizamos el juego presentado en la introducción de este trabajo y describimos la estrategia de un jugador cualquiera, en la primera etapa de este juego el campesino de la comunidad debe decidir si forma parte de una organización que tratará de llevar a cabo algunas acciones colectivas con el objetivo de mejorar la situación social de todos los individuos de la sociedad, o no forma parte de dicha organización. Si desea formar parte de la organización deberá elegir la acción "cooperar" en cambio si no esta interesado en formar parte de ésta debera elegir la acción "desertar". Supongamos por un momento que el campesino se inclina por mejorar la situación social de su comunidad y debido a esto elige la acción cooperar, entonces en este caso, el conjunto de información consta de un sólo elemento que es el jugador mismo, mientras que el conjunto de índices correspondiente a este conjunto de información (las estrategias) tiene dos elementos cooperar y desertar, la elección hecha por el jugador que en este caso es cooperar es la estrategia que sigue dicho jugador en la primera etapa del juego.

Analizamos ahora la situación que plantea el juego para el mismo jugador en la etapa dos, en dicha etapa cada uno de los participantes en la organización debe elegir (proponer) dos números no negativos, que anteriormente explicamos su significado, dado que el jugador de nuestro ejemplo participa en la organización entonces tiene que proponer dos números positivos, es importante decir que esto implica opciones infinitas, entonces decimos que en este caso el conjunto de estrategias es infinito, por lo tanto el conjunto de índices (alternativas) también lo es, sin embargo, los números que finalmente el jugador proponga será la estrategia con la que resuelva la etapa dos del juego de la comunidad.

De esta manera el jugador avanza en cada una de las etapas propuestas por el juego, al final la estrategia con la que resuelve la etapa uno, junto con la estrategia que resuelve la etapa dos, y así sucesivamente hasta la estrategia con la que resuelve la última etapa del juego constituyen el perfil de estrategias del jugador de nuestro ejemplo.

En el caso de los juegos rectangulares, nuestro concepto de solución es el de equilibrio de Nash en estrategias mixtas, ¿Cuál es el concepto de solución de un juego extensivo Γ? De nuevo será la de equilibrio de Nash en estrategias mixtas, pero de un juego rectangular asociado a Γ, su forma normal. Explicaremos un poco más adelante como se encuentra ese juego rectangular. Antes veamos algunos conceptos relativos a la descomposición de un juego en subjuegos, lo que nos permitirá seleccionar, entre los equibrios de Nash, a los más adecuados y los más sencillos de calcular. Por ello el juego de la comunidad que estudiaremos se divide en etapas que se estudian, cada una, separadamente, encontrándoles solución, para después integrar una solución global.

Proposición 1.3.6. *En un juego extensivo sin azar Γ, sin trayectorias infinitas, un perfil de estrategias de Γ determina un único vértice final.*

Proposición 1.3.7. *Dado un juego extensivo finito Γ y s un perfil de estrategias de Γ, queda determinada una distribución de probabilidad entre los vértices finales de Γ. La probabilidad del vértice final determinado por el perfil s, se denota como $P(A|s)$.*

Definición 1.3.8 (de juego que se descompone en el vértice x). Decimos que el juego Γ se descompone en el vértice no final x si para todo vértice y con la propiedad $y \geq x$ y además $y \in S_i^j$ se tiene que si existe algún $z \in S_i^j$ entonces este vértice también cumple con ser mayor que x es decir $z \geq x$.

Observemos que si un juego extensivo puede cortarse en un vértice x, además de tener la característica de ser un vértice no final del árbol, tiene que ser el único elemento que hay en el conjunto de información al que pertenece.

Ejemplo 1.3.9. El juego extensivo que representa el problema de la comunidad campesina se corta en *un número infinito de* vértices, cada vez que cambiemos de una etapa a otra, el juego extensivo Γ puede cortarse en el vértice inicial de esta y a partir de dicho vértice resolver el juego.

Definición 1.3.10 (de un subjuego que comienza en un vértice x). Un juego tiene esta característica cuando se cumplen los siguientes tres incisos:

a) $\Gamma_x = (V_x, A_x)$, con vértices definidos por el conjunto $V_x = \{y \in V | y \geq x\}$ y con aristas $A_x = \{\{y, z\} \in A | y, z \in V_x\}$

b) $S_{x_0} = \{y \in V_x | y \in S_0\}$ y si $y \in S_{x_0}$ y $z \in Alt(y)$, entonces $P_x(z|y) = P(z|y)$ para $j \in N$, se tiene $S_{x_j} = \{y \in V_x | y \in S_j\}$ y además $S^j_{x_i} = \{S^j_1, S^j_2, \ldots, S^j_l\}$.

c) La función de pago es igual a $\Pi_x = \Pi | T_x$, donde $T_x = \{F \in T | F \geq x\}$

Como mencionamos anteriormente el juego extensivo que representa el problema de la comunidad campesina se corta en *un número infinito de* vértices, y de este modo, *tiene infinitos subjuegos los que podemos clasificar en* cinco *tipos* de subjuegos que *pueden estudiarse* de manera separada.

Ejemplo 1.3.11. Presentamos un subjuego del juego de la comunidad que comienza *en cualesquiera de los infinitos vértices de azar del juego.* Este subjuego comienza en un vértice x etiquetado con el jugador 0, el azar, sin tomar en cuenta las dos etapas previas, y a partir de este jugador 0 que asigna a cada jugador la probabilidad $1/s$ de trabajar como la entidad de forzamiento, cada uno de los jugadores que están dentro de la asamblea utiliza su acción de juego "aceptar" si decide jugar el papel de la fuerza coercitiva, es decir, si decide encargarse de vigilar que todos cooperen con su unidad de arroz (siempre y cuando esten en la asamblea) o "no aceptar" si en realidad no le interesa desempeñar este papel. Las diversas etapas cuatro y cinco del juego extensivo que continuan a la etapa del forzador que empieza en x también forman parte del subjuego Γ_x. (ver figura 2.3).

Definición 1.3.12 (de juego podado). Si Γ se descompone en x y d es un vector en R^n, entonces $\Gamma_{|x(d)}$ el juego podado en x con vector de pago d es el juego extensivo cuyo árbol con raíz es $(\Gamma_{|x}, U)$, y donde se tiene lo siguiente:

a) $\Gamma_{|x} = (V_{|x}, A_{|x})$, con $V_{|x} = (V - V_x) \cup \{x\}$, y con aristas $A_x = \{\{y, z\} \in A | y, z \in V_{|x}\}$

b) $S_{|x_0} = \{z \in S_0 | z \in V_x\}$ y $y \in S_{|x_0}$ y $z \in \mathrm{Alt}(y)$, entonces $P_{|x}(z|y) = P(z|y)$ para $j \in N$, se tiene $S_{|x_j} = \{z \in S_j | z \in V_x\}$ y además $S^j_{|x_i} = \{S^j_1, S^j_2, \ldots, S^j_l\}$.

c) La función de pago es igual a $\Pi_{|x}(z) = \Pi(z)\ \forall z \in T_{|x} - \{x\}$, donde $T_{|x} = T \cap V_x$ y $\Pi_{|x}(X) = d$.

Ejemplo 1.3.13. Utilizamos de nuevo la definición (1.3.10) y decimos que cuando cortamos el juego extensivo que representa el problema de la comunidad campesina en el vértice etiquetado con el jugador cero definimos dos juegos: El que comienza en el vértice 0 que describimos en el ejemplo anterior, pero también define *casi* un juego extensivo compuesto por *el resto del juego, las etapas uno y dos, después de eliminar* Γ_x y volver a añadir x. Dicho *casi* juego recibe el nombre de juego podado en x: $\Gamma_{|x}$. *Hace falta asociar un pago a x para que sea un juego extensivo en el sentido de la definición.*

Definición 1.3.14 (de restricción de una estrategia de un jugador en un juego extensivo). Sea un juego Γ que se descompone en el vértice x y s^j una estrategia para un jugador j en Γ. La restricción de s^j a los conjuntos de información de Γ_x se llama la restricción de s^j al subjuego Γ_x. La restricción de s^j a los conjuntos de información de $\Gamma_{|x}$ se llama la restricción de s^j al juego podado $\Gamma_{|x}$.

Denotaremos s^j_x a la restricción de s^j a Γ_x y $s^j_{|x}$ a la restricción de s^j a $\Gamma_{|x}$.

Consideremos un juego extensivo Γ que se puede cortar en el vértice x. Sea $\{S^j_{x_i}\}$ la colección de los subconjuntos de información que pertenecen a Γ_x y $\{S^j_{|x_i}\}$ la colección de los subconjuntos de información que pertenecen a $\Gamma_{|x}$ Una estrategia de j en Γ_x, siguiendo la definición 1.3.4, es una función que a cada $S^j_{x_i}$ le asocia un índice de $I^j_{x_i}$, análogamente, una estrategia de j en $\Gamma_{|x}$, es una función que a cada $S^j_{|x_i}$ le asocia un índice de $I^j_{|x_i}$, a las estrategias de j en Γ_x las llamaremos acciones de j en Γ_x, a las estrategias de j en $\Gamma_{|x}$ las llamaremos acciones de j en $\Gamma_{|x}$.

Definición 1.3.15 (de composición de acciones de j). Si s^{j*} es una acción de j en Γ_x y s^{j**} *es una acción de j en* $\Gamma_{|x}$ se dice que *la estrategia de j en* Γ, (s^{j*}, s^{j**}), es la composición de las dos acciones de j antes mencionadas si

$$(s^{j*}, s^{j**})(S^j_i) = \begin{cases} s^{j*}(S^j_i) & \text{si } S^j_i \subset V_x \\ s^{j**}(S^j_i) & \text{si } S^j_i \subset V_{|x} \end{cases}$$

Nuestro propósito al dividir el juego de la comunidad en cinco etapas es encontrar la solución de dicho juego, para lograr esto debemos justificar que encontrando la solución de cada una de las etapas por separado encontramos la solución del juego completo. Como dijimos anteriormente, las soluciones de cualquier juego extensivo, por lo tanto las de los subjuegos y los juegos podados, se definen en términos de equilibrios de Nash de un juego rectangular desgraciadamente, un juego rectangular no siempre tiene equilibrios de Nash en estrategias puras, que serían las naturalmente relacionadas con las estrategias o acciones del juego extensivo en cuestión. Tendremos que trabajar con estrategias mixtas, o acciones mixtas de las formas normales de los subjuegos, por lo que en términos de composición de dichas acciones es muy importante la siguiente definición.

Definición 1.3.16 (de estrategia de comportamiento de un jugador j en el juego extensivo Γ). Una estrategia de comportamiento x^j de un jugador j en el juego extensivo Γ es una función que a cada conjunto de información S_i^j del jugador j le asocia una distribución de probabilidad entre los índices correspondientes a ese conjunto de información, es decir una distribución de probabilidad en I_i^j.

Es claro que la distribución de probabilidad que establece una estrategia de comportamiento del jugador j en un conjunto I_i^j puede ser de tal manera que le asocie uno a algún índice y cero a todos los demás, en ese sentido, si denotamos como Λ^j al conjunto de estrategias de comportamiento de j en Γ, podemos decir que $\Sigma^j \subset \Lambda^j$, en un sentido amplio. También definimos lo siguiente: $\Lambda = \Lambda^1 \times \Lambda^2 \times \cdots \times \Lambda^n$. Los elementos de Λ se llaman perfiles de estrategias de comportamiento. Si x es un elemento de Λ, un perfil de estrategias de comportamiento, la notación $x \Big| \widehat{x^j}$ tiene el mismo significado que para los perfiles de los otros tipos de estrategias.

Ejemplo 1.3.17. Utilizamos el juego presentado en la introducción, sobre el conflicto de una comunidad campesina, y discutimos la forma de una estrategia de comportamiento sobre este, la función que asocia la distribución de probabilidades a cada uno de los índices de cada uno de los conjuntos de información, en este problema, lo hace de la siguiente forma: para la primera etapa del juego que es donde se discute si los campesinos forman una asamblea para remontar la dispersión (superar el dilema del prisionero) cada una de las dos opciones disponibles ("cooperar" o "desertar") tiene asociada una probabilidad, más adelante en el capítulo tres veremos que el índice que corresponde a la etiqueta "cooperar" tiene asociado una probabilidad π^* mientras que el índice correspondiente a la acción "desertar" tiene asociado la probabilidad $1 - \pi^*$, es decir tenemos una estrategia mixta. Al resto de las etapas del juego presentadas en la introducción en los puntos 1 a 4, le corresponde la situación descrita en el párrafo anterior, en donde uno de los índices tiene asociada la estrategia con probabilidad uno mientras que las estrategias de los demás índices reciben probabilidad cero.

Proposición 1.3.18. *Dado un juego extensivo finito Γ y x un perfil de estrategias de comportamiento de Γ, queda determinada una distribución de probabilidad entre los vértices finales de Γ. La probabilidad del vértice final determinado por el perfil x, se denota como $P(A|x)$.*

La definición de restricción de una estrategia de comportamiento de un jugador j en Γ a un subjuego Γ_x y al juego podado $\Gamma_{|x}$ y la de composición de "acciones mixtas" en dichos subjuegos para construir una estrategia de comportamiento son análogas a las definiciones 1.3.14 y 1.3.15.

1.4. Forma normal de un juego extensivo.

Definición 1.4.1 (de la forma normal de un juego extensivo finito). Dado un juego extensivo, finito, arbitrario Γ con el conjunto de jugadores N, la función de pago Π y los conjuntos de estrategias $\sum^j$, decimos que el juego $(N, \{\sum^j\}, \varphi)$ es la forma normal de Γ si φ es la función de $\sum$ en R^n definida como $\varphi(s) = \sum\limits_{A \in T} P(A|s)\Pi(A)$.

Cuando el juego es sin azar, sin trayectorias infinitas, $\varphi(s)$ es el pago que la función Π asocia al único vértice final determinado. Esto es válido para juegos sin azar, aunque sean infinitos, pero sin trayectorias infinitas, como sucede en nuestro juego de la comunidad en la etapa de elegir el monto del castigo y el salario del forzador.

Consideremos un juego Γ que se descompone en x y sea d el vector de pagos que se asigna al juego podado $\Gamma_{|x}$ en su vértice final x. Denotaremos como φ_x a la función de pago de la forma normal del subjuego Γ_x y como $\varphi_{|x(d)}$ a la función de pago de la forma normal del $\Gamma_{|x(d)}$.

Definición 1.4.2 (de la función de pago para los perfiles de estrategias de comportamiento, en un juego finito). La función $\gamma \colon \Lambda \to R^n$ definida como $\gamma(x) = \sum\limits_{A \in T} P(A|x)\Pi(A)$ es la función de pago para los perfiles de estrategias de comportamiento, en un juego finito.

Definición 1.4.3 (de equilibrio en estrategias puras y en estrategias mixtas de un juego extensivo). Un perfil de estrategias s^* se dice que es un equilibrio de Nash en estrategias puras del juego extensivo Γ si es un equilibrio de Nash en estrategias puras de la forma normal de Γ. Un equilibrio de Nash en estrategias mixtas de la forma normal de Γ es un equilibrio de Nash de Γ en estrategias mixtas.

Teorema 1.4.4. *Si Γ es un juego extensivo de información perfecta existe s^* equilibrio de Nash de Γ en estrategias puras.*

Definición 1.4.5 (de equilibrio en estrategias de comportamiento de Γ). La estrategia x^* es un equilibrio en estrategias de comportamiento si

$$\forall j \in N, \gamma_j(x^*) \geq \gamma_j\left(x^* \left| x^j \right.\right), \quad \forall x^j \in \Lambda^j$$

No todo juego extensivo finito tiene equilibrios en estrategias de comportamiento.

1.5. Equilibrios de subjuego perfecto.

Definición 1.5.1 (de equilibrio de Nash de subjuego perfecto en estrategias puras de un juego extensivo Γ). El perfil de estrategias s^* es un equilibrio de subjuego perfecto en estrategias puras de Γ si para todo vértice z tal que Γ se descompone en z se tiene que s_z^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras de Γ_z.

Definición 1.5.2 (de equilibrio de Nash de subjuego perfecto en estrategias de comportamiento de un juego extensivo Γ). El perfil de estrategias x^* de comportamiento es un equilibrio de subjuego perfecto en estrategias de comportamiento de Γ si para todo vértice z tal que Γ se descompone en z se tiene que x_z^* es un equilibrio de Nash (en estrategias puras) de Γ_z.

Teorema 1.5.3 (composición de equilibrios de Nash en estrategias puras). *Sea Γ un juego extensivo que se descompone en el vértice x. Si a^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras de Γ_x y a^{**} es un equilibrio de Nash en estrategias puras de $\Gamma_{|x(\mathrm{d})}$, donde $d = \varphi(a^*)$, entonces la composición (a^*, a^{**}) es un equilibrio de Nash en estrategias puras de Γ.*

Por inducción se puede demostrar que una composición de r equilibrios en estrategias puras de subjuegos de Γ es equilibrio de Γ

Basándose en este teorema se garantiza que un algoritmo construido por Zermelo para analizar el juego del ajedrez construya un equilibrio de subjuego perfecto en estrategias puras para todo juego finito de información perfecta. De hecho ese algoritmo es una demostración constructiva muy conocida del siguiente teorema:

Teorema 1.5.4 (de existencia de equilibrios de subjuego perfecto en estrategias puras para un juego de información perfecta finita). *Si Γ es un juego extensivo de información perfecta finito, entonces existe al menos un equilibrio de subjuego perfecto en estrategias puras.*

El juego de la comunidad con el que trabajamos no es de información perfecta, pero si es de recuerdo perfecto y el algoritmo de Zermelo se puede generalizar para ese tipo de juegos y construye un equilibrio de subjuego perfecto en estrategias de comportamiento en juegos de recuerdo perfecto. En la siguiente sección describiremos esa variante del algoritmo. Definamos antes lo que entendemos por juego de recuerdo perfecto.

Definición 1.5.5 (juego de recuerdo perfecto para el jugador j). Decimos que el juego extensivo Γ es de recuerdo perfecto para el jugador j, si para todo conjunto S_i^j, y para todo $k \in I_i^j$, $S_l^j \cap V_k \neq \emptyset \Longrightarrow S_l^j \subset V_k$, donde V_k es $\{x \in V \mid \exists z \in S_i^j,\, \epsilon(z) = k \text{ y } x > y\}$.

Definición 1.5.6 (de juego de recuerdo perfecto). Decimos que el juego extensivo Γ es de recuerdo perfecto si es de recuerdo perfecto para todo jugador.

Es claro que los juegos de información perfecta son de recuerdo perfecto.

Teorema 1.5.7 (composición de equilibrios de Nash en estrategias de comportamiento). *Sea Γ un juego extensivo que se descompone en el vértice x. Si a^* es un equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento de Γ_x y a^{**} es un equilibrio de Nash en estrategias puras de $\Gamma_{|x(\mathrm{d})}$, donde $d = \gamma(a^*)$, entonces la composición (a^*, a^{**}) es un equilibrio de Nash en estrategias puras de Γ.*

Por inducción se puede demostrar que una composición de r equilibrios en estrategias puras de subjuegos de Γ es equilibrio de Γ.

1.6. Algoritmo de Zermelo en estrategias de comportamiento para juegos de recuerdo perfecto finitos.

1.6.1. Algoritmo de Zermelo en estrategias de comportamiento para juegos de recuerdo perfecto finitos.

Sea $\Gamma = (V, A)$ un juego extensivo de *recuerdo* perfecto finito. Llamemos Γ^0 a Γ y V_0 a V.

Paso 1:

i) Si Γ^0 no se puede descomponer, se considera su forma normal y cualquiera de los equilibrios de Nash de esta es un equilibrio de subjuego perfecto en estrategias de comportamiento de Γ.

ii) Si Γ^0 se puede descomponer, entonces existe un vértice x de Γ^0 tal que Γ^0 se puede descomponer, pero Γ_x^0 no se puede descomponer. Se considera su forma normal y y_x^* uno de los equilibrios de Nash de Γ_x^0.

iii) Consideramos el juego podado $\Gamma^0_{|x}$ y el vector de pago $d = \varphi^0_x(y^*_x)$.

Definimos $\Gamma^1 = \Gamma^0_{|x(d)}$, Γ^1 es de recuerdo perfecto.

Definimos $y^1 = y^*_x$.

Paso general del algoritmo:

Consideremos construído Γ^k de recuerdo perfecto, con árbol (V_k, A_k) y $\{y^1, y^2, \ldots, y^{k-1}\}$.

i) Si Γ^k no se puede descomponer, se considera su forma normal y cualquiera de los equilibrios de Nash de ésta se define como y^k. La composición de $\{y^1, y^2, \ldots, y^{k-1}, y^k\}$ es un equilibrio de subjuego perfecto de Γ.

ii) Si Γ^k se puede descomponer, entonces existe un vértice x de Γ^k tal que Γ^k se puede descomponer, pero Γ^k_x no se puede descomponer. Se considera su forma normal y y^*_{xk} uno de los equilibrios de Nash de Γ^k_x.

iii) Consideramos el juego podado $\Gamma^k_{|x}$ y el vector de pago $d = \varphi^k_x(y^*_{xk})$.

Definimos $\Gamma^{k+1} = \Gamma^k_{|x(d)}$ Γ^{k+1} es de recuerdo perfecto.

Definimos $y^{k+1} = y^*_{xk}$.

Teorema 1.6.1. *El algoritmo de Zermelo termina en un número finito de pasos construyendo la colección de acciones* $\{y^1, y^2, \ldots, y^l\}$. *La composición de dichas acciones es un equilibrio de subjuego perfecto en estrategias de comportamiento para* Γ.

Es decir, la versión anterior del algoritmo de Zermelo es una demostración constructiva del teorema siguiente:

Teorema 1.6.2 (de existencia de equilibrios de subjuego perfecto en estrategias de comportamiento para juegos de recuerdo perfecto finito). *Si* Γ *es un juego extensivo de recuerdo perfecto finito, entonces existe al menos un equilibrio de subjuego perfecto en estrategias de comportamiento de* Γ.

Nuestro juego extensivo de la comunidad es de recuerdo perfecto y se encontrará su solución utilizando la versión estudiada del algoritmo de Zermelo.

Capítulo 2

El juego de los acuerdos institucionales de un sólo periodo

2.1. Un dilema del prisionero en el que se debe decidir si construir o no un bien público

En este capítulo volvemos al problema que realmente nos ocupa y que fue planteado en la introducción. Es decir, estudiar la formación, dentro de una comunidad, de un estado forzador, debido a la decisión libre de los individuos de dicha comunidad.

Consideremos n individuos idénticos que viven en una población aislada, además consideremos también una unidad de tiempo t que es el tamaño de un año "económico", es decir, lo que dura la vida activa de cada individuo. Cada individuo i tiene dos unidades de trabajo, al empezar el "año" y, además una función lineal de utilidad $u_i(y) = y$, donde y es la cantidad total de arroz que cada individuo puede producir (y consumir) durante todo el año, sin considerar más que su propia capacidad de trabajo. La función de utilidad de cada individuo no depende de la cantidad de trabajo que realiza.

Al inicio del "año", cada individuo tiene 2 unidades de trabajo además i ($i = 1, 2, ..., n$) produce γ ($\gamma > 1$) unidades de arroz, utilizando una unidad de trabajo y sabe que también puede cosechar arroz en la segunda parte del año, si siembra al final de la primera parte del año. No hay ningún costo por sembrar pero hacerlo toma una unidad de trabajo. La cantidad que cada campesino puede cosechar depende del nivel del sistema de irrigación.

El sistema de irrigación es un bien público llamado dam y su construcción se realiza, con las aportaciones voluntarias hechas por los campesinos al principio de año. Por simplicidad asumimos que el nivel inicial del dam es cero en el primer año. El sistema de riego, construido durante la primera parte del año, sólo podrá traer beneficios a los campesinos que cosechan arroz durante la segunda parte del año. Posteriormente, cuando consideramos, periodos t, siguientes al primero, supondremos que el dam construido en periodos previos se hereda en t y tiene efectos en la producción de la primera parte del año t. En cambio la construcción de dam en t, sólo puede afectar la producción de la segunda parte del año t.

Una unidad de dam se construye, utilizando una unidad de arroz, luego, la función de producción del dam está dada por $k = g(x) = x$, donde x es la cantidad de arroz invertida en construir k unidades del dam. Por otro lado, una unidad de dam otorga β unidades de arroz en retribución, a cada uno de los campesinos que cosecharon arroz durante la segunda parte del año. Dado el nivel k del dam, la función de producción de arroz total, para cada individuo i, esta dada como sigue:

$$z_i = f_i(k, l_i^s, l_i^f) = \begin{cases} \beta k + \gamma & \text{si } l_i^1 = l_i^{f2} = 1 \\ \beta k & \text{si } l_i^1 = 0 \text{ y } l_i^2 = 1 \\ \gamma & \text{si } l_i^1 = 1 \text{ y } l_i^2 = 0 \\ 0 & \text{si } l_i^1 = l_i^2 = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Donde l_i^1, l_i^2, son los insumos de trabajo necesarios para sembrar el arroz en cada uno de los dos periodos.

Asumimos que cada individuo invierte una unidad de trabajo, en la producción de arroz durante la primera parte del año y una unidad de trabajo, en la producción de arroz de la segunda parte del año, es decir, $l_i^1 = l_i^2 = 1$, y consideramos el juego de decisiones voluntarias sobre el sistema de irrigación entre los individuos de la población.

Cada individuo i $(i = 1, 2, ..., n)$ tiene dos acciones posibles:

1. C_i (cooperación), es decir contribuir con una unidad de arroz para construir el dam y

2. D_i (deserción) no contribuir con una unidad de arroz para construir el sistema de riego.

Sea a_i la acción de cada individuo i, entonces para un vector de acciones $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de todos los individuos, la utilidad $u_i(a)$ esta dada como sigue:

$$u_i(a) = \begin{cases} \beta(k+1) + \gamma - 1 & \text{si } a_i = C_i \\ \beta k + \gamma & \text{si } a_i = D_i \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $k = 0, 1, \ldots, n-1$ es el número de todos los individuos, excepto i, que seleccionan la acción cooperar.

Cuando la acción del jugador i es $a_i = C$, el pago anual que recibe es su producción anual $\beta(k+1) + \gamma - 1$, es decir su cosecha individual más el beneficio que entre todos lo jugadores que cooperan, incluído él, obtienen cuando usan el sistema de riego, menos su inversión inicial. En cambio, si el jugador i decide jugar con su acción $a_i = D$, entonces su pago anual es simplemente su producción anual, es decir, $\beta k + \gamma$.

Es decir, tenemos un juego rectangular como los que definimos en el capítulo uno. El conjunto de jugadores N, es el conjunto de miembros de la comunidad, el conjunto de estrategias puras para cada miembro de N es el mismo: $\{C, D\}$ y la función de pago del jugador i está dada por (2.2). A la función de pago cuya $i - ésima$ componente es u_i, la denotamos como u.

Supongamos que se cumple la condición $0 < \beta < 1$. Es fácil observar que la acción desertar domina a la acción cooperar, desde el punto de vista de cada individuo j, en el sentido de que, sin importar la acción que seleccionan el resto de los individuos, j obtiene beneficios mayores cuando selecciona la acción deserción que cuando selecciona la acción cooperación. Esto puede concluirse fácilmente cuando observamos (2.2), ya que la diferencia entre el pago que recibe j, cuando elige D, y el que recibe, cuando elige C es igual a $1 - \beta$, para cualquier valor de k. Eso quiere decir que el juego $(N, \{\{C_i, D_i\}, u\}$ tiene como único equilibrio de Nash al vector de acciones $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$

Sin embargo, si todos los individuos seleccionan el equilibrio de Nash, entonces ninguna cantidad de dam se construye y todos obtienen la utilidad γ.

Para medir si este hecho representa alguna desgracia para cada individuo, la condición importante es la que guardan $1/n$ y β. Si suponemos que $1/n > \beta$, aunque el hecho de que $0 < \beta < 1$ nos permite preever que no se construirá ni una unidad de dam, esto no representaría ningún problema para nadie, pues ni siquiera con la cooperación de todos los miembros de la comunidad, podría un individuo reponer su inversión de una unidad de arroz. En cambio, si se cumple $1/n < \beta < 1$, el resultado no cooperativo es, como dicen los economistas, Pareto inferior al resultado cooperativo en el cual todos los individuos contribuyen con una unidad de arroz para construir el dam, porque cada uno de ellos obtendría en la situación cooperativa una utilidad de $\beta n + \gamma - 1$ que, bajo la última condición supuesta, es más alta que γ. Incluso, bajo la situación mencionada, existen grupos de un tamaño k', más pequeño que n, tales que permiten que el pago $\beta k' + \gamma - 1$ sea mayor que γ.

El problema serio que confrontamos es que la cooperación no puede obtenerse sin utilizar cierto tipo de mecanismo de forzamiento.

Como argumentábamos en la introducción de este trabajo, si los miembros de la comunidad quieren vencer el dilema del prisionero, deben participar en otro juego que consista en tratar de llegar a acuerdos y formar instituciones que los obliguen a cooperar. Es decir, los individuos se enfrentan al conflicto de si les conviene o no crear una entidad de forzamiento para obtener la cooperación. En caso de que les convenga actuar de esta forma, también deben decidir sobre los medios al alcance de esa entidad para lograr el cambio de conducta de todos. Además, deben dar forma a dicha institución y decidir cuanto están dispuestos a invertir en dicha entidad.

2.2. Un modelo extensivo de los posibles acuerdos institucionales

Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de individuos (jugadores) que forman la comunidad. Nuestro modelo de juego de acuerdos institucionales con bienes públicos que describimos gruesamente en la sección 2.1 consiste en un juego extensivo que tiene numerosos subjuegos, cada uno corresponderá a alguna de las siguientes cinco etapas:

1) Etapa **Decisión de Participar**. (ver figura 2.1)

Cada jugador en N debe decidir, de manera independiente de los otros jugadores, si participa, o no lo hace, en el convenio para instalar un sistema de forzamiento. Es decir, cada jugador $i \in N$ selecciona cualquiera de las dos estrategias puras $d_i = 1$ o $d_i = 0$, donde 1 y 0 significan, respectivamente, que el individuo quiere, ó no quiere participar en el convenio. Sea $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ el vector de participaciones de los jugadores y sea $S(d)$ el conjunto de participantes, es decir, definimos $S(d) = \{i \in N \mid d_i = 1\}$. Por simplicidad los participantes pueden ser renumerados como $i' \, (i' = 1, 2, ..., S(d))$. Aquellos jugadores, quiénes escogen no participar en el convenio, tampoco participan en cualquier negociación futura y serán libres de no cooperar, sin sufrir algún castigo por parte del forzador, aunque también pueden decidir cooperar. El forzador debe ser seleccionado dentro del grupo $S(d)$.

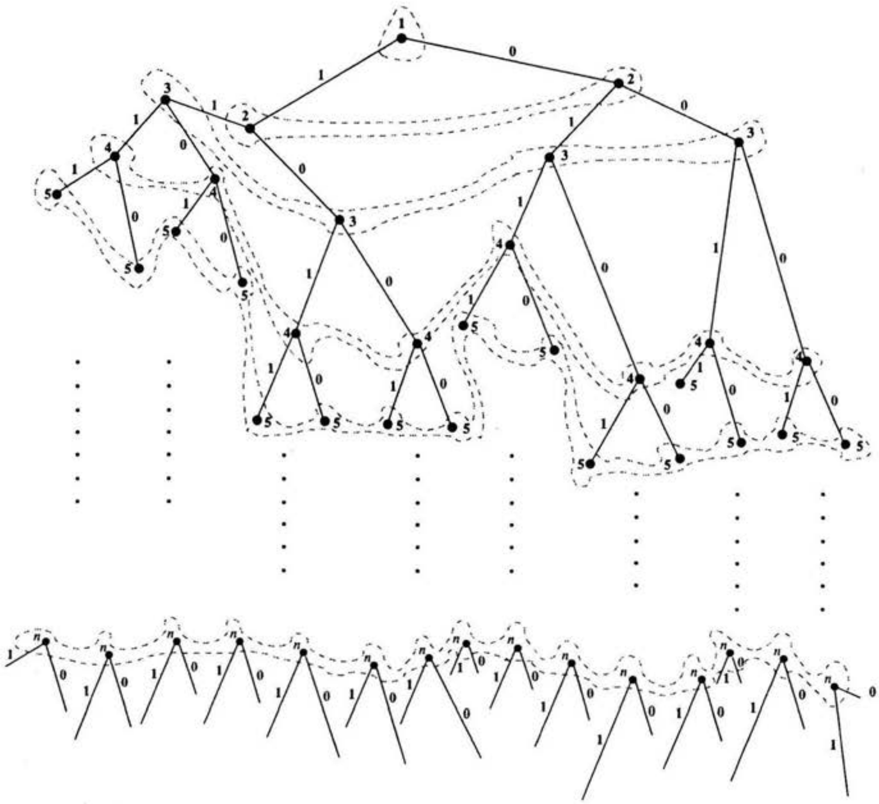


Figura 2.1: Decisión de Participar.

2) Etapa **Elección del Castigo y del Costo del Sistema de Forzamiento.** (ver figura 2.2)

En este escenario, cada jugador i que pertenece a $S(d)$, ($S(d)$ es el resultado de la etapa anterior) selecciona simultáneamente dos números no negativos: θ_i y p_i donde θ_i se define como la fracción de arroz que se paga al forzador de la cantidad total contribuída para la construcción de dam. Esto es, si la población junta x unidades de arroz para la construcción del dam y los miembros del grupo $S(d)$ eligieron θ, entonces el forzador gana θx unidades de arroz como su salario, y el resto, $(1-\theta)x$ unidades de arroz son usadas para la construcción del dam. De la misma forma, si eligen p como castigo, la interpretación consiste en que p es la cantidad de arroz que dejará de ganar el miembro de $S(d)$ que se desvíe del acuerdo cooperativo Este castigo le será impuesto por el forzador. Pero p no es una cantidad de arroz existente que se le quite a un jugador y que se pueda utilizar por otro, sino más bien una prohibición de que ese jugador produzca esa cantidad de arroz.

Para un vector de decisiones $(\theta_i, \theta_2, \ldots, \theta_s; p_1, p_2, \ldots, p_s)$ de todos los jugadores que pertenecen a $S(d)$, el "salario unitario" θ^* y el "castigo" p^* son determinados por la regla de unanimidad dentro de $S(d)$:

$$(\theta^*, p^*) = \begin{cases} (\theta, p) & \text{si } (\theta, p) = (\theta_i, p_i) \ \forall i \in S(d) \\ (0,0) & \text{e.o.c} \end{cases} \tag{2.3}$$

Sólo cuando todos los jugadores dentro de $S(d)$, escogen la misma θ y la misma p, el pago del forzador esta bien definido al igual que el poder de castigo, en cualquier otro caso el pago correspondiente es igual a cero, y por lo tanto el juego sigue en la etapa 5b.

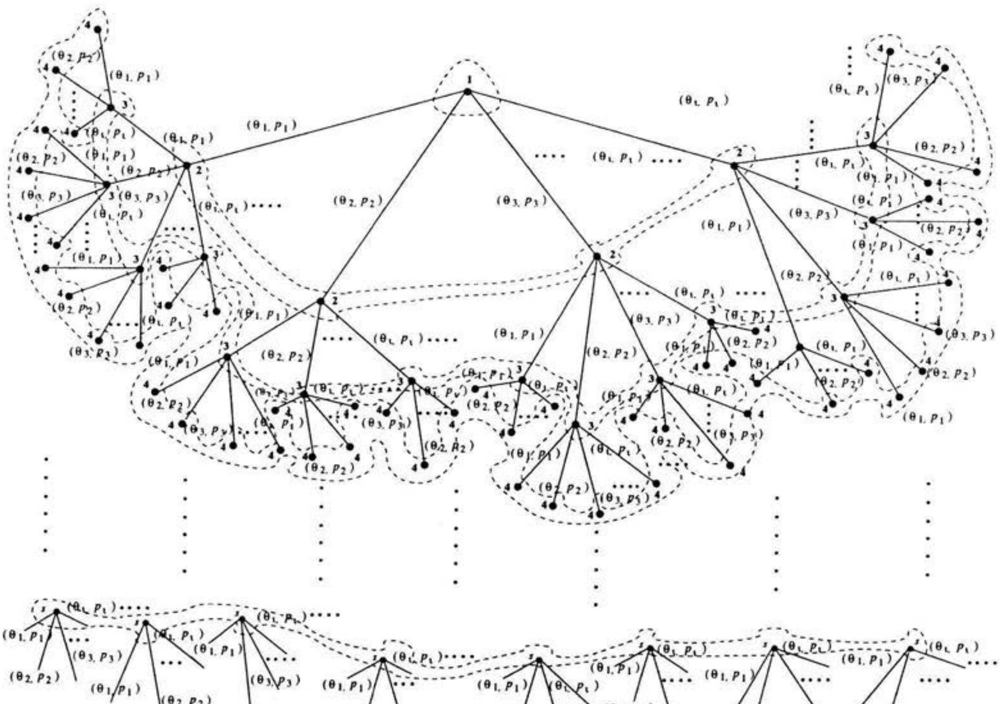


Figura 2.2: Elección del Castigo y del Costo.

3) Etapa **Elección del Forzador**. (ver figura 2.3).

Dados $(S(d), \theta, p)$, los cuales fueron decidos en las etapas anteriores, usando un juego de lotería , un individuo $j \in S(d)$ es nominado para ser el forzador, el juego de lotería asigna la misma probabilidad $1/s$ a cada uno de los participantes . Entonces el jugador $j \in S(d)$, elegido al azar, debe seleccionar $d_j = A$, si acepta ser el forzador y $d_j = NA$ si no acepta.

Para un vector de decisiones de los jugadores $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$, la entidad de forzamiento esta determinada por:

$$i^* = \begin{cases} j & \text{con probabilidad } 1/s \text{ si } d_j = A \\ 0 & \text{con probabilidad } 1/s \text{ si } d_j = NA \end{cases} \qquad \forall j \in S(d) \tag{2.4}$$

donde $i^* = 0$ significa que no hay forzador. Cuando $i^* = 0$, el juego continua en la etapa 5b.

Aquí asumimos que si un individuo i^* es seleccionado como forzador, por el azar, y acepta la designación, dicho individuo debe jugar su papel bajo las reglas decididas en la etapa correspondiente. Además suponemos que el forzador no puede trabajar como campesino.

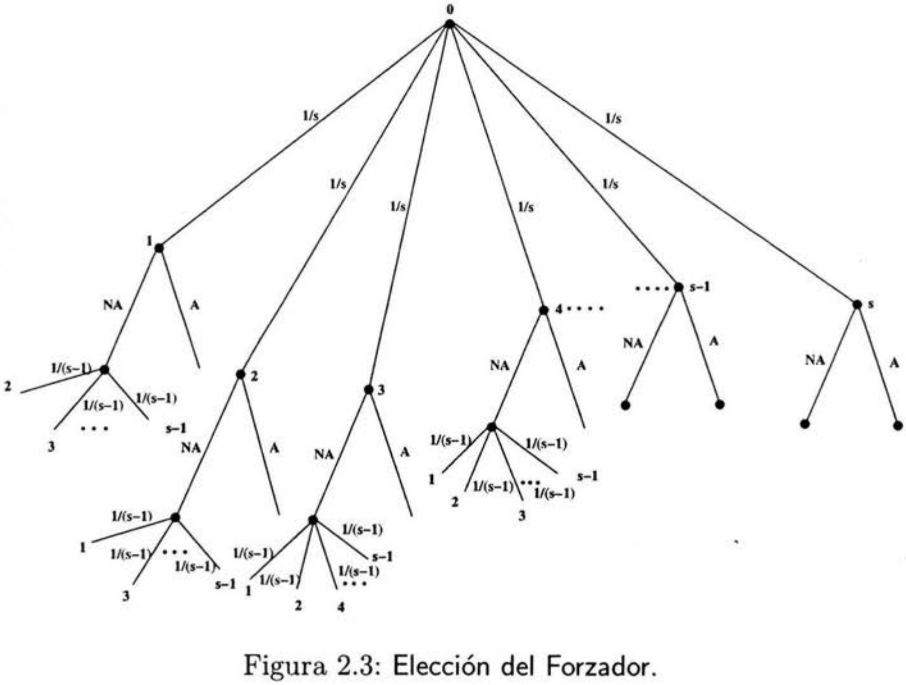


Figura 2.3: Elección del Forzador.

4) Etapa **Contrato para Cooperar**.(ver figura 2.4)

Dados $S(d), \theta, p$, además de i^*, determinados en las etapas anteriores, todos los jugadores dentro de $S(d)$ excepto el forzador i^* establecen negociaciones para firmar un convenio o contrato que contenga los acuerdos a los que han llegado en las etapas anteriores y que establecen la cooperación como una obligación para los miembros de $S(d)$. Entonces, cada jugador $i \in S(d)$, con $i \neq i^*$ selecciona simultáneamente cualquiera de las dos acciones $a_i^{'} = F$ (firmar) o $a_i^{'} = NF$ (no firmar).El acuerdo cooperativo en el que todos los jugadores i en $S(d)$ excepto i^* deben invertir una unidad de arroz para la construcción de dam estaría establecido si y sólo si todos ellos seleccionan $a_i^{'} = F$ ($i \neq i^*$). El cualquier otro caso el juego continua en la etapa 5b.

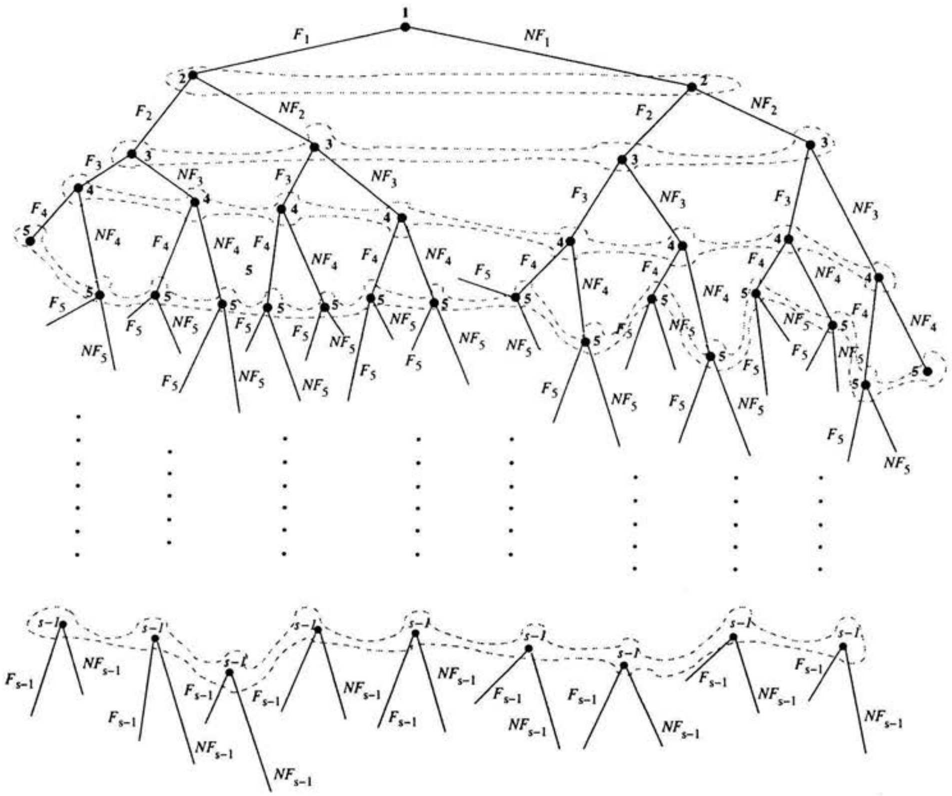


Figura 2.4: Contrato para Cooperar.

5) Etapa: **Decisión final de Cooperación o no.**

En esta etapa hay dos casos: a) existe un grupo $S\,(d)$ que tiene firmado un contrato de cooperación y están determinados, además de $S\,(d)$: p, θ e i^* y b) no existe ningún $S\,(d)$.

Caso a) (ver figura 2.5). Existe un grupo $S\,(d)$ diferente del vacío. En este escenario final, todos los jugadores en N excepto el forzador i^* deben decidir si contribuyen con la cuota de arroz establecida para la construcción de dam (C) o si no lo hacen (D). Es decir, cada jugador $i \in N - \{i^*\}$ selecciona simultáneamente entre $a_i = C$ o $a_i = D$ su propia acción.

Para un vector de acciones de los jugadores $a = (a_i\colon i \in N - \{i^*\})$ el pago final $\varphi_i(a)$ de cada jugador $i \in N$ esta determinado como sigue:

1. Para $i \in S(d)$ con $i \neq i^*$,

$$\varphi_i(a) = \begin{cases} \beta(1-\theta)h(a) + \gamma - 1 & \text{si } a_i = C_i \\ \beta(1-\theta)h(a) + \gamma - p & \text{si } a_i = D_i \end{cases} \tag{2.5}$$

Donde $h(a)$ es el número de jugadores cuya acción, en el vector a, es cooperar.

Si el jugador i selecciona la acción $a_i = C$ obtiene como pago γ menos su inversión más la producción que obtiene, cada jugador, utilizando el sistema de riego que han construido entre todos los jugadores que eligieron cooperar. De la misma manera si el jugador escoge jugar con su acción $a_i = D$, el pago correspondiente es lo que él mismo puede cosechar γ, más la producción que obtiene utilizando del sistema de riego, pero, dado que el jugador pertenece a $S\,(d)$ y ha firmado el contrato, debe pagar el castigo p acordado por todos los jugadores.

2. Para $i \in N - S(d)$

$$\varphi_i(a) = \begin{cases} \beta(1-\theta)h(a) + \gamma - 1 & \text{si } a_i = C_i \\ \beta(1-\theta)h(a) + \gamma & \text{si } a_i = D_i \end{cases}$$

Los jugadores que no pertenecen a $S(d)$, y que no están comprometidos en un contrato, tienen también la posibilidad de escoger entre cooperar e invertir una unidad de arroz o no cooperar y en este caso invertir ninguna unidad de arroz. Como ellos no están bajo ningún sistema de forzamiento, si $i \in N - S$ decide desertar, $a_i = D$, su pago esperado es la suma de lo que produce él mismo, más la producción que el sistema de riego le retribuye, por lo tanto si un jugador en $N - S$ decide desertar, no sólo no recibe un castigo sino que además incrementa su producción de arroz debido a que el sistema de riego beneficia a todos.

3. Para $i = i^*$

$$\varphi_{i^*}(a) = \theta h(a)$$

Que corresponde al pago discutido anteriormente.

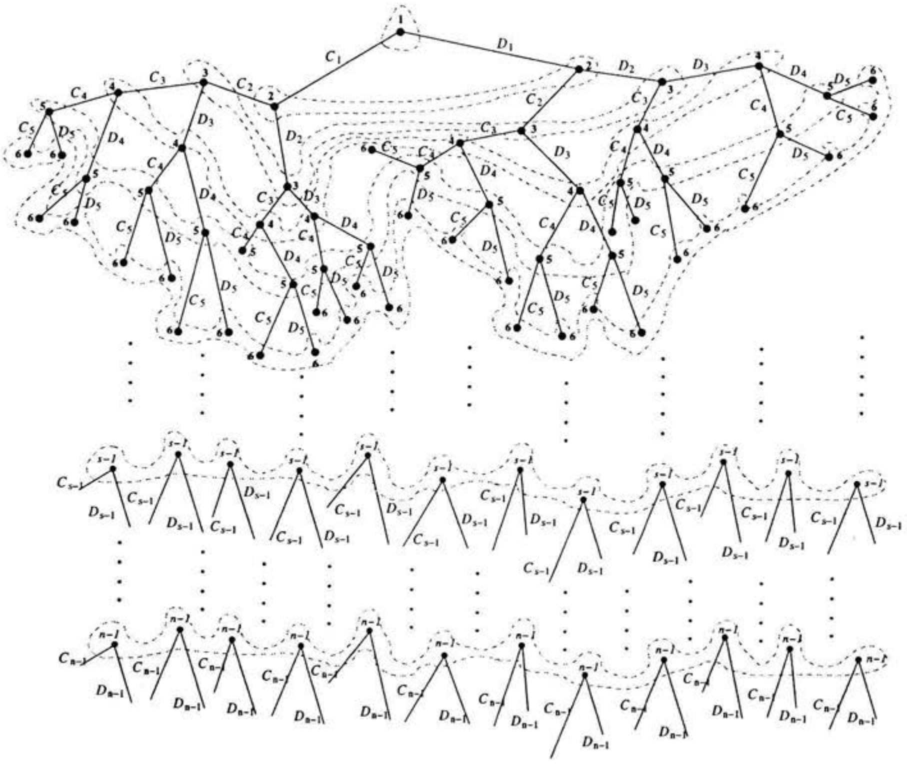


Figura 2.5: Decisión final de cooperación o no.

Caso b) (ver figura 2.6). Nadie estuvo de acuerdo en participar en el etapa uno. O, quizá, no se pusieron de acuerdo en el castigo p, y/o en la parte correspondiente al salario del forzador θ, en la etapa dos. O, a lo mejor, el que tenía que ser forzador no quiso aceptar en la etapa tres. O, al final, alguno de los que había permanecido negociando, no quiso ratificar los acuerdos que se habían alcanzado, en la etapa cuatro. Si alguna de esas situaciones ocurrió, tenemos otra vez a los N jugadores envueltos en el dilema del prisionero original, sin que sus intentos de vencerlo hayan tenido éxito.

Es decir, todos los jugadores en N se encuentran en el juego de la sección 2.1.

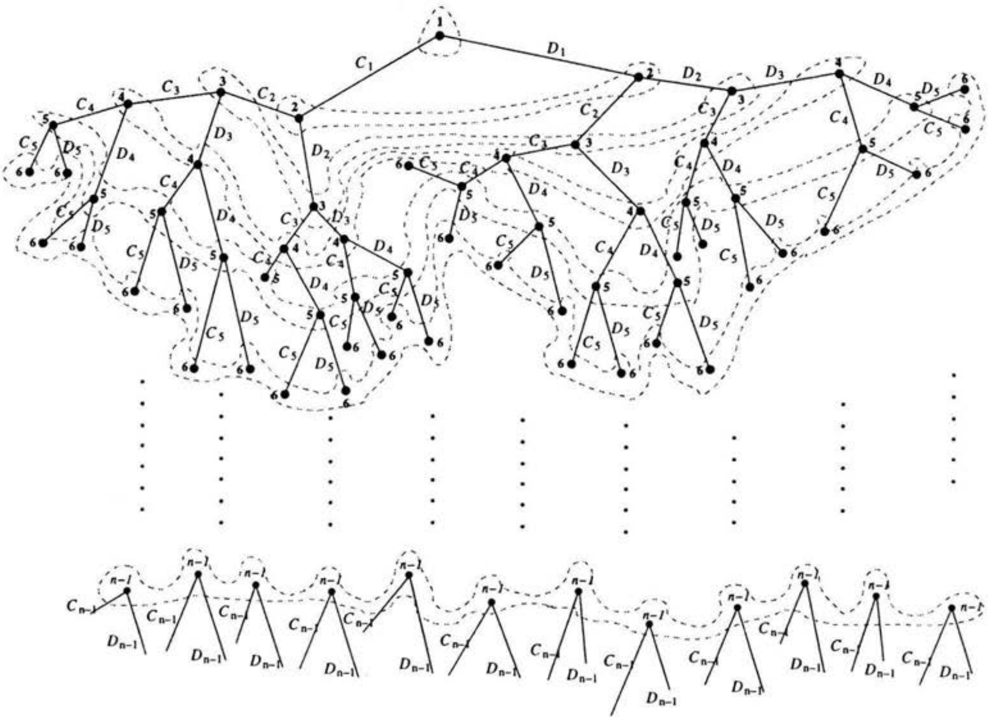
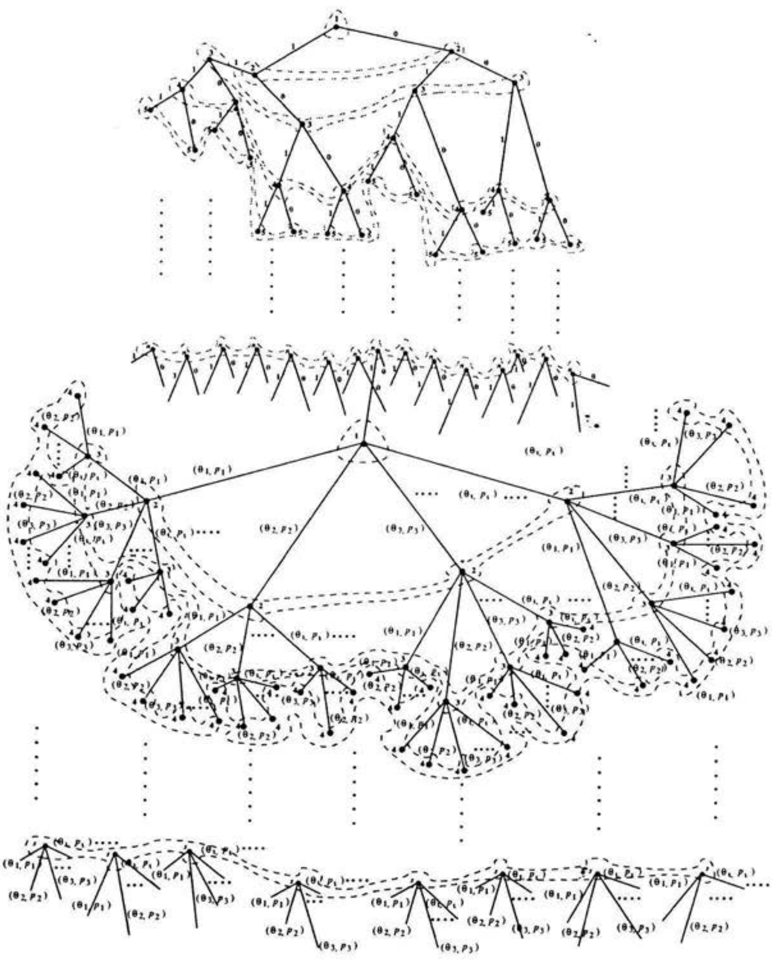
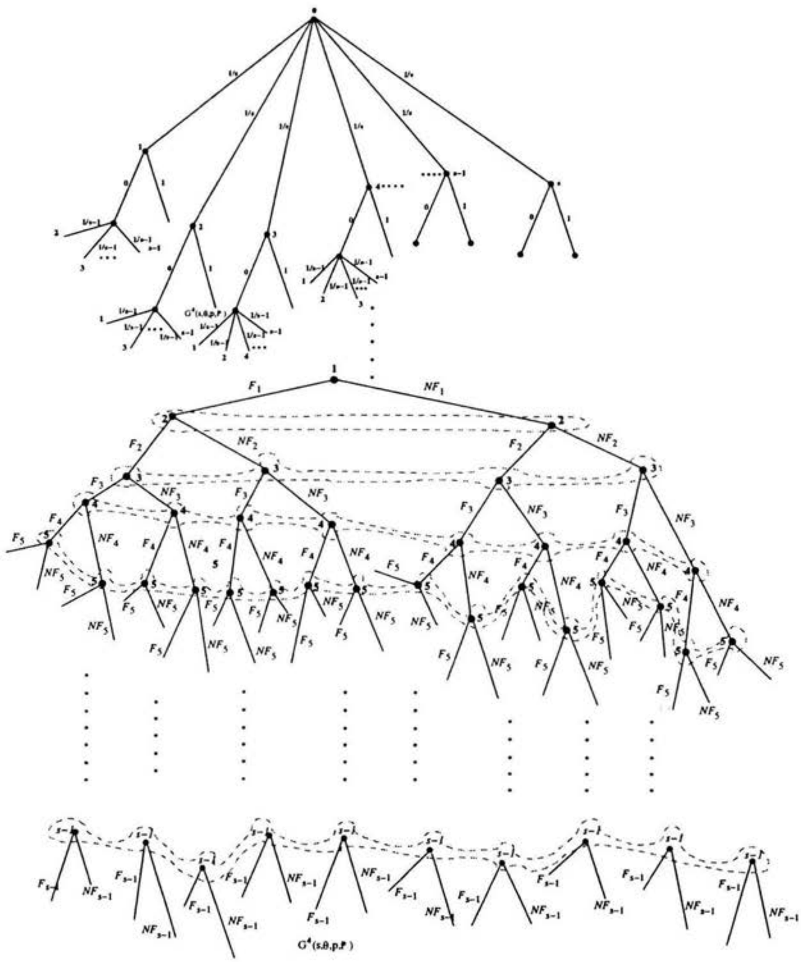


Figura 2.6: Decisión final de cooperación o no.

Nuestros acuerdos institucionales descritos por las cinco etapas $(1)-(5)$ son formalmente representados a través de un juego extensivo (como en la figura 2.7). Denotamos este juego con la letra Γ. Este es un juego extensivo de información no perfecta de los que estudiamos en el capítulo uno. Sin embargo, al iniciar cada etapa, cada jugador conoce el resultado que se ha obtenido en las etapas previas, es decir, como mencionábamos antes, en cada vértice en que se inicia una de las etapas, se tiene un subjuego de Γ. El juego extensivo Γ se representa uniéndo cada una de las figuras que acompañan la descripción de los cinco escenarios previos.

En el siguiente capítulo definiremos una solución de Γ, desde el punto de vista de los juegos no cooperativos y la calcularemos.





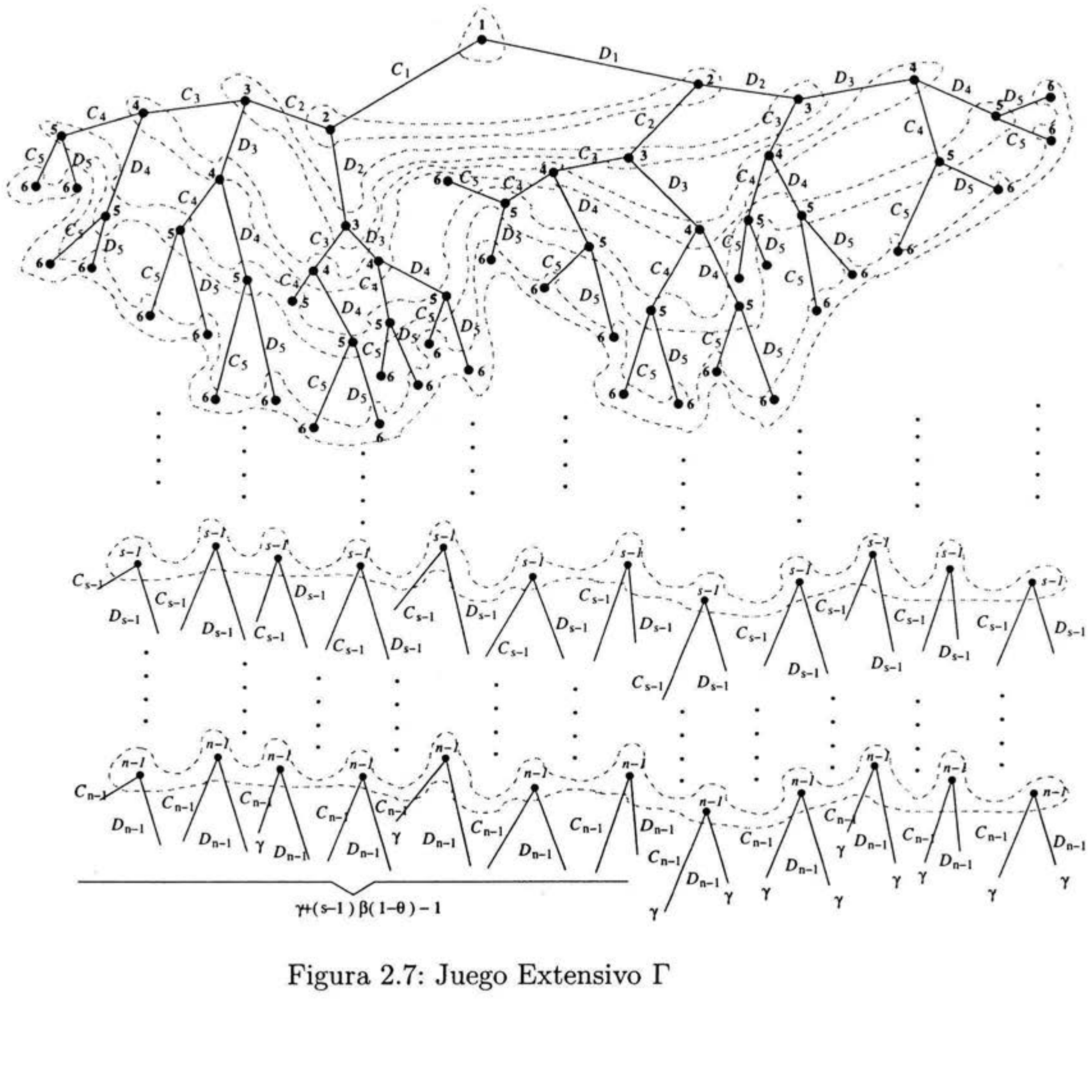


Figura 2.7: Juego Extensivo Γ

Capítulo 3

La solución no cooperativa del juego de formar instituciones

3.1. ¿Qué entenderemos como solución del juego Γ?

En el capítulo uno, definimos una estrategia de comportamiento b_i, para el jugador i, en el juego extensivo Γ como una función que asigna una opción aleatoria a cada uno de los nodos de decisión de i en Γ. Usando también la notación de b-etapa del juego definimos nuestra solución no-cooperativa del juego Γ como sigue:

Definición 3.1.1. Una combinación de estrategias de comportamiento $b^* = (b_1^*, b_2^*, \ldots, b_n^*)$ en el juego Γ es una solución no cooperativa de Γ si y sólo si esta estrategia es un equilibrio de Nash de subjuego perfecto de Γ que satisface las siguientes dos propiedades:

1. *Propiedad de simetría.* En cada *b^*-etapa del juego*, b^* induce un equilibrio simétrico, es decir, un equilibrio el cual es independiente del renombramientos de los jugadores o de sus opciones.

2. *Dominancia de pagos.* En cada *b^*-etapa del juego*, b^* induce un equilibrio el cual tiene pagos dominantes (débilmente) sobre todos los otros puntos de equilibrio simétricos de la *b^*-etapa del juego.*

El cálculo de la solución no cooperativa del juego Γ puede ser hecha por el procedimiento usual de inducción hacia atrás de la teoría de juegos extensivos, que puede explicarse como sigue: primero, calculamos todos los puntos simétricos de equilibrio en la etapa final del juego: "Decisión final de cooperación o no", y después encontramos los puntos simétricos de equilibrio que tienen pagos dominantes sobre cualquier punto simétrico de equilibrio en la misma etapa. Asumimos que la etapa del juego "Decisión final de cooperación o no" es jugada conforme a estos puntos simétricos de equilibrio. Luego, aplicamos el mismo procedimiento a la etapa del juego "Contrato para Cooperar". Continuamos con este procedimiento en cada una de las etapas del juego, hasta que la etapa del juego "Decisión de Participar" esta resuelta.

En la siguiente sección, la solución no cooperativa del juego Γ, será caracterizada usando el procedimiento de inducción hacia atrás, explicado en los párrafos anteriores. Por conveniencia, en la aplicación del procedimiento de inducción hacia atrás, el punto simétrico de equilibrio de cada etapa del juego, que satisface la condición 2 de la definición 3.1 es simplemente llamado una solución de la etapa del juego siempre que esto no cause confusión alguna.

3.2. La solución no cooperativa

En este capítulo desarrollamos la solución no cooperativa del juego de convenios institucionales que explicamos en el capítulo anterior.

3.2.1. Solución de la etapa "Decisión final de cooperación o no".

Como lo establecimos en la sección anterior resolvemos este juego utilizando el método de inducción de atras hacia adelante, por lo tanto, primero consideramos la última etapa del juego "Decisión final de cooperación o no" a la que denotamos por G^5, y que corresponde al momento en que los individuos de la sociedad cooperan con una unidad de arroz o no lo hacen esta etapa depende de S (la existencia de una organización que tiene como objetivo tratar de superar el dilema del prisionero), θ (el salario del forzador), p (la cantidad de castigo) y de i^* (la existencia de una entidad de forzamiento). Denotamos esta etapa como $G^5(S, \theta, p, i^*, t)$ donde $t = 0$ implica que los jugadores no alcanzaron un acuerdo, es decir al menos uno de ellos no ratifico en la etapa cuatro los acuerdos obtenidos en las etapas dos y tres del juego, y $t = 1$ implica que los jugadores obtuvieron un acuerdo en la etapa correspondiente, es decir, cada uno de los jugadores firmo en la etapa cuatro y con esto aceptó los acuerdos establecidos en las dos etapas previas.

Para resolver la etapa cinco del juego utilizamos los siguientes dos lemas.

Lema 3.2.1. *Para la etapa del juego "Decisión Final de Cooperación o no" $G^5(S, \theta, p, i^*, 0)$ se tiene una única solución $\sigma = (D_i : i \in N - \{i^*\})$.*

El lema anterior afirma lo siguiente: cuando alguno de los miembros de la asamblea S decide no firmar y por lo tanto los jugadores no pueden establecer un acuerdo cooperativo, cualquier individuo que pertenece a la organización nunca es castigado cuando selecciona la acción "desertar", debido a este hecho la etapa del juego "Decisión final de cooperación o no" en este caso (no hay acuerdo cooperativo) tiene la misma estructura de pagos que el dilema del prisionero y la acción dominante de cada uno de los individuos es $\sigma_i = D$ (deserción).

Demostración del Lema 3.2.1. Afirmación: $\sigma = (D_i : i \in N - \{i^*\})$ es el único equilibrio de Nash, es decir, la estrategia en la que todos los individuos de la sociedad, tanto los que pertenecen a la organización como los que no pertenecen a la organización, participan con la acción $\sigma_i = D$ (desertar) es el único equilibrio de Nash.

Para demostrar esta afirmación establecemos primero la estructura de pagos que corresponde a esta etapa según las condiciones descritas en el primer párrafo de esta sección, además definimos lo siguiente: sea $N^* = N - \{i^*\}$, es decir, consideramos a todos los miembros de la sociedad, excepto al forzador y además consideramos el siguiente vector de acciones $a = (a_i : i \in N^*)$ de los jugadores fijo y arbitrario, entonces el pago $\varphi_i(a)$ del jugador i depende sólo de su propia acción a_i y del número h de jugadores que deciden cooperar, además de él, dicho pago esta dado por la siguiente expresión:

$$\varphi_i(a_i, h) = \begin{cases} \beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1 & \text{si } a_i = C_i \\ \beta(1-\theta)h + \gamma & \text{si } a_i = D_i \end{cases} \tag{3.1}$$

La expresión anterior significa que si el jugador i, participa en la formación de la asamblea con la acción "desertar" entonces el pago que recibe esta formado de los siguientes elementos: γ, (que representa la cantidad de arroz que el campesino puede obtener cuando utiliza sólo su trabajo) más $\beta(1-\theta)h$, que representa la cantidad de arroz que el sistema de riego retribuye (β) a cualquier individuo que esta dentro de la asamblea (y fuera de ella) cuando la sociedad invierte $h(1-\theta)$ unidades de arroz para la construcción de la obra pública. En el caso de que el jugador i decida cooperar en la construcción de una organización para evitar la dispersión de la sociedad el pago que obtiene esta dado por lo siguientes factores: γ, (la cantidad de arroz que obtiene cuando sólo utiliza sus unidades de trabajo) menos la unidad de arroz que debe invertir en la construcción del bien común más $\beta(1-\theta)(h+1)$, que representa lo que el sistema de riego retribuye a cada uno de los miembros de la sociedad cuando un número significativo de jugadores incluído el jugador i invierten $(h+1)(1-\theta)$ unidades de arroz.

Demostración de la afirmación. Sea $\sigma = (D_1, D_2, \ldots, D_i, \ldots, D_{n-1})$ una combinación de estrategias puras que utilizan los jugadores que pertenecen a N^* y supongamos que el jugador i (el cual puede estar dentro de la asamblea o fuera de ella) decide cambiar la acción D ("desertar") con la que esta participando en el juego por la acción C, ("cooperar") debido a este cambio del jugador i debemos considerar ahora una nueva estrategia $\sigma^* = (D_1, D_2, \ldots, C_i, \ldots, D_{n-1})$.

Para probar que σ es equilibrio de Nash, basta con demostrar la siguiente desigualdad: $\varphi_i(\sigma) > \varphi_i(\sigma^*)$ o equivalentemente $\varphi_i(\sigma^*) - \varphi_i(\sigma) < 0$. En (3.1) tenemos los pagos correspondientes a cada estrategia de juego bien definidos, es decir, $\varphi_i(\sigma^*) = \beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1$ y $\varphi_i(\sigma) = \beta(1-\theta)h + \gamma$, a continuación restamos ambos pagos y obtenemos lo siguiente $\varphi_i(\sigma^*) - \varphi_i(\sigma) = \beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1 - (\beta(1-\theta)h + \gamma)$ que es igual a $\beta(1-\theta)(h+1)+\gamma-1-\beta(1-\theta)h-\gamma = \beta(1-\theta)h+\beta(1-\theta)+\gamma-1-\beta(1-\theta)h-\gamma$ efectuando las operaciones obtenemos la expresión $\beta(1-\theta) - 1$.

Lo único que falta es el signo de la expresión $\beta(1-\theta) - 1$. Si lo que queremos establecer es que σ es un equilibrio de Nash entonces debemos mostrar que la última expresión es menor que cero. Por hipótesis tenemos que $1/n < \beta < 1$ y $0 \leq \theta \leq 1$. Utilizando la segunda desigualdad concluimos que $1 - \theta \leq 1$ por lo tanto $\beta(1-\theta) < 1$, es decir, $\beta(1-\theta) - 1 < 0$. De esta última expresión concluimos que $\varphi_i(\sigma) > \varphi_i(\sigma^*)$ entonces el jugador i empeora su pago cuando decide cambiar su estrategia, y de este modo σ es un equilibrio de Nash.

A continuación demostramos que σ es el único equilibrio de Nash. Para hacer esto sólo consideramos el resto de las estrategias que cumplen con la condición de simetría. La única estrategia posible esta dada por: $\sigma^{**} = (C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_{n-1})$, para toda $i \in N^*$ (es decir, todos los individuos formen parte o no de la organización juegan con la estrategia cooperar). Supongamos que esta estrategia es un equilibrio de Nash y también supongamos que el jugador i decide cambiar la acción en el juego de C, (cooperar) a D, (desertar) de esta forma obtenemos la nueva estrategia de juego $a^{**} = (C_1, C_2, \ldots, D_i, \ldots, C_{n-1})$, a continuación demostraremos que $\varphi_i(\sigma^{**}) < \varphi_i(a^{**})$, es decir, demostraremos que la estrategia propuesta σ^{**} no es un equilibrio de Nash porque el jugador i mejora su pago cuando decide cambiar la acción en el juego de "cooperar" a "desertar". Nuevamente utilizamos (3.1) para establecer el pago de cada estrategia propuesta y después restamos ambos pagos: $\varphi_i(a^{**}) - \varphi_i(\sigma^{**}) = \beta(1-\theta)h + \gamma - (\beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1)$ realizamos las operaciones anteriores para obtener la expresión $\beta(1-\theta)h+\gamma-\beta(1-\theta)(h+1)-\gamma+1$ y esta última es igual a $1-\beta(1-\theta)$.

Lo único que nos resta es demostrar el signo de esta última expresión. Como $0 \leq \theta \leq 1$ esto implica que $1-\theta \leq 1$ y además sabemos que $1/n < \beta < 1$, combinando ambas desigualdades obtenemos la siguiente desigualdad $\beta(1-\theta) < 1$ por lo tanto $1-\beta(1-\theta) > 0$ de esta forma se tiene que $\varphi_i(a^{**}) > \varphi_i(\sigma^{**})$ es decir, $\sigma^{**} = (C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_{n-1})$ no es un equilibrio de Nash. Por lo tanto σ es el único equilibrio de Nash. □

Ahora supongamos que todos los miembros de la asamblea han decidido firmar el documento que ratifica los tres parámetros necesarios para la formación del estado alrededor de un bien público: castigo, costo del forzador y forzador mismo, es decir, han alcanzado un acuerdo cooperativo, en este caso, la solución de la etapa cinco de nuestro juego depende de los parámetros explicados en el primer párrafo de esta sección, más la existencia de un acuerdo cooperativo ($t = 1$). A continuación utilizamos el lema 3.2.2 para tratar de explicar la solución que tiene dicha etapa cuando entre los jugadores hay acuerdo de cooperación.

Lema 3.2.2. *Para la etapa del juego "Decisión Final de Cooperación o no"* $G^5(S, \theta, p, i^*, 1)$ *se tiene una única solución tal que:*

i) *Si* $p < 1-\beta(1-\theta)$, *entonces* $\sigma_i = D_i \ \forall \ i \in N - \{i^*\}$

ii) *Si* $p \geq 1-\beta(1-\theta)$, *entonces* $\sigma_i = C_i \ \ \forall i \in S - \{i^*\}$ *y* $\sigma_i = D_i \ \forall i \in N - S$.

El lema 3.2.2 expresa lo siguiente: Cuando el acuerdo cooperativo es alcanzado, cada individuo dentro de la asamblea ($i \in S - \{i^*\}$) es castigado por la entidad coercitiva i^* si es que éste se desvía del acuerdo cooperativo. El nivel crítico de castigo para persuadir a los individuos que participan en la organización y evitar que elijan la estrategia "deserción" esta dado por el resultado $1-\beta(1-\theta)$, mientras que cada individuo fuera de la asamblea siempre selecciona desertar.

Demostración del Lema 3.2.2. Caso i) Si $p < 1-\beta(1-\theta)$. (Si el castigo establecido es menor que la ganancia neta que resulta de invertir una unidad de arroz).

Afirmación: $\sigma = (\sigma_i \colon i \in N^*)$ con $\sigma_i = D$, es el único equilibrio de Nash, es decir, cuando el castigo es muy pequeño comparado con la ganancia (que es negativa), todos los campesinos, fuera y dentro de la organización prefieren desviarse de los acuerdos cooperativos y pagar el castigo a perder una cantidad mayor invirtiendo en la construcción de un sistema de riego.

Para cada $i \in N - S$ (es decir, para los jugadores que están fuera de la organización) se tiene la misma estructura de pagos mostrada en (3.1), debido a que ellos no forman parte de los acuerdos de cooperación, por el lema 3.2.1 tenemos que para estos jugadores la acción D ("desertar") domina a la acción C, ("cooperar") debido a que el pago asociado a la estrategia desertar es mayor que el pago asociado a la estrategia cooperar (demostración hecha en el lema 3.2.1). Por lo tanto el lema 3.2.1 demuestra esta parte del lema 3.2.2. Ahora probaremos la afirmación para los jugadores que cooperan para establecer la organización. Establecemos primero la estructura de pagos para cada uno de estos jugadores.

El pago correspondiente depende de la acción que cada uno de los individuos elige, del tamaño del conjunto de cooperadores y del castigo que entre todos establecieron en la etapa correspondiente, luego el pago del jugador i para un vector de acciones $a_i = (a_i : i \in S^*)$ de todos los jugadores esta dado por:

$$\varphi_i(a_i, h) = \begin{cases} \beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1 & \text{si } a_i = C_i \\ \beta(1-\theta)h + \gamma - p & \text{si } a_i = D_i \end{cases} \tag{3.2}$$

Para explicar esta última estructura de pagos, podemos recurrir a la explicación dada para (3.1). La única diferencia entre (3.1) y (3.2), es que está última incluye en el pago correspondiente a la acción D el castigo previamente establecido.

Demostración de la Afirmación. Sea $\sigma = (D_1, D_2, \ldots, D_i, \ldots, D_{s-1}, \ldots, D_{n-1})$, una combinación de estrategias puras de los individuos que están dentro y fuera de la asamblea $i \in N^*$, y supongamos que el jugador i que esta participando en la organización $(S - \{i^*\})$[1], decide cambiar la acción D ("desertar") por la acción C, ("cooperar") entonces tenemos la nueva combinación de estrategias puras $\sigma^* = (D_1, D_2, \ldots, C_i, \ldots, D_{s-1}, \ldots, D_{n-1})$.

Basta con demostrar la desigualdad $\varphi_i(\sigma) > \varphi_i(\sigma^*)$ o equivalentemente $\varphi_i(\sigma^*) - \varphi_i(\sigma) < 0$ para demostrar que σ es un equilibrio de Nash. A partir de (3.2) tenemos que $\varphi_i(\sigma^*) = \beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1$ y además $\varphi_i(\sigma) = \beta(1-\theta)h + \gamma - p$ luego restando ambos pagos obtenemos lo siguiente: $\varphi_i(\sigma^*) - \varphi_i(\sigma) = \beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1 - (\beta(1-\theta)h + \gamma - p)$ que es igual a $\beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1 - \beta(1-\theta)h - \gamma + p$. Simplicando esta última expresión

[1]En adelante nos referiremos a $S - \{i^*\}$ como S^*

obtenemos lo siguiente $\beta(1-\theta)+p-1$. Lo único que mostraremos es que la última expresión es negativa. Por hipótesis tenemos que $p < 1-\beta(1-\theta)$ entonces $p-1+\beta(1-\theta) < 0$ por lo tanto $\varphi_i(\sigma^*)-\varphi_i(\sigma) < 0$ entonces $\varphi_i(\sigma^*) < \varphi_i(\sigma)$. La desigualdad anterior significa que el jugador i no mejora su pago cuando cambia su acción en el juego. Por lo tanto σ es un equilibrio de Nash.

La conclusión anterior es fácil de explicar incluso antes de realizar la demostración, dado que el castigo es menor que la retribución del sistema de riego, (la ganancia neta es negativa porque el sistema de riego retribuye menos que la inversión inicial hecha por cada uno de los cooperadores) entonces es preferible ser castigado por el forzador, que hacer la inversión inicial.

Ahora debemos mostrar que σ es el único equilibrio de Nash cuando tenemos la condición i. Lo único que debemos considerar son todas las posibles estrategias simétricas que pueden ser equilibrios de Nash del subjuego perfecto G^5, la única estrategia simétrica para los jugadores que pertenecen a S^* además de la discutida es $a^{**}=(C_1,C_2,\ldots,C_i,\ldots,C_{s-1},\ D_s,\ldots,D_{n-1})$, a continuación demostraremos que a^{**} no es un equilibrio de Nash de G^5 cuando la condición i se tiene. Supongamos que el jugador $i \in S^*$ decide cambiar su acción de C, ("cooperar") a D, ("desertar") y consideramos la nueva estrategia de juego $\sigma^{**}=(C_1,C_2,\ldots,D_i,\ldots,C_{s-1},D_s,\ldots,D_{s-1})$ de (3.2) tenemos que $\varphi_i(a^{**})=\beta(1-\theta)(h+1)+\gamma-1$ y además $\varphi_i(\sigma^{**})=\beta(1-\theta)h+\gamma-p$, restando ambos pagos obtenemos lo siguiente: $\varphi_i(\sigma^{**})-\varphi_i(a^{**})=\beta(1-\theta)h+\gamma-p-(\beta(1-\theta)(h+1)+\gamma-1)$ reduciendo la expresión anterior tenemos que $\beta(1-\theta)h+\gamma-p-\beta(1-\theta)(h+1)-\gamma+1$ es igual a $-\beta(1-\theta)-p+1$. Determinamos el signo del útimo resultado como sigue: por hipótesis $p<1-\beta(1-\theta)$ entonces $1-\beta(1-\theta)-p>0$, de lo anterior concluímos que $\varphi_i(\sigma^{**})-\varphi_i(a^{**})>0$ y por lo tanto $\varphi_i(\sigma^{**})>\varphi_i(a^{**})$, luego concluimos que el jugador i mejora su pago cuando cambia de su acción C a la acción D y de esta manera concluimos que a^{**} no es un equilibrio de Nash. Por lo tanto σ es el único equilibrio de Nash cuando la condición i se tiene.

Caso ii) Si $p \geq 1-\beta(1-\theta)$. (Cuando el castigo acordado es mayor que la ganancia neta)

Afirmación: $\sigma=(\sigma_i : i \in N^*)$ con $\sigma_i = D$ si $i \in N-S^*$ y $\sigma_i = C$ si $i \in S^*$ es el equilibrio de Nash.

La afirmación anterior nos dice que el equilibrio de Nash se tiene cuando los individuos que están fuera de la asamblea eligen su acción "desertar", y los que están dentro de la asamblea participan con su acción "cooperar"

Para demostrar esta parte del lema analizamos dos subcasos y trabajamos primero con una desigualdad estricta de la condición: $p > 1-\beta(1-\theta)$.

El caso $\sigma_i = D$ para toda $i \in N-S^*$ se tiene por la demostración del lema 3.2.1 ya que estos jugadores no forman parte del convenio. A continuación consideramos el caso de los jugadores que pertenecen a S^*. en donde, el pago correspondiente a cada uno de ellos es el que explicamos en (3.2).

Demostración de la Afirmación. Sea $\sigma = (C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_{s-1}, D_s, \ldots, D_{n-1})$ y supongamos que el jugador $i \in S^*$ cambia su estrategia de juego de C_i a D_i esto nos define a la nueva estrategia $\sigma^* = (C_1, C_2, \ldots, D_i, \ldots, C_{s-1}, D_s, \ldots, D_{n-1})$. Entonces para mostrar la afirmación basta con demostrar que $\varphi_i(\sigma) > \varphi_i(\sigma^*)$, o de otra modo $\varphi_i(\sigma^*) - \varphi_i(\sigma) < 0$. Nuevamente por (3.2) tenemos que: $\varphi_i(\sigma^*) = \beta(1-\theta)h + \gamma - p$ y que $\varphi_i(\sigma) = \beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1$, entonces $\varphi_i(\sigma^*) - \varphi_i(\sigma)$ es igual a $\beta(1-\theta)h + \gamma - p - (\beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1)$ realizamos las operaciones y obtenemos como resultado $-p - \beta(1-\theta) + 1$. Lo único que falta mostrar es que el último resultado es negativo. Por hipótesis tenemos que $p > 1 - \beta(1-\theta)$ entonces $1 - \beta(1-\theta) - p < 0$ por lo tanto $\varphi_i(\sigma^*) - \varphi_i(\sigma) < 0$ de aqui concluimos que $\varphi_i(\sigma^*) < \varphi_i(\sigma)$. Por lo tanto σ es un equilibrio de Nash.

Podemos observar el resultado anterior de manera intuitiva antes de hacer la demostración, la retribución que hace el sistema de riego a cada uno de los campesinos de la comunidad que forman parte de la organización no es suficiente para cubrir la inversión inicial, entonces la inversión les genera una perdida, sin embargo dado que el castigo es mayor que esta pérdida, es preferible hacer la inversión.

Ahora lo que mostramos es que σ es el único equilibrio de Nash simétrico con pagos dominantes. Para hacer esto lo primero que debemos considerar son las demás estrategias simétricas, que según el apartado 3.1 son las únicas estrategias candidatas a ser soluciones del subjuego perfecto. La única estrategia que consideramos es la siguiente σ^{**}=$(D_1, D_2, \ldots, D_i, \ldots, D_{s-1}, \ldots, D_{n-1})$, a continuación mostraremos que esta estrategia no es un equilibrio de Nash. Consideramos que el i-ésimo jugador que pertenece a S^* cambia su acción en el juego de D a C de este modo obtenemos que la nueva estrategia de juego con la cual esta participando la asamblea es $a^{**} = (D_1, D_2, \ldots, C_i, \ldots, D_{s-1}, \ldots, D_{n-1})$, entonces por (3.2) tenemos que $\varphi_i(\sigma^{**}) = \beta(1-\theta)h + \gamma - p$ y además que $\varphi_i(a^{**}) = \beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1$, restando estos dos pagos tenemos lo siguiente $\varphi_i(a^{**}) - \varphi_i(\sigma^{**}) = \beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1 - (\beta(1-\theta)h + \gamma - p)$ reduciendo la expresión anterior obtenemos $\beta(1-\theta)(h+1)+\gamma-1-\beta(1-\theta)h-\gamma+p$ cuyo resultado final es $p-1+\beta(1-\theta)$. Sólo verificamos el signo de la expresión anterior.

Por hipótesis $p > 1-\beta(1-\theta)$ esto implica que $p-1+\beta(1-\theta)$ es positivo por lo tanto $\varphi_i(a^{**}) - \varphi_i(\sigma^{**})$ también es positivo y concluimos que $\varphi_i(a^{**})$ es mayor que $\varphi_i(\sigma^{**})$, lo anterior significa que cada uno de los miembros de la organización mejora su pago cuando cambia su acción de D a C, por lo tanto σ^{**} no es un equilibrio de Nash, y luego σ es el único equilibrio de Nash simétrico con pagos dominantes cuando la desigualdad estricta se tiene.

Trabajamos ahora en el subcaso de la igualdad $p = 1-\beta(1-\theta)$. (Cuando la pérdida causada por desviarse de los acuerdos cooperativos es la misma que la pérdida causada por la inversión)

Afirmación: $b^* = (b_i^* : i \in N^*)$ es el punto de equilibrio de Nash simétrico si $b_i^* = C$ para toda $i \in S^*$ porque tiene pagos dominantes.

El enunciado anterior afirma que aún en el caso de la igualdad estricta los individuos de la asamblea deben elegir como su estrategia de juego a la opción C ("cooperar") ya que utilizando ésta se obtienen pagos dominantes.

Primeramente diremos que cualquier combinación de estrategias $s = (s_i : i \in N^*)$ que cumpla con $s_i = D$ para todos los individuos que no forman parte de la asamblea es un equilibrio de Nash (Lema 3.2.1). Supongamos que tenemos la estrategia de juego $s=(C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_{s-1}, D_s, \ldots, D_{n-1})$, y que existe un jugador $i \in S^*$ el cual decide cambiar de acción en el juego de C a D entonces consideramos la nueva estrategia de juego $s^* = (C_1, C_2, \ldots, D_i, \ldots, C_{s-1}, D_s, \ldots, D_{n-1})$, por (3.2) decimos que $\varphi_i(s) = \beta(1-\theta)(h+1) + \gamma - 1$ y además que $\varphi_i(s^*) = \beta(1-\theta)h + \gamma - p$ restando ambos pagos obtenemos como resultado $\varphi_i(s) - \varphi_i(s^*) = \beta(1-\theta) - 1 + p$, pero por la igualdad $p = 1 - \beta(1-\theta)$ tenemos que $\varphi_i(s) - \varphi_i(s^*) = 0$ por lo tanto $\varphi_i(s) = \varphi_i(s^*)$. Entonces podemos concluir que ambos son equilibrios de Nash, sin embargo como el jugador i es fijo y arbitrario en la demostración entonces concluimos que existen múltiples equilibrios de Nash.

La misma conclusión se obtiene cuando consideramos la estrategia $s^{**} = (D_1, D_2, \ldots, D_i, \ldots, D_{s-1}, D_s, \ldots, D_{n-1})$, las conclusiones anteriores nos dicen que cuando tenemos la condición $p = 1 - \beta(1-\theta)$ entonces el jugador i es indiferente a sus dos acciones (C o D) debido a que la retribución del sistema cuando el jugador invierte, es igual al castigo, entonces al jugador le da lo mismo hacer una cosa que la otra.

A continuación mostraremos que b^* tiene dominancia de pagos sobre cualquier otro punto simétrico de equilibrio $b = (b_i^* : i \in N^*)$. Y que por esta razón b^* es la estrategia que escogemos como equilibrio de Nash del escenario G^5 cuando los jugadores se encuentran en la situación descrita por la condición $p = 1 - \beta(1-\theta)$.

Demostración de la Afirmación. Para cada subconjunto $T \subseteq S^*$ y cada acción $a_i = \{C_i, D_i\}$, denotamos por $b_T(a)$ la probabilidad de que todos los jugadores en T seleccionen a en la estrategia b. Debido a que $b \neq b^*$ se tiene que $b_T(D) > 0$ para algún $T \subseteq S^*$. Sea $F_i(s)$ la función de pagos esperado del jugador i para una combinación de estrategias $b = (b_i : i \in N^*)$ de todos los individuos de la sociedad. Entonces para cada $i \in S^*$ jugador dentro de la organización tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
F_i(b) &= \sum_{i\in T\subseteq S} b_T(C)b_{s^*-T}(D)f_i(C,|T|-1) + \sum_{i\notin T\subseteq S^*} b_T(C)b_{s^*-T}(D)f_i(D,|T|) \\
&= \sum_{i\in T\subseteq S} b_T(C)b_{s^*-T}(D)f_i(C,|T|-1) + \sum_{i\notin T\subseteq S^*} b_T(C)b_{s^*-T}(D)f_i(C,|T|) \\
&< \left\{ \sum_{i\in T\subseteq S} b_T(C)b_{s^*-T}(D) + \sum_{i\notin T\subseteq S^*} b_T(C)b_{s^*-T}(D) \right\} f_i(C, S^*-1) \\
&= f_i(C,|S^*|-1) \\
&= F_i(b^*) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

y para cada $j \in N - S$, es decir, para los campesinos que no forman parte de la organización, establecemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
F_j(b) &= \sum_{T\subseteq S^*} b_T(C)b_{s^*-T}(D)f_j(D,|T|) < \left\{ \sum_{T\subseteq S^*} b_T(C)b_{s^*-T}(D) \right\} f_j(D,|S^*|) \\
&= F_j(b^*) \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Concluimos de (3.3) y (3.4) que el punto de equilibrio simétrico b^* tiene pagos dominantes sobre cualquier otro punto de equilibrio b. De esta manera para el subcaso donde $p = 1 - \beta(1-\theta)$ se obtiene la misma conclusión que en el subcaso donde tenemos la condición $p > 1 - \beta(1-\theta)$. Y por lo tanto la estrategia $\sigma = b^*$ es el único equilibrio de Nash cuando la condición ii se tiene. □

3.2.2. Solución de la etapa "Contrato para Cooperar".

Ahora consideramos la etapa del juego: "Contrato para Cooperar", en esta etapa, que corresponde a la etapa cuatro del juego sólo participan los jugadores que pertenecen a la asamblea S excepto el forzador i^* y se refiere a la etapa en la que se ratifican los acuerdos hechos en las tres etapas anteriores. Dado un conjunto de campesinos que se organizan en una asamblea S para tratar de superar el conflicto en el que se encuentran, la pareja (θ, p), en donde θ representa el costo de sostener una entidad coercitiva y p

el castigo que corresponde a los jugadores que no respeten los acuerdos de cooperación (invertir una unidad de arroz para la construcción del sistema de riego) y una entidad de forzamiento a la que llamamos i^* cada jugador i en la organización S distinto de la entidad de forzamiento i^* tiene dos estrategias $a_i = F$ (firmar) ó $a_i = NF$ (no firmar). Entonces el pago $\varphi_i(a)$ de cada jugador i, dentro de S^*, para una combinación de estrategias puras $a = (a_i : i \in S - \{i^*\})$ esta dado como sigue:

i) Cuando $a = (F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_{s-1})$ (Es decir, cuando todos los jugadores dentro de la asamblea S firman y con esto reconocen los acuerdos de las etapas anteriores)

$$\varphi_i(a) = \begin{cases} \gamma - p & \text{si } p < 1 - \beta(1-\theta) \\ \beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1 & \text{si } p \geq 1 - \beta(1-\theta) \end{cases} \tag{3.5}$$

Si dentro de la organización S se alcanza un acuerdo de cooperación entonces, los pagos dependen del poder de castigo que tenga el forzador, si el castigo es menor que la inversión, entonces los jugadores prefieren pagar el castigo y ganar $\gamma - p$, dado que todos los jugadores tienen un comportamiento idéntico entonces cada uno de ellos preferirá hacer esto último, por esta razón no se construye ninguna unidad del sistema de riego y lo más que pueden producir por cuenta propia es $\gamma - p$. De lo contrario si el castigo es mayor que la pérdida generada por la inversión, entonces los jugadores prefieren cooperar y ganar lo que entre todos, excepto el forzador, producen utilizando el dam, además de la producción que cada campesino puede lograr utilizando sus propios recurso.

ii) Cuando $a \neq (F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_{s-1})$. (Es decir, si al menos uno de los participantes utiliza la acción NF (no firmar) y por lo tanto no se alcanza el acuerdo cooperativo) entonces se obtiene el siguiente pago:

$$\varphi_i(a) = \gamma \tag{3.6}$$

No hay acuerdo cooperativo y cada uno de los jugadores siembra por su cuenta. Ambos incisos (3.5) y (3.6) son los pagos correspondientes a una infinidad de estrategias, sin embargo, lo que nos interesa es elegir de entre todas estas posibles estrategias aquellas que le den a cada uno de los jugadores, dentro y fuera de la asamblea el mayor de los pagos posibles. Utilizamos el lema siguiente para establecer los equilibrios de Nash correspondientes a la etapa cuatro del juego.

Lema 3.2.3. *La etapa del juego "Contrato para Cooperar", $G^4(S, \theta, p, i^*)$ tiene un único vector de pagos como solución $x^* = (x_i^* : i \in S - \{i^*\})$ tal que* *para cada $i \in S, i \neq i^*$. Se tiene:*

$$x_i^* = \begin{cases} \gamma & si\ p < 1-\beta(1-\theta)\ o\ \beta(1-\theta)(s-1) < 1 \\ \beta(1-\theta)(s-1)+\gamma-1 & si\ p \geq 1-\beta(1-\theta)\ y\ \beta(1-\theta)(s-1) \geq 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

y para $i = i^*$

$$x_i^* = \begin{cases} 0 & si\ p < 1-\beta(1-\theta)\ o\ \beta(1-\theta)(s-1) < 1 \\ \theta(s-1) & si\ p \geq 1-\beta(1-\theta)\ y\ \beta(1-\theta)(s-1) \geq 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

La condición $\beta(1-\theta)(s-1) \geq 1$ es equivalente a la siguiente afirmación: el resultado cooperativo en el que cada individuo i en S distinto del forzador contribuye a la construcción del dam es Pareto superior al resultado no cooperativo en el que ningún individuo contribuye. Esto es $\beta(1-\theta)(s-1) \geq 1$ es una condición necesaria y suficiente que garantiza que la cooperación dentro de la asamblea es significativa. El lema 3.2.3 muestra que el acuerdo cooperativo es implementado dentro de la organización S si y sólo si el forzador tiene suficiente poder de castigo p y la cooperación es significativa.

Demostración del Lema 3.2.3. Consideremos los siguientes cuatro casos:
Caso i) Si $p = 0$. (el castigo es inexistente)
Afirmación. $\sigma = (\sigma_i : i \in S - \{i^*\})$ con $\sigma_i = F$ es el equilibrio de Nash.

La estrategia en la que todos los individuos de la asamblea excepto el forzador ratifican los acuerdos cooperativos en el único equilibrio de Nash cuando tenemos la condición i.

Supongamos que los jugadores alcanzan un acuerdo para establecer un juego aún cuando $p = 0$ esto significa que cada uno de los miembros de S decidió firmar para reconocer los acuerdos cooperativos, lo que nos da la siguiente estrategia de juego $\sigma = (F_1, F_2, F_3, \ldots, F_i, \ldots, F_{s-1})$ como el castigo es inexistente los jugadores prefieren pagar el castigo en vez de hacer la inversión, luego el pago asociado a estas condiciones, según la discusión previa al lema 3.2.3, para cada uno de los individuos que intentan forman la organización excepto el forzador, esta dado por $\varphi_i(\sigma) = \gamma - p$ que es igual a γ (utilizando (3.5)) dado que los jugadores se inclinan por no invertir su arroz, entonces no se puede formar el presupuesto total (que resulta de la inversión de una proporción significativa de la producción de los individuos de la sociedad) por lo tanto no se construyen unidades del sistema de riego, y los campesinos no pueden ayudarse de éste al momento de sembrar, además tampoco pueden destinar una fracción de este presupuesto para el pago del forzador por lo tanto su pago es cero.

Demostración de la Afirmación. Una vez que hemos explicado los pagos correspondientes a la estrategia de juego $\sigma_i = F$, supongamos que el jugador i, decide cambiar su acción en el juego a $\sigma_i^* = NF$ entonces el pago correspondiente a la nueva estrategia σ^* según (3.6) es: $\varphi_i(\sigma^*) = \gamma$ restando los pagos obtenemos que $\varphi_i(\sigma^*) = \varphi_i(\sigma)$, porque $p = 0$. Ambos pagos son iguales, por lo tanto, el jugador no mejora ni empeora su situación. Luego ambas estrategias son equilibrios de Nash

Analizamos ahora la otra estrategia de juego simetrica $\sigma_i^{**} = NF$, demostraremos que esta también es un equilibrio de Nash. Supongamos que el jugador i que forma parte de los campesinos que quieren implementar los convenio decide cambiar su acción en el juego (sabemos que este jugador i nunca es el forzador) de $\sigma_i^{**} = NF$ a la nueva estrategia de juego $a_i^{**} = F$ de (3.6) sabemos que los pagos para ambas estrategias son $\varphi_i(\sigma^{**}) = \gamma$, y $\varphi_i(a^{**}) = \gamma$, por lo tanto el jugador no mejora ni empeora su pago cuando decide cambiar su estrategia en el juego y ambas estrategias de juego son equilibrios de Nash.

En general, sea b una estrategia de juego que cumple la siguiente condición $b \neq \sigma \neq \sigma^*$, supongamos que la acción del jugador i, en la estrategia b es *NF* además pensemos que este jugador decide cambiar su estrategia a F entonces tenemos los siguientes resultados si i es el único jugador que utiliza la acción *NF* y cambia a F gana γ ya que en este caso todos los jugadores utilizarían la estrategia F y (3.5) y la condición i establecen esto. Por otro lado si al menos hay otro jugador, además de i utilizando la acción *NF* entonces el pago correspondiente a esta nueva estrategia es también γ. Entonces bajo la condición i tenemos múltiples equilibrios de Nash.

Elegimos la estrategia σ porque es simétrica y nos permite seguir con la formación del juego. Además beneficia a los individuos que no pertenecen a la asamblea. □

Caso ii)Si $0 < p < 1 - \beta(1 - \theta)$. (el castigo es menor que la ganancia neta negativa)

Afirmación. Para toda $i \in S^*$, la estrategia $\sigma^* = (\sigma_i^* \colon i \in S^*)$ con $\sigma_i^* = NF$ domina débilmente a la estrategia $\sigma = (\sigma_i \colon i \in S^*)$ con $\sigma_i = F$. Por lo tanto la combinación de estrategias $(\sigma_i^* \colon i \in S^*)$, con $\sigma_i^* = NF$ es el único punto de equilibrio de Nash simétrico, en el cual el pago del forzador es 0.

Para cada uno de los individuos que participan en la asamblea la estrategia de juego "no firmar" domina débilmente a la estrategia de juego "firmar". Por lo tanto la estrategia de juego en la cual todos los individuos de la organización participan con la acción "no firmar" es el único equilibrio de Nash.

Analizamos primero el caso en el que los jugadores alcanzan un acuerdo, es decir, todos firman y el poder de castigo del forzador es menor que la ganancia neta $p < 1 - \beta(1 - \theta)$, entonces como tenemos esta condición inferimos que los jugadores prefieren pagar el castigo y ganar $\gamma - p$ que hacer la inversión, ya que esto genera una perdida menor, en este caso el pago del forzador es cero porque los jugadores no hacen la inversión y el presupuesto total a partir del cual definimos su sueldo no se forma.

Demostración de la Afirmación. A continuación mostraremos que la estrategia en la que todos utilizan la acción F, es decir, $\sigma=(F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_{s-1})$ no es un equilibrio de Nash, supongamos que el jugador i distinto del forzador decide cambiar su estrategia de juego de $\sigma_i = F$ con la que tiene un pago $\varphi_i(\sigma) = \gamma - p$ a $a_i^{**} = NF$ entonces el pago correspondiente a la nueva estrategia $a^{**} = (F_1, F_2, \ldots, NF_i, \ldots, F_{s-1})$ es $\varphi_i(a^{**}) = \gamma$, según (3.6) ya que al menos uno de los organizadores no esta firmando restando ambas estrategias tenemos $\varphi_i(a^{**}) - \varphi_i(\sigma) = p$ que por hipótesis es positiva por lo tanto $\varphi_i(a^{**}) - \varphi_i(\sigma)$ es también positiva y tenemos que $\varphi_i(a^{**})$ es mayor que $\varphi_i(\sigma)$ y por lo tanto la estrategia σ en la que todos los miembros de la organización firman los acuerdos no es un equilibrio de Nash.

Consideramos ahora la otra estrategia simétrica de juego $\sigma^{**}=(NF_1, NF_2, NF_3, \ldots, NF_i, \ldots, NF_{s-1})$, en la que, todos los jugadores no firman y además $p < 1 - \beta(1 - \theta)$ y supongamos que el jugador i (diferente del forzador) decide cambiar su modo de jugar $\sigma_i^{**} = NF$ a $\sigma_i^{*} = F$ entonces obtenemos la estrategia $\sigma^{*} = (NF_1, NF_2, NF_3, \ldots, F_i, \ldots, NF_{s-1})$ de (3.6) sabemos que $\varphi_i(\sigma^{*}) = \gamma$ y $\varphi_i(\sigma^{**}) = \gamma$ entonces $\varphi_i(\sigma) - \varphi_i(\sigma^{*}) = 0$. Porque no basta que el jugador i cambie su estrategia para que su pago cambie, por lo tanto la acción NF domina débilmente a F, no hay ninguna motivación para que el jugador cambie su estrategia de juego. Luego ambas son equilibrios de Nash.

En general, consideramos una estrategia $b \neq \sigma$, y supongamos que un jugador que juega con la acción $b_i = F$, decide cambiarla a $b_i^{*} = NF$ entonces por (3.6), tenemos que el pago $\varphi_i(b^{*}) = \gamma$, ya que como $b \neq \sigma$, al menos hay siempre un jugador que no esta firmando el acuerdo, por lo tanto cada una de las estrategias que b representa tienen a γ como pago y todas son equilibrios de Nash.

Sin embargo, usamos la estrategia $\sigma^{**} = (NF_1, NF_2, NF_3, \ldots, NF_i, \ldots, NF_{s-1})$ como el único equilibrio de Nash del subjuego perfecto G^4 cuando la condición ii se tiene porque es simétrica. En este caso el pago del forzador es cero porque los jugadores no firman, por lo tanto no establecen ningún acuerdo, y no se forma el presupuesto a partir del cual definimos el sueldo del forzador, el pago para cada uno del resto de los jugadores es γ, porque como no hay arreglo cada uno cosecha lo que por su propia cuenta puede hacer. $\square$

Caso iii). Si $1 - \beta(1-\theta) \leq p$ y $\beta(1-\theta)(s-1) < 1$. (El caso en el que el castigo es lo suficientemente grande para persuadir a los campesinos de la asamblea de desviarse de los acuerdos y la cooperación dentro de S no es significativa)

Afirmación. La estrategia $\sigma^{**} = (\sigma_i^{**} : i \in S^*)$ con $\sigma_i^{**} = NF$ es un único punto de equilibrio simétrico.

La estrategia en la que cada uno de los miembros de la organización decide "no firmar" es el único equilibrio de Nash de la etapa cuatro con la condición del inciso iii.

Demostración de la Afirmación.

Supongamos que aún con las condiciones establecidas los jugadores deciden firmar el acuerdo cooperativo para realizar el juego de arreglos institucionales, consideramos pues que los jugadores han decidido usar la estrategia $\sigma = (F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_{s-1})$ entonces para este caso según (3.5) el pago de cada uno de los jugadores que firman el convenio es $\varphi_i(\sigma) = \beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1$, a continuación mostraremos que σ no es un equilibrio de Nash. Supongamos que el jugador i distinto del forzador decide cambiar su estrategia de juego de $\sigma_i = F$ a $\sigma_i^* = NF$ entonces la nueva estrategia que consideramos es la siguiente $\sigma^* = (F_1, F_2, \ldots, NF_i, \ldots, F_{s-1})$ el pago asociado a esta estrategia según (3.6) es $\varphi_i(\sigma^*) = \gamma$. Restando ambos pagos obtenemos lo siguiente $\varphi_i(\sigma) - \varphi_i(\sigma^*) = \beta(1-\theta)(s-1) - 1$. Por hipótesis tenemos que $\beta(1-\theta)(s-1) < 1$, entonces $\beta(1-\theta)(s-1) - 1$ es menor que cero. Por lo tanto $\varphi_i(\sigma) - \varphi_i(\sigma^*)$ es negativo entonces $\varphi_i(\sigma) < \varphi_i(\sigma^*)$, luego dado que el jugador i mejora su pago cuando cambia su estrategia de juego concluimos que σ no es un equilibrio de Nash.

Consideramos la otra estrategia de juego simétrica $\sigma^{**} = (NF_1, NF_2, \ldots, NF_i, \ldots, NF_{s-1})$ con pago igual a $\varphi_i(\sigma^{**}) = \gamma$ según (3.6) y supongamos que el jugador i decide cambiar su estrategia de juego de $\sigma_i^{**} = NF$ a $a_i^{**} = F$ entonces tenemos la nueva estrategia de juego $a^{**} = (NF_1, NF_2, \ldots, F_i, \ldots, NF_{s-1})$, cuyo pago correspondiente es $\varphi_i(a^{**}) = \gamma$, restando ambas estrategias concluimos que $\varphi_i(a^{**}) = \varphi_i(\sigma^{**})$, por lo tanto el jugador no mejora ni empeora su pago cuando decide cambiar su acción en el juego. Luego ambos son equilibrios de Nash.

En general si tenemos una estrategia $b \neq \sigma^{**}$, entonces el pago correspondiente de acuerdo con la condición (3.6) es $\varphi_i(b) = \gamma$, es decir, cada una de las estrategias caracterizadas por b, le dan al jugador i un pago igual a

γ. Si decide cambiar su estrategia de juego y "firmar" esto no le es útil ya que hay otro(s) jugador(es) que participa(n) con la estrategia "no firmar" y por lo tanto el pago correspondiente a estos casos según (3.6) es γ. Es importante señalar que el número de participantes que cambian su estrategia de "no firmar" a "firmar" nunca coincide con el número de participantes de la estrategia σ, en donde todos firman el acuerdo cooperativo ya que como vimos anteriomente σ no es un equilibrio de Nash. Esta explicación nos permite concluir que tenemos múltiples equilibrios de Nash.

Sin embargo escogemos como equilibrio de Nash para este caso, la estrategia simétrica $\sigma^{**} = (NF_1, NF_2, \dots, NF_i, \dots, NF_{s-1})$ cuyo pago para el forzador es cero, ya que el acuerdo no se alcanza, y para cada uno de los demás jugadores es γ.

Caso iv). Si $p \geq 1 - \beta(1-\theta)$ y $\beta(1-\theta)(s-1) > 1$. (Cuando el castigo es suficientemente grande para evitar que los asambleístas se desvíen de los acuerdos cooperativos y la cooperación dentro de la organización es significativa).

Consideramos un primer subcaso (a) en donde la cooperación $\beta(1-\theta)(s-1) > 1$ es estrictamente positiva.

Afirmación. La combinación de estrategias puras $\sigma = (\sigma_i : i \in S^*)$ con $\sigma_i = F$ es el único punto de equilibrio simétrico.

Para todos los miembros de la asamblea es conveniente firmar cuando existen las condiciones sobre el castigo y la cooperación de las hipótesis.

Demostración de la Afirmación. Sea la estrategia $\sigma = (F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_{s-1})$ para todos los miembros de la cooperativa, el pago asociado al jugador i de la asamblea es de acuerdo con (3.5), $\varphi_i(\sigma) = \beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1$ además supongamos que este mismo jugador i decide cambiar su estrategia de $\sigma_i = F$ a $\sigma_i^* = NF$, debido a esto ahora consideramos la estrategia de juego $\sigma^* = (F_1, F_2, \dots, NF_i, \dots, F_{s-1})$, probaremos que σ es un equilibrio de Nash demostrando la desigualdad $\varphi_i(\sigma) > \varphi_i(\sigma^*)$ de (3.6) decimos que $\varphi_i(\sigma^*) = \gamma$, entonces $\varphi_i(\sigma) - \varphi_i(\sigma^*)$ es igual a $\beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1 - \gamma$ reduciendo la expresión anterior tenemos $\beta(1-\theta)(s-1) - 1$. Lo único que debemos determinar es el signo de esta última expresión. Pero por hipótesis $\beta(1-\theta)(s-1) > 1$ entonces $\beta(1-\theta)(s-1)-1$ es mayor que cero, luego $\varphi_i(\sigma) - \varphi_i(\sigma^*)$ es positivo y por lo tanto $\varphi_i(\sigma)$ es mayor que $\varphi_i(\sigma^*)$ entonces podemos concluir que σ es un equilibrio de Nash. A continuación demostraremos que σ es el único equilibrio de Nash.

Consideramos la otra estrategia de juego simétrica $\sigma^* = (NF_1, NF_2, \dots, NF_i, \dots, NF_{s-1})$ cuyo pago correspondiente es $\varphi_i(\sigma^*) = \gamma$ y supongamos que el jugador i decide cambiar su acción de $\sigma_i^* = NF$ a $\sigma_i^{**} = F$ entonces tenemos la estrategia de juego $\sigma^{**} = (NF_1, NF_2, \ldots, F_i, \ldots, NF_{s-1})$, supongamos por un momento que σ^* es un equilibrio de Nash entonces debe suceder que cuando el jugador i cambia su acción de juego, no mejore su pago, es decir: $\varphi_i(\sigma^*) > \varphi_i(\sigma^{**})$ o de manera equivalente la diferencia $\varphi_i(\sigma^{**}) - \varphi_i(\sigma^*)$ debe ser menor a cero. De (3.6) verificamos que $\varphi_i(\sigma^{**}) = \gamma$ y además que $\varphi_i(\sigma^*) = \gamma$ restando ambos pagos obtenemos $\varphi_i(\sigma^{**}) - \varphi_i(\sigma^*) = 0$ por lo tanto el jugador i que esta dentro de la asamblea no mejora su pago y comprobamos que ambos son equilibrio, en general supongamos que tenemos una estrategia de juego $b \neq \sigma^*$, y $b \neq \sigma$ siempre, luego nuevamente de (3.6) tenemos que $\varphi_i(\sigma^*) = \varphi_i(b) = \gamma$, (ya que al menos con una de las entradas igual a la acción NF obtenemos el pago γ) por lo tanto cualquier cambio de estrategia de F a NF que intente realizar alguno de los jugadores será inútil ya que su pago sigue siendo el mismo, entonces con cada una de las estrategias de juego caracterizadas por la estrategia b que cumple las restricciones antes establecidas obtenemos un equilibrio de Nash, sin embargo escogemos como equilibrio de Nash la estrategia σ^* porque es simétrica.

Como en ambos casos $\sigma = (F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{s-1})$ y $\sigma^* = (NF_1, NF_2, NF_3, \ldots, NF_{s-1})$, tenemos puntos de equilibrio simétricos escogemos como equilibrio de Nash a la estrategia que tiene un pago dominante que en este caso es la estrategia σ.

Para demostrar este hecho restamos los pagos correspondientes $\varphi_i(\sigma)$ y $\varphi_i(\sigma^*)$ y obtenemos lo siguiente $\beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1 - \gamma$ simplificando la expresión anterior obtenemos como resultado $\beta(1-\theta)(s-1) - 1$ esta expresion es positiva, pues por hipótesis $\beta(1-\theta)(s-1) > 1$. Por lo tanto $\varphi_i(\sigma) > \varphi_i(\sigma^*)$ entonces σ es la única solución y debido a que el convenio se establece todos los jugadores dentro de la asamblea y alguna proporción de los que están fuera de ella invertirán una unidad de arroz y cada campesino podrá destinar la fracción θ para el salario del forzador, entonces el salario de este último es en este caso $\theta(s-1)$.

Consideramos ahora el subcaso (b) donde tenemos la igualdad estricta $\beta(1-\theta)(s-1) = 1$.

Analizamos la estrategia $\sigma = (F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_{s-1})$ para cada uno de los miembros de la asamblea y al jugador i dentro de la misma que decide cambiar su acción de $\sigma_i = F$ a $\sigma_i^* = NF$, con lo que obtenemos la nueva estrategia $\sigma^* = (F_1, F_2, \ldots, NF_i, \ldots, F_{s-1})$ restamos los pagos de ambas estrategias $\varphi_i(\sigma) - \varphi_i(\sigma^*)$ y obtenemos lo siguiente $\beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1 - \gamma$ reducimos la expresión anterior y obtenemos el resultado $\beta(1-\theta)(s-1) - 1$ luego utilizamos la condición $\beta(1-\theta)(s-1) = 1$ y concluimos que $\beta(1-\theta)(s-1) - 1$ es igual a cero, es decir, la retribución del sistema es igual a la inversión que cada uno de ellos debe hacer, por lo tanto $\varphi_i(\sigma) - \varphi_i(\sigma^*)$

es igual a cero y $\varphi_i(\sigma) = \varphi_i(\sigma^*)$ luego el jugador i no mejora ni empeora su pago cuando cambia su acción en el juego, por lo que ambos son equilibrios.

En general, sea $b = (b_i : i \in S^*)$ una estrategia fija y arbitraria y supongamos que el jugador i esta participando en el juego con la acción F (firmar), ahora supongamos que i cambia de acción a NF (no firmar) y consideremos la nueva estrategia $b^* \neq b$. Si i es el primer jugador que decide no firmar, nos encontramos en el caso del párrafo anterior. Pero si además de i al menos hay otro jugador utilizando la acción NF entonces sabemos que $\varphi_i(b) = \varphi_i(b') = \gamma$ aún en el caso de que uno a uno los jugadores cambien su estrategia y todos utilicen la acción NF como acción de juego el pago correspondiente es γ, luego cualquier combinación es un equilibrio de Nash, y por las consideraciones que hicimos al principio del trabajo escogemos a $\sigma = (\sigma_i : i \in S^*)$ con $\sigma_i = F$, como equilibrio de Nash.

Como en ambos subcasos a y b obtenemos la misma conclusión la afirmación queda demostrada. □

3.2.3. Solución de la etapa "Elección del Forzador".

Lema 3.2.4. *La etapa del juego $G^3(S, \theta, p)$, "Elección del Forzador" tiene los siguientes pagos como solución.*

i). *Si $p < 1 - \beta(1 - \theta)$, o $1 - 1/[\beta(s-1)] < \theta$, entonces $\varphi_i = \gamma \ \forall i \in S$.*

ii). *Si $p \geq 1 - \beta(1 - \theta)$, $\theta \leq 1 - 1/[\beta(s-1)]$, y $\theta < \gamma/(s-1)$, entonces $\varphi_i = \gamma \ \forall i \in S$.*

iii). *Si $p \geq 1 - \beta(1 - \theta)$, y $\gamma/(s-1) \leq \theta \leq 1 - 1/[\beta(s-1)]$, entonces $\varphi_i = [\theta + \beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1](s-1)/s \ \forall i \in S$.*

Esta etapa depende de la existencia de una asamblea de participantes dispuestos a cooperar para superar el dilema del prisionero en el que se encuentra inmersa la comunidad, así como de la existencia de acuerdos sobre el castigo y el salario del forzador. Consideraremos los siguentes tres casos:

Demostración del lema 3.2.4. Caso i) Si $p < 1-\beta(1-\theta)$ o $1-1/[\beta(s-1)] < \theta$. (Si el castigo es menor que la ganancia neta negativa o el salario del forzador es muy grande).

Afirmación. La estrategia $\sigma = (\sigma_i : i \in S)$ con $\sigma_i = NA$ es el único equilibrio de Nash.

Si tenemos un castigo pequeño o un salario muy alto, entonces cada uno de los miembros de la asamblea S prefiere no aceptar jugar el papel del forzador, ya que en realidad la asamblea no tiene la capacidad de pagar este salario.

Supongamos que un jugador i dentro de la asamblea S es seleccionado como el forzador utilizando un juego de lotería. Del lema 3.2.3 inciso (3.7) utilizamos que si $p < 1-\beta(1-\theta)$ (el castigo es pequeño) o $\beta(1-\theta)(s-1) < 1$ (la cooperación no es significativa) entonces el pago para cualquier jugador cuando la asamblea utiliza una combinación de estrategias puras $a = (a_i : i \in S)$ con $a_i = A$ esta dado por $\varphi_i(a) = \gamma$ y para el forzador $\varphi_{i^*}(a) = 0$ (3.8). (La condición $1 - 1/[\beta(s-1)] < \theta$ es equivalente a la condición $\beta(1-\theta)(s-1) < 1$, porque $\beta(1-\theta)(s-1) < 1$ implica $(1-\theta) < 1/[\beta(s-1)]$ entonces $-\theta < 1/[\beta(s-1)]-1$ luego $\theta > 1-1/[\beta(s-1)]$). La demostración de la primera parte del lema se hace utilizando lo que discutimos en este párrafo. Diremos además que, en cualquier otro caso los jugadores no alcanzan un acuerdo y el pago para cada uno de ellos es γ.

Demostración de la Afirmación. Supongamos que se tiene la estrategia de juego $a = (A_1, A_2, \ldots, A_{i^*}, \ldots, A_s)$ en este caso todos los miembros de la asamblea han decidido aceptar, si son designados por la organización, a trabajar como fuerza coercitiva entonces el pago correspondiente a esta estrategia para cada uno de los participantes es $\varphi_i(a) = \gamma$ mientras que el pago para el forzador es $\varphi_{i^*}(a) = 0$ además por otro lado supongamos que el jugador i^* (el forzador) decide cambiar su acción de $a_{i^*} = A$ a $a^*_{i^*} = NA$, de este modo tenemos una nueva estrategia de juego $a^* = (A_1, A_2, \ldots, NA_{i^*}, \ldots, A_s)$ para la cual $\varphi_{i^*}(a^*) = \gamma$, como el jugador escogido en la lotería para ser el forzador mejora su pago cuando decide no aceptar entonces a no es un equilibrio de Nash. De lo anterior también podemos concluir que la estrategia de la forma $a_{i^*} = A$, con $i = i^*$ y $a_i = NA$ para los demás miembros de la asamblea diferentes del forzador tampoco es un equilibrio de Nash, ya que de acuerdo a lo que discutimos el forzador nunca aceptará jugar con la estrategia A mientras prevalezcan esas condiciones sobre su pago.

Por lo tanto las estrategias que analizamos son aquellas en las que el forzador juega con su acción NA.

Analizamos ahora, la otra estrategia de juego simétrica $\sigma^* = (NA_1, NA_2, \ldots, NA_i, \ldots, NA_s)$ en la cual tanto el forzador como el resto de los jugadores usan la estrategia no aceptar como su acción en el juego. En este caso el pago asociado a dicha estrategia es $\varphi_i(\sigma^*) = \gamma$, porque el acuerdo no es alcanzado, supongamos que un jugador distinto del forzador decide cambiar su estrategia en el juego de NA a A, nuestra nueva estrategia es $a^{**} = (NA_1, NA_2, \ldots, A_i, \ldots, NA_s)$, dado que con al menos uno de los jugadores que no acepte el acuerdo, éste no se alcanza entonces ambas estrategias tienen el mismo pago $\varphi_i(\sigma^*) = \varphi_i(a^{**}) = \gamma$, por lo tanto el jugador conserva el mismo pago cuando cambia su estrategia. En general cualquier estrategia de juego que contiene al menos una acción de juego igual a NA tiene como pago asociado γ, por lo tanto concluimos que tenemos múltiples puntos de equilibrio. Es decir obtenemos que cualquier combinación de estrategias diferente de a es un equilibrio de Nash, elegimos la estrategia simétrica $\sigma^* = (NA_1, NA_2, \ldots, NA_i, \ldots, NA_s)$ como el único equilibrio de Nash, con la cual se cumple que todos los jugadores participan de la misma manera y obtienen como pago corespondiente γ.

Caso ii) Si $p \geq 1-\beta(1-\theta), \theta \leq 1-1/[\beta(s-1)]$ y $\theta < \gamma/(s-1)$. (El castigo es significativo, el salario del forzador no acapara todo el presupuesto, sin embargo, es menor que el sueldo que obtiene si trabaja como campesino).

Afirmación. $\sigma = (\sigma_i : i \in S)$ con $\sigma_i = NA$ es el único equilibrio de Nash.

La única estrategia posible que la asamblea puede llevar a cabo con las condiciones antes descritas es que cada uno de los miembros designados a trabajar como la entidad de forzamiento no acepten.

Como el forzador es seleccionado utilizando un juego de lotería entonces los pagos para los jugadores, dada una combinación de estrategias puras $a = (a_i : i \in S)$ con $a_i = A$ como estrategia a seguir por cada uno de los miembros de la organización, según las condiciones de este inciso y el lema 3.2.3 incisos (3.7) y (3.8), están dados como sigue: dado que el castigo es mayor que la ganancia neta y la cooperación es significativa cada uno de los jugadores prefiere hacer la inversión y de (3.7) tenemos que el pago para cada uno de los campesinos es $\beta(1-\theta)(s-1)+\gamma-1$ mientras que el pago para el forzador es $\theta(s-1)$.

El pago $\varphi_i(\sigma^*) = \beta(1-\theta)(s-1)+\gamma-1$, para cualquier individuo de la asamblea distinto del forzador es mayor o igual que γ, debido a la condición $\theta \leq 1-1/[\beta(s-1)]$, por otro lado el pago correspondiente a la entidad de forzamiento $\varphi_{i^*}(\sigma^*) = \theta(s-1)$ es menor que γ, debido a la condición $\theta < \gamma/(s-1)$ establecida en ii, en cualquier otro caso, es decir, para $a = (a_i : i \in S)$, con $a_i \neq A$ para algún $i \in S$, el acuerdo cooperativo no se establece y todos los jugadores tienen como pago $\varphi_i(a) = \gamma$.

Demostración de la Afirmación. Supongamos que los jugadores utilizan la estrategia $\sigma^* = (\sigma_i^* : i \in S)$ con $\sigma_i^* = A$ entonces el pago correspondiente es, de acuerdo con lo discutido en el párrafo anterior $\varphi_i(\sigma^*) = \beta(1-\theta)(s-1)+\gamma-1$ mientras que el pago del forzador es $\varphi_{i^*}(\sigma^*) = \theta(s-1)$ menor que γ. Pero cada uno de los campesinos puede obtener por cuenta propia un pago igual a γ, entonces dado que con la estrategia A el campesino que juega el papel del forzador obtiene un pago menor que γ, este optará por cambiar su estrategia a NA, en este caso el pago según la nueva estrategia $\sigma^{**} = (A_1, A_2, \ldots, NA_{i^*}, \ldots, A_s)$ es $\varphi_{i^*}(\sigma^{**}) = \gamma$ por lo tanto, aunque el resto de los jugadores no mejoran su pago, como el forzador si lo hace entonces éste decide siempre jugar con su estrategia NA y σ^* no es un equilibrio de Nash.

Ahora verificamos lo que sucede con la estrategia de comportamiento simétrica $\sigma = (NA_1, NA_2, \ldots, NA_i, \ldots, NA_s)$, que tiene un pago asociado para cada jugador $\varphi_i(\sigma) = \gamma$ supongamos que un jugador distinto del forzador decide cambiar su acción de juego de NA a A obtenemos la nueva estrategia $a^{**} = (NA_1, NA_2, \ldots, A_i, \ldots, NA_s)$ que tiene como pago correspondiente $\varphi_i(a^{**}) = \gamma$. Comparamos ambos pagos y concluimos que el jugador i no mejora ni empeora su pago cuando decide cambiar su acción en el juego, por lo tanto ambos son equilibrios de Nash. Debido a la discusión del párrafo anterior el forzador nunca cambia su acción de no aceptar a aceptar, por lo tanto no consideramos este caso.

En general, supongamos que tenemos una estrategia $b \neq \sigma$, y además $b \neq \sigma^*$, es decir, distinta de las dos estrategias simétricas de juego, que tiene al menos una acción igual a NA la del forzador por lo que discutimos en el primer párrafo de esta demostración (para establecer los pagos) tenemos que el pago asociado para estrategias con la característica descrita es $\varphi_i(b) = \gamma$. Si alguno de los jugadores decidiera cambiar su estrategia de juego sería inútil ya que el forzador nunca cambia la suya y por lo tanto el jugador recibe el mismo pago. Entonces decimos que cualquier combinación de estrategias diferente de σ^* es un equilibrio de Nash, sin embargo colocamos como único equilibrio de Nash la estrategia simétrica $\sigma = (NA_1, NA_2, \ldots, NA_i, \ldots, NA_s)$ con la cual cada uno de los jugadores incluido el forzador se comportan de la misma manera y ganan γ.

Caso iii) Si $p \geq 1 - \beta(1-\theta)$, y $\gamma/(s-1) \leq \theta \leq 1 - 1/[\beta(s-1)]$. (Si el castigo es mayor que la ganancia neta negativa, y el salario del forzador no es mayor al presupuesto logrado por la asamblea pero es mayor o igual a la productividad individual de un campesino).

Afirmación. La estrategia $\sigma = (\sigma_i \colon i \in S)$ con $\sigma_i = A$ para todo $i \in S$ es el único punto de equilibrio.

En el caso en el que se tienen las dos condiciones del inciso iii ya explicadas la única estrategia posible y que permite seguir adelante con los convenios es que cada uno de los individuos de la asamblea acepten trabajar, si son elegidos, como la entidad de forzamiento..

Consideremos la estrategia $\sigma = (\sigma_i : i \in S)$ con $\sigma_i = A$ para todos los individuos de la asamblea entonces el pago asociado de acuerdo con las hipótesis es el siguiente: en el caso del forzador $\varphi_{i^*}(\sigma) = \theta(s-1)$ el cual por hipótesis es mayor o igual que γ y para el resto de los jugadores $\varphi_i(\sigma) = \beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1$ el cual es mayor que γ. (Por hipótesis

$\theta \leq 1 - 1/[\beta(s-1)]$ que es equivalente a $\beta(1-\theta)(s-1) \geq 1$). En cualquier otro caso, si $\sigma_i \neq A$, es decir, si alguno de los jugadores decide no aceptar este papel entonces el pago para todos los campesinos de la comunidad es $\varphi_i(\sigma^*) = \gamma$.

Demostración de la Afirmación. Consideremos la estrategia de juego $\sigma = (A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_s)$ y supongamos que un jugador i que pertenece a la asamblea distinto del forzador decide cambiar su acción de "aceptar" a "no aceptar" entonces tenemos la nueva estrategia $\sigma^* = (A_1, A_2, \ldots, NA_i, \ldots, A_s)$ y demostraremos que $\varphi_i(\sigma)$ es mayor que $\varphi_i(\sigma^*)$. Entonces por (3.7) el pago para cualquier miembro de la asamblea distinto del forzador es: $\varphi_i(\sigma) = \beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1$ mientras que para σ^* es $\varphi_i(\sigma^*) = \gamma$. Restando ambos pagos se obtiene lo siguiente $\beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1 - \gamma$ reduciendo la expresión obtenemos como resultado $\beta(1-\theta)(s-1) - 1$. Para establecer el signo de la última expresión utilizamos la hipótesis siguiente: $\theta < 1 - 1/[\beta(s-1)]$ entonces $\theta - 1 < -1/[\beta(s-1)]$ luego $1/[\beta(s-1)] < 1 - \theta$ trasponiendo términos $1 < \beta(1-\theta)(s-1)$ obtenemos $(1-\theta)(s-1)\beta - 1 > 0$. Por lo tanto $\varphi_i(\sigma) - \varphi_i(\sigma^*)$ es positivo, luego $\varphi_i(\sigma)$ es mayor que $\varphi_i(\sigma^*)$. Lo anterior implica que el jugador no mejora su pago cuando cambia su acción en el juego. Hacemos esto mismo con el forzador supongamos, a continuación que el forzador decide cambiar de A a NA luego la nueva estrategia de juego es $\sigma^* = (A_1, A_2, \ldots, NA_{i^*}, \ldots, A_s)$, cuyo pago correspondiente es $\varphi_{i^*}(\sigma^*) = \gamma$, además sabemos que el forzador obtiene con la estrategia σ un pago igual a $\varphi_{i^*}(\sigma) = \theta(s-1)$, si juega con su acción "aceptar". Observamos las hipótesis y concluimos que el forzador empeora su pago cuando cambia su acción en el juego, es decir, $\varphi_{i^*}(\sigma) > \varphi_{i^*}(\sigma^*)$ entonces la acción "aceptar" domina fuertemente a la acción "no aceptar" como en ambos casos llegamos a la misma conclusión entonces tenemos que la estrategia σ es un equilibrio de Nash.

A continuación mostraremos que σ es el único equilibrio de Nash cuando tenemos las condiciones del inciso iii, para hacer esto consideramos la otra estrategia simétrica, y demostramos que ésta no es un equilibrio de Nash. Sea $a^* = (NA_1, NA_2, \ldots, NA_i, \ldots, NA_s)$ cuyo pago correspondiente según (3.6) es $\varphi_i(a^*) = \gamma$ (porque no se alcanza ningún acuerdo cooperativo), y supongamos que el jugador i el cual puede ser el forzador o cualquier otro decide cambiar su estrategia de juego de NA a A de esta manera obtenemos la nueva estrategia de juego $a^{**} = (NA_1, NA_2, \ldots, A_i, \ldots, NA_s)$ en la que el jugador i tiene como pago (según (3.6)) correspondiente $\varphi_i(a^{**}) = \gamma$. Comparamos ambos pagos y concluimos que el jugador conserva el mismo pago aún cuando cambia su acción de juego por lo tanto ambos son equilibrios de Nash. En general si tenemos una estrategia $b \neq a^*$, en la que hay al menos un jugador que utiliza su acción NA, tenemos lo siguiente: si en la estrategia b hay un sólo jugador utilizando la estrategia NA y decide cambiar a la estrategia A entonces estamos en el primer párrafo de la demostración de esta afirmación, en cambio cuando dos o más jugadores utilizan su estrategia NA y uno de ellos cambia a su estrategia A esto no hace diferencia porque el pago asociado a cualquiera de estas estrategias es $\varphi_i(b^*) = \gamma$. Concluimos que cualquier combinación de estrategias es un equilibrio de Nash, sin embargo, escogemos la estrategia $a^* = (NA_1, NA_2, \ldots, NA_i, \ldots, NA_s)$ como un equilibrio de Nash, porque es simétrica.

Vericamos cual de las dos estrategias determina un pago mayor, por (3.7) obtenemos $\varphi_i(\sigma) = \beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1$ y por (3.6) que $\varphi_i(a^*) = \gamma$, restando ambas estrategias tenemos lo siguiente $\varphi_i(\sigma) - \varphi_i(a^*) = \beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1 - \gamma = \beta(1-\theta)(s-1) - 1$, ahora por hipótesis sabemos que $\theta < 1 - 1/[\beta(s-1)]$ entonces $1/[\beta(s-1)] < 1 - \theta$ luego $1 < \beta(s-1)(1-\theta)$ trasponiendo términos $0 < \beta(s-1)(1-\theta) - 1$ por lo tanto $\varphi_i(\sigma) - \varphi_i(a^*) > 0$ y $\varphi_i(\sigma) > \varphi_i(a^*)$. Verificamos lo mismo para el forzador por (3.8) el pago para el forzador cuando utiliza la estrategia σ es $\varphi_{i^*}(\sigma) = \theta(s-1)$ mientras que con la estrategia a^* el pago correspondiente es $\varphi_{i^*}(a^*) = \gamma$, por hipótesis $\gamma/(s-1) \leq \theta$, por lo tanto el forzador también obtiene un pago mayor cuando juega como el resto de los jugadores (con la estrategia σ).

De lo anterior podemos concluir que como σ es una estrategia simétrica con pago dominante sobre a^* entonces σ es el único equilibrio de Nash del subjuego perfecto G^3 dadas las condiciones del inciso iii.

De este modo para una combinación de estrategias puras $(\sigma = \sigma_i : i \in S)$ con $\sigma_i = A$ para toda $i \in S$ obtenemos la solución del inciso iii y el pago esperado por el jugador para el caso iii del lema 3.2.4 lo escribimos de la siguiente manera, por las hipótesis y el lema 3.2.3, tenemos que el pago correspondiente es $\varphi_i(\sigma) = \beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1$ para toda $i \in S^*$ (3.7), y $\varphi_i(\sigma) = \theta(s-1)$ si $i = i^*$, por (3.8) sin embargo dado que el forzador es elegido por los jugadores a través de un juego de lotería en el que el azar interviene entonces hacemos las siguientes modificaciones al pago de los jugadores: Consideramos un jugador fijo y arbitrario, que puede jugar con probabilidad $1/s$ (la lotería asigna la misma probabilidad a cada uno de los s jugadores de jugar como forzador) como forzador y con probabilidad $(1 - 1/s)$ como campesino, si juega como entidad de forzamiento entonces su pago es $\theta(s-1)$, en cambio si juega como campesino el pago obtenido es $\beta(1-\theta)(s-1)+\gamma-1$. Luego la esperanza de pago del jugador i según nuestras consideraciones para el escenario $G^3(S, \theta, p)$ es $\varphi_i(a) = \theta(s-1)(1/s) + \{\beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1\}(s-1)/s = \{\theta + \{\beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1\}\}(s-1)/s$.

La condición $\theta \geq \gamma(s-1)$ significa que el forzador i^* obtiene un salario $\theta(s-1)$, más alto que el pago no cooperativo γ. El lema 3.2.4 muestra que cada individuo en S acepta, si es nominado, a trabajar como el forzador si y sólo si la condición anterior se tiene. Sin embargo nos importa saber las características con las que deben cumplir θ (el salario del forzador) y s (el tamaño del grupo) para hacer posible la cooperación.

La región de la proporción del salario θ y el tamaño s del grupo el cual hace posible la cooperación esta dada por la figura 3.1, de la cual podemos observar lo que sigue:

a) Hay un tamaño mínimo $1+\gamma+1/\beta$ del grupo S que hace posible establecer el juego de arreglos institucionales.

b) Cuando la cooperación es posible, existe un límite superior y un límite inferior para el salario θ del forzador. (Lema 3.2.4 inciso iii).

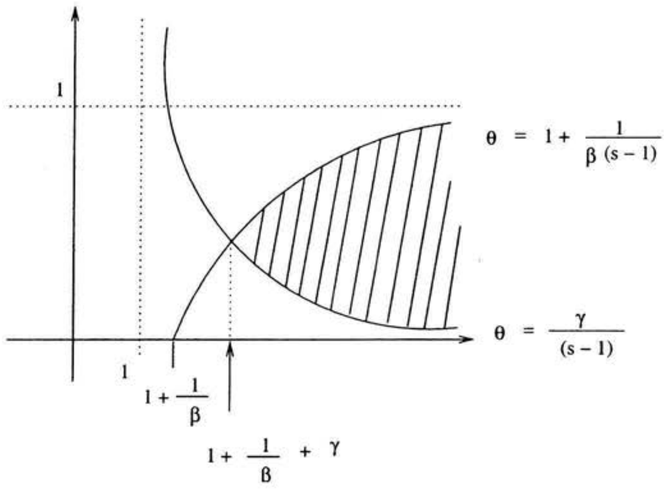


Figura 3.1:

A continuación explicamos la forma de obtener la gráfica anterior.

Del lema 3.2.4 tenemos que el acuerdo cooperativo se alcanza si y sólo si $\gamma/(s-1) \leq \theta \leq 1 - 1/[\beta(s-1)]$, es decir, si θ se encuentra entre estos dos límites. Igualando θ a su límite inferior y después a su límite superior tenemos lo siguiente:

Sea $\theta = f(s) = \gamma/(s-1)$, con γ un parámetro, $f(s) > 0$ siempre porque $\gamma > 1$ por hipótesis, y $s > 1$ siempre porque si $s = 1$ la función se indetermina y si $s < 1$, el pago del forzador es negativo, lo cual no puede ser. Calculamos los límites de esta función: $\lim\limits_{s\to 1^+} f(s) = \infty$, y además $\lim\limits_{s\to\infty} f(s) = 0$, concluimos que la función no tiene intersecciones con los ejes. Por otro lado la derivada de la función es $f'(s) = -\gamma/(s-1)^2$, que no tiene puntos críticos ($\gamma > 1$ por hipótesis). Calculamos la segunda derivada $f''(s) = 2\gamma/(s-1)^3$ y observamos que es positiva. Entonces del análisis anterior obtenemos la siguiente gráfica.

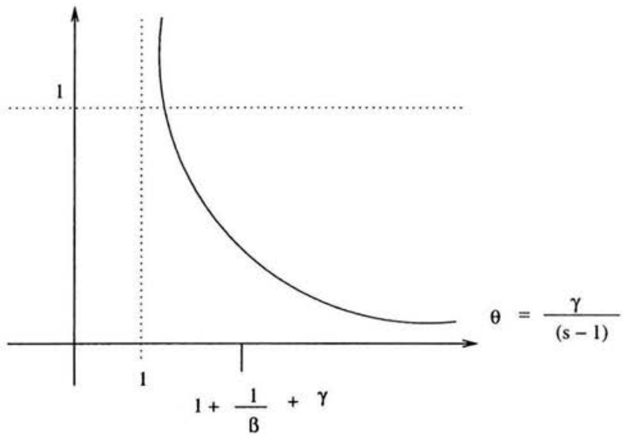


Figura 3.2:

Analizamos ahora la función $\theta = f(s) = 1 - 1/[\beta(s-1)]$ la intersección con el eje de las abcisas es $s = 1/\beta + 1$, $(1 - 1/[\beta(s-1)] = 0$ entonces $1 = 1/[\beta(s-1)]$ luego $\beta(s-1) = 1$ trasponiendo términos $\beta s = 1 + \beta$ concluimos que $s = 1/\beta + 1)$. Obtenemos los límites: $\lim_{s\to\infty} f(s) = 1$ y $\lim_{s\to 0} f(s) = 1 - 1/\beta$ Calculamos la primera derivada $f'(s) = 1/\beta(s-1)^2$ y observamos que no hay puntos críticos, luego obtenemos la segunda derivada $f''(s) = -2/\beta(s-1)^3$ como $s > 1$ entonces $f(s)$ es cóncava hacia abajo. De lo anterior obtenemos es la gráfica de la figura 3.3.

Calculamos el punto de intersección igualando ambas ecuaciones: $\theta = \gamma/(s-1) = 1 - 1/[\beta(s-1)]$ entonces $\gamma/(s-1) = (\beta(s-1)-1)/\beta(s-1)$ luego $\gamma\beta(s-1) = (\beta(s-1)-1)(s-1)$ como $s > 1$ entonces $\gamma\beta = (\beta(s-1)-1)$ luego $(\gamma\beta + 1 + \beta)/\beta = s$ concluimos que $\gamma + 1/\beta + 1 = s$. Este punto de intersección nos da el tamaño mínimo necesario de la asamblea para que esta pueda establecer acuerdos. Es importante hacer notar que el tamaño del grupo esta relacionado con γ y β, entonces podemos observar lo siguiente si la cantidad de arroz que cada uno de los jugadores puede obtener por el mismo es muy grande, entonces es necesario un grupo de cooperación muy grande, al igual que si β es muy pequeño.

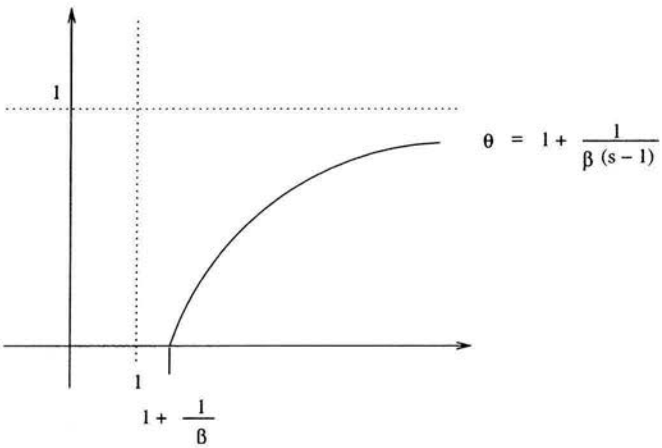


Figura 3.3:

3.2.4. Solución de la etapa "Elección del Castigo y Costo del Sistema de Forzamiento".

Lema 3.2.5. *La etapa del juego "Elección del Castigo y Costo del Sistema de Forzamiento", $G^2(S)$, tiene los siguientes pagos como solución:*

i) *Si* $1 \leq s < 1 + 1/\beta + \gamma$, *entonces* $\varphi_i = \gamma$ *para toda* $i \in S$.

ii) *Si* $1 + 1/\beta + \gamma \leq s$ *entonces* $\theta^* = \gamma/(s-1)$ *y* $p^* \geq 1 - \beta(1-\theta)$, $\varphi_i = \gamma/s + \{\beta(s-1-\gamma) + \gamma - 1\}(s-1)/s$ *para toda* $i \in S$.

En la etapa del juego "Elección del Forzador", todos los individuos en el grupo más grande que el tamaño mínimo necesario crean el sistema de forzamiento y pactan las siguientes características: el poder de castigo p^* suficientemente grande para prevenirlos de la deserción además de asegurarse de que la proporción del salario θ del forzador sea igual a la frontera inferior obtenida en el lema 3.2.4. El salario del forzador es igual al pago no cooperativo γ independientemente del tamaño del grupo.

Demostración del lema 3.2.5. Consideramos los siguientes dos casos:

Caso i) Si $1 \leq s < 1 + 1/\beta + \gamma$ (El tamaño de la asamblea no es mayor que el mínimo necesario para establecer acuerdos).

Afirmación. La asamblea no decide sobre los parámetros θ y p y el pago para cada uno de los individuos es: $\varphi_i = \gamma$.

Si $1 \leq s < 1 + 1/\beta + \gamma$ entonces $s < 1 + 1/\beta + \gamma$, luego $s - 1 < 1/\beta + \gamma$ pero el lado derecho de esta desigualdad es igual a $(1 + \gamma\beta)/\beta$ concluimos

$\beta(s-1)-1$ es menor que $\gamma\beta$ por lo tanto $(s-1)-1/\beta$ es menor que γ por lo tanto $1-1/[\beta(s-1)]$ es menor que $\gamma/(s-1)$. Pero si tenemos la condición anterior entonces utilizando la figura 3.1 sabemos que θ debe ser menor que $1-1/\beta(s-1)$ que es el límite superior del pago del forzador y en general es también el monto total que los individuos logran reunir, como $1-1/[\beta(s-1)] \leq \gamma/(s-1)$ del lema 3.2.4 inciso ii, θ necesariamente es menor que $\gamma/(s-1)$ y el pago correspondiente a cada jugador i que pertenece a la asamblea, para una combinación de estrategias puras $((\theta_i, p_i) \colon i \in S)$, es γ. Entonces si tenemos las condiciones anteriores, ya no es posible establecer un convenio y el juego pasa a la etapa 5b.

Caso ii) Si $1+1/\beta+\gamma \leq s$ (El número de miembros de la asamblea supera al mínimo requerido para poder establecer acuerdos).

Afirmación. Los individuos de la asamblea establecen los parámetros θ y p como sigue $\theta^* = \gamma/(s-1)$ y $p^* \geq 1-\beta(1-\theta)$.

Si $1+1/\beta+\gamma \leq s$ entonces $1+\gamma\beta \leq \beta(s-1)$ luego $\gamma\beta \leq \beta(s-1)-1$ por lo tanto $\gamma \leq (s-1)-1/\beta$ concluimos que $\gamma/(s-1) \leq 1-1/[\beta(s-1)]$.

Por la discusión del lema 3.2.4 sabemos que el salario del forzador se comporta de la siguiente manera $\gamma/(s-1) \leq \theta \leq 1-1/[\beta(s-1)]$. Luego por el lema 3.2.4 inciso iii concluimos que el pago del jugador i para una combinación de estrategias $((\theta_i, p_i) : i \in S)$, que cumplen $(\theta_1, p_1) = (\theta_2, p_2) = \cdots = (\theta_s, p_s)$ y además $p \geq 1-\beta(1-\theta)$ esta dado por $\varphi_i = \theta(s-1)(1/s) + \{\beta(1-\theta)(s-1)+\gamma-1\}(s-1)/s$ que es igual a $\{\theta + (\beta(1-\theta)(s-1)+\gamma-1\}(s-1)/s$. Lo único que falta mostrar es que este pago cooperativo es mayor que el pago no cooperativo γ.

En cualquier otro caso si $(\theta_j, p_j) \neq (\theta_i, p_i)$ para cualesquiera i, j jugadores, entonces $\varphi_i = \gamma$ para toda $i \in S$. Lo anterior implica que los jugadores no llegaron a un acuerdo y por lo tanto el juego pasa a la etapa 5 b.

Observemos el pago establecido cuando los jugadores llegan a un acuerdo $\varphi_i = \theta(s-1)(1/s)+\{\beta(1-\theta)(s-1)+\gamma-1\}(s-1)/s$. Recordamos que en esta etapa del juego los participantes escogen de manera independiente a θ, y p y además hacemos notar que sólo θ esta presente en el pago de los campesinos, entonces podemos inferir que los jugadores escogerán θ de tal manera que máximicen su pago o de manera equivalente de tal forma que el forzador gane el pago mínimo. (Recordamos que el salario de el forzador es $\theta(s-1)$, es decir, también involucra el parámetro θ). Observando la figura 3.1 tenemos que el salario del forzador es mínimo sólo cuando θ es igual $\gamma/(s-1)$, en adelante escribiremos a θ como θ^* con el objetivo de diferenciarla del resto de las posibles opciones. Luego reescribiendo el pago de los jugadores obtenemos lo siguiente:

En el pago del jugador $\varphi_i = \theta(s-1)(1/s)+\{\beta(1-\theta)(s-1)+\gamma-1\}(s-1)/s$ sustituimos $\theta^* = \gamma/(s-1)$, entonces tenemos $\varphi_i = \{\theta + \{\beta(1-\theta)(s-1) + \gamma - 1\}\}(s-1)/s = \{\gamma/(s-1) + \{\beta(s-1)(1-\gamma/(s-1)) + \gamma - 1\}\}(s-1)/s$ podemos concluir que $\varphi_i = \{\gamma/(s-1) + \{\beta(s-1-\gamma) + \gamma - 1\}\}(s-1)/s = \gamma/s + \{\beta(s-1-\gamma) + \gamma - 1\}(s-1)/s$.

De esta manera establecemos el pago que el lema 3.2.5 inciso ii nos da como resultado.

Ahora mostraremos que el pago cooperativo es mayor que el pago no cooperativo γ. Restando ambos pagos obtenemos lo siguiente: $\gamma/s + \{\beta(s-1-\gamma) + \gamma - 1\}(s-1)/s - \gamma$ que es igual a $\gamma/s + \beta(s-1-\gamma)(s-1)/s + \gamma(1-1/s) - \gamma$ simplificando la expresión anterior obtenemos $\beta(s-1-\gamma)(s-1)/s$. Comprobamos que los dos factores que integran el producto anterior sean positivos: $(s-1)/s$ es positivo porque es una probabilidad, ahora sólo revisamos $\beta(s-1-\gamma)$. Por hipótesis $1 + 1/\beta + \gamma \leq s$ entonces $1 + \gamma\beta \leq \beta(s-1)$ de aquí concluimos que $1 \leq \beta(s-1) - \gamma\beta$ y como uno es positivo, entonces el primer factor del producto es positivo también y por lo tanto hemos demostrado que el pago cooperativo es mayor que el pago no cooperativo. $\square$

3.2.5. Solución de la etapa "Decisión de Participar".

Finalmente la etapa del juego "Decisión de Participar" G^1, es analizada. Sea $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ una combinación de estrategias puras, donde $d_i = 1$, implica que el jugador i participa en el convenio y $d_i = 0$ implica que el jugador i no participa en el convenio. Además $S = |S(d)|$, es el número de jugadores que deciden participar, en la formación de un sistema de forzamiento, entonces a partir del lema 3.2.5 establecemos el pago del jugador i en G^1, para una combinación de estrategias puras $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ dado por lo siguiente:

i) Cuando $d_i = 1$

$$\varphi_i(d) = \begin{cases} \gamma/s + \{\beta(s-1-\gamma) + \gamma - 1\}(s-1)/s & \text{si } 1 + \gamma + 1/\beta \leq s \\ \gamma & \text{si } 1 \leq s \leq 1 + \gamma + 1/\beta \end{cases} \tag{3.9}$$

ii) Cuando $d_i = 0$

$$\varphi_i(d) = \begin{cases} \beta(s-1-\gamma) + \gamma & \text{si } 1 + \gamma + 1/\beta \leq s \\ \gamma & \text{si } 0 \leq s \leq 1 + \gamma + 1/\beta \end{cases} \tag{3.10}$$

A continuación explicamos como a partir del lema 3.2.5 podemos concluir los pagos establecidos anteriormente. El pago $\varphi_i(d) = \gamma/s + \{\beta(s-1-$

$\gamma) + \gamma - 1\}(s-1)/s$ con la condición $1 + 1/\beta + \gamma \leq s$ en (3.9) se obtiene directamente del lema 3.2.5 inciso ii, al igual que el pago $\varphi_i(d) = \gamma$ en (3.9) que se obtiene del lema 3.2.5 inciso i. Sólo nos resta explicar los pagos asignados a los miembros que no están dentro del convenio, si los jugadores de la asamblea están en una situación como el resultado del lema 3.2.5 i, entonces no hay convenio y los individuos que no participan desde el inicio no reciben beneficio alguno, luego su pago es $\varphi_i(d) = \gamma$, que aparece en (3.10), pero si los jugadores están en una situación como en el caso ii del lema 3.2.5, es decir, una situación en la que les es posible establecer el juego de convenios institucionales entonces los demás jugadores que pertenecen a $N - S$, reciben el beneficio correspondiente $\beta(s - 1 - \gamma)$ además de γ.

De (3.9) y (3.10), podemos ver que el pago $\varphi_i(d)$ del jugador i en G^1 depende sólo de su propia acción d_i y el número h de participantes. De esta manera denotamos el pago del jugador i por $\varphi(d_i, h)$. Definimos también como s^* el entero más grande que no excede a $1 + 1/\beta + \gamma$. Denotamos a s^* por $[1 + 1/\beta + \gamma]_+$.

Lema 3.2.6. *Una combinación de estrategias puras $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ de G^1 es un equilibrio de Nash si $0 \leq |S(d)| \leq s^* - 2$ o $|S(d)| = s^*$.*

Dada una estrategia $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ lo que nos interesa saber es cuantas acciones d_i son iguales a uno, porque de acuerdo a este número establecemos la posibilidad de formar el juego de arreglos institucionales o no. Sea $|S(d)|$ la cardinalidad de $S(d)$, entonces este número representa el número de jugadores que escogieron $d_i = 1$ como su acción en el juego.

Caso i) *Afirmación. $0 \leq |S(d)| \leq s^* - 2$ es un equilibrio de Nash.*

Este caso se interpreta como aquel en el que el conjunto necesario para establecer el juego de acuerdos institucionales es menor, en a lo más dos miembros, que el mínimo necesario s^*.

Es fácil ver de (3.9) y (3.10) que cualquier combinación de estrategias es un equilibrio de Nash cuyo pago asociado es γ.

Demostración de la Afirmación. Supongamos la estrategia de juego $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ en la que $d_i = 1$ es igual a $s^* - 2$, es decir, estamos considerando la estrategia en la cual hay el máximo número de acciones $d_i = 1$ permitidas, entonces ningún jugador que utilice su acción 0, podrá cambiarla a 1, lo único que analizamos es lo que sucede cuando un jugador que participa con la acción 1, decide cambiarla a 0, en este caso la nueva estrategia de juego d^* tiene un uno menos que la estrategia anterior y de este modo $|S(d^*)|$ es menor que para la estrategia inicialmente considerada d, por lo tanto la condición del lema se conserva y por (3.9) se tiene que el pago asociado a esta nueva estrategia d^* también es γ.

En general si tenemos una estrategia d^{**} que tiene al menos una entrada igual a uno menos que la estrategia d (las estrategias pueden ser diferentes en más de una entrada) entonces d^{**} cumple con la condición del lema que tratamos de probar y por (3.9) obtenemos que el pago correpondiente para todas las estrategias que tienen la misma estructura de d^{**} es $\varphi_i(d^{**}) = \gamma$, por lo tanto el jugador no mejora ni empeora su pago y concluimos que cualquier combinación mixta de estrategias es un equilibrio de Nash.

Caso ii). *Afirmación* $|S(d)| = s^*$ *es un equilibrio de Nash.*

Analizamos ahora el caso cuando $|S(d)| = s^* - 1$, es decir cuando el conjunto de la asamblea $S(d)$, tiene un integrante menos que los necesarios para formar el juego de arreglos institucionales entonces tenemos una estrategia de juego en la cual hay una acción $d_i = 1$ menos que las necesarias para llegar a un acuerdo.

Afirmación 1. $|S(d)| = s^* - 1$ *no es equilibrio de Nash.*

Demostración de la Afirmación. Supongamos que el jugador i juega con la acción $d_i = 0$, y decide cambiarla a $d_i^* = 1$, entonces para la nueva estrategia d^* que logra que la cardinalidad del conjunto sea igual a la mínima necesaria para establecer los acuerdos se tiene que el pago asociado es de acuerdo con (3.9) $\varphi_i(d^*) = \gamma/s + \{\beta(s-1-\gamma)+\gamma-1\}(s-1)/s$, mientras que la estrategia, en la cual hay uno menos que los necesarios, d tiene un pago igual a $\varphi_i(d) = \gamma$ según (3.10). Restamos ambos pagos para obtener cual de ellos es mayor y obtenemos lo siguiente: $\varphi_i(d^*) - \varphi_i(d) = \gamma/s + \{\beta(s-1-\gamma) + \gamma - 1\}(s-1)/s - \gamma$ simplificando la expresión anterior obtenemos lo siguiente $-\gamma(1-1/s) + \{\beta(s-1-\gamma)+\gamma-1\}(1-1/s)$ que implica $\{-\gamma+\beta(s-1-\gamma)+\gamma-1\}(1-1/s)$ finalmente obtenemos $\{\beta(s-1-\gamma)-1\}(1-1/s)$... (3.11). A la expresión anterior la llamamos (3.11).

Ahora bien por hipótesis $1 + 1/\beta + \gamma < s$ entonces $1/\beta + \gamma < s - 1$ lo que implica $1 + \beta\gamma < \beta(s-1)$ por lo tanto $\beta(s-1) - \beta\gamma - 1$, es mayor que cero lo anterior nos muestra que el primer factor del producto (3.11) es positivo sin embargo $(1 - 1/s)$ también lo es pues $1/s$ es una probabilidad menor que uno siempre, por lo tanto es positivo y todo el producto lo es, concluimos que $\varphi_i(d^*) - \varphi_i(d)$ es mayor que cero. Esto implica $\varphi_i(d^*) > \varphi_i(d)$. Lo único que resta por explicar es lo que sucede con los pagos de los jugadores que deciden no cooperar es decir, aquellos que juegan con su acción $d_i = 0$. Para la estrategia de juego d el pago para cada uno de los jugadores es $\varphi_i(d) = \gamma$, mientras que para la estrategia de juego d^* el pago correspondiente a este jugador es $\varphi_i(d^*) = \beta(s-1-\gamma) + \gamma$, restando ambos pagos obtenemos lo siguiente $\varphi_i(d^*) - \varphi_i(d) = \beta(s-1-\gamma) + \gamma - \gamma$ reduciendo la expresión anterior tenemos que $\beta(s-1-\gamma)$ que es positivo, porque por hipótesis tenemos que

$1+\gamma+1/\beta \leq s$ que implica $\beta\gamma+1 \leq \beta(s-1)$ por lo tanto $1 \leq \beta(s-1)-\beta\gamma$ pero como uno es positivo entonces concluimos que $\varphi_i(d^*) - \varphi_i(d)$ es mayor que cero, por lo tanto $\varphi_i(d^*)$ es mayor que $\varphi_i(d)$, es decir cada uno de los jugadores que no participan en el convenio desde el principio mejoran también su pago.

Por lo tanto en ambos casos llegamos a la misma conclusión d no es un equilibrio de Nash, porque cuando uno de los jugadores cambia su estrategia mejora el pago de todos.

Afirmación 2. $|S(d)| > s^*$ *no es un equilibrio de Nash.*

Demostración de la afirmación. Dado que los casos anteriores analizan las estrategias cuyo número de jugadores con acción $d_i = 1$ es menor que el necesario, entonces en este caso sólo podemos considerar estrategias d en las que el número de jugadores que prefieren la acción 1 es mayor al mínimo s^* necesario, además recordamos que el pago asociado a un jugador i que utiliza la acción $d_i = 1$ es $\varphi_i(d) = \gamma/s + \{\beta(s-1-\gamma)+\gamma-1\}(s-1)/s$, ahora supongamos que el jugador i decide cambiar su estrategia de juego a $d_i^* = 0$, entonces dado que la condición $1 + 1/\beta + \gamma < s$ se tiene el pago asociado a i según (3.10) es $\varphi_i(d^*) = \beta(s-1-\gamma)+\gamma$, lo único que falta por establecer es cual de los dos pagos es mayor. Restamos ambos pagos y obtenemos lo siguiente: $\varphi_i(d^*) - \varphi_i(d) = \beta(s-1-\gamma)+\gamma-\gamma/s-\{\beta(s-1-\gamma)+\gamma-1\}(s-1)/s$ simplificando términos $\gamma(1-1/s)+\beta(s-1-\gamma)-\beta(s-1-\gamma)(s-1)/s+(-\gamma+1)(s-1)/s$ reorganizamos los términos $\gamma(1-1/s)+\{\beta(s-1-\gamma)\}(1-(1-1/s))-\gamma(s-1)/s+(s-1)/s$ y finalmente obtenemos $\{\beta(s-1-\gamma)\}(1-(1-1/s))+(1-1/s)$. Como $(1-1/s)$ es una probabilidad esta siempre es positiva, entonces lo único que falta por demostrar es que $\{\beta(s-1-\gamma)\}(1-(1-1/s)) > 0$.

Por hipótesis $1+\gamma+1/\beta < s$ entonces $\gamma+1/\beta < s-1$ luego $\beta\gamma+1 < \beta(s-1)$ por lo tanto $0 < 1 < \beta(s-1)-\beta\gamma$ que es igual a $\beta(s-1-\gamma)$ por lo tanto $\beta(s-1-\gamma > 0$ y como $1/s > 0$ porque es una probabilidad entonces $\varphi_i(d^*) - \varphi_i(d) > 0$ por lo tanto $\varphi_i(d^*) > \varphi_i(d)$. Luego la estrategia d no es un equilibrio de Nash, ya que los jugadores se benefician cuando cambian de acción en el juego. Combinando ambas afirmaciones 1 y 2 obtenemos la demostración del caso ii. □

Finalmente consideramos la solución no cooperativa de la etapa del juego decisión de participar. Sea π, la probabilidad de cada individuo de participar en el convenio. Entonces caracterizamos la solución como sigue:

Teorema 3.2.7. *Si* $n = s^*$ *entonces todos los individuos participan en el convenio. Si* $n \geq s^* + 1$ *entonces* G^1 *tiene una única solución en la cual la* *probabilidad de participación π^* de cada individuo satisface:*

$$\binom{n-1}{s^*-1}A_{s^*} = \sum_{k=s^*}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{\pi^*}{1-\pi^*}\right)^{k-(s^*-1)} B_k$$

donde $A_{s^*} = f(1, s^*-1) - \gamma$ y $B_k = f(0,k) - f(1,k)$. Si $n < s^*$ entonces el sistema de irrigación nunca es construido.

En el teorema 3.2.7, A_{s^*} significa el incentivo de cada jugador para formar el mínimo grupo de tamaño s^* para construir el dam, y B_k ($k = s^*, \ldots, n-1$) significa el incentivo de cada jugador en un grupo con $(k+1)$ miembros para desviarse de los acuerdo. La deserción no es independiente del tamaño k del grupo. La proporción de los incentivos B_k/A_{s^*} ($k = s^*, \ldots, n-1$) de deserción y cooperación juegan un papel crucial en la determinación de la probabilidad de participación.

Demostración del Teorema 3.2.7.

Caso i) Si $n = s^*$. (Si el tamaño de la sociedad es igual al tamaño mínimo necesario para establecer acuerdos).

Afirmación. La estrategia $d = (1, 1, \ldots, 1, \ldots, 1)$ es la única solución del juego G^1.

Consideramos la estrategia $d = (1, 1, \ldots, 1, \ldots, 1)$ y además consideramos también al jugador i, que en este caso juega con la estrategia $d_i = 1$, luego el pago correspondiente a este jugador es $\varphi_i(d) = \gamma/s + \{\beta(s-1-\gamma)+\gamma-1\}(s-1)/s$, ahora supongamos que este jugador cambia su acción de juego a $d_i^* = 0$ entonces dado que $n = s^*$ (es decir, la comunidad es del tamaño del parámetro mínimo necesario para que el convenio sea establecido) si el jugador i cambia su manera de jugar concluimos que hay menos individuos que los necesarios dispuesto a participar en el convenio por lo tanto $s < [1+\gamma+1/\beta]_+ = s^*$ con esta condición y de (3.10) obtenemos que para la nueva estrategia $d^* = (1, 1, \ldots, 0, \ldots, 1)$ el pago correspondiente es $\varphi_i(d^*) = \gamma$. Restando ambos pagos obtenemos $\varphi_i(d) - \varphi_i(d^*) = \gamma/s + \{\beta(s-1-\gamma)+\gamma-1\}(s-1)/s - \gamma$ que es igual a $\gamma(1/s-1)+\beta(s-1-\gamma)(s-1)/s+(\gamma-1)(s-1)/s$ reduciendo términos obtenemos $\beta(s-1-\gamma)(s-1)/s - (s-1)/s$ que es igual a $(\beta(s-1-\gamma)-1)(1-1/s)$. Sólo nos falta demostrar que la última expresión es positiva. Sin embargo, el segundo factor $(1-1/s)$ es positiva porque es una probabilidad.

A continuación probaremos que $\beta(s-1-\gamma)-1$ es mayor que cero. Cuando el pago del jugador i es igual a $\varphi_i(d) = \gamma/s + \{\beta(s-1-\gamma)+\gamma-1\}(s-1)/s$ tenemos la condición $1+\gamma+1/\beta < s$ entonces $\gamma+1/\beta < s-1$ luego $\beta\gamma+1 < \beta(s-1)$ por lo tanto $\beta(s-1)-\beta\gamma-1$ es positivo. Luego $\varphi_i(d) - \varphi_i(d^*) > 0$

entonces $\varphi_i(d) > \varphi_i(d^*)$, concluimos que la estrategia d es un equilibrio de Nash.

Consideramos la segunda estrategia simétrica del juego $d_2 = (0, 0, \dots, 0, \dots, 0)$, en la que todos los miembros de la comunidad han decidido no cooperar, cuyo pago correspondiente es $\varphi_i(d_2) = \gamma$ ahora consideramos que el jugador i cambia su estrategia de $d_i = 0$ a $d_i^* = 1$, por lo que tenemos la nueva estrategia de juego $d^* = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, sabemos que el pago asociado al jugador con esta estrategia es $\varphi_i(d^*) = \gamma$, porque para que el jugador i mejore su pago todos los jugadores deben optar por su acción $d_i = 1$, por lo tanto ambos son equilibrio de Nash.

En general consideramos una estrategia $b \neq d_2$, es decir, b es una estrategia en la que al menos uno de los jugadores usa su acción $d_i = 1$. Si un jugador cambia su estrategia de 1 a 0, entonces tenemos los dos siguientes casos, si solamente ese jugador usa la estrategia 1 y cambia a 0 estamos en el caso anterior, donde todos los jugadores utilizan su acción 0 y el cual es un equilibrio de Nash, en cambio obtenemos el segundo caso cuando además del jugador analizado existe al menos otro jugador que utiliza su estrategia 1, como la comunidad por hipótesis es tamaño mínimo necesario s^* es decir, para que se forme la asamblea todos los individuos de la comunidad deben de participar, y hay jugadores, que no participan, (juegan con la acción 0) entonces ésta estrategia tiene como pago correspondiente γ con esto concluimos que tenemos múltiples equilibrios de Nash. Escogemos como equilibrio, la estrategia simétrica $d_2 = (0, 0, \dots, 0, \dots, 0)$.

Por lo tanto hemos encontrado dos equilibrios de Nash simétricos, $d = (1, 1, \dots, 1, \dots, 1)$ y $d_2 = (0, 0, \dots, 0, \dots, 0)$. Verificamos cual de los dos tiene un pago mayor, sin embargo, por lo que hicimos en la primera parte de esta demostracion tenemos que $\varphi_i(d) > \varphi_i(d_2)$. Por lo tanto $d = (1, 1, \dots, 1, \dots, 1)$ es el único equilibrio de Nash cuando la condición $n = s^*$, se tiene.

Caso ii) Desarrollamos a continuacion el caso cuando $s^* < n$.

Afirmación 1. La estrategia $d = (0, 0, \dots, 0, \dots, 0)$ es la única solución en estrategias puras.

Demostración de la Afirmación 1. Sea $d_1 = (1, 1, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 0)$ una estrategia cuyo número de miembros que eligen la acción 1 es suficiente para formar una asamblea es decir $s^* < |S(d)| < n$ cuyo pago correspondiente para el campesino i que participa es según (3.9), $\varphi_i(d_1) = \gamma/s + \{\beta(s - 1 - \gamma) + \gamma - 1\}(s-1)/s$ supongamos que el jugador i cambia su estrategia de $d_i = 1$ a $d_i^* = 0$ entonces obtenemos la nueva estrategia de juego $d^* = (1, 1, \dots, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ con pago correspondiente $\varphi_i(d^*) = \beta(s - 1 - \gamma) + \gamma$. Restamos ambos pagos y obtenemos lo siguiente: $\varphi_i(d^*) - \varphi_i(d_1) = \beta(s -$

$1-\gamma)+\gamma-\gamma/s-\{\beta(s-1-\gamma)+\gamma-1\}(s-1)/s$ que es igual a $\beta(s-1-\gamma)+\gamma-\gamma/s-\beta(s-1-\gamma)(1-1/s)-\gamma(1-1/s)+(1-1/s)$ y a partir de esto obtenemos como resultado $\beta(s-1-\gamma)1/s+(1-1/s)$.

El segundo sumando de la expresión anterior siempre es positivo por lo tanto sólo debemos mostrar el signo del primer sumando, por los pagos asociados a las estrategias de juego de cada jugador, tenemos la condición $1+\gamma+1/\beta<s$ entonces $\gamma+1/\beta<s-1$ luego $\beta\gamma+1<\beta(s-1)$ concluimos $0<1<\beta(s-1-\gamma)$ este sumando también es positivo, luego como $1/s$ es mayor que cero siempre, dado que es la probabilidad de ser el forzador entonces $\beta(s-1-\gamma)1/s$ es mayor que cero. Por lo tanto $\varphi_i(d^*)-\varphi_i(d_1)>0$ esto implica que $\varphi_i(d^*)>\varphi_i(d_1)$. Lo anterior indica que el jugador i mejora su pago cuando cambia su acción de $d_i=1$ a $d_i=0$. Por lo tanto $d_1=(1,1,\ldots,1,\ldots,1)$ no es un equilibrio de Nash.

Analizamos la estrategia simétrica $d_2=(0,0,\ldots,0,\ldots,0)$ con pago $\varphi_i(d_2)=\gamma$ cuando el jugador i cambia a $d_2=1$ obtenemos la nueva estrategia $d_2^*=(0,0,\ldots,1,\ldots,0)$ con pago $\varphi_i(d_2^*)=\gamma$ ya que los demás jugadores han decidido no cooperar. Concluimos que $\varphi_i(d_2)=\varphi_i(d_2^*)$. Luego ambas estrategias determinan equilibrios de Nash. Escogemos la estrategia simétrica $d_2=(0,0,\ldots,0,\ldots,0)$ como el único equilibrio de Nash en estrategias puras cuando la condición $s^*<n$ se tiene.

Debido al resultado anterior, en lo que sigue caracterizaremos un punto de equilibrio en estrategias mixtas.

Afirmación 2. El escenario de juego G^1 tiene un único punto de equilibrio simétrico en estrategias mixtas.

Sea $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ cualquier punto simétrico en estrategias mixtas donde $b_i=(\pi,1-\pi)$, con $0<\pi<1$ para todo $i\in N$ y π la probabilidad de participar. Entonces tenemos que para cada jugador $i\in N$:

$$\varphi_i(b^*/1)=\varphi_i(b^*/0) \tag{3.12}$$

donde $b^*/1$ y $b^*/0$ son combinaciones de estrategias obtenidas de b si b_i se reemplaza con 1 o 0, respectivamente, entonces (3.12) se reescribe de (3.9) y (3.10) como:

$$\sum_{s=0}^{s^*-2}\binom{n-1}{s}\pi^s(1-\pi)^{n-s-1}\gamma+\sum_{s=s^*-1}^{n-1}\binom{n-1}{s}\pi^s(1-\pi)^{n-s-1}\varphi_i(1,s)$$

$$=\sum_{s=0}^{s^*-1}\binom{n-1}{s}\pi^s(1-\pi)^{n-s-1}\gamma+\sum_{s=s^*}^{n-1}\binom{n-1}{s}\pi^s(1-\pi)^{n-s-1}\varphi_i(0,s) \tag{3.13}$$

La parte izquierda de la igualdad representa la esperanza de pago del jugador i cuando el resto de los jugadores utilizan la estrategia b, y dicho jugador i, utiliza siempre su estrategia 1. La dividimos en dos sumandos de los cuales el primero representa la suma de todas las probabilidades de obtener estrategias en las que hay a lo más $s^* - 2$ jugadores además de él utilizando la acción 1, multiplicada por el pago correspondiente a cada una de esas estrategias que en este caso es γ, el otro sumando agrupa la suma de las probabilidades de obtener estrategias en las que hay por lo menos $s^* - 1$ jugadores además de él utilizando la acción $d_i = 1$, cada una de las probabilidades se multiplica por el pago correspondiente el cual depende de la acción decidida por cada jugador i y del número de jugadores que cooperan. Mientras que la parte derecha de la igualdad representa la esperanza de pago del jugador i, cuando el resto de los jugadores utilizan la estrategia b, y éste, utiliza siempre su estrategia 0. Esta dividida en dos sumandos, el primero de ellos representa la probabilidad de obtener estrategias en las que hay a lo más $s^* - 1$ jugadores utilizando la estrategia 1, mientras el juega con su acción 0, multiplicada por la esperanza de pago asociada a cada una de estas estrategias, el segundo sumando representa la suma de las probabilidades de obtener estrategias en donde el número de jugadores que utilizan la acción 1 sin incluirlo sea por lo menos igual al parámetro mínimo necesario para poder establecer el juego de convenios institucionales s^*, multiplicada cada una de estas probabilidades por el pago correspondiente que depende de la acción no cooperar decidida por el jugador i y del número de jugadores que cooperan para establecer el convenio.

Desarrollando algunos términos tenemos lo siguiente:

$$\sum_{s=0}^{s^*-2} \binom{n-1}{s} \pi^s (1-\pi)^{n-s-1} \gamma + \binom{n-1}{s^*-1} \pi^{s^*-1} (1-\pi)^{n-s^*} \varphi_i(1, s^*-1)$$

$$+ \sum_{s=s^*}^{n-1} \binom{n-1}{s} \pi^s (1-\pi)^{n-s-1} \varphi_i(1, s)$$

$$= \sum_{s=0}^{s^*-2} \binom{n-1}{s} \pi^s (1-\pi)^{n-s-1} \gamma + \binom{n-1}{s^*-1} \pi^{s^*-1} (1-\pi)^{n-s^*} \gamma$$

$$+ \sum_{s=s^*}^{n-1} \binom{n-1}{s} \pi^s (1-\pi)^{n-s-1} \varphi_i(0, s)$$

Reordenando ambos lados de la ecuación tenemos:

$$\binom{n-1}{s^*-1} \pi^{s^*-1} (1-\pi)^{n-s^*} \{\varphi_i(1, s^*-1) - \gamma\} =$$

$$\sum_{s=s^*}^{n-1} \binom{n-1}{s} \pi^s (1-\pi)^{n-s-1} \{\varphi_i(0,s) - \varphi_i(1,s)\} .$$

y de este modo

$$\binom{n-1}{s^*-1} \{\varphi_i(1, s^*-1) - \gamma\}$$

$$= \sum_{s=s^*}^{n-1} \binom{n-1}{s} (\pi^s (1-\pi)^{n-s-1}) / (\pi^{s^*-1} (1-\pi)^{n-s^*}) \{\varphi_i(0,s) - \varphi_i(1,s)\} .$$

De lo anterior obtenemos:

$$\binom{n-1}{s^*-1} \{\varphi_i(1, s^*-1) - \gamma\}$$

$$= \sum_{s=s^*}^{n-1} \binom{n-1}{s} (\pi^{s-s^*+1} / (1-\pi)^{s-s^*+1}) \{\varphi_i(0,s) - \varphi_i(1,s)\}$$

y de este modo tenemos

$$\binom{n-1}{s^*-1} A_{s^*} = \sum_{s=s^*}^{n-1} \binom{n-1}{s} B_s \left(\frac{\pi}{1-\pi} \right)^{s-(s^*-1)} \tag{3.14}$$

en donde $A_{s^*} = \varphi_i(1, s^*-1) - \gamma$ y $B_s = \varphi_i(0,s) - \varphi_i(1,s)$ para $s \geq s^*$.

Sea $g(\pi)$ una función que representa la función del lado derecho de (3.14). A continuación demostraremos que $g(\pi)$ es una función monótona creciente sobre el $[0,1)$.

Consideramos la función

$$g(\pi) = \sum_{s=s^*}^{n-1} \binom{n-1}{s} \{\varphi_i(0,s) - \varphi_i(1,s)\} \left(\frac{\pi}{1-\pi} \right)^{s-(s^*-1)} .$$

Para probar la afirmación anterior demostramos que la derivada es estrictamente creciente, sin embargo, dado que cada uno de los sumandos tiene la misma forma, y además la condición $s \geq s^*$ se tiene, basta con demostrar que la derivada de cada uno de los sumandos es mayor que cero para probar la afirmación.

Sea $g_1(\pi) = \binom{n-1}{s} \{\varphi_i(0,s) - \varphi_i(1,s)\} \left(\frac{\pi}{1-\pi} \right)^{s-(s^*-1)}$, un sumando fijo y arbitrario en la demostración, calculamos la derivada y obtenemos como resultado:

$$\begin{aligned} g_1'(\pi) &= \binom{n-1}{s}\{\varphi_i(0,s)-\varphi_i(1,s)\}(s-(s^*-1))\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)^{s-s^*}\left(\frac{1(1-\pi)-\pi(-1)}{(1-\pi)^2}\right) \\ &= \binom{n-1}{s}\{\varphi_i(0,s)-\varphi_i(1,s)\}(s-(s^*-1))\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)^{s-s^*}\left(\frac{1}{(1-\pi)^2}\right) \end{aligned}$$

Demostramos que la expresión anterior es positiva.

Las combinaciones $\binom{n-1}{s}$ por definición siempre son positivas, mientras que el factor $1/(1-\pi)^2$ también lo es ya que tanto el numerador como el denominador son positivos. Por otro lado, por hipótesis tenemos que $s \geq s^*$ por lo tanto $s > s^* - 1$ lo anterior implica que $s - (s^* - 1) > 0$. Analizamos ahora el factor $\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)^{s-s^*}$ por hipótesis $s \geq s^*$, por lo tanto la potencia del factor es siempre no negativa, por otro lado, por hipótesis tenemos que $0 < \pi < 1$, por lo que ambos tanto el numerador como el denominador son positivos y todo el factor es positivo.

Por último verificamos el factor referente a los pagos $\{\varphi_i(0,s)-\varphi_i(1,s)\}$, nuevamente por la condición $s \geq s^*$, tenemos que el número de individuos que cooperan rebasa o es igual al parámetro mínimo necesario s^* que hace posible el establecimiento del juego, luego el pago asociado al jugador i depende sólo de su propia acción, sin embargo de (3.10) podemos ver que cuando el convenio se establece y el jugador no coopera el pago correspondiente es $\beta(s-1-\gamma)+\gamma$, mientras que el pago correspondiente cuando el juego se establece y el jugador coopera de acuerdo con (3.9) es $\gamma/s + \{\beta(s-1-\gamma)+\gamma-1\}(s-1)/s$, pero en la sección anterior demostramos que el primer pago siempre es mayor que el segundo pago, por lo tanto la diferencia de pagos también es positiva y concluimos que $g_1'(\pi)$ es estrictamente mayor que cero. Como cada uno de los sumandos es de la misma forma y éste es fijo y arbitrario en la demostración tenemos que toda la derivada es mayor que cero y por lo tanto la función es monótona creciente en $[0,1)$.

Además obtenemos que $g(0) = 0$ y $\lim_{t\to 1} g(t) = \infty$, luego la función toma una vez cada uno de los valores positivos.

Los dos resultados anteriores implican que existe una única solución, que llamaremos π^*, de (3.12) con $0 < \pi^* < 1$ para cualesquiera β y γ. De este modo podemos concluir que la combinación de estrategias mixta b^* definida por (3.12) es un único punto de equilibrio en estrategias mixtas para G^1 que hace posible el juego de arreglos institucionales.

De (3.9) y (3.10) podemos ver que el punto simétrico en estrategias mixtas tiene un pago dominante sobre el punto de equilibrio en estrategias puras encontrado en la afirmación 1. Por lo tanto b^*, es el único punto de equilibrio en este escenario de juego. □

Capítulo 4

El proceso de acumulación de un bien público en el marco de una economía dinámica.

4.1. ¿Cómo influye la acumulación de Capital Social en el conflicto que se repite a lo largo del tiempo?.

En este capítulo investigamos la robustez del estado, que surge del juego descrito en los capítulos anteriores. Esto es, discutimos como la probabilidad de que el estado surja cambia con el paso del tiempo, puesto que el nivel de capital del dam se acumula cuando consideramos una economía dinámica, que tiene como base la economía estática, explicada en los dos capítulos anteriores. El conflicto estudiado se repite a largo plazo, año con año, entre los individuos de diferentes generaciones, pero las condiciones son distintas en cada periodo, pues la acumulación de dam cambia la productividad social de cada periodo.

Una unidad de tiempo es, como ya dijimos, del tamaño de un año. En cada año t ($t = 1, 2, \dots$), n individuos idénticos, (la generación t) nacen al principio del mismo y mueren al final del año. También cada generación t hereda K_{t-1} unidades de capital reflejadas en el nivel del dam (el bien público) al principio de la temporada t. Por simplicidad asumimos que el nivel del capital no se deprecia. Si la generación t invierte Z_t unidades de arroz en la primera parte del año t para la construcción del dam, entonces el nivel de capital del dam se convierte, al principio de la segunda parte del año t en $K_t = Z_t + K_{t-1}$. Este proceso de acumulación de capital no afecta la cosecha de arroz que cada uno de los campesinos obtiene durante la primera parte del año, la cual es γ unidades de arroz por unidad de *trabajo* más lo que el sistema de riego retribuye. Pero este proceso de acumulación si afecta la cosecha de arroz que cada campesino obtiene durante la segunda parte del año.

Esto es, la entrada de una unidad de *trabajo* para sembrar arroz en cualquiera de los dos periodos de año t produce βk unidades de arroz más si se cosecha en la segunda parte del año t.

Formalmente, tendríamos que, bajo el supuesto de que se han acumulado K_{t-1} unidades de dam, γ_t se expresa mediante la ecuación 4.1

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \beta K_{t-1} + \gamma \ (t = 1, 2, ...) \qquad (4.1) \\ \text{Donde } K_0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Es decir γ_t es la cantidad de arroz que cada uno de los campesinos puede cosechar por cuenta propia en la primera parte de cualquier año t, utilizando sólo el nivel de dam que las generaciones previas les han heredado y la correspondiente unidad de trabajo necesario para sembrar arroz.

Observamos que en esta ecuación partimos de que con seguridad se ha acumulado K_{t-1}. Por supuesto que posteriormente podremos manejar esta ecuación como una ecuación estocástica.

Entonces, cada individuo i de la generación t, es confrontado con el mismo problema que en el capítulo 2. La única diferencia es que su decisión esta basada en γ_t, en lugar de en γ.

Como anteriormente, sea s_t^* el entero más grande que no excede a $[1+\gamma_t+1/\beta]_+$, y sea $\varphi_t(d_i, k)$ el pago de cada individuo i de la generación t donde $d_i = 1$ o $d_i = 0$, dependiendo de si su acción es participar o no participar respectivamente, y k es el número de participantes. Entonces podemos rescribir el teorema 3.2.7 como sigue:

Teorema 4.1.1. *En cada año t $(t = 1, 2, ...)$ si $n < s_t^*$, entonces ningún individuo invierte su arroz para incrementar el nivel del dam y el pago para cada individuo es γ_t. Si $n = s_t^*$, todos los individuos participan en el convenio. Si $n > s_t^* + 1$, entonces en la etapa "Decisión de Participar o no" en el año t tiene una única solución tal que la probabilidad de participación π_t^* de cada individuo satisface.*

$$\binom{n-1}{s_t^*-1} A_{s^*}(t) = \sum_{k=s_t^*}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{\pi_t^*}{1-\pi_t^*}^{k-(s_t^*-1)} B_k(t)$$

donde $A_{s^*}(t) = \varphi_t(1, s_t^* - 1) - \gamma_t$ *y* $B_k(t) = \varphi_t(0,k) - \varphi_t(1,k)$.

La demostración de esta proposición es análoga a la que hicimos en el capítulo anterior.

4.2. La ecuación de acumulación de dam

Ahora supongamos que π_t^* es la probabilidad de participar en el año t dado γ_t. Entonces de aquí concluimos que el número s_t de participantes en el año t se distribuye con probabilidad binomial:

$$\Pr[s_t = j] = \binom{n}{j} \pi_t^{*j}(1-\pi_t^*)^{n-j} \qquad (j = 1, 2, ..., n) \tag{4.2}$$

De acuerdo con esta probabilidad tenemos que el pago correspondiente al forzador es:

$$i_t^* = \begin{cases} 0 & \text{si } s_t < s_t^* \\ \frac{\gamma_t}{(s_t - 1)} & \text{si } s_t \geq s_t^* \end{cases} \qquad \text{Donde } s_t^* = [1 + 1/\beta + \gamma_t]_+ \,. \tag{4.3}$$

De esta manera la inversión Z_t al año t esta dada por la ecuación estocástica:

$$Z_t = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } \sum_{j=0}^{s_t^*-1} \binom{n}{j} \pi_t^{*j}(1-\pi_t^*)^{n-j} \\ j - 1 - \gamma_t & \text{con probabilidad } \binom{n}{j} \pi_t^{*j}(1-\pi_t^*)^{n-j}, s_t^* \leq j \leq n \end{cases} \tag{4.4}$$

Es decir, el equilibrio de Nash, en el periodo t, determina que con probabilidad $\sum_{j=0}^{s_t^*-1} \binom{n}{j} \pi_t^{*j}(1-\pi_t^*)^{n-j}$ el capital permanece igual que en el periodo anterior. $\sum_{j=0}^{s_t^*-1} \binom{n}{j} \pi_t^{*j}(1-\pi_t^*)^{n-j}$ es la probabilidad de que, en el periodo t, no se forme un grupo mayor o igual que s_t^*.

En el juego de arreglos institucionales, sin embargo, la inversión en el tiempo t, cuando se considera el equilibrio de Nash, es igual a $j - 1 - \gamma_t$, siempre que el grupo de campesinos dispuestos a cooperar, en dicho periodo, sea igual a j con j mayor o igual que s_t^*, lo cual ocurre con probabilidad $\binom{n}{j} \pi_t^{*j}(1-\pi_t^*)^{n-j}$. Cuando j individuos de la comunidad cooperan en el periodo t, lo que se acumula sólo en ese periodo es igual a $j - 1 - \gamma_t$. Esto se debe a que dentro del grupo de j individuos cooperadores se encuentra el forzador que no siembra, por lo que entre los demás reunen $j - 1$ unidades de arroz. De estas $j - 1$ unidades de arroz, hay que tomar γ_t unidades como salario del periodo t para el forzador, por lo que sólo se pueden acumular $j-1-\gamma_t$.

Todo esto nos determina una ley estocástica para la acumulación de capita que está dada por:

$$K_t = K_{t-1} + Z_t \qquad (t = 1, 2, ...) \tag{4.5}$$

Hacemos notar que K_t se refiere a un proceso de Markov debido a que Z_t, y de esta forma K_t, están determinadas sólo por γ_t la cual es una función lineal de K_{t-1}.

4.3. A largo plazo la acumulación se estanca si no hay depreciación

Debido a la hipótesis de no depreciación tenemos que el nivel del capital jamás decrece. Este se incrementa con probabilidad positiva mientras $s_t^* \leq n$, así el proceso de acumulación de capital termina cuando s_t^*, el grupo mínimo capaz de acumular, es más grande que n.

Decimos que con seguridad obtenemos un periodo en que s_t^* rebase a n debido a esto existe un límite superior del nivel de capital que esta dado en el siguiente lema:

Lema 4.3.1. *Si para alguna t', $s_{t'}^* > n$, entonces $Z_t = 0$ y $K_t = K_{t'-1}$ $\forall\, t \geq t'$. Además $K_t \leq (\gamma^* - \gamma)/\beta + 1/\beta$ para todo t. Donde $\gamma^* = \sup\{\gamma \colon n \geq [1 + 1/\beta + \gamma]_+\}$*

Demostración del lema 4.3.1. La demostración de la primera parte del lema es como sigue: Supongamos que, para t', $[1+1/\beta+\gamma_{t'}]_+ > n$, pero $[1+1/\beta+\gamma_{t'}]_+ = s_{t'}^*$ entonces tenemos que $s_{t'}^* > n$, y por el teorema 4.1.1, sabemos que en este caso ningún individuo invierte su arroz para construir el "dam" esto implica que $Z_{t'} = 0$. Luego $K_{t'} = K_{t'-1}$.

Consideremos el periodo $t'+1$, $s_{t'+1}^* = [1+1/\beta+\gamma_{t'+1}]_+$, donde $\gamma_{t'+1} = \gamma + \beta K_{t'-1} = \gamma_{t'}$.

Es decir, $s_{t'+1}^* = [1+1/\beta+\gamma_{t'}]_+ = s_{t'}^* > n$, por lo que de nuevo $Z_{t'+1} = 0$ y $K_{t'+1} = K_{t'-1}$.

Supongamos que $s_{t'+k}^* = [1 + 1/\beta + \gamma_{t'+k}]_+ > n$, $Z_{t'+k} = 0$ y $K_{t'+k} = K_{t'-1}$.

Entonces $\gamma_{t'+k+1} = \gamma + \beta K_{t'-1} = \gamma_{t'}$, $s_{t'+k+1}^* = [1+1/\beta+\gamma_{t'}]_+ = s_{t'}^* > n$ y por lo tanto, $Z_{t'+k+1} = 0$ y $K_{t'+k+1} = K_{t'-1}$, es decir por inducción se cumple que para toda $t \geq t'$, $Z_t = 0$ y $K_t = K_{t'-1}$.

Para la segunda parte, recordamos el hecho de que Z_t es cero cuando $[1 + 1/\beta + \gamma_t]_+ > n$. De este modo para que Z_t sea positivo, con probabilidad positiva, debemos tener la condición $[1 + 1/\beta + \gamma_t]_+ \leq n$ o de manera equivalente $\gamma_t \leq n - 1/\beta - 1$ (ya que $1/\beta + \gamma_t - 1 < [1 + 1/\beta + \gamma_t]_+ \leq n$) además de aquí concluimos que $\gamma^* = n - 1/\beta - 1$ es el valor mayor que puede tener γ_t, para que $Z_t > 0$, con probabilidad positiva.

Por (4.1) tenemos $\gamma_t = \beta K_{t-1} + \gamma$, entonces

$$K_{t-1} = (\gamma_t - \gamma)/\beta$$

Por otro lado, dado γ_t, el mayor valor que puede tomar Z_t es $n - 1 - \gamma_t$, es decir,

$$K_t = K_{t-1} + Z_t \leq (\gamma_t - \gamma)/\beta + n - 1 - \gamma_t$$

Ahora bien, reagrupando los términos tenemos lo siguiente $K_{t-1} + Z_t \leq (\gamma_t - \gamma)/\beta + n - 1 - \gamma_t = n - 1 - \gamma/\beta + \gamma_t(1/\beta - 1)$.

Ya que $1/\beta - 1 > 0$, tenemos para toda $t \geq 1$, se cumple lo siguiente

$K_{t-1} + Z_t \leq n - 1 - \gamma/\beta + \gamma^*(1/\beta - 1) = (\gamma^* - \gamma)/\beta + n - 1 - \gamma^* = (\gamma^* - \gamma)/\beta + 1/\beta$.

Es decir, para toda $t \geq 1$, tenemos que $K_t \leq (\gamma^* - \gamma)/\beta + 1/\beta$. Como queríamos demostrar. □

Por último examinamos la proposición 4.3.2 que demuestra que, a partir de cierto periodo, casi con seguridad, se acumulará una cantidad de dam tal que la comunidad se conformará con ella.

Proposición 4.3.2. *Si $[1 + 1/\beta + \gamma_t]_+ \leq n$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe t^*_ϵ tal que para todo $t \geq t^*_\epsilon$, se tiene:*
$\Pr[(\gamma^* - \gamma)/\beta < K_t \leq (\gamma^* - \gamma)/\beta + 1/\beta] \geq 1 - \epsilon$ *donde* $\gamma^* = \sup\{\gamma : n \geq [1 + 1/\beta + \gamma]\}$.

Demostración de la proposición 4.3.2. Por la lema 4.3.1, $K_t \leq (\gamma^* - \gamma)/\beta + 1/\beta$ para toda t.

Entonces lo único que demostraremos es que para cualquier $\epsilon > 0$, existe alguna t^*_ϵ tal que para toda t, con $t \geq t^*_\epsilon$ se cumple que $\Pr[K_t > (\gamma^* - \gamma)/\beta] \geq 1 - \epsilon$.

Afirmar que, para $\epsilon > 0$, existe alguna t^*_ϵ tal que para toda t, con $t \geq t^*_\epsilon$ se cumple que $\Pr[K_t \geq (\gamma^* - \gamma)/\beta] \geq 1 - \epsilon$ es equivalente a afirmar que para $\epsilon > 0$ existe alguna t^*_ϵ tal que para toda t, se cumple que $\Pr[\gamma_t > n - 1 - 1/\beta] \geq 1 - \epsilon$.

La equivalencia se obtiene de la siguiente manera: Supongamos, para $\epsilon > 0$, existe alguna t^*_ϵ tal que para toda t, con $t \geq t^*_\epsilon$ casi con seguridad se cumple que $K_t \geq (\gamma^* - \gamma)/\beta$.

Como $\gamma^* = n - 1/\beta - 1$, entonces sustituyendo en la desigualdad obtenemos que para $t \geq t^*_\epsilon$, casi con seguridad $K_t > (n-1-1/\beta-\gamma)$. Multiplicando ambos lados de la desigualdad por β, se tiene que $\beta K_t + \gamma > n - 1/\beta - 1$. Es decir, por la ecuación (4.1), para $t \geq t^*_\epsilon$, casi con seguridad $\gamma_t > n - 1/\beta - 1$.

Supongamos ahora que, para $\epsilon > 0$, existe alguna t^*_ϵ tal que para toda t, con $t \geq t^*_\epsilon$, la probabilidad $\Pr[\gamma_t > n - 1/\beta - 1] \geq 1 - \epsilon$. Los pasos anteriores son reversibles y llegamos a que existe alguna t^*_ϵ tal que para toda t, con $t \geq t^*_\epsilon$ se cumple que $\Pr[K_t > (\gamma^* - \gamma)/\beta] > 1 - \epsilon$.

Probaremos ahora que, para $\epsilon > 0$, *existe alguna* t^*_ϵ *tal que para toda* t, *con* $t \geq t^*_\epsilon$, tenemos que $\Pr[\gamma_t > n - 1 - 1/\beta] \geq 1 - \epsilon$.

Supongamos que la afirmación es falsa. Es decir, supongamos que existe alguna $\epsilon^* > 0$ tal que para toda t

$$\Pr[\gamma_t > n - 1/\beta - 1] < 1 - \epsilon \tag{4.6}$$

Si $n-1/\beta-2 \leq \gamma_{t'} < n-1/\beta-1$, para alguna t', entonces cada individuo coopera, con probabilidad positiva, y el nivel del dam $K_{t'}$ se incrementa con probabilidad uno en una cantidad $n - 1 - \gamma$, la cual es más grande que $1/\beta$. De este modo $\gamma_{t'+1} > n - 1/\beta - 1$ con probabilidad positiva que puede ser mayor que $1 - \epsilon^*$. Entonces γ_t satisface que $\Pr[\gamma_t > n - 1/\beta - 1] < 1 - \epsilon^*$ para toda t.

Ahora supongamos que $n - 3 - 1/\beta \leq \gamma_{t'} < n - 1/\beta - 2$.

La probabilidad de participación $\pi_{t'}$ es positiva, y el incremento mínimo del nivel de capital en el dam es mayor o igual que $1/\beta$, entonces el incremento mínimo de γ_t es mayor o igual que uno. De este modo γ_t se mueve fuera de la región $[\, n-2-1/\beta, n-1/\beta-1)$ cuando t tiende a infinito. Para que (4.6) sea cierta, γ_t debe satisfacer la condición de que $\Pr[\gamma_t \geq n-1-1/\beta] < 1-\epsilon^*$ para toda t.

De manera similar establecemos que, γ_t debe satisfacer la condición que, para toda $j \in \{0, 1, 2, ..., [n + 1 - \gamma - 1/\beta]\}$, la probabilidad $\Pr[\gamma_t \geq n - j - 1/\beta] < 1 - \epsilon^*$ para toda t.

Sin embargo $\gamma_0 = \gamma$ implica que $\Pr[\gamma_t \geq \gamma] = 1$ para toda t de este modo (4.6) no puede ser cierta y terminamos la prueba. □

4.3.1. Algunas ideas sobre el conflicto de la comunidad cuando cambian algunas hipótesis.

La última proposición de la sección anterior nos indica que hay tanto un límite inferior para el nivel de capital en el dam así como un límite superior, cuando no hay depreciación. Cuando K_t es mayor o igual a $(\gamma^*-\gamma)/\beta+1/\beta$ la probabilidad de participación π^*_t se vuelve cero para todo periodo t posterior, esto indica que la entidad de forzamiento se vuelve tan ineficiente como el sistema de acumulación de capital.

Aparentemente esta característica depende sólo del supuesto de la no depreciación del bien público, sin embargo, podríamos preguntarnos lo que ocurre si introducimos una tasa de depreciación positiva, entonces concluimos que la entidad de forzamiento puede no desaparecer para siempre a partir de un cierto periodo. Incluso aún si la agencia desapareciera un cierto año, la depreciación que sufre el sistema de riego hace que en algún momento el nivel de productividad sea más bajo que el nivel máximo permitido, lo que garantiza la existencia del sistema de forzamiento nuevamente. Sin embargo, aún en este caso, el capital esta acotado superiormente y nunca es más grande que $(\gamma^* - \gamma)/\beta + 1/\beta$.

Notamos que este último límite esta determinado por la producción tecnológica β y el tamaño de la población de la sociedad n, el cambio de estos parámetros en el tiempo, alteraría la situación de la comunidad. De este modo el incremento en n causa un incremento directo en γ^* ocasionando que ambos límites, el superior y el inferior se incrementen. Mientras que un incremento en la población de la sociedad siempre resulta en un incremento de la productividad a largo plazo (es decir, cuando t tiende a infinito) un incremento de la productividad marginal no siempre implica un incremento de la productividad a largo plazo.

Ejemplo Numérico. Consideremos la siguiente economía: $n = 20, \beta = 0{,}7, \gamma = 12$.

Entonces tenemos $\gamma^* = 17{,}5111$ y por la proposición 4.3.2, K_t converge aproximadamente a un rango entre 7.873 y 9.3019.

Conclusiones

En este trabajo hemos analizado la posibilidad de que el estado surja teniendo como base la institución de un sistema de autoforzamiento, en donde el forzador es escogido democráticamente de entre todos los participantes, de la misma forma las decisiones que sostienen a dicha entidad coercitiva son tomadas por los mismos participantes.

La primera conclusión, la cual hemos demostrado a lo largo de este trabajo es que una institución de forzamiento puede existir cuando la productividad de la sociedad y por lo tanto el nivel del bien público (en este caso un sistema de riego) es relativamente baja, es decir, la inversión total que hacen los individuos de la sociedad logra un incremento pequeño en el nivel del sistema de riego de tal forma que este permanece bajo.

Una consecuencia que tenemos cuando el nivel del "dam" es menor que un cierto nivel es la existencia de una probabilidad positiva de que (junto con el estado) surjan individuos libres dentro de la sociedad.

De este hecho se desprende la conclusión de que el estado no siempre es equivalente a la sociedad. Por otro lado, las decisiones tomadas por los individuos que pertenecen a la asamblea tienen como objetivo principal beneficiar a toda la sociedad aunque esto último no siempre puede llevarse a cabo, sin embargo, aún cuando los individuos que están dentro de la asamblea no sean los primeros beneficiados, la solución del juego nos indica que en estas ocasiones la organización trata de tomar decisiones beneficiando a los sujetos libres de la sociedad, en base a esto podemos decir que nuestro estudio del surgimiento del estado desde el punto de vista de la Teoría de Juegos corrobora la afirmación de que el estado tiene como finalidad el bienestar de los individuos de la sociedad.

Por otro lado podemos decir, de acuerdo con el ejemplo numérico del capítulo cuatro que la cantidad de sujetos libres que hay inicialmente en la sociedad tiende a decrecer, la razón de este hecho descansa en el siguiente argumento: año tras año cada uno de los individuos de la generación t puede producir una mayor cantidad de arroz debido a que cuenta con el sistema de riego cuyo nivel ha aumentado eventualmente en cada uno de los $t-1$ periodos anteriores, de esta manera como γ_t aumenta conforme pasan los años se tiene que $s^* = [1 + 1/\beta + \gamma_t]_+$ la cantidad de individuos mínima necesaria para poder llevar a cabo el juego de arreglos institucionales va aumentando, por lo tanto la probabilidad de participar de cada individuo se incrementa y eventualemente todos participan en la formación del Estado.

De esta manera cuando s^* es igual a n se tienen los siguientes dos resultados: en primer lugar los sujetos libres desaparecen y en segundo lugar cada individuos de la sociedad forma parte del estado de manera voluntaria.

Sin embargo, no es posible que un sistema con tales características exista siempre debido a que el nivel del capital (sistema de riego) obtenido a través del sistema de forzamiento se vuelve tan grande que no permite que el sistema sea estable, en el sentido de que cuando cada uno de los individuos de la sociedad se vuelve muy productivo, la construcción del sistema de riego se vuelve muy costosa y por lo tanto la obra común deja de ser importante.

Aparentemente la comunidad campesina no llegará a una situación como la descrita en el párrafo anterior si introducimos una tasa de depreciación positiva porque en este caso el sistema de forzamiento podría existir siempre. Pero incluso en una sociedad con estas características el nivel del capital no puede acumularse más que un cierto nivel utilizando una entidad coercitiva la conclusión anterior se desprende del hecho de que la productividad de la sociedad debe estar por debajo de un cierto nivel que al ser superado provoca que el sistema desaparezca por un lado y por el otro deja al estado desprovisto de herramientas para seguir su desarrollo.

Entonces podemos decir que después de todo el estado democráticamente organizado no es un sistema completamente efectivo de acumulación de capital para superar el dilema del prisionero (ya que existe la posibilidad de que cada uno vuelva a producir por su propia cuenta) este hecho parece sugerir la posibilidad de un límite de la democracia considerando esta como una base sobre la cual puede existir el estado, es decir, hay un momento en el que ya no es posible utilizar a la democracia como la base principal que sostiene a un estado.

Finalmente es importante decir que todos nuestros resultados descansan sobre la hipótesis de que cada uno de los individuos que coopera sólo puede ofrecer una unidad de arroz. Si modificamos esta hipótesis y permitimos que cada uno de ellos pueda ofrecer más que esta cantidad, entonces el resultado puede ser diferente al resultado obtenido, en principio si todos cooperan con más unidades entonces el nivel del dam llegaría en menos periodos de tiempo al nivel máximo permitido, sin embargo, un estudio que contenga a detalle las consecuencias derivadas de tal hipótesis debe ser hecho con cuidado.

Por otro lado es importante observar que el trabajo sólo se concentra en un sistema de forzamiento establecido democráticamente, en el cual todos los individuos son tratados de la misma manera e incluso es permitido que existan sujetos libres. Por supuesto que hay otros sistemas sociales que inducen el surgimiento del estado a través de un bien público, esto último también merece ser estudiado más adelante.

Bibliografía

[1] Paloma Zapata Lillo, *Notas de Teoría de Juegos*, Departamento de Matemáticas, Fac. de Ciencias.

[2] Binmore Ken, Fun and Games. A text on Game Theory. D.C. Heath and Company, 1992.

[3] Dunca Luce R y Raiffa Howard, Games and Decisions. Introduction and Critical Survey, Dover Publications Inc. New York 1989.

[4] Blackwell David y Girshick M.A., Theory of Games and Statistical decisions, Dover Publications Inc. New York 1979.

[5] Morris Peter, *Introduction to Game Theory*, Springer-Verlag New York Inc. 1994.

[6] Rosenmûller J, The Theory of Games and Markets, Nort-Holland Publishing Company, 1981.

[7] von Neumann John y Morgenstern Oskar, Theory of Games and and Economic Behavior, Princeton University Press. 1953.

[8] Mckinsey J.C.C., Introduction to the theory of Games, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1952.

[9] Dresher Melvin, The Mathematics of Games of Strategy, Theory and Applications, Dover Publications Inc. New York 1981.

[10] A. Okada y K. Sakakibara, The Emergence of the State: A Game Theoretic Approach to Theory of Social Contract, Discussion Paper 329, Kyoto University (1991).