00384

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

## FACULTAD DE CIENCIAS

# "PROPIEDADES GEOMÉTRICAS ASOCIADAS A LA SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES EN RN"

## T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA :

**J. MIGUEL GUTIÉRREZ NÚÑEZ**

DIRECTOR DE TESIS: DOCTOR FEDERICO SÁNCHEZ BRINGAS

FACULTAD DE CIENCIAS

MÉXICO,D.F. MARZO,2004

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

# Índice General

A la memoria de mi padre

Agradecimientos:

Agradezco en primer lugar a mi familia y amigos por el intéres demostrado a lo largo de este trayecto (en especial a Gabriela).

Asimismo, a las instituciones que me apoyaron: al ITESO por su soporte económico, a mis jefes y colegas que respaldaron y siguieron mi tesis estos años. A la UNAM también por sus apoyo económico y al personal administrativo de posgrado y de la facultad de ciencias por todas sus atenciones.

A los sinodales: Jesús Muciño, Oscar Palma, Marcelo Aguilar, Luis Hernández y Pablo Padilla cuyas observaciones fueron invaluables. A Carmen Romero por su presencia en México y por lo que aprendido gracias a ella.Muy especialmente agradezco a mi orientador Federico Sánchez Bringas que apoyó e impulsó este trabajo.

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1 Presentación del tema.

El objeto de estudio en esta tesis son las superficies en $\mathbb{R}^n$, es decir, las inmersiones isométricas en $\mathbb{R}^n$ de una variedad Riemanniana bidimensional de clase $C^l$ ($l \geq 3$), donde entendemos por una inmersión isométrica; una aplicación diferenciable, cuya diferencial es inyectiva y que preserva la métrica (ver Apéndice A1). Más específicamente, tratamos algunos temas relativos a las líneas de curvatura de las superficies en un espacio ambiente de dimensión $n \geq 3$. Cuando $n \geq 4$, las líneas de curvatura se consideran con respecto a una dirección normal $\nu$, y se denominan *$\nu$-líneas de curvatura.* Estas líneas constituyen una generalización natural de la noción clásica de líneas de curvatura para superficies en $\mathbb{R}^3$ y fueron introducidas en [43, (1995)], por A. Ramírez-Galarza y F. Sánchez-Bringas.

La teoría de superficies fue desarrollada inicialmente en el espacio euclidiano tridimensional y es en este marco una teoría casi completa. Sin embargo aún en este caso, se han hecho recientemente contribuciones importantes y existen problemas no resueltos. Hacemos mención enseguida de dos enfoques en el estudio de las superficies que han contribuido a la renovación del tema.

Con los importantes trabajos de C. Gutiérrez, y J. Sotomayor [50, (1982)], [51, (1985)] (ver también [24]), se abre un nuevo campo de investigación en la teoría de las superficies: *el estudio de los campos de líneas geométricas y sus singularidades con las herramientas de la teoría de los sistemas dinámicos.* Haciendo uso del enfoque y las técnicas de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos, se estudia la estructura de las configuraciones de líneas de curvatura principal, con una generalidad que no se había tenido antes. Estrechamente conectada con lo anterior está la clásica conjetura de Caratheódory (no completamente resuelta aún): *toda inmersión diferenciable y convexa de la esfera $S^2$ en $\mathbb{R}^3$ tiene al menos dos puntos umbílicos.* Por otra parte la conjetura de Loewner ( C. Titus, [54, (1973)] ) afirma que: *el índice de un punto umbílico aislado de una superficie diferenciable inmersa en $\mathbb{R}^3$ es menor o igual a uno.* Recordando el conocido teorema de Hopf: *para una superficie compacta, con todos sus puntos umbílicos aislados, la suma de los índices de los puntos umbílicos es igual a la característica de Euler de la superficie;* se tiene que la conjetura de Loewner implica la conjetura de Caratheódory.

Autores como H. Hamburger [27, (1940)], G. Bol [1, (1943)], T. Klotz [31, (1959)], C. J. Titus [54, (1973) ] y H. Scherbel [46] afirman la validez de esta conjetura para superficies analíticas; por su parte, C. Gutiérrez, F. Mercuri y F. Sánchez-Bringas [23, (1996)] probaron que si la conjetura es cierta para superficie analíticas, entonces *también es cierta para inmersiones de clase $C^r$, con $r \geq 3$ y el punto umbílico de tipo Lojasiewicz.*

Otro importante enfoque en el estudio de las singularidades en la geometría de las superficies, es la aplicación a la descripción de los puntos críticos de familias de funciones "distancia al cuadrado", de la teoría de singularidades de funciones, desarrollada entre otros por H. Whitney, R. Thom, J. Mather y V.I. Arnold. El análisis en torno de puntos singulares de dichas funciones revela nuevos aspectos geométricos de las superficies. Una excelente exposición de estos métodos, aplicados a las curvas y superficies en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, se puede encontrar en: *Geometric Differentiation,* I. R. Porteous [41].

El desarrollo de la geometría de las superficies en dimensiones superiores recibe un gran impulso con los trabajos fundamentales de W.C. Wong [56, (1952) ] y J. Little [32, (1969)]. En ellos se realiza un profundo estudio de la segunda forma fundamental para superficies inmersas en $\mathbb{R}^4$ en el cual se introduce el concepto de *elipse de curvatura* (la imagen del círculo unitario del espacio tangente, vía la segunda forma fundamental) y se establecen importantes nociones geométricas relacionadas con lo anterior. En [32] se definen las *direcciones asintóticas* (llamadas direcciones conjugadas por Little) en una superficie en $\mathbb{R}^4$. Estas direcciones determinan ciertos campos de direcciones (no necesariamente definidos en toda la superficie). En [34] D.K.H Mochida, M. C. Romero Fuster y M. A. S Ruas muestran que cada campo de direcciones asintóticas tiene asociado un campo de *direcciones binormales* y que una condición necesaria y suficiente para la existencia de dos campos binormales definidos globalmente sobre la superficie $M$ de $\mathbb{R}^4$, es la *convexidad local* de $M$ (en el sentido de que tiene un hiperplano de soporte en cada uno de sus puntos).

Las $\nu$-líneas de curvatura sobre una superficie $M$ en $\mathbb{R}^n$, son dadas en términos de la primera $I$ y segunda $II_\nu$ formas fundamentales, donde $II_\nu$ es la proyección de la segunda forma fundamental respecto al campo normal unitario $\nu$, y se definen de manera análoga a las líneas de curvatura para superficies en $\mathbb{R}^3$ (Apéndice A.3). En [43] se obtiene el tipo topológico de las configuraciones de curvatura principal estructuralmente estables en torno a un punto $p$, así como la genericidad de las inmersiones con puntos $\nu$-umbílicos Darbouxianos. En [18] se hace un análisis en torno a los $\nu$-ciclos de curvatura principal. El comportamiento topológico genérico de las configuraciones de $\nu$-líneas de curvatura es el mismo que el de las configuraciones de líneas de curvatura clásicas. Pero por otra parte en [22, (1998)], C. Gutiérrez y F. Sánchez-Bringas demostraron que: *dado $n \in \mathbb{Z}$ existe una superficie $M$ inmersa en $\mathbb{R}^4$ y un campo vectorial $\nu$ normal a $M$ con un punto $\nu$-umbílico aislado de índice* $n/2$ (aquí el índice de un punto $\nu$-umbílico aislado se define como en $\mathbb{R}^3$), en marcado contraste con la conjetura de Loewner. Entonces entre los campos de $\nu$-líneas de curvatura que no son genéricos, se encuentran campos con puntos $\nu$-umbílicos de todos los índices. Esta diferencia sugiere hacer un estudio comparativo entre los dos contextos de definición de líneas de curvatura.

## 1.2 Contribuciones de esta Tesis.

*Con esta motivación, en la tesis consideramos la superficie $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ con su primera y segunda forma fundamentales $I, II$. La primera correspondiente a la restricción de la métrica del espacio ambiente y la segunda relativa a la posición que guarda la superficie en el espacio. Dado un campo normal unitario $\nu$ consideramos la proyección $II_\nu$ de la segunda forma fundamental respecto a $\nu$. El par de formas $(I, II_\nu)$ determina las ecuaciones de $\nu$-líneas de curvatura.*

*Investigamos por un lado las condiciones que deben cumplir estas formas fundamentales para que pueda aplicarse isométricamente la superficie $M$ en $\mathbb{R}^3$ preservando la segunda forma fundamental $II_\nu$ y por tanto transformando las $\nu$-líneas de curvatura en las líneas de curvatura de la inmersión (Capítulo 3). Al final del Capítulo 3 generalizamos estos conceptos a subvariedades de espacios de curvatura constante, consideramos las condiciones de inmersión de subhaces $V$ del haz normal $NM$ y expresamos estas condiciones en términos del marco móvil también. Por otro lado, analizamos algunas propiedades geométricas asociadas a estas formas fundamentales* *y por lo tanto al campo normal $\nu$ que las define, las cuales imponen fuertes restricciones geométricas del tipo del Teorema de Hopf (o el de Liebmann) que asegura que la curvatura media constante implica la esfericidad de una superficie en $\mathbb{R}^3$. En este contexto obtenemos condiciones para que $M$ sea $\nu$-umbílica y además también en ciertos casos esférica (Capítulo 5). A grandes rasgos procedemos de la siguiente manera:*

*Sea $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ una superficie, $TM$ y $NM$ los haces tangente y normal respectivamente y $\nu$ un campo unitario normal a $M$.*

- *En el Capítulo 3 damos el primer paso de este trabajo, que consiste en considerar el haz Riemanniano de rango uno $\tilde{\nu}$ en la dirección del campo normal $\nu$. Consideramos la suma de Withney: $E_\nu = TM \oplus \tilde{\nu}$, con la métrica sobre $E_\nu$ siendo la suma ortogonal de las métricas sobre $TM$ y $\tilde{\nu}$. Este haz vectorial Riemanniano $E_\nu$ con la conexión $\nabla'$ compatible con la métrica, será el portador de la segunda forma fundamental en la dirección $\nu$ y por lo tanto de las $\nu$-líneas de curvatura (Sección 3.1).*

- *Después en la Sección 3.3, formulamos en la Proposición Principal3.7, dos condiciones sobre la segunda forma de la superficie en la dirección $\nu$ para que exista una inmersión isométrica de $M$ en $\mathbb{R}^3$ y un isomorfismo entre los haces $E_\nu$ y el haz correspondiente a la imagen de $M$ (Corolario 3.8). Este isomorfismo al preservar la segunda forma fundamental, aplica $\nu$-líneas de curvatura en líneas de curvatura en $\mathbb{R}^3$ de la superficie imagen. Denominamos a estas condiciones: condiciones $\nu$-Gauss y $\nu$-Codazzi. En la Sección 3.4 se estudian las condiciones en el caso en que la dimensión del ambiente es 4. En este caso, si el campo normal $\nu$ no es paralelo la condición $\nu$-Codazzi implica la condición $\nu$-Gauss, más aún la condición $\nu$-Codazzi se expresa de manera más compacta (Proposición 3.15 y Corolario 3.18) y se derivan interesantes conclusiones acerca de la geometría de las superficies que son desarrolladas en [19]. En la Sección 3.5 se generalizan las condiciones a subvariedades de espacios de curvatura constante y a subhaces del haz normal en el papel del haz normal generado por el campo $\nu$. Los resultados que obtenemos en esta parte son:*

  - *La Proposición Principal 3.7. En la cual se presentan las condiciones de inmersión, mencionadas a lo largo de este trabajo, cuya formulación ha sido reducida a expresiones particularmente sencillas (Sección 3.3).*

- *El Corolario 3.8: Donde se establece la equivalencia de las condiciones con la $\nu$-inmersibilidad de las superficie: Sea $M$ una superficie orientada simplemente conexa in-mersa en $\mathbb{R}^4$. Sea $\nu$ un campo vectorial diferenciable unitario normal a $M$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

    * *Las condiciones $\nu$-Gauss y $\nu$-Codazzi se satisfacen,*

    * *Existe una inmersión isométrica de $M$ en $\mathbb{R}^3$ con segunda forma fundamental prescrita $II_\nu$.*

- *La Proposición 3.15, donde se expresa la condición $\nu$-Codazzi en una fórmula compacta.*
- *El Corolario 3.18, en el cual se expresa la $\nu$-inmersibilidad utilizando la fórmula de la Proposición 3.15 cuando el campo $\nu$ no es paralelo en ningún abierto de $M$.*
- *La Proposición 3.19, el Teorema 3.22 donde se generalizan los conceptos anteriores a subvariedades de espacios de curvatura constante y la $\nu$-inmersión a la $V$-inmersión con respecto de un subhaz $V$ del haz normal $NM$ de $M$. En la Proposición 3.27 se expresan las condiciones $V$-Gauss, $V$-Codazzi y $V$-Ricci en términos del marco móvil de Cartan.*

• *En el Capítulo 4 la primera de las condiciones (condición $\nu$-Gauss) se traduce en la existencia de un campo binormal en la dirección $\nu^\perp$ normal a $\nu$ y de sus correspondientes foliaciones de líneas asintóticas sobre la superficie, ideas geométricas desarrolladas, entre otros por C. Romero Fuster et. al. [34]. Se presentan algunas de las consecuencias para la geometría de las superficies (ver [19], donde estos temas están desarrollados con mayor amplitud).*

• *En el Capítulo 5 presentamos generalizaciones a dimensión superior del espacio ambiente, del clásico Teorema de Hopf: la imagen de una esfera bidimensional bajo una inmersión en $\mathbb{R}^3$ de curvatura media constante es una esfera: $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \| x - x_0 \| = r\}$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$. Este teorema es generalizado por varios autores (ver: Chern [10], Hopf [28], Bryant [3]), a superficies que satisfacen una relación más general entre las curvaturas media y Gaussiana, llamada relación de Weingarten y que son denominadas superficies de Weingarten. La nuestra [21] es una generalización del teorema sobre superficies de Weingarten de R. Bryant en [3]. Nuestros resultados en esta parte son:*

    - *En la Proposición 5.1 se muestra la equivalencia de las condiciones $\nu$-Gauss y $\nu$-Codazzi y la $\nu$-inmersibilidad de la superficie. Aunque en esta* *proposición las condiciones están aplicadas para el caso en que la superficie es un esfera (topológica) tienen la misma forma en el caso local general.*

- *El Ejemplo 5.3 es de una superficie en $\mathbb{R}^4$ que es $\nu$-umbílica, pero no está contenida en ninguna hiperesfera.*
- *En la Proposición 5.5 y el Corolario 5.7 se muestra que la condición $\nu$-Codazzi es una condición suficiente para que una superficie $\nu$-umbílica sea hiperesférica o plana (Sección 5.2).*
- *La Proposición 5.12 generaliza un teorema de R. Bryant [3], y como consecuencia obtenemos generalizaciones de los Teoremas de Hopf y Liebmann en el Teorema 5.14, y en los Corolarios del 5.17 al 5.20. De particular interés son:*

  * *Corolario 5.17. Sea $\phi : S^2 \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ una inmersión inyectiva suave y $\nu$ un campo unitario, paralelo y normal a $\phi(S^2)$. Suponga que $\phi(S^2)$ satisface una condición local $\nu$-Weingarten en todo punto $\nu$-umbílico. Entonces, $\phi(S^2)$ es hiperesférica y $\nu$ es paralelo al campo vectorial radial o $\nu$ es constante y $\phi(S^2)$ está contenida en un hiperplano.*

    *Corolario 5.20 Sea $\phi : S^2 \to \mathbb{R}^4$ una inmersión diferenciable y $\nu$ un campo diferenciable unitario, normal a $\phi(S^2)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

    1. *Para todo punto $\nu$-umbílico existe una vecindad donde se satisface la condición $\nu$-Codazzi y la curvatura media $H_\nu$ con respecto a $\nu$ es constante.*
    2. *$\phi(S^2)$ es hiperesférica (hiperplana) y $\nu$ es paralelo al campo radial ($\nu$ es constante).*
    3. *El campo $\nu$ es umbílico paralelo.*
    4. *El campo $\nu$ es umbílico con curvatura constante.*

- *En las Observaciones 5.10, 5.13 y 5.16 se hace notar que estos resultados, formulados para superficies en $\mathbb{R}^n$, son válidos en general para un espacio ambiente de curvatura constante.*

• *En los Apéndices A y B presentamos algunos conceptos básicos de la materia. Nos hemos basado, para el Apéndice A, (al igual que la Secc. 3.1) en Dacjzer et al.* [13], *y para, el Apéndice B en T. J. Willmore [55]. En el Apéndice B hacemos una presentación conjunta del marco móvil y conexiones que puede tener alguna utilidad didáctica, pues definimos ahí, el marco móvil en términos de* *la conexión Riemanniana de la variedad y recíprocamente dado un referencial móvil con sus leyes de cambio, se muestra cómo expresar a partir de éste la conexión. Esto nos permite en la representación de los conceptos de curvatura y torsión y las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci de las subvariedades, establecer la transición de un lenguaje a otro.*

# Capítulo 2

# Preliminares

## 2.1 Líneas de curvatura principal y puntos umbílicos.

Presentamos enseguida de manera breve, algunos temas que constituyen las raíces de nuestro trabajo en la geometría diferencial clásica. Una presentación tradicional de este material, enriquecida con excelentes notas históricas, puede encontrarse en el clásico libro de D. J. Struik [53]; por otra parte, un tratamiento moderno y adecuado a nuestros propósitos se puede encontrar en M. Do Carmo, [16] y [15] , W. Klingenberg [30] y M. Spivak[52].

Sea $M$ una superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$ y $p$ un punto de $M$. Las *secciones normales* en $p$ son las curvas en las que intersectan a la superficie los planos que contienen la recta normal a ésta en $p$. Al rotar uno de estos planos en torno de la recta normal, obtenemos todas las secciones normales del punto. En general la curvatura de las secciones normales varía en el curso de la rotación y tiene un valor máximo y uno mínimo que se denominan *curvaturas principales* en el punto. Las direcciones tangentes correspondientes son llamadas las *direcciones principales.* Se puede mostrar que *las direcciones principales son mutuamente ortogonales* fuera de los puntos donde las curvaturas principales coinciden.

Fuera de tales puntos, las direcciones principales definen dos campos de direcciones mutuamente ortogonales que son *los campos de direcciones principales.* La integración de estos campos permite encontrar las curvas en la superficie cuyas direcciones tangentes son las direcciones principales; es decir las *líneas de curvatura principal.* Se obtienen así dos familias de curvas ortogonales, cuyas direcciones tangentes son las direcciones en las cuales la superficie se curva de manera extrema.

Los puntos en los cuales las curvaturas principales coinciden; es decir, donde las curvaturas de todas las secciones normales son iguales se llaman *puntos umbílicos* de la superficie. Un ejemplo obvio de una superficie que consiste solamente de puntos umbílicos es la esfera. De hecho, las esferas y los planos son las únicas superficies completas en $\mathbb{R}^3$ enteramente formadas por puntos umbílicos. En general, los puntos umbílicos de una superficie son aislados. Los puntos umbílicos son exactamente las singularidades de los campos de direcciones principales.

El par (familias de líneas de curvatura principal, puntos umbílicos) constituye la *configuración principal* de la superficie. El estudio de las configuraciones principales, aunque aplicado a superficies particulares como el elipsoide, se remonta a las contribuciones de Monge y Dupin (1795). Este estudio es de especial interés en torno de los puntos umbílicos aislados y la clasificación de las configuraciones correspondientes obtenida por G. Darboux [14, (1896)] ocupa un lugar destacado en la teoría de las superficies. En un marco más general, la descripción de las configuraciones principales ha sido desarrollada recientemente usando los métodos de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos, como puede verse en los importantes resultados de J. Sotomayor y C. Gutiérrez, [50, (1982)] , [51, (1985)] y [24, ( 1991)].

Haremos la descripción matemática de las superficies y en particular de los conceptos geométricos anteriores, en términos de la primera y segunda formas fundamentales.

La *primera forma fundamental* $I$ especifica la métrica de la superficie inducida por el espacio ambiente. Por otra parte la *segunda forma fundamental* $II$ en cada punto $p$ de la superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ es la forma bilineal definida por

$$II\,(p)\,(v,w) = -\,\langle DN(p)v, w\rangle\,,$$

donde $N$ es la aplicación normal de Gauss, $DN$ su diferencial y $v, w$ pertenecen a $T_pM$, el espacio tangente a $M$ en $p$. Esta forma bilineal es simétrica, por lo que el operador $-DN(p) : TM \to TM$ es autoadjunto. $S = -DN$ es llamado el *operador de forma* de la superficie.

La segunda forma fundamental en cada punto $p$ está relacionada con la posición que guarda la superficie con respecto al plano tangente en el punto. Por ejemplo si la forma cuadrática asociada a $II(p)$ es definida positiva, entonces en una vecindad de $p$ la superficie está de un mismo lado del plano tangente y en este caso se dice que el punto es *elíptico* y $II(p)$ determina un paraboloide osculador. Si $II(p)$ es definida negativa, $p$ es un punto de *silla,* y la superficie se sitúa en ambos lados del plano tangente y $II(p)$ determina un hiperboloide osculador, en el caso restante el punto $p$ es un punto *parabólico.*

La ecuación de *Olinde Rodrigues*:

$$(DN + kI_d)v = 0,$$

donde $I_d$ es la identidad, caracteriza las direcciones principales $v$, así como las curvaturas principales $k$ correspondientes. Así, *las direcciones principales corresponden a los autoespacios del operador de forma y los autovalores correspondientes son las curvaturas principales.* En términos de las formas fundamentales, la ecuación de Olinde Rodrigues se puede escribir como

$$II = kI.$$

Aunque las curvaturas principales requieren de las dos formas fundamentales para su definición es notable que el producto de ellas, *la curvatura de Gauss, dependa solamente de la primera forma fundamental*; es decir, solamente de la métrica de la superficie. Esto es precisamente lo que establece el *Teorema egregium* de Gauss.

## 2.2 Líneas de curvatura principal respecto a un campo normal en $\mathbb{R}^4$.

Para una superficie $M$ inmersa en $\mathbb{R}^n$, la segunda forma fundamental $II$ está dada por la diferencia entre la conexión del ambiente y la conexión inducida en la superficie; por la fórmula de Gauss (Sección 3.1):

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y).$$

Observe que la segunda forma fundamental es una aplicación bilineal y simétrica definida en el haz tangente y tomando valores en el haz normal (Sección 3.1).

Proyectando $II$ en la dirección de un campo normal unitario $\nu$, obtenemos $II_\nu$ una forma (con valores reales) bilineal y simétrica. Ésta es *la segunda forma fundamental* *de la superficie con respecto a $\nu$* y denotamos el operador autoadjunto asociado por $S_\nu$: el *operador de forma de $M$ con respecto al campo $\nu$* (Apéndice A.1).

De manera similar al caso de las superficies inmersas en $\mathbb{R}^3$, se definen los *campos de direcciones principales con respecto a $\nu$*, como los dos campos de direcciones que son los autoespacios de $S_\nu$; y sus líneas integrales como las *$\nu$-líneas de curvatura principal.* Los puntos singulares de estos campos de direcciones son los puntos *$\nu$-umbílicos.* Las *$\nu$-curvaturas* y *$\nu$-direcciones de curvatura* están ahora dadas por la ecuación

$$II_\nu = kI,$$

similar a la ecuación de Olinde Rodrigues y que escrita en coordenadas nos da las ecuaciones de las $\nu$-líneas de curvatura (2.5).

## 2.3 Ecuaciones de $\nu$-líneas de curvatura.

Sea $M$ una superficie suave de clase $C^k$, $k \geq 3$, orientada, inmersa en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Sean $\chi(M)$ y $\chi(M)^\perp$ los espacios de campos vectoriales diferenciables, tangente y normal respectivamente.

La conexión Riemanniana de $\mathbb{R}^n$ la denotemos por $\bar{\nabla}$. Dados los campos $X$, $Y$ en $\chi(M)$, sean $\bar{X}$, $\bar{Y}$ extensiones a $\mathbb{R}^n$ locales. La conexión Riemanniana sobre $M$ está bien definida por la componente tangente de la conexión riemanniana de $\mathbb{R}^n$ : $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\top$. Dado un campo vectorial normal $\xi$ la componente normal de $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\xi}$: $\nabla^\perp_X \xi = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\xi})^\perp$ define en $NM$ una conexión compatible con la métrica (ver Apéndice A.1).

La *segunda forma fundamental* de $M$ es la aplicación:

$$\alpha : \chi(M) \times \chi(M) \to (\chi(M))^\perp,\ \alpha(X,Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y,$$

esta aplicación está bien definida, es simétrica y bilineal.

Si $p \in M$ y $\nu \in (T_pM)^\perp$, $\nu \neq 0$, definimos la aplicación:

$$l_\nu : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},\ l_\nu(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), \nu \rangle.$$

La cual es también simétrica y bilineal.

*La segunda forma fundamental* de $M$ en $p$ está asociada a la forma cuadrática,

$$II_\nu : T_pM \to \mathbb{R}, \; II_\nu(X) = l_\nu(X, X).$$

El operador de forma es

$$S_\nu : T_pM \to T_pM, \; S_\nu(X) = -(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\nu})^\top, \tag{2.1}$$

donde $\bar{\nu}$ es una extensión local en $p$ a $\mathbb{R}^n$ del campo vectorial $\nu$ y $\top$ denota la componente tangente. Este operador es bilineal, autoadjunto y para todo $X$, $Y \in T_pM$ satisface la ecuación:

$$\langle S_\nu(X), Y\rangle = l_\nu(X, Y).$$

De aquí que la segunda forma fundamental puede expresarse por:

$$II_\nu(X) = \langle S_\nu(X), X\rangle. \tag{2.2}$$

Para cada $p \in M$ existe una base ortonormal de autovectores de $S_\nu$ en $T_pM$. Los autovalores de $S_\nu$ son las *$\nu$-curvaturas principales.* El punto $p$ es *$\nu$-umbílico* si las $\nu$-curvaturas principales son iguales. Sea $\mathcal{U}_\nu$ el conjunto de $\nu$-umbílicos en $M$; para todo $p \in M \backslash \mathcal{U}_\nu$ hay dos direcciones $\nu$-principales definidas por los autovectores de $S_\nu$, estos campos de direcciones son diferenciables e integrables, por lo que sus integrales definen dos familias de curvas ortogonales que se denominan *$\nu$-líneas de curvatura principal,* una de curvatura maximal y la otra de curvatura minimal. Los puntos $\nu$-umbílicos son las singularidades de estas familias de curvas. Si $\mathcal{U}_\nu = M$ decimos que *la superficie $M$ es $\nu$-umbílica.*

Las dos foliaciones ortogonales junto con los puntos $\nu$-umbílicos como sus singularidades forman la *$\nu$-configuración principal* de $M$, $\mathcal{P}_\nu = (\mathcal{L}_\nu, l_\nu, \mathcal{U}_\nu)$.

La ecuación diferencial que define la $\nu$-configuración principal es

$$S_\nu(c'(t)) = \lambda(c(t))c'(t). \tag{2.3}$$

**Coordenadas isotérmicas.** Un sistema de coordenadas locales $(u, v)$ en un abierto $U$ de una superficie $M$ se llama *sistema de coordenadas isotérmico* si podemos escribir la métrica $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ para alguna función $\lambda$ positiva y $C^\infty$ en $U$ .
Las coordenadas locales $(u, v)$ definidas en un abierto $U \subset M$ siendo $E$, $F$, $G$ los coeficientes de la primera forma fundamental en estas coordenadas, son isotérmicas si y sólo si: $E = G$ y $F = 0$, o bien $\langle\partial_u, \partial_u\rangle = \langle\partial_v, \partial_v\rangle$ y $\langle\partial_u, \partial_v\rangle = 0$ ([52]).

Respecto a las coordenadas isotérmicas se tiene el siguiente importante teorema:

**Teorema de existencia de coordenadas isotérmicas.** *Toda superficie diferenciable se puede cubrir con sistemas de coordenadas isotérmicos.*
Para una prueba del teorema ver: ([11]).

**Ecuaciones de las $\nu$-líneas de curvatura en coordenadas.** Obtenemos aquí las ecuaciones de las $\nu$-líneas de curvatura en coordenadas.

Sea $U \subset M$ un abierto donde están definidas las coordenadas locales $(u, v)$ y sean $E$, $F$, $G$ los coeficientes de la primera forma fundamental en estas coordenadas. Los coeficientes de la $\nu$-segunda forma fundamental son

Sea $U \subset M$ un abierto donde están definidas las coordenadas locales $(u, v)$ y sean $E$, $F$, $G$ los coeficientes de la primera forma fundamental en estas coordenadas. Los coeficientes de la $\nu$-segunda forma fundamental son

$$\begin{array}{lllll} e_\nu & = & II_\nu(\partial_u) & = & -\langle \alpha(\partial_u, \partial_u), \nu \rangle, \\ f_\nu & = & -\langle \alpha(\partial_u, \partial_v), \nu \rangle & = & -\langle \alpha(\partial_v, \partial_u), \nu \rangle, \\ g_\nu & = & II_\nu(\partial_v) & = & -\langle \alpha(\partial_v, \partial_v), \nu \rangle, \end{array} \tag{2.4}$$

donde $\partial_u = \frac{\partial}{\partial u}$ y $\partial_v = \frac{\partial}{\partial v}$.

La ecuación (2.3) de líneas de curvatura tiene la siguiente forma en coordenadas

$$(f_\nu E - e_\nu F)du^2 + (g_\nu E - e_\nu G)dudv + (g_\nu F - f_\nu G)dv^2 = 0. \tag{2.5}$$

donde:

Si esta carta coordenada es isotérmica: $E = G = \lambda^2,\ F = 0$. Por lo que esta ecuación se reduce a

$$f_\nu du^2 + (g_\nu - e_\nu)dudv - f_\nu dv^2 = 0. \tag{2.6}$$

## 2.4 Superficies $\nu$-umbílicas.

Una superficie *$\nu$-umbílica* en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, es aquélla para la cual todos sus puntos son *$\nu$-umbílicos;* es decir, singularidades de las líneas $\nu$-principales. En este caso, asociada a $\nu$ hay una función de curvatura $\lambda$ definida en la superficie, a la que denominamos

$\nu$-*curvatura*. Una superficie se dice *totalmente umbílica* si es $\nu$-*umbílica* para todo campo $\nu$ normal. Se sabe Spivak [52], que una superficie en $\mathbb{R}^4$ *es totalmente umbílica con la misma curvatura para toda dirección normal si y sólo si es una esfera:* $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \| x - x_0 \| = r\} \cap \mathbb{R}^3$ *para algún* $x_0 \in \mathbb{R}^4$ y $r > 0$.

De manera similar se define una *subvariedad* $\nu$-*umbílica*. Varias propiedades de subvariedades $\nu$-umbílicas han sido estudiadas por B. Y. Chen y K. Yano [6], [7] y [8]. Se prueba en [6] que una superficie inmersa en $\mathbb{R}^4$ *es hiperesférica (*es decir, contenida en una hiperesfera*) si y sólo si es* $\nu$-*umbílica para algún campo normal* $\nu$ *cuya curvatura principal es una constante distinta de cero.* Por otra parte M. C. Romero-Fuster y F. Sánchez-Bringas establecen en [44] interesantes relaciones entre las líneas asintóticas, $\nu$-umbilicidad y esfericidad de una superficie en $\mathbb{R}^4$.

## 2.5 Direcciones asintóticas y campos binormales.

Enseguida hacemos una breve revisión de algunas definiciones y propiedades básicas de los campos de vectores binormales y sus direcciones asintóticas correspondientes para superficies inmersas en $\mathbb{R}^4$. Estos conceptos fueron formulados por primera vez en [32] y [34]. Nos hemos basado en estas referencias para exponer este tema.

**Direcciones asintóticas, puntos de inflexión y la elipse de curvatura.** Sea $\phi : \overline{M} \to \mathbb{R}^4$ un encaje de una superficie $\overline{M}$ y sea $M = \phi(\overline{M})$. Dado $p \in M$, considere el círculo unitario en $T_pM$ parametrizado por el ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$. Denote por $\gamma_\theta$ la curva obtenida de intersectar $M$ con el hiperplano que pasa por $p$, compuesto por la suma directa del plano normal $N_pM$ y la recta en la dirección tangente representada por $\theta$. Esta curva se llama *sección normal de* $M$ *en* $p$ *en la dirección* $\theta$.

El *vector de curvatura* $\eta(\theta)$ de $\gamma_\theta$ en $p$ es la proyección en $N_pM$ del vector $\gamma_\theta''$, en otras palabras $\eta(\theta) = \alpha_p(\gamma_\theta', \gamma_\theta')$ donde $\alpha$ es la segunda forma fundamental con valores en $NM$. Variando $\theta$ de 0 a $2\pi$, este vector describe una elipse en $N_pM$ con centro en el vector de curvatura media llamada la *elipse de curvatura* de $M$ en $p$.

Observe que la elipse de curvatura es la imagen del círculo unitario en $T_pM : |X| = 1$, bajo la aplicación $X \to \alpha(X, X)$.
En efecto, sea $(U, \phi)$ una carta coordenada de $M$ donde está definido un referencial ortonormal adaptado $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, es decir $X_1$ y $X_2$ son tangentes y $X_3, X_4$ son normales. Los coeficientes de la segunda forma fundamental en la dirección $X_i$,

$(i = 3, 4)$ son (2.4):

$$\begin{array}{rclcl} e_i & = & II_i(X_1) & = & -\langle \alpha(X_1, X_1), X_i \rangle, \\ f_i & = & -\langle \alpha(X_1, X_2), X_i \rangle & = & -\langle \alpha(X_2, X_1), X_i \rangle, \\ g_i & = & II_\nu(X_2) & = & -\langle \alpha(X_2, X_2), X_i \rangle. \end{array}$$

Si $X(\theta)$ es el vector unitario en la dirección de $\gamma'_\theta$ y escribimos $X = X(\theta) = \cos\theta$ $X_1+$ sen $\theta$ $X_2$ entonces

$$\begin{array}{rcl} \eta(\theta) & = & \alpha_p(X, X) \\ & = & (e_1 \cos^2\theta + 2f_1 \cos\theta \text{ sen } \theta + g_1 \text{ sen}^2 \theta)X_3 + \\ & & (e_2 \cos^2\theta + 2f_2 \cos\theta \text{ sen } \theta + g_2 \text{ sen}^2 \theta)X_4 \\ & & \\ & = & (\frac{1}{2}(e_1 - g_1)\cos 2\theta + f_1 \text{sen} 2\theta)X_3 + \\ & & (\frac{1}{2}(e_2 - g_2)\cos 2\theta + f_2 \text{ sen } 2\theta)X_4 + H, \end{array}$$

donde $H$ es el vector de curvatura media en $p$ :

$$H = \frac{1}{2}(e_1 + g_1)X_3 + \frac{1}{2}(e_2 + g_2)X_4$$

Los puntos $p$ en $M$ se clasifican en *hiperbólicos, parabólicos* o *elípticos,* de acuerdo a si $p$ se encuentra: *fuera, sobre o dentro de la elipse de curvatura* respectivamente. Cuando la elipse de curvatura degenera en un segmento, el punto se denomina *punto semiumbílico.* En particular cuando el segmento es radial desde $p$, es conocido como *punto de inflexión* de la superficie. El punto de inflexión es de *tipo real* cuando $p$ pertenece a la elipse de curvatura, y de *tipo imaginario* en caso contrario. Una dirección $\theta$ en $T_pM$ para la cual $\frac{\partial\eta}{\partial\theta}$ y $\eta(\theta)$ son paralelos se denomina *dirección asintótica.*

**Puntos semiumbílicos y curvatura normal.** Considere el referencial ortonormal sobre $M$, $\{X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, X_2 = \frac{\partial}{\partial v}, X_3 = \nu, X_4 = \nu^\perp\}$ las 1-formas duales $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ y $\{\omega_{ij}\}_{i,j=1}^4$ las formas de conexión correspondientes (Apéndice B.1).
Tenemos las siguientes expresiones (Apéndice B.3)

$$\begin{array}{rcl} \omega_{13} & = & e_{X_3}\omega_1 + f_{X_3}\omega_2, \\ \omega_{23} & = & f_{X_3}w_1 + g_{X_3}w_2, \\ \omega_{14} & = & e_{X_4}\omega_1 + f_{X_4}\omega_2, \\ \omega_{24} & = & f_{X_4}\omega_1 + g_{X_4}\omega_2. \end{array} \tag{2.7}$$

La *curvatura de Gauss* $K$ es la curvatura correspondiente al haz tangente de $M$ y se obtiene de la fórmula $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$ (Apéndice B.3). Por otro lado la *curvatura* *normal* $K^{\perp}$ se obtiene de la expresión relativa a la forma de curvatura del haz normal de $M$: $d\omega_{34} = -K^{\perp}\omega_1 \wedge \omega_2$, que es la ecuación de Ricci en términos del referencial móvil (Apéndice B.3). La función $K^{\perp}$ es un múltiplo del elemento de área de $M$. De hecho, puede verse en (Little [32], p. 266) que:

$$\frac{1}{2}\pi|K^{\perp}(p)| = \text{Área de la elipse de curvatura en } p.$$

Se sigue que un punto $p \in M$ *es semiumbílico si y sólo si* $K^{\perp}(p) = 0$. Una superficie $M$ inmersa en $\mathbb{R}^4$ es *totalmente semiumbílica* si todos sus puntos son semiumbílicos. Esto es equivalente a decir que *la curvatura normal es cero* en todo $M$, o también, que $M$ *admite un campo normal paralelo.* Las superficies totalmente semiumbílicas están caracterizadas por tener *campos de líneas asintóticas ortogonales* [44]. Un caso particular de superficies totalmente semiumbílicas es el de las superficies desarrollables.

**Puntos hiperbólicos, parabólicos y elípticos en términos del invariante $\Delta$.** Existe un invariante $\Delta$ en $M$ que se define como sigue: Escribimos $e = uX_1 + vX_2$ y consideramos $\langle de, X_3\rangle \wedge \langle de, X_4\rangle$. Tenemos que $de = udX_1 + duX_1 + vdX_2 + dvX_2$. Por lo que $\langle de, X_3\rangle = u\omega_{13} + v\omega_{23}$ y $\langle de, X_4\rangle = u\omega_{14} + v\omega_{24}$. Tomando en cuenta que $\omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{14}$ y $\omega_{24}$ pueden ponerse en términos de la base $\{\omega_1, \omega_2\}$ del dual de $T_pM$; obtenemos

$$\langle de, X_3\rangle \wedge \langle de, X_4\rangle = \delta\,(u,v)\,\omega_1 \wedge \omega_2$$

Entonces la función $\Delta$ está dada por $\Delta\,(u,v) = \det\,\delta\,(u,v)$.

El determinante $\det\,\delta\,(u,v)$ se expresa en términos de los coeficientes de la segunda forma fundamental $(e_i, f_i, g_i)$, $i = 1, 2$ como:

$$\Delta\,(p) = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 & 0 \\ e_2 & f_2 & g_2 & 0 \\ 0 & e_1 & f_1 & g_1 \\ 0 & e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix},$$

Puede mostrarse que $\Delta\,(p)$ es $> 0, = 0$, o $< 0$ si $p$ es *elíptico*, *parabólico* o *hiperbólico* respectivamente. También puede verificarse que la función $\Delta$ toma valores negativos en los puntos semiumbílicos y se anula en los puntos de inflexión. Las *superficies semiumbílicas* fueron caracterizadas por Little [32] como aquellas para las cuales las funciones $\Delta$, $K^{\perp}$ y $K$ se anulan en todas partes.

**Campos binormales.** Sea $\phi : \overline{M} \to \mathbb{R}^4$ una inmersión isométrica de una superficie $\overline{M}$ y sea $M = \phi(\overline{M})$. Dado un vector $\eta$ normal unitario a $M$ en un punto $p$, la función altura $h_\eta$ definida en $\overline{M}$ asociada a $\eta$ está definida por $h_\eta(x) = \langle \eta, \phi(x) \rangle$. Como $dh_\eta(x)\, v = \langle \eta, d\phi(x)\, v \rangle$ la función $h_\eta$ *tiene una singularidad en* $p$. En el caso en que esta singularidad sea *degenerada* (que la función altura no sea de Morse), decimos que $\eta$ define una *dirección binormal* para $M$ en $p$. La razón de este nombre es la analogía que hay con las curvas, donde la dirección binormal en un punto es precisamente la dirección cuya función altura tiene una singularidad degenerada en el punto. De hecho, se dice que el hiperplano $H_\eta$ ortogonal a $\eta$ tiene *contacto de orden superior* con $M$ en $p$ si $h_\eta$ tiene una singularidad degenerada, en este caso se denomina a $H_\eta$ *hiperplano osculador* similar al *plano osculador* de las curvas.

Puede verse ([36], Lema 4) que *una dirección $\theta$ es asintótica en $p$ si y sólo si $\theta$ se encuentra en el núcleo de la Hessiana de alguna función altura $h_\eta$ en $p$* donde $\eta$ es una dirección binormal. En este caso decimos que $\theta$ es una *dirección asociada a la dirección binormal* $\eta$ en $p$.

Se ha mostrado en [34], que si: $\Delta(p) < 0$, $= 0$ o $> 0$, existen exactamente *dos direcciones binormales, una dirección* o *ninguna*, respectivamente. Por eso la superficie *tiene exactamente dos binormales en los puntos hiperbólicos y semiumbílicos, una binormal en los puntos parabólicos y de inflexión y ninguna binormal en los puntos elípticos.*

Ejemplos de superficies que no tienen vector binormal en ningún punto, son las *superficies mínimas* en $\mathbb{R}^4$ (superficies con vector de curvatura media nulo). En el otro extremo están las superficies *localmente convexas* en $\mathbb{R}^4$, que son las superficies que en cada punto tienen un *hiperplano de soporte*, es decir la superficie está localmente situada de un sólo lado del plano generado por el plano tangente y una dirección normal) , que son ejemplos de superficies con vector binormal en cada uno de sus puntos.

Para las superficies semiumbílicas las funciones $\Delta$, $K^\perp$ y $K$ se anulan en todas partes. En este caso, aunque la curvatura es nula, el hecho de que $\Delta$ es cero implica que *existe una única binormal en todo punto de la superficie.*

En [44] se prueban ciertas equivalencias interesantes a la noción de $\nu$-umbilicidad:

- $M$ tiene dos campos de direcciones asintóticas globalmente definidos si y sólo sí es $\nu$-umbílica para un campo normal $\nu$ definido en todo $M$.
- $M$ es $\nu$-umbílica para algún campo normal $\nu$ globalmente definido en $M$ si y sólo si $M$ está totalmente constituído de puntos semiumbílicos.

- $M$ es hiperesférica si y sólo si es $\nu$-umbílica para algún campo unitario normal $\nu$ definido en $M$ cuya curvatura principal asociada $\lambda$ es una constante distinta de cero.

Estos resultados nos dan una interpretación geométrica de la propiedad de $\nu$-umbilicidad (ver Sección 2.4) en el caso en que el espacio ambiente es de dimensión 4. Las superficies en las conclusiones de los teoremas del capítulo 5 (Observación 5.21) son superficies $\nu$-umbílicas y tienen en particular estas propiedades.

# Capítulo 3

# Condiciones sobre la segunda forma fundamental

La diferencia mencionada entre los dos contextos de líneas de curvatura en lo que respecta a la conjetura de Loewner nos conduce a estudiar condiciones bajo las cuales exista una inmersión que aplique configuraciones de $\nu$-líneas de curvatura de una superficie inmersa en $\mathbb{R}^n$ en configuraciones de líneas de curvatura de una superficie de $\mathbb{R}^3$. Debe existir no solamente una isometría de la superficie con su imagen, sino además una aplicación que lleve la segunda forma fundamental en la dirección $\nu$ en la segunda forma fundamental de la superficie imagen.

El Teorema fundamental de las inmersiones (TFI), (ver: Apéndice A.4), afirma que dados:

- Una variedad Riemanniana simplemente conexa $M$, de dimensión $n$,
- un haz vectorial Riemanniano $\pi : E \to M$ de rango $p$ con conexión compatible $\nabla'$,
- una sección simétrica $\alpha$ del haz $\mathrm{Hom}(TM \times TM, E)$

y definiendo para cada sección local $\xi$ de $E$ la aplicación $S_\xi : TM \to TM$ por:

$$\langle S_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle, \; X, Y \in TM,$$

entonces;

si $\alpha$ y $\nabla'$ satisfacen las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci para el caso de curvatura constante $c$ (donde $\alpha$ y $\nabla'$ desempeñan el papel de la segunda forma fundamental y el de la conexión normal en estas ecuaciones respectivamente),

existe una inmersión isométrica $f : M \to Q_c^{n+p}$ y un isomorfismo de haces $\tilde{f} : E \to TM^\perp$ a lo largo de $f$, tal que para todo $X, Y \in TM$ y cualquier $\xi, \eta$ secciones locales de $E$ se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta)\rangle &= \langle \xi, \eta\rangle \\ \tilde{f}\alpha(X,Y) &= \tilde{\alpha}(X,Y) \\ \tilde{f}\nabla'_X \xi &= \nabla_X^\perp \tilde{f}(\xi). \end{aligned}$$

Donde $Q_c^{n+p}$ denota el espacio de curvatura constante $c$, igual a $\mathbb{R}^{n+q}$, o la esfera $S^{n+q}$ o $\mathbb{H}^{n+q}$ dependiendo de si $c = 0$ o $c > 0$ o $c < 0$ respectivamente.

Note que es natural la hipótesis de que se satisfagan las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci, pues éstas son satisfechas por una subvariedad $M \subset Q_c^n$.
En la hipótesis del teorema se requiere que la variedad $M$ sea simplemente conexa, la razón de ello es que la prueba (ver [13] para el caso $c = 0$, sección 1.5) se hace una construcción inicial donde un conjunto de vectores normales unitarios de $TM \oplus E$ en un punto, se extiende a un marco ortonormal global y esto es posible hacerlo si el tensor curvatura del haz es cero y la variedad simplemente conexa.

En la Sección 3.1 aplicaremos el TFI (con $n = 3$, $p = 1$ y $c = 0$) al *haz vectorial de rango uno* $\tilde{\nu}$, cuya fibra en cada punto $p \in M$, es la recta normal en la dirección de $\nu(p)$. Consideramos este haz con la métrica inducida por $\mathbb{R}^4$ y la sección simétrica bilineal $\tilde{\alpha}$ del haz $\mathrm{Hom}(TM \times TM, \tilde{\nu})$ es la proyección de la segunda forma fundamental de $M$.

Quedarán así definidos los objetos (métrica, conexión y la sección simétrica bilineal) que permiten formular las ecuaciones de Gauss y Codazzi (Sección 3.2) que requiere el TFI (la ecuación de Ricci no es necesaria si $n = 4$). Al final de la Sección 3.2 se define, el que la superficie $M$ de $\mathbb{R}^4$ sea *$\nu$-inmersible* en $\mathbb{R}^3$, en términos de $\tilde{\nu}$ (por medio de la existencia de aplicaciones $f$ y $\tilde{f}$ como en las conclusiones del TFI).

Consideramos la suma de Whitney de $TM$ y $\tilde{\nu}$: $E_\nu = TM \oplus \tilde{\nu}$, $R_\nu$ el tensor de curvatura determinado por la métrica (suma ortogonal de las métricas correspondientes).

Para una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$, se tiene que $R_\eta \equiv 0$; considerando $E_\eta = TM \oplus NM$ y $\eta$ el campo unitario normal; entonces una condición necesaria para que $M$ de $\mathbb{R}^4$ sea $\nu$-inmersible en $\mathbb{R}^3$ será que $R_\nu$ se anule. El hecho de esta condición es también suficiente se expone en la Observación 3.2 y es consecuencia de que la anulación de $R_\nu$ conduce a las ecuaciones de Gauss y Codazzi que requiere el TFI.

En la Sección 3.3 en la Proposición Principal 3.6 obtenemos de las ecuaciones de Gauss y Codazzi para $M \subset \mathbb{R}^4$, *dos condiciones* sobre la segunda forma fundamental de la superficie, equivalentes a que $E_\nu$ *satisfaga las ecuaciones de Gauss y Codazzi del haz* $E_\nu$ con $c = 0$. Del TFI se sigue que *estas condiciones equivalen a que la superficie sea* $\nu$*-inmersible en* $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto de ka Proposición Principal 3.6 y del TFI, tendremos que las condiciones son equivalentes a la $\nu$-inmersibilidad de la superficie (Corolario 3.7). En la Proposición 3.8 se expresan estas condiciones en términos de la anulación de las componentes del tensor $R_\nu(X, Y)$ en las direcciones: $TM$ y $\nu$.

En el caso de una superficie en $\mathbb{R}^4$ las condiciones adquieren un significado especial, según se trata en el Capítulo 4 y en la Sección 3.4. En la Sección 3.4 se prueba que si el campo normal $\nu$ no es paralelo, la condición $\nu$-Codazzi implica la condición $\nu$-Gauss. Más aún en esta sección la condición $\nu$-Codazzi se consigue expresar de una manera más compacta (Proposición 3.15 y Corolario 3.18) y se derivan interesantes conclusiones acerca de la geometría de las superficies (desarrolladas con mayor amplitud en [19], por otra parte en el Capítulo 4 se verán algunas propiedades para superficies en $\mathbb{R}^4$ en relación a la condición $\nu$-Gauss).

En la Sección 3.5; Proposición 3.19 y Teorema 3.22 se generalizan los conceptos anteriores a subvariedades de espacios de curvatura constante y la $\nu$-inmersión a la $V$-inmersión con respecto de un subhaz $V$ del haz normal $NM$ de $M$. En la Proposición 3.27 se expresan las condiciones $V$-Gauss, $V$-Codazzi y $V$-Ricci, en términos del marco móvil de Cartan.

## 3.1 Haz vectorial en la dirección de $\nu$.

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie, $\nu$ un campo vectorial normal con segunda forma fundamental $\alpha$ y $S_\nu$ su operador de forma en la dirección $\nu$ (Apéndice A.1).

Sea $\{X_1, \ldots, X_n\}$ un referencial ortonormal unitario de $\mathbb{R}^n$, donde $\{X_1, X_2\}$ son tangentes a $M$, en una carta coordenada y $X_i$, $i = 3, \ldots, n$ son normales. Denotaremos $\nu = X_3$, en el caso particular de $n = 4$ usaremos la notación $\nu^\perp = X_4$ y $\alpha(X, Y) = l_\nu(X, Y)\nu + l_{\nu^\perp}(X, Y)\nu^\perp$ para la segunda forma fundamental.

Consideremos el haz vectorial de rango uno $\pi : \tilde{\nu} \to M$, cuya fibra en $p \in M$ es la línea normal en la dirección $\nu(p)$.

Sea $\tilde{\nabla}$ la conexión, dada por la *proyección sobre $\tilde{\nu}$ de la conexión* $\overline{\nabla}$ de $\mathbb{R}^n$ restringida a $\tilde{\nu}$, a saber:

$$\tilde{\nabla}_X \eta = \langle \overline{\nabla}_X \eta, \nu \rangle \nu,$$

para $\eta \in \tilde{\nu}$ y $X \in TM$.

$\tilde{\nu}$ es un haz vectorial Riemanniano con la métrica inducida por la métrica estándar de $\mathbb{R}^n$ y la conexión $\tilde{\nabla}$ es compatible con la métrica.

Sea $\tilde{\alpha}$ la sección simétrica del haz vectorial

$$\rho : \operatorname{Hom}(TM \times TM, \tilde{\nu}) \to M,$$

dada por

$$\tilde{\alpha}(X, Y) = l(X, Y)\nu$$

donde

$$\alpha(X, Y) = l(X, Y)\nu + \sum_{k \geq 4} l_k(X, Y) X_k,$$

$\nu \in \tilde{\nu}$.

Formamos ahora la *suma de Whitney* de los haces vectoriales $TM$ y $\tilde{\nu}$: $E_\nu = TM \oplus \tilde{\nu}$, donde la métrica sobre $E_\nu$ es la suma ortogonal de las métricas de $TM$ y $\tilde{\nu}$. Esta métrica determina una conexión $\nabla'$ compatible con $E_\nu$ que se puede expresar por las siguientes fórmula (similares a las fórmulas de Gauss y Weingarten de una subvariedad y que permiten continuar con la similitud de estos haces con las subvariedades Riemannianas, ver Apéndice A1):

$$\begin{aligned} \nabla'_X Y &= \nabla_X Y + \tilde{\alpha}(X, Y), X, Y \in TM, \\ \nabla'_X \xi &= -S_\xi X + \tilde{\nabla}_X \xi;\ X \in TM, \xi \in \tilde{\nu}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Donde $\nabla$ es la conexión de Levi-Civita sobre $M$ correspondiente a la métrica inducida por el ambiente.

El *tensor de curvatura* de $E_\nu$ es:

$$R_\nu(X, Y)\eta = \nabla'_X \nabla'_Y \eta - \nabla'_Y \nabla'_X \eta - \nabla'_{[X,Y]} \eta,$$

$X, Y \in TM$, $\eta \in TM \oplus \tilde{\nu}$.

## 3.2 Ecuaciones de Gauss y Codazzi del haz.

La primera ecuación en la definición de $\nabla'$ (3.1), es similar formalmente a la fórmula de Gauss para subvariedades en (A.1), con $\nabla'$ en el papel de la conexión ambiente y $\tilde{\alpha}$ en el lugar de $\alpha$. Por otra parte la segunda ecuación en (3.1), es similar a la fórmula de Weingarten (ec. A.2) y $\tilde{\nabla}$ corresponde a $\nabla^{\perp}$.

Considerando esta similitud, aprovechamos el cálculo usual del tensor de curvatura para subvariedades (por ejemplo en [13], p. 4) y de esta manera obtenemos las ecuaciones de Gauss y Codazzi de $E_\nu$:

*Ecuación G de $E_\nu$:*

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R_\nu(X,Y)Z,W\rangle + \langle \tilde{\alpha}(X,W), \tilde{\alpha}(Y,Z)\rangle - \langle \tilde{\alpha}(X,Z), \tilde{\alpha}(Y,W)\rangle,$$

donde $X, Y, Z, W \in TM$ y $R$ es el tensor de curvatura de $M$.

*Ecuación C de $E_\nu$:*

$$(R_\nu(X,Y)Z)^{\perp} = \left(\tilde{\nabla}_X\tilde{\alpha}\right)(Y,Z) - \left(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\alpha}\right)(X,Z),$$

donde $X, Y, Z \in TM$ y "$\perp$" denota la componente en la dirección $\nu$ en $TM \oplus \tilde{\nu}$.

$$\left(\tilde{\nabla}_X\tilde{\alpha}\right)(Y,Z) = \tilde{\nabla}_X\tilde{\alpha}(Y,Z) - \tilde{\alpha}(\nabla_X Y, Z) - \tilde{\alpha}(Y, \nabla_X Z).$$

O bien la otra forma de la ecuación de Codazzi

$$(R_\nu(X,Y)\xi)^{\intercal} = \nabla_Y(S_\xi X) - \nabla_X(S_\xi Y),$$

donde "$\intercal$" significa aquí, tomar la componente de $TM$ en $TM \oplus \tilde{\nu}$, $X, Y \in TM$ y $\xi \in \tilde{\nu}$.

En las hipótesis del TFI (en el caso que estamos usando) se pide que se satisfagan las ecuaciones de Gauss y Codazzi para curvatura ambiente cero (Apéndice A.2). Si $M \subset \mathbb{R}^3$ estas ecuaciones se satisfacen naturalmente para $E_\eta = TM \oplus NM$, siendo $\tilde{\alpha}$ la segunda forma fundamental y $NM$ es el haz normal de rango uno. Además note que en este caso: $R_\eta \equiv 0$.

**Definición 3.1** *Si $R_\nu \equiv 0$ en las ecuaciones G y C anteriores, obtenemos las ecuaciones de Gauss y Codazzi de $E_\nu$ que formalmente corresponden al caso de curvatura cero del ambiente de una subvariedad (Apéndice A.2) y que nombraremos en adelante simplemente ecuaciones de Gauss y Codazzi de $E_\nu$.*

*Ecuación de Gauss de $E_\nu$ :*

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle\tilde{\alpha}(X,W),\tilde{\alpha}(Y,Z)\rangle - \langle\tilde{\alpha}(X,Z),\tilde{\alpha}(Y,W)\rangle, \tag{3.2}$$

donde $X,Y,Z,W \in TM$ y $R$ es el tensor de curvatura de $M$.

*Ecuación de Codazzi de $E_\nu$ :*

$$\left(\tilde{\nabla}_X\tilde{\alpha}\right)(Y,Z) - \left(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\alpha}\right)(X,Z) = 0, \tag{3.3}$$

donde $X,Y,Z \in TM$ y por definición,
$\left(\tilde{\nabla}_X\tilde{\alpha}\right)(Y,Z) = \tilde{\nabla}_X\tilde{\alpha}(Y,Z) - \tilde{\alpha}(\nabla_X Y,Z) - \tilde{\alpha}(Y,\nabla_X Z)$.

De manera similar se obtiene la otra forma de la ecuación de Codazzi

$$\nabla_Y(S_\xi X) - \nabla_X(S_\xi Y) = 0. \tag{3.4}$$

**Observación 3.2:** *De hecho $R_\nu \equiv 0$ es equivalente a que se satisfagan las ecuaciones de Gauss y Codazzi de $E_\nu$ (3.2 y 3.3), pues si las ecuaciones 3.2 y 3.3 se satisfacen, sigue de las ecuaciones G y C que $R_\nu \equiv 0$. Por lo tanto del TFI tenemos que la anulación de $R_\nu$ equivale a la $\nu$-inmersibilidad de $M$.*

Tenemos los elementos para dar la siguiente definición de la inmersión que estamos requiriendo.

**Definición 3.3** Diremos que una superficie $M$ de $\mathbb{R}^4$ es *$\nu$-inmersible* en $\mathbb{R}^3$ *si y sólo si existe una inmersión isométrica $f$ de $M$ en $\mathbb{R}^3$ y un isomorfismo de haces $\widetilde{f}$ a lo largo de $f$ (Apéndice A.3) entre $E_\nu$ y $Tf(M) \oplus Tf(M)^\perp$ en $\mathbb{R}^3$ que aplique $\tilde{\nu}$ en el haz normal de la imagen $Tf(M)^\perp$ y $\tilde{\alpha}$ en la segunda forma fundamental de $f(M) \subset \mathbb{R}^3$.*

El TFI afirma que las ecuaciones 3.2, 3.3 y 3.4 son necesarias y suficientes para que una superficie $M$ de $\mathbb{R}^4$ sea $\nu$-inmersible en $\mathbb{R}^3$. Estableceremos dos condiciones equivalentes a estas ecuaciones respectivamente, que llamaremos condiciones *$\nu$-Gauss* y *$\nu$-Codazzi* que nos permitirán verificar la $\nu$-inmersibilidad directamente de la segunda forma fundamental de $M$. En los siguientes capítulos haremos uso frecuente de estas ecuaciones.

## 3.3 Condiciones de $\nu$-inmersibilidad.

En la Proposición Principal 3.6 establecemos dos ecuaciones equivalentes a las ecuaciones de Gauss y Codazzi del haz $E_\nu$: las condiciones $\nu$-Gauss y $\nu$-Codazzi. Estas dos condiciones serán esenciales en los siguientes capítulos.

Probaremos enseguida unos lemas que usaremos en la prueba de la Proposición 3.6.

Primero formulamos una expresión para las ecuaciones de Gauss y Codazzi de $E_\nu$ *3.2, y 3.3* (Definición 3.1*)* en términos de la segunda forma fundamental en la dirección de $\nu$.

**Lema 3.4** *Las ecuaciones de Gauss y Codazzi del haz $E_\nu$ tienen la siguiente expresión:*

$$\langle R\,(X,Y)\,Z,W\rangle = \langle l_\nu(X,W),l_\nu(Y,Z)\rangle - \langle l_\nu(X,Z),l_\nu(Y,W)\rangle$$

*y,*

$$X\,(l_\nu(Y,Z)) - Y\,(l_\nu(X,Z)) - l_\nu([X,Y],Z) + l_\nu(X,\nabla_Y Z) - l_\nu(Y,\nabla_X Z) = 0,$$

*respectivamente, donde $X,Y,Z,W \in TM$, $R$ denota la curvatura de $M$ respecto a $\nabla$ y $\tilde{\alpha}(X,Y) = l_\nu(X,Y)\nu$.*

**Demostración.** Obtenemos enseguida una expresión para la ecuación de Gauss del haz $E_\nu$.

$$\begin{aligned}\langle R\,(X,Y)\,Z,W\rangle &= \langle\tilde{\alpha}\,(X,W)\,,\tilde{\alpha}\,(Y,Z)\rangle - \langle\tilde{\alpha}\,(X,Z)\,,\tilde{\alpha}\,(Y,W)\rangle\\ &= \langle l_\nu(X,W)\nu,l_\nu(Y,Z)\nu\rangle - \langle l_\nu(X,Z)\nu,l_\nu(Y,W)\nu\rangle\\ &= \langle l_\nu(X,W),l_\nu(Y,Z)\rangle - \langle l_\nu(X,Z),l_\nu(Y,W)\rangle,\end{aligned}$$

De aquí que podemos escribir la ecuación 3.2 como

$$\langle R\,(X,Y)\,Z,W\rangle = \langle l_\nu(X,W),l_\nu(Y,Z)\rangle - \langle l_\nu(X,Z),l_\nu(Y,W)\rangle$$

La ecuación 3.3 es (Definición 3.1)

$$\left(\tilde{\nabla}_X\tilde{\alpha}\right)(Y,Z) = \left(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\alpha}\right)(X,Z)$$

donde,

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\nabla}_X\tilde{\alpha}\right)(Y,Z) &= \tilde{\nabla}_X\tilde{\alpha}(Y,Z)-\tilde{\alpha}(\nabla_XY,Z)-\tilde{\alpha}(Y,\nabla_XZ)\\ \left(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\alpha}\right)(X,Z) &= \tilde{\nabla}_Y\tilde{\alpha}(X,Z)-\tilde{\alpha}(\nabla_YX,Z)-\tilde{\alpha}(X,\nabla_YZ).\end{aligned}$$

Vamos a obtener una expresión de la ecuación en términos de la segunda forma fundamental de $M$. Substituyendo $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\nabla}$, obtenemos,

$$\begin{aligned}&\nabla^{\perp}_X(l_\nu(Y,Z)\nu)-l_\nu(\nabla_XY,Z)\nu-(l_\nu(Y,\nabla_XZ))\,\nu\\ =\;&\nabla^{\perp}_Y(l_\nu(X,Z)\nu)-l_\nu(\nabla_YX,Z)\nu-(l_\nu(X,\nabla_YZ))\,\nu\end{aligned}$$

Considerando que

$$\nabla^{\perp}_X l_\nu(Y,Z)\nu = X\left(l_\nu(Y,Z)\right)\nu+l_\nu(Y,Z)\nabla^{\perp}_X\nu$$

se tiene:

$$\begin{aligned}&\left(\tilde{\nabla}_X\tilde{\alpha}\right)(Y,Z)-\left(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\alpha}\right)(X,Z)=\\ &X\left(l_\nu(Y,Z)\right)\nu+l_\nu(Y,Z)\nabla^{\perp}_X\nu-l_\nu(\nabla_XY,Z)\nu-(l_\nu(Y,\nabla_XZ))\,\nu\\ &-(Y\left(l_\nu(X,Z)\right)\nu+l_\nu(X,Z)\nabla^{\perp}_Y\nu-l_\nu(\nabla_YX,Z)\nu-(l_\nu(X,\nabla_YZ))\,\nu)\end{aligned}$$

Observe que $\langle\nabla'_X\nu,\nu\rangle=0$, por lo que $\nabla^{\perp}_X\nu$ es ortogonal a $\nu$, de donde se obtiene,

$$\begin{aligned}&X\left(l_\nu(Y,Z)\right)-Y\left(l_\nu(X,Z)\right)+l_\nu(\nabla_YX,Z)-\\ &l_\nu(\nabla_XY,Z)+l_\nu(X,\nabla_YZ)-l_\nu(Y,\nabla_XZ)\\ =\;&0.\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación 3.3 equivale a la igualdad

$$X\left(l_\nu(Y,Z)\right)-Y\left(l_\nu(X,Z)\right)-l_\nu([X,Y],Z)-l_\nu(Y,\nabla_XZ)+l_\nu(X,\nabla_YZ)=0.$$

■

**Lema 3.5** *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $l_{\nu^\perp}(X,Z)\langle\nabla^{\perp}_Y\nu^\perp,\nu\rangle+l_{\nu^\perp}(Y,Z)\langle\nabla^{\perp}_X\nu,\nu^\perp\rangle=0$, *para todo* $X,Y,Z\in TM$.
2. $S_{\nu^\perp}(\langle\nabla^{\perp}_X\nu,\nu^\perp\rangle Y+\langle\nabla^{\perp}_Y\nu^\perp,\nu\rangle X)=0$, *para todo* $X,Y\in TM$.

**Demostración.** El resultado se sigue de las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}
& l_{\nu^\perp}(X,Z)\langle\nabla^\perp_Y\nu^\perp,\nu\rangle + l_{\nu^\perp}(Y,Z)\langle\nabla^\perp_X\nu,\nu^\perp\rangle \\
= & \langle\nabla^\perp_Y\nu^\perp,\nu\rangle\langle\alpha(X,Z),\nu^\perp\rangle + \langle\nabla^\perp_X\nu,\nu^\perp\rangle\langle\alpha(Y,Z),\nu^\perp\rangle \\
= & \langle\langle\nabla^\perp_Y\nu^\perp,\nu\rangle S_{\nu^\perp}X + \langle\nabla^\perp_X\nu,\nu^\perp\rangle S_{\nu^\perp}Y, Z\rangle.
\end{aligned}$$

■

**Lema 3.6** *Cada condición del lema anterior es equivalente a la siguiente expresión de la ecuación de Codazzi de $E_\nu$ (ver Lema 3.3),*

$$X\left(l_\nu(Y,Z)\right) - Y\left(l_\nu(X,Z)\right) = l_\nu([X,Y],Z) + l_\nu(Y,\nabla_X Z) - l_\nu(X,\nabla_Y Z),$$

*para todo $X,Y,Z \in TM$.*

**Demostración.** Considere la ecuación de Codazzi de $M$ en $\mathbb{R}^4$ (A.4, Apéndice A.2),

$$\left(\nabla^\perp_X\alpha\right)(Y,Z) = \left(\nabla^\perp_Y\alpha\right)(X,Z),$$

donde,

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^\perp_X\alpha\right)(Y,Z) &= \nabla^\perp_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z), \\
\left(\nabla^\perp_Y\alpha\right)(X,Z) &= \nabla^\perp_Y\alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X,Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z).
\end{aligned}$$

Poniendo $\alpha(X,Y) = l(X,Y)\nu + l_{\nu^\perp}(X,Y)\nu^\perp$, $\nu \in \tilde{\nu}$ y tomando la componente en la dirección de $\nu$ en la ecuación de Codazzi de $M$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left\langle\nabla^\perp_X\left(l_\nu(Y,Z)\nu + l_{\nu^\perp}(Y,Z)\nu^\perp\right),\nu\right\rangle - l_\nu(\nabla_X Y,Z) - l_\nu(Y,\nabla_X Z) = \\
&\left\langle\nabla^\perp_Y\left(l_\nu(X,Z)\nu + l_{\nu^\perp}(X,Z)\nu^\perp\right),\nu\right\rangle - l_\nu(\nabla_Y X,Z) - l_\nu(X,\nabla_Y Z)
\end{aligned}$$

considerando que

$$\nabla^\perp_X(l_\nu(Y,Z)\nu) = X\left(l_\nu(Y,Z)\right)\nu + l_\nu(Y,Z)\nabla^\perp_X\nu$$

y análogamente

$$\nabla^\perp_X(l_{\nu^\perp}(Y,Z)\nu^\perp) = X\left(l_{\nu^\perp}(Y,Z)\right)\nu^\perp + l_{\nu^\perp}(Y,Z)\nabla^\perp_X\nu^\perp,$$

se obtiene

$$\langle\nabla^\perp_X\left(l_\nu(Y,Z)\nu + l_{\nu^\perp}(Y,Z)\nu^\perp\right),\nu\rangle = X\left(l_\nu(Y,Z)\right) + l_{\nu^\perp}(Y,Z)\langle\nabla^\perp_X\nu^\perp,\nu\rangle,$$

substituyendo en la ecuación de Codazzi, obtenemos

$$\begin{aligned} & X\left(l_\nu(Y,Z)\right) - Y\left(l_\nu(X,Z)\right) + \\ & l_{\nu^\perp}(Y,Z)\langle\nabla^\perp_X\nu^\perp,\nu\rangle - l_{\nu^\perp}(X,Z)\langle\nabla^\perp_Y\nu^\perp,\nu\rangle \\ = \; & l_\nu([X,Y],Z) + l_\nu(Y,\nabla_X Z) - l_\nu(X,\nabla_Y Z). \end{aligned}$$

Finalmente como la conexión normal es compatible con la métrica,

$$\begin{aligned} & l_{\nu^\perp}(Y,Z)\langle\nabla^\perp_X\nu^\perp,\nu\rangle - l_{\nu^\perp}(X,Z)\langle\nabla^\perp_Y\nu^\perp,\nu\rangle \\ = \; & l_{\nu^\perp}(Y,Z)\langle\nabla^\perp_X\nu^\perp,\nu\rangle + l_{\nu^\perp}(X,Z)\langle\nabla^\perp_Y\nu,\nu^\perp\rangle, \end{aligned}$$

y tenemos que la condición 1 del Lema 3.4, es equivalente a la ecuación:

$$X\left(l_\nu(Y,Z)\right) - Y\left(l_\nu(X,Z)\right) = l_\nu([X,Y],Z) + l_\nu(Y,\nabla_X Z) - l_\nu(X,\nabla_Y Z).$$

■

**Proposición 3.7 (Principal).** *Sean $M$, una superficie orientada inmersa en $\mathbb{R}^4$ y $\nu$ un campo vectorial, diferenciable, unitario, normal a $M$. Considere el haz vectorial definido por $\pi : E_\nu \to M$, con conexión Riemanniana $\nabla'$. Entonces, las ecuaciones de Gauss y Codazzi de $\pi : E_\nu \to M$ 3.2, 3.3 (Definición 3.1), se satisfacen si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones en todo punto $p \in M$:*

1. *Condición $\nu$-Gauss:*

$$l_{\nu^\perp}(X,W)l_{\nu^\perp}(Y,Z) - l_{\nu^\perp}(X,Z)l_{\nu^\perp}(Y,W) = 0,$$

para todo $X, W, Y, Z \in TM$.

2. *Condición $\nu$-Codazzi:*

$\langle\nabla^\perp_X\nu,\nu^\perp\rangle Y + \langle\nabla^\perp_Y\nu^\perp,\nu\rangle X \in$ Ker $S_{\nu^\perp}$, *para todo $X, Y \in TM$ y* Ker $S_{\nu^\perp}$ *es el núcleo de $S_{\nu^\perp}$.*

**Demostración.** Como $M$ está inmersa en $\mathbb{R}^4$, la ecuación de Gauss se satisface para esta inmersión:

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle \\ &= l_\nu(X,W)l_\nu(Y,Z) + l_{\nu^\perp}(X,W)l_{\nu^\perp}(Y,Z) - \\ & \quad\; l_\nu(X,Z)l_\nu(Y,W) + l_{\nu^\perp}(X,Z)l_{\nu^\perp}(Y,W). \end{aligned}$$

donde $\alpha(X,Y) = l_\nu(X,Y)\nu + l_{\nu^\perp}(Y,Z)\nu^\perp$, $\nu \in \tilde{\nu}$.

por lo que la ecuación

$$\langle R(X,Y)\,Z,W\rangle = \langle l_\nu(X,W), l_\nu(Y,Z)\rangle - \langle l_\nu(X,Z), l_\nu(Y,W)\rangle$$

se satisface si y sólo si se tiene la condición

$$l_{\nu^\perp}(X,W)l_{\nu^\perp}(Y,Z) - l_{\nu^\perp}(X,Z)l_{\nu^\perp}(Y,W) = 0.$$

La equivalencia de la ecuación de Codazzi del haz $E_\nu$, con la segunda condición, se sigue de los Lemas 3.3, 3.4 y 3.5.

■

**Corolario 3.8** *Sea $M$ una superficie orientada simplemente conexa inmersa en $\mathbb{R}^4$. Sea $\nu$ un campo vectorial diferenciable unitario y normal a $M$, entonces $M$ es $\nu$-inmersible* en $\mathbb{R}^3$ *si y sólo si las condiciones $\nu$-Gauss y $\nu$-Codazzi se satisfacen.*

**Demostración.** Se sigue inmediatamente de la Proposición 3.6 y del TFI.

■

De la Proposición Principal 3.6 y de la Observación se sigue la:

**Proposición 3.9** *Sea $M$ una superficie orientada inmersa en $\mathbb{R}^n$. Sea $\nu$ un campo vectorial unitario diferenciable normal a $M$. Considere el haz vectorial dado por $\pi : E_\nu \to M$, con la conexión Riemanniana $\nabla'$. Entonces,*

1. *La condición $\nu$-Gauss se tiene si y sólo si $\langle R_\nu(X,Y)Z,W\rangle = 0$ para todo $X$, $Y$, $Z$, $W$ en $TM$.*
2. *La condición $\nu$-Codazzi se tiene si y sólo si la componente normal de $R_\nu(X,Y)Z$ se anula para todo $X$, $Y$, $Z$ en $TM$.*
3. *La condición $\nu$-Codazzi se tiene si y sólo si $R_\nu(X,Y)\xi$ se anula para todo $X, Y \in TM$ y $\xi \in \tilde{\nu}$.*

*Como la componente normal $\tilde{\nu}$ del haz es unidimensional, por la antisimetría del tensor de curvatura $\langle R_\nu(X,Y)\xi,\xi\rangle = 0$, basta probar que $R_\nu(X,Y)\xi$ no tiene componente tangencial.*

## 3.4 Condición $\nu$-Codazzi en $\mathbb{R}^4$.

Cuando la dimensión del espacio ambiente de la superficie $M$ es cuatro, la condición $\nu$-Codazzi cobra especial relevancia, pues en este caso, como veremos, la condición $\nu$-Codazzi implica la condición $\nu$ -Gauss si el campo $\nu$ no es paralelo y por el Corolario 3.8, el haz $E_\nu$ es inmersible en $\mathbb{R}^3$ para los campos $\nu$ que satisfagan esta condición.

La forma de la condición $\nu$-Codazzi presentada en la Proposición Principal 3.6 es la siguiente:

$$\langle \nabla_X^\perp \nu, \nu^\perp \rangle Y + \langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle X \in \ker S_{\nu^\perp}, \tag{3.5}$$

para todo $X, Y \in TM$, donde ker $S_{\nu^\perp}$es el núcleo de $S_{\nu^\perp}$.
Dado un par de campos vectoriales $X, Y$ tangentes a $M$, definimos el campo vectorial

$$W_\nu (X,Y) = \langle \nabla_X^\perp \nu, \nu^\perp \rangle Y + \langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle X.$$

La condición $\nu$-Codazzi se cumple en $M$ si y sólo si $W_\nu (X,Y)$ pertenece al núcleo de $S_{\nu^\perp}$, para todo $X, Y \in \varkappa(M)$.

De hecho se demostrará en el Lema 3.12 que *la condición $\nu$-Codazzi se tiene en $M$ si y sólo si para todo $p \in M$ existen localmente un par de campos tangentes $X, Y$, linealmente independientes, tales que $W_\nu(X,Y)_p$ pertenece al núcleo de $S_{\nu^\perp}$. Si $W_\nu(X,Y) \neq 0$, entonces la condición $\nu$-Codazzi implica la condición $\nu$-Gauss* (Lema 3.13) (en este caso, de la prueba se sigue que $W_\nu(X,Y)$ es una dirección asintótica).
Más aún veremos que *la condición $\nu$-Codazzi queda caracterizada brevemente por la expresión:* $\bar{\nabla}_{W_\nu}^\perp \nu = 0$ (Proposición 3.15) (ver [19]).

Como consecuencia de la Proposición 3.15 y del Corolario 3.8 se deducirá la siguiente interesante caracterización de la $\nu$-inmersibilidad en el Corolario 3.18:

*Sea $M$ una superficie simplemente conexa en $\mathbb{R}^4$ y sea $\nu$ un campo unitario normal a $M$ que no es paralelo en ningún abierto. Entonces, $M$ es $\nu$-inmersible en $\mathbb{R}^3$ si y sólo si $\bar{\nabla}_{W_\nu(X,Y)}\nu = 0$ en $M$, para todo par de campos tangentes linealmente independientes $X, Y$.*

**Lema 3.10** *La aplicación*

$$\begin{aligned} \varkappa(M) \times \varkappa(M) &\rightarrow \varkappa(M), \\ (X,Y) &\rightarrow W_\nu(X,Y). \end{aligned}$$

*es bilineal y satisface $W_\nu(X,Y) = -W_\nu(Y,X)$ para cualquier par de campos tangentes $X, Y \in \varkappa(M)$.*

**Demostración.** Primero probamos la igualdad $W_\nu(X,Y) = -W_\nu(Y,X)$. Como $\nabla^\perp$ es compatible con la métrica,
$0 = X\langle \nu, \nu^\perp\rangle = \langle \nabla^\perp_X \nu, \nu^\perp\rangle + \langle \nu, \nabla^\perp_X \nu^\perp\rangle$ para todo campo $X$.
$W_\nu(X,Y) = \langle \nabla^\perp_X \nu, \nu^\perp\rangle Y + \langle \nabla^\perp_Y \nu^\perp, \nu\rangle X$,
$W_\nu(Y,X) = \langle \nabla^\perp_Y \nu, \nu^\perp\rangle X + \langle \nabla^\perp_X \nu^\perp, \nu\rangle Y = -\langle \nu, \nabla^\perp_Y \nu^\perp\rangle X - \langle \nu^\perp, \nabla^\perp_X \nu\rangle Y =$
$-W_\nu(X,Y)$.

Enseguida probamos la linealidad.
$W_\nu(aX+bZ,Y) = \langle \nabla^\perp_{aX+bZ} \nu, \nu^\perp\rangle Y + \langle \nabla^\perp_Y \nu^\perp, \nu\rangle (aX+bZ) =$
$a\langle \nabla^\perp_X \nu, \nu^\perp\rangle Y + b\langle \nabla^\perp_Z \nu, \nu^\perp\rangle Y + \langle \nabla^\perp_Y \nu^\perp, \nu\rangle (aX+bZ) =$
$a(\langle \nabla^\perp_X \nu, \nu^\perp\rangle Y + \langle \nabla^\perp_Y \nu^\perp, \nu\rangle X) + b(\langle \nabla^\perp_Z \nu, \nu^\perp\rangle Y + \langle \nabla^\perp_Y \nu^\perp, \nu\rangle Z) =$
$aW_\nu(X,Y) + bW_\nu(Z,Y)$.
Usando $W_\nu(Y,X) = -W_\nu(X,Y)$ se prueba la linealidad en el otro argumento.

**Observación 3.11** *Si existe un par de campos vectoriales $X, Y$ tangentes a $M$, linealmente independientes en $p$ para los cuales $W_\nu(X,Y)_p \neq 0$, entonces, para cualquier referencial $\{X_1,\ X_2\}$ tangente en $p$, $W_\nu(X_1,X_2)_p \neq 0$. Mas aún, $W_\nu(X,Y)$ y $W_\nu(X_1,X_2)$ son linealmente dependientes.*

**Demostración.** Se sigue del Lema 3.10, pues si
$(X,Y) = (x_1X_1 + x_2X_2, y_1X_1 + y_2X_2)$
es un par de campos tangentes, se tiene:

$$\begin{aligned} W_\nu(X,Y) &= W_\nu(x_1X_1 + x_2X_2, y_1X_1 + y_2X_2) \\ &= x_1y_1W_\nu(X_1,X_1) + x_2y_2W_\nu(X_2,X_2) \\ &\quad + x_1y_2W_\nu(X_1,X_2) + x_2y_1W_\nu(X_2,X_1) \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)W_\nu(X_1,X_2). \end{aligned}$$

■

Para garantizar la *condición $\nu$-Codazzi,* es pues suficiente, la existencia de un par de campos vectoriales $X, Y$ para los cuales $W_\nu(X,Y)_p$ pertenezca al núcleo de $S_{\nu^\perp}$. Podemos así establecer el siguiente:

**Lema 3.12** *La condición $\nu$-Codazzi se tiene en $M$ si y sólo si existen localmente un par de campos tangentes $X, Y$, linealmente independientes, tal que para todo $p$, $W_\nu(X,Y)_p$ pertenece al núcleo de $S_{\nu^\perp}$.*

**Lema 3.13** *Si $W_\nu(X,Y) \neq 0$, entonces la condición $\nu$-Codazzi implica la condición $\nu$-Gauss.*

**Demostración.** Consideremos una carta coordenada isotérmica en cada punto $p \in M$ con referencial tangente $\{X_1, X_2\}$. Entonces de la Observación 3.11 tenemos que $W_\nu(X_1, X_2) \neq 0$ y que $W_\nu(X, Y)$ y $W_\nu(X_1, X_2)$ son linealmente dependientes. Del Lema 3.12 se tiene que el campo $W_\nu(X_1, X_2)$ (que no se anula en ningún punto de la vecindad coordenada) pertenece al núcleo de $S_{\nu^\perp}$. Entonces det $S_{\nu^\perp}$ es nulo, pero en esta carta coordenada el determinante de $S_{\nu^\perp}$ tiene la expresión:

$$\det S_{\nu^\perp} = \frac{1}{E}\left(e_{\nu^\perp} g_{\nu^\perp} - f^2_{\nu^\perp}\right),$$

donde $E$ es el coeficiente de la primera forma fundamental y $(e_{\nu^\perp}, g_{\nu^\perp}, f_{\nu^\perp})$ son los coeficientes de la segunda forma fundamental en esta carta y con respecto a $\nu^\perp$ (2.4). Por lo cual $e_{\nu^\perp} g_{\nu^\perp} - f^2_{\nu^\perp} = 0$, lo cual equivale a que se cumpla la condición $\nu$-Gauss (ver Proposición 5.1). ■

**Observación 3.14** *a) Note que en este caso se obtiene directamente de la prueba que $W_\nu(X, Y)$ es un campo tangente a la dirección asintótica asociada a $\nu^\perp$. De hecho, existen dos campos vectoriales unitarios tangentes a la dirección asintótica. Denotemos por $W_\nu = \frac{W_\nu(X_1, X_2)}{\|W_\nu(X_1, X_2)\|}$, donde $\{X_1, X_2\}$ es el referencial en esta carta coordenada.*
*b) Si $\nu$ o $\nu^\perp$ es paralelo en una vecindad abierta $U$ de $p$, entonces $W_\nu(X, Y)$ se anula para todos los campos $X$, $Y$ tangentes a $M$ y la condición $\nu$-Codazzi se tiene trivialmente en $U$.*

**Proposición 3.15** *La condición $\nu$-Codazzi es equivalente a que $\bar{\nabla}_{W_\nu(X,Y)}\nu^\perp = 0$ para todo par de campos tangentes linealmente independientes $X, Y$. En particular, donde $W_\nu$ esté bien definido: $\bar{\nabla}_{W_\nu}\nu^\perp = 0$ si y sólo si la condición $\nu$-Codazzi se tiene.*

**Demostración.** Supongamos que se cumple la condición $\nu$-Codazzi. Sean $X$, $Y$ dos campos tangentes linealmente independientes. Sea $Z$ el conjunto de puntos donde $W_\nu(X, Y)$ se anula, es claro que ahí se tiene $\bar{\nabla}^\perp_{W_\nu(X,Y)}\nu = 0$. Si $p \notin Z$, $W_\nu(X, Y) \neq 0$ en una vecindad de $p$, por el Lema 3.13 la condición $\nu$-Gauss se tiene también y $W_\nu(X, Y) \in \ker S_{\nu^\perp}$. Usando la condición $\nu$-Codazzi 3.5, aplicada al campo $W = W_\nu(X, Y)$ obtenemos $\langle \nabla^\perp_W \nu, \nu^\perp \rangle = 0$ y por ser $\nu$ unitario $\nabla^\perp_W \nu = 0$. Esta última igualdad y $S_{\nu^\perp}(W_\nu(X, Y)) = 0$ implican por la fórmula de Weingarten A.2, que $\bar{\nabla}^\perp_{W_\nu(X,Y)}\nu = 0$. Recíprocamente si $\bar{\nabla}^\perp_{W_\nu(X,Y)}\nu = 0$, para el par de campos $X$, $Y$ tangentes a $M$, la fórmula de Weingarten implica que $W_\nu(X, Y) \in \ker S_{\nu^\perp}$ que significa que se tiene la condición $\nu$-Codazzi.

Supongamos que la carta coordenada en la cual hemos hecho el análisis es isotérmica, con referencial normal $\{\nu, \nu^\perp\}$. Recordemos que

$$\begin{aligned} \omega_{34}(X) &= \langle \nabla^\perp_X \nu, \nu^\perp \rangle \\ \omega_{43}(Y) &= \langle \nabla^\perp_Y \nu^\perp, \nu \rangle = -\omega_{34}(Y). \end{aligned}$$

De donde tenemos que $W_\nu(X,Y)$ se escribe como:

$$W_\nu(X,Y) = -\omega_{34}(Y)X + \omega_{34}(X)Y.$$

De aquí se sigue el:

**Lema 3.16** *$W_\nu \equiv 0$ si y sólo si $\omega_{34} \equiv 0$.*

**Observación 3.17** *Hacemos notar que $\omega_{34}$ es idénticamente cero en $M$ si y sólo si $M$ está contenido en una hiperesfera o bien en un hiperplano [44]. Note también que la condición $\bar{\nabla}_{W_\nu(X,Y)}\nu^\perp = 0$ es equivalente a $\bar{\nabla}_{W_\nu(X,Y)}\nu = 0$.*

**Corolario 3.18** *Sea $M$ una superficie simplemente conexa inmersa en $\mathbb{R}^4$ y sea $\nu$ un campo unitario normal sobre $M$ que no es paralelo en ningún abierto. Entonces, $M$ admite una inmersión isométrica en $\mathbb{R}^3$ con segunda forma fundamental prescrita $II_\nu$ si y sólo si $\bar{\nabla}_{W_\nu(X,Y)}\nu = 0$ en $M$, para todo par de campos tangentes linealmente independientes $X, Y$.*

**Demostración.** Si $\bar{\nabla}_{W_\nu(X,Y)}\nu^\perp = 0$ en $M$, para todo par de campos tangentes linealmente independientes $X, Y$ por la Proposición 3.15 se cumple la condición $\nu$-Codazzi en todo $M$, la condición $\nu$-Gauss se tiene en el conjunto donde $W_\nu(X,Y) \neq 0$. El conjunto de puntos donde $W_\nu(X,Y) = 0$ es el conjunto de puntos donde $\nu$ es paralelo (Lema 3.16) y por hipótesis tiene medida cero. Por continuidad la condición $\nu$-Gauss se cumple en todo $M$. Por el Corolario 3.8 existe una inmersión de $M$ en $\mathbb{R}^3$ con segunda forma fundamental prescrita. La afirmación recíproca se sigue del Corolario 3.8 y la Proposición 3.15, pues el teorema garantiza que se tiene la condición $\nu$-Codazzi en todo $M$ y la proposición que se tiene $\bar{\nabla}_{W_\nu(X,Y)}\nu^\perp = 0$ en $M$. ■

## 3.5 Caso general.

Las condiciones $\nu$-Gauss y $\nu$-Codazzi aunque se han expuesto hasta aquí en el caso en que el espacio ambiente es $\mathbb{R}^4$, son válidas en un contexto más general como se muestra en esta sección y se usan en el Capítulo 5.

El concepto de $\nu$-inmersibilidad de superficies, se puede generalizar de la siguiente manera: si en lugar de superficies consideramos subvariedades de dimensión $m$ del espacio de curvatura constante $Q_c^n$ y si la inmersión se hace en la "dirección" de un subhaz $V$ de rango $r$ del haz normal $NM$, en un espacio $Q_c^{m+r} \subset Q_c^n$. En este caso tendremos que las condiciones de inmersión son dadas por tres ecuaciones correspondientes a las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci.

Para esto se construye un haz Riemanniano similar al haz $E_\nu$ de la Sección 3.1 de la siguiente manera:

Sea $M$ una subvariedad Riemanniana de dimensión $m$ del espacio de dimensión constante $Q_c^n$ y $V$ un subhaz Riemanniano de rango $r$ del haz normal $NM$. Sea $\{X_1, \ldots, X_n\}$ un referencial ortonormal unitario de $Q_c^n$ donde $\{X_1, X_2, ..., X_m\}$ son campos tangentes a $M$ en una carta coordenada y $X_l$, $l = m+1, \ldots, n$ son campos normales. Supongamos que los primeros $r$ campos normales: $X_\beta$, $\beta = m+1, \ldots, m+r$; $m + r \leq n$, constituyen un referencial ortonormal del haz normal $V$ y los últimos campos normales: $X_\delta$, $\delta = m + r + 1, ..., n$ son un referencial del haz $V^\perp$.

*En lo que sigue haremos la convención de que los índices $\gamma, \beta, \delta$; varían: $\gamma \in (m + 1, , ..., n)$, $\beta \in (m + 1, ..., m + r)$ y $\delta \in (m + r + 1, ..., n)$ respectivamente.*

Considere el haz vectorial de rango $r$, $\pi : V \to M$, donde $\pi$ es la proyección natural sobre $M$.

Equipamos a este haz vectorial con la conexión $\tilde{\nabla}$, dada por la *proyección sobre $V$ de la conexión $\overline{\nabla}$* de $Q_c^n$ restringida a $V$, a saber

$$\tilde{\nabla}_X \eta = \mathrm{Pr}_V(\overline{\nabla}\eta),$$

para $\eta \in V$ y $X \in TM$ y donde $\mathrm{Pr}_V$ es la proyección en $V$.

La conexión $\tilde{\nabla}$ es compatible con la métrica inducida por la métrica estándard de $Q_c^n$. De esta manera $V$ es un haz vectorial Riemanniano con la métrica inducida y con la conexión compatible $\tilde{\nabla}$.

Sea $\tilde{\alpha}$ la sección simétrica del haz vectorial

$$\rho : \mathrm{Hom}\,(TM \times TM, V) \to M,$$

dada por

$$\tilde{\alpha}(X,Y) = \sum l_\beta(X,Y) X_\beta$$

donde

$$\alpha(X,Y) = \sum l_\gamma(X,Y) X_\gamma.$$

y $l_\gamma(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), X_\gamma \rangle$.

Formamos la *Suma de Whitney* de los haces vectoriales $TM$ y $V$: $E_V = TM \oplus V$, la métrica sobre $E_V$ es la suma ortogonal de las métricas sobre $TM$ y $V$. La conexión $\nabla'$ compatible con esta métrica de $E_V$ está dada por:

$$\begin{aligned} \nabla'_X Y &= \nabla_X Y + \tilde{\alpha}(X,Y), \; X,Y \in TM, \\ \nabla'_X \xi &= -S_\xi X + \tilde{\nabla}_X \xi; \; X \in TM, \xi \in V. \end{aligned}$$

Donde $\nabla$ es la conexión de Levi-Civita sobre $M$.

El *tensor de curvatura* de $E_V$ es:

$$R_V(X,Y)\eta = \nabla'_X \nabla'_Y \eta - \nabla'_Y \nabla'_X \eta - \nabla'_{[X,Y]} \eta,$$

donde $X, Y \in TM, \eta \in TM \oplus V$.

Considerando la similitud de las ecuaciones que definen $\nabla'$ con las formulas de Gauss y Weingarten, aprovechamos el cálculo usual del tensor de curvatura para subvariedades (por ejemplo en [13], p. 4) y de esta manera obtenemos las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci de $E_\nu$:

*Ecuación G de $E_V$*:

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R_V(X,Y)Z,W\rangle + \langle \tilde{\alpha}(X,W), \tilde{\alpha}(Y,Z)\rangle - \langle \tilde{\alpha}(X,Z), \tilde{\alpha}(Y,W)\rangle,$$

donde $R$ es el tensor de curvatura de $M$, $X, Y, Z$ y $W \in TM$.

*Ecuación C de $E_V$*:

$$(R_V(X,Y)Z)^\perp = \left(\tilde{\nabla}_X \tilde{\alpha}\right)(Y,Z) - \left(\tilde{\nabla}_Y \tilde{\alpha}\right)(X,Z),$$

donde por definición

$\left(\tilde{\nabla}_X \tilde{\alpha}\right)(Y,Z) = \tilde{\nabla}_X \tilde{\alpha}(Y,Z) - \tilde{\alpha}(\nabla_X Y, Z) - \tilde{\alpha}(Y, \nabla_X Z)$ y ("$\perp$") denota la proyección en $V$ del haz $E_V$.

O bien la otra expresión de la ecuación de Codazzi

*Ecuación C 2 de $E_V$*:

$$(R_V(X,Y)\xi)^\intercal = \nabla_Y S(\xi, X) - \nabla_X(S_\xi Y),$$

donde "$\intercal$" denota la componente de $TM$ en $TM \oplus \tilde{\nu}$, $X, Y \in TM$ y $\xi \in \tilde{\nu}$ y por definición

$$(\nabla_X S)(Y,\xi) = \nabla_X S_\xi Y - S_\xi \nabla_X Y - S_{\nabla^\perp_X \xi} Y.$$

*Ecuación R de $E_V$:*

$$(R_V(X,Y)\xi)^{\perp} = \widetilde{R}(X,Y)\xi + \tilde{\alpha}(S_\xi X, Y) - \tilde{\alpha}(X, S_\xi Y).$$

donde $\xi$ es una sección de $V$, la componente normal es la proyección en $V$ del haz $E_V$ y $\widetilde{R}$ es el *tensor de curvatura* del subhaz $V$:

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y\xi - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X\xi - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi,$$

definido para todo $X, Y \in TM$ y $\xi \in V$ y que llamaremos *curvatura normal de $E_V$*. O bien la otra forma de la ecuación de Ricci:

$$\langle R_V(X,Y)\xi, \zeta\rangle = \langle \widetilde{R}(X,Y)\xi, \zeta\rangle - \langle [S_\xi, S_\zeta]X, Y\rangle$$

donde $X, Y \in TM$ y $\xi, \zeta \in V$ y $[S_\xi, S_\zeta] = S_\xi S_\zeta - S_\zeta S_\xi$.

**Ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci de $E_V$.**
En las hipótesis del TFI se pide que se satisfagan las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci para curvatura ambiente constante $c$ (Apéndice A.2). Si $M \subset Q_c^{m+r}$ estas ecuaciones se satisfacen naturalmente para $E_V = TM \oplus NM$, siendo $\tilde{\alpha}$ la segunda forma fundamental y $NM$ es $V$ el haz normal de rango $r$ .

**Definición 3.1** *En las ecuaciones G, C y R anteriores cuando el tensor de curvatura $R_V$ es constante igual a $c$ en las direcciones tangentes y cero en las normales (en dirección de $V$), obtenemos las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci de $E_V$ en el caso de curvatura del haz constante igual a $c$ y que nombraremos en adelante simplemente, ecuaciones de Gauss y Codazzi de $E_v$.*

*Ecuación de Gauss de $E_V$:*

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = c\langle (X \wedge Y)Z, W\rangle + \langle \tilde{\alpha}(X,W), \tilde{\alpha}(Y,Z)\rangle - \langle \tilde{\alpha}(X,Z), \tilde{\alpha}(Y,W)\rangle,$$

donde $X, Y, Z, W \in TM$ y $R$ es el tensor de curvatura de $M$.
*Ecuaciones de Codazzi de $E_V$:*

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\nabla}_X\tilde{\alpha}\right)(Y,Z) - \left(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\alpha}\right)(X,Z) &= 0, \\ &\phantom{=}\ \text{o} \\ \nabla_Y(S_\xi X) - \nabla_X(S_\xi Y) &= 0,\ \xi \in V. \end{aligned}$$

*Ecuaciones de Ricci de $E_V$:*

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)\xi + \tilde{\alpha}(S_\xi X, Y) - \tilde{\alpha}(X, S_\xi Y) &= 0, \ \xi \in V, \\ &\text{o} \\ \langle \widetilde{R}(X,Y)\xi, \zeta\rangle - \langle [S_\xi, S_\zeta]X, Y\rangle &= 0; \ \xi, \zeta \in V.\end{aligned}$$

Para las subvariedades de un espacio de curvatura constante $c$ las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci en términos de $\alpha$ (Apéndice A.2 ) son:

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = c\langle (X \wedge Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle,$$

$$\left(\nabla^\perp_X \alpha\right)(Y,Z) = \left(\nabla^\perp_Y \alpha\right)(X,Z),$$

y

$$R^\perp(X,Y)\xi = \alpha(X, S_\xi Y) - \alpha(S_\xi X, Y),$$

respectivamente

Sea $\alpha_\delta = \alpha - \tilde{\alpha}$ es decir $\alpha_\delta(X,Y) = \sum l_\delta(X,Y)X_\delta$ donde $\delta$ varía en $m+r+1,...,n$ (son los índices que corresponden a los campos normales del referencial que no pertenecen a $V$). De las ecuaciones G, C y R anteriores y de las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci de $M \subset Q_c^n$ tomando en cuenta las siguientes igualdades.
$\langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle = \langle (\alpha_\delta + \tilde{\alpha})(X,W), (\alpha_\delta + \tilde{\alpha})(Y,Z)\rangle =$
$\langle \alpha_\delta(X,W), \alpha_\delta(Y,Z)\rangle + \langle \tilde{\alpha}(X,W), \tilde{\alpha}(Y,Z)\rangle$
puesto que,
$\langle \alpha_\delta(X,W), \tilde{\alpha}(Y,Z)\rangle = \langle \alpha_\delta(Y,Z), \tilde{\alpha}(X,W)\rangle = 0.$
de donde:
$\langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle = \langle \alpha_\delta(X,W), \alpha_\delta(Y,Z)\rangle + \langle \tilde{\alpha}(X,W), \tilde{\alpha}(Y,Z)\rangle$
y por la linealidad de $\nabla^\perp_X \alpha$, donde:
$\left(\nabla^\perp_X \alpha\right)(Y,Z) = \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla^\perp_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla^\perp_X Z),$
se tiene:
$\left(\nabla^\perp_X \alpha\right)(Y,Z) = \left(\nabla^\perp_X \alpha_\delta\right)(Y,Z) + \left(\nabla^\perp_X \tilde{\alpha}\right)(Y,Z)$
Obtenemos ahora las condiciones sobre la segunda forma fundamental:

**Proposición 3.19.** *Sea $M$ una subvariedad de dimensión $m$* de $Q_c^n$ y *sea $V$ un subhaz del haz normal $NM$. Considere el haz vectorial definido por $\pi : E_V \to M$ con conexión Riemanniana $\nabla'$, entonces las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci de $\pi : E_V \to M$ para espacio ambiente de curvatura constante $c$ se satisfacen si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones en todo punto $p \in M$:*

1. *Condición $V$-Gauss: $\langle \alpha_\delta (X, Z), \alpha_\delta (Y, W) \rangle - \langle \alpha_\delta (X, W), \alpha_\delta (Y, Z) \rangle = 0$, para todo $X, W, Y, Z$ en $TM$.*

2. *Condición $V$-Codazzi: $\left(\nabla_X^\perp \alpha_\delta\right)(Y, Z) = \left(\nabla_Y^\perp \alpha_\delta\right)(X, Z)$, para todo $X, Y, Z$ en $TM$.*

3. *Condición $V$-Ricci: $\alpha_\delta (X, S_\xi Y) - \alpha_\delta (S_\xi X, Y) = R^\perp (X, Y) \xi - \widetilde{R} (X, Y) \xi$, para todo $X, Y$, en $TM$* y *$\xi \in V$.*

*donde $\nabla^\perp$ es la conexión normal de $M$.*

**Proposición 3.20** *Sea $M$ una subvariedad de dimensión $m$* de $Q_c^n$, *considere el haz vectorial dado por $\pi : E_V \to M$ con la conexión Riemanniana $\nabla'$, entonces*

1. *La condición $V$-Gauss se cumple si y sólo si:*
   *$\langle R_V(X, Y)Z, W \rangle = c \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle$ para todo $X$, $Y$, $Z$, $W$ en $TM$.*

2. *La condición $V$-Codazzi se cumple si y sólo si la componente normal de $R_V(X, Y)Z$ se anula para todo $X$, $Y$, $Z$ en $TM$.*

3. *La condición $V$-Codazzi se cumple si y sólo si la componente tangente de $R_V(X, Y)\xi$ se anula para todo $X, Y \in TM$ y $\xi \in V$.*

4. *La condición $V$-Ricci se cumple si y sólo si la componente normal de $R_V(X, Y)\xi$ se anula para todo $X, Y \in TM$ y $\xi \in V$.*

**Demostración.** Por la Proposición 3.19 las condiciones $V$-Gauss, $V$-Codazzi y $V$-Ricci son equivalente respectivamente a las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci de $E_V$ y estas resueltas con las ecuaciones G, C y R son equivalentes a que el tensor de curvatura es cero en las direcciones normales y $c\langle (X \wedge Y)Z, W \rangle$ en las direcciones tangentes.

**Definición 3.21** Diremos que la subvariedad $M$ de $Q_c^n$ es *$V$-inmersible* en $Q_c^{m+p}$ con $m + p < n$, si *existe una inmersión isométrica $f$ de $M$ en $Q_c^{m+p}$ y un isomorfismo de* *haces $\widetilde{f}$ a lo largo de $f$ (Apéndice A.3) entre $E_V$ y $Tf(M) \oplus Nf(M)$ en $Q_c^{m+p}$ que aplica $V$ isomórficamente en el haz normal de la imagen $Tf(M)^{\perp}$ y $\tilde{\alpha}$ en la segunda forma fundamental de $f(M) \subset Q_c^{m+p}$.*

Finalmente, del teorema fundamental de las subvariedades (Apéndice A.4) y de la Proposición 3.19 se otiene la siguiente generalización del Corolario 3.8:

**Teorema 3.22** *Sea $M$ una subvariedad de dimensión $m$, orientada, simplemente conexa e inmersa en $Q_c^n$. Sea $V$ un subhaz de $NM$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La curvatura $R_V$ del haz vectorial definido por $\pi : E_V \to M$ es constante igual a $c$ a lo largo de $M$ evaluado en las direcciones tangentes y cero evaluado en las direcciones normales.*
2. *Las condiciones $V$-Gauss, $V$-Codazzi y $V$-Ricci se cumplen,*
3. $M$ es *$V$-inmersible* en $Q_c^{m+p}$.

**Demostración.** ($3 \iff 2$): Del teorema fundamental de las subvariedades se tiene que: 3) es equivalente a que el haz vectorial definido por $\pi : E_V \to M$ satisfaga las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci en el caso de curvatura constante $c$ (las ecuaciones G, C y R arriba). La Proposición 3.19 muestra que las condiciones $V$-Gauss, $V$-Codazzi y $V$-Ricci se cumplen si y sólo si las ecuaciones G, C y R se satisfacen, de aquí se concluye esta equivalencia.

($1 \iff 2$): De la Proposición 3.20 se sigue que las condiciones $V$-Gauss, $V$-Codazzi y $V$-Ricci se cumplen si y sólo si la curvatura $R_V$ del haz vectorial definido por $\pi : E_V \to M$ es constante igual a $c$ a lo largo de $M$.

**Definición 3.23** Dada una inmersión isométrica $f : M \to N$ de una variedad $M$ de dimensión $m$, en una variedad $N$ de dimensión $n + p$ se define el *primer espacio normal* de $f$ en $x \in M$ como el subespacio $N_1(x) \subset T_xM$ generado por la segunda forma fundamental $\alpha$ de $f$ en $x$, es decir:

$$N_1(x) = \text{gen}\{\alpha(X,Y) : X, Y \in T_xM\}.$$

Un cálculo muestra que,

$$N_1(x) = \{\xi \in N_xM : S_\xi = 0\}^{\perp}.$$

**Definición 3.24** Decimos que una inmersión $f$ es 1-*regular* si la dimensión de $N_1(x)$

es constante a lo largo de $M$. En este caso se puede ver que $N_1$ es un subhaz de $NM$ así como también $N_1^{\perp}$. Una inmersión isométrica $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ admite una *reducción a codimensión* $q$ si existe una subvariedad totalmente geodésica (segunda forma fundamental nula) $Q_c^{n+q}$ en $Q_c^{n+p}$ con $q < p$ tal que $f(M) \subset Q_c^{n+q}$. Observe que este es un caso particular de la definición de $V$-inmersibilidad. La inmersión $f$ se dice que es *sustancial* si la codimensión de $f$ no puede reducirse.

En [13] (capítulo 4) se prueba el siguiente resultado.

**Proposición.** *Sea $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ una inmersión isométrica y suponga que existe un subhaz $L$ paralelo, de rango $q < p$, satisfaciendo $N_1(x) \subset L(x)$ para toda $x \in M$. Entonces la codimensión de $f$ puede ser reducida a $q$.*

En particular se tiene:

**Corolario.** *Sea $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ una inmersión isométrica 1-regular. Si $N_1$ es un subhaz paralelo de rango $q < p$ entonces $f$ tiene codimensión substancial $q$.*

Si la inmersión de $M$ es tal que existe un subhaz $L$ de $NM$ tal que $N_1(x) \subset L(x)$ para toda $x \in M$ entonces las condiciones $N_1$-Gauss y $N_1$-Codazzi se cumplen automáticamente, aunque la condición $N_1$-Ricci se cumple si y sólo si $R^{\perp}(X,Y)\xi = \widetilde{R}(X,Y)\xi$, para todo $\xi \in L$ y todo $X, Y \in TM$. Del Teorema 3.22 se sigue la:

**Proposición 3.25** *Sea $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ una inmersión isométrica y suponga que existe un subhaz $L$, de rango $q < p$, satisfaciendo $N_1(x) \subset L(x)$ para toda $x \in M$. Entonces $M$ es $L$-inmersible si y sólo si $R^{\perp}|_L \equiv \widetilde{R}$.*

y el:

**Corolario 3.26** *Sea $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ una inmersión isométrica 1-regular. Si $N_1$ es un subhaz de rango $q < p$ entonces $M$ es $N_1$-inmersible si y sólo si $R^{\perp}|_{N_1} \equiv \widetilde{R}$.*

El primer espacio normal de las subvariedades umbílicas es generado por el vector normal de curvatura media $H$, así que si una subvariedad umbílica de $Q_c^{n+1}$ no es totalmente geodésica $N_1$ es regular y $M$ es $H$-inmersible (de hecho, se muestra en [13] que en este caso $N_1$ es paralelo y se concluye que $f$ tiene codimensión sustancial uno).

Las condiciones que garanticen la reducción de codimensión son objeto de investigación, principalmente el paralelismo de los subhaces. Es natural por lo tanto en el caso de $V$-inmersibilidad plantearse el estudio de las condiciones de 1-regularidad y de la condición: $R^{\perp}|_{N_1} \equiv \widetilde{R}$ (por ejemplo en el caso de las superficies).

**Condiciones en términos del marco móvil.** Las condiciones que hemos expresado en el Teorema 3.22 tienen una forma más simétrica en el lenguaje del marco móvil. Para presentarlas en estos términos, primero escribiremos las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci.

Sea $M$ una subvariedad Riemanniana de dimensión $m$ del espacio de dimensión constante $Q_c^n$ y $V$ un subhaz Riemanniano del haz normal $NM$. Sea $\{X_1, \ldots, X_n\}$ un referencial ortonormal unitario de $Q_c^n$, donde $\{X_1, X_2, ..., X_m\}$ son campos tangentes a $M$ y $X_\gamma$, $\gamma = m+1, \ldots, n$ son campos normales. Supongamos que los primeros $r$ campos normales: $X_\lambda$, $\lambda = m+1, \ldots, m+r$; $m+r \leq n$, constituyen un referencial ortonormal del haz normal $V$ y los últimos campos normales: $X_\delta$, $\delta = m+r+1, ..., n$ son un referencial del haz $V^\perp$.

*Haremos la convención de que los índices* $k, l$; $i, j, p$ *y* $\alpha, \beta, \gamma$ *varían en* $(1, ..., n)$, $(1, ..., m)$, $(m+1, \ldots, n)$ *respectivamente y con respecto a las bases de* $V$ y $V^\perp$; $\lambda, \delta$ *varían en* $(m+1, \ldots, m+r)$ *y* $(m+r+1, ..., n)$ *respectivamente.*

Las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci en estos términos son:

$$\begin{aligned}
d\omega_{ji} + \sum_p \omega_{pi} \wedge \omega_{jp} + \sum_\alpha \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{j\alpha} &= \widetilde{\Omega}_{ji}, \\
d\omega_{\alpha i} + \sum_j \omega_{ji} \wedge \omega_{\alpha j} + \sum_\beta \omega_{\beta i} \wedge \omega_{\alpha\beta} &= \widetilde{\Omega}_{\alpha i}, \\
d\omega_{\beta\alpha} + \sum_i \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\beta i} + \sum_\gamma \omega_{\gamma\alpha} \wedge \omega_{\beta\gamma} &= \widetilde{\Omega}_{\beta\alpha},
\end{aligned}$$

respectivamente, donde los $\omega_{kl}$ son las formas de conexión y $\widetilde{\Omega}_{kl}$ son las formas de curvatura correpondientes (Apéndice B).

Estas ecuaciones se obtienen de la ecuación estructural para $Q_c^n$:

$$d\omega_{kl} + \sum_m \omega_{ml} \wedge \omega_{km} = \widetilde{\Omega}_{kl},$$

donde $\widetilde{\Omega}$ es la forma de curvatura correspondiente a $Q_c^n$. En esta ecuación, restringiendo los índices en cada caso a los haces tangente en el primer caso, tangente y normal en el segundo caso y normal en el último caso, respectivamente y separando en las sumatorias la contribución tangente y la contribución normal obtenemos las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci de arriba.

La ecuación estructural para $M$ es

$$d\omega_{ji} + \sum_p \omega_{pi} \wedge \omega_{jp} = \Omega_{ji}.$$

donde $\Omega$ es la forma de curvatura para $M$. La ecuación estructural para el haz normal $NM$ es:

$$d\omega_{\beta\alpha} + \sum_{\gamma} \omega_{\gamma\alpha} \wedge \omega_{\beta\gamma} = \Omega^{\perp}_{\beta\alpha},$$

aquí $\Omega^{\perp}_{\beta\alpha}$ denota la matriz de conexión del haz normal.

De acuerdo a nuestra convención sobre la variación de los índices, las ecuaciones de Gauss, Ricci y Codazzi del haz $E_V$ son:

$$\begin{aligned}
d\omega_{ji} + \sum_{p} \omega_{pi} \wedge \omega_{jp} + \sum_{\lambda} \omega_{\lambda i} \wedge \omega_{j\lambda} &= \widetilde{\Omega}_{ji}, \\
d\omega_{\alpha i} + \sum_{j} \omega_{ji} \wedge \omega_{\alpha j} + \sum_{\lambda} \omega_{\lambda i} \wedge \omega_{\lambda\beta} &= \widetilde{\Omega}_{\alpha i}, \\
d\omega_{\beta\alpha} + \sum_{i} \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\beta i} + \sum_{\lambda} \omega_{\lambda\alpha} \wedge \omega_{\beta\lambda} &= \widetilde{\Omega}_{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Por lo que no es difícil ver que las condiciones $V$-Gauss, $V$-Codazzi y $V$-Ricci en estos términos son:

$$\begin{aligned}
\sum_{\delta} \omega_{\delta i} \wedge \omega_{j\delta} &= 0, \\
\sum_{\delta} \omega_{\delta i} \wedge \omega_{\delta\beta} &= 0, \\
\sum_{\delta} \omega_{\delta\alpha} \wedge \omega_{\beta\delta} &= 0.
\end{aligned}$$

respectivamente. Por lo que tenemos la siguiente:

**Proposición 3.27.** *Sea $M$ una subvariedad de dimensión $m$ de $Q^n_c$. Sea $V$ un subhaz del haz normal $NM$. Considere el haz vectorial definido por $\pi : E_V \to M$ con conexión Riemanniana $\nabla'$. Entonces las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci de $\pi : E_V \to M$ para espacio ambiente de curvatura constante $c$ se satisfacen si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones en todo punto $p \in M$:*

1. *Condición $V$-Gauss:*

$$\sum_{\delta} \omega_{\delta i} \wedge \omega_{j\delta} = 0,$$

2. *Condición V-Codazzi:*

$$\sum_{\delta} \omega_{\delta i} \wedge \omega_{\delta\beta} = 0,$$

3. *Condición V-Ricci:*

$$\sum_{\delta} \omega_{\delta\alpha} \wedge \omega_{\beta\delta} = 0.$$

Donde hemos utilizado la notación convenida.

# Capítulo 4

# Condición $\nu$-Gauss y las superficies en $\mathbb{R}^4$

La condición $\nu$-Gauss (enunciada en la Proposición Básica 3.6), está relacionada con algunos conceptos que surgen en el estudio del contacto de la superficie con hiperplanos del espacio ambiente, como lo son los campos binormales y sus direcciones asintóticas. Estos conceptos fueron introducidos por J. Little en [32] y por D.K.H Mochida, M. C. Romero Fuster y M. A. S Ruas en [34]. En la Sección 2.5 hacemos una presentación del tema (basada en [19] y [34]); que nos permitirá dar una formulación geométrica de la condición $\nu$-Gauss para superficies en $\mathbb{R}^4$.

## 4.1 Condición $\nu$-Gauss.

Se analizará aquí la condición $\nu$-Gauss desde el punto de vista local. Para esto, se dan expresiones convenientes en coordenadas.

Supongamos que $U \subset M$ es una vecindad con coordenadas locales $(u, v)$. Recordemos 2.4, que dado un campo normal unitario $\eta$, los coeficientes de la $\eta$-segunda forma fundamental son:

$$\begin{array}{rclcl} e_\eta & = & II_\eta(\partial_u) & = & -\langle \alpha(\partial_u, \partial_u), \eta\rangle = -\langle S_\eta(\partial_u), \partial_u\rangle, \\ f_\eta & = & -\langle \alpha(\partial_v, \partial_u), \eta\rangle & = & -\langle \alpha(\partial_u, \partial_v), \eta\rangle = -\langle S_\eta(\partial_u), \partial_v\rangle, \\ g_\eta & = & II_\nu(\partial_v) & = & -\langle \alpha(\partial_v, \partial_v), \eta\rangle = -\langle S_\eta(\partial_v), \partial_v\rangle, \end{array}$$

donde $\partial_u = \frac{\partial}{\partial u}$ y $\partial_v = \frac{\partial}{\partial v}$ y $S_\eta$ es el operador de forma con respecto a $\eta$.

**Proposición 4.1** *La condición $\nu$-Gauss es equivalente a que $\nu^\perp$ sea un campo binormal en $M$.*

**Demostración.** Veamos que la condición $\nu$-Gauss en esta carta coordenada es equivalente a la ecuación

$$e_{\nu^\perp} g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2 = 0. \tag{4.1}$$

De hecho, basta probar que la ecuación anterior es equivalente a la condición 1 de la Proposición Principal 3.6 (condición $\nu$-Gauss), para todo $p \in U$. Como $l_{\nu^\perp}(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), \nu^\perp \rangle$, tomando $X = \partial_u$, $Y = \partial_v$, $W = \partial_u$, $Z = \partial_v$, en la ecuación

$$l_{\nu^\perp}(X,W) l_{\nu^\perp}(Y,Z) - l_{\nu^\perp}(X,Z) l_{\nu^\perp}(Y,W) = 0, \tag{4.2}$$

obtenemos la condición 1 citada. Por otra parte, si escribimos los campos tangentes $X$, $Y$, $Z$, $W$ en la base $\{\partial_u, \partial_v\}$, un cálculo directo muestra

$$\begin{aligned} & l_{\nu^\perp}(X,W) l_{\nu^\perp}(Y,Z) - l_{\nu^\perp}(X,Z) l_{\nu^\perp}(Y,W) \\ & \quad = \langle \alpha(X,W), \nu^\perp \rangle \langle \alpha(Y,Z), \nu^\perp \rangle - \langle \alpha(Y,Z), \nu^\perp \rangle \langle \alpha(Y,W), \nu^\perp \rangle \\ & \quad = (x_1 y_2 - x_2 y_1)(w_1 z_2 - w_2 z_1)(e_{\nu^\perp} g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2), \end{aligned}$$

donde $x_i$, $y_i$, $z_i$, $w_i$ son las funciones coordenadas que corresponden a $X$, $Y$, $Z$, $W$ respectivamente. Así, la ecuación 4.2 se tiene, siempre que la ecuación 4.1 se satisfaga. Tenemos que el determinante de la matriz Hessiana de la función $h_{\nu^\perp}$,

$$\begin{pmatrix} e_{\nu^\perp} & f_{\nu^\perp} \\ f_{\nu^\perp} & g_{\nu^\perp} \end{pmatrix},$$

es idénticamente cero, y así $\nu^\perp$ es un campo binormal sobre $M$.

■

## 4.2 Conclusiones.

En general una superficie inmersa en $\mathbb{R}^4$ no tiene campos binormales (Sección 2.5) definidos globalmente. Las superficies $M$ inmersas en $\mathbb{R}^4$ que son *localmente convexas* (Sección 2.5) tienen definidos globalmente campos vectoriales binormales (ver [34]), (de hecho se muestra en [34], que existe un conjunto residual $R$ de los encajes $\phi$ :

$\overline{M} \to \mathbb{R}^4$ de una superficie $\overline{M}$ en $\mathbb{R}^4$, tal que: *una condición necesaria y suficiente para la convexidad local* de los elementos de $R$ *es la existencia global de dos campos binormales,* que pueden coincidir en puntos de inflexión aislados).

Ejemplos de superficies localmente convexas en $\mathbb{R}^4$ son las superficies contenidas en la frontera de su envolvente convexa, en particular aquellas contenidas en una hipersuperficie convexa como la hiperesfera $S^3$. Las superficies mínimas en $\mathbb{R}^4$ (es decir, aquellas cuyo vector de curvatura media es cero en todo punto) no tienen vectores binormales.

De lo anterior se obtiene la siguiente proposición obtenida por Romero-Fuster (ver [19]), que nos da ejemplos de superficies; que pueden tener campos normales $\nu$ para los que puede haber $\nu$-inmersión en $\mathbb{R}^3$, superficies que no tienen campos normales con esta propiedad y superficies que pueden tener a lo más un campo normal con esta propiedad.

**Proposición 4.2** ([19])

1. *Existe un conjunto residual* $R$ *de los encajes* $\phi : \overline{M} \to \mathbb{R}^4$ *de una superficie* $\overline{M}$ *en* $\mathbb{R}^4$ *tal que: una condición necesaria para que exista un campo normal* $\nu$ *sobre* $\phi(\overline{M})$ *de manera que el haz* $E_\nu$ *de* $\phi(\overline{M})$ *(Capítulo 3) admite localmente una inmersión isométrica en* $\mathbb{R}^3$*, es que* $M$ *sea localmente convexa.*

2. *Las superficies mínimas, sin puntos semiumbílicos de* $\mathbb{R}^4$ *no admiten inmersiones en* $\mathbb{R}^3$ *con segunda forma fundamental prescrita para ninguno de sus campos normales.*

3. *Las superficies en las cuales la función* $\Delta$ *se anula (tienen un campo binormal, Sección 2.5), pueden admitir a lo más una inmersión isométrica con segunda forma fundamental prescrita* $II_\nu$ *en* $\mathbb{R}^3$.

**Ejemplo 4.3 (El toro de Clifford).** Considere la carta coordenada

$$\begin{aligned} U &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < u < 2\pi,\ 0 < v < 2\pi\} \\ \phi &: U \to \mathbb{R}^4, \phi(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \text{sen } u, \cos v, \text{sen } v) \end{aligned}$$

escribimos el referencial ortonormal,

$X_1 = (-\text{sen } u, \cos u, 0, 0)\,,\ X_2 = (0, 0, -\text{sen } v, \cos v)$

$X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \text{sen } u, \cos v, \text{sen } v)\,,\ X_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\text{sen } u, \cos v, \text{sen } v)\,.$

Las 1-formas duales satisfacen

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}du,\ \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}dv,\ \omega_3 = 0, \omega_4 = 0.$$

Las formas de conexión cumplen

$$\omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}du,\ \omega_{14} = \frac{1}{2\sqrt{2}}du,\ \omega_{23} = -\frac{2}{\sqrt{2}}dv,\ \omega_{24} = -\frac{2}{\sqrt{2}}dv,\ \omega_{34} = 0$$

Considere un campo vectorial unitario normal $\eta = aX_3 + bX_4$, donde $a, b : U \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables tales que $a^2 + b^2 = 1$. Un cálculo directo nos da los siguientes coeficientes de la segunda forma fundamental en la dirección $\eta$ y $\eta^\perp = -bX_3 + aX_4$ son:

$$\begin{aligned} e_\eta &= -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b,\ e_{\eta^\perp} = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a, \\ f_\eta &= 0,\ f_{\eta^\perp} = 0, \\ g_\eta &= -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b,\ g_{\eta^\perp} = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a. \end{aligned}$$

Por lo que el determinante del operador de forma con respecto a $\eta^\perp$ es

$$\det S_{\eta^\perp} = \frac{1}{4}(b^2 - a^2)$$

Así, la condición $\nu$-Gauss se tiene para $\nu = \eta$ si y sólo si $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}$. Por lo que se determinan sólo dos direcciones binormales, aquéllas definidas por $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_3 + X_4)$ y $\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_3 - X_4)$, respectivamente.

Como $\omega_{34} = 0$ se tiene que la superficie satisface la condición $\nu$-Codazzi. Por lo que estos dos campos vectoriales (módulo un signo) definen los únicos haces vectoriales inmersibles en $\mathbb{R}^3$. Observe que, ya que el determinante de sus operadores de forma es cero, estos campos vectoriales son binormales. Las líneas asintóticas son las $\eta$-líneas de curvatura, soluciones de la ecuación:

$$\frac{1}{2}a\ du\ dv = 0.$$

Note que la curvatura de Gauss del toro de Clifford es cero en todos los puntos. Sus dos campos binormales son ortogonales (Lema 5.1 de *[19]*). Más aún, ya que la superficie está contenida en $S^3$ también tenemos que es totalmente semiumbílica, y sus direcciones asintóticas son también ortogonales (Lema 5.1 de *[19]*). Naturalmente, ninguna de las dos inmersiones isométricas mostradas arriba puede extenderse globalmente a todo el toro.

# Capítulo 5

# Generalizaciones de los teoremas de Hopf y Liebmann

En este capítulo generalizamos a dimensión superior a 3 del espacio ambiente, el clásico Teorema de Hopf:
*La imagen de una esfera bidimensional bajo una inmersión en $\mathbb{R}^3$ de curvatura media constante es una esfera:* $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \| x - x_0 \| = r\}$ *para algún* $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$,
Así como el Teorema de Liebmann:
*Una esfera bidimensional inmersa $\mathbb{R}^3$ con curvatura de Gauss constante es una esfera:* $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \| x - x_0 \| = r\}$ *para algún* $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$ *(ver [21]).*

Los teoremas de Hopf y Liebmann fueron generalizados por varios autores (ver Chern [10], Hopf [28], Bryant [3]) a superficies en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen una relación más general entre las curvaturas media y Gaussiana llamada *relación de Weingarten*, que es una relación del tipo $F(H, K) = 0$ donde $H$ es la curvatura media, $K$ la curvatura Gaussiana y $F$ satisface ciertas hipótesis cerca de los puntos umbílicos; por ejemplo: $\frac{1}{2}F_H + HF_K \neq 0$, donde los subíndices indican derivadas parciales.

Observe que debe establecerse algún tipo de hipótesis adicional sobre la relación de Weingarten para poder concluir que una superficie en $\mathbb{R}^3$ sea una esfera: $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \| x - x_0 \| = r\}$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$, pues las superficies de revolución son superficies de Weingarten y los elipsoides de revolución dan ejemplos de superficies de Weingarten que no son esferas (ver [47], para una clasificación de superficies de Weingarten especiales de tipo mínima).

En nuestra generalización utilizamos el método de R. Bryant en [3]. En ese artículo la relación de Weingarten es de la forma $H = f(K - H^2)$, donde $f$ es diferenciable en un intervalo abierto que contiene a $[0, +\infty)$. Nuestra hipótesis será que se satisfaga una *relación de Weingarten en la dirección* $\nu$, es decir que exista una función $f_\nu$ diferenciable en un intervalo abierto que contiene a $[0, +\infty)$, tal que $H_\nu = f_\nu(K_\nu - H_\nu^2)$, donde $H_\nu$ y $K_\nu$ son la traza y el determinante del operdador de forma $S_\nu$ respectivamente. Además de la relación de Weingarten será crucial que se cumpla la *condición $\nu$-Codazzi.*

La idea de la demostración de estos teoremas es obtener la umbilicidad de la superficie a partir de las condiciones dadas y como consecuencia de esto concluir que la superficie es una esfera: $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \| x - x_0 \| = r\}$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$. Cuando la dimensión del espacio ambiente es superior a 3, la situación es algo diferente, lo que obtenemos es umbilicidad en la dirección $\nu$, es decir *$\nu$-umbilicidad*; mas aún, obtenemos que *la curvatura principal es constante.* Por un teorema de B. Y. Chen y K. Yano [6], esto implica que la superficie está contenida en una hiperesfera o un hiperplano. No toda superficie $\nu$-umbílica está contenida en una hiperesfera o un hiperplano, como puede verse en el Ejemplo 5.3. en este ejemplo mostramos una *familia de superficies $\nu$-umbílicas inmersas en $\mathbb{R}^4$ que no son hiperesféricas*; de hecho, mostramos un ejemplo explícito de una superfície $\nu$-umbílica y calculamos la fórmula para la $\nu$-curvatura (variable). Esta situación contrasta con la rigidez de las superficies umbílicas en $\mathbb{R}^3$. En la Proposición 5.5 vemos que las ecuaciones $\nu$-Codazzi en una superficie $\nu$-umbílica son equivalentes a que la *$\nu$-curvatura principal $\lambda$ sea constante.* Así, la superficie del Ejemplo 5.3 no satisface la condición $\nu$-Codazzi en ningún abierto (pues su $\nu$-curvatura no es constante en ningún abierto) y por lo tanto no es inmersible localmente en la dirección $\nu$ en $\mathbb{R}^3$.

En la Sección 5.1 presentamos las ecuaciones $\nu$-Gauss y $\nu$-Codazzi para superficies en $\mathbb{R}^n$ en términos del marco móvil de Cartan (Apéndice B.1). En la Sección 5.2 vemos la relación que guardan la condición $\nu$-Codazzi con la umbilicidad y con la esfericidad de las superficies. En la Sección 5.3 presentamos las expresiones complejas de las ecuaciones de estructura y en la Sección 5.4 se procede a formular y demostrar la proposición Principal, Proposición 5.12 de la cual se derivarán las generalizaciones de los teoremas de Hopf y Liebmann, las cuales se presentan en la Sección 5.5.

## 5.1 Superficies inmersibles en $\mathbb{R}^3$ y el marco móvil.

Sea $M$ una superficie inmersa en $\mathbb{R}^n$ cuya segunda forma fundamental en una dirección normal $\nu$ es $II_\nu$, las ecuaciones estructurales de Gauss y Codazzi de $M$, así como las ecuaciones estructurales del haz $E_\nu$, dan condiciones necesarias y suficientes para que la superficie sea $\nu$-inmersible en $\mathbb{R}^3$ (Definición 3.2). Hemos llamado a estas condiciones *$\nu$-Gauss y $\nu$-Codazzi* respectivamente (Sección 3.3, Proposición Principal 3.6).

Escribiremos las ecuaciones de Gauss y Codazzi en términos del marco móvil (Apéndice B.3). Sea $(U, \phi)$ una carta coordenada de $M$ donde está definido un referencial ortonormal adaptado $\{X_1, ..., X_n\}$, es decir $X_1$ y $X_2$ son tangentes y $X_3, ...X_n$ son normales; pongamos $X_3 = \nu$. A una carta coordenada con estas características la llamaremos *carta normal.*

Consideremos las formas duales $\omega_i$, $i = 1, ..., n$, relativas al referencial $\{X_i\}$. Sean $\{\omega_{ij}\}; i, j = 1, ..., n$ las formas de conexión correspondientes, Recordemos (Apéndice B.3) que en términos de las formas duales tenemos:

$$\begin{aligned} \omega_{1\alpha} &= e_\alpha \omega_1 + f_\alpha \omega_2, \\ \omega_{2\alpha} &= f_\alpha \omega_1 + g_\alpha \omega_2, \end{aligned}$$

donde $\alpha \in \{3, ..., n\}$. Las ecuaciones estructurales tienen la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \\ d\omega_{ij} &= -\sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \end{aligned}$$

donde $\omega_i = 0$, para $i > 2$.

En esta carta coordenada $II_\nu$ está definido por los coeficientes $e_3, f_3$ y $g_3$.

Las condiciones para que $M$ sea $\nu$-inmersible en $\mathbb{R}^3$ se obtuvieron en la Proposición Principal 3.6 en elcaso en que el espacio ambiente es $\mathbb{R}^4$.

**Proposición 5.1.** *Las condiciones $\nu$-Gauss y $\nu$-Codazzi para que $M$ sea $\nu$-inmersible en $\mathbb{R}^3$ se expresan en una carta normal $(U, \phi)$ como sigue:*

*Condición $\nu$-Gauss,*

$$(f_4^2 - e_4 g_4) + \cdots + (f_n^2 - e_n g_n) = 0 \tag{5.1}$$

*Condición $\nu$-Codazzi,*

$$\begin{aligned} \omega_{34} \wedge \omega_{41} + \cdots + \omega_{3n} \wedge \omega_{n1} &= 0 \\ \omega_{34} \wedge \omega_{42} + \cdots + \omega_{3n} \wedge \omega_{n2} &= 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

**Demostración.** Las ecuaciones de Gauss y Codazzi que satisface $M$ como superficie de $\mathbb{R}^n$, obtenidas de las ecuaciones estructurales (Apéndice B.3, ecuación B.1) se expresan en la carta coordenada $(U, \phi)$ como:

Ecuación de Gauss:

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} + \omega_{14} \wedge \omega_{42} + \cdots + \omega_{1n} \wedge \omega_{n2}.$$

En el Apéndice B.3, obtuvimos la ecuación de Gauss en la forma:

$$d\omega_{12} = -\left((f_3^2 - e_3 g_3) + \cdots + (f_n^2 - e_n g_n)\right) \omega_1 \wedge \omega_2,$$

donde $e_i$, $f_i$ y $g_i$ son los coeficientes de la segunda forma fundamental en la dirección $X_i$. Como la ecuación de Gauss de $E_\nu$ para curvatura cero del ambiente es:

$$d\omega_{12} = -\left(f_3^2 - e_3 g_3\right) \omega_1 \wedge \omega_2,$$

tenemos (Sección 3.3) que la condición necesaria y suficiente para que se tenga esta ecuación es (5.1).

Por otra parte las ecuaciones de Codazzi están dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} d\omega_{j1} &= \omega_{12} \wedge \omega_{2j} + \omega_{13} \wedge \omega_{3j} + \ldots + \omega_{1n} \wedge \omega_{nj}, \\ d\omega_{j2} &= \omega_{21} \wedge \omega_{1j} + \omega_{23} \wedge \omega_{3j} + \ldots + \omega_{2n} \wedge \omega_{nj}, \end{aligned}$$

donde $j = 3, ..., n$. Considere el caso $j = 3$. Como las ecuaciones de Codazzi del haz $E_\nu$, en el caso en que la curvatura del ambiente cero, son:

$$\begin{aligned} d\omega_{31} &= \omega_{12} \wedge \omega_{23} \\ d\omega_{32} &= \omega_{21} \wedge \omega_{13} \end{aligned}$$

tenemos de manera similar que las ecuaciones (5.2) corresponden a la condición de $\nu$-Codazzi. ■

Así, el siguiente resultado se deduce de la Proposición 5.1 y del Teorema fundamental de las inmersiones (Apéndice A.4).

**Corolario 5.2** *Sea $\phi : S^2 \to \mathbb{R}^n$ una inmersión isométrica de una esfera Riemanniana en $\mathbb{R}^n$. Sea $\nu$ un campo vectorial diferenciable, normal a $\phi(S^2)$. Si para cada $p \in M$ existe una carta normal $(U, \phi)$ donde las condiciones $\nu$-Gauss y $\nu$-Codazzi que se expresan como:*

$$\left(f_4^2 - e_4 g_4\right) + \cdots + \left(f_n^2 - e_n g_n\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \omega_{34} \wedge \omega_{41} + \cdots + \omega_{3n} \wedge \omega_{n1} &= 0, \\ \omega_{34} \wedge \omega_{42} + \cdots + \omega_{3n} \wedge \omega_{n2} &= 0, \end{aligned}$$

*se satisfacen; entonces, existe una inmersión isométrica $\psi : S^2 \to \mathbb{R}^3$ con segunda forma fundamental prescrita $II_\nu$.*

Este corolario es cierto si en lugar de la esfera $S^2$, consideramos cualquier superficie simplemente conexa satisfaciendo las hipótesis del enunciado.

## 5.2 Superficies $\nu$-umbílicas y la condición $\nu$-Codazzi.

Sea $\nu$ un campo unitario, diferenciable y normal a la superficie $M$ inmersa en $\mathbb{R}^n$. La superficie $M$ es *$\nu$-umbílica*, si para todo $q \in M$ y todo $X \in T_qM : S_\nu(X) = \lambda(q)X$; donde $\lambda : M \to \mathbb{R}$ es llamada la *$\nu$-curvatura de la superficie.* Decimos que $M$ es *localmente $\nu$-umbílica en $p \in M$* si existe una vecindad $U \subset M$ de $p$ tal que $U$ es $\nu$-umbílica.

Una superficie umbílica inmersa en $\mathbb{R}^3$ está contenida en una esfera o en un plano. Esta rigidez no se tiene para una superficie $\nu$-umbílica inmersa en $\mathbb{R}^n$. En este caso, no está garantizado ni siquiera que esté contenida en una hiperesfera. En efecto, en el siguiente ejemplo se muestra una familia de superficies en $\mathbb{R}^4$ que son $\nu$-umbílicas, pero que no están contenidas en una hiperesfera ni en un hiperplano de $\mathbb{R}^4$.

**Ejemplo 5.3** *Sean $c_1, c_2 : S^1 \to \mathbb{R}^4$ un par de curvas suaves cuyas gráficas están contenidas en dos subespacios bidimensionales mutuamente ortogonales. Por ejemplo, si $X, Y, Z, W$ son coordenadas de $\mathbb{R}^4$, suponga que $c_1(S^1)$ pertenece al plano $\pi_1 = \{Z = W = 0\}$ y $c_2(S^1)$ pertenece al plano $\pi_2 = \{X = Y = 0\}$. La función*

$$\rho : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^4, \ \rho(s,t) = c_1(s) + c_2(t),$$

*define la superficie de autotraslación $S_{12}$. Sean $\nu_1$ y $\nu_2$ dos campos unitarios ortogonales normales a $S_{12}$. Los coeficientes de la segunda forma fundamental con respecto a ellos son*

$$e_{\nu_1} = \langle \tfrac{\partial^2 \rho}{\partial s^2}, \nu_1 \rangle = \langle c_1''(s), \nu_1 \rangle, \quad e_{\nu_2} = \langle \tfrac{\partial^2 \rho}{\partial s^2}, \nu_2 \rangle = \langle c_1''(s), \nu_2 \rangle,$$
$$f_{\nu_1} = \langle \tfrac{\partial^2 \rho}{\partial s \partial t}, \nu_1 \rangle = 0, \quad f_{\nu_2} = \langle \tfrac{\partial^2 \rho}{\partial s \partial t}, \nu_2 \rangle = 0,$$
$$g_{\nu_1} = \langle \tfrac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}, \nu_1 \rangle = \langle c_2''(t), \nu_1 \rangle, \quad g_{\nu_2} = \langle \tfrac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}, \nu_2 \rangle = \langle c_2''(t), \nu_2 \rangle.$$

*Por lo que la curvatura normal (Capítulo 4) es:*

$$K^{\perp} = (e_{\nu_1} - g_{\nu_1}) f_{\nu_2} - (e_{\nu_2} - g_{\nu_2}) f_{\nu_1} = 0$$

*Entonces, $S_{12}$ es $\nu$-umbílica para algún campo normal $\nu$ definido globalmente en $S_{12}$* ( [19], Teorema 3.4).

*Ahora usaremos lo anterior para definir la familia de superficies requerida. Tome cualquier curva suave $c_1 : S^1 \to \pi_1 \subset \mathbb{R}^4$ parametrizada por la longitud de arco y que contiene tres puntos colineales. De esta manera, su traza no está contenida en ninguna esfera: $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \| x - x_0 \| = r\}$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^3$* y $r > 0$. *Enseguida tome $c_2 : S^1 \to \pi_2 \subset \mathbb{R}^4$ como la anterior y suponga que el origen pertenece a su gráfica. Es decir que existe $t_0 \in S^1$, tal que $c_2(t_0) = (0,0,0,0)$. Así, la superficie $S_{12}$ contiene la gráfica de $c_1$ y por ello no es esférica.*

**Observación 5.4** *En el ejemplo anterior, si $k_1(s)$ y $k_2(t)$ representan las curvaturas de $c_1$ y $c_2$ entonces puede verse que para el campo vectorial:*
$\nu_1(s,t) = \frac{k_2(t)}{\sqrt{k_2(t)^2 + k_1(s)^2}} n_1 + \frac{k_1(s)}{\sqrt{k_2(t)^2 + k_1(s)^2}} n_2,$
*donde $n_1$ y $n_2$ son los vectores normales unitarios a las curvas planas $c_1$ y $c_2$ respectivamente, la superficie es $\nu_1$-umbílica con $\nu_1$-curvatura*

$$\frac{k_1(s)\, k_2(t)}{\sqrt{k_2(t)^2 + k_1(s)^2}}$$

*Observe que la superficie es $\nu_1$-umbílica, pero no tiene puntos $\nu_1^{\perp}$-umbílicos.*

Por otra parte, las ecuaciones $\nu$-Codazzi determinan una condición necesaria y suficiente para que una superficie $\nu$-umbílica inmersa en $\mathbb{R}^4$ sea hiperesférica o hiperplana.

**Proposición 5.5** *Si una superficie $M$ es $\nu$-umbílica con $\lambda$ la correspondiente $\nu$-curvatura principal. Entonces la condición $\nu$-Codazzi se satisface si y sólo si $\lambda$ es constante.*

**Demostración.** Considere una carta normal $(U, \nu)$. Ya que $M$ es $X_3$-umbílica tenemos $\nabla_Y X_3 = \lambda Y$ para cualquier vector $Y$ tangente a $M$. Entonces, las formas de conexión satisfacen

$$\omega_{j3}(Y) = \langle \nabla_Y X_3, X_j \rangle = \lambda \langle Y, X_j \rangle = \lambda \omega_j(Y), \ j = 1, 2.$$

es decir,

$$\omega_{j3} = \lambda \omega_j, \ j = 1, 2.$$

Calculando la derivada exterior de esta expresión tenemos

$$d\lambda \wedge \omega_j + \lambda d\omega_j = d\omega_{j3}, \ j = 1, 2.$$

Por otra parte, ya que $\omega_{23} = \lambda \omega_2$,

$$\begin{aligned} d\omega_{13} &= \omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{43} + \ldots + \omega_{1n} \wedge \omega_{n3} \\ &= \lambda \omega_{12} \wedge \omega_2 + \omega_{14} \wedge \omega_{43} + \ldots + \omega_{1n} \wedge \omega_{n3}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} &\lambda \omega_{12} \wedge \omega_2 + \omega_{14} \wedge \omega_{43} + \ldots + \omega_{1n} \wedge \omega_{n3} = d\lambda \wedge \omega_1 + \lambda d\omega_1 \\ &d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

$$d\lambda \wedge \omega_1 = \omega_{14} \wedge \omega_{43} + \ldots + \omega_{1n} \wedge \omega_{n3}.$$

Análogamente,

$$d\lambda \wedge \omega_2 = \omega_{24} \wedge \omega_{43} + \ldots + \omega_{2n} \wedge \omega_{n3}$$

Se sigue de las ecuaciones $\nu$-Codazzi que

$$\begin{aligned} d\lambda \wedge \omega_1 &= 0 \\ d\lambda \wedge \omega_2 &= 0, \end{aligned}$$

como $\omega_1$ y $\omega_2$ son independientes, $d\lambda$ tiene que ser idénticamente cero, es decir $\lambda$ es constante.

Inversamente, si $M$ es $X_3$-umbílica y $\lambda$ es constante, el sistema anterior se satisface; entonces tenemos que las ecuaciones $\nu$-Codazzi deben cumplirse.

■

**Observación 5.6** *Por la proposición anterior la superficie del ejemplo 5.3 (ver Observación 5.4) no satisface la condición de Codazzi en la dirección $\nu$ en la cual es umbílica.*

**Corolario 5.7** *Supongamos que una superficie $M$ inmersa en $\mathbb{R}^4$ es $\nu$-umbílica y satisface las ecuaciones $\nu$-Codazzi. Entonces $M$ es hiperesférica o hiperplana.*

**Demostración.** La Proposición 5.5 implica que la $\nu$ -curvatura principal $\lambda$ es constante. Entonces si $\lambda$ no es cero, ya que $M$ está inmersa en $\mathbb{R}^4$, $\nu$ debe ser paralelo, [6], [44]. Así, la prueba sigue del teorema 4.3 de B. Y. Chen y K. Yano que afirma que si una superficie es $\nu$-umbílica para cualquier campo vectorial normal paralelo y no constante $\nu$ entonces es hiperesférica [6]. Si $\lambda$ es cero entonces $M$ es hiperplana.

**Observación 5.8** *En* [44] *se prueban los siguientes equivalencias respecto a la $\nu$-umbilicidad (los conceptos involucrados se exponen en la Sección 2.6):*

- *$M$ tiene dos campos de direcciones asintóticas globalmente definidos si y sólo sí es $\nu$-umbílica para un campo normal $\nu$ definido en todo $M$.*
- *$M$ es $\nu$-umbílica para algún campo normal $\nu$ globalmente definido en $M$ si y sólo si $M$ está totalmente constituído de puntos semiumbílicos.*
- *$M$ es hiperesférica si y sólo si es $\nu$-umbílica para algún campo unitario normal $\nu$ definido en $M$ cuya curvatura principal asociada $\lambda$ es una constante distinta de cero.*

## 5.3 Ecuaciones estructurales en forma compleja.

En esta sección presentamos la condición $\nu$-Codazzi en notación compleja. Estas expresiones serán útiles más adelante.

Considere una carta coordenada normal $(U, \phi)$ de $M$, donde tenemos definido el referencial móvil. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que esta carta coordenada es isotérmica. Escribimos

$$\begin{array}{ll} X = \frac{1}{2}(X_1 - iX_2) & \omega = \omega_1 + i\omega_2 \\ \pi_j = \omega_{1j} - i\omega_{2j},\ n \geq j \geq 3 & \rho = \omega_{12} \\ z_j = \frac{1}{2}(e_j - g_j) - if_j,\ n \geq j \geq 3 & \rho_k = \omega_{3k},\ n \geq k \geq 4 \end{array}$$

$$H_j = \frac{1}{2}(e_j + g_j).$$

Como la ecuación diferencial de las $X_3$-líneas de curvatura en coordenadas isotérmicas es

$$f_3 dx_1^2 + (g_3 - e_3)dx_1 dx_2 - f_3 dx_2^2 = 0,$$

entonces $z_i = 0$ define el conjunto de los puntos $X_i$-umbílicos.

**Lema 5.9** *Se tienen las siguientes ecuaciones*

$$d\omega = -i\rho \wedge \omega \tag{5.3}$$
$$d\pi_3 = i\rho \wedge \pi_3 + \omega_{34} \wedge \pi_4 + \ldots + \omega_{3n} \wedge \pi_n \tag{5.4}$$
$$d\pi_l = i\rho \wedge \pi_l + \sum_{k=3}^{n} \omega_{lk} \wedge \pi_k \tag{5.5}$$
$$\pi_3 = z_3\omega + H_3\bar{\omega} \tag{5.6}$$
$$\pi_n = z_n\omega + H_n\bar{\omega} \tag{5.7}$$

*Las ecuaciones de Codazzi tienen ahora la siguiente forma* (5.4).
La ecuación (5.3) se obtiene como sigue:

$d\omega = d(\omega_1 + i\omega_2) = d\omega_1 + id\omega_2 = \omega_{12} \wedge \omega_2 + i\omega_{21} \wedge \omega_1 = -i\omega_{12} \wedge (\omega_1 + i\omega_2) =$
$-i\rho \wedge \omega.$

La ecuación (5.4) se obtiene usando las ecuaciones de Codazzi

$$\begin{aligned} d\omega_{1j} &= \omega_{12} \wedge \omega_{2j} + \omega_{13} \wedge \omega_{3j} + \ldots + \omega_{1n} \wedge \omega_{nj}, \\ d\omega_{2j} &= \omega_{21} \wedge \omega_{1j} + \omega_{23} \wedge \omega_{3j} + \ldots + \omega_{2n} \wedge \omega_{nj}, \end{aligned}$$

como sigue:

$$\begin{aligned} d\pi_3 = d\omega_{13} - id\omega_{23} &= (\omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{43} + \cdots + \omega_{1n} \wedge \omega_{n3}) \\ &\quad -i(\omega_{21} \wedge \omega_{13} + \omega_{24} \wedge \omega_{43} + \cdots + \omega_{2n} \wedge \omega_{n3}) \\ &= i\omega_{12} \wedge (\omega_{13} - i\omega_{23}) + \omega_{34} \wedge (\omega_{14} - i\omega_{24}) + \cdots + \omega_{3n} \wedge (\omega_{1n} - i\omega_{2n}) \\ &= i\rho \wedge \pi_3 + \omega_{34} \wedge \pi_4 + \cdots + \omega_{3n} \wedge \pi_n \end{aligned}$$

La ecuación (5.5) se obtiene análogamente.

Para obtener la ecuación (5.6) consideramos, $\omega_{13} = e_3\omega_1 + f_3\omega_2$ y $\omega_{23} = f_3\omega_1 + g_3\omega_2$.

Así,

$$\begin{aligned} \pi_3 = \omega_{13} - i\omega_{23} &= \omega_1(e_3 - if_3) - i\omega_2(g_3 + if_3) \\ &= \left(\tfrac{1}{2}(e_3 - g_3) - if_3\right)(\omega_1 + i\omega_2) + \tfrac{1}{2}(e_3 + g_3)(\omega_1 - i\omega_2)\,\omega_1(e_3 - if_3) \\ &= z_3\omega + H_3\bar{\omega}. \end{aligned}$$

La ecuación (5.7) se obtiene análogamente.

Por lo anterior la condición $\nu$-Codazzi para el campo normal $X_3$ en esta notación toman la forma:

$$\omega_{34} \wedge \pi_4 + \ldots + \omega_{3n} \wedge \pi_n = 0.$$

**Observación 5.10** *Consideremos el caso de una superficie $M$ inmersa en una variedad $N^n$ de curvatura seccional constante $R$. Llamaremos $N$ a la variedad ambiente. En una carta coordenada normal $(U, \phi)$, las ecuaciones de estructura tienen la siguiente forma:*

$$d\omega_i = \sum_i \omega_{ij} \wedge \omega_j,$$
$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + R\omega_i \wedge \omega_j,$$

*donde $\omega_j = 0$, $i > 2$.*

*Las ecuaciones de Codazzi (5.4) no dependen de la curvatura seccional del ambiente por lo que tienen la misma expresión que las ecuaciones en el caso en que la variedad ambiente es $\mathbb{R}^n$* (5.4). *Por otra parte, la ecuación de Gauss, sí depende de la curvatura seccional, de la siguiente manera:*

$$d\rho = \frac{i}{2}\left(\sum_i \pi_i \wedge \bar{\pi}_i + R\omega \wedge \bar{\omega}\right).$$

## 5.4 Esferas de Weingarten.

**Definición 5.11** Sea $M$ una superficie inmersa en $\mathbb{R}^n$ y $\nu$ un campo diferenciable normal a $M$. Denotemos por $H_\nu$ y $K_\nu$, un medio de la traza y el determinante del operador de forma $S_\nu$, respectivamente. Entonces decimos que $M$ *satisface una relación $\nu$-Weingarten si existe una función diferenciable $F_\nu : (-\epsilon, \infty) \to \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$, tal que*

$$H_\nu = F_\nu \left(H_\nu^2 - K_\nu\right).$$

La superficie $M$ satisface una *relación $\nu$ -Weingarten local en $p$ si existe una vecindad $U \subset M$ de $p$* que *satisface una relación $\nu$ -Weingarten.*

**Proposición 5.12** *Sea $M$ una superficie inmersa en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, $\nu$ un campo vectorial unitario, normal a $M$ y $p \in M$ un punto $\nu$-umbílico. Suponga que las siguientes condiciones se tienen:*

*i) $M$ satisface una relación $\nu$-Weingarten local en $p$.*

*ii) La condición $\nu$-Codazzi se tiene en una vecindad $U \subset M$ de $p$.*

*Entonces $p$ es un punto $\nu$-umbílico aislado con índice negativo o $M$ es localmente $\nu$-umbílica en $p$ con $\nu$-curvatura constante.*

En [21] se muestra que dado $n$ entero positivo y $h$ número real, existen inmersiones de superficies en $\mathbb{R}^3$ con curvatura media constante $h$ y con puntos umbílicos aislados de índice $-\frac{n}{2}$. Otro ejemplo de superficie de Weingarten es la superficie mínima obtenida mediante la representación de Weierstrass con $f(z) \equiv 1$ y $g(z) = z^n$, ésta tiene un punto umbílico de índice $-\frac{n-1}{2}$ en $z = 0$ para cada $n \geq 1$. Por otra parte el elipsoide de revolució n es un ejemplo de superfície con un punto umbílico aislado, en la cual las curvaturas medias y Gaussiana están relacionadas, pero que no es de Weingarten en el sentido de arriba. Las superficies en $\mathbb{R}^3$ satisfacen automáticamente la condición de Codazzi.

**Demostración.** La prueba consiste en construir localmente en $p$, una forma cuadrática $Q$ cuyos ceros sean los puntos $\nu$-umbílicos. Si esta forma es holomorfa, como veremos, se tendrá la conclusión del teorema.

Comenzamos obteniendo localmente dos funciones con valores reales $u, v$ en torno a $p$ que estarán involucradas de manera crucial en esta construcción.

Considere la carta normal isotérmica y utilicemos la notación compleja de la sección anterior.

En la siguiente ecuación se tiene cada lado corresponde a una expresión diferente de $d\pi_3$. El lado izquierdo se obtiene derivando la expresión $z_3\omega + H_3\bar{\omega}$, mientras que el lado derecho es obtenido de la ecuación (5.4).

$$\begin{aligned} & dz_3 \wedge \omega - z_3 (i\rho \wedge \omega) + dH_3 \wedge \bar{\omega} + H_3 d\bar{\omega} \\ = \; & i\rho \wedge (z_3\omega + H_3\bar{\omega}) + \omega_{34} \wedge \pi_4 + \ldots + \omega_{3n} \wedge \pi_n. \end{aligned}$$

Ya que $H_3 d\bar{\omega} = i\rho \wedge H_3\bar{\omega}$, tenemos:

$$(dz_3 - 2iz_3\rho) \wedge \omega + dH_3 \wedge \bar{\omega} = \omega_{34} \wedge \pi_4 + \ldots + \omega_{3n} \wedge \pi_n.$$

Como se cumple la condición $\nu$-Codazzi, entonces el lado derecho de esta expresión es cero; así

$$(dz_3 - 2z_3 i\rho) \wedge \omega + dH_3 \wedge \bar{\omega} = 0.$$

Ya que $\omega \wedge \bar{\omega} \neq 0$, existen funciones diferenciables $u$, $v$ definidas en $U$, tales que

$$\begin{pmatrix} dz_3 - 2z_3 i\rho \\ dH_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ u & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{pmatrix},$$

($dH_3$ es real).

Ya que $z_3\bar{z}_3 = H_3^2 - K_3$ la condición $X_3$-Weingarten satisfecha en $U$, puede ser escrita como $H_3 = F(z_3\bar{z}_3)$. Diferenciando esta relación obtenemos,

$$\begin{aligned} u\omega + \bar{u}\bar{\omega} = dH_3 &= F'\left(z_3\overline{z_3}\right)\left(\overline{z_3}dz_3 + z_3 d\overline{z_3}\right) \\ &= F'\left(z_3\overline{z_3}\right)\left(\overline{z_3}\left(v\omega + u\bar{\omega} + 2z_3 i\rho\right) + z_3\left(\bar{v}\bar{\omega} + \bar{u}\omega - 2\overline{z_3} i\rho\right)\right) \\ &= F'\left(z_3\overline{z_3}\right)\left(\overline{z_3}\left(v\omega + u\bar{\omega}\right) + z_3\left(\bar{v}\bar{\omega} + \bar{u}\omega\right)\right). \end{aligned}$$

Comparando coeficientes de $\bar{\omega}$ obtenemos la siguiente relación crucial (esta relación será usada al final para probar que la forma cuadrática $Q$ que se construirá enseguida es holomorfa):

$$u = F'\left(z_3\overline{z_3}\right)\left(z_3\bar{u} + \overline{z_3}v\right).$$

El próximo paso es construir una 1-forma que permitirá definir una métrica particular

en $U$. Para hacer esto, consideremos dos funciones reales, diferenciables, no negativas $M(x)$, $N(x)$ con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \left(M\left(x\right)\right)^2 - x\left(N\left(x\right)\right)^2 &\equiv 1 \\ 2M'\left(x\right) &= F'\left(x\right)N\left(x\right) \\ 2xN'\left(x\right) &= F'\left(x\right)M\left(x\right) - N\left(x\right). \end{aligned}$$

Considere la función diferenciable

$$\phi\left(r\right) = \int_0^r F'\left(s^2\right)ds.$$

Haciendo el cambio de variable $s = rt$, obtenemos $\phi\left(r\right) = r\Phi\left(r^2\right)$, donde $\Phi\left(r\right) = \int_0^1 F'\left(t^2 r\right)dt$ es una función diferenciable.

Definimos $M$, $N$ como sigue:

$$M\left(r^2\right) = \cosh\phi\left(r\right), \quad N\left(r^2\right) = \frac{1}{r}\sinh\phi\left(r\right).$$

Un cálculo muestra que estas funciones satisfacen las propiedades deseadas.

Definimos la 1-forma $\sigma$, sobre $U$

$$\sigma = M\left(z_3\overline{z_3}\right)\omega + N\left(z_3\overline{z_3}\right)\overline{z_3\omega}.$$

Por otra parte, usando la primera propiedad de las funciones $M$ y $N$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}\sigma\wedge\overline{\sigma} &= \frac{i}{2}\left(M\left(z_3\overline{z_3}\right)\omega + N\left(z_3\overline{z_3}\right)\overline{z_3\omega}\right)\wedge\left(M\left(z_3\overline{z_3}\right)\overline{\omega} + N\left(z_3\overline{z_3}\right)z_3\omega\right)\\ &= \frac{i}{2}\left(M^2\left(z_3\overline{z_3}\right) - \left(z_3\overline{z_3}\right)N^2\left(z_3\overline{z_3}\right)\right)\omega\wedge\overline{\omega}\\ &= \frac{i}{2}\omega\wedge\overline{\omega}\\ &= \omega_1\wedge\omega_2 > 0,\end{aligned}$$

por la primera propiedad de $M$ y $N$.

Escribamos esta 1-forma como $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$. Entonces, $\sigma_1$ y $\sigma_2$ son independientes en $U$, de donde la forma cuadrática

$$ds^2 = \sigma\cdot\overline{\sigma} = \left(\sigma_1\right)^2 + \left(\sigma_2\right)^2,$$

es diferenciable, positiva y globalmente definida sobre $U$.

Ahora por el teorema de coordenadas isotérmicas (Sección 3.4) ( [11],[12],[11]) existe una única estructura compleja en $U$ compatible con la métrica y la orientación de $ds^2$. Dotamos a la superficie con esta estructura compleja y definimos la forma diferencial cuadrática

$$Q = z_3\sigma^2.$$

El próximo paso será probar que la forma cuadrática $Q$ es holomorfa.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe una carta coordenada holomorfa $\zeta : U \to \mathbb{C}$. Supongamos también que en esta carta coordenada $\sigma = \lambda d\zeta$, donde $\lambda > 0$ es una función diferenciable real y positiva en $U$. Entonces,

$$Q|_U = \left(z_3\lambda^2\right)\left(d\zeta\right)^2,$$

Probaremos que $\frac{\partial(z_3\lambda^2)}{\partial\overline{\zeta}} \equiv 0$ en $U$. Ya que

$$d\left(z_3\lambda^2\right) = \frac{\partial\left(z_3\lambda^2\right)}{\partial\overline{\zeta}}d\overline{\zeta} + \frac{\partial\left(z_3\lambda^2\right)}{\partial\zeta}d\zeta,$$

la identidad anterior es equivalente a

$$d\left(z_3\lambda^2\right) \wedge d\zeta = 0.$$

Para probar esta ecuación, escribimos la identidad:

$$d\left(z_3\lambda^2\right) \wedge d\zeta = \lambda\left(dz_3 \wedge \sigma + 2z_3 d\sigma\right).$$

ya que

$$\sigma = M\left(z_3\overline{z_3}\right)\omega + N\left(z_3\overline{z_3}\right)\overline{z_3\omega}.$$

y

$$\begin{aligned}
dz_3 - 2z_3 i\rho &= v\omega + u\overline{\omega} \\
d\overline{z_3} + 2\overline{z_3} i\rho &= \overline{v\omega} + \overline{u}\omega \\
d\left(z_3\overline{z_3}\right) &= dz_3\overline{z_3} + z_3 d\overline{z_3} \\
&= \overline{z_3}\left(v\omega + u\overline{\omega}\right) + z_3\left(\overline{v\omega} + \overline{u}\omega\right)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
d\sigma &= M'\left(\overline{z_3}u + z_3\overline{v}\right)\overline{\omega}\wedge\omega + Md\omega + \overline{z_3}N'\left(\overline{z_3}v + z_3\overline{u}\right)\overline{\omega}\wedge\omega + Nd\left(\overline{z_3\omega}\right) \\
&= M'(\overline{z_3}u + z_3\overline{v})\overline{\omega}\wedge\omega - M\left(i\rho\wedge\omega\right) + \overline{z_3}N'(\overline{z_3}v + z_3\overline{u})\overline{\omega}\wedge\omega \\
&+ N((\overline{v\omega} + \overline{u}\omega - 2\overline{z_3}i\rho)\wedge\overline{\omega}) + iN\left(\overline{z_3}\rho\wedge\overline{\omega}\right) \\
&= M'\left(\overline{z_3}u + z_3\overline{v}\right)\overline{\omega}\wedge\omega - M\left(i\rho\wedge\omega\right) + \overline{z_3}N'(\overline{z_3}v + z_3\overline{u})\overline{\omega}\wedge\omega \\
&+ N(-2\overline{z_3}i\rho + \overline{u}\omega)\wedge\overline{\omega} + iN(\overline{z_3}\rho\wedge\overline{\omega}).
\end{aligned}$$

Así, obtenemos la expresión

$$\begin{aligned}
dz_3\wedge\sigma + 2z_3 d\sigma &= (2iz_3\rho + v\omega + u\overline{\omega})\wedge(M\omega + N\overline{z_3\omega}) \\
&+ 2z_3[M'(\overline{z_3}u + z_3\overline{v})\overline{\omega}\wedge\omega - M(i\rho\wedge\omega)] \\
&+ 2z_3[\overline{z_3}N'(\overline{z_3}v + z_3\overline{u})\omega\wedge\overline{\omega} + N\overline{z_3}(i\rho\wedge\overline{\omega}) \\
&+ N(-2i\overline{z_3}\rho + \overline{u}\omega)\wedge\overline{\omega}] \\
&= (vN\overline{z_3} - uM)\omega\wedge\overline{\omega} + z_3[-2M'(\overline{z_3}u + z_3\overline{v}) \\
&+ 2\overline{z_3}N'(\overline{z_3}v + 2z_3\overline{u}) + N\overline{u}]\omega\wedge\overline{\omega} \\
&= [-uM + \overline{z_3}vN - z_3(F'N)(\overline{z_3}u + z_3\overline{v}) \\
&+ (F'M - N)(\overline{z_3}v + z_3\overline{u}) + 2z_3\overline{u}N]\omega\wedge\overline{\omega}.
\end{aligned}$$

Ya que todos los términos con $\rho$ como factor se cancelan y

$$u = F'(z_3\overline{z_3})(z_3\bar{u} + \overline{z_3}v)$$

resulta

$$[-uF + \overline{z_3}vG - z_3G\overline{u} + uF - G(\overline{z_3}v + z_3\overline{u}) + 2z_3\overline{u}G]\omega \wedge \overline{\omega} = 0.$$

Por lo cual, la forma diferencial cuadrática es holomorfa y de esto, se seguirá, como veremos enseguida, la conclusión de la prueba.

Ya que $Q$ es holomorfa y se anula en el punto $\nu$-umbílico $p$, entonces $Q$ se anula en toda una vecindad de $p$ (es decir, la superficie es localmente $\nu$-umbílica) o se anula en $p$ aisladamente (es decir $p$ es un punto $\nu$-umbílico aislado). En el segundo caso, tomamos una carta holomorfa de $p$; $\zeta : \bar{U} \to C$ en la cual la expresión de la forma es

$$Q|_{\bar{U}} = \zeta^k (d\zeta)^2,$$

tomamos un referencial $X_i$, $i = 1, \ldots, n$ sobre $\bar{U}$ para el cual $\sigma = \lambda d\zeta$, donde $\lambda$ es una función real positiva. Entonces, sobre $\bar{U} - \{p\}$ tenemos,

$$\frac{z_3}{|z_3|} = \frac{\zeta^k/\lambda^2}{|\zeta^k/\lambda^2|} = \frac{\zeta^k}{|\zeta^k|}.$$

Sea $\gamma$ una curva cerrada orientada positivamente: $|\zeta| = \delta > 0$ donde $\delta$ es suficientemente pequeño. El grado de la aplicación $\frac{\zeta^k}{|\zeta^k|} : \gamma \to S^1$ es $k$. Así, $\mathrm{gr}\left(\frac{z_3}{|z_3|}\right) = k$ y

$$i_X(p_0) = \frac{-k}{2} < 0.$$

Con esto la proposición queda demostrada.

■

**Observación 5.13** *Consideremos el caso de una superficie $M$ inmersa en una variedad $N^n$, $n \geq 4$, orientada, de curvatura seccional constante $R$. La curvatura media con respecto a un campo normal $\nu$, $H_\nu$ no depende de la curvatura seccional del ambiente. Sin embargo, la curvatura Gaussiana con respecto a $\nu$ sí depende de ella de la* *siguiente manera:* $K_\nu = \det S_\nu + R$. *Entonces, cuando el espacio ambiente tiene curvatura seccional constante* $R$ *decimos que* $M$ *satisface una condición* $\nu$*-Weingarten si existe una función diferenciable* $F_\nu : (-\varepsilon, \infty) \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, *tal que*

$$H_\nu = F_\nu \left( H_\nu^2 - K_\nu + R \right)$$

*La superficie* $M$ *satisface una condición local* $\nu$*-Weingarten en* $p$ *si existe una vecindad* $U \subset M$ *de* $p$ *que satisface una condición* $\nu$*-Weingarten.*

*En la prueba de la Proposición 5.12 no se usa la ecuación de Gauss. De hecho, solamente se requiere la ecuación* $\nu$*-Codazzi, que no depende de la curvatura seccional de la variedad ambiente (Observación 5.10). Por esto, con hipótesis análogas, la Proposición 5.12 es válida cuando* $M$ *está inmersa en* $N^n$.

## 5.5 Conclusiones.

**Teorema 5.14** *Sea* $\phi : S^2 \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ *una inmersión diferenciable para la cual existe un campo vectorial unitario* $\nu$ *normal a* $\phi(S^2)$. *Supongamos que para todo* $\nu$*-umbílico* $p$ *se tienen las siguientes condiciones:*

1. $\phi(S^2)$ *satisface una condición* $\nu$*-Weingarten local en* $p$.

2. *La condición* $\nu$*-Codazzi se satisface en una vecindad de* $p$.

*Entonces* $\phi(S^2)$ *es* $\nu$*-umbílica con* $\nu$*-curvatura constante.*

**Demostración.** La hipótesis de la Proposición 5.12 garantiza que el conjunto de los puntos $\nu$-umbílicos no aislados es abierto. Ya que este conjunto es cerrado por definición, el conjunto es la superficie $\phi(S^2)$ toda o el conjunto vacío. El Teorema de Poincaré-Hopf implica que si este conjunto es vacío, existe un punto $\nu$-umbílico de índice positivo; lo cual es imposible de acuerdo a la Proposición 5.12. Por lo que la superficie es $\nu$-umbílica y por la Proposición 5.5 la $\nu$-curvatura es constante.

■

**Observación 5.15** *Cuando el espacio ambiente en la Proposición 5.12 y el Teorema 5.14 es* $\mathbb{R}^3$, $\phi(S^2)$ *satisface naturalmente las ecuaciones de Codazzi con respecto a cualquier campo normal. Así, si satisface una relación local de Weingarten, entonces,*

*$\phi(S^2)$ es umbílica. La prueba del Teorema 5.14 es básicamente la misma en este caso donde condición $\nu$-Codazzi no juega ningún papel.*

**Observación 5.16** *Al Teorema 5.14 corresponde un resultado análogo, cuando la inmersión $\phi : S^2 \longrightarrow N^n$ está definida en una variedad $N$ de curvatura seccional constante. En este caso, la hipótesis correspondiente, formulada en la Observación 5.13, garantiza que la imagen $\phi(S^2)$ es $\nu$-umbílica con $\nu$-curvatura constante.*

Recuerde que un campo vectorial normal $\nu$ es *paralelo* sobre $M$ si para todo campo vectorial $X$ tangente a $M$, $\nabla^{\perp}_{X}\nu = 0$.

**Corolario 5.17** *Sea $\phi : S^2 \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ una inmersión diferenciable para la cual existe un campo diferenciable $\nu$, paralelo y normal a $\phi(S^2)$.*

*Suponga que $\phi(S^2)$ satisface una condición local $\nu$-Weingarten en todo punto $\nu$-umbílico.*

*Entonces $\phi(S^2)$ es hiperesférica y $\nu$ es paralelo al campo vectorial radial o $\nu$ es constante y $\phi(S^2)$ está contenida en un hiperplano ortogonal a $\nu$.*

**Demostración.** Considere un referencial ortonormal $\{X_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ en una vecindad normal $(U, \phi)$ de cualquier punto $\nu$-umbílico $p \in \phi(S^2)$, tal que $X_3 = \nu$ . Ya que $X_3$ es paralelo, $\omega_{34} = \cdots = \omega_{3n} = 0$, por lo que la condición $\nu$-Codazzi se cumple en $U \subset M$ de $p$. Entonces se sigue del Teorema 5.14 que $\phi(S^2)$ es $\nu$-umbílico, con $\nu$ -curvatura $\lambda$ constante. La conclusión se sigue del teorema 3.3 de B. Y. Chen y K. Yano [6].

■

**Corolario 5.18** *Sea $\phi : S^2 \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ una inmersión diferenciable para la cual existe un referencial ortonormal de $k-2$ campos vectoriales unitarios normales paralelos*

$$X_3, \ldots, X_k,\ k \leq n-1,$$

*normales a $\phi(S^2)$. Supongamos que para cada $l$, $3 \leq l \leq k$, $\phi(S^2)$ satisface una condición local $X_l$-Weingarten en todo punto $X_l$-umbílico.*

*Entonces $\phi(S^2)$ está contenida en una esfera $S^{n-k+2}$ o en un plano afín de dimensión $n-k+2$ de $\mathbb{R}^n$.*

La prueba se obtiene aplicando el Corolario 5.17 a cada uno de los campos normales del referencial.

Note que si en el Corolario 5.18, tomamos $k = n - 1$, entonces $\phi(S^2)$ estará contenida en una 3-esfera: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x - x_0 \| = r\} \cap \mathbb{R}^3$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ o en un subespacio afín. Si $\phi(S^2)$ está contenido en un subespacio afín de dimensión 3 y satisface una relación de Weingarten con respecto a $X_n$, el Teorema 5.14 implica que $\phi(S^2)$ es umbílica con respecto al campo normal, considerando el subespacio afín como ambiente. Por eso $\phi(S^2)$ es una esfera: $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \| x - x_0 \| = r\}$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$ de dimensión dos en $\mathbb{R}^n$. Si $\phi(S^2)$ está contenida en una esfera $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \| x - x_0 \| = r\}$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^4$ y $r > 0$ de dimensión 3 y satisface una relación de Weingarten, aplicamos la versión del Teorema 5.14 para el caso en que el espacio ambiente tiene curvatura seccional constante de acuerdo a la Observación 5.13. De esta manera obtenemos la misma conclusión para este caso; a saber, que $\phi(S^2)$ es $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \| x - x_0 \| = r\}$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$.

Si una superficie tiene curvatura media constante con respecto a una campo normal $\nu$, entonces satisface una condición $\nu$-Weingarten. Por lo que se tienen las siguientes dos generalizaciones del teorema de Hopf mencionadas en la introducción.

**Corolario 5.19** *Sea $\phi : S^2 \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ una inmersión inyectiva para la cual existen un referencial ortonormal de $n-3$ campos vectoriales paralelos*

$$X_3, \ldots, X_{n-1}$$

*normales a $\phi(S^2)$. Supongamos que la curvatura media con respecto a cada uno de estos campos normales y de $X_n$ es constante.*
*Entonces $\phi(S^2)$ es una esfera: $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \| x - x_0 \| = r\}$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^3$* y $r > 0$.

La prueba es una consecuencia directa del Corolario 5.18.

### Resultados para superficies inmersas en $\mathbb{R}^4$.

**Corolario 5.20** *Sea $\phi : S^2 \to \mathbb{R}^4$ una inmersión diferenciable y $\nu$ un campo diferenciable unitario, normal a $\phi(S^2)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para todo punto $\nu$-umbílico existe una vecindad donde se satisface la condición $\nu$-Codazzi y la curvatura media $H_\nu$ con respecto a $\nu$ es constante.*

2. *$\phi(S^2)$ es hiperesférica (hiperplana) y $\nu$ es paralelo al campo radial ($\nu$ es constante).*

3. *El campo $\nu$ es umbílico paralelo.*

4. *El campo $\nu$ es umbílico con curvatura constante.*

**Demostración.** Ya que $H_\nu$ es constante cerca de cada punto $\nu$-umbílico, $\phi(S^2)$ satisface una condición local $\nu$-Weingarten en todo punto $\nu$-umbílico y además se cumple la condición $\nu$-Codazzi en una vecindad de cada uno de estos puntos, el Teorema 5.14 implica que $\phi(S^2)$ es $\nu$-umbílica con curvatura constante y como la recíproca es claramente cierta, se sigue que 1. es equivalente a 4. Como la imagen de la inmersión está contenida en $\mathbb{R}^4$, un resultado de B. Y. Chen y K. Yano en (Teorema 3.3 en [6]) demuestra la equivalencia de 2. y 3. La equivalencia de 3. y 4. se encuentra demostrada en [44].

Note, que de este corolario concluimos, que en el Corolario 5.17, la condición $\nu$-Codazzi implica que $\nu$ es paralelo.

**Observación 5.21** *Las consecuencias del Teorema 5.14 en el caso en que el espacio ambiente es 4 cobran una significación geométrica especial, en vista de las equivalencias de $\nu$-umbilicidad, así como de hiperesfericidad citadas en la Observación 5.8.*

*Así, si una superficie de $\mathbb{R}^4$ satisface las hipótesis del Teorema 5.14 en particular es $\nu$-umbílica, entonces tiene dos campos ortogonales globalmente definidos de direcciones asintóticas (definidas en la Sección 2.6) y está constituída totalmente de puntos semiumbílicos (estas superficies tienen una familia "degenerada" de funciones "distancia al cuadrado" es decir tienen contacto no genérico con su hiperesfera focal en cada punto, ver J. Montaldi* [37]*).*

# Capítulo 6

# Algunos comentarios finales

## 6.1 Problemas de realización.

El Teorema fundamental de las inmersiones isométricas resuelve un problema de realización; un haz Riemanniano con ciertas condiciones (es decir la variedad Riemanniana $M$ con una estructura adicional dada por una sección simétrica del haz $\mathrm{Hom}(TM \times TM, E)$ que jugará el papel de segunda forma fundamental) y las condiciones de compatibilidad ecuaciones de Gauss y Codazzi se realiza como una subvariedad Riemanniana de un espacio de curvatura constante. De hecho este teorema pertenece a la clase más general de problemas y teoremas de realización; como el teorema de J. Nash [38], que afirma que toda variedad Riemanniana puede aplicarse mediante un encaje isométrico en algún espacio Euclidiano (para una discusión completa del tema, así como versiones más desarrolladas de los resultados de Nash puede verse [17]). Una vez que sabemos que una variedad Riemanniana está inmersa en algún espacio Euclidiano de manera que su estructura intrínseca es respetada, nos preguntamos por la posibilidad de reducir la codimensión manteniendo también algunas de las propiedades extrínsecas de la inmersión inicial. Pueden encontrarse algunos resultados de este tipo en [45] y [13]. La generalización de las condiciones de Gauss, Codazzi y Ricci que damos en la Sección 2.6, conduce a un concepto más general de reducción de codimensión (la inmersión en la dirección de un subhaz del haz normal de la subvariedad) que el presentado en [13] y plantea el estudio de conceptos geométricos equivalentes a las condiciones anteriores.

Existen importantes teoremas de realización propios de las superficies, enseguida recordamos algunos de ellos.

El problema de H. Weyl en su formulación original [2, 2, I, cap. 2]: Dada una métrica Riemanniana de curvatura positiva sobre la esfera, ¿existe una superficie convexa (única, salvo movimientos rígidos) con esta métrica en $\mathbb{R}^3$? Este problema en su formulación actual:

**Teorema.** *Una variedad bidimensional $C^{l,\alpha}$, de curvatura positiva, homeomorfa a una esfera, admite una inmersión isométrica $C^{l,\alpha}$ en $\mathbb{R}^3$como superficie convexa (única salvo movimientos rígidos). Si la métrica Riemanniana es analítica, la inmersión es analítica.*

Ha sido resuelto recientemente de manera completa; Nirenberg (1953, [39]), Pogorelov (1949, [40]).

En cuanto al caso de métricas con curvatura que no es positiva, está el famoso Teorema de Hilbert en $\mathbb{R}^3$: *no existe una superficie diferenciable completa isométrica al plano de Lobachevskij.* Existen resultados en esta dirección debidos principalmente a N. V. Efimov [2, 2, I, cap. 3]: *No existe una superficie completa $C^2$-inmersa con curvatura de Gauss negativa uniformemente separada de cero.* El caso de realización de superficies de curvatura negativa es más delicado pues se tiene la siguiente conjetura [2, 2, I, cap. 1]: *No existe una variedad Riemanniana simplemente conexa con curvatura negativa que admita una inmersión isométrica en algún $\mathbb{R}^n$ como superficie de silla* (para la definición de superficies de silla en dimensiones mayores ver [2, 2, I, cap. 1]).

Por otra parte, el problema de encontrar una inmersión $X$ en $\mathbb{R}^3$, que realice una forma cuadrática $I$ definida positiva dada como su primera forma fundamental, es conocido como el *problema del encaje isométrico* y tiene una larga historia en la geometría diferencial. Se sabe que es localmente soluble cuando $I$ es analítica o cuando la curvatura de Gauss de $I$ no es muy degenerada, pero el caso diferenciable general permanece sin ser resuelto [4].

Élie Cartan estudió el problema de realizar una segunda forma fundamental dada $II$, por medio de una inmersión isométrica. Es decir *realizar una variedad Riemanniana bidimensional simplemente conexa con un operador de forma dado de antemano* como una superficie en $\mathbb{R}^3$ [5]. En otras palabras, dada una forma cuadrática $II$, Cartan estudió la ecuación $II_X = II$. Él mostró que cuando $II$ es analítica real y no es degenerada, la ecuación $II_X = II$ es siempre localmente soluble. Poco se sabe de este problema en el caso diferenciable o en un contexto global.

En un artículo reciente [4, (2001)], R. Bryant retoma el problema anterior de E. Cartan en los siguientes términos:

Dada una variedad Riemanniana bidimensional simplemente conexa $D$ y un endomorfismo $S : TD \to TD$ diagonalizable ("Operador de Forma") definido en el haz tangente; se estudia el espacio de realización de estos objetos, así como las propiedades geométricas del mismo espacio. Se construyen además algunos ejemplos explícitos.

No todo endomorfismo $S$ es realizable; por ejemplo, si $S$ tiene sus autovalores iguales ($S = f\ I_d$) donde $f$ es una función definida en $D$ en cada punto, entonces $S$ no puede ser realizado, a menos que $f$ sea constante positiva o cero ya que las únicas superficies totalmente umbílicas son los planos y esferas en $\mathbb{R}^3$. Por otra parte si $f$ es constante, entonces $S$ es realizado por una inmersión de $D$ en el plano o una esfera de radio apropiado y el caso es trivial.

*En un trabajo reciente [20] hemos obtenido, en el contexto de esta tesis, resultados de realización de una forma cuadrática como segunda forma fundamental en una cierta dirección $\nu$ de una superficie en $\mathbb{R}^4$.*

El artículo de J. Sotomayor en [48] también sugiere un problema de realización de formas cuadráticas relacionado con nuestro trabajo. En este artículo se consideran dos formas cuadráticas $A$ y $B$, definidas en un abierto conexo del plano $\mathcal{U}$, la primera de ellas definida positiva. Con los coeficientes de estas formas se define formalmente la curvatura media $H$, las curvaturas principales $k_1$ y $k_2$ y la curvatura $K$ (correspondiente a la Gaussiana), así como las nociones de punto umbílico, líneas de curvatura (con las ecuaciones formalmente idénticas a las clásicas) y con ellas las foliaciones principales. Sotomayor prueba algunos resultados en este marco y llama *superficie de Codazzi* a la terna $(A, B, \mathcal{U})$ donde el par de formas que cumple la condición de Codazzi.

En el primer resultado *Sotomayor proporciona una forma equivalente de las ecuaciones de Codazzi en términos de fórmulas integrales las aplicaciones de retorno de las foliaciones principales.*

Recordemos que la aplicación de retorno o aplicación de Poincaré relativa a las líneas de curvatura principal, definida en una vecindad de un segmento transversal en un punto de una línea de curvatura principal cerrada, es la aplicación que asocia a cada punto de la vecindad, el punto en que la línea vuelve a cortar el segmento. En el caso en la aplicación es la identidad, se define un *cilindro* de curvas cerradas.

El segundo resultado en este artículo de Sotomayor es una aplicación del anterior a las superficies de Codazzi de curvatura media constante y más generalmente a superficies de Weingarten:

*Las líneas de curvatura cerrada en estas superficies vienen en cilindros (en el sentido dado arriba).*

Estos resultados, que se habían probado en [25] y en [49] para superfícies en $\mathbb{R}^3$ se pueden aplicar a las $\nu$-líneas de curvatura de superficies en $\mathbb{R}^4$ que satisfagan la condición $\nu$-Codazzi; pues la primera forma fundamental y la segunda forma fundamental con respecto a $\nu$, son formas cuadráticas que definen una superficie de Codazzi. Tenemos que:

*Para las superficies que satisfacen la condición $\nu$-Codazzi y una condición tipo $\nu$-Weingarten: las $\nu$-líneas de curvatura cerrada forman cilindros.*

# Apéndice A

# Subvariedades Riemannianas

Para el elaborar éste apéndice nos basamos en el libro de M. Dajzer, Mauricio Antonucci, Gilvan Oliveira, Paulo Lima-Filho y Rui Tojeiro [13]: Submanifolds and Isometric Immersions.

Presentamos en las siguientes secciones los conceptos básicos que serán necesarios más adelante.

## A.1 Conceptos básicos.

Sean $M^n$ y $N^{n+p}$ variedades Riemannianas de dimensiones $n$ y $n+p$, con métricas $\langle \ , \ \rangle_M$ y $\langle \ , \ \rangle_N$ de $M^n$ y $N^{n+p}$ respectivamente; la aplicación diferenciable $f : M^n \to N^{n+p}$, cuya diferencial $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ es inyectiva para toda $p \in M$ es una *inmersión isométrica* de $M^n$ en $N^{n+p}$ si

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle f_*(X), f_*(Y) \rangle_N,$$

para toda $p \in M$ y para todo $X$ y $Y$ en $T_pM$.

Sea $f : M^n \to N^{n+p}$ un encaje, para cada punto $p \in M$ y $U \subset M$ vecindad de $p$, podemos identificar $U$ con $f(U)$ y considerar el espacio tangente de $M$ en $p$ como un subespacio del espacio tangente a $f(p)$ en $N$ y escribir

$$T_pN = T_pM \oplus N_pM,$$

donde $N_pM$ es el complemento ortogonal de $T_pM$ en $T_pN$. De esta descomposición obtenemos el haz vectorial $NM = \cup_{p\in M} N_pM$, llamado el *haz normal* a $M$. Tenemos que el haz $TN\mid_{f(M)}= \{X \in TN : \pi(X) \in f(M)$, donde $\pi : TN \to N$ es la proyección$\}$ es la suma de Whitney del *haz tangente* $TM$ con $NM$, esto es

$$TN\mid_{f(M)} = TM \oplus NM.$$

Respecto a esta descomposición las proyecciones *tangente y normal* son:

$(\ )^{\top} : TN\mid_{f(M)} \to TM$

$(\ )^{\perp} : TN\mid_{f(M)} \to NM$ .

La conexión Riemanniana de $N^{n+p}$ será denotada por $\bar{\nabla}$. Sea $f : M^n \to N^{n+p}$ una inmersión isométrica, dados los campos vectoriales $X, Y \in TM$ tenemos:

$$\bar{\nabla}_X Y = \left(\bar{\nabla}_X Y\right)^{\top} + \left(\bar{\nabla}_X Y\right)^{\perp}.$$

Se sigue de la unicidad de la conexión de Levi-Civita que $\left(\bar{\nabla}\right)^{\top}$ es la conexión de Levi-Civita de $M$; la denotaremos por $\nabla$.

**Fórmula de Gauss.** De la descomposición de $\bar{\nabla}_X Y$ se tiene la fórmula:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \tag{A.1}$$

donde la aplicación $\alpha : TM \times TM \to NM$ es denominada la *segunda forma fundamental* de la inmersión. Esta aplicación es simétrica y bilineal sobre $C^{\infty}(M)$: el anillo de las funciones diferenciables sobre $M$. En particular, expresando $\alpha$ en un sistema de coordenadas, para cada $p \in M$ y $X, Y \in TM$ el valor de $\alpha(X,Y)(p)$ depende sólo de los valores de $X$ y $Y$ en $p$.

Considere los campos vectoriales $X$ de $TM$ y $\xi \in NM$ y denote por $S_\xi$ *la componente tangencial* de $-\bar{\nabla}_X \xi$. Como

$$0 = X\langle \xi, Y\rangle = \langle \bar{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle \xi, \bar{\nabla}_X Y\rangle,$$

de la fórmula de Gauss se tiene la igualdad

$$\langle S_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle.$$

En particular la aplicación $S : TM \times NM \to TM$ dada por $S(X,\xi) = S_\xi X$ es bilineal sobre $C^{\infty}(M)$ y simétrica es decir, $\langle S_\xi X, Y\rangle = \langle X, S_\xi Y\rangle$ para todo $X, Y \in TM$.

La aplicación $S_\xi$ es llamada la *segunda forma fundamental en la dirección* $\xi$ o bien el *operador de forma en la dirección* $\xi$.

**Fórmula de Weingarten.** La componente normal de $\bar{\nabla}_X \xi$, que se denota por $\nabla_X^{\perp} \xi$ define una conexión compatible sobre el haz normal $NM$. Decimos que $\nabla^{\perp}$ es la *conexión normal* de la inmersión $f$ y se tiene la fórmula:

$$\bar{\nabla}_X \xi = -S_\xi X + \nabla_X^{\perp} \xi. \tag{A.2}$$

## A.2 Ecuaciones Gauss, Codazzi y Ricci.

Usando las fórmulas de Gauss y Weingarten es posible derivar las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci.

**Ecuación de Gauss.**

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle,$$

donde $R$ y $\overline{R}$ son los tensores de curvatura de $M$ y $N$ respectivamente y la definición de curvatura es:

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}, W\rangle.$$

**Ecuación de Codazzi.** Tomando la componente normal de $\overline{R}(X,Y)Z$, obtenemos la ecuación:

$$\left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = \left(\nabla_X^{\perp}\alpha\right)(Y,Z) - \left(\nabla_Y^{\perp}\alpha\right)(X,Z), \tag{A.3}$$

donde por definición: $\left(\nabla_X^{\perp}\alpha\right)(Y,Z) = \nabla_X^{\perp}\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$.

Observe que $\nabla_X^{\perp}\alpha$ es $C^{\infty}(M)$ multilineal. Aquí $\nabla^{\perp}$ puede verse como una conexión en el haz vectorial normal $\mathrm{Hom}(TM \times TM, NM)$.

Sea $R^{\perp}$ el tensor de curvatura de $NM$ es decir

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}\xi - \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}\xi - \nabla_{[X,Y]}^{\perp}\xi,$$

para todo $X, Y \in TM$ y $\xi \in NM$.

**Ecuación de Ricci.** De las fórmulas de Gauss y Weingarten se sigue que la componente normal de $\overline{R}(X,Y)Z$ satisface la ecuación:

$$\left(\overline{R}(X,Y)\xi\right)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(S_\xi X,Y) - \alpha(X,S_\xi Y).$$

**Ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci para curvatura constante.** Para las subvariedades de un espacio de curvatura constante $c$ las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci son:

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = c\langle (X\wedge Y)Z,W\rangle + \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle,$$

$$\left(\nabla_X^{\perp}\alpha\right)(Y,Z) = \left(\nabla_Y^{\perp}\alpha\right)(X,Z) \tag{A.4}$$

o equivalentemente

$$(\nabla_X S)(Y,\xi) = (\nabla_Y S)(X,\xi) \tag{A.5}$$

y

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \alpha(X,S_\xi Y) - \alpha(S_\xi X,Y),$$

o equivalentemente

$$\langle\overline{R}(X,Y)\xi,\zeta\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\zeta\rangle - \langle [S_\xi,S_\zeta]X,Y\rangle$$

donde $X,Y\in TM$ y $\xi,\zeta\in NM$ y
$[S_\xi,S_\zeta] = S_\xi S_\zeta - S_\zeta S_\xi$,
$(X\wedge Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y$
y
$(\nabla_X S)(Y,\xi) = \nabla_X S_\xi Y - S_\xi\nabla_X Y - S_{\nabla_X^{\perp}\xi}Y$.

**Ecuaciones de Gauss, Codazzi para curvatura cero.** Usaremos frecuentemente las ecuaciones de Gauss y Codazzi para subvariedades inmersas en $\mathbb{R}^n$. Como la curvatura de $\mathbb{R}^n$ es idénticamente cero en este caso estas ecuaciones pueden escribirse respectivamente como:

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle, \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^{\perp}_{X}\alpha\right)(Y,Z) &= \left(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha\right)(X,Z), \\
&\text{o equivalentemente,} \\
\left(\nabla_{X}S\right)(Y,\xi) &= \left(\nabla_{Y}S\right)(X,\xi),
\end{aligned} \tag{A.7}$$

y

$$\begin{aligned}
R^{\perp}(X,Y)\xi &= \alpha(X,S_{\xi}Y)-\alpha(S_{\xi}X,Y), \\
&\text{o equivalentemente,} \\
\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\zeta\rangle &= \langle [S_{\xi},S_{\zeta}]X,Y\rangle
\end{aligned}$$

Observe que de esta última expresión de la ecuación de Ricci se sigue que $R^{\perp}_{x}=0$ si y sólo si existe una base ortogonal de $T_xM$ que diagonaliza simultáneamente todos los $S_{\xi}$, $\xi \in N_xM$.

## A.3 Haces Vectoriales.

**Haces Vectoriales Riemannianos.** Sean $E$ y $M$ variedades diferenciables y $\pi : E \to M$ una aplicación diferenciable.
Decimos que $\pi : E \to M$ es un *haz vectorial de rango* $k$ cuando para cada $x \in M$ :

1. $\pi^{-1}(x)$ *es un espacio vectorial de dimensión* $k$,
2. *existe una vecindad abierta* $U$ *de* $x$ *en* $M$, *y un difeomorfismo*$\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ *cuya restricción a* $\pi^{-1}(y)$ *es un isomorfismo sobre* $\{y\} \times \mathbb{R}^k$ *para cada* $y \in U$.

Dado un haz vectorial $\pi : E \to M$ y un subconjunto $F \subset E$ tal que la restricción $\pi|_F : F \to M$ es un haz vectorial a su vez, decimos que $F$ es un *subhaz vectorial de* $E$ si la inclusión $i : F \to E$ aplica $(\pi|_F)^{-1}(x)$ linealmente en $\pi^{-1}(x)$ para todo $x \in M$. El haz tangente $TM = \cup_{x\in M} T_xM$ de una variedad diferenciable $M$ es un haz vectorial y el haz normal $NM$ de una inmersión isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{n+p}$ es un subhaz de $T\overline{M}|_M$.

Sea $\pi : E \to M$ un haz vectorial, para cada $x \in M$ al espacio $E_x = \pi^{-1}(x)$ lo denominamos la *fibra* de $\pi$ sobre $x$, una *sección local* sobre un abierto $U \subset M$ es la aplicación diferenciable $\xi : U \to E$ tal que $\pi \circ \xi = \mathrm{id}_U$; si $U = M$ decimos que la *sección es global.* Se puede demostrar que para cada $e \in E$ existe una sección $\xi$ tal que $\xi(\pi(e)) = e$; en particular esto muestra que el conjunto $\Gamma(\pi)$ de secciones es no vacío.

Sean $\pi_1 : E^1 \to M$ y $\pi_2 : E^2 \to M$ haces vectoriales. Definimos una proyección $\pi : \mathrm{Hom}(E^1, E^2) \to M$ poniendo $\pi^{-1}(x) = \mathrm{Hom}(E_x^1, E_x^2)$ donde $\mathrm{Hom}(E_x^1, E_x^2)$ es la unión disjunta de espacios de aplicaciones lineales de $E_x^1$ en $E_x^2$, $x \in M$. Dotando $\mathrm{Hom}(E^1, E^2)$ con la estructura natural inducida por la proyección se convierte en un haz vectorial.

La *suma de Whitney* $\pi_1 \oplus \pi_2$ de los haces vectoriales $\pi_1 : E^1 \to M$ y $\pi_2 : E^2 \to M$ se define como la proyección

$$\pi_1 \oplus \pi_2 : E^1 \oplus E^2 \to M,$$

dada por $\pi_1 \oplus \pi_2((e_1, e_2)) = \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)$, donde

$$E^1 \oplus E^2 = \{(e_1, e_2) \in E^1 \times E^2 : \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}.$$

Dados dos haces vectoriales $\pi_1 : E^1 \to M_1$ y $\pi_2 : E^2 \to M_2$ y un difeomorfismo $\phi : M_1 \to M_2$ decimos que una aplicación diferenciable $\widetilde{\phi} : E^1 \to E^2$ es un *isomorfismo a lo largo de* $\phi$ si para todo $x \in M_1$, tenemos

1. $\pi_2 \circ \widetilde{\phi} = \phi \circ \pi_1$ *y* $\widetilde{\phi}\left(\pi_1^{-1}(x)\right) = \pi_2^{-1}(\phi(x))$ *y*
2. *La restricción* $\widetilde{\phi}_x : \pi_1^{-1}(x) \to \pi_2^{-1}(\phi(x))$ *de* $\widetilde{\phi}$ *a la fibra* $\pi_1^{-1}(x)$ *es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Una *métrica Riemanniana* $g$ sobre un haz vectorial $\pi : E \to M$ es una aplicación

$$g : \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \to C^\infty(M),$$

bilineal sobre el anillo $C^\infty(M)$ de funciones diferenciables sobre $M$ que es simétrica y definida positiva.

Un haz vectorial $\pi : E \to M$ con su métrica Riemanniana es llamado *haz vectorial Riemanniano.*

Sea $\mathcal{X}(M)$ el conjunto de campos vectoriales diferenciables sobre $M$. Una *conexión lineal* del haz $\pi : E \to M$ es una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal

$$\begin{aligned} \nabla \;:\; & \mathcal{X}(M) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi), \\ & (X, \xi) \longmapsto \nabla_X \xi \end{aligned}$$

que satisface para cada $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$ y $\xi \in \Gamma(\pi)$ las propiedades:

1. $\nabla_{fX}\xi = f\nabla_X\xi$
2. $\nabla_X(f\xi) = X(f)\xi + f\nabla_X\xi.$

De 1. puede verse que la aplicación $X \to \nabla_X\xi$ es $C^\infty(M)$-lineal y por lo tanto el valor de $\nabla_X\xi$ en $x \in M$ depende sólo del valor de $X$ en $x$. Por otra parte se puede ver que el operador $\nabla_X : \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$ es un operador local en el sentido de que el valor de $\nabla_X\xi$ depende sólo de los valores de $\xi$ en una vecindad de $x$.

Sea $\pi : E \to M$ un haz vectorial con conexión lineal $\nabla$. Decimos que una sección $\xi \in \Gamma(\pi)$ es *paralela* cuando $\nabla_X\xi = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Un subhaz vectorial $F$ de $E$ se dice *paralelo* si para toda sección $\eta$ de $F$ y todo $X \in \mathcal{X}(M)$, tenemos que $\nabla_X\eta$ es una sección de $F$.

Una conexión lineal se dice *compatible* con la métrica $g$ cuando

$$Xg(\xi,\eta) = g(\nabla_X\xi,\eta) + g(\xi,\nabla_X\eta),$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$ y $\xi,\eta \in \Gamma(\pi)$.

El *tensor curvatura* del haz vectorial $\pi : E \to M$ con conexión $\nabla$ es la aplicación $\mathbb{R}$-trilineal

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi),$$

definida por

$$R(X,Y)\xi = \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi. \tag{A.8}$$

El tensor de curvatura es trilineal sobre $C^\infty(M)$. Cuando el haz es Riemanniano se puede asociar con $R$ el tensor:

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \to \mathbb{R},$$

dado por $R(X,Y,\xi,\eta) = g(R(X,Y)\xi,\eta)$ donde $g$ es la métrica de $E$.

## A.4 Teorema fundamental de las subvariedades.

Las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci son satisfechas por cualquier inmersión isométrica $f : M^n \to N^{n+p}$. El Teorema fundamental de las subvariedades es un recíproco local de este hecho cuando $N^{n+p}$ es una variedad completa y simplemente conexa de curvatura seccional constante $c$. Mas aún, si $M$ es simplemente conexa el inverso es global. Denotaremos en este caso $N^{n+p}$, por $Q_c^{n+p}$. Tenemos que $Q_c^{n+p}$ es el *espacio euclidiano* $\mathbb{R}^{n+p}$, la *esfera euclidiana* $S_c^{n+p}$ o el *espacio hiperbólico* $\mathbb{H}_c^{n+p}$.

El teorema fundamental de las inmersiones es una generalización del clásico teorema de Bonnet de superficies [53] que afirma que un par de formas $(I, II)$ cuadráticas definidas en una superficie simplemente conexa $S$, pueden realizarse por una inmersión $X$ y un campo normal $N$ si y sólo si $I$ es definida positiva y el par $(I, II)$ satisface las ecuaciones de Gauss y Codazzi. Más aún, $X$ y $N$ cuando existen, son únicos bajo isometrías de $\mathbb{R}^3$.

En la formulación que hacemos enseguida del teorema observe que en las hipótesis, el papel de la segunda forma fundamental en el haz Riemanniano lo juega una sección de $\mathrm{Hom}\,(TM \times TM, E)$. Esto le da sentido a las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci en este contexto.

**Teorema Fundamental de las Subvariedades (TF).** *Sea $M^n$ una variedad Riemanniana simplemente conexa, $\pi : E \to M$ un haz vectorial Riemanniano de rango $p$ con conexión compatible $\nabla'$ y sea $\alpha$ una sección simétrica del haz* $\mathrm{Hom}(TM \times TM, E)$. *Definamos para cada sección local $\xi$ de $E$ la aplicación $S_\xi : TM \to TM$ por:*

$$\langle S_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha\,(X, Y)\,, \xi\rangle, \ X, Y \in TM$$

*i) Si $\alpha$* y *$\nabla'$ satisfacen las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci para el caso de curvatura constante $c$ (donde $\alpha$ y $\nabla'$ desempeñan el papel de la segunda forma fundamental y el de la conexión normal respectivamente), entonces existe una inmersión isométrica $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ y un isomorfismo de haces $\tilde{f} : E \to TM^\perp$ a lo largo de $f$, tal que para todo $X, Y \in TM$ y cualquier $\xi, \eta$ secciones locales de $E$ se tiene:*

$$\langle\ \tilde{f}\,(\xi)\,,\ \tilde{f}\,(\eta)\rangle = \langle \xi, \eta\rangle$$
$$\tilde{f}\alpha\,(X, Y) = \tilde{\alpha}\,(X, Y)$$
$$\tilde{f}\nabla'_X\xi = \nabla_X^\perp \tilde{f}\,(\xi)$$

*donde $\tilde{\alpha}$ y $\nabla^\perp$ son la segunda forma fundamental y la conexión normal de $f$ respectivamente.*

*ii) Suponga que $f$ y $g$ son inmersiones isométricas de una variedad conexa $M$ en $Q_c^{n+p}$. Denotemos por $TM_f^{\perp}$, $\alpha_f$ y $\nabla_f^{\perp}$ el haz normal, la segunda forma fundamental y la conexión normal de $f$ respectivamente y por $TM_g^{\perp}$, $\alpha_g$ y $\nabla_g^{\perp}$ los objetos correspondientes para $g$. Si existe un isomorfismo de haces $\tilde{\phi}: TM_f^{\perp} \to TM_g^{\perp}$ tal que para todo $X, Y \in TM$ y cualquier $\xi, \eta \in TM_f^{\perp}$ :*

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\phi}(\xi), \tilde{\phi}(\eta) \right\rangle &= \langle \xi, \eta \rangle \\ \tilde{\phi}\alpha_f(X, Y) &= \alpha_g(X, Y) \\ \tilde{\phi}\nabla_f^{\perp}{}_X \xi &= \nabla_g^{\perp}{}_X \tilde{\phi}(\xi), \end{aligned}$$

*entonces existe una isometría $\tau: Q_c^{n+p} \to Q_c^{n+p}$ tal que*

$$g = \tau \circ f \quad \text{y} \quad \tau_*|_{TM_f^{\perp}} = \tilde{\phi}.$$

Aquí $Q_c^{n+p}$ denota una variedad Riemanniana $(n+p)$-dimensional simplemente conexa y completa con curvatura seccional $c$, es decir, la *Esfera Euclidiana* $S_c^{n+p}$, *el espacio Euclidiano* $\mathbb{R}^{n+p}$ o el *espacio Hiperbólico* $H_c^{n+p}$.

El Teorema afirma que en las condiciones dadas, el haz vectorial Riemanniano $E$ se puede realizar como el haz normal de una subvariedad de un espacio de curvatura constante. Note que $\tilde{f}$ es un isomorfismo de haces (A.4) preservando la métrica y aplicando $\alpha$ y $\nabla'_X \xi$ en la segunda forma fundamental $\tilde{\alpha}$ y la conexión de inducida de la inmersión.

La segunda parte del teorema se refiere a la unicidad de la inmersión. En efecto si tenemos dos inmersiones $f$ y $g$ del haz $(\pi: E \to M, \nabla', \alpha)$ en $Q_c^{n+p}$ en las condiciones de la primera parte, entonces los objetos $\alpha_f$, $TM_f^{\perp}$ *y* $\nabla_f^{\perp}$ estarán relacionados con los objetos correspondientes a $g$ por un isomorfismo de haces $\tilde{\phi}: TM_f^{\perp} \to TM_g^{\perp}$ satisfaciendo la hipótesis de esta parte del teorema y por lo tanto, existirá una isometría del espacio $\tau$ que aplica $f(M)$ en $g(M)$ y cuya diferencial coincide con $\tilde{\phi}$ cuando es restringida a $TM_f^{\perp}$.

# Apéndice B

# Marco Móvil

Para el material de éste apéndice nos basamos en el libro de T. J. Willmore: [55], Riemannian Geometry.

## B.1 Conexiones y el marco móvil.

Además del uso de las conexiones se usa también otro método para estudiar las variedades, el llamado *método del marco móvil* de É. Cartan . Por medio de este método también es posible expresar las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci y los demás conceptos importantes de la Geometría. En esta tesis hacemos uso de los dos procedimientos, por lo que presentaremos el marco móvil y su relación con las conexiones tomando como base el desarrollo del tema presentado en el libro de T. J. Willmore [55].

Sea $N$ una variedad Riemanniana de dimensión $n$. Un *referencial* en un punto $p \in N$ es una base del espacio tangente $T_pN$. Sea $\mathbb{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ un conjunto de campos linealmente independientes definidos en un abierto $U \subset N$ tal que en cada punto $p \in U$ los vectores $X_i(p)$ forman un referencial en $p$. El conjunto de tales referenciales constituyen lo que denominamos un *marco móvil* en el sentido de É. Cartan.

Dada una conexión $\nabla$ de $N$ en un sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_n)$, tenemos $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ donde $\Gamma_{ij}^k$ son funciones diferenciables. Denotemos por $dx_i$ las formas duales de $\frac{\partial}{\partial x_j}$, es decir: $dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$. Si definimos las formas $\omega_{ij}$ por:

$$\omega_{ij} = \sum_k \Gamma_{ki}^j dx_k,$$

vemos que, relativo a un sistema de coordenadas, una conexión determina una matriz de 1-formas lineales las *formas de conexión*. Inversamente, se puede ver que una matriz $\omega_{ij}$ de 1-formas, determina en un sistema de coordenadas un conjunto de $n^3$ funciones y con ellas una conexión.

Si cambiamos de un referencial $\mathbb{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ a otro referencial $\mathbb{X}' = \{X_1', \ldots, X_n'\}$ donde

$$\mathbb{X}' = \mathbb{X}B$$

y la matriz de cambio $B$ es una matriz cuyas entradas son funciones, la ley de transformación de las componentes de la conexión clásica conduce a

$$\omega' = B^{-1}dB + B^{-1}\omega B.$$

Tenemos así, que a cada referencial móvil $\mathbb{X}$ corresponde una *matriz de conexión* tal que las matrices correspondientes a $\mathbb{X}$ y a otro referencial $\mathbb{X}' = \mathbb{X}B$ están relacionadas con la fórmula anterior.

Veamos cómo aparecen las nociones de *torsión* y *curvatura* en este enfoque del marco móvil. Sea $\mathbb{X}$ un marco móvil cuya matriz de conexión es $\omega_{ij}$ y $\mathbb{T}$ el marco dual correspondiente: $(\omega_i)$, es decir tal que $\omega_i (X_j) = \delta_{ij}$. Definimos un conjunto de 2-formas $\Theta_i$, $i = 1, ..., n$ y la matriz de 2-formas $\Omega_{ij}$ por:

$$\begin{aligned}
\Theta_i &= d\omega_i + \sum_j \omega_{ji} \wedge \omega_j, \\
\Omega_{ji} &= d\omega_{ji} + \sum_k \omega_{ki} \wedge \omega_{jk}.
\end{aligned}$$

Las 2-formas $\Theta_i$ son llamadas formas de *torsión* y las 2-formas $\Omega_{ij}$ formas de *curvatura*. La justificación de esta terminología la daremos adelante. Se puede probar que las fórmulas de transformación para $\Theta_i$ y $\Omega_{ij}$ cuando el referencial cambia de $\mathbb{X}$

a $\mathbb{X}'$ con $\mathbb{X}' = \mathbb{X}B$ son:

$$\begin{aligned}
[\Theta_i'] &= B[\Theta_i], \\
[\Omega_{ij}'] &= B^{-1}[\Omega_{ij}]B, \\
\omega' &= B^{-1}dB + B^{-1}\omega B.
\end{aligned}$$

*Así, dada una conexión $\nabla$ en la variedad Riemanniana, podemos definir las formas de conexión con el comportamiento bajo cambio de referencial dado por las fórmulas de arriba. Inversamente, dada una matriz de 1-formas $\omega_{ji}$, se definen las formas $\Theta_i$ y $\Omega_{ji}$ y podemos definir una conexión $\nabla$ como*

$$\nabla_X X_j = \sum_i \omega_{ji}(X) X_i.$$

Para un campo vectorial arbitrario $Y = \sum_j b_j X_j$ definimos

$$\nabla_X Y = \sum_j db_j(X) X_j + \sum_j b_j \nabla_X X_j,$$

usando las relaciones de arriba se puede ver que esta definición es consistente bajo cambio de referencial. Definimos ahora

$$\begin{aligned}
T(X_j, X_k) &= \sum_i \Theta_i(X_j, X_k) X_i, \\
R(X_k, X_l) X_j &= \sum_i \Omega_{ji}(X_k, X_l) X_i,
\end{aligned}$$

y se prueba su consistencia respecto a un cambio de referencial. Se extiende por linealidad para obtener $T(X,Y)$ y $R(X,Y)Z$ y de esta manera tener las definiciones para todo campo vectorial.

Si *definimos* ahora $\Gamma_{kj}^i$, $T_{jk}^i$ y $R_{jkl}^i$ por:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{kj}^i &= \omega_{ji}(X_k) \text{ o } \omega_{ji} = \sum_k \Gamma_{kj}^i \omega_k, \\
T_{jk}^i &= \Theta_i(X_j, X_k) \text{ o } \Theta_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k} T_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k, \\
R_{jkl}^i &= \Omega_{ji}(X_k, X_l) \text{ o } \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{jkl}^i \omega_k \wedge \omega_l.
\end{aligned}$$

Obtenemos las:

**Ecuaciones de estructura.**

$$\begin{aligned}
\omega_{ji} &= \sum_k \Gamma^i_{kj}\omega_k, \\
d\omega_i + \sum_j \omega_{ji}\wedge\omega_j &= \Theta_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k} T^i_{jk}\omega_j\wedge\omega_k, \\
d\omega_{ji} + \sum_k \omega_{ki}\wedge\omega_{jk} &= \Omega_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^i_{jkl}\omega_k\wedge\omega_l.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

de aquí se pueden obtener las relaciones siguientes

$$\begin{aligned}
T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \\
R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,
\end{aligned}$$

que no son otras que la *torsión* y la *curvatura* definidas por la conexión.

*Concluyendo, tenemos que a una conexión sobre la variedad Riemanniana le corresponde una matriz de 1-formas con una ley de cambio cuando se cambia de marco y las ecuaciones de estructura dadas arriba donde las cantidades* $\Gamma^i_{kj}$, $T^i_{jk}$ *y* $R^i_{jkl}$ *son exactamente los coeficientes con respecto a un referencial de la conexión, la torsión y las curvaturas relativas a esta conexión. Recíprocamente, dada una matriz de 1-formas* $(\omega_{ji})$ *es posible definir una conexión de manera que las cantidades* $\Gamma^i_{kj}$, $T^i_{jk}$ *y* $R^i_{jkl}$ *que aparecen en las ecuaciones de estructura, son exactamente los coeficientes de la conexión, torsión y curvatura como se definen usualmente en términos de ésta.*

## B.2 Ecuaciones de estructura de una subvariedad.

Usaremos el método del marco móvil para obtener las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci. Mostraremos que estas ecuaciones son consecuencia de las ecuaciones estructurales de Cartan aplicadas a los haces tangente y normal de la subvariedad.

Comenzamos estableciendo el siguiente resultado fundamental:

**Lema de Cartan.** *Sea* $P$ *una variedad Riemanniana de dimensión* $k$ *y* $\omega_1, ..., \omega_r$ *donde* $r \leq k$, *1-formas definidas en* $P$ *que son linealmente independientes en cada punto* $p \in N$. *Sean* $\theta_1, ..., \theta_r$ *1-formas sobre* $N$ *tales que*

$$\sum_{i=1}^{r} \theta_i \wedge \omega_i = 0,$$

*entonces existen funciones $h_{ij}$, $C^\infty$ sobre $P$ con $h_{ij} = h_{ji}$ tales que*

$$\theta_i = \sum_{i=1}^{r} h_{ij}\omega_i, \ i = 1, ..., r.$$

Sea $M^n$ una subvariedad de la variedad Riemanniana $N^{n+p}$, supondremos que $M$ está localmente encajada en $N$. Denotamos por $F(N, M)$ la subvariedad de *marcos ortonormales* sobre $N$ que consiste en los *referenciales adaptados,* es decir, referenciales $\mathbb{X} = (X_k)$, $k = 1, ..., n+p$ de los cuales $(X_i)$, $i = 1, ..., n$ son tangentes a $M$ y $(X_\alpha)$, $\alpha = n+1, ..., n+p$ son normales a $M$. Dos referenciales adaptados $\mathbb{X}$ y $\widetilde{\mathbb{X}}$ se relacionan por la ecuación matricial:

$$\mathbb{X} = \widetilde{\mathbb{X}}K$$

donde $K$ es la matriz $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ donde $A, B$ son matrices ortonormales $n \times n$ *y* $p \times p$.

*Haremos la convención de que los índices $k, l, m$; $i, j$ y $\alpha, \beta$ varían en $(1, ..., n+p)$, $(1, ..., n)$ y $(n+1, ..., n+p)$ respectivamente.*

Recordemos que dada una conexión y un referencial existe una matriz de conexión asociada que satisface las ecuaciones de estructura; en el caso especial en que la conexión es la conexión de Levi-Civita, por ser esta simétrica y con torsión cero, las formas de conexión satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} d\omega_k + \sum_l \omega_{lk} \wedge \omega_l &= 0, \\ \omega_{kl} &= -\omega_{lk}. \end{aligned}$$

*Si restringimos a $M$* las formas $\omega_k$ y $\omega_{kl}$ obtenemos una matriz de formas de conexión sobre $M$. Esto porque la ecuación $d\omega_k + \sum_l \omega_{lk} \wedge \omega_l = 0$ cuando es restrigida a $M$ nos da

$$\begin{aligned} d\omega_i + \sum_j \omega_{ji} \wedge \omega_j &= 0, \\ \omega_{ij} &= -\omega_{ji} \end{aligned}$$

pues $\omega_\alpha = 0$ sobre $M$ (recuerde que el índice $\alpha$ lo usamos para campos normales).

**Segunda Forma Fundamental.** Para los campos vectoriales tangentes a $M$ se tiene $\omega_\alpha = 0$. Tomando derivada exterior de esta ecuación tenemos

$$0 = d\omega_\alpha = -\sum_k \omega_{k\alpha} \wedge \omega_k = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_i.$$

Del lema de Cartan se sigue que

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h^\alpha_{ij}\omega_j$$

para las funciones diferenciables $h^\alpha_{ij}$ que satisfacen

$$h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}.$$

Recordando (Apéndice B.1) que $\bar{\nabla}_X X_j = \sum_i \omega_{ji}(X) X_i$, se tiene

$$\bar{\nabla}_X X_\alpha = \sum_j \omega_{\alpha j}(X) X_j + \sum_\beta \omega_{\alpha\beta}(X) X_\beta,$$

aquí $\bar{\nabla}$ es la conexión de $N$. Poniendo $X_\alpha = \xi$ en $\bar{\nabla}_X\xi = -S_\xi X + \nabla^\perp_X\xi$ tenemos $\sum_j \omega_{\alpha j}(X) X_j = -S_{X_\alpha}X$ y como $\omega_{i\alpha} = \sum_j h^\alpha_{ij}\omega_j$ los $h^\alpha_{ij}$ son precisamente los coeficientes de la segunda forma fundamental en la dirección de $X_\alpha$. En efecto: $-S_{X_\alpha}X_i = -\sum_j\sum_s h^\alpha_{js}\omega_s(X_i) X_j = -\sum_j h^\alpha_{ji}X_j$ y se tiene

$$\langle\alpha(X_i, X_j), X_\beta\rangle = \langle S_{X_\beta}X_i, X_j\rangle = h^\beta_{ji}.$$

De manera similar en la ecuación,

$$d\omega_k + \sum_l \omega_{lk}\wedge\omega_l = 0,$$

podemos restringir nuestra atención a los campos normales. Es decir *consideramos esta ecuación sobre el haz normal* para obtener:

$$d\omega_\alpha + \sum_l \omega_{l\alpha}\wedge\omega_l = d\omega_\alpha + \sum_\beta \omega_{\beta\alpha}\wedge\omega_\beta = 0,$$

ya que $\omega_i = 0$ sobre el haz normal. Más aún se tiene $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$. Así la matriz $(\omega_{\alpha\beta})$ es la matriz de conexión de la conexión normal $\nabla^\perp$.

**Ecuación de Gauss.** La tercera ecuación estructural para $N$ es

$$d\omega_{kl} + \sum_m \omega_{ml}\wedge\omega_{km} = \widetilde{\Omega}_{kl},$$

donde $\widetilde{\Omega}$ es la forma de curvatura correspondiente a $N$. Restringiendo los índices a los campos tangentes se obtiene

$$d\omega_{ji} + \sum_k \omega_{ki} \wedge \omega_{jk} + \sum_\alpha \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{j\alpha} = \widetilde{\Omega}_{ji}.$$

La segunda ecuación estructural para $M$ es

$$d\omega_{ji} + \sum_k \omega_{ki} \wedge \omega_{jk} = \Omega_{ji}.$$

Además como

$$\sum_\alpha \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{j\alpha} = -\sum_\alpha \sum_{k,l} h^\alpha_{ik} \omega_k \wedge h^\alpha_{jl} \omega_l = -\sum_\alpha \sum_{k,l} h^\alpha_{ik} h^\alpha_{jl} \omega_k \wedge \omega_l.$$

Así tenemos

$$\widetilde{\Omega}_{ji} - \Omega_{ji} = -\sum_\alpha \sum_{k,l} h^\alpha_{ik} h^\alpha_{jl} \omega_k \wedge \omega_l.$$

Recordando que $\Omega_{ji}(X_r, Y_s) = R^i_{jrs}$, como los referenciales son ortonormales y usando la relación

$$(\omega_k \wedge \omega_l)(X, Y) = \omega_k(X)\,\omega_l(Y) - \omega_l(X)\,\omega_k(Y),$$

evaluamos $\widetilde{\Omega}_{ji} - \Omega_{ji}$ en los vectores $X_r, X_s$ para obtener

$$\widetilde{R}^i_{jrs} - R^i_{jrs} = \sum_\alpha \left(h^\alpha_{is} h^\alpha_{jr} - h^\alpha_{ir} h^\alpha_{js}\right).$$

Como se tiene $\langle \alpha(X_i, X_j), X_\beta \rangle = h^\beta_{ji}$ y usando la ortonormalidad del referencial, se comprueba que esta es precisamente la *Ecuación de Gauss* (A.2) expresada en términos de las componentes de la curvatura.

**Ecuación de Codazzi.** Obtendremos ahora las *ecuaciones de Codazzi por el método del referencial móvil.* Restringiendo los índices en la tercera ecuación estructural para $N$ (es decir poniendo ahí $k = \alpha$ y $l = i$)

$$d\omega_{kl} + \sum_m \omega_{ml} \wedge \omega_{km} = \widetilde{\Omega}_{kl},$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} d\omega_{\alpha i} + \sum_{m} \omega_{mi} \wedge \omega_{\alpha m} &= \widetilde{\Omega}_{\alpha i} \text{ es decir} \\ d\omega_{\alpha i} + \sum_{j} \omega_{ji} \wedge \omega_{\alpha j} + \sum_{\beta} \omega_{\beta i} \wedge \omega_{\alpha\beta} &= \widetilde{\Omega}_{\alpha i}. \end{aligned}$$

Además

$$d\omega_{\alpha i} = -d\left(\sum_{k} h^{\alpha}_{ik}\omega_k\right) = -\sum_{k} dh^{\alpha}_{ik} \wedge \omega_k + \sum_{k,j} h^{\alpha}_{ij}\omega_{kj} \wedge \omega_k,$$

donde en el segundo término se ha usado la ecuación estructural para $M$. También tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j} \omega_{ji} \wedge \omega_{\alpha j} &= -\sum_{k,j} \omega_{ji} \wedge h^{\alpha}_{jk}\omega_k = \sum_{j,k} h^{\alpha}_{jk}\omega_{ij} \wedge \omega_k, \\ \sum_{\beta} \omega_{\beta i} \wedge \omega_{\alpha\beta} &= \sum_{k,\beta} \omega_{\alpha\beta} \wedge h^{\beta}_{ik}\omega_k = -\sum_{k,\beta} h^{\beta}_{ik}\omega_{\beta\alpha} \wedge \omega_k. \end{aligned}$$

Substituyendo arriba obtenemos:

$$\sum_{k}\left(-dh^{\alpha}_{ik} + \sum_{j} h^{\alpha}_{ij}\omega_{kj} + \sum_{j} h^{\alpha}_{jk}\omega_{ji} - \sum_{\beta} h^{\beta}_{ik}\omega_{\beta\alpha}\right) \wedge \omega_k = \widetilde{\Omega}_{\alpha i}.$$

Evaluamos esta relación en los vectores $X_r, X_s$ para obtener

$$\begin{aligned} & dh^{\alpha}_{ir}(X_s) - dh^{\alpha}_{is}(X_r) + \\ & \sum_{\beta}(h^{\beta}_{is}\omega_{\alpha\beta}(X_r) - h^{\beta}_{ir}\omega_{\alpha\beta}(X_s)) + \\ & \sum_{j}(h^{\alpha}_{ij}\omega_{js}(X_r) - h^{\alpha}_{ij}\omega_{rj}(X_s)) + \\ & \sum_{j}(h^{\alpha}_{jr}\omega_{ji}(X_s) - h^{\alpha}_{js}\omega_{ji}(X_r)) \\ = \; & \widetilde{R}^{i}_{\alpha rs}. \end{aligned}$$

La *ecuación de Codazzi* en términos de conexiones es

$$\left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = \left(\nabla^{\perp}_{X}\alpha\right)(Y,Z) - \left(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha\right)(X,Z),$$

donde

$$\left(\nabla_X^{\perp}\alpha\right)(Y,Z) = \nabla_X^{\perp}\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Evaluando en

$$X = X_s,\ Y = X_r \text{ y } Z = X_i,$$

escribiendo $\langle \alpha(X_i, X_j), X_\beta \rangle = h_{ji}^{\beta}$ y tomando producto interno con $X_\alpha$ se comprueba que las ecuaciones coinciden.

**Ecuación de Ricci.** Obtenemos ahora las ecuaciones de Ricci. Restringiendo los índices de la tercera ecuación estructural (poniendo ahora $k = \alpha$ y $l = \beta$)

$$d\omega_{lk} + \sum_m \omega_{mk} \wedge \omega_{lm} = \widetilde{\Omega}_{lk},$$

al haz normal, obtenemos:

$$d\omega_{\beta\alpha} + \sum_i \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\beta i} + \sum_\gamma \omega_{\gamma\alpha} \wedge \omega_{\beta\gamma} = \widetilde{\Omega}_{\beta\alpha}$$

donde $\gamma = n+1, ...n+p$. Tenemos

$$\sum_i \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\beta i} = -\sum_j h_{ij}^{\alpha}\omega_j \wedge \sum_k h_{ik}^{\beta}\omega_k = -\sum_{j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{ik}^{\beta} \omega_j \wedge \omega_k,$$

y

$$d\omega_{\beta\alpha} + \sum_\gamma \omega_{\gamma\alpha} \wedge \omega_{\beta\gamma} = \Omega_{\beta\alpha}^{\perp}$$

aquí $\Omega_{\beta\alpha}^{\perp}$ denota la matriz de conexión del haz normal. De aquí

$$\widetilde{\Omega}_{\beta\alpha} - \Omega_{\beta\alpha}^{\perp} = -\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{ik}^{\beta} \omega_j \wedge \omega_k.$$

Evaluando en $X_r, X_s$ obtenemos

$$\widetilde{R}_{\beta rs}^{\alpha} - R_{\beta rs}^{\perp\alpha} = h_{is}^{\alpha} h_{ir}^{\beta} - h_{ir}^{\alpha} h_{is}^{\beta}$$

que calculando, se puede ver que es la *ecuación de Ricci*

$$\left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(S_\xi X, Y) - \alpha(X, S_\xi Y),$$

después de evaluarla en el referencial.

**Observación B.1.** *Las ecuaciones de estructura de Cartan contienen toda la información acerca de la curvatura y torsión de la subvariedad $M$ respecto a la variedad ambiente $N$. Es por eso que las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci correspondientes a la curvatura de la subvariedad $M$ en $N$ se pueden extraer de ellas. Las ecuaciones de Gauss y Ricci miden la diferencia de la curvatura de la variedad ambiente $N$ y la subvariedad inmersa $M$. En el primer caso con respecto a la curvatura tangencial, en tanto que en el segundo caso respecto a la curvatura normal. De esta manera estas dos ecuaciones se pueden obtener de las ecuaciones de estructura de Cartan correspondientes a la curvatura restringiendo el rango de los índices a las partes tangencial y normal respectivamente. Por otro lado, la ecuación de Codazzi corresponde formas de conexión, cuyos subíndices involucran al mismo tiempo la contribución tangencial y normal de la subvariedad $M$ y la ecuación de Ricci a a los subíndices que involucran la parte normal.*

**Observación B.2.** *Así como para los haces tangente y normal podemos asociar un marco móvil y sus ecuaciones de estructura, igual se puede hacer para un haz vectorial Riemanniano abstracto, esta construcción no requiere nada adicional.*

## B.3 Ecuaciones de estructura para superficies en $Q_c^n$.

Veamos ahora cómo lucen las ecuaciones anteriores en el caso particular de superficies inmersas en $Q_c^n$.

Consideremos las ecuaciones de estructura de $Q_c^n$. Dado un marco móvil $\{X_i\}$ de $Q_c^n$, las 1-formas $\omega_i$ cumplen la condición $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$.

De acuerdo a lo visto en la sección anterior, correspondiente a este referencial y a la conexión de Levi-Civita tenemos la matriz de formas de conexión $\omega_{ij}$ que satisfacen las ecuaciones de estructura

$$\begin{aligned}
\omega_{ji} &= \sum_k \Gamma^i_{kj}\omega_k, \\
d\omega_i + \sum_j \omega_{ji}\wedge\omega_j &= \Theta_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k} T^i_{jk}\omega_j\wedge\omega_k, \\
d\omega_{ji} + \sum_k \omega_{ki}\wedge\omega_{jk} &= \Omega_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^i_{jkl}\omega_k\wedge\omega_l,
\end{aligned}$$

que en este caso se reducen a

$$\begin{aligned} \omega_{ji} &= \sum_k \Gamma^i_{kj}\omega_k, \\ d\omega_i + \sum_j \omega_{ji}\wedge\omega_j &= 0, \\ d\omega_{ji} + \sum_k \omega_{ki}\wedge\omega_{jk} &= \Omega_{ji} = c\omega_i\wedge\omega_j, \end{aligned}$$

pues la torsión es cero, la conexión es la de Levi-Civita y la curvatura seccional es constante $c$. En particular las ecuaciones de estructura de $\mathbb{R}^n$ son:

$$\begin{aligned} \omega_{ji} &= \sum_k \Gamma^i_{kj}\omega_k, \\ d\omega_i + \sum_j \omega_{ji}\wedge\omega_j &= 0, \\ d\omega_{ji} + \sum_k \omega_{ki}\wedge\omega_{kj} &= 0. \end{aligned}$$

Sea $M^2$ una superficie inmersa en $Q^n_c$, $M$ localmente encajada en $Q^n_c$, consideremos $F\left(Q^n_c, M^2\right)$ la subvariedad de *marcos* en $Q^n_c$ que consiste en los referenciales adaptados $\mathbb{X} = (X_k)$, $k = 1, ..., n$, de los cuales $(X_1, X_2)$, son tangentes a $M^2$ y $(X_\alpha)$, $\alpha = 3, ..., n$ son normales a $M$.

Haremos la convención de que *los índices* $k, l$; $i, j$ *y* $\alpha, \beta$ *varían en* $(1, ..., n)$, $(1, 2)$ *y* $(3, ..., n)$ *respectivamente.*

La matriz de conexión asociada a la conexión de Levi-Civita de $Q^n_c$ satisface:

$$\begin{aligned} d\omega_k + \sum_l \omega_{lk}\wedge\omega_l &= 0, \\ \omega_{kl} &= -\omega_{lk}. \end{aligned}$$

Si restringimos a $M^2$ las formas $\omega_k$ y $\omega_{kl}$, obtenemos una matriz de formas de conexión sobre $M^2$:

$$\begin{aligned} d\omega_i + \sum_l \omega_{li}\wedge\omega_l &= 0 \\ \omega_{ij} &= -\omega_{ji}, \end{aligned}$$

pues $\omega_\alpha = 0$ sobre $M$.

Para los campos vectoriales tangentes a $M^2$ se tiene $\omega_\alpha = 0$. Tomando derivada exterior de esta ecuación tenemos

$$0 = d\omega_\alpha = -\sum_k \omega_{\alpha k} \wedge \omega_k = \sum_i \omega_{i\alpha} \wedge \omega_i.$$

Del lema de Cartan se sigue que

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j,$$

para las funciones diferenciables $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$.

Como $\bar{\nabla}_X X_i = \sum_j \omega_{ij}(X) X_j$ se tiene

$$\bar{\nabla}_X X_\alpha = [\omega_{\alpha 1}(X) X_1 + \omega_{\alpha 2}(X) X_2] + \sum_\beta \omega_{\alpha\beta}(X) X_\beta,$$

de donde

$$\omega_{\alpha 1}(X) X_1 + \omega_{\alpha 2}(X) X_2 = -S_{X_\alpha} X,$$

y como

$$\begin{aligned} \omega_{1\alpha} &= h_{11}^\alpha \omega_1 + h_{12}^\alpha \omega_2, \\ \omega_{2\alpha} &= h_{21}^\alpha \omega_1 + h_{22}^\alpha \omega_2 \end{aligned}$$

tenemos que, los $h_{ij}^\alpha$ son los coeficientes de la segunda forma fundamental en la dirección de $X_\alpha$ puesto que

$$\begin{aligned} S_{X_\alpha} X_1 &= h_{11}^\alpha X_1 + h_{21}^\alpha X_2, \\ S_{X_\alpha} X_2 &= h_{22}^\alpha X_1 + h_{12}^\alpha X_2. \end{aligned}$$

Ecuación de Gauss en el marco móvil. De:

$$\widetilde{R}_{jrs}^i - R_{jrs}^i = \sum_\alpha \left( h_{is}^\alpha h_{jr}^\alpha - h_{ir}^\alpha h_{js}^\alpha \right),$$

tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_{212}^1 - R_{212}^1 &= \sum_\alpha \left( h_{12}^\alpha h_{21}^\alpha - h_{11}^\alpha h_{22}^\alpha \right), \\ K &= c + \sum_\alpha \left( h_{11}^\alpha h_{22}^\alpha - (h_{12}^\alpha)^2 \right), \end{aligned}$$

donde $K = R^1_{212}$ es la curvatura Gaussiana. Cuando $Q^n_c = \mathbb{R}^n$ la ecuación de Gauss es

$$K = \sum_\alpha \left(h^\alpha_{11}h^\alpha_{22} - (h^\alpha_{12})^2\right).$$

Observe que la forma de curvatura $d\omega_{12} + \sum_k \omega_{k2} \wedge \omega_{1k}$ puede escribirse en términos de $K$ pues

$$d\omega_{12} + \sum_k \omega_{k2} \wedge \omega_{1k} = d\omega_{12} + \sum_{\alpha=3}^n \omega_{\alpha 2} \wedge \omega_{1\alpha},$$

y como

$$\begin{aligned} \omega_{1\alpha} &= h^\alpha_{11}\omega_1 + h^\alpha_{12}\omega_2, \\ \omega_{2\alpha} &= h^\alpha_{21}\omega_1 + h^\alpha_{22}\omega_2, \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} & d\omega_{12} + \sum_\alpha \omega_{\alpha 2} \wedge \omega_{1\alpha} \\ = \;& d\omega_{12} - \sum_{\alpha=3}^n (h^\alpha_{21}\omega_1 + h^\alpha_{22}\omega_2) \wedge (h^\alpha_{11}\omega_1 + h^\alpha_{12}\omega_2) \\ = \;& d\omega_{12} - \sum_{\alpha=3}^n [(h^\alpha_{12})^2 - h^\alpha_{11}h^\alpha_{22}]\omega_1 \wedge \omega_2 \\ = \;& d\omega_{12} + \left(\sum_{\alpha=3}^n [h^\alpha_{11}h^\alpha_{22} - (h^\alpha_{12})^2]\right)\omega_1 \wedge \omega_2 \\ = \;& d\omega_{12} + K\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación de estructura correspondiente en el caso de superficies en $\mathbb{R}^n$ se reduce a

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$$

Para superficies en $\mathbb{R}^3$ el ecuación de Gauss se reduce a

$$K = h_{11}h_{22} - (h_{12})^2,$$

donde los $h_{ij}$ son los coeficientes de la segunda forma fundamental y que se denotan en la literatura clásica por:

$$h_{11} = e,\ h_{12} = h_{21} = f,\ h_{22} = g,$$

en esta notación la ecuación de Gauss toma su forma tradicional:

$$K = eg - f^2.$$

En esta tesis trabajaremos frecuentemente con superficies en $\mathbb{R}^4$, las ecuaciones son en este caso

$$K = h_{11}^3 h_{22}^3 - \left(h_{12}^3\right)^2 + h_{11}^4 h_{22}^4 - \left(h_{12}^4\right)^2,$$

denotando los coeficientes de la segunda forma fundamental en la dirección normal $X_i$, usamos la notación

$$h_{11}^\alpha = e_\alpha,\ h_{12}^\alpha = h_{21}^\alpha = f_\alpha,\ h_{22}^\alpha = g_\alpha,$$

la ecuación de Gauss para superficies en $\mathbb{R}^4$ suele ser escrita como:

$$K = e_1 g_1 - f_1^2 + e_2 g_2 - f_2^2.$$

**Ecuaciones de Codazzi en el marco móvil.** Recordemos que las ecuaciones de Codazzi se obtienen restringiendo los índices en la tercera ecuación de estructura, que de esta manera se reduce a

$$\begin{aligned} d\omega_{\alpha 1} + \sum_m \omega_{1m} \wedge \omega_{m\alpha} &= \widetilde{\Omega}_{\alpha 1}, \\ d\omega_{\alpha 2} + \sum_m \omega_{2m} \wedge \omega_{m\alpha} &= \widetilde{\Omega}_{\alpha 2}, \end{aligned}$$

y en el caso en que el espacio ambiente es $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} d\omega_{\alpha 1} + \sum_m \omega_{m1} \wedge \omega_{\alpha m} &= 0, \\ d\omega_{\alpha 2} + \sum_m \omega_{m2} \wedge \omega_{\alpha m} &= 0. \end{aligned}$$

Separando la parte tangente y la normal obtenemos.

$$\begin{aligned} d\omega_{1\alpha} &= \omega_{12}\wedge\omega_{2\alpha}+\sum_{k=3}^{n}\omega_{1k}\wedge\omega_{k\alpha}, \\ d\omega_{2\alpha} &= \omega_{21}\wedge\omega_{1\alpha}+\sum_{k=3}^{n}\omega_{2k}\wedge\omega_{k\alpha}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Codazzi de una superficie en $\mathbb{R}^4$ son

$$\begin{aligned} d\omega_{13} &= \omega_{12}\wedge\omega_{23}+\omega_{14}\wedge\omega_{43}, \\ d\omega_{23} &= \omega_{21}\wedge\omega_{13}+\omega_{24}\wedge\omega_{43}, \\ &\text{y,} \\ d\omega_{14} &= \omega_{12}\wedge\omega_{24}+\omega_{13}\wedge\omega_{34}, \\ d\omega_{24} &= \omega_{12}\wedge\omega_{24}+\omega_{23}\wedge\omega_{34}. \end{aligned}$$

Finalmente las ecuaciones de Codazzi de una superficie en $\mathbb{R}^3$ son

$$\begin{aligned} d\omega_{13} &= \omega_{12}\wedge\omega_{23}, \\ d\omega_{23} &= \omega_{21}\wedge\omega_{13}. \end{aligned}$$

**Ecuaciones de Ricci.**Poniendo ahora $k=\alpha$ y $l=\beta$, en la ecuación de estructura, es decir restringiendo la ecuación al haz normal, obtenemos

$$d\omega_{\alpha\beta}+\omega_{\beta 1}\wedge\omega_{1\alpha}+\omega_{\beta 2}\wedge\omega_{2\alpha}+\sum_{\gamma}\omega_{\beta\gamma}\wedge\omega_{\gamma\alpha}=\widetilde{\Omega}_{\alpha\beta},$$

como

$$d\omega_{\alpha\beta}+\sum_{\gamma}\omega_{\beta\gamma}\wedge\omega_{\gamma\alpha}=\Omega^{\perp}_{\alpha\beta},$$

donde $\Omega^{\perp}_{\alpha\beta}$ es la matriz de conexión del haz normal. De aquí, usando:

$$\begin{aligned} \omega_{1\alpha} &= h^{\alpha}_{11}\omega_1+h^{\alpha}_{12}\omega_2, \\ \omega_{2\alpha} &= h^{\alpha}_{21}\omega_1+h^{\alpha}_{22}\omega_2, \end{aligned}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}_{\alpha\beta}-\Omega^{\perp}_{\alpha\beta} &= \omega_{1\alpha}\wedge\omega_{1\beta}+\omega_{2\alpha}\wedge\omega_{2\beta} \\ &= \left(h^{\alpha}_{11}h^{\beta}_{12}-h^{\alpha}_{12}h^{\beta}_{11}+h^{\alpha}_{21}h^{\beta}_{22}-h^{\alpha}_{22}h^{\beta}_{21}\right)\omega_1\wedge\omega_2. \end{aligned}$$

En el caso en que el espacio ambiente es $Q_c^3$ se cumplen trivialmente pues $\widetilde{\Omega}_{33} = 0 = \Omega_{33}^{\perp}$ y el lado derecho de la ecuación anterior se reduce claramente a cero.

Si el espacio ambiente es $\mathbb{R}^4$ las ecuaciones de Ricci se reducen a

$$-d\omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\alpha\beta}^{\perp} = \omega_{1\alpha} \wedge \omega_{1\beta} + \omega_{2\alpha} \wedge \omega_{2\beta},$$

o bien

$$d\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha 1} \wedge \omega_{1\beta} + \omega_{\alpha 2} \wedge \omega_{2\beta},$$

$$d\omega_{34} = \left(-h_{11}^3 h_{12}^4 + h_{12}^3 h_{11}^4 - h_{21}^3 h_{22}^4 + h_{22}^3 h_{21}^4\right) \omega_1 \wedge \omega_2.$$

o

$$N = -h_{12}^3 h_{11}^4 + h_{11}^3 h_{12}^4 - h_{22}^3 h_{21}^4 + h_{21}^3 h_{22}^4,$$

donde $N$ es la curvatura normal. Denotando los coeficientes de la segunda forma fundamental en la dirección normal $X_i$, como

$$h_{11}^{\alpha} = e_{\alpha},\ h_{12}^{\alpha} = h_{21}^{\alpha} = f_{\alpha},\ h_{22}^{\alpha} = g_{\alpha},$$

tenemos

$$N = (e_3 - g_3)\, f_4 - (e_4 - g_4)\, f_3.$$

**Observación B.3.** *Salvo por la notación $N$ es exactamente la curvatura normal de una superficie presentada en la Sección 2.6, donde se denota por $K^{\perp}$. En el la Sección 2.6 se da una interpretación de $N$ en términos de la elipse de curvatura.*

# Bibliografía


[1] Bol, G. (1943/1944) *Über Nabelpunkte auf einer Eifläche.* Math Z. 49 389-410.

[2] Encyclopaedia of Mathematical Sciences, *Geometry III Theory of Surfaces.* Springer-Verlag.

[3] Bryant, R. *Complex analysis and a class of Weingarten surfaces.* Preprint.

[4] Bryant, R. (2001) *On surfaces with prescribed Shape Operator.* ArXiv:Math.DG 0107083 v3.

[5] Cartan, É. (1943) *Les surfaces que admettent une seconde forme fondamentale donné.* Bull. Sc. Math. 67, 8-32.

[6] Chen, B. Y., Yano, K. (1971) *Integral formulas for submanifolds and their applications.* J. Differential Geometry 5, 467-477.

[7] Chen, B. Y., Yano, K. (1973) *Umbilical submanifolds with respect to a nonparallel normal direction.* J. Differential Geometry 8, 589-597.

[8] Chen, B. Y., Yano, K. (1973) *Submanifolds umbilical with respect to a non-parallel normal subbundle.* Kodai. math. Sem. Rep. 25, 289-296.

[9] Chen, B. Y. (1973) *A characterization of standard flat tori.* Proc. Amer. Math. Soc. 37, 564-567.

[10] Chern, S.S. (1955) *On special W. surface.* Trans. A.M.S. 783-786.

[11] Chern, S.S. (1955) *An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface.* Proc. Am. Math. Soc. 6, 771-782.

[12] Courant, R., Hilbert, D. (1962) *Methods of Mathematical Physics.* Wiley Interscience.

[13] Dajczer, M.; Antonucci, M.; Oliveira, G. Lima-Filho, P.; Tojeiro, R. (1990): *Submanifolds and Isometric Inmersions.* Mathematics Lecture Series 13 Publish or Perish, Inc. Houston, Texas.

[14] Darboux, G. (1896) *Sur la forme des lignes de courbure dans la voisinage d'un umbilic,* Note 07, *Lecons sur la Théorie des Surfaces.* vol. IV (Gauthier Villars, Paris).

[15] Do Carmo, M. (1992) *Riemannian Geometry.* Birkhäuser .

[16] Do Carmo, M. (1976) *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, New Jersey.

[17] Gromov, M. (1986) *Partial Differential Relations.* Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg.

[18] R. Garcia, C., Sánchez-Bringas, F. (2002) *Closed Principal Lines of Surfaces in the Euclidean 4-Space.* Journal of Dynamical and Control Systems, vol. 8, 1, 153-16.

[19] Gutiérrez, J. M., Romero Fuster, C., Sánchez-Bringas, F. (2003) *Codazzi fields and Loewner's conjecture for surfaces in 4-space* (Publicación Preliminar, Facultad de Ciencias).

[20] Gutiérrez, J. M., Sánchez-Bringas, F. (2003) *$\nu$-Asymptotic lines of surfaces in 4-space* (Preliminares del Instituto de Matemáticas UNAM).

[21] Gutiérrez, J. M., Sánchez-Bringas, F. (2003) *Umbilicity and sphericity of Weingarten in* $\mathbb{R}^n$ (Publicación Preliminar, Facultad de Ciencias).

[22] Gutierrez, C., Sánchez-Bringas, F. (1998) *On a Loewner's Umbilic-Index-Conjecture for surfaces in* $\mathbb{R}^4$. Journal of Dynamical and Control Systems, vol. 4, 1, 127-136.

[23] Gutierrez C., Mercuri F, Sánchez-Bringas F. (1996) *On a Conjecture of Carathéodory: Analyticity Versus Smoothness.* Experiment. Math., Vol. 5, 1, 33-38.

[24] Gutierrez C., and Sotomayor J. (1991) *Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces.* IMPA.

[25] Gutierrez C., and Sotomayor J. (1986) *Lines of Curvature on surfaces immersed with constant mean curvature.* Trans. Amer. Math. Soc. 239 (2).

[26] Hartman P., Witner A. *Umbilical points and W-Surfaces.* American Journal of Mathematics vol 75 p.502.

[27] Hamburguer H. (1940), (1941) *Beweis einer Carathéodoryschen Vermütung.* Ann. of Math. 41, 63-68, II, III, Acta Math. 73, 174-332.

[28] Hopf H. (1983) *Lectures on Differential Geometry in the large.* Springer Lect. Notes in Math. 1000.

[29] Jacobowitz H. (1982) *The Gauss-Codazzi Equations.* Tensor, N. S. 39, 15-22.

[30] Klingenberg W. (1978) *A Course in Differential Geometry.* Springer Verlag, Graduate Texts 51.

[31] Klotz T. (1959) *On Bol's proof of Carathéodory's Conjecture.* Comm. Pure Appl. Math., 12, 277-311.

[32] Little J. (1969) *On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean space.* Annali Mat. Pura et Appl., (ser. 4a) 83, 261-336.

[33] Looijenga, E.J.N. (1974). *Structural stability of smooth families of $C^\infty$-functions.* Tesis Univ. Amsterdam.

[34] Mochida D.K.H., Romero Fuster M, C. and Ruas M.A.S (1995) *The Geometry of Surfaces in 4-Space from Contact Viewpoint.* Geometria Dedicata, 323-332.

[35] Mochida D.K.H., Romero Fuster M, C. and Ruas M.A.S (1998) *Some Global Properties of Surfaces in 4-Space.* Proceedings of the 1st International Meeting on Geometry and Topology, Braga 1997. Ed. by A. Pereira do vale, M. R. Pinto, A. C. Litografia, Braga, 175-183.

[36] Mochida D.K.H., Romero Fuster M, C. and Ruas M.A.S (1999) *Osculating hyperplanes and asymptotic directions of codimension 2 submanifolds of Euclidean spaces.* Geometriae Dedicata.

[37] Montaldi J.A. (1986) *On contact between submanifolds.* Michigan Math. J. 33, 195-199.

[38] Nash J. (1956) *The imbedding problem for Riemannian manifolds.* Ann. of Math. 63, 20-63.

[39] Nirenberg, L (1953) *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large.* Commun. Pure Appl. Math. 6, 337-394.

[40] Pogorelov, A. V. (1949) *Convex surfaces with a regular metric.* Am. Math. Soc. Transl., Ser. 6, 424-429.

[41] Porteous I. R (1994) *Geometric Differentiation for the intelligence of curves and surfaces.* Cambridge University Press.

[42] O'Neill B. (1966) *Elementary Differential Geometry.* Ac. Press New York.

[43] Ramírez-Galarza A., Sánchez-Bringas F. (1995) *Lines of Curvature near Umbilical Points on Surfaces Immersed in* $\mathbb{R}^4$. Annals of Global Analysis and Geometry 13, 129-140.

[44] Romero-Fuster M.C., Sánchez-Bringas F. (2002) *Umbilicity of surfaces with orthogonal asymptotic lines in* $\mathbb{R}^4$. Differential Geometry and its Applications 16, 213-224.

[45] Rodriguez, L., Tribuzy, R. (1984) *Reduction of Codimension of Regular Immersion.* Math. Z. 185, 321-331.

[46] Scherbel H. *A new proof of Hamburger's Index Theorem on umbilical points.* Dissertation ETH No. 10281.

[47] Sá Earp R., Toubiana E. (1995) *Sur les surfaces de Weingarten spéciels de type minimal.* Bol. Soc. Bras. Mat. vol. 26 N. 2, 129-148.

[48] Sotomayor J., *Lines of curvature and an integral form of Minardi-Codazzi Equations.* Preprint.

[49] Sotomayor J., (1987) *Closed lines of curvature for Weingarten immersions.* Ann. Global Analysis and Geometry, 5 (1), 83-86.

[50] Sotomayor J., Gutierrez C. (1982) *Structurally Stable Configurations of Lines of Principal Curvature.* Astérisque.98-99, 195-215.

[51] Sotomayor J., Gutierrez C. (1985) *Configurations of Lines of Principal Curvatures and their Bifurcations.* SMM/Aportaciones Matemáticas, Notas de Investigación No. 1, 155-126.

[52] Spivak M. (1979) *A comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Publish or Perish, Inc..

[53] Struik D. (1950) *Lectures on Classical Differential Geometry.* Addison Wesley, reprinted by Dover, New York.

[54] Titus, C. (1973) *A proof of a conjecture of Loewner and of the conjecture of Carathéodory on umbilic points.* Acta Math. 131, 43-77.

[55] Willmore T. J. (1993) *Riemannian Geometry.* Oxford Science Publications.

[56] Wong W.C. (1952) *A new curvature theory for surfaces in euclidean 4-space.* Comm. Helv. 26 152-170.