00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS ERGÓDICO DE TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

T E S I S :

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

MONTSERRAT GARCÍA CAMPOS

DIRECTOR DE TESIS: DR. JAVIER PÁEZ CÁRDENAS

MÉXICO, D.F. 2004.

Contenido

Introducción

Este trabajo trata de transformaciones que están definidas en un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ en si mismo, y cuyas características fundamentales es que son suaves por pedazos y que expanden su dominio. En el trabajo se da una definición precisa de este tipo de transformaciones.

El objetivo de esta tesis es hacer un análisis de estas transformaciones desde un punto de vista ergódico. El desarrollo de este análisis está basado en el trabajo de tesis doctoral de G. Keller, el que tiene el mérito de generalizar el trabajo que hicieron Laosta y Yorke para el caso unidimensional.

Cabe mencionar que en este enfoque ergódico, a diferencia de lo que podríamos llamar el enfoque dinámico clásico, en el que se estudian los conjuntos que se obtienen de iterar la transformación en un solo punto, se elige un conjunto de puntos y se analiza el comportamiento de éste bajo iteraciones de la transformación.

A la selección de un conjunto de puntos de un conjunto Ω, se le puede caracterizar por medio de una densidad definida sobre el mismo conjunto Ω. Al aplicarle a este conjunto de puntos una transformación, obtenemos otro conjunto de puntos, que también pueden identificarse con otra densidad.De esta forma una transformación induce una asociación entre densidades, la cual nos conduce al operador de Frobenius-Perron.

Históricamente el concepto de densidad surgió recientemente para intentar dar una descripción unificada de los fenómenos que parecen ser estadísticos en la naturaleza, por ejemplo en la teoría del gas diluído, en mecánica cuántica, y en el campo de la demografía.

De estos y muchos otros ejemplos, así como del desarrollo de la probabilidad y estadística, podemos asociar la apariencia de las densidades con la descripción de sistemas con algunos elementos de incertidumbre. Este desarrollo se hizo en la mitad del siglo pasado gracias al estudio de Borel, Rényi, Ulman y von Neumann, sin embargo estos conocimientos no son conocidos de manera general fuera de este grupo pionero en el estudio y desarrollo de la teoría ergódica.

Los últimos años han sido testigos del crecimiento en el interés de estudiar a los sistemas físicos, biológicos y económicos usando densidades y el enfoque ergódico. Algunos de los que han trabajado en este estudio son A. Lasota y M. C. Mackey los cuales han desarrollado de una manera muy sencilla la herramienta necesaria para estudiar transformaciones unidimensonales.

Si bien es cierto que este trabajo está basado principalmente en la tesis doctoral de G. Keller, la teoría básica acerca del operador Frobenius-Perron y sus propiedades, la tomamos del libro de Lasota y Mackey. En el cual se hace un desarrollo muy general y cuidadoso de la teoría ergódica.

En particular usamos un teorema muy importante acerca de la descomposición espectral de un operador que permite clasificar el comportamiento de éste. Esta herramienta deifiere de la desarrollada por Keller, la cual se basa en el teorma de Ionescu-Marinescu que trata de la convergencia en norma de ciertas sucesiones de operadores.

A fin de aplicar el teorema de descomposición espectral al operador de Frobenius-Perron asociado a una transformación dilatante, es necesario desarrollar el concepto de variación de una función en varias variables. Este concepto lo define Keller en su tesis y menciona algunas de sus propiedades. En este trabajo incorporamos estos resultados y los adecuamos para el caso que nos interesa.

En el capítulo 1, se dan los conceptos y definiciones generales para poder desarrollar la teoría del capítulo 2, así como algunos ejemplos en donde se calcula específicamente la forma que tiene el operador para ciertas transformaciones conocidas.

En el capítulo 2, definimos la variación de las funciones de dos variables así como algunas de sus propiedades. Definimos también lo que significa que una transformación sea α-dilatante y como es la expresión del operador Frobenius-Perron para estas transformaciones.

Finalmente enunciamos los teoremas que nos permiten hacer la tan esperada clasificación del comportamiento ergódico tanto del operador como de la transformación asociadada a él.

Capítulo 1

Preliminares

Empezaremos mostrando cómo las densidades pueden surgir de la operación de un sistema de tiempo discreto unidimensional, y cómo el estudio de dichos sistemas puede facilitarse mediante el uso de las densidades.

Si dado un sistema que opera en una densidad como condición inicial, mejor que en un sólo punto, las densidades sucesivas estarán dadas por un operador lineal integral, conocido como el operador Frobenius-Perron. Dicho operador es útil para el estudio de la evolución de las densidades bajo la operación de sistemas determinísticos.

Primero desarrollaremos de una manera general el concepto de operador de Markov y describiremos algunas de sus propiedades. La teoría de los operadores de Markov es extremadamente rica y variada, hemos escogido un acercamiento particular examinando el eventual comportamiento de las densidades en un sistema dinámico.

1.1 El operador Frobenius-Perron

Definición 1.1. Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X y si μ es una medida en $\mathcal{A}$, entonces la tercia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es llamada un *espacio de medida*. Los conjuntos pertenecientes a $\mathcal{A}$ son llamados *conjuntos medibles* porque, sobre ellos, está definida la medida.

Definición 1.2. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Cualquier operador $P\colon L^1 \to L^1$ que satisface:

i) $Pf \geq 0$, $f \geq 0$

ii) $\|Pf\| = \|f\|$

es llamado un *operador de Markov*.

Definición 1.3. Si P es un operador de Markov y, para alguna $f \in L^1$, $Pf = f$, entonces decimos que f es un *punto fijo* de P.

Observación. Si $Pf = f$ entonces $Pf^+ = f^+$ y $Pf^- = f^-$, donde $f^+(x) = \max(0, f(x))$ y $f^-(x) = \max(0, -f(x))$.

Definición 1.4. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida cualquiera y consideremos el conjunto $D(X, \mathcal{A}, \mu)$ definido de la siguiente forma: $D(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu) : f \geq 0 \quad \text{y} \quad \|f\| = 1\}$. Cualquier función $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ es llamada una *densidad*.

Definición 1.5. Una medida normalizada ν es *absolutamente continua* respecto de μ si $\nu(A) = 0$ siempre que $\mu(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$.

Definición 1.6. Si $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $f \geq 0$, entonces decimos que la medida

$$\mu_f(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x)$$

es *absolutamente continua* con respecto de μ, y f se llama *la derivada de Radon-Nikodym* de μ_f respecto de μ. En el caso en que $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$, entonces diremos también que f es una densidad de μ_f y que μ_f es una medida normalizada.

Definición 1.7. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y P un operador de Markov, cualquier $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ que satisface $Pf = f$ es llamada *densidad estacionaria* de P.

Un caso muy importante en la clase de los operadores de Markov es el llamado operador Perron-Frobenius.

Definición 1.8. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una transformación $S \colon X \to X$ es *medible* si

$$S^{-1}(A) \in \mathcal{A} \quad \text{para toda} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Definición 1.9. Una transformación medible $S \colon X \to X$ en un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es *no singular* si $\mu(S^{-1}(A)) = 0$ para toda $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$.

Al aplicar una transformación no singular a un conjunto con medida distinta de cero, éste va a dar a otro conjunto también con medida distinta de cero.

Consideremos una transformación no singular $S \colon X \to X$ en un espacio de medida dado. Definimos un operador $P \colon L^1 \to L^1$ en dos pasos:

1. Sea $f \in L^1$ y $f \geq 0$. Escribimos

$$\mu_f(A) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\, d\mu(x) \tag{1.1}$$

Puesto que

$$S^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i S^{-1}(A_i),$$

se sigue de las propiedades de la integral de Lebesgue que (1.1) define una medida finita sobre $\mathcal{A}$, que es absolutamente continua respecto de μ. Entonces, por el teorema de Radon-Nikodym existe un único elemento en L^1, que denotamos por Pf, tal que

$$\int_A Pf(x)\, d\mu(x) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\, d\mu(x) \text{ para toda } A \in \mathcal{A}.$$

2. Sea $f \in L^1$ arbitraria, escribimos $f = f^+ - f^-$ y definimos

$$Pf = Pf^+ - Pf^-.$$

Por esta definición tenemos que

$$\int_A Pf(x)\, d\mu(x) = \int_{S^{-1}(A)} \left(f^+(x) - f^-(x)\right)\, d\mu(x).$$

Más precisamente,

$$\int_A Pf(x)\, d\mu(x) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\, d\mu(x) \text{ para toda } A \in \mathcal{A}. \tag{1.2}$$

Cabe mencionar algo muy importante, que la ecuación (1.2) determina de manera única al operador P, lo cual diremos a continuación en la siguiente definición.

Definición 1.10. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si $S\colon X \to X$ es una transformación no singular, el único operador $P : L^1 \to L^1$ definido por la ecuación

$$\int_A Pf(x)\, d\mu(x) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\, d\mu(x) \text{ para toda } A \in \mathcal{A},$$

es llamado *el operador Frobenius-Perron* correspondiente a S

Proposición 1.1. *El operador P cumple las siguientes propiedades:*

i) $P(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 P f_1 + \lambda_2 P f_2$ *para toda* $f_1, f_2 \in L^1$; $\lambda_1, \lambda_2 \in R$.

ii) $Pf \geq 0$ *si* $f \geq 0$.

iii) $\displaystyle\int_X Pf(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$

iv) *Si* $S_n = S \overbrace{\circ \cdots \circ}^{n} S$ *y* P_n *es el operador Frobenius-Perron correspondiente a* S_n*, entonces* $P_n = P^n$ *donde* P *es el operador Frobenius-Perron correspondiente a* S.

Por estas propiedades puede verse que el operador Frobenius-Perron describe la evolución de f por la transformación S. Además la propiedad (iv) nos dice que estudiar el comportamiento de los iterados de la transformación, es igual a estudiar el comportamiento de los iterados del operador.

El operador Frobenius-Perron es en particular un operador de Markov, por lo que cualquier propiedad del operador de Markov es aplicable al operador Frobenius-Perron.

En algunos casos especiales la ecuación (1.2) nos permite obtener una forma explícita de Pf. Si $X = [a, b]$ es un intervalo en la recta real, y $A = [a, x]$, entonces (1.2) se vuelve

$$\int_a^x Pf(s)\, ds = \int_{S^{-1}([a,x])} f(s)\, ds.$$

Derivando

$$Pf(x) = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}([a,x])} f(s)\, ds, \text{ c.d. relativo a } \lambda \tag{1.3}$$

Es importante notar que en el caso en que la transformación S es diferenciable e invertible, es posible determinar la expresión explícita de Pf. Si S es diferenciable e invertible, entonces debe ser monótona. Supongamos que S es una función creciente, y S^{-1} tiene derivada continua. Entonces,

$$S^{-1}([a, x]) = [S^{-1}(a), S^{-1}(x)],$$

y de la ecuación (1.3)

$$Pf(x) = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}(a)}^{S^{-1}(x)} f(s)\, ds = f(S^{-1}(x)) \frac{d}{dx}[S^{-1}(x)].$$

Si S es decreciente, el signo del lado derecho de la ecuación cambia. Entonces, en el caso general unidimensional, para S diferenciable e invertible con dS^{-1}/dx continua,

$$Pf(x) = f(S^{-1}(x)) \left| \frac{d}{dx}[S^{-1}(x)] \right|. \tag{1.4}$$

Proposición 1.2. *Sea $S\colon X \to X$ una transformación no singular y P el operador Frobenius-Perron asociado. Si $f \geq 0$ y $f \in L^1$, entonces*

$$\operatorname{sop} f \subset S^{-1}(\operatorname{sop} Pf) \tag{1.5}$$

Más general, para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$ se cumple la siguiente equivalencia: $Pf(x) = 0$ para $x \in A$ si y sólo si $f(x) = 0$ para $x \in S^{-1}(A)$.

Observación. Si $f \in L^1$ es arbitraria, entonces, en la proposición anterior sólo tenemos: Si $f(x) = 0$ para toda $x \in S^{-1}(A)$, entonces $Pf(x) = 0$ para toda $x \in A$. Pero la implicación recíproca no es cierta.

Definición 1.11. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $S\colon X \to X$ una transformación no singular, y $f \in L^\infty$. El operador $U\colon L^\infty \to L^\infty$ definido por

$$Uf(x) = f(S(x)),$$

se llama el *operador Koopman* de S.

Proposición 1.3. *El operador U cumple las siguientes propiedades:*

i) $U(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 U f_1 + \lambda_2 U f_2$ *para toda* $f_1, f_2 \in L^\infty, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$.

ii) Para toda $f \in L^\infty$, $\|Uf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.

iii) Para toda $f \in L^1$, $g \in L^\infty$, $\langle Pf, g\rangle = \langle f, Ug\rangle$,

donde $\langle f, g\rangle = \int_X f(x)g(x)\, d\mu(x)$.

Nota. Esta última propiedad muestra que U es el operador adjunto de P.

Los siguientes son ejemplos en donde se calcula de manera explícita al operador Frobenius-Perron.

Ejemplo 1.1. Sea $S\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por: $S(x) = 4x(1-x)$.
La preimagen del intervalo $[0, x]$ es

$$S^{-1}([0,x]) = [0, 1/2 - (1/2)\sqrt{1-x}] \bigcup [1/2 + (1/2)\sqrt{1-x}, 1].$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
Pf(x) &= \frac{d}{dx}\int_0^{1/2-1/2\sqrt{1-x}} f(u)\,du + \frac{d}{dx}\int_{1/2+1/2\sqrt{1-x}}^{1} f(u)\,du \\
&= \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left[f(1/2-1/2\sqrt{1-x}) + f(1/2+1/2\sqrt{1-x})\right] \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

La ecuación (1.6) es una forma explícita del operador Frobenius-Perron para una transformación cuadrática. Para ver cómo funciona esta ecuación, tomemos una densidad inicial $f(x) \equiv 1$ para $x \in [0,1]$. Entonces,

$$Pf(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

Si iteramos el operador P obtenemos:

$$
\begin{aligned}
P^2f(x) &= P(Pf(x)) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left[\frac{1}{2\sqrt{1-1/2+1/2\sqrt{1-x}}} + \frac{1}{2\sqrt{1-1/2-1/2\sqrt{1-x}}}\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{1-x}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}\right]
\end{aligned}
$$

Puede probarse que si f_* es el límite de $P^n(x)$ cuando $n \to \infty$, entonces $Pf_* = f_*$, donde esta densidad límite está dada por:

$$f_*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

Ejemplo 1.2. Sea $S : [0,1] \to [0,1]$ dada por: $S(x) = rx \mod 1$ con r entero.

La preimagen de un intervalo $[0,x] \subset [0,1]$ bajo S es:

$$S^{-1}([0,x]) = \bigcup_{i=0}^{r-1}\left[\frac{i}{r}, \frac{i}{r} + \frac{x}{r}\right]$$

Entonces el operador Frobenius-Perron está dado por:

$$Pf(x) = \frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{r-1}\int_{i/r}^{i/r+x/r} f(u)\,du = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} f\left(\frac{i}{r}+\frac{x}{r}\right) \text{ c.d. relativo a } \lambda.$$

1.2 TRANSFORMACIONES PRESERVADORAS DE MEDIDA

En esta sección introducimos el concepto de transformaciones preservadoras de medida, después definiremos tres niveles de comportamientos irregulares que dichas transformaciones pueden presentar. Estos comportamientos son ergodicidad, mezcla y exactitud. Nos enfocaremos en mostrar cómo los operadores Frobenius-Perron y Koopman se utilizan en el estudio de dichos comportamientos.

Todas estas nociones básicas surgen de la teoría ergódica. Hablando rigurosamente, la preservación de una medida inicial μ por una transformación, corresponde al hecho de que la densidad estacionaria $f(x) = 1$ es una densidad estacionaria del operador Frobenius-Perron, es decir, $P1 = 1$.

La ergodicidad, corresponde al hecho de que $f(x) \equiv 1$ es la única densidad estacionaria del operador Frobenius-Perron. Finalmente mezcla y exactitud corresponden a dos distintos tipos de estabilidad de la densidad estacionaria $f(x) \equiv 1$.

Definición 1.12. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $S\colon X \to X$ una transformación medible. Se dice que S es *preservadora de medida* si $\mu(S^{-1}(A)) = \mu(A)$ para toda $A \in \mathcal{A}$. De manera equivalente se dice que μ es *invariante* bajo S.

Teorema 1.1. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $S\colon X \to X$ una transformación no singular, y P el operador Frobenius-Perron asociado a S. Consideremos $f \in L^1$ no negativa. Entonces la medida μ_f dada por*

$$\mu_f(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x)$$

es invariante si y sólo si f es un punto fijo de P.

Observación. La medida μ es invariante bajo S si y sólo si $P1 = 1$.

Ejemplo 1.3. Consideremos el espacio de medida $([0,1], \mathcal{B}, \mu)$ donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel y μ es la medida de Borel. Sea $S(X) = rx \mod 1$ cuando $r > 1$. En el ejemplo 2 de la sección anterior vimos que:

$$S^{-1}([0,x]) = \bigcup_{i=0}^{r-1} \left[\frac{i}{r}, \frac{i}{r} + \frac{x}{r}\right]$$

y que:

$$Pf(x) = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} f\left(\frac{i}{r} + \frac{x}{r}\right).$$

Entonces $P1 = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} 1 = 1$

Por lo tanto, la medida de Borel μ es invariante bajo la transformación.

Ejemplo 1.4. Las mismas condiciones que en el ejemplo anterior, pero para la transformación $S(x) = 4x(1-x)$.

Sabemos que

$$S^{-1}([0,x]) = [0, 1/2 - (1/2)\sqrt{1-x}]\bigcup[1/2 + (1/2)\sqrt{1-x}, 1]$$

y que

$$Pf = \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left[f(1/2 - (1/2)\sqrt{1-x}) + f(1/2 + (1/2)\sqrt{1-x})\right].$$

Claramente $P1 = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$, por lo que la medida de Borel no es invariante bajo S.

El problema en general es encontrar una medida que satisfaga $Pf = f$. Este problema lo resolvió Von Neumann (1947), cuando S es la transformación anterior, y mostró que si

$$f_*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}},$$

entonces la medida

$$\mu_{f_*}(A) = \int_A \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

es invariante bajo la transformación $S(x) = 4x(1-x)$.

Ejemplo 1.5. (La transformación del panadero)

Sea $X\colon [0,1]\times[0,1]$ el cuadrado unitario en el plano. La σ-álgebra de Borel está generada por todos los rectángulos de la forma $[0,a]\times[0,b]$ y la medida de Borel μ es la única medida en $\mathcal{B}$ tal que: $\mu([0,a]\times[0,b]) = ab$.

Definimos la transformación $S\colon X \to X$ por:

$$S(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & 0 \le x < 1/2,\ 0 \le y \le 1 \\ (2x-1, \frac{1}{2}y + 1/2) & 1/2 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Calculemos el operador Frobenius-Perron de ésta transformación. Analicemos los siguientes casos:

Caso 1: $0 \le y < 1/2$ y $0 \le x \le 1$.

En este caso tenemos que

$$S^{-1}([0,x]\times[0,y]) = [0, x/2]\times[0, 2y].$$

Luego,

$$Pf(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^{x/2} ds \int_0^{2y} f(s,t)\, dt = f((1/2)x, 2y), \quad 0 \le y < 1/2 \text{ y } 0 \le x \le 1.$$

Caso 2: $1/2 \le y \le 1$, $0 \le x \le 1$.
En este caso tenemos que

$$S^{-1}([0,x] \times [0,y]) = ([1/2, 1/2 + x/2] \times [0, 2y-1]).$$

Luego,

$$Pf(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\int_{1/2}^{1/2+x/2} ds \int_0^{2y-1} f(s,t)\, dt \right].$$

Por lo tanto,

$$Pf(x,y) = \begin{cases} f(x/2, 2y) & 0 \le y < 1/2 \\ f(1/2 + x/2, 2y-1) & 1/2 \le y \le 1 \end{cases}$$

Con lo que $P1 = 1$ y por lo tanto la medida de Borel es invariante bajo la transformación del panadero.

Ejemplo 1.6. (El difeomorfismo de Anosov)
Sea $S\colon \mathbf{T^2} = \mathbf{R^2}/\mathbf{Z^2} \to \mathbf{T^2}$ dada por $S(x,y) = (x+y, x+2y) \mod \mathbf{Z^2}$
El determinante jacobiano de la transformación está dado por:

$$J = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Los valores propios asociados a S son $\lambda_1 = 3/2 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = 3/2 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ con $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$. Este difeomorfismo de Anosov es invertible en $\mathbf{T^2}$ y

$$S^{-1}(x,y) = (2x - y, y - x) \mod \mathbf{Z^2}.$$

Luego,

$$Pf(x,y) = f(2x-y, y-x)$$

Es claro que $P1 = 1$, y por lo tanto, S preserva la medida de Borel.

1.3 Ergodicidad, mezclas y exactitud

El que una transformación S tenga una medida invariante, o el que el operador Frobenius-Perron asociado a S tenga una densidad estacionaria, no implica que S tenga propiedades estadísticas interesantes. Por ejemplo, si S es la identidad en X, esto es, $S(x) = x$ para toda $x \in X$, entonces

$$S^{-1}(A) = A \tag{1.7}$$

para toda $A \subset X$, y en consecuencia, $Pf = f$ para toda $f \in L^1$. Ésta por supuesto no es una transformación interesante. Sin embargo, si la ecuación anterior se cumple para un subconjunto A de X, entonces la transformación S puede estudiarse por medio de sus restricciones $T_{|X}$ y $T_{|X \setminus A}$.

La igualdad (1.7) implica que S manda a A en sí mismo, y que ningún elemento de $X \setminus A$ es mandado en A. Un conjunto que cumple esta igualdad se llama *invariante*; este concepto nos sirve para dar la siguiente definición.

Definición 1.13. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $S\colon X \to X$ una transformación medible dada. Se dice que S es *ergódica* si cada conjunto invariante $A \in \mathcal{A}$ cumple que $\mu(A) = 0$ ó $\mu(X \setminus A) = 0$.

Teorema 1.2. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $S\colon X \to X$ una transformación no singular. S es ergódica si y sólo si, para toda función medible $f\colon X \to \mathbf{R}$,*

$$f(S(x)) = f(x) \text{ para casi toda } x \in X,$$

implica que f es constante casi en todas partes.

Corolario 1.1. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $S\colon X \to X$ una transformación no singular, y U el operador Koopman respecto de S. Entonces, S es ergódica si y sólo si todos los puntos fijos de U son funciones constantes.*

Teorema 1.3. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $S\colon X \to X$ una transformación no singular, y P el operador Frobenius-Perron asociado a S. Si S es ergódica, entonces hay a lo más una densidad estacionaria f_* de P. Es más, si hay una única densidad estacionaria f_* de P y $f_*(x) > 0$ casi en todas partes, entonces S es ergódica.*

Definición 1.14. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $S\colon X \to X$ una transformación preservadora de medida. Se dice que S es *mezclante* si

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B) \quad \text{para todo} \quad A, B \in \mathcal{A}.$$

Esta condición tiene una interpretación simple. Consideremos los puntos x que pertenecen al conjunto $A \cap S^{-n}(B)$. Estos son los puntos tales que $x \in A$ y $S^n(x) \in B$. Entonces, por la definición, conforme $n \to \infty$ la medida del conjunto de puntos es exactamente $\mu(A)\mu(B)$. Ésto puede interpretarse como que los puntos que empiezan en A y que después de n iteraciones terminan en B, está dado exactamente por el producto de las medidas de A y B, y es independiente de la posición de A y B en X.

Es fácil ver que cualquier transformación mezclante es ergódica. Supongamos que $B \in \mathcal{A}$ es un conjunto invariante, así que $B = S^{-1}(B)$ y, por inducción, $B = S^{-n}(B)$. Tomamos $A = X \setminus B$, por la definición de transformación mezclante tenemos que,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B) = (1 - \mu(B))\mu(B),$$

y entonces, $\mu(B)$ o bien vale 0 ó 1, lo que prueba la ergodicidad.

Muchas de las transformaciones que consideramos en los ejemplos anteriores son mezclantes, por ejemplo las transformaciones del panadero, la cuadrática, difeomorfismo de Anosov y r-ádica.

Definición 1.15. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $S\colon X \to X$ una transformación preservadora de medida tal que $S(A) \in \mathcal{A}$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \mu(S^n(A)) = 1 \quad \text{para toda} \quad A \in \mathcal{A},\ \mu(A) > 0$$

entonces decimos que S es *exacta.*

Puede probarse, a partir de la definición, aunque no es fácil que la exactitud de S implica que S es mezclante.

La condición de exactitud tiene la siguiente interpretación: Si empezamos con un conjunto A de condiciones iniciales, de medida distinta de cero, entonces después de un número grande de iteraciones de la transformación exacta S, los puntos llenarán por completo el espacio X.

Observación. Las transformaciones invertibles no pueden ser exactas. De hecho, si S es una transformación preservadora de medida invertible, tenemos que $\mu(S(A)) = \mu(S^{-1}(S(A))) = \mu(A)$ y por inducción $\mu(S^n(A)) = \mu(A)$. Lo cual contradice la definición.

Los conceptos desarrollados en las secciones previas para clasificar diferentes grados de irregularidad (ergodicidad, mezcla y exactitud) fueron establecidos en términos del comportamiento de sucesiones de conjuntos. Probar que un operador posee una de estas condiciones, usando las definiciones, es sumamente difícil; es por eso que reformularemos los conceptos de ergodicidad, mezcla y exactitud en términos del comportamiento de sucesiones de iterados de los operadores Frobenius-Perron y Koopman, y mostraremos cómo éstos pueden usarse para determinar cúando una transformación S con medida invariante es ergódica, mezclante o exacta.

Teorema 1.4. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida normalizado, $S\colon X \to X$ una transformación preservadora de medida no singular y P el operador Frobenius-Perron correspondiente a S. Entonces,*

a) S es ergódica si y sólo si la sucesión $\{P^n f\}$ es débil Cèsaro-convergente a 1 en L^1, para toda $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$.

b) S es mezclante si y sólo si $\{P^n f\}$ es débilmente convergente a 1 en L^1, para toda $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$.

c) S es exacta si y sólo si $\{P^n f\}$ es fuertemente convergente a 1 en L^1, para toda $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Como P es lineal, la convergencia de $\{P^n f\}$ a 1 para $f \in D$, es equivalente a la convergencia de $\{P^n f\}$ a $\langle f, 1\rangle$ para toda $f \in L^1$. Esta observación es válida para todo tipo de convergencia, ya sea Cèsaro, débil o fuerte. Así es que podemos reescribir el teorema en la forma equivalente.

Corolario 1.2. *Bajo las mismas hipótesis que el teorema anterior, las siguientes equivalencias se cumplen:*

a) S es ergódica si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle P^k f, g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle \quad \textit{para } f \in L^1,\ g \in L^\infty.$$

b) S es mezclante si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \langle P^n f, g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle \quad \textit{para } f \in L^1, g \in L^\infty.$$

c) S es exacta si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n f - \langle f, 1\rangle\| = 0 \quad \textit{para } f \in L^1.$$

Como el operador Koopman y el Frobenius-Perron son adjuntos entre si, entonces es posible reescribir las condiciones (a) y (b) del corolario en términos del operador Koopman. La ventaja de reformular estas condiciones, es el hecho de que el operador Koopman es mucho más fácil de calcular que el operador Frobenius-Perron. Desafortunadamente, la condición (c) del corolario no se puede reformular pues ésta no está expresada en términos del producto escalar.

Entonces, del corolario anterior, la siguiente proposición puede establecerse fácilmente.

Proposición 1.4. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida normalizado, $S\colon X \to X$ una transformación preservadora de medida no singular y U el operador Koopman. Entonces,*

a) S es ergódica si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\langle f, U^k g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle \quad \textit{para toda } f \in L^1,\ g \in L^\infty.$$

b) S es mezclante si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty}\langle f, U^n g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle \quad \textit{para toda } f \in L^1,\ g \in L^\infty.$$

Nota. Establecimos el teorema 1.4 y el corolario 1.2 en términos de los espacios L^1 y L^∞ para subrayar el papel del operador Frobenius-Perron como una transformación de densidades. El mismo resultado puede probarse usando espacios adjuntos L^p y $L^{p'}$; en este caso L^1 y L^∞ respectivamente. Por otra parte, cuando verificamos las condiciones de la (a) a la (c) del teorema 1.4 y del corolario 1.2, o las condiciones (a) y (b) de la proposición 1.4, no es necesario hacerlo para $f \in L^p$ y $g \in L^{p'}$. Debido a las propiedades de los operadores P y U, que son contracciones lineales, es suficiente checar éstas condiciones para f y g en subespacios densos lineales de L^p y $L^{p'}$, respectivamente.

Ejemplo 1.7. (Rotaciones en $\mathbf{S}^1$)

Sea $S\colon \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ dada por: $S(e^{ix}) = e^{i(x+\phi)}$.

Caso 1: ϕ conmensurable con 2π.

En este caso S no es ergódica.

Caso 2: ϕ no es conmensurable con 2π.

Para probar que es ergódica usaremos la proposición anterior.

Consideremos al conjunto $\{e^{ikx} : k \in \mathbf{Z}\}$ que es linealmente denso en $L^p(\mathbf{S}^1)$, $1 \le p < \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k g(x) = \langle 1, g\rangle \tag{1.8}$$

Sabemos que

$$\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \qquad \cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}.$$

Es suficiente probar que la ecuación (1.8) la cumple $g(e^{ix}) = \exp(ikx)$ con k arbitraria. Si $k \neq 0$, entonces

$$U^l g(e^{ix}) = g(S^l(e^{ix})) = e^{ik(x+l\phi)}.$$

Luego,

$$U_n(e^{ix}) = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} U^l g(e^{ix}) = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} e^{ik(x+l\phi)} = \frac{1}{n} e^{ikx} \frac{e^{ink\phi} - 1}{e^{ik\phi} - 1}$$

y

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{L^2} &\leq \frac{1}{n|e^{ik\phi} - 1|} \left[\int_0^{2\pi} |e^{ikx}[e^{inkx\phi} - 1]|^2 \frac{dx}{2\pi}\right]^{1/2} \\ &\leq \frac{2}{n|e^{ik\phi} - 1|}. \end{aligned}$$

Entonces, U_n converge a cero en L^2. También,

$$\langle 1, g\rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikx} \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{ik}[e^{2\pi ik} - 1] = 0.$$

Cuando $k = 0$, como $g(x) \equiv 1$ entonces $U_n(x) \equiv 1$ y también

$$\langle 1, g\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \equiv 1.$$

Por lo tanto, U_n converge débilmente a $\langle 1, g\rangle$ en L^2 y S es ergódica.

Ejemplo 1.8. $S(x) = rx \mod 1$, $r \in \mathbf{N}$. Probaremos que S es exacta.

Por el corolario 1.2 es suficiente demostrar que $\{P^n f\}$ converge fuertemente en L^1 a $\langle f, 1\rangle$ para f en un conjunto linealmente denso en $L^p([0,1])$. $C([0,1])$ es linealmente denso en $L^p([0,1])$. Si $f \in C([0,1])$, entonces

$$Pf(x) = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} f\left(\frac{i}{r} + \frac{x}{r}\right).$$

Aplicando 2 veces P, obtenemos,

$$\begin{aligned}
P^2f(x) &= \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1}(Pf)\left(\frac{i}{x}+\frac{x}{r}\right)\\
&= \frac{1}{r^2}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}f\left(\frac{j}{r}+\frac{i}{r^2}+\frac{x}{r^2}\right)\\
&= \frac{1}{r^2}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{r-1}f\left(\frac{j\cdot r+i}{r^2}+\frac{x}{r^2}\right)
\end{aligned}$$

Si hacemos $k=j\cdot r+i$, la expresión anterior queda de la forma

$$P^2f(x)=\frac{1}{r^2}\sum_{k=0}^{r^{2-1}}f\left(\frac{k}{r^2}+\frac{x}{r^2}\right).$$

Donde $1/r^2$ es la longitud del subintervalo inducido por la partición homogenea $1/r$. Por inducción se prueba que la expresión para n es,

$$P^nf(x)=\frac{1}{r^n}\sum_{i=0}^{r^{n-1}}f\left(\frac{i}{r^n}+\frac{x}{r^n}\right).$$

Cuando $n\to\infty$, el lado derecho de la ecuación se aproxima a la integral de Riemann de f sobre $[0,1]$. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty}P^nf(x)=\int_0^1 f(s)\,ds$$

que es, por definición, $\langle f,1\rangle$. Por lo tanto, S es exacta.

Ejemplo 1.9. (El difeomorfismo de Anosov).

Probaremos que $S(x)=(x+y,x+2y)$ mod 1 en cada entrada, es mezclante.

Es suficiente mostrar que $U^ng(x,y)=g(S^n(x,y))$ converge débilmente a $\langle 1,g\rangle$ para g en un conjunto linealmente denso en $L^p([0,1]\times[0,1])$. Observemos que si $g(x,y)$ es periódica en x y y de periodo 1, entonces $g(S(x,y))=g(x+y,x+2y), g(S^2(x,y))=g(2x+3y,3x+5y)$ y así sucesivamente.

Por inducción encontraremos que $U^ng(x,y)=g(a_{2n-2}x+a_{2n-1}y,a_{2n-1}x+a_{2n}y)$, donde a_n son los números de la sucesión de Fibonacci dados por $a_0=a_1=1,a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$. Sean

$$g(x,y)=\exp[2\pi i(kx+ly)] \quad \text{y} \quad f(x,y)=\exp[-2\pi i(px+qy)].$$

Luego,

$$\langle f, U^n g\rangle = \int_0^1 \int_0^1 exp[2\pi i(ka_{2n-2}+la_{2n-1}-p)x+(ka_{2n-1}+la_{2n}-q)y]\, dx\, dy.$$

Probaremos que

$$\langle f, U^n g\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } (ka_{2n-2}+la_{2n}-p) = (ka_{2n-1}+la_{2n}-q) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para probar esto veremos que, para una n grande pasa que $(ka_{2n-2} + la_{2n} - p)$ ó $(ka_{2n-1} + la_{2n} - q)$ es distinto de cero si al menos una de k, l, p, q es distinta de cero.

Supongamos que k ó l es distinta de cero. Asumimos que $k \neq 0$ y que $(ka_{2n-2} + la_{2n-1} - p) = 0$ para una infinidad de n. Entonces

$$k\frac{a_{2n-2}}{a_{2n-1}} + l - \frac{p}{a_{2n-1}} = 0.$$

Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n-2}}{a_{2n-1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \left[k\left(\frac{a_{2n-2}}{a_{2n-1}}\right) + l - \frac{p}{a_{2n-1}}\right] = \frac{2k}{1+\sqrt{5}} + l.$$

Sin embargo, este límite nunca vale cero, pues k y l son enteros. De aquí se tiene que, $ka_{2n-2} + la_{2n-1} - p \neq 0$ para una n grande. Para esa n grande, concluimos que

$$\langle f, U^n g\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l = p = q = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Pero

$$\begin{aligned}\langle 1, g\rangle &= \int_0^1 \int_0^1 \exp[2\pi i(kx + ly)]\, dxdy \\ &= \begin{cases} 1 & k = l = 0 \\ 0 & k \neq 0 \text{ o } l \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle &= \int_0^1 \int_0^1 \langle 1, g\rangle \exp[-2\pi i(px+qy)]\,dxdy \\
&= \begin{cases} \langle 1, g\rangle & \text{si } p=q=0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0 \text{ o } q \neq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } k=l=p=q=0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
\end{aligned}$$

Entonces, $\langle f, U^n g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle$ y, en consecuencia, $\{U^n g\}$ converge débilmente a $\langle 1, g\rangle$. Por lo tanto, el difeomorfismo de Anosov es mezclante.

1.4 PRECOMPACIDAD DÉBIL Y FUERTE

La sección anterior estuvo dedicada a examinar varios grados de comportamiento ergódico que las transformaciones preservadoras de medida pueden presentar. El problema se redujo a encontrar una medida invariante para encontrar la solución a la ecuación $Pf = f$. Quizá el camino más obvio, aunque no el más simple, es escoger una $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ arbitraria y examinar la sucesión $\{P^n(f)\}$ de iteraciones de f por el operador Frobenius-Perron.

Si $\{P^n(f)\}$ converge a f_*, entonces claramente $\{P^{n+1}(f)\} = \{P(P^n f)\}$ convergen simultaneamente a f_* y Pf_*. Sin embargo, probar que $\{P^n f\}$ converge a una función f_* es difícil.

En esta sección examinaremos la convergencia de la sucesión $\{A_n f\}$ de promedios definidos por

$$A_n f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k f. \tag{1.9}$$

y mostrar cómo ésto puede usarse para demostrar la existencia de una densidad estacionaria de P.

Mostraremos que bajo ciertas condiciones $\{P^n f\}$ tiene una nueva propiedad llamada periodicidad asintótica. Después definiremos el concepto de estabilidad asintótica de los operadores de Markov, que es una generalización de la exactitud de los operadores de Frobenius-Perron. Finalmente mostraremos cómo la técnica de la función cota inferior puede usarse para demostrar estabilidad asintótica.

Tomaremos $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones en L^p.

Definición 1.16. El conjunto $\mathcal{F}$ es llamado *fuertemente precompacto* si toda sucesión de funciones $\{f_n\}$ con $f_n \in \mathcal{F}$, tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge fuertemente a g en L^p.

Definición 1.17. El conjunto $\mathcal{F}$ es llamado *débilmente precompacto* si toda sucesión de funciones $\{f_n\}$ con $f_n \in \mathcal{F}$, tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge débilmente a g en L^p.

Estas dos definiciones usualmente se aplican a conjuntos que consisten simplemente de sucesiones de funciones. En este caso la compacidad de $\mathcal{F} = \{f_n\}$ simplemente significa que toda sucesión $\{f_n\}$ tiene una subsucesión convergente $\{f_{a_n}\}$.

Damos aquí algunas condiciones suficientes para asegurar que un conjunto en L^1 es débilmente precompacto:

1. Sea $g \in L^1$ una función no negativa. Entonces el conjunto de funciones $f \in L^1$ tales que
$$|f(x)| \leq g(x) \text{ para } x \in X \text{ casi en todas partes,} \tag{1.10}$$
es débilmente precompacto en L^1.

2. Sea $M > 0$ un número positivo y $p > 1$ dado. Si $\mu(X) < \infty$, entonces el conjunto de todas las funciones $f \in L^1$ tales que
$$\|f\|_{L^p} \leq M \tag{1.11}$$
es débilmente precompacto en L^1.

3. El conjunto de funciones $\mathcal{F} \subset L^1$, $\mu(X) < \infty$, es débilmente precompacto si y sólo si
   a) Existe $M < \infty$ tal que $\|f\| \leq M$ para toda $f \in \mathcal{F}$; y
   b) Para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tales que
$$\int_A |f(x)|\, d\mu(x) < \epsilon \text{ si } \mu(A) < \delta \text{ y } f \in \mathcal{F}.$$

1.5 EXISTENCIA DE UNA DENSIDAD ESTACIONARIA

El siguiente teorema es un caso especial del teorema ergódico original de Kakutani y Yoshida. La utilidad del teorema recae en establecer una condición simple para la existencia de un punto fijo para un operador de Markov.

Teorema 1.5. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $P: L^1 \to L^1$ un operador de Markov. Si para una $f \in L^1$ dada, la sucesión $\{A_n f\}$ es débilmente precompacta, entonces ésta converge fuertemente a alguna $f_* \in L^1$; es decir, un punto fijo de P, $Pf_* = f_*$. Esto es, si $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$, entonces f_* es una densidad estacionaria.*

El Teorema de Hahn-Banach es uno de los resultados clásicos en el análisis funcional. Es usualmente establecido como una propiedad de espacios vectoriales topológicos; aquí lo daremos para espacios L^p.

Definición 1.18. Un conjunto $E \subset L^p$ es un *subespacio vectorial* de L^p si $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in E$ para todas $f_1, f_2 \in E$ y todos los escalares λ_1, λ_2.

Definición 1.19. Decimos que un subespacio vectorial de L^p es *cerrado* si $\lim_{n\to\infty} f_n \in E$ para toda sucesión fuertemente convergente $\{f_n\} \subset E$.

Observación. Hemos reducido el problema de demostrar la existencia de una densidad estacionaria f_* para P, a simplemente demostrar la precompacidad débil de la sucesión $\{A_n f\}$.

Los siguientes corolarios se deducen de los criterios (1.10) y (1.11), que implican que un conjunto sea débilmente precompacto.

Corolario 1.3. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, y $P: L^1 \to L^1$ un operador de Markov. Si para alguna $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ hay una $g \in L^1$ tal que*

$$P^n f \leq g \text{ c.d. relativo a } \mu$$

para toda n, entonces hay una $f_* \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que $Pf_* = f_*$, esto es, f_* es una densidad estacionaria.

Corolario 1.4. *Las mismas condiciones que en el corolario anterior. Ahora, si para alguna $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ existe $M > 0$ y $p > 1$ tales que*

$$\|P^n f\|_{L^p} \leq M$$

para toda n, entonces hay una $f_* \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que $Pf_* = f_*$.

Hemos dado condiciones bajo las cuales la convergencia o la precompacidad de $\{A_n f\}$ implica la existencia de una densidad estacionaria. Ahora queremos saber cuándo la existencia de una densidad estacionaria, nos da algunas pistas de las propiedades asintóticas de las sucesiones $\{A_n f\}$.

Teorema 1.6. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $P\colon L^1 \to L^1$ un operador de Markov con una única densidad estacionaria f_*. Si $f_*(x) > 0$ para toda $x \in X$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} A_n f = f_* \text{ para toda } f \in D(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Corolario 1.5. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida normalizado, $S\colon X \to X$ una transformación preservadora de medida y P el correspondiente operador Frobenius-Perron. Entonces, S es ergódica si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f = 1 \text{ para toda } f \in D(X, \mathcal{A}, \mu).$$

1.6 PROPIEDAD RESTRICTIVA DEL OPERADOR

A continuación reduciremos el problema de la precompacidad de la sucesión de los promedios a encontrar una función que acota superiormente a los $P^n f$ ó una cota superior para $\|P^n f\|_{L^p}$. Mostraremos que si se cumplen condiciones semejantes a las de los corolarios 1.3 y 1.4 para el operador Frobenius-Perron, entonces $\{P^n f\}$ es asintóticamente periódico. De manera más general, mostraremos que para casi todo tipo de cota superior en los iterados $P^n f$ del operador de Markov P es suficiente para establecer que $\{P^n f\}$ tendrá un comportamiento regular.

Definición 1.20. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finito. Un operador de Markov P es llamado *restrictivo* si existe $\delta > 0$ y $k > 0$ tales que para toda $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ hay un entero positivo $n_0(f)$ para el cual

$$\int_E P^n f(x)\, d\mu \le k \quad \text{para} \quad n \ge n_0(f) \quad \text{y} \quad \mu(E) \le \delta$$

Nótese que para toda densidad f, la integral en la desigualdad anterior está acotada por uno. Esta condición de ser restrictivo, significa que eventualmente esta integral no puede estar cerca de uno para un conjunto E suficientemente pequeño. La regla de ser restrictivo, evita la posibilidad de que $P^n f$ eventualmente se concentre en un conjunto de una medida pequeña.

Si el espacio X no es finito, extenderemos la definición de restrictivo, para prevenir que $P^n f$ se disperce por todo el espacio.

Definición 1.21. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito. Un operador de Markov P es llamado *restrictivo* si existen $\delta > 0$ y $k > 1$ y un conjunto medible B de medida finita tales que para toda densidad f hay un entero $n_o(f)$ para el cual

$$\int_{(X\setminus B)\cup E} P^n f(x)\,d\mu \leq k \quad \text{para} \quad n \geq n_o(f) \quad \text{y} \quad \mu(E) \leq \delta.$$

Proposición 1.5. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finito y $P\colon L^1(X) \to L^1(X)$ un operador de Markov. Asumimos que existen $p > 1$ y $K > 0$ tales que para toda densidad $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ tenemos que $P^n f \in L^p$ para n suficientemente grande, y*

$$\limsup_{n\to\infty} \|P^n f\|_{L^p} \leq K.$$

Entonces, P es restrictivo.

Proposición 1.6. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito y $P\colon L^1(X) \to L^1(X)$ un operador de Markov. Si existe una $h \in L^1$ y $\lambda < 1$ tales que*

$$\limsup_{n\to\infty} \|(P^n f - h)^+\|_{L^p} \leq \lambda;$$

entonces, P es restrictivo.

Esta proposición tiene la siguiente interpretación, digamos que para aquellas regiones donde $P^n f > h$, si el área de la diferencia entre $P^n f$ y h está acotada por $\lambda < 1$, entonces P es restrictivo.

1.7 EL TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

No es necesario verificar las condiciones de ser restrictivo para toda $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$, es suficiente para una clase de densidades $f \in D_0 \subset D(X, \mathcal{A}, \mu)$, donde D_0 es un conjunto denso en $D(X, \mathcal{A}, \mu)$. Para ser más precisos, damos la siguiente definición.

Definición 1.22. Un conjunto $D_0 \subset D(X, \mathcal{A}, \mu)$ es *denso* en $D(X, \mathcal{A}, \mu)$ si para toda $h \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $\epsilon > 0$ hay una $g \in D_0$ tal que $\|h - g\| < \epsilon$.

Teorema 1.7 (Descomposición espectral). *Sea P un operador de Markov restrictivo. Existen un entero r y dos sucesiones de funciones no negativas $g_i \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $k_i \in L^\infty$ $i = 1, \ldots, r$ y un operador $Q\colon L^1 \to L^1$ tal que para toda $f \in L^1$, Pf puede escribirse de la forma:*

$$Pf(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(f) g_i(x) + Qf(x) \tag{1.12}$$

donde

$$\lambda_i(f) = \int_X f(x)k_i(x)\,d\mu.$$

Las funciones g_i y el operador Q tienen las siguientes propiedades:

i) $g_i(x)g_j(x) = 0$ *para toda* $i \neq j$.

ii) Para cada entero i existe un único entero $\alpha(i)$ tal que $Pg_i = g_{\alpha(i)}$. Más aún $\alpha(i) \neq \alpha(j)$ si $i \neq j$, y el operador P permuta las funciones g_i.

iii) $\|P^n Qf\| \to 0$ *si* $n \to \infty$ *para toda* $f \in L^1$.

De la representación (1.12), se sigue que P^{n+1} está dada por

$$P^{n+1}f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(f)g_{\alpha^n(i)}(x) + Q_n f(x),$$

donde $Q_n = P^n Q$, y $\alpha^n(i) = \alpha(\alpha^{n-1}(i))$, y $\|Q_n(f)\| \to 0$ conforme $n \to \infty$. Los términos de la suma anterior, son permutados con cada aplicación de P, y como r es finito, la sucesión

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(f)g_{\alpha^n(i)}(x)$$

debe ser periódica con periodo $\tau \leq r!$. Como $\{\alpha^n(1), \ldots, \alpha^n(r)\}$ es simplemente una permutación de $\{1, \ldots, r\}$, hay una única i correspondiente a cada $\alpha^n(i)$.

Entonces, esa suma se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_{\alpha^{-n}(i)}(f)g_i(x),$$

donde $\{\alpha^{-n}(i)\}$ denota la permutación inversa de $\{\alpha^n(i)\}$

La suma escrita de esta última forma, aclara cómo las sucesivas aplicaciones del operador P trabajan. Como las funciones g_i tienen soportes ajenos, cada aplicación sucesiva de P, nos lleva a un nuevo conjunto de coeficientes $\lambda_{\alpha^{-n}}(f)$ asociados con cada función $g_i(x)$.

Definición 1.23. Una sucesión $\{P^n\}$ para la cual el operador P tiene una descomposición como en el teorema 1.7, se llama *asintóticamente periódica.*

Usando estas nociones, el teorema de descomposición espectral puede refrasearse de la siguiente forma: Si P es un operador restrictivo, entonces $\{P^n\}$ es asintóticamente periódica.

Si conocemos la representación explícita (1.12) de Pf, para un operador de Markov P conocido, entonces es fácil verificar la existencia de una medida invariante y por lo tanto determinar ergodicidad, mezcla o exactitud. Desafortunadamente, no siempre tenemos una representación explícita para un operador de Markov dado, pero a continuación mostramos que la existencia de la representación (1.12) nos permite deducir propiedades interesantes.

Ahora vamos a mostrar que cada operador de Markov restrictivo, tiene una densidad estacionaria y después daremos una representación explícita para $P^n f$ cuando esa densidad estacionaria es constante.

Proposición 1.7. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $P\colon L^1 \to L^1$ un operador de Markov restrictivo, entonces P tiene una densidad estacionaria.*

Demostración. Sea f una densidad definida por

$$f(x) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} g_i(x),$$

donde la existencia de r y las funciones g_i está dada como en el teorema 1.7. Por la propiedad (ii) del mismo teorema,

$$Pf(x) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} g_{\alpha(i)}(x)$$

y entonces, $Pf = f$. □

Ahora asumimos que la medida μ está normalizada, y analizamos las consecuencias de la representación $P^n f$ cuando tenemos una densidad estacionaria constante $f = \chi_X$. Recordemos que, si P es el operador Frobenius-Perron, ésto es equivalente a que μ sea invariante.

La siguiente proposición tiene el mérito de mostrar quienes son específicamente las funciones g_i y k_i en el teorema de descomposición espectral.

Proposición 1.8. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $P\colon L^1 \to L^1$ un operador de Markov restrictivo. Si P tiene una densidad estacionaria, entonces la representación para P^{n+1} toma la siguiente forma*

$$P^{n+1}f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{\alpha^{-n}(i)}(f)\bar{\chi}_{A_i}(x) + Q_n f(x) \text{ para toda } f \in L^1, \qquad (1.13)$$

donde $\bar{\chi}_{A_i}(x) = [1/\mu(A_i)]\chi_{A_i}(x)$. *Los conjuntos* A_i *forman una partición de* X, *esto es,*

$$\bigcup_i A_i = X \text{ y } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j.$$

Aún más, $\mu(A_i) = \mu(A_j)$ *donde* $j = \alpha^n(i)$ *para alguna* n.

Ahora sí podemos determinar la ergodicidad, mezcla o exactitud, para operadores P que pueden escribirse en la forma de la ecuación (1.12). Asumimos que $\mu(X) = 1$ y que $P\chi_X = \chi_X$. Recordemos que la permutación $\{\alpha(1), \dots, \alpha(r)\}$ del conjunto $\{1, \dots, r\}$, para el cual no hay un subconjunto invariante, es llamada un *ciclo* o *permutación cíclica*.

Teorema 1.8. *Sea* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida normalizado y* $P\colon L^1 \to L^1$ *un operador de Markov restrictivo. Entonces,* P *es ergódico si y sólo si la permutación* $\{\alpha(1), \dots, \alpha(r)\}$ *del conjunto* $\{1, \dots, r\}$ *es cíclica.*

Demostración. Escribimos la ecuación (1.9) de los promedios $A_n f$ como

$$\begin{aligned}
A_n f(x) =& \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P^j f(x) \\
=& \frac{1}{n} f(x) + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_{\alpha^{-j}(i)}(f)\chi_{A_i}(x) + Q_j f(x)\right) \\
=& \frac{1}{n} f(x) + \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{\alpha^{-j}(i)}(f)\right]\chi_{A_i}(x) + \frac{1}{n}\left[\sum_{j=0}^{n-2} Q_j f(x) + f(x)\right].
\end{aligned}$$

Donde hemos usado la representación (1.13). Así $A_n f$ se escribe como

$$A_n f(x) = \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{\alpha^{-j}(i)}(f)\right]\chi_{A_i}(x) + \widetilde{Q}_n f(x),$$

donde $\widetilde{Q}_n f(x)$ está dada por

$$\widetilde{Q}_n f(x) = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=0}^{n-2} Q_j f(x) + f(x)\right].$$

Ahora consideremos los coeficientes

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{\alpha^{-j}(i)}(f).$$

Como mostramos anteriormente, la sucesión $\{\lambda_{\alpha^{-j}(i)}\}$ es periódica en j, la suma anterior siempre tiene límite, esto es

$$\bar{\lambda}_i(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{\alpha^{-j}(i)}(f).$$

Asumimos que no hay subconjuntos invariantes de $\{1,\ldots,r\}$ bajo la permutación de α. Entonces el límite debe de ser independiente de i, dado que cada pieza de la suma de longitud r para diferente i consiste de los mismos números, pero en diferente orden. Entonces, por la propiedad (iii) del teorema 1.7,

$$\lim_{n\to\infty} A_n f = \sum_{i=1}^{r} \bar{\lambda}_i(f)\bar{\chi}_{A_i}.$$

Como α es cíclica, la proposición 1.8 implica que $\mu(A_i) = \mu(A_j) = 1/r$ para toda i, j y $\bar{\chi}_{A_i} = r\chi_{A_i}$, así es que

$$\lim_{n\to\infty} A_n f = r\bar{\lambda}(f).$$

Entonces, para $f \in D(X,\mathcal{A},\mu)$, $\bar{\lambda}(f) = 1/r$ porque P preserva normas y los A_i son ajenos. Y hemos demostrado que si la permutación $\{\alpha(1),\ldots,\alpha(r)\}$ del conjunto $\{1,\ldots,r\}$ es cíclica, entonces $\{P^n f\}$ es Cèsaro convergente a 1 y, por lo tanto es ergódica.

Para demostrar la otra implicación, supongamos que $\{\alpha(i)\}$ no es una permutación cíclica. Entonces $\{\alpha(i)\}$ tiene un subconjunto invariante I. Como una f inicial tomamos

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i \bar{\chi}_{A_i}(x)$$

donde

$$c_i = \begin{cases} 1 \neq 0 \text{ si } i \text{ pertenece al subconjunto invariante } I \\ \qquad \text{de la permutación de } \{1,\ldots,r\}, \\ 0 \qquad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} A_n f = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \bar{\lambda}_i(f)\bar{\chi}_{A_i},$$

donde $\bar{\lambda}_i(f) \neq 0$, si i está contenido en el subconjunto invariante I, y $\bar{\lambda}_i(f) = 0$ en otro caso. Entonces el límite de $A_n f$ conforme $n \to \infty$ no es una función constante respecto de x, entonces P no puede ser ergódico. □

Teorema 1.9. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida normalizado y $P\colon L^1 \to L^1$ un operador de Markov restrictivo. Si $r = 1$ en la representación (1.12) para P, entonces P es exacto.*

Demostración. Asumimos que $r = 1$, entonces por (1.13), tenemos

$$P^{n+1} f(x) = \lambda(f)\chi_X(x) + Q_n f(x)$$

y por la propiedad (iii) del teorema 1.7,

$$\lim_{n\to\infty} P^{n+1} f = \lambda(f), \text{ en } L^1.$$

En particular, cuando $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\lambda(f) \equiv 1$, puesto que P preserva la norma. Entonces, para toda $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\{P^n f\}$ converge fuertemente a 1, y por tanto P es exacto y también mezclante. □

Teorema 1.10. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida normalizado y $P\colon L^1 \to L^1$ un operador de Markov restrictivo. Si P es mezclante, entonces $r = 1$ en (1.12).*

Demostración. Supongamos que P es mezclante y tomamos $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ inicial dada por

$$f(x) = c_1\chi_{A_1}(x), \text{ donde } c_1 = 1/\mu(A_1).$$

Entonces

$$P^n f(x) = c_1\chi_{A_n}(x),$$

donde $A_n = A_{\alpha^n(1)}$. Como P es mezclante, $\{P^n f\}$ converge débilmente a 1. Sin embargo, notemos que

$$\langle P^n f, \chi_{A_1}\rangle = \begin{cases} c_1 \text{ si } \alpha^n(1) = 1 \\ 0 \text{ si } \alpha^n(1) \neq 1 \end{cases}$$

Entonces, $\{P^n f\}$ deberá converger débilmente a 1 sólamente si $\alpha^n(1) = 1$ para toda n suficientemente grande. Usando el teorema 1.8, como α es una permutación cíclica, r no puede ser mayor que 1, entonces con ésto demostramos que $r = 1$. □

Capítulo 2

Análisis ergódico de transformaciones en el plano

El objetivo de este capítulo es estudiar las propiedades (en particular espectrales y ergódicas) de transformaciones expansivas y C^2 por pedazos de una región acotada del plano, que satisfacen ciertas condiciones de regularidad.

Primero vamos a dar una definición para la variación de una función en dos variables, adoptando la noción de variación de funciones en una variable. Ésto está basado en el trabajo que desarrolló en su tesis doctoral, Gerhard Keller en 1979. A finales de la década de los años 70 inició el desarrollo de la teoría de operadores, para analizar transformaciones lineales y hacer un análisis ergódico de las mismas; es por ésto que el trabajo de Keller, está escrito en un lenguaje muy complicado, y diferente al que actualmente se usa. En este trabajo, sólo pretendemos explicar de una manera más sencilla las ideas de Keller, para clasificar a las transformaciones y hacer un análisis espectral y ergódico, mediante el operador Frobenius-Perron para transformaciones del plano en el plano.

2.1 Variación de funciones de dos variables

Como sabemos, la variación de una función derivable $f\colon I \to R$ puede calcularse mediante su derivada como $\mathrm{var}_I\, f = \int_I |f'(x)|\, dx$.

Por consecuencia nosotros quisieramos que para una función derivable $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$, donde Ω es un abierto de $\mathbf{R}^2$, definir $\mathrm{var}_\Omega\, f$ como $\int_\Omega \|\nabla(f)\|_2\, d\lambda$, donde $\nabla(f)$ es el gradiente de una función $f \in L^1$, o bien por $\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega |\frac{\partial f}{\partial x_i}|\, d\lambda$. Como no siempre podemos garantizar la existencia de las derivadas parciales, necesitamos dar una definición de variación aún más general. Para ésto definimos los siguientes conjuntos.

Definición 2.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ un abierto acotado, y consideremos la medida de Lebesgue λ en $\mathbf{R}^2$ restringida a Ω. Escribimos

$$C(\bar{\Omega}) := \{\phi \colon \bar{\Omega} \to \mathbf{R} \mid \phi \text{ continua}\}$$

$$C_0(\Omega) := \{\phi \in C(\bar{\Omega}) \mid \phi_{|\partial\Omega} = 0\}$$

$$C^1(\bar{\Omega}) := \{\phi \in C(\bar{\Omega}) \mid \phi \text{ derivable }, \tfrac{\partial\phi}{\partial_{x_i}} \in C(\bar{\Omega}),\ i = 1,2\}$$

$$D_0(\Omega) := \{\phi \in C^1(\bar{\Omega}) \mid \phi_{|\partial\Omega} = 0\} = C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$$

$$K(\Omega) := \{\phi \in C^1(\bar{\Omega}) \mid \operatorname{sop}(\phi) \subseteq \Omega \text{ es compacto}\}$$

Estos conjuntos serán considerados como espacios vectoriales normados respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$. Relativo a esta norma, $K(\Omega)$ es denso en $C_0(\Omega)$, lo mismo que $C^1(\bar{\Omega})$ es denso en $C(\Omega)$.

Escribiremos por $\mathcal{M}_b(\Omega) := \{\phi \colon \Omega \to R \mid \phi \text{ es acotado y medible}\}$.

Para $f \in L^1(\Omega)$, las derivadas parciales están definidas en el sentido de distribuciones en $D_0(\Omega)$, ésto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \colon D_0(\Omega) \to R, \quad \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \phi \rangle_\Omega := -\int_\Omega f \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, d\lambda \quad (i = 1,2)$$

Las derivadas parciales no son necesariamente operadores continuos sobre $(D_0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$. Entonces nosotros estamos interesados precisamente en las f, donde las derivadas parciales son continuas. Más precisamente, sea

$$C_0^{\mathbf{R}}(\Omega)^* := \{\psi : C_0^{\mathbf{R}}(\Omega) \to \mathbf{R} : \psi \text{ lineal, continua }\},$$

junto con la norma de operador,

$$\|\psi\|_{C_0^{\mathbf{R}}(\Omega)^*} := \sup\{|\langle \psi, \phi \rangle| : \phi \in C_0(\Omega),\ \|\phi\|_\infty \leq 1\}.$$

Si el operador $\frac{\partial f}{\partial x_i} \colon D_0(\Omega) \to R$ es acotado, éste se extiende a un operador lineal continuo sobre $C_0(\Omega)$ y podemos considerar $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ como elementos de $C_0^{\mathbf{R}}(\Omega)^*$.

Ahora ya estamos en condiciones de definir el *espacio de funciones de variación acotada* sobre Ω denotado por $\mathbf{VB}(\Omega)$ por

$$VB(\Omega) := \left\{ f \in L^1(\Omega) \,:\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C_0^{\mathbf{R}}(\Omega)^* \text{ con } i = 1,2 \text{ y } \|f\|_{VB(\Omega)} < \infty \right\},$$

donde

$$\|f\|_{VB(\Omega)} := \|f\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{C_0^{\mathbf{R}}(\Omega)^*}.$$

Se puede ver que $(\mathbf{VB}(\Omega), \|\cdot\|_{VB(\Omega)})$ es un espacio de Banach.

Como los operadores positivos de $C_0^{\mathbf{R}}(\Omega)^*$ corresponden a las medidas finitas sobre Ω, por el teorema de Riesz cada $\psi \in C_0^{\mathbf{R}}(\Omega)^*$ se extiende a un operador lineal continuo sobre $\mathcal{M}_b(\Omega)$ con la norma:

$$\|\psi\|_{C_0^{\mathbf{R}}(\Omega)^*} = \sup\{|\langle\psi,\phi\rangle| \mid \phi \in \mathcal{M}_b(\Omega),\ \|\phi\|_\infty \leq 1\}$$

Observación. El espacio $VB(\Omega)$ es denso en $L^1(\Omega)$ para la norma $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$. Pues $C^1(\bar{\Omega}) \subseteq VB(\Omega)$ y $C^1(\bar{\Omega})$ es denso en $L^1(\Omega)$.

Desde un punto de vista geométrico la variación $\|\cdot\|_{VB}$, no es invariante bajo las isometrías del plano. Como una primera forma de remediar ésto, es definir el gradiente ∇f de una función $f \in L^1(\Omega)$, como un operador lineal de $D_0(\Omega)$ en $\mathbf{R}^2$ dado por

$$\langle\nabla f,\phi\rangle_\Omega = \begin{pmatrix} \langle\frac{\partial f}{\partial x_1},\phi\rangle_\Omega \\ \langle\frac{\partial f}{\partial x_2},\phi\rangle_\Omega \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \int_\Omega f\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\,d\lambda \\ \int_\Omega f\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\,d\lambda \end{pmatrix}.$$

Y por la variación de f en Ω, se podría tomar la expresión

$$\sup\{\|\langle\nabla f,\phi\rangle_\Omega\|_2\ :\ \phi \in D_0(\Omega),\ \|\phi\|_\infty \leq 1\}. \tag{2.1}$$

Esta definición de variación es invariante bajo isometrías del plano, sin embargo queremos que también cumpla que para cualesquiera dos abiertos Ω_1, $\Omega_2 \subseteq \mathbf{R}^2$, que satisfagan $\Omega_1\cap\Omega_2 = \emptyset$, cumplan que $\mathrm{var}_{\Omega_1}(f)+\mathrm{var}_{\Omega_2}(f) \leq \mathrm{var}_\Omega(f)$ para cada $f \in L^1(\Omega)$.

Por lo tanto es necesario modificar la expresión (2.1), para que cumpla dichas exigencias de la siguiente forma

Definición 2.2. La *variación* de f sobre Ω está definida por

$$V_\Omega(f) := \sup\left\{\sum_{C\in\mathcal{N}(\phi)} \|\langle\nabla f,\phi\cdot\chi_C\rangle_\Omega\|_2 : \phi \in D_0(C),\ \|\phi\|_\infty \leq 1\right\}$$

donde $\mathcal{N}(\phi) := \{C \subseteq \Omega \mid C$ es componente conexa de $\Omega \setminus Z(\phi)\}$ y $Z(\phi) := \{x \in \Omega \mid \phi(x) = 0 \text{ y } \nabla\phi(x) = 0\}$.

Lema 2.1. *Propiedades elementales de la variación*

a) $f \in VB(\Omega)$ *si y sólo si* $V_\Omega(f) < \infty$ *para toda* $f \in L^1(\Omega)$

b) $V_\Omega(f+g) \leq V_\Omega(f) + V_\Omega(g)$ *para* $f, g \in L^1(\Omega)$

c) $V_\Omega(\alpha \cdot f) = |\alpha| \cdot V_\Omega(f)$ *con* $\alpha \in \mathbf{R}$

d) Para los abiertos $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ *tales que* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$
$V_{\Omega_1}(f) + V_{\Omega_2}(f) \le V_\Omega(f)$ *para toda* $f \in L^1(\Omega)$

Demostración. Los incisos (a), (b) y (c) resultan de la desigualdad del triángulo y de que las normas $\|\cdot\|_1$ $\|\cdot\|_2$ son equivalentes en $\mathbf{R}^2$.

En el inciso (d), es claro que $V_\Omega(f) < \infty$, implica que $f \in VB(\Omega_i)$ para $i = 1, 2$.

Para cualquier $\epsilon > 0$, existen $\phi_i \in D_0(\Omega_i)$ tales que

$$V_{\Omega_i}(f) \le \epsilon + \sum_{C \in \mathcal{N}(\phi_i)} \|\langle \nabla f, \phi_i \cdot \chi_C \rangle_{\Omega_i}\|_2, \ \|\phi_i\|_\infty \le 1$$

con $\phi := \sum_{i=1,2} \chi_{\Omega_i} \cdot \phi_i$, de aquí se sigue que $\phi \in D_0(\Omega)$, $\|\phi\|_\infty \le 1$. Entonces,

$$V_{\Omega_1}(f) + V_{\Omega_2}(f) \le 2\epsilon + \sum_{C \in \mathcal{N}(\phi_i)} \|\langle \nabla f, \phi_i \cdot \chi_C \rangle_{\Omega_i}\|_2 \le 2\epsilon + V_\Omega(f).$$

□

2.2 TRANSFORMACIONES α-DILATANTES

En esta sección daremos las definiciones de las transformaciones α-dilatantes y enunciaremos la proposición que da las condiciones para que se cumpla la desigualdad que acota a la variación de dichas transformaciones a las que se les aplicó el operador Frobenius-Perron.

Definición 2.3. El operador $P_T \colon L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ determinado por

$$\int_{T^{-1}(A)} f \, d\lambda = \int_A P_T f \, d\lambda \qquad f \in L^1(\Omega),\ A \subseteq \Omega \text{ medible}$$

es el *operador Frobenius-Perron* asociado a T.

Definición 2.4. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$. Decimos que una transformación $T \colon \Omega \to \Omega$ es *α-dilatante y $\mathcal{C}^2$ por pedazos*, si existe una familia finita $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_N\}$ de subconjuntos abiertos de Ω, tales que:

i) $P_i \cap P_j = \emptyset$, para $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{N} \bar{P}_i = \bar{\Omega}$.

ii) Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, P_i y TP_i son de frontera $\mathcal{C}^2$ por pedazos.

iii) Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, existen abiertos $\tilde{P}_i \supseteq \bar{P}_i$ y $\tilde{Q}_i \supset \overline{TP}_i$ y difeomorfismos $T_i \colon \tilde{P}_i \to \tilde{Q}_i$ de clase C^2, tales que $T_{i|_{P_i}} = T_{|P_i}$.

iv) $\|(DT_{|_{P_i}})^{-1}(y)\|_2 \leq \alpha^{-1}$ con $i = 1, \ldots, N$ y $y \in TP_i$, donde $\alpha > 1$ es una constante.

Definición 2.5. Bajo las mismas condiciones de la definición anterior, decimos que T es *α-dilatante y analítica por pedazos* si remplazamos ii), iii) y iv) por:

ii') La frontera de cada P_i y TP_i es una curva cerrada simple y analítica por pedazos.

iii') T_i son transformaciones holomorfas en P_i (identificando $\mathbf{R}^2$ con $\mathbf{C}$).

iv') $|\frac{dT_i}{dz}| \geq \alpha$ para cada $i = 1, \ldots, N$, donde $\frac{dT_i}{dz}$ es la derivada compleja de T_i.

Observación. Si Ω es el intervalo $[0,1]$, las transformaciones análogas son las monótonas por pedazos.

Para una transformación T como la de las definiciones 2.4 y 2.5, el operador P_T tiene la siguiente forma:

$$P_T(f) = \sum_{i=1}^{N} (f \circ T_{P_i}^{-1}) \cdot |\det(DT_{P_i})^{-1}| \cdot \chi_{TP_i} \text{ casi donde quiera.} \tag{2.2}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
&\int_A \sum_{i=1}^{N} (f \circ T_{P_i}^{-1}) \cdot |\det(DT_{P_i})^{-1}| \cdot \chi_{TP_i}\, d\lambda \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_A (f \circ T_{P_i}^{-1}) \cdot |\det(DT_{P_i})^{-1}| \cdot \chi_{TP_i}\, d\lambda \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{TP_i \cap A = T(P_i \cap T^{-1}(A))} (f \circ T_{P_i}^{-1}) \cdot |\det(DT_{P_i})^{-1}|\, d\lambda
\end{aligned}$$

usando el teorema de cambio de variable

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{P_i \cap T^{-1}(A)} f \, d\lambda \\
&= \int_{T^{-1}(A)} f \, d\lambda.
\end{aligned}
$$

Por la unicidad de $P_T f$ tenemos que

$$P_T f = \sum_{i=1}^{N} (f \circ T_{P_i}^{-1}) \cdot |\det(DT_{P_i}^{-1})| \cdot \chi_{TP_i}$$

Ejemplo 2.1. Sea $F \colon \bar{\Omega} \to \mathbf{R}^2$ un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^2$ entre $\bar{\Omega}$ y $F(\Omega)$.

$$\sup_{x \in F(\Omega)} \|DF^{-1}{}_{|_x}\|_2 := \alpha^{-1} < 1.$$

Entonces, $T := F \mod Z^2$ es α-dilatante y $\mathcal{C}^2$ por pedazos.

Dentro de las condiciones que necesitamos para enunciar la siguiente proposición está la definición que sigue:

Definición 2.6. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ de frontera $\mathcal{C}^2$ por pedazos. Decimos que un subconjunto $S \subseteq \partial\Omega$ es (ω, Ω)-regular, si S es la unión finita de cubiertas Γ_i de clase $\mathcal{C}^2$ y si existe $\delta_0 > 0$ tal que podemos construir cada Γ_i de abiertos $\Omega_i(\delta) \subseteq \Omega$ de la siguiente manera:

i) Sea $A_{i,\delta} := \{x \in \Omega : \mathrm{dist(x, \Gamma_i)} < \delta\}$ con $\delta < \delta_0$ cualquiera. Sean a y b los extremos de Γ_i. Trazamos para a y b las rectas g_a y g_b, tales que $g_a \cap \bar{\Omega}$ y $g_b \cap \bar{\Omega}$ sean dos curvas que en a y en b, respectivamente, forman un ángulo ω con Γ_i. La región abierta de $A_{i,\delta}$ situada entre las rectas g_a y g_b es $\Omega_i(\delta)$.

ii) Para δ fija, las $\Omega_i(\delta)$ son ajenas dos a dos.

Proposición 2.1. *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ de frontera $\mathcal{C}^2$ por pedazos, $T \colon \Omega \to \Omega$ una transformación α-dilatante y C^2 por pedazos, que satisface las siguientes condiciones:*

Existen dos familias (que pueden ser vacías) $\varphi = \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{R_1}\}$ y $g = \{\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{R_2}\}$ de colecciones finitas de subconjuntos abiertos de Ω de frontera $\mathcal{C}^2$ por pedazos, tales que:

i) $F, F' \in \mathcal{F}_j$, $F \neq F'$ *implica* $F \cap F' = \emptyset$ *con* $\mathcal{F}_j \in \varphi$
$G, G' \in \mathcal{G}_j$, $G \neq G'$ *implica* $G \cap G' = \emptyset$ *con* $\mathcal{G}_j \in g$

ii) *Para cada* $F \in \mathcal{F}_j$, $\mathcal{F}_j \in \varphi$, *existe un subconjunto* (ω, F)*-regular* $S_F \subseteq \partial F$ *que va a intervenir en la condición iv).*

iii) *Para cada* $G \in \mathcal{G}_j$, $\mathcal{G}_j \in g$, *existe un abierto* $\tilde{G} \subseteq G$ *de frontera* C^2 *por pedazos y un subconjunto* $(\omega, \tilde{G})$*-regular* $S_G \subseteq \partial\tilde{G}$, *que va a intervenir en la condición iv).*

iv) *Para toda* $i \in \mathbf{N}$ *se tiene que si* $\partial P_i \setminus T_i^{-1}(\partial\Omega) \neq \emptyset$. *Entonces, existe una descomposición* $\partial P_i \setminus T_i^{-1}(\partial\Omega) = \bigcup_{k=1}^{N_i} C_k^i$, *tal que para cada* C_k^i *se encuentra*

a) *Un* $\mathcal{F}_j \in \varphi$ *y un* $F \in \mathcal{F}_j$ *tales que*

$$\int_{C_k^i \setminus (\partial(F \cap P_i) \cap S_F)} d\sigma = 0$$

b) *O un* $\mathcal{G}_j \in g$ *y un* $G \in \mathcal{G}_j$ *tales que*

$$\int_{C_k^i \setminus (\partial((G \setminus \tilde{G}) \cap P_i) \cap S_G)} d\sigma = 0.$$

Entonces, se cumple la siguiente desigualdad

$$V_\Omega(P_T f) \leq \beta \cdot V_\Omega(f) + C\|f\|_{L^1(\Omega)} \tag{2.3}$$

donde β *y* C *son constantes independientes de* f, *y* $0 < \beta < 1$, $C > 0$.

Las condiciones que establece esta proposición se refieren básicamente a regularidad, ya que nos interesa mantener controladas las fronteras de la partición, como que no se vuelvan densas después de algunas iteraciones. Sin embargo la demostración es muy complicada y requiere de definir muchos conceptos que no son necesarios para el objetivo de este trabajo, es más, se podría hacer otra tesis para explicar todas estas condiciones; es por eso que aquí no la presentamos. Sólo tomamos la parte que nos es útil para poder enunciar más adelante los resultados que nos interesan. La parte que tomamos de esta demostración es la desigualdad (2.3).

El siguiente teorema es muy importante, ya que es a partir de él que podremos usar la herramienta que expusimos en el primer capítulo, para finalmente enunciar los teoremas de clasificación.

Teorema 2.1. *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ de frontera C^2 por pedazos y $T\colon \Omega \to \Omega$ una transformación α-dilatante, C^2 por pedazos que satisface las condiciones de la proposición anterior. Entonces, el operador Frobenius-Perron P asociado a T es restrictivo.*

La representación del operador Frobenius-Perron de la ecuación (2.2), es más complicada que la que teníamos en el capítulo anterior. El efecto de ésto, es que aún cuando escojamos una función $f \in L^1$ inicial completamente suave, Pf y todos sus subsecuentes iterados de f pueden ser discontinuos. Por consiguiente, no tenemos un criterio simple para examinar el comportamiento de $P^n f$. Entonces debemos examinar la variación de $P^n f$.

Demostración. Tomando la desigualdad de la proposición anterior

$$V_\Omega(P_T f) \leq \beta V_\Omega(f) + C \int_\Omega f(y)\,dy = \beta V_\Omega(f) + C$$

pues $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Usando inducción en la desigualdad anterior, tenemos

$$V_\Omega(P^n f) \leq \beta^n V_\Omega(f) + C \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j.$$

Si $0 < \beta < 1$, entonces

$$V_\Omega(P^n f) \leq \beta^n V_\Omega(f) + C \frac{1}{1-\beta}$$

por lo tanto, para cada $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ de variación acotada,

$$\lim_{n\to\infty} \sup V_\Omega(P^n f) \leq \frac{C}{1-\beta} = K,$$

donde K es independiente de f. Ahora definamos al conjunto $\mathcal{F}$ por

$$\mathcal{F} = \{g \in D(X, \mathcal{A}, \mu) : V_\Omega(g) \leq K\}.$$

De la última desigualdad se sigue que $P^n f \in \mathcal{F}$ para una n suficientemente grande. Ahora queremos mostrar que $\mathcal{F}$ es débilmente precompacto. De la definición de la variación, está claro que para cualquier función positiva y diferenciable g definida en Ω,

$$g(x) - g(y) \leq V_\Omega(g)$$

para toda $x, y \in \Omega$. Como $g \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$, hay alguna $y \in \Omega$ tal que $g(y) \leq 1$, y entonces

$$g(x) \leq K + 1.$$

Por el primer criterio de la sección 1.4 para conjuntos débilmente precompactos, la familia $\mathcal{F}$ es débilmente precompacta, y como la sucesión $\{P^n f\} \subset \mathcal{F}$, entonces la sucesión es débilmente precompacta.

Falta probar que P es restrictivo. Por el inciso (b) del criterio 3 de la misma sección, tenemos la condición para que $\{P^n f\}$ sea restrictiva y por lo tanto P es restrictivo. □

Observación. Como ya tenemos al operador Frobenius-Perron P restrictivo, entonces podemos escribir a Pf como en la ecuación (1.12) del teorema 1.7 de descomposición espectral.

2.3 TEOREMAS DE CLASIFICACIÓN

Gracias a toda la herramienta que hemos desarrollado y explicado a lo largo de este trabajo, ahora podemos enunciar los siguientes teoremas que clasifican, de manera ergódica, al operador Frobenius-Perron asociado a las transformaciones α-dilatantes y por lo tanto a las transformaciones.

En esta sección consideramos al operador P restrictivo y a la transformación T α-dilatante, tal que satisface las condiciones de la proposición 2.1.

En el capítulo 1 la proposición 1.7 nos permite garantizar la existencia de una densidad estacionaria. Como estamos trabajando en espacios de medida en general, entonces podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Si T es una transformación α-dilatante, entonces el operador Frobenius-Perron P asociado a la transformación T tiene una densidad estacionaria.*

Observación. Recordemos que la existencia de una medida invariante para un operador Frobenius-Perron P asociado a una transformación α-dilatante T, queda garantizada con el teorema anterior, es decir, a la existencia de una densidad estacionaria.

A partir de aquí usamos el teorema de descomposición espectral como base para clasificar al operador.

Teorema 2.3. *Si tomamos una transformación T α-dilatante, entonces el operador Frobenius-Perron P asociado a dicha transformación es ergódico, si y sólo si, la permutación del teorema 1.8 es cíclica.*

Teorema 2.4. *Si $r = 1$ en la expresión (1.12) del teorema 1.7, entonces tanto la transformación T como P el operador Frobenius-Perron asociado, son exactos.*

Teorema 2.5. *Si $r \neq 1$ en la expresión (1.12) del teorema 1.7, entonces P no es mezclante.*

Las demostraciones de estos teoremas son análogas a las que hicimos en el capítulo anterior, pues recordemos que estamos trabajando en espacios de medida en general y por lo tanto las transformaciones dilatantes también cumplen las condiciones de dichos teoremas.

Con estos teoremas hemos clasificado, desde un punto de vista ergódico, a las transformaciones α-dilatantes que cumplen las condiciones de la proposición 2.1 a través del operador Frobenius-Perron P restrictivo asociado, de acuerdo a su comportamiento y a ciertas condiciones de regularidad.

BIBLIOGRAFÍA

G. Keller, *Propiétés ergodiques des endomorphismes dilatants, C^2 par morceaux, des régions bornées du plan*, Thèse 3^e cycle, Université de Rennes, 1979.

A. Lasota y J. A. Yorke, "On The Existence of Invariant Measures for Piecewise Monotic Transformations", *Trans. AMS*, **186**, 1973, pp. 481–488.

A. Lasota y M. C. Mackey, *Chaos, Fractals and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics*, Springer-Verlag, 1995.