UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

JORGE CARRERA BOLAÑOS

LA APLICABILIDAD DE LAS MATEMÁTICAS EN LA FÍSICA. EXAMEN DE ALGUNOS ASPECTOS Y PROBLEMAS FILOSÓFICOS

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

DIRECTOR DE TESIS: DR. MARIO GÓMEZ TORRENTE

2004

Agradecimientos.

Quiero agradecer el apoyo que el CONACYT y la Facultad de Ingeniería, UNAM, mi lugar de trabajo, me brindaron a efecto de poder llevar a cabo estos estudios de doctorado.

De manera especial quiero agradecer el apoyo y dedicación de mi tutor y director de tesis, Dr. Mario Gómez Torrente, sobre todo considerando la paciencia con la que sobrellevó mis primeros balbuceos filosóficos y mis ocasionales recaídas y errores. Es probable que mi trabajo no hubiese fructificado de no ser por la continua atención que Mario prestaba a mi desempeño, y las consiguientes explicaciones, indicaciones y correcciones de su parte.

Los otros dos miembros de mi Comité Tutoral, la Dra. Ana Rosa Pérez R. y el Dr. Mario Casanueva, que nos acompañaron en este largo camino, prestaron un invaluable apoyo. Estoy seguro que seguiré aprendiendo de ellos inclusive tras haber terminado esta etapa.

Los otros miembros de mi jurado le dedicaron una gran atención y tiempo a analizar mi trabajo, en mi opinión más allá de lo que las puras exigencias formales requerían, por lo que les estoy sinceramente agradecido. La Dra. Atocha Elisea y el Dr. Axel Barceló llevaron a cabo una lectura sumamente minuciosa, lo que les permitió detectar como mejorar y pulir desde aspectos globales hasta detalles de mayor y menor relevancia. El Dr. Shahen Hacyan no sólo me llevó a profundizar en los aspectos relativos a la mecánica cuántica, sino que me dio valiosas indicaciones acerca del pensamiento físico. El Dr. Carlos Álvarez me proporcionó indicaciones históricas de interés. Todos ellos se tomaron la molestia no sólo de proporcionarme sus comentarios, sino de explicarlos personalmente en valiosas conversaciones.

Por supuesto que cualquier error o malinterpretación que se encuentre todavía en el trabajo es atribuible únicamente a mí.

El apoyo de la Coordinación del Posgrado en Filosofía de la Ciencia y de su Comité Académico fue invaluable, desde mi examen de admisión hasta los trámites de egreso, y a lo largo de los severos problemas que enfrentó nuestra Universidad en el segundo año de mis estudios.

En general quiero dar las gracias a todos, en el Posgrado, en mi Facultad, en la UNAM y fuera de ella, que creyeron que un matemático con tantos años de hacer matemáticas aplicadas podía encontrar el punto de vista que le permitiera incursionar adecuadamente en el campo de la filosofía. La confianza y el apoyo de mi familia, amigos, colegas y maestros generaron un entorno en el cual mi aprendizaje pudo conducir a este trabajo, aunque el camino no siempre fue fácil y hubo que enfrentar diversos problemas.

Para concluir quiero dedicar este trabajo a cuatro personas cuya música me ha acompañado desde mi adolescencia y estuvo presente en muchos momentos de la gestación y escritura de esta tesis: The Beatles.

México, D.F., marzo de 2004.

Índice

Introducción

Introducción.

Primera Parte. ¿En qué sentido representa un problema filosófico la aplicabilidad de las matemáticas?

¿Qué significa que las matemáticas sean "aplicables"? Esta pregunta tiene al menos dos vertientes. Por un lado podemos preguntarnos por aquello en su naturaleza que confiere a las matemáticas la posibilidad de ser aplicadas. Por otro podemos constatar como un hecho el que las matemáticas se aplican, y preguntarnos por las implicaciones, las consecuencias de ese hecho. Podemos examinar el entramado de esa situación y analizarlo con miras a encontrar algún significado. Es a esta segunda posibilidad de análisis a la que este trabajo se enfoca.

En un libro de física, a cualquier nivel, aparecen fórmulas y símbolos matemáticos página tras página. Muchos economistas se esfuerzan en introducirlas, otros en evitarlas. Biólogos, sociólogos, médicos se encaran a ecuaciones diferenciales o a métodos estadísticos más o menos refinados. La historia de nuestra civilización se encuentra inextricablemente mezclada con el desarrollo de la matemática moderna y sus aplicaciones. No es aventurado decir que la aplicación del cálculo diferencial e integral fue tan importante como la invención de la máquina de vapor, por sus posibilidades de aplicación.

La idea de aplicación no se limita a las matemáticas. La química, por ejemplo, se aplica en la biología, si por "aplicar" se entiende por un momento simplemente constatar que en la práctica y teoría de la biología aparece con frecuencia la química. Por lo tanto es válido preguntarse qué significa este hecho. La respuesta es fundamentalmente técnica: gran parte de las relaciones en biología son químicas, o se basan en procesos químicos. A pesar de aspectos de interés, esta pregunta no alcanza a representar un problema. En el caso de la aplicabilidad de las matemáticas la situación es otra. No es posible dar una explicación con respuestas específicas a preguntas inmediatas [Folscheid y Wunenburger, pp. 342, 343]. Por ejemplo, no es suficiente con respuestas técnicas, sino que es necesario abordar una cuestión compleja, que engloba y entrelaza diversos círculos de preguntas que nacen y se ramifican en la reflexión sobre las matemáticas, la física y, más que nada, la interacción entre ambas ciencias.

No se trata de analizar el caso más general, lo que significase el hecho de que las matemáticas se apliquen (en cualquier ciencia), sino lo que pueda significar que las matemáticas se aplican con éxito en la física. Inclusive, el núcleo de mi esfuerzo se centra en un estudio de caso: la aplicación de los espacios de Hilbert en la mecánica cuántica, tanto en sus aspectos descriptivos como dentro del contexto de descubrimiento de nuevas leyes físicas. Además del interés intrínseco de este caso y de su relevancia para la discusión, es mi convicción que es conveniente acercarse a la problemática de la aplicabilidad de la matemática en general a partir del estudio de casos significativos como estos.

La relación entre las matemáticas y la realidad ha estado siempre entre las preocupaciones básicas de la filosofía de la matemática. Dentro de este ámbito se ha explorado con intensidad la idea de aplicación. Este trabajo, sin embargo, parte de un hecho, o si se quiere del asombro ante un hecho: las matemáticas son efectivamente aplicables y han sido aplicadas a la física[1]. Esto nos ubica en el área de confluencia entre la filosofía de las matemáticas, la de la física y la de la filosofía de la ciencia. Desde esta perspectiva el análisis se centra en la capacidad de descripción de procesos y fenómenos expresándolos por medio de sistemas matemáticos y, sobre todo, en la aplicación de las matemáticas en el proceso de descubrimiento de leyes físicas. Esto también da otra razón para haber escogido a la mecánica cuántica como caso de estudio, pues relaciones fundamentales en **ella**, como la ecuación de Schrödinger, fueron descubiertas por medio de analogías matemáticas.

Fue el filósofo Mark Steiner[2] el que llamó recientemente la atención sobre la aplicación de analogías matemáticas en el contexto de descubrimiento. De hecho parece ser el único o casi el único que ha lanzado la discusión al respecto *en este contexto.* Habiendo entre él y yo convergencia en cuanto al tema y discrepancias básicas en cuanto a las conclusiones, y dada también la novedad de la cuestión, opté por entablar una discusión directa y a fondo con ese autor como medio para presentar sus puntos de vista, en especial aquellos novedosos, y llevar a cabo una crítica que me permitiese exponer y desarrollar mis propios puntos de vista.

A diferencia de la reflexión dentro de la filosofía de las matemáticas, aquí hay pocos caminos trazados, más bien son senderos, direcciones, indicaciones, dudas y asombros. El principio del camino está dado por Frege [Frege]. Partimos, Steiner y yo, de la premisa de que Frege nos ha enseñado cómo intervienen los conceptos matemáticos en el discurso de las ciencias empíricas. Más allá debemos arreglárnoslas en los fundamental con el apoyo que nos puede dar nuestro conocimiento de la práctica de la aplicación de las matemáticas en la física y las indicaciones que matemáticos y físicos pudiesen proporcionar.

El objetivo más general de esta tesis es mostrar cómo la aplicabilidad de las matemáticas en la física, en especial desde el punto de vista del contexto de

---

[1] Y, por supuesto, a muchos otros ámbitos de las ciencias empíricas.
[2] Profesor de la Universidad Hebrea de Jerusalén y autor de Mathematical Knowledge, además del texto que aquí nos ocupa: *The applicability of mathematics as a philosophical problem*. Referencias en la bibliografía.

descubrimiento, lleva a una discusión no sólo interesante, sino de importancia para la filosofía de la ciencia. En el caso de Steiner la situación es extrema, pues esa aplicabilidad le da la pauta para plantear que el universo tiene características antropocéntricas, como se verá. Esto me lleva a exponer y criticar a fondo su posición, tanto para mostrar en qué sentido su camino, al menos tal como lo presenta en [Steiner] no consigue llegar adecuadamente a su conclusión, como para a lo largo de esa confrontación ir delimitando mi propia posición. El estudio de caso me permite entonces argumentar que el interés filosófico de la aplicabilidad de las matemáticas en la física radica en la profunda interacción de la una con la otra. Es ésta una situación compleja, en la que múltiples factores se entrelazan y condicionan mutuamente, generando una serie de problemas, planteamientos, dudas y afirmaciones que son los que van dibujando el problema global. Tal como la discusión irá mostrando, el problema es multifacético y aunque hay aquí y allá algunas ideas en el ambiente, en sí, con excepción del trabajo de Steiner, ha sido poco explorado.

Quiero destacar que esta problemática afecta tanto a la matemática misma como a la concepción que tenemos de ella. Ya no es la blanca ave que sobrevuela el pantano sin mancharse, sino que es también parte de ese medio y su misma blancura no es independiente del ambiente en que se desplaza. Dicho menos metafóricamente, al final de este primer estudio habremos acumulado y articulado, en ocasiones de manera preliminar, suficientes elementos como para afirmar que las aplicaciones, en especial a la física, han dejado huella en ambas ciencias, y que la filosofía de la ciencia y, desde su propia problemática, la de las matemáticas podrían tomar con interés lo que aprendemos de esta discusión.

Un ejemplo que se retomará en el texto puede aclarar este punto. Los cuaterniones han sido analizados por la filosofía de las matemáticas como un ejemplo de desarrollo interno[3]. Por ejemplo, en algunos esquemas se pasa del número real α a los complejos (α, β), y de ahí a los cuaterniones $((\alpha, \beta), (\chi, \delta))$. Sin embargo, el desarrollo de los cuaterniones por Hamilton fue motivado de

[3] Agradezco a Axel Barceló haberme llamado la atención al respecto.

manera decisiva por las necesidades de la física de su tiempo. En mi opinión haríamos bien en no separar de manera tajante entre lo que tiene lugar al interior de la matemática y la interacción concreta de ella con otras ciencias, sino empezar a considerar a ambas como aspectos de la misma situación. Todavía habrá que analizar con mayor detenimiento los problemas que han ido surgiendo, yendo más allá de lo que aquí se hará. En este trabajo sólo llegamos de retorno al punto de partida, al hecho de que las matemáticas se aplican, pero este regreso nos permite dar el cambio de dirección. Empezamos desde las matemáticas hacia la física, concluimos en el mismo punto, pero ahora viendo las cosas desde la aplicación *en* la física *hacia* las matemáticas. Pienso que al llegar aquí habré podido mostrar que vale la pena, en futuras indagaciones, avanzar en esa dirección.

***

Para establecer de qué manera interviene la matemática en el contexto de descubrimiento de leyes físicas debemos comenzar por preguntarnos que significa "aplicar las matemáticas en la física". No se trata aquí de indagar sobre las razones de esa aplicabilidad, sino preguntarnos de manera muy concreta cómo se aplican en este caso[4]. Los aspectos más generales fueron discutidos por Frege y aceptamos como base la presentación que lleva a cabo Steiner de ello en el segundo capítulo de [Steiner]. Pero una vez que incursionamos en el caso específico de la física tenemos él y yo mucho por delimitar. Mi ventaja es que Steiner ha hecho señalamientos valiosos, pero que no puedo aceptar junto con todo su sistema. Debo reubicarlos, a veces radicalmente, para poder enmarcarlos en mis propios planteamientos.

No hay una sola manera de entender lo que significa "aplicar las matemáticas a la física". Por ejemplo, es posible preguntarse si la matemática se aplica de la misma manera que se "aplica" una llave de tuercas para apretar o aflojar una tuerca. Otra opción es pensar que tal vez la matemática sea un "lenguaje" de la ciencia, en especial de la física, como se ha dicho tantas veces. Se puede también pensar

[4] Lo que con seguridad dará indicaciones valiosas sobre aplicaciones en otras ciencias.

que es una manera sumamente eficiente y condensada de presentar y organizar nuestras ideas físicas, pero sólo como una "taquigrafía", eficiente pero a fin de cuentas prescindible. O todo lo contrario, tal vez fuese *la* manera o una "mejor" manera de representar problemas físicos reales. ¿Los describe, los expresa? ¿Construye o constituye esa realidad? ¿En verdad tiene algo que ver con ella? ¿Es lo que permite a la física mentir eficientemente (como cierta filósofa sostiene) sobre algo a lo que quizá ni siquiera tengamos acceso más que muy indirectamente? O tal vez sea la esencia misma de la realidad...

Una de las tareas a que me enfrento es establecer en qué sentido se entenderá en el texto el concepto de "aplicación". Se hablará de calcular, describir, representar. La noción fundamental será la de la matemática como medio de exploración y descubrimiento.

***

Steiner documenta (capítulos 4 a 6 de [Steiner]) cómo ha sido práctica exitosa emplear analogías matemáticas para establecer los sistemas matemáticos que expresan ciertas leyes físicas del ámbito cuántico, a partir de las expresiones de leyes del ámbito de la mecánica clásica. Esto es cualquier cosa menos trivial, ya que son ámbitos cualitativamente diferentes.

Esas analogías, según él, se plantean con base en la "forma" matemática de las leyes clásicas, utilizando manipulaciones sintácticas; serían entonces analogías puramente formales. Esto no es totalmente correcto. Para empezar hay preguntas apremiantes que no son tratadas a fondo por el autor, como aquello que pudiese ser la "forma" en matemáticas. Esto representa por sí mismo un complejo círculo de cuestiones. En mi opinión Steiner ha tocado un punto clave: las matemáticas se aplican también en el contexto de descubrimiento, pero no es algo "puramente formal". Depende más que nada del sentido físico, del sentido matemático y de la interacción entre ambas ciencias encaminada a encontrar la expresión adecuada y significativa de algunas leyes físicas, basándose en la experiencia y los datos que se generan en la práctica de la física, en los estímulos que ésta proporciona a la matemática y los conceptos que esta última proporciona a la física.

Es un camino hacia el descubrimiento de la expresión de leyes y procesos, no hacia el descubrimiento de nuevos entes físicos. La matemática permite también describir nuevos entes, como las partículas infraatómicas, y se estudiará esa capacidad descriptiva. Esas leyes y su expresión matemática han intervenido, a veces de manera decisiva, en descubrimientos de esas partículas.

***

"Aplicable" significa "capaz de ser aplicado". Suponiendo que se sepa qué significa "ser aplicado", ¿son "aplicables" las matemáticas? Es un hecho que ciertas partes de ella se aplican, otras no. Sin embargo, la historia muestra que tampoco es posible descartar la posibilidad de que tal o cual concepto o teoría lo sea. Asumiendo que se le pueda dar un sentido preciso, limitado o no, a la idea de "aplicación", cualquier concepto, desarrollo o teoría matemáticos podría llegar a ser aplicado. Basándose en el hecho de que efectivamente hay conceptos y teorías matemáticas que se aplican, la matemática es, de manera global, aplicable.

¿Plantea esa aplicabilidad algún problema filosófico de interés? No es la pregunta clásica acerca de la relación entre matemática y realidad, que incluye ésta y otras preguntas, por ejemplo cómo es posible aplicarla, su relación con la verdad, la cuestión acerca de la existencia de los conceptos matemáticos, etc. El que la pregunta que nos ocupa tenga una respuesta depende, entre otros aspectos, de los aportes que la reflexión concreta sobre esas otras cuestiones proporcione, en especial de las respuestas, así sean parciales o exploratorias, que se den a ciertas preguntas claves, como al origen de los conceptos matemáticos o a lo que se entienda por "aplicación" en general.

Por ejemplo, supóngase que se absolutiza la respuesta de Aristóteles y se afirma (dicho sea esquemáticamente) que los conceptos matemáticos surgen como abstracciones de relaciones objetivas. La aplicabilidad se puede entender entonces como un problema técnico, más que filosófico, de dilucidar las redes de abstracción que entrelazan lo objetivo con sus representaciones abstractas. En el otro extremo se encontraría quien afirmara que los conceptos matemáticos son invenciones puras del espíritu humano. La aplicabilidad equivaldría a constatar que un cuadro de Picasso o una sinfonía de Mozart permitiesen construir un mejor automóvil o diseñar un chip Pentium 5. Habría un misterio en la exitosa aplicación de ese tipo de conceptos a aspectos científicos. Entre estos dos extremos el espectro ofrece una amplia gama de cuestiones.

Ahora bien, el círculo de cuestiones al que me enfrento en este trabajo ha trasladado su centro, como se señalaba, a cuestiones de la interrelación entre matemáticas y física, hacia el contexto de descubrimiento y la práctica de la física.

***

En general, la aplicabilidad representa un problema mayor para aquellos que asumen que los resultados de la actividad matemática son independientes de la experiencia empírica [Thiel, p.35]. Esto lo expresó Einstein:

> ¿Cómo es posible que la matemática, que es un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, corresponda tan adecuadamente a los objetos de la realidad? ¿Puede entonces la razón humana, sin experiencia, tan sólo por el pensar, analizar características de las cosas reales? [Citado en Thiel, p.24.]

Einstein tenía buenas razones para sentirse asombrado. En la segunda parte del siglo XIX un joven profesor de matemáticas, Riemann, casi proverbial ejemplo del investigador encerrado en su torre de marfil, había desarrollado un concepto crucial para la teoría física de la que Einstein se ocupaba, el de tensor.

Otro gran físico, Eugene Wigner, planteó el problema de la siguiente manera:

> "La irrazonable efectividad de las matemáticas en las ciencias naturales es un don [*giff*] que ni entendemos ni merecemos" [Wigner].

Desde este punto de vista la aplicabilidad de las matemáticas plantea problemas que para Steiner[5] es factible caracterizar con la palabra "misterio". El autor, sin embargo, no aclara qué entiende por esa idea.

No estamos frente a algo como las conjeturas de Hilbert, o el problema de los tres (o más) cuerpos, o el de Fermat, o la búsqueda de los llamados "eslabones perdidos" en las cadenas evolutivas, por más que no siempre estemos seguros de poder encontrar la respuesta. Asumo que, en concordancia con usos cotidianos del término, una cuestión es "misteriosa" si hay algo oculto que me impide entenderla. Hay algo a lo que no tengo acceso. Pero para evitar connotaciones que no vienen al caso [Ferrater, artículo Misterio], considero sólo misterios solubles o potencialmente solubles, inclusive con los medios de la ciencia. Asumo que Steiner estaría casi por completo de acuerdo, pues habla de "disipar el misterio", pero en el caso general requiere de una instancia más allá de la ciencia, el antropocentrismo, para explicar el "misterio" de la aplicabilidad de las matemáticas en el proceso de descubrir leyes físicas a nivel cuántico aplicando analogías matemáticas. Como sea, para él el problema es a fin de cuentas soluble.

Sería "misterioso" que la matemáticas sean aplicables, y por lo tanto es un hecho a explicar el por qué efectivamente se aplican. Este misterio debe entenderse en un sentido global. No es la aplicabilidad de un determinado concepto o teoría lo que debe, desde este punto de vista, ser misterioso, sino la aplicabilidad de esa ciencia en su conjunto. Aunque también radica parte del misterio en algunos aspectos de la aplicación de conceptos o teorías particulares.

Reduciéndonos a la aritmética, por ejemplo, hay serios cuestionamientos acerca de las razones que se han dado para explicar por qué de la fórmula "7 + 5 = 12" es posible deducir que si tengo siete manzanas sobre la mesa y añado cinco más el resultado será doce manzanas. Pero también se han dado razones bastante convincentes para explicar la aplicabilidad de la aritmética, la geometría y otros casos. Por ejemplo, como se comentará brevemente más adelante, la explicación

[5] En conversaciones informales con físicos ha surgido también esa palabra en el mismo contexto.

de Frege acerca de la aplicabilidad de la aritmética es muy sólida [Steiner, cap. 1]. La historia antigua da también sustento a buenas explicaciones en el caso de la geometría. De existir aquí un misterio, no radicaría en la aplicabilidad del concepto de suma de números naturales, sino en la aplicabilidad de la aritmética de manera global. En general, aunque tal o cual caso concreto pueda explicarse, el misterio parece radicar en por qué no es posible descartar que *cualquier* teoría o concepto matemático pueda llegar a ser aplicado, y no sólo aquellos cuya relación con algunos aspectos de lo empírico pueda ser clarificada. La cuestión radica en la aplicabilidad global de esta ciencia.

Esta situación se exacerba conforme la matemática evoluciona y se aleja de posibles relaciones con aspectos objetivos, para volverse una actividad que se desarrolla, al menos en lo fundamental, de acuerdo a motivaciones internas. Si bien pudiera ser que la aritmética se desarrolla porque tengo que saber cuántas ovejas hay en un rebaño en el que nacieron tres y fueron sacrificadas dos, o porque la necesidad de sembrar la cosecha en el momento adecuado del año requería un manejo eficiente de las fechas, o el álgebra básica era necesaria para la contabilidad del comercio, no parece haber habido ninguna razón práctica para que Riemann y sus colegas se tuvieran que dedicar a desarrollar la idea de "tensor". Ha habido, como se comentará, otros desarrollos más apegados a tal o cual necesidad extra-matemática, pero esto no explica por qué otros son igualmente aplicables, a pesar de haber sido desarrollados como "producto del pensamiento humano independiente de la experiencia".

Es por ello que, de haber algún problema filosófico de interés, es preferible concentrarse en los desarrollos que comienzan con Newton y Leibniz y alcanzan su clímax en lo que se entiende por "matemática pura" en el siglo XIX y en especial a lo largo del siglo XX.

No se pretende dar una respuesta exhaustiva o, como en el caso de Steiner, definitiva. Se trata de discutir la situación a fondo, mostrar su relevancia filosófica y delimitarla frente a la problemática que arroja la existencia de un misterio en su aplicabilidad: En nuestra opinión no hay tal misterio, o, al menos, hay buenas razones para dudar que lo haya.

Segunda Parte. Nuevos planteamientos en torno a la aplicabilidad de las matemáticas

En lo fundamental las ideas presentadas al final de la primera parte se irán desarrollando a lo largo de la confrontación con una posición extrema, la presentada por el filósofo Mark Steiner en su libro *The applicability of mathematics as a philosophical problem* [Steiner][6]. En vez de tratar de disipar el misterio, Steiner opta por exacerbarlo, por llevarlo al límite, a efecto de no dejar más opción que buscar alguna explicación a ese misterio fuera de las matemáticas, fuera mismo de la ciencia. Para este autor la raíz del problema radica en lo que él considera un hecho: las matemáticas tienen características antropocéntricas en su concepción global. Como él mismo dice, para llegar a ello, sin embargo, tiene que cascar más de una "dura nuez filosófica". Pero una vez llegando a ese punto el camino es claro. Si las matemáticas son antropocéntricas, y si al aplicarlas[7] es posible llegar a conocimiento profundo del universo, al menos en la física, el universo mismo tiene que tener características también antropocéntricas, lo que cerraría el círculo y disiparía el misterio. La aplicabilidad de las matemáticas tiene su razón última en características globales del mundo en que vivimos.

No es meta de este trabajo mostrar que el universo no sea antropocéntrico. Bien podría serlo, aunque lo dudamos. Así como Steiner sostiene que es plausible que las matemáticas sean antropocéntricas [p. 66], sostenemos que lo contrario es lo plausible, y su misma argumentación, o más bien sus debilidades, es lo que da pie a un análisis que lleva a ello. Pero si no es plausible que las matemáticas sean antropocéntricas, la argumentación pierde su fuerza. Es entonces cuando menos

---

[6] A partir de este punto las referencias a [Steiner] llevarán solamente la página o capítulo al que se hace referencia. Toda otra cita llevará autor.
[7] Aquí es fundamental aclarar en qué sentido se "aplican".

dudoso que las matemáticas puedan dar argumentos para sustentar que el universo es antropocéntrico.

El camino es largo, pero lo sentimos altamente interesante, tanto desde el punto de vista de la filosofía como de las mismas matemáticas y su historia. Esta discusión ha permitido plantear o al menos empezar a plantear un par de problemas desde una nueva perspectiva.

La estructura general de este trabajo se presenta en la primera parte del capítulo 1.

***

Para entender el significado de la aplicabilidad no basta con constatar que tal o cual concepto matemático es aplicable en tal y cual área de la ciencia. Es necesario, eso consideramos, una mínima comprensión de ese concepto, tal como los matemáticos lo perciben, y de la manera en que se aplica. Es por ello que se ha concedido importancia a la definición y discusión de algunos conceptos y a su ubicación histórica, con conciencia de que los aspectos históricos son de importancia, en algunos casos indispensables, pero al igual que en ciencia, "without a theory and mechanism, data and evidence drift aimlessly on a boundless sea" [Shermer].

En este trabajo se presentarán algunos ejemplos que permiten vislumbrar aspectos que la manera más difundida de presentar la historia de las matemáticas no deja percibir. Con pocas excepciones esta historia se presenta como acumulativa, progresiva y eminentemente teleológica: los conceptos en su forma actual serían el fin último de una evolución acumulativa que tiende a ellos. Dos de los ejemplos que se analizan muestran que esto no es necesariamente así. El primero es el caso de la contraposición entre la idea de infinitesimal y la de límite. El segundo es el del surgimiento del concepto de vector frente al de un concepto menos conocido, inclusive entre matemáticos, el de cuaternión. Este último problema permite también introducir otros elementos de álgebra lineal, como el de tensor.

Acepto que quizá sea un tanto desmedida la tendencia a poner ejemplos lo más concretos posible, o a comentar problemas aparentemente poco relacionados con el tema principal de este trabajo, lo que puede hacer menos fluida la presentación. Sin embargo me parece es en esos casos donde es posible ver con mayor nitidez aspectos sutiles tanto de los mismos conceptos como de la manera en que la física y la matemática se entrelazan, que de otra manera no son perceptibles por los no especialistas. Así se pueden presentar los problemas ubicando de más adecuada manera el punto de vista que debe tomar quien se pregunta por las cuestiones filosóficas que implica la aplicabilidad de las matemáticas.

Tercera Parte. Esquema global del presente trabajo.

No es la relación general entre matemáticas y realidad la que nos ocupará. No se habla de la "verdad" de proposiciones matemáticas, ni del origen o esencia de sus conceptos, fuera de algún comentario ocasional. Se hablará de un cierto aspecto de esa relación, la "aplicabilidad", en especial a la física. La pregunta rectora, que delimita el tema específico del trabajo, es aquella acerca de la relevancia filosófica de esa aplicabilidad. Esta es todavía una cuestión demasiado general, por lo que el análisis se concentra en los aspectos más concretos ya señalados. Este planteamiento se desarrolla a través de la discusión con las tesis de [Steiner].

Esa pregunta genera un círculo suficientemente amplio de cuestiones como para poder afirmar que la reflexión filosófica al respecto está a la par de la reflexión sobre cualquier otro aspecto de la relación entre las matemáticas y la realidad.

De una manera muy sucinta en [Steiner] se afirma que la unidad del corpus de las matemáticas actuales sólo puede ser entendida en términos de aspectos antropocéntricos, en especial por nuestro sentido estético. Por lo que el "misterioso" éxito de sus aplicaciones sólo puede ser entendido como indicando que hay un componente antropocéntrico en el universo.

Mi posición básica es una afirmación de la relevancia del problema, pero partiendo de otras premisas. Por más que sea algo sumamente complejo, no parece ser necesario invocar aspectos no susceptibles de ser englobados en el pensamiento científico, como el antropocentrismo, para poder afirmar que la reflexión sobre la aplicabilidad de las matemáticas es fructífera. En la discusión sobre las tesis de Steiner la estrategia será básicamente crítica: ¿Pueden esas tesis y su argumentación pasar por un análisis detallado y mostrar suficiente poder de convencimiento?

La discusión no puede darse en el vacío, es necesario especificar, si es posible definir los conceptos que irán apareciendo en la discusión. De ahí el siguiente esquema de desarrollo del trabajo:

- Presentación general.
- Presentación de los conceptos que intervendrán con frecuencia en la discusión, como lo que pueda ser un "cálculo", o de qué se quiere hablar al mencionar la "forma" de un ente matemático.
- Presentación de las tesis de Steiner y de la argumentación que las sustenta.
- Análisis crítico de esas tesis.
- Un estudio de caso: La aplicación de los espacios de Hilbert en la mecánica cuántica.
- Conclusiones.

La crítica a Steiner culmina afirmando que la argumentación del autor no tiene suficiente poder de convicción como para que un adherente de otras tesis tenga que verse obligado a dudar, o renunciar, a sus creencias. El análisis de sus argumentos indica que la validez de la tesis del antropocentrismo del universo descansa en lo fundamental en la tesis del antropocentrismo de las matemáticas. Si esta tesis no es válida, la argumentación presentada no puede sustentar la validez de la tesis general.

Por lo tanto, una vez expuesta la argumentación general, me concentro en la sustentación que da el autor a la tesis del antropocentrismo en matemáticas: Las matemáticas son antropocéntricas porque los matemáticos, al menos desde la segunda mitad del siglo XIX y a lo largo de todo el siglo XX han establecido que un concepto es matemático (o no) con base, en lo fundamental, en dos criterios de selección que son "específicos de nuestra especie". En primer lugar por el valor estético que han concedido a esos conceptos. En segundo lugar por la capacidad de algunos conceptos de ayudarnos a superar, más o menos, "las limitaciones en el poder computacional de nuestro cerebro" [p. 7]. El autor no discute otros criterios de selección de conceptos, por lo que parecen ser estos, para él, los decisivos, en especial el estético.

Sólo de esta manera podría entonces explicarse que teorías aparentemente sin nada que ver unas con otras[8] sean parte integral de las matemáticas y no, por ejemplo, la teoría del ajedrez[9]. Entonces, dado que hay estrategias de descubrimiento en física que se basan en la capacidad global de aplicar las matemáticas, más que en la aplicabilidad de tal o cual parte de ellas, y esas estrategias han tenido éxito, y globalmente las matemáticas serían antropocéntricas, entonces habría estrategias exitosas de descubrimiento que se basan en características específicas de nuestra especie. Este éxito sólo podría entenderse si hubiera algo en el universo que "respondiese" a esas características propias de los seres humanos[10].

En el tercer capítulo de este trabajo las razones que da Steiner para sustentar la tesis del antropocentrismo de las matemáticas son sometidas a un detallado análisis. Ese análisis indica que, siendo estrictos, el autor no demuestra más allá de toda duda razonable su tesis; más que una tesis es un principio que se presenta como plausible. O, en el mejor de los casos, como una explicación que se asume como adecuada en vista de que no parecería haber otras opciones razonables. Por lo tanto, mi estrategia se basa en presentar con claridad el esquema lógico de Steiner, y en mostrar que hay otras posibles explicaciones que son al menos tan plausibles como la suya y en mi opinión tal vez más. No parece haber manera de demostrar que el factor estético sea determinante como criterio

---

[8] Steiner no da ejemplos de esta teorías disímiles.
[9] Ejemplo que Steiner toma de [Hardy].
[10] El argumento, como se verá, es más complejo de lo que esta primera presentación muestra.

de selección de conceptos en matemáticas, ni cuáles pudiesen ser esas "limitaciones en nuestro poder de cálculo".

En especial, como el estudio de caso muestra, la interacción entre la física y las matemáticas, además por supuesto de otros factores, ha dado fuertes impulsos al desarrollo de ambas ciencias, por lo que no queda mi propuesta en lo puramente negativo, la pura crítica a Steiner. A lo largo de esa discusión es posible acumular elementos que van generando un contexto en el cual las preguntas primeras van siendo sustituidas por círculos de cuestiones que van desarrollándose hasta delimitar los principios básicos de un problema. Es en sus aspectos de interacción con otras ciencias, en especial la física, y en la reflexión de y sobre ella misma a lo largo de su desarrollo donde se fundamenta la relevancia filosófica de la aplicabilidad de las matemáticas.

***

Vale la pena mencionar explícitamente algunos de los círculos de problemas que fueron surgiendo a lo largo de la discusión, pues no a todos se les pudo dar el mismo tratamiento. En el primer capítulo se analiza con cierto detalle la idea de aplicación y hay una introducción a lo que pueda ser la forma en matemática. En el último capítulo se analiza un poco lo que pudiese ser el uso formal de las matemáticas de parte de los físicos.

Todavía falta mucho por decir en cuanto a que signifique que un sistema matemático "representa" a un sistema físico. Lo mismo pasa con el factor estético en matemáticas, que aunque se menciona con frecuencia apenas se profundiza en su significado, ya que esto llevaría por derroteros ajenos a las preocupaciones que nos ocupan. Es innegable que hay aspectos que pueden inclusive indicar que el factor estético, en ciertas ocasiones y circunstancias, pudiese ser un buen indicador en búsquedas y exploraciones, pero aún queda mucho por analizar hasta poder establecer qué tan adecuado es y cuales son sus límites.

La selección de conceptos y los criterios empleados en ella son con seguridad un campo fructífero donde las reflexiones de este trabajo pueden continuar y donde la interrelación con la filosofía "pura" de las matemáticas puede ponerse de manifiesto. Seguramente hay criterios que se dan estrictamente al interior de la práctica matemática, pero uno de los objetivos de este trabajo es mostrar que la práctica de la física también influye o puede influir en esa selección, o al menos dar estímulos significativos para ciertos desarrollos.

La apertura hacia esas problemáticas es una de las contribuciones de este trabajo, a pesar de dejarlos abiertos, o quizá precisamente por permitir abrirlos desde un nuevo punto de vista.

Capítulo 1

Capítulo 1. Temática y objetivos. Primeros planteamientos alrededor de la aplicabilidad de las matemáticas

Organización de este capítulo.

Este capítulo tiene dos objetivos básicos. Por un lado introducir la problemática que se va a analizar y establecer los objetivos del trabajo, dando también su estructura general.

Por otro lado precisar el sentido de algunos conceptos e ideas que se manejarán a lo largo del trabajo. Esta es la tarea de la segunda parte del capítulo. Dada su extensión y la heterogeneidad de su contenido, en una primera lectura es factible usarlo más bien como una especie de diccionario. Por ejemplo, la idea de "calcular" aparece reiteradamente en el trabajo, tal como asumo "funciona" en el contexto de la física. Sin embargo, dada la proliferación de "cálculos", desde lógicos hasta simbólicos, no hay garantía de que el lector entienda la idea tal como la uso. Por ello, quien proceda a la lectura de los capítulos posteriores sin leer antes esa segunda parte, puede leer la Sección 1 de la segunda parte cuando sienta la necesidad de cotejar su posición con la que aquí aparece.

Parte 1. Temática, objetivos y estructura del trabajo

Sección 1. Delimitación del problema.

¿Plantea la aplicabilidad de las matemáticas alguna problemática filosófica? Hay diversas maneras de plantear esa problemática dependiendo de lo que se entienda por "aplicar las matemáticas" y de la posición que se asuma en cuanto al origen de los conceptos matemáticos.

Si la matemática se entiende como una actividad racional alejada de la experiencia empírica y guiada por lineamientos propios, internos a ella, es sorprendente no sólo que sea "útil" en las ciencias naturales, sino que sea indispensable para su desarrollo, en especial para la física, al menos tal como esta ciencia se presenta hoy en día. Esa actividad puede entenderse tanto como la exploración de un mundo "platónico", fuera del espacio-tiempo, como la invención o generación de conceptos racionales bajo ciertos lineamientos o restricciones, o cualquier punto del espectro entre estas posiciones extremas.

Si, por otro lado, se piensa que las matemáticas surgen del estudio de aspectos objetivos, como mantener aspectos contables, dividir las extensiones abonadas por las inundaciones del Nilo o predecir las fechas adecuadas para la siembra, procediendo a partir de estas y situaciones parecidas por abstracción u otros procesos racionales, no queda por ello claro cómo se pueda dar una convergencia tan adecuada entre conceptos avanzados y las necesidades de la física actual. ¿Cómo es posible que reiterados procesos de abstracción, generalización, especialización y otros mantengan la dirección correcta hacia las aplicaciones?

Más allá de sí los conceptos matemáticos tienen su origen último en experiencias empíricas o no, esta ciencia presenta hoy en día una división mucho más tajante entre sus desarrollos internos y sus aplicaciones que por ejemplo la química y sus aplicaciones en la biología, o la geografía y sus aplicaciones en la historia. El espacio histórico es un espacio geográfico y la biología puede verse, en más de un sentido, como química, pero la interacción entre física y matemáticas no es tan clara conceptualmente, aunque sea un hecho que la física actual está matematizada de arriba abajo, mientras que podría parecer que la matemática sigue adelante su desarrollo con independencia de cualquiera de sus aplicaciones.

Subsección 1. Aplicar las matemáticas e idea de representación

Al hablar de aplicar las matemáticas se estará siempre hablando de dos áreas diferenciables: las matemáticas y aquella o aquellas ciencias donde se aplican, sin que esto excluya algunos posibles casos donde las fronteras pudiesen ser algo difusas, lo que no afecta la discusión de manera fundamental. El análisis se concentra en las aplicaciones a la física tal como se entiende en la época moderna y en especial en la física cuántica, con sólo ocasionales referencias a otras áreas de la física u otras ciencias.

Lo anterior implica que se dará especial énfasis a la aplicabilidad de conceptos que pueden llamarse "avanzados", sin conferir especial atención a la aplicación de conceptos como la suma usual de números enteros ("5 + 7 = 12"), pues se tiene la convicción de que es más urgente hoy en día pasar a esos conceptos avanzados, sin menospreciar los problemas que los aspectos básicos plantean y seguirán planteando. En este trabajo sólo se aludirá de manera indirecta a estos últimos problemas, por un lado cuando se proceda a la discusión del concepto de lo que es un cálculo; por otro cuando se hable de estructuras algebraicas, donde se generaliza y jerarquiza la idea básica de "suma".

***

En general, al hablar de la "aplicación de las matemáticas" a, o en, una ciencia, en especial la física, se tienen en mente al menos las siguientes posibilidades:

1. Se utilizan las matemáticas para elaborar datos y llegar a conclusiones expresadas en la mayor parte de los casos en forma numérica, con lo que se pretende reproducir (aproximadamente) datos ya conocidos o llevar a cabo predicciones cuantitativas. A este tipo de aplicaciones se las llamará "calcular", y se dirá que la matemática se usa o utiliza para calcular.

2. Las matemáticas se usan para describir algún fenómeno o, más adecuadamente, para describir clases de fenómenos. Un ejemplo es la reproducción de la trayectoria de una partícula. Otro ejemplo es la descripción del estado de esfuerzos en un cuerpo sometido a ciertas cargas, por medio de un campo tensorial. La teoría de la relatividad también "describe" ciertos fenómenos, como la distribución de los efectos gravitatorios en el espacio, usando el mismo concepto matemático, campos tensoriales.

3. Las matemáticas se usan como medio de exploración en la búsqueda de la expresión de leyes físicas. Un ejemplo que podría llamarse "paradigmático"

ha sido la manera en que se han determinado algunas leyes en mecánica cuántica.

4. Las matemáticas se usan para representar clases de fenómenos de los cuales no hay manera de tener una descripción en términos de nuestra experiencia. Éste es el caso en mecánica cuántica, ya que, por ejemplo, no es factible tener una "imagen" intuitiva de la gran mayoría de las partículas subatómicas (quizá de ninguna).
5. En algunas áreas las matemáticas se usan para organizar y dar forma a conjuntos de datos. Muchas de las aplicaciones de la estadística se dan en este sentido. Por darle un nombre, se llamará a este tipo de aplicación "administrativa".
6. A un nivel más avanzado de la reflexión, es posible plantear que las matemáticas se "usan"[1] para constituir algunos aspectos de nuestra experiencia. Éste es un aspecto en que no se incursionará.

Sin excluir otras posibilidades, parecen ser las anteriores las principales formas de entender habitualmente lo que significa aplicar las matemáticas. Estas cinco posibilidades pueden también ser punto de partida para preguntas que lleven a otras maneras de entender lo que signifique "aplicar".

El segundo y cuarto puntos arrojan problemas acerca de la distinción entre "describir" y "representar". Puede pensarse que la naturaleza de las matemáticas (y habría que aclarar qué se entiende por esto) no permite dar *descripciones* de los fenómenos físicos; inclusive la curva parabólica más refinada no puede "describir" una trayectoria objetiva, medible, de una partícula, empezando porque en la realidad no hay "partículas" sino sólo cuerpos con una cierta extensión. Con las matemáticas no se podría hacer otra cosa que *representar* aspectos aislados de los fenómenos. Pero también es factible asumir literalmente lo que las matemáticas expresan, como algunos físicos que afirman que tal o cual partícula

---

[1] Las comillas indican que habría que aclarar con mayor precisión qué se quiere decir con el término.

subatómica no es otra cosa que tal o cual grupo algebraico. Ese grupo sería entonces una descripción perfecta, desde un punto de vista práctico, de la partícula.

Uso del concepto de representación

Como indica Ferrater Mora [Ferrater, p. 3076, 3er tomo], "el término 'representación' es usado como vocablo general para referirse a diversos tipos de aprehensión de un objeto (intencional)". Sin embargo, de manera directa no me ocupo de los "diversos tipos de aprehensión de un objeto", sino de algo más concreto, casi "técnico".

Por "una representación matemática de un sistema físico (suficientemente delimitado)" se entiende un sistema de relaciones matemáticas que permita reproducir con un error aceptable la información pertinente a estados ya conocidos del sistema físico y predecir dentro de un cierto rango de tiempo estados futuros del mismo, también con un error aceptable.

De esta manera he tratado de señalar que no es objeto de la siguiente reflexión lo que pudiese ser la "aprehensión de un objeto" matemático o físico sino reflexionar sobre las consecuencias de que podamos proponer, desarrollar, analizar y elaborar un sistema matemático a efecto de obtener información sobre un sistema físico. Esta concepción pretende además ubicar la manera en que la idea de representación matemática se usa en física sin caer en la idea ya mucho más precisa de "modelo matemático de un sistema físico", aunque sea común hoy en día hablar de "modelación matemática de un sistema físico". Los "modelos" serían un subconjunto propio de las "representaciones", por lo que he preferido aprovechar la mayor riqueza de la idea de "representación", aun en el sentido limitado que aquí se presenta, y no tocar el concepto de modelo.

Para los fines de este trabajo es necesario además aclarar en que sentido una representación matemática puede "predecir" o "reproducir" la información sobre un sistema físico. En la mayor parte de los casos se tiene ya o se tiende a buscar una representación cuantitativamente funcional. Se tiene una representación de un sistema Y de ese tipo si dado un conjunto de datos $M_Y[t_0]$ medidos a partir de Y en el instante t_0 se tiene alguna manera de generar otro conjunto de datos M'_Y tal que si se miden los mismos parámetros de Y en t_1, $M_Y[t_1]$, hay un alto grado de coincidencia entre ellos y M'_Y. La idea de aproximación se precisa más en la segunda parte de este capítulo.

Por otro lado ha habido siempre representaciones cualitativas. La teoría de sistemas dinámicos proporciona ejemplos significativos, como es el caso de la llamada "teoría del caos". Estas teorías proporcionan información acerca de la manera en que se comportan los sistemas físicos, como por ejemplo si son estables o tienen singularidades, si hay puntos de equilibrio o atractores, sin que, en general, sea posible deducir valores concretos comparables directamente con mediciones, lo que no descarta cotejar de alguna manera el conocimiento que ofrece el sistema matemático con el conocimiento físico de tipos de sistemas.

Es necesario aclarar que hay representaciones de esos dos tipos, aunque en este trabajo esa distinción no sea relevante. Casi todas las representaciones de que se habla en este trabajo son del primer tipo, cuantitativas.

Más relevante, aunque no decisiva, es la posibilidad de que una representación sea además una descripción del sistema físico. Si es posible establecer una relación entre los componentes del sistema matemático y aquellos del sistema físico, o al menos entre subsistemas de ambos, se dice que la representación "describe" al sistema físico.

Los problemas que aquí se analizarán tienen más que ver con la idea de descripción, o sea con la idea que las matemáticas pueden decir algo acerca de cómo *son* ciertos fenómenos, y no sólo cómo *funcionan*. La funcionalidad "pura" se entiende en el sentido de la teoría de sistemas. Considérese un sistema objetivo[2] como una caja negra, tal que toda influencia hacia ella es representable como una señal de entrada ("input") al sistema, y toda respuesta como una señal de salida ("output"). En algunos casos es posible encontrar una función ***f*** que relacione correctamente esas entradas y salidas, lo que sin embargo no permite afirmar

---

[2] Ya sea físico, biológico, social, etc.

nada concreto acerca de la manera en que esa caja negra procesa la señal de entrada. Esa función ***f*** da entonces la funcionalidad del sistema, pero no necesariamente *describe* cómo es el sistema. Una de las funciones tradicionales de las matemáticas ha sido proveer relaciones cuantitativas entre dos series de datos que pueden interpretarse como *input* y *output* de un sistema.

Delimitar entre descripción y funcionalidad es útil, y permite plantear la posibilidad de que las matemáticas conjunten esos dos aspectos. En mecánica cuántica, por ejemplo, muchas veces no queda claro si el sistema matemático que representa un cierto aspecto de esa ciencia está describiendo lo que es tal o cual partícula, o únicamente ofreciendo un esquema que permite calcular cuando el sistema se encuentre en uno u otro estado, sin que esa posibilidad permite, sin embargo afirmar algo acerca de cómo son esos sistemas.

***

Hay que decir algo acerca de las peguntas que plantea la cuarta posibilidad, el aspecto administrativo, pues parece encontrarse atrás de lo que algunas posiciones filosóficas, en especial algunos nominalistas, entienden por "aplicar las matemáticas". En especial, este uso de ellas permite entender cómo pueden ser útiles sin que en última instancia sean conceptualmente necesarias, aunque sí en la práctica, por su eficiencia en ese manejo "administrativo". Se entendería la "matematización" como un proceso de poner en orden y estructurar los datos y las relaciones conceptuales, como una manera eficiente de organizar y elaborar "lo que se tiene" en una ciencia o parte de ella. Para algunos este sería su único papel, algo así como la gerencia de administración de una fábrica de productos lácteos. El litro de leche concreto es precisamente eso, leche, y como tal no tiene nada que ver con todo el papeleo que genera la administración, y sin embargo sería prácticamente imposible tenerlo como una mercancía sin ese aparato regulador, administrativo.

En este trabajo no se pretende analizar todas las posibilidades de entender qué significa "aplicar" las matemáticas, algunas posibilidades, cómo ésta (la administrativa), no pueden ser consideradas. Esto, a pesar de que no es posible aislar nítidamente las diversas posibilidades de entender lo que pudiese ser "aplicar las matemáticas" y este aspecto administrativo se encuentra presente en gran parte de las aplicaciones, aun en las más refinadas de la física[3]. Sin embargo se parte de que las matemáticas son algo cuya relevancia para la física va más allá de proporcionar una manera adecuada de organizar y administrar datos. El conocimiento plasmado al aplicar un cierto concepto matemático está indisolublemente ligado a esos aspectos conceptuales, y sin ello no sería posible utilizarlo para efectuar cálculos o manejo de datos.

***

Estas últimas ideas pueden ser retomadas desde un punto de vista más radical. Podría ser que precisamente por esa relevancia del aspecto conceptual, el uso de un cierto concepto matemático para representar algo "objetivo" determinase la manera en que ese algo es percibido. Las matemáticas serían entonces constitutivas de nuestra experiencia. Quizá al definir las relaciones infraatómicas por medio de la teoría de grupos se está definiendo lo que *son* las partes constituyentes del átomo, o al menos la manera en que podemos entender o conocer esa realidad. La discusión al respecto tiene facetas profundas, sin embargo no cabe dentro de los objetivos de este trabajo. Con todo el interés que esta idea conlleva, no será posible tomarla en cuenta.

Lo mismo vale para tantas otras posibilidades que ni siquiera se han mencionado, aunque hay un par de ellas que se quisiera descartar, en especial la concepción de la matemática como una "herramienta" o "lenguaje" de la física, de la ciencia en general.

***

De todas esas posibilidades la que es fundamental para este trabajo es la tercera. Es mérito de Steiner haber llamado la atención hacia este punto: *Las matemáticas, por su capacidad descriptiva y de representación, permiten establecer estrategias de descubrimiento en el mundo físico.*

---

[3] Es siempre necesario un manejo estadístico de los datos, por ejemplo.

Supóngase que se sabe qué significa "describir matemáticamente un fenómeno físico". Por ejemplo, bajo una serie de premisas (el cuerpo es considerado una masa puntual, al momento de dejarlo caer no se ejerce ninguna fuerza extra sobre él, etc.), se puede describir con un sistema de ecuaciones[4] la manera en que un cuerpo cae a la superficie de la tierra desde una altura *h*. Ese sistema establece que ese movimiento será rectilíneo, sobre una línea que cruza el centro de la tierra y con aceleración constante. Hay buenas razones para asumir que en todo planeta del sistema solar la caída de cualquier cuerpo, bajo las mismas condiciones, será igualmente descrita por esas ecuaciones. Aún sin tener tan buenas razones un físico puede asumir que la descripción de esa caída no debe ser muy diferente en cualquier otra galaxia. Quizá haya que añadir otro término, quizá la "forma" de la ecuación sea la misma, pero lo que aparece como constante en ella pudiese ser variable (en ciertos límites), cosas por el estilo. Para usar una frase coloquial, caídas son caídas, aquí y en China (o aquí y en Alfa Centauri, o en Andrómeda). Esto equivale a decir que situaciones "parecidas" deberían ser descritas con matemáticas "parecidas". Hasta qué punto esto es así o no es parte de lo que Steiner explora en su libro.

Esta posibilidad es atractiva porque combina dos posibilidades de entender lo que es la aplicación de las matemáticas: descripción y medio de exploración, lo que hace la discusión más rica. Habrá que discutir la idea de qué pueda significar que dos entes sean "parecidos".

***

Incorporando esta última idea quedaría delimitada la primera parte del problema: Qué se va a entender por "aplicar las matemáticas" (en la segunda parte se precisan más algunas de estas ideas). En este trabajo se entiende por "aplicar las matemáticas" en primer lugar los diversos aspectos de lo que significa calcular

[4] De manera estricta lo que las ecuaciones establecen es el contexto en el cual esos fenómenos puede darse, y lo que describe, en un sentido más estricto, es la solución de esas ecuaciones. Pero si se quiere hablar de una descripción en un sentido amplio, es válido decir que es el sistema de ecuaciones, más las condiciones iniciales y de frontera que incorporan los datos concretos, lo que describe la situación física.

para reproducir datos o hacer predicciones cuantitativas. En segundo utilizar las matemáticas para describir o representar clases de fenómenos físicos (y en otras ciencias). Finalmente se aplican las matemáticas al permitir establecer analogías que sirven de estrategias de exploración en algunas áreas de la física. Esto, por supuesto, no implica que no haya otras posibilidades, algunas de las cuales se mencionarán ocasionalmente, pero son estas tres acepciones las de interés en este trabajo.

Así delimitado el problema, cada acepción tiene diversas implicaciones filosóficas (y de otros tipos). Esto vale en especial para las propuestas de Steiner. Precisamente una de las principales objeciones que se hará a su análisis es no haber explorado varios de los aspectos que sus propuestas implican. Para no caer en lo mismo habrá a veces que dejarse llevar por ciertas digresiones, que esperamos poder mostrar no lo son tanto, sino que a fin de cuentas tienen que ver con la discusión.

Subsección 2. Aplicabilidad.

Como se señala en la introducción, "aplicabilidad" se entiende como "posibilidad de aplicar". Es un hecho que ciertas partes de las matemáticas se aplican, al menos en los sentidos mencionados en la sección anterior. La aritmética, la geometría, el álgebra lineal, la teoría de conjuntos aparece en muchas áreas de la vida moderna, sobre todo desde que las computadoras se han vuelto omnipresentes.

Pero también se constata que hay teorías matemáticas que no se aplican en las ciencias empíricas, ni en los sentidos mencionados ni en otros. Una gran parte del *corpus* de las matemáticas puras actuales cae dentro de esta categoría[5]. Se puede hablar con seguridad de la aplicabilidad del álgebra lineal, pues no sólo se ha aplicado ya, sino que se seguirá aplicando. ¿Es posible hablar de la

[5] Para no mencionar desarrollos muy actuales, la teoría de números trasfinitos de Cantor y sus desarrollos posteriores no han encontrado aplicaciones en otras ciencias.

aplicabilidad de las matemáticas de manera global? Si por ello se entiende que algunas partes de ella se seguirán aplicando la respuesta es afirmativa, pero no es tan claro si lo que se quiere decir es que cualquier parte de las matemáticas tiene la potencialidad de ser aplicada.

No parece haber criterios que permitan excluir a ciertos conceptos de ser aplicados. Lo que en un momento formaba parte de lo más "puro" de la matemática, como la idea de tensor o ciertos grupos algebraicos, puede resultar más adelante ser lo adecuado para aplicaciones físicas. O lo que ya se había descartado como "inadecuado" para ser aplicado, como la idea de cuaternión[6] en teoría electromagnética, resulta ser un concepto adecuado en otras áreas, como la robótica.

Por otro lado, el mismo concepto de cuaternión es un buen ejemplo de que tampoco hay criterios que permitan afirmar que tal o cual idea, concepto o teoría es aplicable, al menos no que permitan afirmar donde o cuando lo será. Los cuaterniones fueron desarrollados teniendo en mente necesidades de la física, y al final resultó que no eran satisfactorios para los desarrollos que se llevaban a cabo en teoría electromagnética clásica en la segunda mitad del siglo XIX, y fueron sustituidos por los vectores. Pero más tarde "resucitaron", primero en algunas partes de la mecánica clásica y luego en robótica.

La aplicabilidad de las matemáticas se entiende como la posibilidad de que cualquiera de sus conceptos o teorías puede ser, o lo sea ya, aplicable. Esto no debe implicar que a menor o mayor plazo, ni siquiera de manera tendencial, se esté afirmando que *todos* sus conceptos o teorías llegarán a ser aplicados. Es más, con seguridad habrá siempre un porcentaje alto de conceptos y teoría que no se apliquen. Pero cada vez serán más los conceptos que se apliquen, habrá cada vez más maneras de aplicarlos y algunas ideas serán aplicadas de diversas maneras. Esta situación es la que permite hablar de la aplicabilidad de las

[6] Este es un ejemplo que se seguirá trayendo a colación, por lo que más adelante se dan las definiciones requeridas. Los cuaterniones son los precursores del concepto de vector, y fueron desarrollados en lo fundamental por Hamilton en la segunda mitad del siglo XIX.

matemáticas en un sentido global, aun cuando no hay manera de saber si tal o cual concepto llegará alguna vez a ser aplicado.

***

En este trabajo parto del hecho de que la matemática se aplica. La matemática es aplicable, tanto porque lo ha sido ya, continúa siéndolo, y todo parece indicar que cualquiera de sus partes tiene la potencialidad de ser aplicable.

Una pregunta inmediata es: ¿Por qué son aplicables las matemáticas? ¿Qué hay en la naturaleza de ellas que las hace aplicables?

No es nuestra tarea contestar esta pregunta en toda su generalidad, más bien la idea es problematizarla analizando algunas de las consecuencias del hecho de que efectivamente las matemáticas son aplicables, no tanto de las razones por las cuales lo son. La cuestión es: ¿Cuáles son las consecuencias para el proceso de conocimiento (físico) de que las matemáticas sean aplicables? Aun esta pregunta es demasiado amplia. Haciendo explícito lo que se ha ido presentando, se puede plantear de manera más restringida el tema a tratar: ¿Qué implica el que las matemáticas sean útiles tanto para describir fenómenos físicos y predecir algunos aspectos de su comportamiento, como en el contexto de descubrimiento de nuevas leyes?

Para algunos esas implicaciones son muy profundas. Según Steiner, por ejemplo, bajo ciertas premisas, el hecho de que las matemáticas sean aplicables puede llevarnos a conocer aspectos fundamentales del universo, en especial una de las que serían sus principales características: el antropocentrismo. Para nosotros la aplicabilidad de las matemáticas no sustenta de manera adecuada, al menos no con los argumentos presentados, la tesis del antropocentrismo del universo. Pero esa aplicabilidad brinda claves sobre la manera en que las matemáticas proporcionan conocimiento sobre los aspectos físicos del universo.

Sección 2. Implicaciones de la aplicabilidad de las matemáticas.

Subsección 1. Aspectos generales. Diversas propuestas.

Como se ha mencionado, la aplicabilidad representa un problema mayor para aquellos que asumen que los resultados de la actividad matemática son independientes de la experiencia empírica [Thiel, p.35]. En palabras de Einstein:

> ¿Cómo es posible que la matemática, que es un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, corresponda tan adecuadamente a los objetos de la realidad? ¿Puede entonces la razón humana, sin experiencia, tan sólo por el pensar, analizar características de las cosas reales? [Citado en Thiel, p.24.]

Otro gran físico, Eugene Wigner, planteó el problema de la siguiente manera:

> "La irrazonable efectividad de las matemáticas en las ciencias naturales es un don [*gift*] que ni entendemos ni merecemos" [Wigner].

Desde este punto de vista la aplicabilidad de las matemáticas plantea problemas que Steiner caracteriza con la palabra "misterio". Como mencionaba en la introducción, este autor no aclara en su libro qué entiende por esta idea, a pesar de aparecer reiteradamente. Wigner califica la situación de "irrazonable", mientras que Einstein la presenta en forma de una pregunta. En lo particular, yo prefiero la palabra "asombro", también en el sentido cotidiano del término, sin mayores pretensiones. Creo que sería traicionar el espíritu con que Steiner escribe el usar otro término, a pesar de que no comparto ciertos ecos místicos que me parece escuchar en su presentación. Por ello, como igualmente se aclaraba, las palabras "misterio" y "misterioso" serán entendidas como indicadoras de un enigma, algo que en primera instancia no parece explicable, o que no se tienen suficientes elementos como para explicarlo, pero que a mediano o largo plazo es potencialmente soluble o explicable.

Sería "misterioso" que sean aplicables. Pero el puro misterio[7] o asombro no constituye todavía un problema. Precisamente lo que hace Steiner es tratar de llegar al fondo del misterio para ubicar él o los problemas que están detrás.

¿Desde qué posiciones podría *no* haber un problema, misterio o asombro planteado por la aplicabilidad de las matemáticas? En una primera instancia, si se ha dicho que ésta "representa un problema mayor para aquellos que asumen que los resultados de la actividad matemática son independientes de la experiencia empírica". Por lo contrario, quienes piensen que los desarrollos matemáticos no son independientes de la experiencia empírica no deberían tener grandes problemas con la posibilidad de aplicarla. Esa interacción con la experiencia podría darse de diversas maneras.

La historia de las matemáticas permite afirmar tanto que en sus orígenes estuvieron muy cercanas a la experiencia empírica, como que a lo largo de su desarrollo ha habido interacciones importantes con problemas planteados por otras ciencias, en especial la física. ¿Es suficiente esa interrelación para afirmar que la matemática ha quedado, en lo fundamental, determinada por ella? Una respuesta afirmativa a esta pregunta aclararía las razones de su aplicabilidad.

La interrelación entre las matemáticas y la física permite explicar aspectos importantes del desarrollo de ambas ciencias, como se verá en casos particulares. O, mejor dicho, permite modular, matizar y profundizar algunas explicaciones, pero no aclara muchos otros aspectos, como la naturaleza de los desarrollos dados en la matemática pura y cómo llegan a ser aplicados. Inclusive conceptos muy apegados a las necesidades de la física, como los espacios vectoriales, siguen un desarrollo que no se rige por esas necesidades[8], sino que queda determinado por cualquier cosa que pudiesen ser las matemáticas, y es gracias a que son entidades matemáticas que sus aplicaciones tienen la fertilidad observada.

---

[7] He debido asumir que el autor considera que no es necesario dar una idea más precisa de la palabra "mistario". Más adelante será necesario ubicar mejor este concepto.
[8] Al profundizar más adelante en lo que es el álgebra lineal se aclarará lo que se quiere decir aquí.

La interacción con otras ciencias no elimina el "misterio", sino es precisamente eso lo que lo ubica como un problema. Un concepto es aplicable y fecundo porque es un concepto matemático, y no físico. Por ejemplo, aún hoy en día no es raro encontrar en libros de física la idea de que un vector es "algo con magnitud, dirección y sentido". Ésta no es una definición matemática, sino una manera de ubicar el concepto con ideas pertenecientes o cercanas a la física, y es mostrable que la capacidad de representación, e inclusive de cálculo, que ofrece esta manera de definir un vector es sumamente limitada. A pesar de haber ejemplos de conceptos que aún antes de quedar plenamente encajados en el rigor matemático fueron aplicados, es cuando el concepto se expresa en todo su rigor matemático que es factible desentrañar su potencialidad y aplicarlo con plena riqueza.

***

En el caso del platonismo matemático el misterio se plantea en otro sentido. ¿Cómo es posible que entes situados fuera del espacio-tiempo permitan calcular, describir y representar con tanto éxito lo que ocurre en "este mundo"? Bien podría ser que ambos mundos estén regidos por las mismas leyes, o que "este mundo" sea un derivado o reflexión del platónico. En cualquier caso el misterio adquiere una concreción específica como problema, aunque no es ésta la manera en que se plantea el problema en este trabajo ya que parto de que efectivamente lo son para analizar las consecuencias de ese h, con la mayor neutralidad posible con respecto a posiciones básicas.

Tal vez una manera de eliminar o disipar el misterio de la aplicabilidad de las matemáticas sea negar que se requieran, aunque sea sólo "a fin de cuentas". Así como no porque un automóvil nos lleve más lejos y más rápido que nuestros pies implique que el automóvil sea algo imprescindible, por más necesario que sea para la vida moderna. Si no son más que algo que nos hace ser más eficientes, pero conceptualmente prescindibles, no debe haber mucho misterio en que las usemos. Ésta no es una opción congruente con las premisas ni de este trabajo ni del de Steiner, ya que ambos asumimos implícitamente que las matemáticas, en especial las matemáticas modernas, son conceptualmente indispensables para la física y la práctica de la física. Por ello no se profundiza en esta dirección.

Subsección 2. Steiner: La aplicabilidad de las matemáticas como indicador del posible antropocentrismo del universo.

Se han ido presentando diversas razones que me llevaron a discutir esta manera de entender la problemática de la aplicabilidad de las matemáticas usando como brújula la discusión con las tesis de Mark Steiner en su libro *The applicability of mathematics as a philosophical problem* [Steiner]. El problema principal radica en que se optó por penetrar en el ámbito de la filosofía de la ciencia, en el cual no encontramos, en este ámbito, otro interlocutor adecuado. Esto no quiere decir que no haya habido análisis de algunos de los aspectos que se tocan en esta discusión, pero es con el único con quien coincidimos en la temática general, aunque discrepemos en aspectos fundamentales.

Su tesis más radical es que la aplicabilidad de las matemáticas implica que el universo, el "mundo objetivo", tiene un fuerte componente antropocéntrico, y, por lo tanto, es un reto (*challenge*) para toda filosofía que rechace el antropocentrismo. En especial para todo naturalismo, ya que según él todo naturalismo debe implicar, o tener como premisa, ser no-antropocéntrico. Ésta es la única definición de naturalismo con la que Steiner se compromete: una posición filosófica que entre sus premisas básicas tiene la de que el universo es no-antropocéntrico.

Explicar qué es lo que Steiner quiere es uno de los objetivos de este trabajo. En una primera aproximación, su posición se puede resumir en los siguientes puntos:

a) Apoyándose en algunas partes de la obra de Peirce, en concreto en el volumen 7 de sus *Collected Papers* [Peirce], Steiner sostiene que nuestra especie tiene limitantes en su capacidad de acceder al conocimiento físico. Esa capacidad se reduce al ámbito de lo que podemos experimentar más o menos de manera directa. No parecería haber nada que nos permitiese tener acceso a "ámbitos alejados de nuestra experiencia", como lo más "grande" o lo más "pequeño" de nuestro universo. En especial corresponden a esta última categoría los fenómenos que estudia la mecánica cuántica.

Ahora bien, precisamente esta ciencia proporciona un buen ejemplo de que sí hemos llegado a acceder a conocimiento efectivo y eficiente en un área "alejada de nuestra experiencia". No hay por lo tanto una incapacidad absoluta de acceder a alguna de esas áreas, inclusive se constata que, una vez habiéndose dado el acceso, el posterior desarrollo no es fundamentalmente diferente a desarrollos en otras áreas.

El problema se circunscribe entonces al paso de un ámbito al otro, o al menos es ahí donde se manifiesta en toda su radicalidad. Según la interpretación y elaboración de las ideas de Peirce por Steiner, lo que llamaremos en lo que sigue la "tesis de Peirce-Steiner", ese paso tiene que ser totalmente fortuito. La única manera de dar ese paso es tratar de adivinar ("*guessing*") cuales pudiesen ser las leyes que rigen ese ámbito "alejado de nuestra experiencia". Para Peirce-Steiner no hay ninguna razón que permita afirmar que podemos desarrollar estrategias eficientes de búsqueda entre las innumerables posibilidades de expresar esas leyes.

b) Pero hay una metodología, una estrategia de búsqueda que ha permitido tener éxito con una mucho mayor probabilidad de la que sería de esperarse en una búsqueda aleatoria: el uso de analogías matemáticas, como Steiner lo documenta ampliamente, en especial en la mecánica cuántica. La aplicabilidad de las matemáticas parecería entonces dar un contraejemplo a la tesis de Peirce-Steiner.

La argumentación de Steiner quiere fundamentar lo contrario, no solamente la aplicabilidad de las matemáticas no es un contraejemplo para su tesis, sino que es factible conjuntar en un mismo sistema filosófico ambas afirmaciones.

C) El punto clave es otra afirmación: Las matemáticas son, de manera global, una actividad antropocéntrica, ya que los criterios de selección de sus ámbitos de estudio y desarrollo, en concreto los criterios de selección de conceptos, son fundamentalmente estéticos, o son criterios de desarrollo basados en nuestra incapacidad de llevar a cabo ciertos cálculos. Lo único que da cohesión a los desarrollos tan diversos que se observan en matemáticas son entonces criterios específicos de nuestra especie: nuestras preferencias estéticas y nuestra limitada capacidad para calcular.

d) Por lo tanto, explícita o implícitamente, un elemento fundamental, la matemática, de lo que ha permitido llegar a descubrimientos objetivos, relevantes para la física, tiene características antropocéntricas determinantes de su naturaleza global.

e) Dado que Steiner considera la afirmación anterior compatible con lo planteado en al tesis Peirce-Steiner, hay que entender esta última en el siguiente sentido: No hay en el mundo de la razón, del análisis lógico, de la investigación científica, nada que permita elaborar o descubrir estrategias que permitan efectuar el acceso, dar el paso hacia ámbitos alejados de nuestra experiencia. Dicho con otras palabras, no hay en el conjunto de aquellos elementos cognitivos que nos ha brindado la evolución ninguno suficientemente eficiente para la exploración de áreas alejadas de nuestra experiencia. Esto no quiere decir que esas estrategias deban ser infalibles. Lo que se pediría de ellas es tener una tasa de éxito significativamente por encima de una búsqueda aleatoria. Pero eso es precisamente lo que, según esta posición, no podemos alcanzar usando estrategias basadas en las capacidades cognitivas que hemos obtenido a lo largo de nuestro desarrollo como especie.

Pero hay otras posibilidades, como por ejemplo adivinar, tener la suerte de acertar en lo que se buscaba. O, como lo señala el uso de las matemáticas, emplear estrategias cuyo componente principal sea extra-racional. Es más, por la gran relevancia que Steiner le atribuye al antropocentrismo de las matemáticas (de hecho es su argumento principal), parece que la existencia de estrategias de descubrimiento exitosas[9] basadas en factores como el antropocentrismo, y debería ser contemplado como un argumento a favor de la tesis de Peirce-Steiner.

---

[9] Sin que deban ser infalibles.

f) Pero no se trata de justificar esa tesis, sino de que ella sirva de apoyo al argumento siguiente: En una búsqueda que muy pocas posibilidades de éxito debería ofrecer, al menos algunas de las estrategias que llevan a resultados están basadas en las matemáticas, y dado que éstas son globalmente antropocéntricas, indirectamente esas estrategias de descubrimiento también lo son. El conocimiento de un número considerable de leyes fundamentales del universo, o la manera en que se llega a conocerlas, es posible gracias a algo que indica que nuestra especie tiene un lugar privilegiado en el universo.

***

En mínimas palabras, Steiner afirma que la aplicabilidad de las matemáticas tiene como consecuencia que debamos aceptar que el universo es antropocéntrico.

Alega que sus tesis sólo pueden ser refutadas desde una postura dogmática que las niegue *a priori* [Steiner, p.72]. En este trabajo se muestra que esto no es así, primero en un sentido que se podría llamar "negativo", ya que la presentación y defensa de esas tesis no son plenamente satisfactorias argumentativamente, lo que permite no sólo plantear dudas acerca de su corrección, sino inclusive mostrar que en la forma presentada tienen un inadecuado nivel de plausibilidad. El punto clave radica, para Steiner, en la afirmación de que las matemáticas son antropocéntricas, y es este punto el más débil en la demostración.

En un sentido más propositivo las matemáticas deben entenderse con una actividad compleja, multifacética, no exenta de contradicciones internas y problemas serios a lo largo de su desarrollo [Kline], y sería un tanto ilusorio que pudiere encontrarse *una* propiedad de las matemáticas que permitiese dar una explicación satisfactoria de las diversas posibilidades de aplicación, como propone Steiner: "To explain my data away, one must find a natural, or material, property of mathematics as such, and then show how this property accounts for the success of the mathematical discoveries to be outlined ..." [p. 8]. Es posible afirmar que hay una amplia variedad de estímulos, motivaciones (entre ellas es innegable el factor estético), razones del desarrollo de los conceptos matemáticos que en una compleja interacción brindan claves para iluminar algunos aspectos de cómo las matemáticas contribuyen al conocimiento físico, y además sin necesidad de introducir elementos extra-naturales, como podría ser alguna característica antropocéntrica del universo. Que estas ideas no disipan la problemática de la aplicabilidad de las matemáticas está claro, pero sí permiten enfrentarse a ella no con la sensación de un misterio, sino con el profundo asombro creativo que toda pregunta profunda nos causa.

También debe decirse que no se pretende "explain away the data" que ofrece Steiner. Al contrario, sus detallados análisis de cómo se ha procedido en el camino hacia cierto descubrimientos físicos nos parecen de importancia para el estudio de los procesos de trabajo en física, pero requiere otras interpretaciones, dado que las de Steiner no resultan convincentes.

Subsección 3. Objetivos y estructura del trabajo

1. Objetivos.

Los objetivos de este trabajo son entonces los siguientes:

- Discutir algunas de las principales maneras de entender la aplicación para analizar con precisión la aplicabilidad de las matemáticas.
- Exponer y analizar el trabajo de Steiner.
- Hacer una crítica de la argumentación con la cual Steiner sostiene una de sus tesis básicas: El carácter antropocéntrico de las matemáticas, mostrando que esa argumentación es inadecuada.
- Hacer un estudio de caso bajo los lineamientos planteados. El caso a analizar es la aplicación del concepto de espacio de Hilbert en la mecánica cuántica.
- Aprovechar la discusión para explorar algunas otras inquietudes acerca de la aplicabilidad de las matemáticas.

2. Estructura.

En la introducción se presentan las ideas generales de este trabajo.

En este primer capítulo se precisan los objetivos del trabajo, se presentan las ideas que nos guían en el entender lo que es la aplicabilidad de las matemáticas; así como dar un primera idea de la postura de Steiner, en el marco de una introducción a aspectos de la problemática de las matemáticas aplicadas.

En el siguiente capítulo se analizará a fondo la argumentación que se presenta en [Steiner] a favor de la tesis del antropocentrismo de las matemáticas. El argumento de Steiner tiene metas mucho más amplias: Mostrar que el universo tiene componentes antropocéntricos. Pero es en su análisis de las matemáticas donde reside la fuerza del argumento. Por ello, si es posible mostrar que esa tesis no está debidamente sustentada, la tesis principal pierde también apoyo. Esto no decide a favor o no de un "misterio". Pudiese ser totalmente "natural" la aplicabilidad de las matemáticas, o comenzar mucho antes de lo que Steiner propone, digamos con "5+7=12". Ahora bien, el análisis de estas tesis proporciona elementos para entender algunos de los mecanismos de esa aplicabilidad y su significado.

Un problema con Steiner, que es el que llevó a dedicarle un capítulo entero a la exposición de su trabajo, es que sus argumentos sustantivos son escuetos y dejan puertas importantes abiertas que se deben explorar. Lo magro de la argumentación también tiende a inducir una cierta interpretación de nuestra parte.

El tercer capítulo se ocupa del análisis y crítica general de la sustentación de la tesis de Steiner sobre el antropocentrismo de las matemáticas. La conclusión ya se ha mencionado, esa sustentación deja demasiadas preguntas abiertas, lo que reduce de manera sustancial el poder de convencimiento que pudiesen tener, en una argumentación que de todas maneras, en el mejor de los casos, estaba destinada por su autor a no más que "mostrar la plausibilidad de la tesis" [p. 66], lo cual no impide que Steiner tenga una profunda convicción de lo correcto de ella.

En el cuarto capítulo se presenta un caso particular de aplicación de las matemáticas, espacios de Hilbert en mecánica cuántica. Se pretende poner de manifiesto en un caso concreto que hay posibilidades de entender mecanismos de la relación entre las matemáticas y la física de una manera que no requiere hacer intervenir factores "sobrenaturales", como el posible antropocentrismo del universo.

El quinto capítulo es un collage de algunas ideas que si bien surgen en algún momento en la discusión anterior, no pudieron ser desarrolladas con más detenimiento. Se consideró interesante ampliarlas un poco más. En primer lugar debe plantearse una interpretación del hecho que Steiner considera tan importante como para dedicarle los capítulos más detallados de su libro: el proceder formal de los físicos en el llamado "contexto de descubrimiento". Ante la convicción de Steiner de que es un proceso formal de adivinanza, se sugiere que hay "buenas razones" físicas para proceder como se ha hecho. Enseguida se quiere abundar un poco en la concepción de algunos entes matemáticos que tienen los físicos y algunas personas cercanas a ellos, como Steiner. Esa concepción discrepa en aspectos importantes de la que pudiese tener un matemático.

El sexto capítulo ofrece un resumen de las principales líneas de pensamiento que se han desarrollado. La conclusión principal es que la tesis del antropocentrismo de las matemáticas no se sostiene adecuadamente, al menos con la argumentación ofrecida. Por lo tanto, no parece haber por este camino una sólida justificación del antropocentrismo del universo. Al menos en casos bien documentados, los criterios para decidir si tal o cual concepto, tal o cual posible teoría es incorporable o dejada de lado del corpus de las matemáticas parecen ser intrínsecos a esta misma ciencia o guiadas por necesidades de la física y no definibles únicamente en función de las preferencias estéticas de los practicantes de las matemáticas. Que hay un componente estético en el proceder de los matemáticos no se discute, sino el afirmar que ese es el componente fundamental a la hora de incorporar elementos.

Se hace una breve relación de los demás temas tocados.

Sección 4. Comentarios finales de esta parte.

Se ha establecido lo que se entiende en este trabajo por "aplicar las matemáticas". La aplicabilidad de las matemáticas es entonces la característica global de esta ciencia de poder ser aplicada. Dado el estatus *sui generis* de la matemática en el concierto de las ciencias, esa aplicabilidad plantea una serie de problemas que van desde cual pudiese ser la naturaleza de las matemáticas que la permite, hasta la propuesta de Steiner, según la cual esa situación permitiría conocer al menos una característica general del universo.

En este trabajo se parte, como Steiner, del mero hecho de la aplicabilidad, se explora la propuesta de este autor y gracias a esa discusión se ubica nuestra posición en un ámbito desde el cual no se pretende hablar del universo o sus características, sino acerca de cómo la matemática contribuye a nuestro conocimiento físico.

Antes de pasar a la discusión propiamente dicha hay una serie de ideas que es necesario ubicar con mayor precisión. Ellas son:

- La idea de *calcular.*
- Qué se entiende por la capacidad *descriptiva* de las matemáticas, para ello es necesario hablar de *parecido* entre entes físicos, entre entes matemáticos y entre entes físicos y matemáticos.
- A lo largo del trabajo se habla reiteradamente de "*los físicos*", y "*los matemáticos*" (también en singular). Se aclara brevemente que se quiere decir con ello.
- De qué se habla al decir que "*los físicos proceden de manera formal*".
- Qué se entiende por "*criterios de selección de conceptos en matemáticas*".
- La matemática como *lenguaje* o *herramienta* de la ciencia.

El precisar estas ideas no implica, por supuesto, que se agote la discusión al respecto. Quizá lo único que se está haciendo es dar pie a esa discusión, pero dando, aunque sea sólo esquemáticamente, una primera propuesta.

Parte 2. Algunos conceptos.

Como a lo largo del trabajo va a ser necesario ir introduciendo diversos conceptos matemáticos, a efecto de no hacer demasiado pesado el fluir de la discusión se ha optado por precisar en este capítulo algunas de las ideas que aparecerán reiteradamente en lo que sigue.

Como se aclaró al principio, es factible "saltarse" esta parte en una primera lectura y usarlo como una especie de diccionario, conforme la lectura de los siguientes capítulos lo vaya requiriendo.

Sección 1. Calcular

Calcular no es simplemente efectuar operaciones y aplicar algoritmos. Un requerimiento básico de un algoritmo es que dados los mismos datos de entrada debe dar siempre los mismos datos de salida, cuando mucho aceptando ciertos límites de precisión, y éste no es siempre el caso, aun en cálculos que parecerían determinísticos. Hay ecuaciones que modelan turbulencias cuya solución no es única. Se tienen también los problemas planteados por la teoría de bifurcaciones y su generalización, la teoría de catástrofes, las cuales, a pesar de ser teorías determinísticas, se basan en la idea de que ciertos sistemas presentan puntos en los cuales la evolución de un sistema puede seguir dos o más caminos, sin que haya manera de predecir cual será el escogido.

Calcular tampoco es la pura elaboración de datos alfanuméricos[10], ya que además de que entre otras posibilidades el resultado de un cálculo puede ser una función, al entender el calcular como una actividad racional se debe presuponer una finalidad. Una computadora que llevara a cabo el siguiente programa:

---

[10] No debería haber problema con la ampliación del conjunto básico sobre el cual calcular a lo alfanumérico, para tomar en cuenta símbolos como "i", la raíz de menos uno, paréntesis, símbolos como la integral y la derivada e inclusive, por qué no, cadenas lógicas y de datos, aunque la concepción intuitiva de "calcular" asocia esta actividad casi únicamente a números.

X: = 0:

X: = x + 1;

No estaría, en esta concepción, "calculando", sino sólo manipulando unos datos con ayuda de una operación aritmética, ya que no hay ninguna condición que permita saber cuándo finalizar las operaciones.

Se propone la siguiente definición informal: Dado un conjunto M de funciones $\boldsymbol{f}$ con dominio y rango en un conjunto Ω con elementos alfanuméricos de longitud finita (pero que puede variar), y dado al menos un elemento x_0 de Ω, o un conjunto finito de ellos $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, *calcular* es el proceso de llevar a cabo un número finito de operaciones partiendo de $\boldsymbol{f}(x_0)$, o de $\{\boldsymbol{f}(x_0), \boldsymbol{f}(x_1), ..., \boldsymbol{f}(x_n)\}$ usando cualquier tipo de operación matemática y conjugando posiblemente $\boldsymbol{f}$ con otras funciones de M evaluadas también en un número finito de elementos de Ω, a efecto de encontrar una función $\boldsymbol{g}$ de M evaluada igualmente cuando mucho en un número finito de elementos $\{y_0, y_1, ..., y_m\}$, o un indicador $\varnothing$ de que no es posible encontrar $\boldsymbol{g}$.

Para entender el sentido de la definición anterior llámense "datos" a los elementos de Ω, a los $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ "datos de entrada" y a los $\{y_0, y_1, ..., y_m\}$ "datos de salida". Tanto $\boldsymbol{f}$ como $\boldsymbol{g}$, o ambas, pueden ser la identidad, o sea, no es imprescindible agrupar esos datos en una función o un gráfico, pero sí debe tenerse la posibilidad de que, aunque los datos concretos de entrada deban conocerse, y al menos debe haber uno, puedan ser entendidos como valores en los cuales se define una función o valores de una función. Lo mismo los datos de salida.

Calcular es entonces comenzar con al menos un dato concreto, expresable de manera finita, y elaborarlo ya sea directa o indirectamente (por medio de una función) hasta obtener tras un número finito de pasos otros valores, también posible pero no necesariamente agrupados en alguna función (una función de interpolación, por ejemplo), o un indicador de que el cálculo no fue posible bajo las condiciones especificadas. Esto implica que debe darse una condición de finalización. La condición puede ser un número especificado de pasos, un tiempo de cálculo, una cierta precisión de los datos de salida o una combinación de estas u otras condiciones. No siempre hay por qué analizar si con otras condiciones el cálculo hubiese tenido un resultado.

En esta forma tan general, la definición no es satisfactoria ni para un matemático, ni un físico ni un informático[11], pero es posible particularizarla para que cubra los intereses de cada uno de ellos, por lo que parece ser un concepto general adecuado.

Para el matemático el problema principal es la limitación de los elementos de entrada y salida. No siente que deba tener que limitarse a números racionales, inclusive a números racionales de longitud finita. Pero el matemático aplicado sabe que en la práctica de otras ciencias los datos iniciales tal como se dispone de ellos tienen esta forma, si son alfanuméricos. Además la definición no excluye, por supuesto, que a lo largo del proceso se manejen números reales; es más, de hecho deben aceptarse si se emplean conceptos como el de derivada o integral, pues para definir estas operaciones el concepto de límite es imprescindible, y ello implica que deben intervenir números reales.

Para el físico el punto principal es que los datos de entrada y salida deben ser siempre interpretables en términos de mediciones, al menos potencialmente. A veces, por ejemplo, es necesario dar datos hipotéticos, pero que se asume tienen la *forma* de datos reales. O quizá no se tenga la manera de cotejar los datos de salida por diversas razones, que pueden ir desde la imposibilidad de efectuar la medición, como medir el peso de una estrella, hasta razones técnicas o incluso financieras, pero siempre se asume que deben ser plausibles para ser aceptables.

Una preocupación principal de los físicos es calcular datos que les permitan ya sea reproducir lo medido[12] o hacer predicciones. Dejando de lado lo que sea establecer leyes, describir o explicar, después de haber medido u obtenido datos se procede a calcular, y de facto son los resultados del cálculo los que sirven de

---

[11] Quien hace cálculos por computadora tiene limitaciones técnicas más severas, pero a efecto de la presente discusión la diferencia con el matemático es más bien técnica y no hay necesidad de tratarla.
[12] Aquí el problema radica en qué pueda significar “reproducir lo medido”, lo que lleva al problema de las aproximaciones, que se comentará en la siguiente subsección.

guía en los demás procesos teóricos y también los que permiten llevar a cabo los aspectos más prácticos. Esto tomando en cuenta que la interpretación de lo medido o calculado requiere un marco teórico.

Sección 2. Una primera manera de entender lo que puedan ser los procedimientos formales en la física.

Si se acepta lo presentado en la sección anterior, se tiene una primera posibilidad de explicar qué es lo que lleva a los físicos a emplear lo que se puede llamar "procedimientos formales". La cuestión no radica en si tal o cual persona creía o no que el átomo reproducía un pequeño sistema solar, sino que se requería calcular y de algún lado había que obtener no las "ecuaciones", sino procedimientos y procesos de cálculo que permitiesen cotejar con mediciones. En principio es factible imaginarse que ha de haber habido opciones razonables, **a**, **b**, **c**, etc., para encontrar los valores requeridos en la nueva mecánica, la cuántica; se habrían probado todas, incluso aquellas con las cuales no era posible asociar imagen o intuición alguna. "Razonable" es aquí la palabra para indicar que esos procedimientos de cálculo pudiesen de alguna manera garantizar que los datos de salida se encontrasen en rangos aceptables. El éxito (o sea la posibilidad de predecir y reproducir en márgenes adecuados de aproximación) es, puede especularse con plausibilidad, lo que llevó a aceptar sistemas matemáticos, primero en su forma de esquemas de cálculo, como posibles descripciones de los sistemas físicos bajo estudio.

A partir del momento en que se descartó el modelo del átomo como sistema planetario la mecánica cuántica ha carecido de intuiciones claras[13] que asociar a sus ecuaciones. Dado que no se tiene la capacidad de relacionar los procedimientos matemáticos exitosos con entidades físicas más o menos conocidas, o con derivados claros de ellas, se dice que se procede "formalmente" al hacer predicciones o verificaciones usando exclusivamente esos procedimientos

[13] Las ideas, por ejemplo, de "paquete de ondas", o de una "nube probabilística" son difíciles de asociar con imágenes concretas.

matemáticos. En nuestra opinión el uso del adverbio "formalmente" no es el adecuado en este contexto.

Pero antes de pasar a analizar esa situación es de interés hacer ver que también pasó algo parecido con conceptos matemáticos. Cuando Dirac introdujo su famosa función delta no había un concepto de "función" que permitiera afirmar que efectivamente era una función y no únicamente un artificio que permitía llevar a cabo ciertos cálculos. El concepto de "función" que se podría llamar "usual" adquiere sus características modernas en la obra de Cauchy durante la primera mitad del siglo XIX. Es aún hoy en día la manera más común de entender una función, como una relación entre dos conjuntos tal que a cada elemento del primero se le asocia uno y sólo un elemento del segundo.

> La delta de Dirac se define como la función que vale cero en cualquier punto, menos en uno, x_0, toma los valores desde cero hasta un α: $\delta(x)=\begin{cases}\alpha, & si \quad x=x_0 \\ 0, & si \quad x\neq x_0\end{cases}$, Los valores de α más empleados son 1 o infinito.

La delta de Dirac es un ejemplo de un "nuevo" tipo de funciones, las llamadas "funciones generalizadas" o "distribuciones". Toda función "usual" es también una distribución, pero el conjunto de funciones generalizadas tiene más elementos, como esta delta de Dirac. Dirac no elaboró una teoría de distribuciones, ni tenía por qué, por lo que hasta cierto punto podría pensarse que esta función es también un artificio de representación análogo a la idea de pensar una partícula en mecánica clásica como algo "concentrado" en un punto. Quizá fue esta analogía ("todo concentrado en un punto") lo que permitió que esa entidad haya sido aceptada en el ámbito de la física, sobre todo mientras no se determinaba el contexto matemático en el cual debía ubicarse. Pero si no hubiera funcionado en los cálculos difícilmente algo tan alejado de la concepción clásica de función hubiese sido aceptable.

Calcular es quizá el concepto más básico de aplicación de las matemáticas. La aplicabilidad de las matemáticas significa en este primer sentido que es factible emplearlas para calcular. Si se toma el concepto de tensor y de una manera simplista se supone que Riemann, en su torre de marfil y por las razones que fueran, lo desarrolla, es entonces altamente sorprendente que cuando Einstein lo necesita para sus cálculos[14] ahí esté. Pero, ¿qué pasa con la delta de Dirac? Fue *después*, en lo fundamental con Sobolev y Schwarz, que se desarrolló la teoría que enmarca ese concepto, la teoría de distribuciones o funciones generalizadas. Parecería que Dirac "se sacó de la manga" la idea, pero no por gusto o elegancia, sino porque la necesitaba, para calcular o para describir, y posiblemente para ambos. Esto puede interpretarse como la generación de conceptos en apego a una cierta experiencia o a las necesidades de dar cuenta de ella. Es una de las indicaciones de que parecería haber "inyecciones" importantes de relación con lo empírico en la matemática.

El concepto de delta de Dirac permite entonces introducir la problemática de lo que pueda ser lo formal en física por un lado. Por otro permite plantear algunas de las cuestiones relacionadas con la generación y aceptación de conceptos matemáticos. Por ejemplo, ¿se tendría que decir que esa delta sólo fue un concepto matemático una vez que diversos estudiosos, por ejemplo Sobolev y Schwarz, la estudiaron y les pareció elegante, bella? Parecería más bien que fue introducido porque ofrecía un esquema adecuado de cálculo. Adelantando un poco, aquí Steiner, quien no ignora ejemplos de este tipo, introduce otra idea. Está claro que requerimos hacer cálculos[15], pero seríamos entes bastante limitados al respecto, por lo que tenemos que emplear "artificios" (por no decir "trucos") para de alguna manera llevarlos a cabo. Pero si fuéramos más capaces seguramente los haríamos mejor, sin necesidad de esos artificios.

Surge una serie de preguntas: ¿Cómo saber si se ha aceptado un concepto por su belleza o por su conveniencia? ¿El aceptarlo por una razón excluye la otra o un mismo concepto puede conjuntar tanto belleza como conveniencia? ¿Son esos los únicos criterios, y si hubiera otros cuáles serían? De no haberlos habría que aclarar por qué no hay otros- Un punto clave, para nosotros, es la imposibilidad

---

[14] También lo necesitaba en otros sentidos.

[15] Steiner no da un concepto de lo que es calcular, pero suponemos que no estaría en desacuerdo con la definición dada aquí.

de saber si efectivamente algo como la delta de Dirac es un artificio, una manera eficiente o quizá la mejor manera de calcular ciertas cosas.

La idea de aplicar las matemáticas para calcular hace surgir entonces una gran parte de la problemática relacionada con su aplicabilidad.

Sección 3. Descripción, parecido, aproximación.

En la página 23 (primera parte, primera sección, primera subsección de este capítulo) se dio la idea más general de representación que será empleada aquí. Ahora hay que concretizar, hasta donde sea adecuado, esa noción.

¿Qué es una descripción? ¿Qué es una representación? Para Hacking [Hacking, p. 160]: "la gente hace semejanzas. Pinta cuadros, imita el cloquear de las gallinas, moldea el barro, esculpe estatuas y martilla el bronce. Estos son los tipos de representación que empiezan a caracterizar a los seres humanos". Es más, ni siquiera requiere que esas representaciones se "parezcan" a algo, sino simplemente que "parezcan reales", donde el verbo "parecer" se usa como intransitivo, "reales" tendría más bien una función adverbial. Hacking especula[16] que es sólo a posteriori que esos productos adquieren la función de representar algo concreto. Si entendemos lo que quiere decir, una representación sería un ente (objeto o idea) "que se parece" a otro.

Brown [Brown, p. 47] es más específico. Un sistema matemático M representa a un sistema N de otro tipo (no matemático) si existe un homomorfismo Φ entre ambos. Homomorfismo entendido informalmente como en matemáticas. La idea de una descripción no queda tan clara, pero parece ser que M describe N (M y N en el mismo sentido de la oración anterior) si N *es como* M: "a *four-legged*, blue, wooden chair has the property *four* just as it has the properties *blue* and *wooden*" [Brown, p. 55, cursivas de Brown]. Su explicación es más amplia, pero como no

---

[16] Tampoco pretende que sea algo más que una especulación.

está de acuerdo en que la matemática describe, sino que representa, no insiste demasiado en el concepto.

Steiner escribe que "Frege treats the *semantical* applicability of mathematical theorems; I will attend to the *descriptive* applicability – the appropriateness of (specific) mathematical concepts in describing and *lawfully predicting* physical phenomena" [p. 25, cursivas de Steiner]. Es fundamental que las matemáticas permitan hacer predicciones de manera sistemática (*lawfully*), pero no basta, deben "describir", deben ser descripciones y ser funcionales. No hay claves más explícitas, pero su argumentación requiere la idea de descripción pues el físico tiende a usar analogías matemáticas para describir situaciones "parecidas". Por ejemplo, si un físico piensa que el átomo "es como", "es parecido" a un sistema planetario y las ecuaciones de la teoría gravitatoria newtoniana "describen" adecuadamente el comportamiento de un sistema planetario, entonces debería ser posible describir de manera parecida el comportamiento del átomo. La descripción sería una guía para plantear las analogías, tanto si es una descripción física como matemática.

Para Steiner el físico no es un simple calculista, un pragmático al que no le interesa otra cosa que "tener éxito" en reproducir y predecir valores. Cuando el físico dice que tal cual función describe el movimiento de una partícula es porque el gráfico de la función reproduce (dentro de las debidas consideraciones y aproximaciones) la forma de la curva descrita por una partícula al moverse[17]. La velocidad promedio de la partícula en un intervalo es aproximadamente la misma que se obtendría al medir sobre el gráfico los intervalos correspondientes y efectuar la división. En algún momento no vacila en usar, casi fortuitamente, la palabra "correspondencia".

Cabe preguntarse en qué sentido la matemática "describe" algo. Hay al menos dos vertientes de esta situación. Por un lado en qué sentido la matemática pudiese describir sus objetos de estudio, como un número. En teoría de conjuntos hay diversas posibilidades de entender o definir lo que es el cuatro. Puede ser la clase

[17] Aunque Steiner no usa estos ejemplos.

de equivalencia de todos los conjuntos con la misma cardinalidad cuatro. O puede ser un conjunto especial de esa clase, el conjunto $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}$, donde $\varnothing$ representa al conjunto vacío. Esa cadena es una descripción de lo que se entiende por el número cuatro, y puede emplearse también en vez del numeral 4. Por otro lado habría que establecer que se entiende por "dar una descripción matemática de un fenómeno físico".

El lenguaje que utiliza un matemático al referirse a su actividad no es el de describir ni representar. Habla de "definir" o "caracterizar". En general está plenamente convencido de la existencia de las entidades o relaciones que estudia, pero se siente incómodo en el marco platonista, pues requiere tener la libertad de alterarlas, cambiarlas, definirlas como le parezca más adecuado. Un biólogo no tiene esa libertad con las ranas, o la tiene muy restringida. Si de su descripción no es posible reconocer que una rana típica es efectivamente una rana estará en problemas, de la misma manera que si su descripción no lo ayuda, como guía, en los casos problemáticos. Un platonista podría decir que hasta cierto punto es lo mismo con los conceptos matemáticos, como en el caso del axioma de las paralelas. Debe haber un sustrato objetivo detrás del concepto de paralelidad que permita asegurar que se habla de lo mismo, paralelas o ranas.

El matemático tendrá toda la libertad que quiera de alterar la definición o el axioma correspondiente, pero entonces no está hablando de lo mismo.

Quizá un teorema cayese más dentro de la idea de "descripción". Al estudiar estructuras algebraicas es fundamental saber si por ejemplo el elemento neutro es único o no. El teorema "El elemento neutro de un grupo es único" podría verse como una descripción de la función de ese elemento en esa estructura algebraica. Este teorema dice *cómo es* el grupo.

Sección 4.Analogías, parecido y aproximación.

Como se indicó, una idea que aparecerá reiteradamente a lo largo de la discusión es la de "analogía". Para poder establecer analogías es necesario tener claros los criterios bajo los cuales dos entidades pueden considerarse "parecidas" o "análogas". Steiner señala que ello implica una clasificación.

Clasificar permite introducir una partición en un conjunto, o sea definir una serie de subconjuntos de tal manera que todos los elementos del conjunto pertenecen a uno de esos subconjuntos y sólo a uno. Una manera sistemática de introducir una partición de ese tipo es definir sobre el conjunto una relación de equivalencia, que establezca que elementos son equivalentes a otros y cuales no. Las relaciones de equivalencia son una manera de establecer un tipo de igualdad entre elementos. En las ciencias empíricas este tipo de particiones se definen por semejanzas. Ciertas características permiten agrupar entes o fenómenos en subconjuntos. Estas particiones no tienen la nitidez de las particiones matemáticas. No se puede excluir que algún ente quede fuera de los conjuntos ya formados, o que haya entes cuya asignación sea ambigua. Hay diversas maneras de entender este tipo de situaciones desde un punto de vista matemático. Se puede usar la estadística, o la teoría de conjuntos borrosos. Otra opción nos parece más adecuada a la presente discusión.

El concepto de "métrica" en matemáticas tiene dos interpretaciones. Por un lado es una distancia generalizada, pero también puede pensarse como una manera de dar un índice a la manera en que dos entes difieren entre sí, un parámetro que indica qué tanto "no son iguales".

El concepto de métrica debe especificar *en qué sentido esos entes pudiesen ser iguales.* Por ejemplo, si una métrica esta definida en términos de integrales, algo bastante usual, digamos

$$d(f,g)=\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

f y *g* pueden ser "iguales", *d(f, g) = 0,* inclusive si f y g difieren en lo que se llama "un subconjunto de medida cero de *[a, b]*", o sea un conjunto que no contribuye a la integral, en oposición a la igualdad "común", donde *f* y *g* son iguales sí y sólo sí *f(x) = g(x) para todo x* en el intervalo *[a, b].*

Una aproximación a f es entonces cualquier otra función g tal que es posible dar un $\varepsilon > 0$, y g difiere de f en cuando mucho en ε: $d(f, g) \leq \varepsilon$. La dificultad de esta definición es que no proporciona clave alguna para determinar ε, lo que para un matemático no es en realidad un problema, sino precisamente una ventaja. Esto se debe a que, en oposición a ciertas concepciones, la matemática no es algo que se ocupe de la "exactitud". Decir, por ejemplo, que "2 + 2 es exactamente igual a 4" no es una afirmación ni matemática ni metamatemática, en el sentido de que en ninguno de esos dos contextos es posible asignarle un valor de verdad, si es que se considera que el adverbio cumple con alguna finalidad es esa afirmación. Ese adverbio tiene sentido sólo en un contexto donde exista la posibilidad de que 2 + 2 no sea 4. En nuestra opinión su finalidad es señalar el asombro con el que las matemáticas se contemplan desde fuera de ellas, ya que en el mundo de la experiencia sí es posible que 2 + 2 no sea exactamente 4. Por ejemplo, cuando se mezclan dos paquetes de azúcar de dos kilos. Como no es posible medir con total exactitud, hay que dar un cierto margen de tolerancia. Pudiese ser que el criterio de aceptación de paquetes de azúcar de más de un kilo y menos de cinco fuese: que cada paquete no varíe más de 25 gramos del peso ideal. O sea, todo paquete de uno a cinco kilos debe pesar, respectivamente, 1 ± 0.025, 2 ± 0.025, 3 ± 0.025, 4 ± 0.025, 5 ± 0.025. Supóngase que se mezclan dos paquetes aceptables de 2 kilos, cada uno de los cuales pesa 1.975 kg. Al mezclarlos se tendrán 3.950 kg, lo que no es aceptable, pues el peso mínimo de un paquete marcado como de 4 kg es de 3.975. "2 + 2" no es, en este contexto necesariamente "4", a veces será sólo una aproximación a "4".

Pero desde dentro de las matemáticas, o desde un contexto metamatemático, "2 +2 es 4" o "no es 4" ("o" exclusivo), y de acuerdo a la definición empleada de la operación indicada por "+" será una afirmación cierta o no. Otra cosa es hablar de sí 3.9 es o no una *aproximación* al resultado de 2 + 2. Si $\varepsilon = 0.2$ lo es, sí $\varepsilon = 0.02$ no. La matemática nos enseña cómo trabajar de manera correcta con aproximaciones; no tiene, sin embargo, nada que ver con la "bondad" de ellas. Quien debe determinar si la aproximación es "buena" o "mala" (quizá sería mejor usar la palabra "adecuada") es el físico, el ingeniero, el biólogo, el economista, y la matemática debe, si se quiere que sea útil, dejar a quien la aplica esa libertad.

Si se toma en cuenta la idea de aproximación en matemáticas, o más bien el conocimiento que ellas brindan al respecto, el parecido entre dos entes debería presuponer al menos las siguientes consideraciones: un criterio de igualdad, una manera de evaluar las diferencias dado ese criterio, y un índice de ellas. En oposición a lo que podría suponerse, las matemáticas enseñan que lo eficiente es medir las diferencias, y no las "semejanzas", pues estas quedarían definidas como "aquello que se da entre entes que son buenas aproximaciones unos de otros". Una "buena" aproximación quedaría definido por algún valor predeterminado, establecido de acuerdo a los criterios propios del ámbito empírico en que se trabajase.

En la práctica física no hay un concepto unificado de "parecido". El espectro va desde el uso riguroso de diversas métricas, hasta comparaciones como graficar dos conjuntos de datos en papel traslúcido, encimarlos y ver "si se parecen". Eso en el caso de comparación entre datos o conjuntos de datos. En el caso de parecidos o similitudes entre situaciones físicas también se usan diversos criterios. Por ejemplo fenómenos como lo que pasa con una gota de tinta en un vaso de agua y la manera en que la temperatura se distribuye en un cuerpo a partir de un área concentrada de calentamiento son parecidos, pues se describen con las mismas ecuaciones, son ambos fenómenos de difusión. Hay un criterio claro de semejanza. Pero cuando se planteaba que el átomo "parece" un sistema planetario en miniatura se le estaba dando peso a factores sólo vagamente definidos o definibles, como la idea de que hay un número limitado de posibilidades de organización de fenómenos, ya sea porque el universo "se repite" o porque no tenemos más que una capacidad limitada de organizar o estructurar el universo físico. Podría ser que una de las razones para creer esto último es lo altamente sorprendente que resulta constatar que fenómenos tan disímiles como lo que pasa al echar una gota de tinta en un vaso de agua, lo que pasa al calentar de manera puntual un cuerpo metálico homogéneo, o la manera en que el campo electromagnético se distribuye en el espacio a partir de una antena se representen con las mismas ecuaciones.

No es esto, sin embargo, lo que preocupa u ocupa a Steiner. Para él estamos aún más limitados. Ni siquiera tratamos de describir de manera parecida fenómenos parecidos. De Peirce deduce que no podemos saber si fenómenos "alejados de nuestra experiencia", como aquellos de la mecánica cuántica, son "parecidos" en algún sentido a los que mejor conocemos. Tratamos de adivinar qué pasa, y como no tenemos otra posibilidad simplemente, sin justificación adecuada, usamos lo que conocemos y vemos qué pasa. Bajo estas premisas el resultado es ahora sí asombroso a un grado tal que llega a ser misterioso: *Tenemos éxito*. Si las implicaciones de que sea posible aplicar una misma ecuación (de manera descriptiva) lo mismo a la tinta en el agua que a ondas electromagnéticas son sorprendentes, que sea posible aplicar ecuaciones (más o menos) "parecidas" a las de la mecánica clásica en la mecánica cuántica tiene, tendría que ser algo totalmente inesperado. De manera más general, el puro hecho de que áreas tan alejadas de nuestra experiencia sean describibles utilizando ("aplicando") los medios proporcionados por una ciencia (las matemáticas) que surge en el limitado entorno humano no debería ser considerado como algo simple y sencillamente dado.

En la Sección 4 se discute un poco más lo que pueda ser la semejanza entre la "forma" de sistemas matemáticos.

Sección 5. Los físicos y los matemáticos.

Se habla reiteradamente de "los físicos", o "el físico", así como del o los "matemáticos". No se pretende insinuar que existe un ente ideal como el "físico" o el "matemático". En ambos casos la idea está dada en términos casi demográficos, y se quiere decir "uno o varios elementos representativos y activos de la comunidad de físicos o matemáticos". Esto, por supuesto, implica la necesidad de delimitar esas comunidades.

En el caso de los matemáticos se tiene, por ejemplo, el planteamiento de Jean Dieudonné[18]:

"Un matemático será definido ... como alguien que ha publicado al menos la demostración de un teorema no trivial" [Dieudonné, p. 17].

Un "teorema no trivial" es aquel que va más allá de obtener consecuencias "fáciles" de principios ya conocidos [ibid, p. 24]. Suponemos además que la revista donde se ha publicado esa demostración revisa la calidad de sus artículos y es accesible de una u otra manera a prácticamente cualquier persona trabajando en el área.

Esta definición tiene una ventaja. Al reducir la comunidad de matemáticos a su núcleo "duro" permite ubicar con mayor claridad a aquellos científicos que decidirían en última instancia si tal o cual concepto es o no "matemático", lo que sería una parte de su trabajo, en la discusión con Steiner la de mayor peso.

Una desventaja es que los problemas que surgen al calcular se dan con mayor frecuencia y claridad en las aplicaciones, al menos hoy en día[19], dada la naturales teórica de las investigaciones en matemáticas puras. Definir a la comunidad de matemáticos de esa manera sería dejar de lado a gran parte de aquellas personas que se dedican a las matemáticas aplicadas. El desarrollador de un algoritmo o la persona que colabora con un físico utilizando resultados matemáticos de alto nivel, o ese mismo físico, bien podrían no caer en la categoría de matemáticos, aunque hagan un "uso" continuo y creativo de las matemáticas. Lo mismo pasaría con profesores de matemáticas, inclusive muchos de aquellos que trabajan en la formación de matemáticos, físicos o ingenieros.

Pero bien puede asumirse que es la comunidad de matemáticos en el sentido de Dieudonné la que da la "carta de naturalización" para que un concepto pueda ser considerado como "matemático", independientemente de dónde surja, por lo que esa definición es adecuada a muchos de los fines de este trabajo. En caso de

---

[18] Destacado matemático francés del siglo XX.
[19] En otras épocas una de las tareas fundamentales de los matemáticos era calcular.

requerirse hablar de quienes se dedican a las matemáticas pero no pertenecen a la comunidad definida se hará explícito de quién se habla.

Esto señala un problema de interés. ¿Cómo, de donde surgen los conceptos o las ideas que llevan a ellos? ¿Cuáles deben ser las características de esos conceptos, así sean aún rudimentarios o en germen, para que puedan ser considerados como candidatos viables? Steiner no le dedica espacio a estas preguntas.

Para "los físicos" se puede parafrasear la definición de Dieudoné: Un físico será definido como alguien que ha publicado al menos un artículo no trivial en revistas de prestigio y arbitradas.

Dejando de lado la ambigüedad de hablar de revistas "de prestigio" y qué pueda ser un resultado no trivial, esta definición deja de lado a gente tan importante como los laboratoristas, muchos de los que diseñan experimentos, muchos de los que aplican la física, profesores, etc. Pero al menos proporciona una ubicación.

Cuando en este trabajo se hable de "el físico" o "el matemático", en plural o singular, se está hablando de representantes de la comunidad correspondiente en un sentido estadístico. Por ejemplo, cuando se dice "el físico procede formalmente" se quiere decir que proceder formalmente es algo aceptado como válido en la comunidad de físicos y que además se lleva a cabo con cierta frecuencia. Es un proceder metodológico que forma parte del paradigma actual de la física.

Sección 6. Procedimientos formales de los físicos.

Es mostrable, y lo hace Steiner con lujo de detalles, que en algunos casos se ha procedido en la búsqueda de leyes físicas basándose en similitudes con la *forma* matemática de otras leyes, aun ahí donde parecería no haber habido muchas razones para suponer que esa estrategia fuese adecuada. Es más, donde parecería haber habido justificación para creer que precisamente no podría serlo. Por ejemplo, se postularon leyes para el mundo cuántico basándose en la mecánica clásica, que no obedece a ese tipo de mecánica. Steiner deduce de ahí que si el formalismo y notación de una ciencia con componentes antropocéntricos fundamentales, como lo es en su opinión la matemática, ofrecen estrategias que han llevado a descubrimientos importantes, entonces hay un componente antropocéntrico en el universo en su totalidad.

A este argumento subyacen dos cuestiones: En primer lugar establecer si efectivamente lo que se está usando es solamente una "forma" o "notación", algo por un lado convencional, arbitrario, y por otro lado regulado únicamente por reglas sintácticas. Por ejemplo las diferencias entre la manera de denotar la derivada entre Newton y Leibniz.

En segundo lugar hay que analizar si efectivamente al proponer que una ley física tenga una forma parecida o análoga a otra se está procediendo con una estrategia *puramente* matemática. Este círculo de problemas se tratará en los últimos capítulos. Por el momento se profundizará un poco en los aspectos "formales".

Implicaciones de la notación matemática

Si, entre otras posibilidades, por un procedimiento puramente formal en la física se entiende tomar algo de las matemáticas (aún no queda claro qué) sin preocuparse de su sentido o significado, se está implicando que: a) hay algo en las matemáticas que trasciende ese aspecto puramente formal (el sentido o significado); y b) ese algo no tiene relevancia para la física, al menos en las situaciones en que se "procede formalmente".

En [Feynman] se afirma sin titubeos que "los matemáticos se ocupan únicamente de la estructura de las deducciones, poco les preocupa sobre qué hablan". Steiner no opina así, para él sí hay un sentido o significado en las matemáticas, aunque no profundiza en ello, pues según él a fin de cuentas sea lo que sea los físicos pueden dejarlo de lado, al menos en ciertas ocasiones relevantes.

Cabe entonces hacerse una serie de preguntas, la primera de las cuales puede ser qué tanto hay de "arbitrario" en la notación matemática. Se admite sin problemas que la notación de ciertos entes básicos es en su mayor parte *convencional.* Por ejemplo, para ciertas funciones es indistinto si se simboliza la derivada como f', $\frac{df}{dx}$, $\dot{f}$, o de alguna manera que se me ocurra en este momento, como podría ser $\xrightarrow{f}$. El símbolo *dx* al final de la integral ha sido objeto de cuestionamientos por mucho tiempo; hay quien denota los vectores con letras en negritas **a**, **b**, **y**, hay quien les pone una flecha encima, $\overleftarrow{a}, \overleftarrow{b}, \overleftarrow{y}$, en Alemania hay o había preferencia por letras góticas. Una vez dejando atrás la aritmética básica casi cada autor introduce preferencias personales en su manera de denotar. Sin embargo, las relaciones entre símbolos no pueden ser arbitrarias. Por ejemplo un operador tiene como argumento una función y no se puede decir que una constante tenga como argumento a un operador, aunque sí sea posible "multiplicar" la función por una constante, lo que es otra cosa. La relación entre un operador y una función no depende de la notación que se haya escogido, sino de las respectivas definiciones.

Una ley física no se expresa con un solo elemento, sino siempre son varios elementos con relaciones específicas entre sí y muchas veces expresadas en forma de una ecuación[20], que implica una relación específica entre las combinaciones simbólicas de una lado con el otro. Esas relaciones son representables con simbología arbitraria, pero no dependen de los símbolos empleados.

Además una ecuación no es un ente en sí mismo, sino siempre dentro de un contexto en el cual adquiere un significado. Por ejemplo, en la misma cadena de símbolos $\alpha + \beta = \gamma$ el "=" tiene un significado diferente si las letras griegas se entienden como representando números y otro si se entienden como representando matrices.

Además es posible diferenciar entre "ecuaciones" e "igualdades". Una ecuación es una pregunta: ¿Existe algún ente que satisfaga la ecuación, es decir, que la convierta en una igualdad? O, si se prefiere plantearlo de manera más precisa: ¿Es factible sustituir consecuentemente un símbolo de la ecuación por un

---

[20] En termodinámica son usuales también las desigualdades o "Inecuaciones".

elemento de un conjunto predeterminado tal que la igualdad planteada sea verdadera? Una igualdad es una afirmación ya evaluada que puede ser cierta o falsa.

No solamente es necesario especificar entonces el conjunto de las posibles soluciones, sino que debe establecerse también de qué manera interactúan entre sí los diferentes elementos de la ecuación. Para ello es necesario cuando menos dar la estructura topológica y/o algebraica subyacente a cada uno de los conjuntos involucrados, o, si se prefiere trabajar con "flechas" (teoría de categorías) en vez de elementos, las relaciones categoriales correspondientes. Si además no sólo se quiere constatar que existe (al menos) un elemento del conjunto determinado que satisfaga la ecuación[21], sino que quiere saberse cuál es[22], las exigencias son aún mayores. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales clásicas[23] requieren necesariamente la continuidad de las funciones solución, mientras que en una ecuación integral la función que se está integrando puede tener un número finito de desigualdades puntuales o de salto, por lo que el conjunto de soluciones incluye muchas funciones que no pueden ser consideradas en el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial clásica.

Es inherente a las representaciones matemáticas un cierto sentido que va más allá de la pura posibilidad de formalizar la cadena deductiva que lleva a obtener una igualdad como $3 = 3$, o $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Ni al matemático ni al físico les interesa *solamente* que la primera y la segunda igualdad sean correctas (o no), sino también saber que en el primer caso se habla de escalares y en el segundo de vectores.

Hasta aquí Steiner no debería tener objeción. Bien podría decir que si lo anterior es lo que se entiende por "sentido" o "significado", ser o proceder formal es dejarlo de lado y tomar en cuenta sólo las relaciones sintácticas, ya que es con ese proceder formal con lo que trabaja el físico en analogías, parecidos y metáforas que hace de una ley a otra. La idea de "forma" en matemáticas requiere ser

---

[21] Condiciones de existencia.
[22] Resolver la ecuación.
[23] Aquellas cuyas soluciones son funciones clásicas, no distribuciones.

analizada antes de poder decir con mayor precisión que significa que un físico proceda de manera "formal". Pero aún si esto quedase claro, no quedaría claro de que manera es posible prescindir del sentido del ente matemático para poder establecer si describe o no un ente físico. ¿?

Una idea básica que subyace a este trabajo es que el físico requiere de ese sentido para poder afirmar que una ecuación (o una inecuación u otro tipo de sistema) es al menos tentativamente aplicable a una situación física. En términos de Steiner, para poder afirmar que un sistema matemático describe (o representa) adecuadamente un sistema físico. El sentido matemático es una condición necesaria, pero no suficiente, para la expresión del sentido físico.

Por ejemplo, si una función polinomial p describe adecuadamente la trayectoria de una partícula, el uso de la primera derivada para representar su velocidad no depende del hecho de que es posible obtener la derivada de p por un procedimiento puramente sintáctico[24], sino del significado del concepto de derivada. A partir de un polinomio hay diversos procedimientos sintácticos que conducen a otras funciones, pero el que se usa para describir la velocidad es el adecuado por su significado.

Un físico puede estar inseguro acerca de qué tipo de fuerza está actuando en una situación dada, pero sabe que la manera en que un vector interactúa con otros entes es apropiada para describir o representar las relaciones que tienen lugar cuando se constatan interacciones entre dos cuerpos. Aun en el caso en que esté inseguro inclusive de que lo que está constatando es efectivamente una fuerza, puede proponer utilizar vectores porque sus propiedades matemáticas permiten describir, enmarcar o ubicar relaciones importantes entre los entes físicos observados, aunque a veces sea de manera sólo aproximada.

Por más formalmente que opere, por más uso de analogías, parecidos o metáforas matemáticas con que proceda, un físico, y permítase la redundancia, piensa físicamente. Como señala Feynmann: "El físico, ..., aúna a todas sus

[24] Existe un esquema de cálculo para obtenerla.

afirmaciones un significado [físico]" [Feynman]. Esos entes matemáticos con los que trabaja siempre deben relacionarse de una u otra manera con mediciones o posibilidades de medición. Las relaciones entre los entes matemáticos a los cuales es posible asignar valores medidos deben ser tales que el resultado de los cálculos conduzca, *así sea sólo como posibilidad*, a confrontarse con alguna otra medición, por ejemplo al efectuar una predicción.

Sección 7- Estructuras matemáticas

Muchos matemáticos tienen la convicción de que el conocimiento profundo de las relaciones estructuradas entre los elementos de una teoría es lo que les da *significado*. Sin embargo, ese significado no depende sólo de la inserción en la estructura, sino también de la definición específica y particular de cada entidad, ésta no es únicamente un punto de confluencia de relaciones, sino tiene, por decirlo así, vida propia, y con ella interviene en la estructura; las relaciones estructurales son dinámicas y transmisoras.

Por ejemplo, en el marco del cálculo básico es usual definir a la derivada de una función real en un punto como un límite que para cada punto del dominio da otro número. La derivada de $f(x) = 3x^2$ en el punto $x_0 = 2$ es el número 12. A un mayor nivel de conocimiento la derivada de cualquier función *en un punto* de su domino, si existe, resulta ser una función lineal. Al regresar desde ese nivel al cálculo básico la concepción previa, derivada como número, no es invalidada sino que su significado es reinterpretado a partir de la transmisión de conocimiento desde el otro nivel, la derivada como función lineal. Esto es factible gracias a que es posible definir, construir o descubrir otra relación estructural: un isomorfismo entre **R** y las funciones lineales sobre **R**. La relación estructurada y dirigida permite ubicar el significado de la primera propuesta, pero no es sólo la red de relaciones lo que lleva a ese significado, es determinante la naturaleza particular de esa nueva concepción de la derivada.

Aquí es también posible percibir algunas de las facetas de lo que pueda ser la forma en matemáticas. Una de las consecuencias de definir la derivada en un punto como función lineal es que se tiene entonces una "forma general" de la derivada, que basta con interpretar adecuadamente en cada ámbito para obtener la fórmula correspondiente. A su vez esta situación puede verse desde las áreas particulares y expresarse como: La derivada tiene la misma forma en todos estos ámbitos diversos. Y entonces asombrarse de que una misma forma reaparezca en uno y otro ámbito. Pero es el significado del concepto de derivada lo que permite delimitar aquellos ámbitos donde es posible definir ese concepto. El que se mantenga "la misma forma" implica entonces no un proceso formal, sino la expresión de que deben darse las mismas relaciones entre entes si se quiere tener el mismo concepto, la derivada en un punto.

Sección 8. Orden.

En diversas ocasiones se ha planteado que la matemática es el estudio de "las estructuras". Sin embargo, Steiner llama la atención precisamente al hecho de que no todo tipo de estructura es objeto de estudio de las matemáticas, y todo su trabajo se basa en una caracterización (como antropocéntricas) de las estructuras especiales de que se ocupan los matemáticos. No compartimos esta caracterización, pero sí la idea de que no todas las estructuras pueden ser consideradas como posibles objetos de estudio de la matemática.

Dada una tendencia a asumir una postura naturalista, se siente la necesidad de ubicar o vislumbrar una relación con el mundo de la experiencia. Hay diversas posibilidades, y no quiero más que especular un poco en algo que de todas maneras no corresponde estrictamente al tema de este trabajo. En nuestra opinión la concepción básica de lo matemático surge de nuestro aprendizaje de lo que pueda ser "orden", entendido como relaciones claramente definidas en un conjunto limitado, relaciones con un sentido que les da coherencia y, sobre todo, unidad. Por ejemplo, bajo esta concepción, aunque la construcción de los panales de las abejas genera una estructura, es un orden cuando esa estructura se manifiesta como algo con un cierto sentido que le da unidad. Si además es factible que se dé esa unidad en términos de un número acotado de relaciones, sobre todo aquellas de una gran sencillez, entonces, pudiere pensarse, se tiene una experiencia que podemos, en mayor o menor medida, expresar en el marco de lo que sean las matemáticas.

El percibir un orden va más allá del puro percibir regularidades, es darle a esas regularidades un marco, un significado y un desarrollo posterior. Como habitante de la ciudad, bien podría pasar un tiempo en una granja y percibir ciertas regularidades en la conducta de los animales domésticos, pero difícilmente sacaría las conclusiones profundas de esas regularidades que pudiese sacar quien llevara toda su vida en la granja, ya que carezco del conocimiento que me permite captar en toda su profundidad el orden subyacente a ellas. En ciertos casos inclusive el conocer ese orden le permite al granjero innovar a partir de lo ya dado. Pero una experiencia de ese tipo está alejada de aquellas que pudiesen dar lugar a la experiencia matemática, hay demasiadas relaciones, demasiados cabos suelto, demasiada ambigüedad.

La restricción de estructuras en general a "órdenes" elaborados como estructuras unificadas conceptualmente, reduce considerablemente el campo de elección para los matemáticos, y dado que en el proceso de conocimiento es posible separar y unificar representaciones de aspectos parciales del mundo objetivo como esos "órdenes", es posible especular que el conocimiento de esos subsistemas de lo real proporcione y haya proporcionado elementos importantes a las matemáticas.

Esto por supuesto no resuelve el problema más que muy vagamente, ya que, para usar el ejemplo de Hardy retomado por Steiner, no explica por qué no son consideradas como matemáticas las estructuras de la teoría del ajedrez. Es sólo una manera de presentar un principio que guía una concepción muy difundida en la comunidad científica, que las matemáticas representan algo objetivo de manera racional, aunque, claro está, hay muy diferentes maneras de presentar esta situación que no necesariamente coincide con lo expuesto en esta sección.

Sección 9. La forma en matemáticas.

Al hablarse de la "forma" de algo se está indicando que hay algo que no es la forma, el mismo Steiner habla del "significado matemático de alguna expresión (p.). Una manera de entender qué es la "forma" es en contraste con un cierto "significado". Por ejemplo se puede decir que cualquiera las matrices A y B representan la misma transformación lineal T: $R^2 \cdot R^2$ (más adelante se comentará un poco de esto).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ en la base } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \text{ en la base } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Por lo tanto se puede decir que A y B representan la *forma* de T en cada una de las bases dadas.

Pero también puede decirse que la forma estricta que se tiene delante no es otra cosa que la manera en que se acomodan esos números: El arreglo gráfico de 2 filas y 2 columnas en una cuadrícula enmarcada por algún tipo de paréntesis.

Se tienen que tomar en cuenta también varios aspectos convencionales. Unos autores usan paréntesis rectangulares para esas matrices, otros los paréntesis usuales.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

La manera en que se numeran los elementos de la matriz puede variar:

a_{ij} en contraste con a_{ji}

En el primer caso el primer índice indica las filas, en el segundo las columnas de la matriz. Es notación usar subíndices, ya que por convención los superíndices indican otra cosa, aunque no hay nada que impida usarlos en otro sentido.

En cuanto a la notación hay diversos aspectos y usos. En notación polaca inversa una suma como 5+7=12 toma la forma 5,7+12, los sumandos se dan primero separados por algún símbolo convencional o un espacio y el signo + indica "efectuar la operación suma", por lo que inmediatamente se da el resultado, evitándose el uso del símbolo "=". La notación polaca puede expresarse como +(5,7)12 o +(5,7)=12, donde el signo + aparece como operador. Además el uso de paréntesis, comas u otro símbolo o espacio para separar y agrupar es también convencional.

Es interesante seguir contrastando con otras maneras de considerar lo que pudiese ser la "forma" de algo. Un ejemplo clásico y de importancia es el de la relación entre las funciones que representan a las funciones cónicas en dos dimensiones y las ecuaciones diferenciales parciales que dependen de dos incógnitas.

La manera general de representar a esas cónicas, el círculo, la elipse, la parábola y la hipérbola, es por medio de la ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \tag{3}$$

Que puede concretarse sólo de ciertas maneras en una formulación explícita de segundo grado. La solución de una ecuación de segundo grado está dada por la fórmula:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4}$$

El rango de valores del discriminante, o sea del subtérmino (b^2 – $4ac$) indicará tanto la existencia de soluciones como la posibilidad de encontrar ciertas "formas" particulares de (3). La una corresponde a la representación de elipses[25], la otra de parábolas, la última de hipérbolas. Por ejemplo, si la ecuación representa parábolas para ciertos rangos de valores de x es factible expresarla explícitamente como

[25] El círculo se considera como una elipse cuyos focos coinciden.

$$y = ax^2 + by + c. \tag{5}$$

Si representa elipses toma la forma

$$\frac{x^2}{h} + \frac{y^2}{k} = R. \tag{6}$$

Si representa hipérbolas

$$\frac{x^2}{h} - \frac{y^2}{k} = R. \tag{7}$$

Por otro lado, usando el concepto de derivadas parciales, ciertas ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden se pueden escribir de la siguiente manera:

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + g$

No es sorprendente que en el primer caso se hable de ecuaciones elípticas, en el segundo de ecuaciones hiperbólicas y en el tercero de ecuaciones parabólicas, ya que la analogía entre segundo orden de la derivada parcial y segundo grado de la variable es clara, así como las relaciones entre variables y derivadas[26].

Las soluciones correspondientes no tienen nada que ver con elipses, hipérbolas o parábolas por lo que puede decirse que la analogía se refiere a la forma de las ecuaciones y no a aquello que significasen. Sin embargo, precisamente por esto la analogía no tiene trascendencia, es sólo una manera de dar unos nombres distintivos y de distinción histórica a ciertos tipos de ecuaciones. Es dar nombre a los elementos de una clasificación.

---

[26] Se han presentado sólo los casos más sencillos, por no hacer pesada la presentación, pero más que nada porque **aun** en casos con otros coeficientes las analogías siguen siendo las mismas.

Hay un aspecto más significativo. En oposición a los aspectos de notación mencionados previamente, esta analogía se basa en criterios que no son arbitrarios o convencionales. No basta con que haya una relación formal entre segundo orden de derivación y segundo grado multiplicativo, sino que la relación entre las derivadas parciales esté dada, como en el caso de las variables elevadas a una potencia, por una operación de grupo interpretada como suma, y que en un caso la relación se dé entre una primera derivada y una segunda, ya que en el caso de una parábola se da entre una variable elevada a potencia 1 y otra a potencia 2. No se pueden forzar las ecuaciones para que tengan esa forma, sino sólo constatarla.

En contraste, supóngase que se quiere forzar una analogía formal entre las ecuaciones:

$$\int (f(x)+g(x))dx = A,$$

y

$$\alpha + \beta = \xi.$$

Se puede proceder de la siguiente manera:

No hay nada que prohíba dejar de lado[27] el símbolo *dx* en la primera ecuación:

$$\int (f(x)+g(x)) = A.$$

En la segunda se puede cambiar a notación polaca:

$$+(\alpha, \beta) = \xi.$$

Se tiene entonces un operador primero, dos argumentos después con un símbolo entre ellos, todo igualado a un parámetro, y se podría hablar de una analogía entre la forma de una y otra ecuación. El ejemplo es un poco simple, pero ilustra la diferencia. En este caso se procede de manera arbitraria (¿por qué no se aplicó también notación polaca en el argumento de la integral?) A efecto de obtener un

---

[27] Aunque a gran parte de los matemáticos les parezca algo que no debe hacerse, incluido el autor de estas líneas.

parecido buscado. En el caso de las ecuaciones diferenciales la analogía es constatada, no manipulada. Se basa en algo que no tiene que ver con el significado de las dos diferentes clases de entes matemáticos, y que se puede llamar con justicia la forma de esos entes. Pero en oposición a lo arbitrario de usar, por ejemplo, el signo $\dot{x}$ para denotar la primera derivada de x con respecto al tiempo y no x', estas formas se clasifican como análogas usando criterios que no dependen de la subjetividad del matemático. O sea, si se cambiara consecuentemente la notación, esas analogías seguirían dándose, independientemente del aspecto que la nueva notación indujera. Dicho usándose una metáfora matemática, esas formas que permiten relacionar las ecuaciones diferenciales con las ecuaciones de las cónicas son invariantes con respeto a cambios arbitrarios (pero consecuentes) de notación.

Sección 10. Criterios de selección de conceptos en matemáticas.

Hasta donde los historiadores pueden afirmarlo con certeza (véase, por ejemplo [Collette]), parece haber consenso entre ellos de que la geometría surge como una ciencia empírica. Qué llevó a poner en el mismo saco los conceptos empleados en ella y los conceptos numéricos y ponerle el mismo nombre a la actividad que se ocupa de ellos es algo que se puede reconstruir con relativamente poca especulación. Esa reconstrucción requiere al menos dos saltos cualitativos. Por un lado el paso de figuras geométricas "reales" a figuras ideales. Por otro la aceptación de otro tipo de números además de los naturales. La misma geometría tuvo mucho que ver en este último asunto, por cuestiones de proporcionalidad entre segmentos, lo mismo que la determinación de armónicos en música.

Lo que sí conlleva un grado más alto de especulación es tratar de elucidar si, por ejemplo, las figuras geométricas fueron siendo introducidas con tales o cuales criterios. En principio no hay por qué pensar en una sucesión de incorporaciones. Quizá todo aquello que ya previamente, en situaciones empíricas, había sido aceptado fue a su vez tomado "en paquete", Muchas veces el camino es el opuesto: ya se tiene un cierto conjunto de objetos, y se trata de encontrar una definición común a ellos que permita ir incorporando nuevos elementos. Para ubicar mejor el concepto de "criterio de aceptación" es útil pensar en estas sucesiones. Podríase pensar que primero se aceptaron, digamos, los segmentos de recta y los puntos como objetos válidos. Por ello serían aceptables triángulos y rectángulos, pero no tan fácilmente círculos, para los cuales habría que establecer primero en que sentido se "componen" o son construibles a partir de esos objetos primitivos. Sólo habiendo quedado claro que un punto (el centro) y un segmento de recta (el radio) intervienen en esa figura el círculo pasaría a ser objeto válido. El criterio sería entonces: los objetos de la geometría son todos aquellos que son construibles con regla y compás ideales y de los cuales podemos construir representaciones aceptables con regla y compás reales. Se habrían tenido entonces criterios objetivos para decidir si tal o cual concepto, el triángulo, el círculo, pertenece o no a las matemáticas (la geometría).

Dada la geometría y aceptando que a ciertos segmentos de recta se les puede asignar un número natural, otras asignaciones serían consideradas como números si y sólo si representan relaciones de proporcionalidad entre esos segmentos básicos. Por ello no se acaban de aceptar los irracionales como números, no pueden expresarse en términos de números naturales. El nombre es altamente significativo. El punto es que igualmente habría criterios claros y objetivos al respecto. Lo que no es tan claro es si entre esos criterios se encuentra el estético, o, para decirlo con una de las palabras de Steiner, habría que ver si el "gusto" de aquellos dedicados a la matemática jugó un papel en la selección, y que relevancia pudiese haber tenido.

Al menos entre los griegos se dio muy pronto una apreciación de las diversas relaciones entre la matemática y lo estético, la música, las proporciones visuales. En mi opinión, ya al menos desde Euclides, y posiblemente mucho antes, la claridad, sencillez y profundidad de las demostraciones deben haber empezado a inspirar sentimientos de elegancia y belleza entre los practicantes o estudiosos de esta actividad. Pero si bien el que una relación geométrica no viniera dada por un número racional inspiraba desagrado, no parece haber sido ese desagrado lo que llevó a no aceptar los números irracionales, sino el hecho de que no pudieran ser representables como relaciones entre números naturales.

Siglos después a Newton le molestaban los números negativos pero llegó a usarlos. Se nos dice que los usó porque los necesitaba. Por lo tanto, con gusto o disgusto, o como caso provisional porque no tenía con qué reemplazarlos, Newton los aceptó como parte de las matemáticas. El criterio sería entonces pragmático.

La relación de Leibniz con las matemáticas tenía más en común con lo que hoy en día llamaríamos matemática pura. ¿Por qué razón consideraba que la derivada de una función era un ente matemático legítimo? Porque le resolvía un problema matemático: cómo trazar la tangente a una curva en un punto dado. También se tendría que llamar a esto un criterio pragmático, aunque ya habría otros aspectos que considerar. ¿Por qué los matemáticos de aquel tiempo estaban tan interesados en ese problema? Hay toda una serie de razones históricas, pero ya no es descartable que hubiera una cierta predilección por este y algunos otros problemas porque les resultaran estéticamente atractivos. Claro, habría que establecer hasta qué punto esta posibilidad tenía peso en la balanza. No hay elementos que permitan suponer que haya sido decisiva.

Además una cosa es el problema y otra su solución, sobre todo en el caso en que la solución parece ser única. En subestructuras de ciertas sociedades la única opción para una mujer de tener relaciones sexuales era o es el matrimonio convenido por la familia. Con todo lo atractivo que es el problema (encontrar la manera de desarrollar su sexualidad) para un ser humano normal, esta solución no lo es tanto. No parece haber habido muchas opciones para Leibniz y sus contemporáneos, o aceptaban la derivada o no, pero si no la aceptaban el problema quedaba sin solución. Lo más que podían hacer era aceptar una u otra *forma* de representarla: la de Newton o la de Leibniz. Pero no se pretendía estar hablando de entes distintos.

Las cosas cambiaron radicalmente en los siglos posteriores, en especial a partir de los desarrollos del siglo XIX y sobre todo en el XX. Según algunos autores, en especial G. H. Hardy, un notable matemático inglés[28], y más aún para Mark Steiner, filósofo, los criterios estéticos han ido tomando la delantera, al grado de ser los fundamentales en la era moderna. Un matemático "puro" en el sentido actual[29], y Hardy calificaba bien para ello, le da carta de naturalidad a tal o cual concepto o teoría porque en algún sentido le despierta un sentimiento de belleza, de elegancia. Hay por supuesto un cierto "control" de la comunidad. Ya sea que el concepto es tan atractivo que otros matemáticos lo aceptan, o se debe convencer de sus virtudes estéticas. Eso sí, una vez satisfactoriamente aceptado y elaborado sigue su vida propia. Suponemos, sin que estos autores lo digan explícitamente, que si en algún momento de ese desarrollo el concepto perdiera su atractivo sería desechado por esa sola y única razón[30].

Ni Hardy ni Steiner son muy dados a ejemplificar, desafortunadamente. Hardy introduce un ejemplo que retoma Steiner, el de la teoría del ajedrez. ¿Por qué no es una teoría matemática? Porque a los matemáticos no les parece suficientemente atractiva[31]. Podría ser, pero una golondrina no hace un verano. Un problema es la falta de documentación. Si Riemann, quien para colmo murió joven, optó por estudiar la idea de tensor porque le parecía muy atractiva estéticamente, o porque la necesitaba para otro desarrollo, o porque sus investigaciones en áreas cercanas lo llevaron a ello, o por una mezcla de todas esas razones y otras (que sospechamos es lo que debió haber tenido lugar) no hay manera de decidir. El mismo Hardy no comenta hasta qué punto sus discusiones y trabajo con Whitehead incluían consideraciones estéticas, y menos, lo que sería altamente interesante, si tal o cual teoría fue dejada de lado por ellos por "fea" o "desagradable" o al menos poco atractiva estéticamente.

---

[28] Activo en la primera mitad del siglo XX. Fue uno de los primeros en declararse un "matemático puro". Es conocido además por haberle brindado al gran matemático hindú Rahamabruta la oportunidad de desarrollarse, y por un libro que ha tenido gran influencia en la imagen actual que se tiene de los matemáticos, en el cual reflexiona acerca de sus experiencias como matemático, A mathematician's apology, y en el cual, como veremos, Steiner se apoya.

[29] Riemann podría ser considerado uno de los primeros ejemplos paradigmáticos. Veremos que para Steiner es necesario que ya en el siglo XIX hubiera este tipo de matemáticos.

[30] ¿**Cómo** el millonario que se divorcia de una mujer sólo porque dejó de ser bella?

[31] Estrictamente hablando, Hardy no tendría problemas con que esa teoría fuera matemática, sólo sería no-interesante, pero eso es suficiente para que un matemático serio no se ocupe de ella.

Por ello en este trabajo se propone analizar dos casos bien documentados, cuya discusión fue abierta y, sobre todo, donde hubo conceptos rivales: la sustitución del concepto de infinitesimal por el de límite, y la del concepto de cuaternión por el de vector. En especial este último caso es relevante para los planteamientos de Steiner, pues los espacios de Hilbert son antes que nada espacios vectoriales (y no espacios "cuaternionales"). Si fuera evidente que el factor estético fue decisivo en estos dos casos se habría encontrado elementos a favor de las tesis de Steiner. No parece ser el caso, más bien es factible mostrar es que en ninguno de los dos casos fue el de mayor peso. En la discusión sobre los cuaterniones inclusive fue nombrado explícitamente: La teoría de cuaterniones habría tenido, según algunos de sus defensores, mayor atractivo estético. Sin embargo fue la de vectores la que se impuso.

Sección 11. Las matemáticas como lenguaje o herramienta.

Problemático es el decir que las matemáticas son un o el lenguaje de las ciencias, en especial de la física: ¿Habría entonces "traducciones" a otros "lenguajes"? ¿Cuáles serían? Si hay algo que puede decirse de una y sólo una manera es porque esa "manera de expresión" es fundamental para ello, por lo tanto si no hubiera posibilidad alguna de "traducir" lo que se dice usando la matemática se tendría un punto a favor de la tesis de que las matemáticas son algo significativo, a diferencia de ser una "herramienta" (siempre reemplazable, siempre mejorable).

En cuanto al concepto de las matemáticas como herramienta, una analogía inmediata es la aplicación de una llave de tuercas para cumplir una cierta función (precisamente apretar tuercas). Se tiene un primer "ámbito", el del conjunto de llaves de tuercas. Por otro lado el del conjunto de las tuercas, pero no el de todas las tuercas posibles, sino sólo el de aquellas bien hechas, en perfecto estado y a las cuales es posible asignarles unívocamente un número, su medida, que permitirá saber qué herramienta usar. La "aplicación" se entendería como "uso de una herramienta".

Pero más allá de discutir qué pudiese ser una "herramienta", o un "lenguaje" hay un punto extraño. Se tienen dos áreas extremas en lo que al uso de herramientas se refiere: la técnica y el arte. Cuando aprieto un tornillo con el desatornillador equivocado hay dos posibilidades. O es demasiado grande y debo forzar la cabeza del tornillo, o es demasiado chico y continuamente se resbalará. Supongamos que finalmente consigo apretarlo suficientemente. ¿Qué ha pasado? En ambos casos la herramienta ha dañado al tornillo, en el primero al forzarlo, en el segundo ha dejado la marca de las veces que se resbaló. Ambas situaciones son incorrectas, puede incluso haber quedado inútil el tornillo, ya no será posible desatornillarlo. En contraste, si fue usado el destornillador correcto no habrá señales, y seguirá siendo posible desatornillarlo y volverlo a atornillar. La herramienta correcta cumple su función sin dejar huella.

En otro caso, si quiero comprar un automóvil y la pintura tiene las trazas de las brochas usadas para aplicarla tampoco me parecerá correcto y exigiré, con razón, que se me dé otro auto. Pero ¿qué serían los famosos girasoles de Van Gogh sin las profundas trazas del pincel con que los pintó? La percepción a que llevaron a Occidente durante el Renacimiento las estatuas greco-latinas rotas y el haber quedado incompletas obras como los Esclavos de Miguel Ángel acabó por generar con el tiempo, una sensibilidad hacia las huellas de la herramienta como medio de expresión, al grado de que hay obras actuales que muestran estrictamente el proceso de creación como resultado final.

Con el lenguaje en poesía pasa algo parecido. Es en sí parte esencial de la obra. La poesía (bien) traducida sigue siendo poesía, pero ha adquirido otros matices. Parte del surgimiento de la poesía no rimada se dio por la imposibilidad de reproducir las rimas y métricas de un idioma en otro. En cambio se supondría que un "lenguaje científico" debería ser prácticamente neutro, su misión es transmitir un contenido, y mientras menos "ruido" transmita mejor. En mi opinión no es esto lo que pasa con las matemáticas.

Por ejemplo, la velocidad no es la distancia recorrida ni el tiempo transcurrido, sino "la" relación entre ellos. Aquí el artículo definido es engañoso, ya que no hay una y solo una relación entre distancia y tiempo. Bien podrían ser multiplicadas ambas cantidades, o sumadas, o combinar con otras operaciones, primero obtener raíz cuadrada y sólo entonces dividir. Un físico diría inmediatamente que no pueden ser sumadas pues las unidades de uno son metros, las del otro segundos[32].

Ahora bien, lo que se quiere, y el nombre "dividir" eso indica, es asignar a cada medición de espacio recorrido un tiempo. Se podría pensar que presentar la información en forma de pares ordenados (dejando de lado por un momento el problema de cómo ordenarlos) indica lo que se quiere. (100, 2) indicaría que se recorrieron 100 metros en dos minutos. La manera de asignar unidades se puede resolver como en una base de datos. La pregunta inmediata es ¿para qué se quiere la velocidad? En primer lugar para hacer predicciones. Si la distancia entre tal y cual lugar es **x**, y voy a **y** velocidad, puedo saber en cuanto tiempo llegaré a mi destino. La velocidad también es una medida de la energía del sistema pero para velocidades constantes lo único que se obtiene son medidas relativas, tal sistema va más rápido que aquel otro, por lo tanto el primero tiene más energía que el segundo. De manera estricta, el concepto que permite ubicar ambas situaciones adecuadamente no es el de velocidad, sino el de aceleración. Otra vez interviene una división, y esta vez es difícil encontrar una manera de hacer estricta referencia a los datos medidos. Una manera podría ser presentarlos en forma de tripletas ordenadas, donde los dos primeros elementos serían pares ordenados indicando el primero y segundo velocidad, el tercer elemento el tiempo entre las mediciones. [(100,2), (200, 2), 2] indicaría que primero se midió una velocidad de (100, 2), y que en los dos minutos posteriores se pudo constatar una velocidad de (200, 2), suponiendo que la velocidad se midió sin dejar ningún tiempo entre ambas mediciones, lo que no siempre es el caso, ni puede siempre serlo.

[32] Hay aquí, en mi opinión, una curiosa paradoja que valdría la pena explorar. En el caso específico de la aritmética usual la multiplicación es interpretable como una suma abreviada. Si se asume que es esta la matemática que se aplica al sumar distancias con distancias o masa con masa y no es posible sumar gramos con centímetros, ¿por qué es posible multiplicarlos? Creo que las posibles respuestas a esta pregunta pueden dar indicaciones valiosas en esta discusión.

Además de la irremediable complicación del manejo de semejantes entidades, que sería a fin de cuentas lo de menos[33], el punto clave sería cómo deducir, sin introducir nociones matemáticas, valores representantes de la energía del sistema, como la fuerza que se ha ejercido sobre él. Aquí hay un problema de inicio. La ecuación $F = m\mathbf{a}$ define el término F, más que dar un balance entre dos cantidades, F y **a**. Esto queda más claro si se compara la ley de la inercia, "todo cuerpo se mantiene en movimiento rectilíneo a velocidad constante a menos que se ejerza una fuerza sobre él"[34], con su contraparte aristotélica. "todo cuerpo tiende a un estado de reposo". Para un físico pre-galileico una esfera que rueda sobre una superficie lisa tenderá, de manera natural, a quedarse quieta, mientras que un físico moderno asume que, dado que se queda quieta tras un tiempo, hay fuerzas como la de fricción que se están ejerciendo sobre ella. La segunda ley de Newton lo que dice es cómo definir una entidad cuantificable tal que sea factible conocer y en caso dado reproducir las proporciones en que ciertos elementos del contexto en que se encuentra esa esfera participan en el cambio de estado de ella. El conocimiento de esas relaciones viene precisamente dado por $F = m\mathbf{a}$. Una vez conocida esta ecuación ya no es necesario entenderla como una definición, y puede verse como un balance, y quizá entonces establecer algoritmos que para cada caso concreto permitan deducir "administrativamente" los valores requeridos a partir de valores medidos.

Pero aun esto se debe llevar a cabo bajo la premisa de que siempre es posible trabajar con valores promedio, y ya el mismo concepto de promedio no es expresable en su generalidad sin intervención de conceptos matemáticos.

Dejando eso de lado, lo que las paradojas de Zenón muestran es que los puros conceptos aritméticos (sin preguntar si son imprescindibles o necesarios) no permiten expresar cuantitativamente la idea de movimiento. De ahí la necesidad del cálculo diferencial o algo equivalente.

---

[33] Eso sin meterse a los problemas de definir aspectos como el de orden de un par o tripleta ordenados.
[34] Se ha escogido una formulación elemental y poco rigurosa, pero clara.

***

Si se considera que una herramienta es algo ajeno al producto final, de la misma manera que el martillo puede ser imprescindible para hacer una silla, pero no es la silla, y que además es “mejor” herramienta” mientras menos huella deje sobre el producto, es difícil entender en qué sentido la matemática pueda ser una herramienta de la física, ya que no sólo deja huella en ella, sino que en más de un sentido es parte integral del quehacer físico y de la física (como resultado de ese quehacer). La mecánica newtoniana no es el conjunto de resultados y mediciones alcanzados con ella, sino una serie de leyes casi puramente matemáticas. Pero esas leyes tampoco son de manera fundamental matemáticas, como es fundamental el lenguaje en la poesía, ya que de todas las posibilidades que ofrece la matemática sólo unas se escogen de acuerdo a criterios ajenos a la subjetividad del físico, pues deben respetar ineludiblemente ciertas entidades objetivas, las mediciones[35]. Aquí suponemos que Steiner no estaría en desacuerdo con esta concepción, ya que lo que él afirma no es que la física se construya o defina con criterios antropocéntricos, sino la matemática.

El argumento propuesto, que la matemática no es neutral con respecto al contenido físico, puede sostenerse con mayor fuerza si se tiene una idea de la ciencia en la cual no debe distinguirse entre los resultados de una ciencia y sus métodos de trabajo. La física sería la ciencia de las mediciones tal y como se realizan y como se elaboran, muy de acuerdo a la concepción de la mecánica cuántica como la actividad llevada a cabo con instrumentos tal como son, tal como el físico los emplea. La matemática aplicada a la física sería parte de ella, ya que es parte de la actividad real del físico, más allá de que pueda plantearse la posibilidad teórica de su no necesidad. Algo que, de todas maneras, no parece haber sido hasta el momento demostrado.

---

[35] Inclusive suponiendo que las mediciones en mecánica cuántica no son totalmente objetivas, lo cual no está claro, hay que respetarlas, para las matemáticas son un conjunto dado, más allá de cómo se obtuvieron o definieron. El físico no usa espacios de Hilbert o cadenas de Markov “porque le gustan” o le parecen bellas, sino porque tiene que usarlas. Steiner documenta casos en los cuales físicos notables confiesan que no entienden a fondo las matemáticas que usan.

Con la matemática se calcula, pero más allá de los procedimientos específicos con que se llevan a cabo las operaciones, calcular es tan parte de la física como medir lo es, más allá de sí se usa tal o cual aparato. No parece aceptable decir que el "medir" es una herramienta de la física, aunque use "herramientas" para medir (los instrumentos). La física no es sólo calcular, pero es también hacerlo. Entender a las matemáticas como "herramienta" o "lenguaje" implica la idea de que pueden ser consideradas como algo ajeno a la física, en principio sustituible si surge un mejor instrumento o lenguaje, como fue sustituida la regla de cálculo por la calculadora, o el lenguaje de programación Algol por Fortran. O inclusive dejado de lado si se establece que no hay necesidad de ello, como las sangrías en medicina. "[Por ello] me mantengo de alguna manera aferrado a la hipótesis de que a fin de cuentas la física no necesita la matemática ... Pero esta especulación no es ni un ápice mejor que el "me gusta" o "no me gusta" de otros" [Feynmann].

Sección 12. Naturalismo.

Como se mencionó en la página 24, Steiner considera como el blanco principal de sus ataques el "naturalismo". Pero no enfrenta a esa doctrina de manera global, sino que afirma que una premisa necesaria de todo naturalismo es su negación del antropocentrismo. Por lo tanto más allá de cómo pueda estar definida en concreto esa doctrina, perdería pie sustancialmente si se demostrase que el universo tiene características antropocéntricas. Es por ello que el autor no se siente obligado a dar una definición específica del concepto de naturalismo.

De manera estricta, la argumentación y el análisis que llevo a cabo en este trabajo no requeriría tampoco ir más allá en la delimitación de "naturalismo". Sin embargo, dada la aparición ocasional del término, es conveniente aclarar que por "naturalismo" entiendo, de muy esquemática manera, una posición desde la cual se afirma que las explicaciones de fenómenos naturales[36], en especial las

[36] Si este trabajo versara sobre el naturalismo, esta aclaración de la idea de esa doctrina sería deficiente. Habría que aclara qué es un fenómeno "natural", y qué es lo que se contrapone a ello. Para los fines de este trabajo es suficiente esta idea intuitiva.

explicaciones científicas, no requieren introducir conceptos que vayan más allá de lo que la ciencia postula.

Parte 3. Comentarios finales.

Siendo un tema clásico dentro de las reflexiones sobre la relación entre la realidad y la matemática, la aplicabilidad de esta última ha recibido poca atención en los últimos años, como una búsqueda en los principales archivos electrónicos permite constatar. Tras los ya clásicos textos de Lakátos, Putnam y otros no parecen haberse planteado más preguntas sobre interrelación entre la ciencia y las matemáticas tal como ambas se practican hoy en día. Steiner es uno de los pocos que replantea el problema de la aplicabilidad y lo discute con profundidad.

Como se señalaba en la introducción, el contexto tanto científico como histórico nos parece forma la malla que sustenta la discusión posterior. Es por ello que en la segunda parte de este capítulo hubo que ofrecer una presentación más o menos formal de una serie de conceptos de la matemática y sobre la matemática y sus aplicaciones que en una primera instancia parece un tanto heterogénea. La necesidad de esta presentación se da también por ausencias en la presentación de Steiner, lo que además permite, no se niega, explayarse en desarrollos que quizá sean sólo de relevancia secundaria en la discusión. Esto, sin embargo, enriquece el contexto y permite mostrar, así sea sólo a vuelo de pájaro, los diversos caminos que esta temática permite explorar.

Capítulo 2

Capítulo 2. Steiner o cómo puede la aplicabilidad de las matemáticas dar claves sobre características globales del universo

Introducción.

Es un hecho que hay "aplicaciones de la matemática". En la práctica actual de esta ciencia se constata una diferenciación[1] entre dos ámbitos, uno en el cual "se hace matemática" o (y la diferencia pudiese ser interesante) "se hacen matemáticas", y otro en el cual se toman esos desarrollos y se labora con ellos. La pregunta es entonces cómo es posible que lo que surge en un ámbito ajeno a la experiencia empírica tenga tal efectividad en donde lo empírico es determinante. Dado que la pregunta "está en nuestro camino" y ni podemos darle una respuesta inmediata o definitiva, ni podemos "darle la vuelta", tenemos un problema al que hay que enfrentarse,

Las preguntas se acumulan: ¿Por qué se aplican? ¿Cómo? ¿Qué significa que algo esté fuera del espacio-tiempo, o que no pueda ser influido por él? Etcétera. Éste es el problema de Steiner: Cómo plantear el problema.

Adelanto su respuesta antes de exponer con detenimiento la manera de plantear el problema: Las matemáticas son aplicables porque hay un componente antropocéntrico en el universo. En la forma que él lo plantea la manera de dar una explicación adecuada al problema de la aplicabilidad de las matemáticas es aceptar también como un hecho empírico que el universo tiene esa característica antropocéntrica (entre cualesquiera otras que tenga). De ahí el problema filosófico:

---

[1] Esta diferenciación tiene fronteras difusas.

Para quien piense que el universo es no antropocéntrico no hay manera, según Steiner, de dar una explicación adecuada de la aplicabilidad de las matemáticas.

Como se verá al analizar la estructura lógica de su argumentación, el antropocentrismo se introduce a partir de su concepción de lo que son las matemáticas: Un conglomerado cuya única cohesión global viene dada por dos características específicas de nuestra especie, las preferencias estéticas de los matemáticos y nuestra incapacidad de llevar a cabo ciertos cálculos. La pertenencia o no al conglomerado de uno u otro elemento viene dada ya sea por la posibilidad de que ese elemento despierte ciertos sentimientos de belleza o elegancia en los matemáticos, o por la capacidad de cálculo que ese elemento permite, aunque en casos fundamentales poco eficiente, pero "conveniente" para nosotros.

De Hume se ha dicho que, con relación a algunos aspectos de su teoría del entendimiento humano, "desafortunadamente son tan cortas las partes tanto de la 'Enquiry' como del 'Treatise' en las cuales los elementos centrales de esa teoría se presentan, que la longitud de lo presentado de ninguna manera corresponde a su significado, y uno desearía, Hume hubiese expuesto las tesis centrales de su teoría de manera más detallada" [Gil, p.53]. No puede evitarse la misma inquietud con respecto a Steiner. Por ello en algunos momentos es difícil evitar sentir que al presentar sus argumentos quizá no se le esté haciendo justicia, pues no proporciona todas las nociones que se sienten ser requeridas. Sin ir más lejos es factible percibir esta situación al esquematizar su definición de lo que son las matemáticas. Sea M el conjunto de todos los conceptos que pertenecen actualmente sin duda alguna a las matemáticas. Dado que es un conjunto finito está definido con claridad, en el peor de los casos enumerando sus elementos. Steiner afirma que es posible definir ese conjunto con tan sólo dos predicados unidos por la conjunción lógica "o":

$$M = \{ p \mid p \text{ es un concepto y } (P_1(p) \vee P_2(p)) = V\},$$

Donde $P_1(p)$ es el predicado "p es estéticamente satisfactorio", y $P_2(p)$ es "p es conveniente para efectuar cálculos". Dada la ambigüedad de los predicados, y también dado que en realidad no se sabe a ciencia cierta de dónde deben tomarse los p's, esta no es más que una ilustración que muestra esquemáticamente el aparente reduccionismo de la exposición de Steiner.

Esta situación tiene dos consecuencias para el presente trabajo. Por un lado señala vertientes que deben ser exploradas si se quiere comprender con mayor profundidad la problemática que representa la aplicabilidad de las matemáticas, y que Steiner no analiza, en ocasiones ni siquiera indica. Por otro implica un problema de interpretación. Por ejemplo, no es suficiente con la intuición o entendimiento implícito de la idea de "calcular", sobre todo porque en estas páginas se asume que todo cálculo tiene una finalidad, se hace para algo, como por ejemplo para encontrar la trayectoria de Neptuno o como parte de una demostración. Esto implica que, en primera instancia, todo cálculo debe ser finito, y que tiene un resultado claro, lo que se buscaba o una aproximación a ello, o un indicador de que el cálculo no pudo tener éxito. No necesariamente todo estudioso tiene que coincidir con esta restricción[2]. Suponemos que Steiner, dada nuestra lectura, sobre todo de los capítulos en que analiza el proceder de los físicos con detalle, estaría de acuerdo con la concepción que aquí se presenta, pero no hay elementos suficientes para poder afirmarlo con seguridad, aun siendo éste un caso poco problemático.

Más desconcertante es no saber a qué clase pertenecen los conceptos que puedan ser candidatos a ser miembros de M. El autor menciona la idea de "estructura", de algo con estructura, pero no se compromete a fondo. Quizá, dado que para él a fin de cuentas lo relevante es la selección de los conceptos de acuerdo a criterios no objetivos, diera igual de dónde se tomen, siempre y cuando los matemáticos los acepten como pertenecientes a su ciencia. Esto es bastante insatisfactorio, sobre todo porque no se hace explícito, pero Steiner bien podría alegar que simple y sencillamente así es, y que restringir la libertad de selección

---

[2] Puede haber cálculos que se hagan simplemente "por hacer cálculos". L'art pour l'art, le calcul pour le calcul. Sin embargo, aún en este caso difícilmente una entidad pensante podría llevar a cabo, de una u otra manera, cálculos infinitos. Por lo tanto se requeriría una condición de terminación.

de conceptos de los matemáticos sería un severo obstáculo al desarrollo de esa ciencia, y, por supuesto, a su concepción de lo que son las matemáticas.

***

La discusión se centrará primero en la estructura global del desarrollo de Steiner. Esto permitirá entender las razones que lo llevan a dar una cierta concepción de lo que significa aplicar las matemáticas, y la relevancia que tiene el que Frege ya haya dado avances significativos en otros sentidos, en especial aclarando de qué manera participan en esquemas deductivos de las ciencias empíricas, lo que le permite no ocuparse de ellos. Esta discusión ubicará también la importancia relativa de los diferentes componentes y premisas, en especial se mostrará que la premisa fundamental está fundada en la postulación de que las matemáticas son antropocéntricas, por lo que la crítica, que se presentará en el siguiente capítulo, se centrará en la argumentación que la sostiene. Si esa premisa no es convincente, tampoco lo es su principal conclusión, que el universo es antropocéntrico.

El proceder de Steiner tiene tres partes. En la primera intenta establecer, basado en ideas de Peirce, que hay limitaciones fundamentales en nuestra capacidad de acceder por medio de mecanismos cognitivos creados por la selección natural a verdades sobre áreas alejadas de nuestra experiencia, y por lo tanto toda estrategia que conduzca a ese conocimiento tendría que participar, de alguna manera, de otro tipo de elementos cognitivos. En la segunda parte se afirma que la matemática tiene características globales antropocéntricas. Finalmente se muestra que hay estrategias matemáticas que han permitido llegar a descubrimientos significativos en la mecánica cuántica.

De manera esquemática, conjuntando lo anterior Steiner afirma que debemos deducir que el universo tiene un componente antropocéntrico importante, pues de otra manera no se podría entender cómo una estrategia antropocéntrica tiene éxito.

***

Antes de proceder es necesario plantear una pregunta: Dado que Peirce-Steiner afirman que los mecanismos cognitivos creados por la selección natural no nos proporcionan acceso a conocimiento de áreas "alejadas de nuestra experiencia", ¿de qué otros mecanismos cognitivos disponemos?

Steiner no pretende dilucidar exhaustivamente esta pregunta. No niega que está bordeando la filosofía de la religión [p. 10], pero prefiere dejar ese *Hintergedanke* de lado. Presenta sólo dos mecanismos concretos. El primero es el uso de estrategias antropocéntricas como herramienta de exploración por los físicos, como "puente" de acceso al conocimiento de esos ámbitos. En segundo lugar, de manera más particular, esa estrategia utiliza recursos que rayan en la "magia". A reserva de aclarar un poco más en qué consiste esto último, he creído preferible no profundizar en este rubro[3], ya que en su conjunto lo básico y sistemático es el uso de las estrategias antropocéntricas.

Esos mecanismos no pueden ser mecanismos lógicos o racionales en el sentido en que ese tipo de métodos es usado en la ciencia actual, ni son tampoco mecanismos emocionales o intuitivos, si asumimos que nuestra racionalidad y nuestras emociones e intuiciones han surgido a lo largo de nuestro desarrollo como especie y no como "algo" que está ahí, dado de alguna otra manera (por ejemplo como regalo de los dioses o por arte de magia). Propongo usar la palabra "extra-objetivo" para caracterizar de manera global esos mecanismos cognitivos a los que hace referencia Steiner, a efecto de hacer menos pesada la exposición, sin que esto implique caracterizar lo "objetivo", sino simplemente indicar aspectos que trascienden las áreas de estudio de la ciencia (si es que la ciencia se ocupa de algo "objetivo"). La dificultad, y de ahí la necesidad de una terminología, radica en que no estamos hablando de aspectos subjetivos, como lo estético o los gustos del científico, sino de una relación de esos aspectos subjetivos con características generales del universo no analizables con los métodos de la ciencia, en especial el antropocentrismo. Bien podría haber elementos subjetivos determinantes en las

---

[3] En mi opinión Steiner utiliza la palabra "magia" con fines ilustrativos, casi provocativos, para poner de manifiesto el dilema al que, según él, un naturalista se enfrenta.

matemáticas sin que esto indicara nada relevante acerca del universo. Sólo cuando los aspectos subjetivos tienen repercusiones objetivas es posible postular lo que propongo llamar entidades o características "extra-objetivas".

Quizá no sea muy afortunado usar el adjetivo "objetivo" como parte constitutiva de la frase "extra-objetivo"[4].

La tesis de Peirce-Steiner es equivalente a afirmar que sólo gracias a mecanismos extra-objetivos es posible acceder a conocimiento de "áreas alejadas de nuestra experiencia". Un ejemplo de esos mecanismos extra-objetivos es el uso de estrategias antropocéntricas en la determinación de leyes fundamentales de la física cuántica.

Parte 1. Estructura lógica de la argumentación de Steiner.

En primer lugar quiero mostrar de la manera más formal posible el desarrollo lógico de la argumentación de Steiner, a efecto de destilar la estrategia con la que se procede a su sustentación, y ubicar las afirmaciones, las premisas y su concatenación para poder darles un cierto peso relativo. Al respecto es necesario decir un par de palabras con respecto al *estilo* del autor.

Al contrastar con su libro anterior, *Mathematical Knowledge*, [Steiner, 1975], es notorio que el autor ha tratado de dirigirse a un público más amplio, no necesariamente de especialistas en filosofía de las matemáticas. De ahí que ciertas afirmaciones sean demasiado condensadas, o que ciertos puntos no sean tratados *in extenso*, o que no se exploren algunas implicaciones de lo presentado, quizá por llevar a aspectos demasiado especializados.

---

[4] A fin de cuentas, si la existencia de un dios fuese un hecho, se podría decir que (ese) dios existe "objetivamente". En una concepción de ese dios como la cristiana, nuestra existencia depende del dios, pero la del dios no de la nuestra.

Dado que en este trabajo no se pueden dejar de lado esas implicaciones y a la necesidad de profundizar en otras, hay una contraposición entre el fluir de la narrativa y su análisis crítico y detallado. Por ejemplo, Steiner menciona repetidamente el concepto de "cálculo", o de "calcular". Para él es suficiente con la intuición de ese concepto, pero un análisis detallado no puede prescindir de dar una noción más precisa del mismo, indicando inclusive que puede haber diversas maneras de entenderlo. La situación es todavía más compleja en otros casos, como el de la "forma" de los entes matemáticos.

Había que optar entre ir analizando secuencialmente lo que el autor plantea, o extraer sus tesis principales y reacomodarlas a efecto de darle mayor unidad a nuestra presentación. Ambas posibilidades tienen complicaciones, por lo que se optó por al primera a efecto de poner de manifiesto el "diálogo" con el autor. El peligro, que no siempre pude y a veces no quise evitar es una cierta disgregación que no permite en todo momento mantener una concatenación lógica estricta entre todas las partes. En vez de una fuerte corriente, el resultado final es más como un lago al que confluyen arroyuelos de diversas partes de un valle. Se ha hecho un esfuerzo para que al final quede claro de qué "lago" se está hablando. Espero haberlo logrado.

***

Las premisas más generales, que delimitan el contexto dentro del cual se consideran válidas las afirmaciones posteriores, o en el cual funcionan, o deben funcionar los argumentos que las sustentan son las siguientes:

- La argumentación se refiere exclusivamente a la aplicabilidad de las matemáticas a la física.
- Se habla sólo de la física moderna, a partir de la segunda mitad del siglo XIX y en especial de su desarrollo en las primeras dos terceras partes del siglo XX, aproximadamente.
- El intervalo de tiempo histórico de desarrollo de las matemáticas coincide en lo fundamental con el anterior, pero es necesario hacer referencias que llegan hasta Newton y Leibniz.

- No se pretende hacer afirmaciones válidas para toda la física, sino sólo para casos relevantes de áreas "alejadas de nuestra experiencia". "Nuestra experiencia" es aquella de los "eventos [que tienen lugar] naturalmente en nuestro ambiente humano" [p. 51]. Los objetos alejados de nuestra experiencia son aquellos "alejados de la percepción [y de] procesos que pudieron haber participado en la selección natural" [p. 53].
- El ejemplo paradigmático de un área "alejada de la experiencia humana" es la mecánica cuántica, seguida por la física relativista.
- Se acepta además que Frege resolvió en lo fundamental el problema de la aplicabilidad semántica de las matemáticas, por lo que está claro de que manera intervienen conceptos matemáticos en deducciones empleadas en las ciencias empíricas. Esto se discutirá en la siguiente parte de este capítulo. Es por ello que este problema puede ser dejado de lado para concentrarse en la aplicabilidad descriptiva y de cálculo de las matemáticas, en el sentido que se expuso en el capítulo anterior.
- Las matemáticas son aplicables pues con ellas es posible describir fenómenos físicos y efectuar cálculos que permiten reproducir y predecir resultados de mediciones.
- La aplicabilidad de las matemáticas significa que por el mero hecho de ser matemático, un concepto es potencialmente aplicable, o al menos no hay manera de excluir que lo sea.

Hasta aquí, y bajo las consideraciones hechas en el capítulo anterior, las premisas y definiciones parecen aceptables como base para la discusión, con el comentario de que hay más maneras de entender lo que es "aplicar las matemáticas". La argumentación propiamente dicha comienza a partir de este momento. En una primera instancia se presentarán las afirmaciones de manera esquemática, con el fin de poner de manifiesto el esqueleto lógico.

Esquema lógico.

En la argumentación de Steiner se tienen dos líneas de pensamiento. Por un lado se parte de que los seres humanos tenemos una incapacidad de acceso a áreas "alejadas de nuestra experiencia"; nada en nuestra evolución biológica nos ha preparado para tener conocimiento de, por ejemplo, los fenómenos infraatómicos.

Por otro lado se afirma que los criterios globales de pertenencia a las matemáticas son en lo fundamental estéticos o de conveniencia de cálculo, por lo tanto son criterios propios de nuestra especie, antropocéntricos. Enseguida se constata como un hecho que en la física se han aplicado, con éxito mucho más allá de lo probable, criterios matemáticos en la adquisición de conocimiento sobre un área "alejada de nuestra experiencia", la mecánica cuántica. Para que un criterio antropocéntrico en física funcione es necesario que haya algo en el universo que responda de la misma manera. Por lo tanto el universo debe tener características antropocéntricas.

La tesis de Peirce-Steiner lleva, en este contexto, por dos vertientes. En primer lugar hacer plausible la idea de que es necesario invocar criterios extra-objetivos para poder explicar algunos de nuestros desarrollos científicos.

En segundo lugar evitar que nuestro conocimiento de la mecánica clásica se convierta en un contraejemplo. Si partimos de que la matemática es racional, y por lo tanto sus posibles elementos subjetivos, como lo estético, no son determinantes, y si estrategias basadas en ella han permitido acceso exitoso a un "ámbito alejado de nuestra experiencia", quiere decir que no necesitamos invocar elementos extra-objetivos, como el antropocentrismo, para explicar la eficiencia de nuestro conocimiento. De ser así a aplicabilidad de las matemáticas podrá ser un problema todo lo complejo que se quiera, pero no un misterio, sino un asombro y un reto. Mientras que si se parte de que sólo mecanismos extra-objetivos pueden explicar un éxito consistente, entonces, dado que la matemática tiene éxito como mecanismo de exploración, debe *ella* involucrar necesariamente un elemento extra-objetivo. Steiner pretende mostrar que ese elemento existe y que es el antropocentrismo.

Enseguida presentamos el esquema lógico de estas ideas.

Primera parte.

Afirmación A. Nada en el desarrollo evolutivo de nuestra especie nos proporciona la capacidad de llegar a conocer las leyes que rigen fenómenos alejados de nuestra experiencia.

Steiner toma esta idea de Peirce, y aduce que tenemos limitaciones fundamentales en nuestra capacidad de conocimiento del universo. Steiner ubica esta incapacidad en el problema del acceso al conocimiento: ¿Cómo obtener las leyes básicas que permitan elaborar y desarrollar una teoría física como la mecánica cuántica?

Para Steiner es un hecho que se tiene conocimiento profundo de la mecánica cuántica. Ese no es el problema, sino intentar explicar cómo pudimos comenzar a dar pasos correctos.

Corolario B. Los posibles mecanismos de acceso a conocimiento de áreas alejadas de nuestra experiencia sólo pueden ser extra-objetivos.

Primera deducción.

Afirmación C. Si una ley física de un ámbito alejado de nuestra experiencia se expresa en forma matemática, no puede haber ningún proceder científico (tal como esos procederes se presentan en la física actual) que proporcione indicios sobre la forma pudiese tener el sistema matemático que representa alguna ley de ese ámbito. Lo único que un científico puede hacer es tratar de *adivinar* esa forma.

Ésta es una consecuencia de B, pero, como la estructura de la frase indica, hay una premisa adicional: En algunos casos es factible suponer que aun en ámbitos alejados de nuestra experiencia las leyes físicas, o algunas de ellas al menos, son expresables matemáticamente.

"Adivinar" parece significar en este contexto el intento de obtener una respuesta correcta a algo sin necesidad de recorrer todas las posibilidades que ese algo pudiese adoptar. De otra manera no tendría sentido usar esa palabra (*guessing*) en vez de, por ejemplo, "búsqueda aleatoria". El físico actual, el científico en general, sabe o intuye, según Steiner, que se enfrenta a algo más allá de lo que su experiencia puede hacerle comprensible: "... the nature of contemporary science, which deals with objects beyond the realm of spatio-temporal experience" [p. 9][5]. Pero a menos que fuese un loco que se ocupa de problemas desesperadamente irresolubles, siente, o debería sentir que hay alguna manera[6] de obtener las respuestas que busca, aunque ello debería, en un sentido estricto, parecer "magia" [p.136]. ¿Qué ofrece, entre otras cosas, la magia? Atajos, la posibilidad de encontrar sin buscar, o reduciendo considerablemente la búsqueda sin necesidad de conocer el orden subyacente a lo que se busca[7], o sea, la magia permite *adivinar.* El indicador más adecuado de que se está adivinando es encontrar sin necesidad de saber a fondo por qué se encuentra. Suponemos que ésta es la razón de que Steiner use esa palabra.

***

Aquí se presenta un punto delicado en la interpretación del texto. Quien se encuentra familiarizado con la práctica de una ciencia difícilmente negará que en ciertos momentos un científico pude dejarse llevar por el azar, tratando de adivinar tal o cual aspecto del fenómeno que analiza. Pero tras admitir que puede haber cierto grado de "adivinanza" en la búsqueda científica, con toda seguridad añadirá: "Pero no es adivinar ciegamente"[8].

En mi opinión Steiner debe ser radical para que su argumentación se afiance: Al menos en ciertos momentos el científico, el físico, se llega a encontrar en situaciones para las cuales nada de lo previamente conocido le puede dar la más mínima indicación de hacia donde dirigirse en su búsqueda. Lo único que puede garantizarle alguna posibilidad de éxito es acudir a factores que van más allá de lo que la ciencia puede ofrecer. El físico, al menos en esos momentos, deposita su confianza en la posibilidad de que nuestra especie ocupe un lugar privilegiado en

---

[5] No queda claro en que sentido esto es cierto.
[6] El proceder extra-objetivo.
[7] Orden que quizá no sea cognoscible.
[8] Agradezco a A. E. haberme señalado esta situación.

el universo, y decide, de manera más o menos conciente, aplicar en su búsqueda estrategias basadas en algo (las matemáticas) que es en lo esencial también antropocéntrico.

Segunda parte.

Afirmación C. Las matemáticas son antropocéntricas globalmente.

Ya se han dado las primeras indicaciones de lo que Steiner quiere decir con esto, aunque hay que recalcar que en ningún momento afirma que los diferentes componentes, como la aritmética o la teoría de grupos, sean antropocéntricos. Enseguida se planteará qué quiere decir Steiner con esto y como lo sustenta-

Segunda deducción.

Afirmación D. Toda estrategia que se base fundamentalmente en la matemática es antropocéntrica, así sea sólo de manera implícita. Esto es especialmente claro en el caso en que esa estrategia se base en procedimientos formales, o sea procedimientos sintácticos y basados en la notación usada.

D es entonces consecuencia de C..

Afirmación E. Se tiene actualmente un conocimiento significativo de la expresión matemática de algunas de las leyes que rigen la mecánica cuántica.

"Significativo" significa lo mismo que en estadística: una desviación de lo que sería dable esperar si aquello que se está analizando tuviera lugar sólo de manera estrictamente aleatoria. Esta afirmación es simplemente la constatación de un hecho

Afirmación F. Esas leyes fueron descubiertas en lo fundamental gracias a estrategias formales basadas en las matemáticas.

Steiner define en el capítulo 3 qué entiende por esas estrategias, y ejemplifica su uso en los capítulos 4 al 6.

Afirmación G. La física es entonces una ciencia que llega a (algunos) resultados objetivos usando estrategias antropocéntricas.

G es entonces una consecuencia de D, E y F.

Afirmación H. Si una ciencia usa estrategias extra-objetivas, aunque sea sólo en partes de ella, y obtiene resultados objetivos que sólo se pudieron obtener gracias a esas estrategias, entonces proporciona razones válidas para suponer que hay un componente extra-objetivo en el universo.

Si la afirmación G fuese correcta, H permitiría deducir que:

Afirmación I. Esas estrategias funcionan porque hay un componente antropocéntrico en el universo.

***

Como se señaló, si A se aceptase como algo irrefutable, el mero hecho de haberse obtenido conocimiento sobre el mundo cuántico indicaría que los científicos estarían usando estrategias extra-objetivos. Steiner afirma que eso fue lo que pasó, que los físicos abandonaron el naturalismo y buscaron estrategias extra-objetivas, aunque *quizá* no siempre de manera consciente. Pero afirmar simplemente que dado B entonces las estrategias matemáticas de descubrimiento tienen que ser extra-objetivas parecería conllevar una contradicción, ya que las matemáticas se consideran altamente racionales[9]. Es por ello que el peso fundamental de la argumentación recae en la afirmación C. Si las matemáticas no son extra-objetivas, entonces proporcionan una demostración de la no-validez de B, pues muestran que hay estrategias racionales[10] que llevan a descubrimientos en áreas alejadas de nuestra experiencia.

En la segunda sección de este capítulo se desglosan y detallan las afirmaciones y deducciones de Steiner, brindándose especial atención a sus argumentos acerca

---

[9] Suponiendo que la racionalidad es algo que se desarrolló o adquirimos en el proceso de evolución.

[10] Y, por lo tanto, estrategias que no requieren de aspectos extra-objetivos.

del antropocentrismo de las matemáticas, pues es ahí donde radica lo esencial de su análisis.

Antes de proceder es necesario dilucidar lo que Steiner define como "naturalismo". Indica que es algo relacionado con los planteamientos de Quine, pero prefiere no definirlo de manera general, sino plantearlo simplemente como una filosofía de la ciencia que, entre otras cosas, es anti-antropocéntrica. Es decir, desde el punto de vista del naturalismo la especie humana no debería tener un lugar especial en el universo. Digamos que se asume que el anti-antropocentrismo debe ser una condición necesaria para una filosofía que se llame a **sí** misma naturalista, independientemente de cómo se defina estrictamente el naturalismo.

Por lo tanto, si fuera factible mostrar que alguna actividad científica importante tiene algún componente antropocéntrico esencial (o que al menos hasta el momento no haya manera de verlo de otra forma), se habría establecido un serio reto a cualquier filosofía "naturalista" de la ciencia. Steiner cree haber podido establecer precisamente una situación de este tipo gracias a las matemáticas. Dado que el naturalismo sostiene que la especie humana no puede tener una situación privilegiada en el universo. ¿Qué pasa si se puede mostrar que existen estrategias basadas en criterios como el estético que pueden conducir eficientemente a conocimiento sobre fenómenos físicos?

El naturalismo, tal como Steiner lo entiende, se vería cuestionado.

Parte 2. La argumentación de Steiner.

Steiner ha escrito dos libros de filosofía de las matemáticas, además de diversos artículos al respecto. El primero, *Mathematical knowledge* [Steiner, 1975], está más acorde a lo que pudiera llamarse la preocupación "clásica" de la filosofía de las matemáticas en el siglo XX, la discusión acerca de sus fundamentos. El segundo, el interlocutor de estas páginas, *The applicability of mathematics as a philosophical problem* [Steiner], es radicalmente distinto. En este último se ha dejado atrás esa problemática "clásica", no porque se pretenda haberla superado, sino porque se ha identificado un problema alejado de ella, aunque no fuera de toda tradición, pues la relación de las matemáticas con el mundo de la experiencia siempre ha formado parte esencial de la preocupación filosófica.

La introducción de [Steiner] es relevante para entender sus planteamientos, en algunos casos es el lugar donde se exponen con mayor claridad. El capítulo primero no es relevante a la discusión más que en el sentido de que permite dejar de lado ciertos problemas que de otra manera serían ineludibles. El segundo capítulo se ocupa de precisar lo que se entiende por la aplicabilidad descriptiva, en qué sentido ésta representa un misterio, y cómo habría que proceder para disiparlo en casos específicos.

El capítulo tercero es el corazón filosófico del análisis. Se exponen las razones para sostener que las áreas alejadas de nuestra experiencia no son accesibles usando las estrategias desarrolladas a lo largo de la evolución de nuestra especie. Se plantea en qué sentido las matemáticas están atrás de estrategias formales de descubrimiento y, sobre todo, se complementa y especifica lo dicho previamente acerca de las razones por las cuales se considera que las matemáticas son de manera global antropocéntricas. El resto del libro, los capítulos cuatro al seis y los apéndices, son un recuento detallado de cómo se ha procedido de manera formal para llegar a algunos de los descubrimientos principales de la mecánica cuántica.

En esta parte se hará una presentación de las ideas de Steiner con respecto a la aplicabilidad de las matemáticas como problema filosófico. Esta presentación se atendrá más al esquema lógico de argumentación que al orden en que Steiner expone sus argumentos.

No se presenta más que muy brevemente la parte histórico-interpretativa del libro, los capítulos 4 al 6 y los apéndices, ya que son en lo fundamental estudios de caso, en los cuales los detalles son analizados con detenimiento. Pudiese parecer contradictorio, pues aunque a pesar de que en estas páginas se está en desacuerdo con las tesis principales de Steiner acerca del antropocentrismo, y por lo tanto con varias de sus interpretaciones específicas de los hechos históricos, sí aceptamos como un hecho lo que el autor documenta: Los físicos han procedido de manera sumamente formal en muchas ocasiones. El que las matemáticas sean una actividad de la cual sea posible dar cuenta de una manera naturalista no implica que ese proceder quede automáticamente justificado, sino señala que **inclusive** dentro de un pensamiento naturalista o realista los problemas que plantean las matemáticas aplicadas son relevantes.

De las tesis de Peirce-Steiner acerca de la incapacidad de conocer áreas fuera de nuestra experiencia no nos ocuparemos más que de presentarlas de manera breve, no tanto porque carezcan de interés, sino porque mientras no se demuestre que las matemáticas son una actividad extra-objetiva[11], esos mismos casos que Steiner con tanto detalle presenta documentan que hay estrategias racionales que permiten acceder a esas áreas.

Sección 1. Necesidad de un concepto de la aplicación de las matemáticas. La aplicabilidad semántica y su papel en las deducciones científicas. Frege. Aplicabilidad descriptiva.

Steiner afirma que hay que dar un concepto de lo que se entiende por aplicación para poder hablar de ella correctamente. En esto coincido plenamente con él. En el capítulo anterior se dieron varios ejemplos de lo que puede entenderse por aplicaciones de las matemáticas.

***

Las matemáticas son aplicadas en procesos deductivos. Puedo concluir que hay siete frutas sobre una mesa si sé que hay tres manzanas y cuatro peras encima de ella. Se dedujo la cantidad 7 de las premisas “hay 3” y “hay 4”, y de aplicar las matemáticas para obtener 7 = 4 + 3. Es lo que Steiner llama aplicabilidad semántica. “But a semantical problem lurks. In the statement ‘7+5 = 12’ of “pure mathematics,” the numeral ‘7’ purports to name a mathematical object, the number 7, but in ‘Seven apples were on the table,’ the term ‘seven’ looks like a predicate characterizing the apples. ... The philosophical problem is, then, ..., to find a constant interpretation for all contexts ... in which numerical vocabulary appears." [Steiner, p. 16].

Los cálculos ofrecen la posibilidad de deducir la cantidad de elementos en un conjunto a partir de la manera en que han sido reunidos sus elementos. Si se tienen entidades claramente individualizadas y que no interactúan unas con otras, es posible deducir que si tengo primero cinco entidades y añado siete, el conjunto final tendrá doce elementos, y si he contado correctamente los primeros cinco y los siguientes siete, no hay necesidad de contar los elementos del conjunto resultante. Steiner ofrece un ejemplo análogo para la multiplicación.

A pesar de la sencillez de las operaciones aritméticas básicas no es inmediato poder expresar con claridad las condiciones que los objetos de la experiencia deben cumplir para poder aplicarlas. Dos átomos de oxígeno no forman un conjunto en el mismo sentido que dos manzanas o, para usar un ejemplo de René Thom, una bandera de dos, tres o cinco colores sigue siendo una sola bandera. También se tiene el problema de la permanencia en el tiempo o en el espacio.

***

Supongamos que efectivamente es posible establecer una relación entre entes empíricos y aritméticos de manera que haya una correspondencia entre operaciones aritméticas y números de elementos en ciertos conjuntos. Por ejemplo, si se tiene que "3 + 4 = 7", y tengo tres manzanas sobre una mesa, y añado cuatro peras, se puede asegurar que tengo siete frutas sobre esa mesa. La premisa matemática es "3 + 4 = 7". A pesar de ello el problema de fondo de la aplicabilidad semántica no se elimina, pues en "3 + 4 = 7" los números 3, 4 y 7 aparecen como sustantivos, mientras que en "4 peras" son adjetivos, por lo que aparentemente hay una incompatibilidad.

---

[11] Y una de las conclusiones principales es que "the burden of proof" aún radica en aquellos que lo afirman.

Frege resolvió este problema al mostrar que toda frase como "4 peras" es transformable a "el número de peras es 4", donde 4 aparece como sustantivo. Toda frase en la cual un numeral aparece como adjetivo es transformable en una frase equivalente en la cual el numeral aparece como nombre. Por lo tanto el uso de los numerales en al matemática es consistente con lo que podemos llamar su aplicación empírica.

Al menos para las aplicaciones de la aritmética, uno de problemas más acuciantes de la aplicabilidad semántica queda aclarado en lo fundamental.

Pero otras cuestiones quedan abiertas. Como el problema de la relación de los entes matemáticos con los entes empíricos. Steiner lo llama el problema 'metafísico' de la aplicabilidad, y expone la respuesta de Frege a esta pregunta. Las matemáticas no se aplican directamente a objetos empíricos, sino a conceptos. "Frege arguyó que las leyes de la aritmética son leyes de segundo orden gobernando cualesquiera otros conceptos. No sólo arguyó este punto (sino que) construyó un sistema deductivo de la aritmética en el cual este carácter de segundo orden es evidente. En el sistema de Frege los numerales aparecen en predicados de segundo orden aplicando a conceptos ordinarios. En este sentido, Frege "predica" números naturales de conceptos. Los conceptos (...) pueden ser verdad de objetos físicos. En pocas palabras, las entidades matemáticas se relacionan, no directamente con el mundo físico, sino con conceptos, y (algunos) conceptos, obviamente, se aplican a objetos físicos. El misterio se desvanece así sin huella alguna" [pp. 21-22].

***

Más allá de si efectivamente se han resuelto los problemas semántico y metafísico de la aplicabilidad, el punto clave es que al dejar de lado esos problemas es posible vislumbrar nuevas preguntas, nuevas rutas a explorar. Es precisamente esto lo que Steiner quiere llevar a cabo. Hay que preguntarse de qué otra manera es posible entender la aplicabilidad de las matemáticas.

El punto de partida para sus indagaciones es la aplicabilidad descriptiva, la capacidad de las matemáticas de ofrecer una descripción de ciertos aspectos físicos y de poder emplearlas para hacer predicciones, usando la capacidad de cálculo que ofrece esa descripción. Son esas predicciones las que permiten corroborar lo adecuado de la descripción.

Ni la aplicabilidad semántica ni la descriptiva agotan el espectro. Dentro de cualesquiera otras posibilidades, Steiner muestra cómo el uso de analogías matemáticas, basadas en su capacidad descriptiva, permitió acceder a conocimiento básico de un área alejada de nuestra experiencia, la mecánica cuántica.

Sección 2. Wigner. Por qué en casos particulares no es necesariamente misterioso que se apliquen las matemáticas. La suma y la multiplicación.

El antecedente directo de Steiner en la problemática del posible misterio de la aplicabilidad de las matemáticas es el físico húngaro-estadounidense E. Wigner. Su planteamiento es bien conocido:

"La irrazonable efectividad de las matemáticas en las ciencias naturales es un don [*gift*] que ni entendemos ni merecemos" [Wigner].

Sin embargo, su manera de plantear el misterio es incorrecta, pues Steiner muestra que su razonamiento tiene la siguiente forma [p. 45]:

Los conceptos C_1, C_2, ... C_n son irrazonablemente efectivos.

Los conceptos C_1, C_2, ... , C_n son matemáticos.

Por lo tanto las matemáticas son irrazonablemente efectivas.

"Podemos deducir únicamente que *algunos* conceptos matemáticos son irrazonablemente efectivos. Además, inclusive si los conceptos son "irrazonablemente efectivos", ¿es su efectividad relacionada con ser matemáticos?" [p. 46].

Es la última pregunta la que preocupa a Steiner. Inclusive cuando Wigner habla del componente estético de los conceptos matemáticos no queda claro si se está hablando de casos particulares o de algo que tenga que ver con la naturaleza más profunda de los entes matemáticos. Recalca que en especial no se están tomando en cuenta todos los casos en que conceptos matemáticos pudiesen haber fallado en su aplicación. Debe quedar claro si la razón de ser "irrazonablemente efectivos" es una característica proveniente del puro hecho de ser "matemáticos" o algo quizá incidental, dependiendo del o los conceptos particulares.

Steiner se ocupa de dar ejemplos de conceptos matemáticos particulares que son descriptivamente aplicables. En algunos casos esa aplicabilidad es misteriosa, en otros no. El misterio se disipa si es posible reducir las propiedades matemáticas de la descripción a "propiedades físicas que la naturaleza puede exhibir o no" [p. 32]. Si es posible parafrasear la situación en términos no matemáticos [p.29] no hay ningún misterio en esa aplicación. Ésta es la técnica que debe emplearse en cada caso concreto. Steiner se aboca entonces a mostrar que en el caso de la suma y multiplicación básicas no hay "misterio". Esto le permite dar un ejemplo de la manera en que se pueden analizar otros conceptos matemáticos particulares y mostrar **cómo** su aplicación es natural, no representa misterio, o de no ser posible esa paráfrasis sí lo representa, aunque puede llegar el momento en que pueda disiparse.

Con respecto a la suma es preciso primero establecer las condiciones bajo las cuales pudiera llevarse a cabo. Esas condiciones equivalen a una cierta estabilidad del mundo desde nuestro punto de vista, para que sea posible distinguir objetos diferenciados, agruparlos y medirlos. Bajo esta condición pesar objetos implica aplicar la suma. Por ejemplo en una balanza si un objeto pesa lo mismo que una pesa de 2 (kg) y otra de 4, su peso será 2 + 4 = 6. Steiner prosigue: "los números naturales describen, por leyes de la naturaleza, no solamente los conjuntos de unidades de peso puestos en la escala, sino los objetos que ellos ponen en equilibrio. La aritmética no es empírica, pero predice la experiencia indirectamente ...". Es posible entonces inducir "un isomorfismo entre al estructura aditiva de los números naturales y aquella de la magnitud, el peso" [p. 28].

Por lo tanto hay al menos un correlato físico concreto de la adición.

Lo mismo pasa con la multiplicación. Bajo las mismas premisas que en el caso precedente, la relación más clara entre la multiplicación y el mundo físico es la operación de cubrir con mosaicos una superficie rectangular plana. Si nos preguntamos cuántos mosaicos necesitamos, "la respuesta elemental es que si el largo del piso es m unidades y el ancho es n unidades, el número necesitado es usualmente n×m. Como al pesar, tenemos un isomorfismo. ... Que m×n cuenta esos cuadrados es un isomorfismo con base empírica[12] entre la estructura multiplicativa de los números naturales y la estructura geométrica bidimensional del plano" [p. 29].

Una vez expuestos los dos casos, con mayor detalle del que aquí es posible reseñar, queda clara la estrategia que propone Steiner: El establecer una relación tipo isomorfismo entre un concepto matemático y conceptos directamente relacionados con lo empírico, como pesar o contar el número de mosaicos en un arreglo rectangular, elimina el misterio. De no haber un correlato físico de un concepto que, sin embargo, está siendo aplicado sí representa un misterio. Steiner no niega que existe la posibilidad de que esas aplicaciones sean aclaradas en algún momento posterior, pero mientras no sea así son parte del misterio.

***

No es relevante para esta discusión si sus presentaciones de la suma y la multiplicación son mejores o peores que otras que se han dado. El caso es que el autor consigue dos de sus metas. Primero mostrar que no toda aplicabilidad es misteriosa, pero que también se da el caso contrario: en segundo lugar que es posible dejar atrás las cuestiones relacionadas con la aplicabilidad de conceptos básicos, **aun** cuando queden problemas abiertos, y pasar a analizar conceptos avanzados. En una primera instancia presenta la linealidad y la teoría de ases fibrados como otros ejemplos de conceptos cuya aplicación puede quedar planteada en términos no matemáticos, y por lo tanto no representan un misterio.

---

[12] "... An empirically based isomorphism".

Ejemplos del caso contrario son la teoría de funciones analíticas, la ley de inverso del cuadrado de la distancia y los espacios de Hilbert en la mecánica cuántica.

Mientras sea posible dar "condiciones en un lenguaje no matemático" [p. 29] bajo las cuales una magnitud pueda tener una estructura aditiva, o la medición de cantidad de mosaicos una estructura multiplicativa, o en general de cómo ciertos fenómenos se relacionan con conceptos matemáticos, no hay misterio. El autor señala que esto no debe entenderse en el sentido de un programa nominalista. "No estoy interesado en traducir cualquier teoría física a un lenguaje nominalista, sino en explicar, en un lenguaje nominalista, las condiciones bajo las cuales un concepto matemático será aplicable en la descripción" [Nota, p. 24].

Sección 3. La linealidad. Puede haber misterio en lo particular, pero el verdadero misterio radica en lo general.

Steiner señala que hay dos tipos de misterio en la aplicabilidad de las matemáticas. Por un lado se tienen los casos particulares, como la aplicación de la suma y la multiplicación, del concepto de linealidad o de los espacios de Hilbert. Ahí puede haber un misterio o no, la aplicación de un concepto puede en algunos casos tener una explicación, en otros no. Inclusive en estos últimos no se puede descartar que en algún momento se pueda llegar a explicarlos. En este sistema hay reglas claras, se puede explicar o dar cuenta (*explain away*) de una aplicación si es posible exhibir un correlato físico del concepto.

Por otro lado se tienen los problemas que presenta la aplicabilidad global de las matemáticas, no la aplicación de tal o cual concepto. Éste es el verdadero problema, y quizá la discusión pudiese ser más directa concentrándonos en él. Pero la relación con la cuestión de los posibles misterios concretos es compleja, y es necesario analizar aspectos de estos últimos casos, inclusive más adelante la discusión se concentra en preguntas más radicales. En el capítulo 4 veremos **cómo** el análisis del problema representado por la aplicación de los espacios de

Hilbert a la mecánica cuántica permite abordar puntos clave tanto del problema básico como de la manera en que Steiner presenta sus tesis.

Lo primero que quiere hacer Steiner es exponer criterios que permitan decidir cuándo una aplicación puede o no representar un misterio. Para él la aritmética es una manera de encontrar la cantidad de elementos en un conjunto a partir de relaciones entre sus subconjuntos. A través de las relaciones de esos conjuntos con la realidad física se muestra que hay una relación clara entre conceptos aritméticos y afirmaciones sobre objetos empíricos ("en esta mesa hay siete frutas").

Puede decirse que la linealidad es un caso paradigmático, tanto en sí mismo como porque la linealidad es fundamental para entender otros problemas, en especial el mencionado caso de la aplicación de los espacios de Hilbert, a lo que se le dedica un capítulo completo de este trabajo. Pero proceder sin tener una idea de lo que es la linealidad y su relación con el concepto de espacio vectorial no permite entender cabalmente de qué se está hablando. Por ello he aprovechado la oportunidad para, aun a costa de la paciencia del lector, dar un mínimo panorama al respecto.

***

Si se quisiera partir de una discusión histórica para dilucidar las posibles relaciones entre física y matemática, sobre todo las posibles influencias de la física en el desarrollo de las matemáticas, dos áreas proporcionarían el mejor campo para la discusión, las ecuaciones diferenciales y el concepto de vector. A pesar de apoyarme en referencias históricas, no es éste le camino principal por el que he optado. Tampoco Steiner, en sus análisis históricos, presenta este aspecto del problema, pues analiza la influencia de las matemáticas en el desarrollo de la física, no el caso contrario.

La definición básica es la de linealidad.

Definición. Una función $f: V \to W$, donde V y W son espacios vectoriales definidos sobre un cuerpo K de escalares, es *lineal* si para todos v_1, $v_2 \in V$ y $\alpha, \beta \in K$ se tiene

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2).$$

Hay que enfatizar que la linealidad queda, por lo tanto, definida estrictamente para funciones vectoriales, En las aplicaciones, y no sólo a la física, la linealidad se entiende en un sentido un poco más relajado. En especial se habla de "ecuaciones lineales". Con rigor, sólo funciones pueden ser lineales o no, no ecuaciones. Sin embargo, si una ecuación puede ser llevada a la forma

$$P(x) = y, \tag{1}$$

Y la función P es lineal, entonces se dice que la ecuación es "lineal". A su vez, si la ley que rige algún fenómeno tiene la forma (1) con P lineal, se dice que el fenómeno se comporta linealmente, o, aún más relajado, que su comportamiento es "lineal". En la física los casos más importantes son aquellos en los cuales (1) es una ecuación diferencial, y el elemento x es una función. Este elemento es llamado "solución", y es el que representa el comportamiento del sistema en cada caso concreto. Esta identificación requiere de información específica, que puede provenir directa o indirectamente de mediciones, o de suposiciones compatibles con el conocimiento que se tiene del sistema real. Esto se integra al sistema por medio de las llamadas "condiciones iniciales y de frontera", más la geometría específica del caso que se está analizando.

A su vez esa solución puede ser lineal, o no.

Ya esta presentación tan escueta permite identificar problemas relacionados con la aplicabilidad.¿Qué es lo que describe un sistema físico: la ecuación diferencial o sus soluciones? ¿Es lineal el sistema porque la ecuación diferencial lo es, o es lineal porque su trayectoria concreta es lineal? La primera describe clases de fenómenos, la segunda, para la cual es imprescindible tener información concreta[13], describe la ocurrencia particular de un fenómeno en un lugar específico del espacio-tiempo.

En realidad no es ésta una dicotomía, sino se está constatando que hay diversos niveles de descripción (o representación). Pero de no aclararse se dan situaciones extrañas. El mismo fenómeno, por ejemplo la trayectoria de los planetas alrededor del sol, puede verse como lineal, si se habla en términos de $F = ma$, y como no lineal, si se habla de elipses.

Regresando a la exposición, una de las propiedades fundamentales de las ecuaciones lineales es que en la ecuación homogénea correspondiente a (1):

$$P(x) = 0, \qquad (2)$$

La suma de cualesquiera dos soluciones (y por lo tanto la suma de cualquier número de soluciones) es también una solución. En (1) es necesario además tener una solución particular de ella, y todas las otras soluciones se obtienen sumándole soluciones de la homogénea (2). No hay términos mixtos, las soluciones no interactúan, sólo se añaden aditivamente.

En física ciertos fenómenos pueden ser analizados bajo el supuesto de que las causas que los producen son independientes unas de otras, sólo se suman para llegar al fenómeno. Esto es conocido como principio de superposición. Las funciones lineales representan este tipo de sistemas. Hay entonces un claro correlato entre una situación física y el concepto de linealidad. Steiner no emplea la palabra "isomorfismo" en este caso, sin embargo en nuestra opinión deja clara su propuesta.

Para Steiner la linealidad es un ejemplo de cómo es posible tener una relación más amplia con lo real, pues además está la relación entre ella y los procesos que transcurren "suavemente", pues para curvas suaves es posible aproximar adecuadamente pequeños trozos por funciones lineales. En el límite está la tangente, que viene dada por la derivada. De hecho, aunque Steiner no lo menciona, una técnica usual en la práctica de la física es la linealización, que

[13] En el caso físico información medida o deducida de mediciones.

consiste en sustituir localmente las curvas por sus derivadas. En este caso es aún más difícil pensar de qué manera construir un isomorfismo, pero aun así está claro de cuál es la relación de que se está hablando

Aquí hay, sin embargo, un problema que nos inquieta. Steiner dice que este tipo de aproximaciones "es válido si la curva es suave, o al menos tiene partes suaves, *ciertamente una propiedad física*. Por lo tanto tenemos una explicación del segundo papel[14] de la linealidad en ciencia: la suavidad de muchos procesos naturales" [p. 31, cursivas de JC]. En física la suavidad de un proceso se define en términos matemáticos, una curva es suave (*smooth*) si es al menos una vez continuamente diferenciable. Un fenómeno físico a su vez es suave si está representado por una curva (u otro tipo de función para la cual sea aplicable) suave. Lo opuesto a la suavidad no es lo discreto, como el ejemplo que da Steiner de los fractales una página después pudiera hacerlo creer, sino la falta de derivabilidad[15]. Se han construido funciones, si se quiere artificiales y extrañas, que son continuas en todo su dominio de definición sin ser derivables en ningún punto. Por lo tanto no es obvio parafrasear la suavidad en términos no matemáticos, como algo "ciertamente físico". Lo que las paradojas de Zenón mostraron no era la imposibilidad del movimiento, sino la necesidad del concepto de límite o uno equivalente para poder expresarlo adecuadamente. Más difícil será entonces definir lo que es un movimiento suave. No queda "ciertamente claro" lo que Steiner quiere decir cuando afirma que la suavidad es un concepto "ciertamente físico". No basta con que sea algo opuesto a lo discreto, como los fractales, no basta con que un hablante competente del español entienda lo que se quiere decir por el adjetivo "suave" o en el caso del inglés la palabra "smooth" para que sea factible parafrasear adecuadamente en términos no matemáticos la frase "un proceso físico es suave".

Fuera de plantear algunas dudas, no se pretende, por el momento, hablar ni a favor ni en contra de los argumentos de Steiner. Por el contrario, su correlación

---

[14] El anglicismo se pretende como una manera de traducir lo más literalmente.
[15] Aunque por supuesto una representación discreta no es diferenciable en un sentido clásico.

ente el principio de superposición físico y la linealidad es adecuada. Lo que se está señalando es que el problema es más complejo y profundo de lo que las pocas palabras que el autor le dedica parecieran indicar. No se ha profundizado en la delimitación conceptual.

Por su parte la idea de suavidad es la primera ocurrencia de un concepto matemático cuya aplicación genera situaciones conceptuales que no son, o al menos todo indica que no lo son, "traducibles" a lo que podría llamarse un lenguaje "nominalista". Si se posee el aparataje conceptual del cálculo diferencial es factible explicar qué significa que un movimiento *físico* sea suave.

Con esas dudas u otras, queda ya claro un primer aspecto de la estrategia de Steiner. Requiere que el misterio de la aplicabilidad no radique, al menos no en lo fundamental, en los casos concretos, sino en lo más general: la naturaleza de las matemáticas. De esta manera evita las críticas que se pueden hacer a Wigner y sobre todo plantea un reto mucho más general por un lado y más específico por otro, ya que ubica con claridad la naturaleza del problema que pone sobre la mesa.

Sección 4. Correspondencia entre física y matemáticas. El misterio de los números complejos.

Otro ejemplo en el cual es factible entender cómo puede disiparse el misterio[16] es la correspondencia entre los conceptos de la teoría de campos de norma (*gauge field theory)* y algunos conceptos de la teoría matemática de ases fibrados[17]. Es factible constatar una asombrosa correspondencia entre ambas, que Steiner ofrece inclusive en forma de tabla, aunque todo parece indicar que la teoría de ases fibrados, una teoría geométrica, no jugó papel alguno en el descubrimiento

[16] Aunque no se entienda, de manera estricta, de qué se está hablando. Steiner no aclara ni lo que es la teoría física ni la matemática, alegando la complejidad de ambas.

[17] El sentido del ejemplo es doble. Primero dar otro caso de correspondencia entre fenómenos físicos y matemáticos, y mostrar que lo avanzado y profundo ("arcane" [p.31]) de un concepto matemático no debe ser una razón para dejarlo de lado en el análisis filosófico.

de la teoría de *gauge fields*. Pero la fuerte correspondencia física de los conceptos permite al menos intuir que puede haber alguna propiedad física atrás de ellos, por lo que esta situación es a la vez un buen ejemplo de cómo disipar el misterio una vez ya conocido el fenómeno físico y su expresión matemática, y de cómo un proceder formal llevó al descubrimiento físico.

Además esta aplicación permite poner de relieve un punto filosófico importante: "la naturaleza abstracta de un concepto matemático no ofrece limitaciones a su reducción a lo físico" [p. 33].

Surgen problemas cuando se dan situaciones en las cuales la "aplicabilidad descriptiva parece *por ahora* misteriosa" [p. 36]. Un primer caso es la aplicabilidad de las funciones analíticas. Steiner menciona tres situaciones en las cuales la descripción o cálculo de un fenómeno viene dado por medio de funciones analíticas.

Se dice que una función cuyo dominio es el cuerpo de números complejos es *analítica*, si es diferenciable. El punto clave es que una función de variable compleja debe cumplir con requerimientos relativamente fuertes para ser diferenciable, y por lo mismo, si es una vez diferenciable lo es infinitamente. Por lo tanto, toda función de variable compleja diferenciable es expandible en una serie de Taylor alrededor de los puntos donde es diferenciable. Esto es algo de lo que permite aplicarlas con tanto éxito[18].

Se mencionan las aplicaciones a: la hidrodinámica (un caso clásico), la teoría relativista de campos, y a un caso especial de la termodinámica, la temperatura crítica de un ferromagneto. En los dos primeros casos hay suficiente conocimiento físico que pudiese permitir una cierta justificación, para cada caso concreto, de esa aplicabilidad. El tercero queda como un mero artificio de cálculo, esa aplicación es "totalmente misteriosa" [p. 38]. Además, y esto es lo principal, "no tenemos *una sola* propiedad que corresponda a la analiticidad en todas las aplicaciones." [Ibíd.]

Detrás de los comentarios anteriores se encuentra algo que ha dado lugar a discusiones continuas a lo largo de los años: la aplicación de variable compleja a casos reales. Los números complejos han planteado siempre dudas en cuanto a su significado físico, y Steiner las comparte. El problema radica en cómo entender a $i = \sqrt{-1}$ en un sentido físico. ¿Cómo es posible que se hagan cálculos usando números complejos (o sea entes de la forma $a + i\,b$, donde a y b son números reales) y al final, dejando la parte imaginaria de lado, se obtengan números físicamente significativos?

De hecho, sin necesidad de recurrir a la mecánica cuántica y la teoría de espacios de Hilbert (definidos sobre el cuerpo C de números complejos) bien podría Steiner concretarse a la hidrodinámica, donde es usual un esquema que, de manera muy simplificada, es del siguiente tipo:

Para calcular el valor X sustitúyase toda variable real por una variable compleja y trátense las derivadas como derivadas de funciones de variable compleja.

Efectúense los cálculos hasta llegar a $(X + iY)$.

Tómese sólo el valor X.

La sustitución en 1. es estrictamente formal. Dado que se asume que la parte imaginaria no tiene sentido físico, el proceder es "misterioso".

En matemáticas un número complejo es tan válido y tan claro como un número natural o uno imaginario. Bien podría decirse que el físico y el matemático "viven en dos mundos distintos"[19]. Se da una situación que podría ejemplificar algún sentido de los que se han manejado del concepto de "inconmensurabilidad". Todo físico actual conoce la definición de número complejo, pero en general entiende otra cosa que el matemático, o tal vez simplemente no consigue darle un significado a ese ente, pues de cierta manera los números complejos plantean un reto a una tradición que se remonta a Aristóteles, quien "consideraba las

---

[18] Entre otras ventajas se tiene la posibilidad de aproximar tanto como se quiera el valor de la función tomando cada vez más términos del desarrollo.
[19] Como Steiner [nota, p. 7] comenta, esta situación se da inclusive cuando la misma persona es matemático y físico.

matemáticas como una abstracción idealizada de la ciencia natural y como tal las premisas y definiciones no eran arbitrarias, sino estaba determinadas por nuestra interpretación del mundo de la percepción de los sentidos" [Boyer, p.304]. Por lo tanto, al igual que a lo largo de la historia de las matemáticas, se sigue planteando la necesidad de buscar "una explicación que debe ser intuitivamente plausible, más que [solamente] autoconsistente lógicamente" [Boyer, p. 305].. Es más, se tiene la misma situación con el concepto de número real. En la práctica efectiva de la física tanto un tipo de número como el otro se entienden sólo como esquemas de cálculo que permiten llegar a números racionales[20] comparables o explicables en términos de mediciones. Como en mecánica cuántica, el problema principal parece radicar en la incapacidad de asociar a ciertas entidades matemáticas directa o indirectamente alguna imagen o intuición relacionada a las áreas "no alejadas de nuestra experiencia", en el sentido definido anteriormente, lo cual no es el caso con los números naturales, los enteros o los racionales.

Como en el caso de la linealidad, no se pretende llevar la discusión por estos caminos, sino problematizarlos. Para Steiner lo importante es la posibilidad de analizar los detalles de alguna aplicación particular y buscar la manera de eliminar el misterio, si es que lo hay, de por qué en ese caso concreto se usa tal o cual concepto o formalismo. Pero el misterio fundamental es el de la aplicabilidad de las matemáticas en general, como "grupo"[21] [p. 45].

Sección 5. Las tesis de Peirce-Steiner acerca de la incapacidad de acceder a conocimiento de áreas alejadas de nuestra experiencia.

Steiner habla con consistencia de "misterio". El que además mencione que algunas aplicaciones que llevan a descubrimientos son casi "magia" y rayan en la "superstición" permite confirmar que hay un trasfondo casi místico, el cual además

---

[20] O sea, elementos de Q. Éste es un punto interesante, ya que hay corrientes de pensamiento en la física que no reconocen como válidos más que a estos números, pues es con ellos que se expresan las mediciones,

no niega [p.10], del cual no nos ocuparemos. Pero por lo mismo requiere comenzar con alguna limitante fundamental, algo más allá de nuestras capacidades, ya que no puede haber "misterio" en algo que podemos resolver de manera natural.

Basándose en Peirce [Peirce, Vol. 7, 7.506-508, 7.515, 7.678, 7.680] afirma que no hay ninguna razón para asegurar que los seres humanos puedan tener una capacidad "natural" o innata de formular teorías sobre objetos "alejados de la percepción y de procesos que pudiesen haber participado en la selección natural" [p. 53]. En concreto, no parecería haber manera natural de formular teorías adecuadas sobre la física de las partículas elementales. En realidad tampoco sobre la física que se ha dado en llamar "relativista".

Esto, sin embargo, no prohíbe que por alguna circunstancia u otra, como el azar, sea posible arribar a una o varias de esas teorías, al menos de manera parcial. Steiner concluye que dado que no es factible tener un acceso natural a la formulación de esas teorías, lo único que podemos hacer es adivinarlas. En este contexto "descubrimiento" es sinónimo de "adivinanza exitosa".

Como ya se comentó, no es nuestra tarea confrontarnos con estas tesis.

Peirce habla de nuestra tendencia natural a "conjeturar correctamente" [p. 49] dentro del marco al que nuestra evolución nos ha llevado. Fuera de ese marco no hay manera de hacerlo. "Conjeturar correctamente" en ciencia es un proceder de acuerdo a los lineamientos de la razón, no contra ella, no "irracionalmente". Si el científico se aleja del marco en que puede "conjeturar correctamente", aun siendo consciente de ello, no por ello cambiará su actitud y procederá en contra de los lineamientos racionales, inclusive en los casos donde su "sentido común" ya no funcione. Lo que sí pudiese suceder, y es lo que Steiner afirma a fin de cuentas, es que introduzca elementos no *contra* la razón, sino *de fuera* de ella. Lo estético,

---

[21] Literalmente "group". Aparentemente se quiere decir las matemáticas como conjunto, en total, globalmente.

por ejemplo, no es "irracional", aunque no tengamos (o no pudiésemos tener) explicaciones *totalmente* racionales de ello[22].

Sección 6. Antropocentrismo y naturalismo. Estrategias antropocéntricas implícitas, explícitas y encubiertas. Clasificación y analogías.

El antropocentrismo es la doctrina que afirma que "el ser humano tiene un lugar especial en el esquema de las cosas" [p. 5]. Hay algo en el universo que responde de manera privilegiada a lo que son los seres humanos. Para cualquier cosa que sea el "naturalismo" es fundamental negar esa posición privilegiada: "I will define naturalism to be opposition to anthropocentrism" [p. 55]. Para Steiner, "el naturalismo es un ideal regulativo tanto para la ciencia como para la filosofía" [p. 55].

En este trabajo consideramos que si bien el naturalismo como doctrina filosófica es más que simplemente oponerse al antropocentrismo, sí es esta oposición una premisa necesaria para él. Por ello tampoco nos comprometemos con una u otra definición o presentación del naturalismo y, al igual que Steiner, sin profundizar en la idea un tanto vaga de que el naturalismo no busca causas o explicaciones "fuera de este mundo", cuando se hable de naturalismo se entenderá en oposición al antropocentrismo.

***

Lo antropocéntrico no siempre proviene de afirmaciones explícitas, sino puede provenir de la *manera* en que se hacen las cosas. Sería extraño darse cuenta de que tenga validez universal lo que se llegó a conocer por medio de métodos, acciones o actitudes que tienen valor sólo para el homo sapiens. La manera en que se procede para un cierto fin puede tener un fuerte componente antropocéntrico, con independencia de la meta que se persiga o de la doctrina que

---

[22] Lo cual de ninguna manera quiere decir que no haya mucho que la razón pueda decir al respecto, y éste es precisamente el punto.

se profese: "... cuando [estoy] estudiando a los científicos, siempre observo la conducta, no la doctrina" [p. 7][23].

Una estrategia antropocéntrica es un proceder metodológico que asume que de alguna manera los seres humanos son centrales al problema que se quiere resolver. Cuando el problema tiene que ver en lo fundamental con el ámbito humano la estrategia no puede dejar de lado nuestras características específicas como especie. Si la tarea es desarrollar un nuevo perfume hay aspectos objetivos que no es posible dejar de lado. Sustancias como el alcohol permite mejor que otras la volatización del aroma; otras permiten conservarlo más tiempo, como el esperma de ballena. Pero a fin de cuentas lo definitivo será que el perfume agrade a sus usuarios, y a las personas que estén a cierta distancia de ellas o ellos. En contraste, un proceder culinario no sería aceptable como metodología en química o biología, ya que lo culinario depende fundamentalmente de nuestros gustos, que es algo propio de la especie, y el ideal regulativo naturalista en esas ciencias indica que se debe proceder dejando de lado todo aquello que pueda ser estrictamente específico de nuestra especie.

Es más, de acuerdo al naturalismo de no procederse así se llegaría con alta probabilidad a teorías falsas, según implica Steiner. Por ejemplo, pongamos por caso que quiero adivinar los resultados de los partidos de fútbol para ganarme la quiniela, pero mis criterios fueran de simpatía: apostaría a favor de los equipos con los jugadores que me resultaran más simpáticos. Como esta estrategia no tiene que ver con las características que definen el buen fútbol, la probabilidad de acertar al resultado correcto de manera estrictamente aleatoria y la probabilidad condicionada de acertar el resultado correcto bajo la premisa adicional de serme simpáticos tales o cuales jugadores serían prácticamente idénticas. Por lo tanto, si un naturalista (en el sentido de Steiner) tuviera que predecir el éxito de una estrategia antropocéntrica en una cierta búsqueda, se vería obligado a afirmar que esa búsqueda no puede tener más éxito que una búsqueda aleatoria.

---

[23] Steiner no es consecuente con este lineamiento metodológico, ya que si bien lo aplica con bastante rigor a los físicos, no lo hace con los matemáticos. Al exponer sus tesis sobre los criterios

El carácter antropocéntrico de una estrategia puede tener diversas modalidades. El creacionismo es explícitamente antropocéntrico. El geocentrismo, aunque no mencione a los seres humanos, lo es implícitamente, pero tampoco niega que lo sea [p. 55]. El problema de fondo radica en doctrinas que son encubiertamente antropocéntricas, y que pueden inclusive negar que lo son. "[Un] antropocentrismo *encubierto* es [una] *conducta* (no necesariamente aquella de hacer aserciones) que presupone alguna doctrina antropocéntrica. Esto es, la conducta de un agente A es encubiertamente antropocéntrica si es irracional si A no tiene creencias antropocéntricas. Nuestro ejemplo principal de antropocentrismo encubierto ... será la clasificación de fenómenos con referencia a peculiaridades humanas" [p. 56].

Un científico puede entonces afirmar que su "ideal regulativo" es el naturalista y proceder metodológicamente de acuerdo a estrategias encubiertamente antropocéntricas. Steiner afirma que éste ha sido el caso en la física, al menos a partir del inicio del desarrollo de la mecánica cuántica, ya que estrategias indispensables de descubrimiento en esta rama de la física se basan en la convicción de que nuestro conocimiento del mundo es expresable matemáticamente.

El punto clave es que esa convicción no se ubica en los casos concretos. No es que tal o cual físico haya tenido confianza o certidumbre de que los espacios de Hilbert son lo más adecuado para expresar tal o cual aspecto teórico de la mecánica cuántica, sino que los físicos en general partieron (y siguen haciéndolo) de la convicción o certidumbre galileana de que "el libro de la naturaleza está escrito en matemáticas", más allá de sí en esta o aquella circunstancia lo adecuado son esos espacios de Hilbert, las cadenas de Markov, la geometría elemental, la lógica matemática multivaluada o la topología algebraica. Lo fundamental es que hay un corpus con el que se puede trabajar siempre y en cualquier parte de él.

---

de selección de conceptos en matemáticas se retomará este punto.

Para tratar de entender lo que Steiner quiere decir se puede contrastar con lo que pasa en otras ciencias o circunstancias. La química, por ejemplo, utiliza en ocasiones estrategias tomadas de la biología. Hay bacterias que degradan sustancias de una manera muy eficiente. Un químico puede entonces imitar el proceder de la bacteria en la búsqueda de procesos para degradar esa sustancia. Pero el químico utiliza estas estrategias sólo de manera ocasional, bajo ciertas circunstancias. No hay un programa en la metodología química que diga "¡Síganse los procesos biológicos!" La misma física ha estudiado algunos procedimientos de los químicos con éxito, y viceversa. Pero el único caso en que hay una aparente confianza ilimitada en otra ciencia de manera global es en la física con respecto a las matemáticas.

Al verse confrontado con áreas "alejadas de nuestra experiencia", o sea, al tener que penetrar allá donde las intuiciones e imágenes previas no eran aplicables, el físico procedió con éxito asumiendo, o teniendo la convicción de que podía usar sistemas matemáticos "parecidos", análogos a los ya conocidos para explorar esas áreas. Esto a pesar de que según Peirce-Steiner no debería tener ninguna posibilidad de llegar a logro alguno. Los capítulos 4 al 6 presentan ejemplos detallados de estos casos.

Este proceder es una instancia de lo que Steiner llama "pitagorismo". Este pitagorismo no es el pitagorismo histórico, sino la idea de que estrategias matemáticas son adecuadas para explorar el mundo físico. Steiner señala que un pitagorismo conceptual afirma que "las propiedades últimas o 'esencias reales' de las cosas no son otras que las estructuras matemáticas y sus relaciones" [p. 5], y puede haber posiciones aún más radicales. Para él lo importante no es una u otra versión del pitagorismo, sino el hecho de que los físicos adoptaron estrategias pitagóricas, matemáticas, en su proceder. El físico propuso este o aquel sistema no porque hubiera razones físicas para ello, sino porque había alguna relación de semejanza, parecido o equivalencia matemática entre ese sistema y alguno ya conocido previamente.

Por ejemplo [p. 76], cuando una ecuación diferencial tiene solución, tiene en general un gran número de ellas (normalmente la cardinalidad del conjunto de soluciones es la de los números reales). Para obtener una solución única debo dar un conjunto de datos (numéricos, geométricos y funcionales) ***A*** que identifican esa solución particular. Unas de esas soluciones pueden tener significado físico (describir o representar sistemas que aproximan adecuadamente casos físicamente posibles), otras no. Pero todas tienen en común la propiedad de ser soluciones de la misma ecuación, y éste es un criterio matemático que las hace "parecidas" o "análogas". Sea ***M*** el conjunto de todas los ***A*** matemáticamente posibles aplicables a la ecuación diferencial ***E***. Supóngase que se sabe que el subconjunto ***M'*** de ***M*** identifica soluciones que describen fenómenos físicos conocidos de un área "no alejada de nuestra experiencia", y que el subconjunto ***M''*** identifica soluciones que no tienen sentido en esa área. Si un físico asume que, dado que ***E*** describe adecuadamente una clase de fenómenos, entonces también lo hará para describir fenómenos en una cierta área "alejada de nuestra experiencia", aunque tenga que usar como condiciones de identificación de soluciones los elementos de ***M''***, entonces está usando una estrategia pitagórica, pues de la equivalencia o analogía matemática está deduciendo la (posible) equivalencia o analogía físicas [p. 90].

Uno de los casos más sencillos de una ecuación diferencial que describe la evolución de un sistema físico está dado por la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x,y,z;t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Bajo ciertas condiciones esta ecuación describe la evolución espacial de la concentración de una sustancia en otra, digamos una gota de tinta en un vaso de agua. Pero se tiene que especificar la forma del recipiente, así como la concentración inicial de la segunda sustancia y dónde se ubica (también dónde *no* se ubica), más las densidades correspondientes, las llamadas "condiciones iniciales y de frontera". Las concentraciones iniciales deben ser mayores que cero[24]. Asumir que hay un ámbito de la física donde concentraciones iniciales menores que cero pudiesen tener significado físico[25] sería proceder pitagóricamente en el sentido de Steiner.

Dado que para Steiner es el proceder, la metodología, la estrategia lo importante, no insiste en uno u otro "tipo" de pitagorismo. Puede ser que en la doctrina del físico sea nuestro conocimiento del mundo lo que sólo es expresable matemáticamente, o que el mundo sea, según él, matemático [p. 5].

El caso extremo del pitagorismo es el formalismo, estrategia que se basa en la notación matemática, donde la forma de la ecuación, no su significado, es lo que proporciona las bases de la analogía [p. 5]. Aquí, para Steiner, el antropocentrismo es frapante: Lo más antropocéntrico permite llegar a descubrimientos relevantes en nuestra exploración del mundo objetivo.

En este punto un problema es la falta de un concepto preciso de lo que pudiese ser la "forma" en matemáticas. Como se discutió en el capítulo anterior, hay diversas maneras de entender este concepto. Steiner no proporciona una definición, lo único que dice es que cualquier cosa que pudiese significar el término 'forma matemática' (dada la multitud de 'formas matemáticas' actualmente) está vacío si no se introduce el sentido estético humano" [p. 66]. Esto es, en el mejor de los casos, incompleto. ¿Por qué los matemáticos deciden incorporar a su área de estudio el concepto de grupo y no un cuarteto de Haydn o un cuadro de Van Gogh?

Sección 7. Por qué son antropocéntricas las matemáticas.

La confianza, convicción, certidumbre o lo que sea del físico, en el momento de incursionar en esa *terra incógnita* "alejada de nuestra experiencia" radica entonces, según Steiner, en el corpus global, en la clase de entes, conceptos, relaciones que llamamos "matemáticas modernas", y no en este o aquel concepto

---

[24] Cero significaría simplemente que no hay una segunda sustancia, y la solución idéntica a cero es igualmente "realista".

[25] Éste es un caso particular hipotético, no tenemos conocimiento de que alguien lo haya explorado.

particular. El físico sabe o intuye que más que en la teoría de grupos o el cálculo diferencial lo que lo va a guiar es la posibilidad de aplicar cualquier concepto por el hecho de que es un concepto matemático. Es la aplicabilidad de las matemáticas lo que le permitirá, caso dado, tener éxito o acercarse a él.

Debe haber, por lo tanto, una idea razonablemente correcta de qué es lo que son las matemáticas. De la presentación debe deducirse que para un físico las matemáticas son aquel cuerpo teórico que otro grupo de científicos pone a su disposición, aquello que los matemáticos definen como perteneciente a su área de trabajo, ya que hoy en día no hay otra manera de entender ese corpus como algo coherente más que de acuerdo a lo que esa comunidad concuerda en aceptar. Podría decirse que pasa lo mismo con cualquier otra ciencia. La biología es la "ciencia de la vida" porque así lo definieron quienes se ocupan de ella; La química estudia tales o cuales fenómenos porque la comunidad correspondiente está consensualmente de acuerdo en que son los que un químico debe estudiar.

Pero hay una diferencia notoria. Mientras que en las demás ciencias los criterios para determinar las áreas de estudio son, o deberían ser, primordialmente objetivos, al menos los dos criterios básicos de determinación de qué pertenece o no al campo de estudio de las matemáticas dependen de características específicamente humanas. Por un lado nuestro sentido estético, por otro nuestra limitada capacidad de cálculo. El factor estético es el principal, y "para mí", afirma Steiner, "el sentido matemático se reduce a lo estético. Suponemos que debe entenderse al sentido estético como la capacidad de detectar no solamente lo ya dado, como el crítico de arte ante una serie de obras, sino también potencialmente, como el artista al ir elaborando su obra. Por lo tanto, el "sentido matemático" sería la capacidad de detectar lo matemático tanto en lo ya dado, como al analizar los resultados de los colegas, como potencialmente, al ir desarrollando un concepto, una teoría.

La justificación de su creencia de que el sentido estético es el principal criterio de selección de conceptos en la matemática actual se reduce de manera estricta a los argumentos presentados de la página 63 a la página 66. Primero se hará una exposición de esos argumentos, para en el capítulo siguiente pasar a una crítica de ellos. En el apéndice 1 se presenta una traducción completa de los párrafos relevantes de esas páginas.

Subsección 7.1. Las matemáticas y lo estético.

Para usar un ejemplo que el autor toma de Hardy [Hardy, p. 88], las estructuras conceptuales del juego de ajedrez no son objeto de estudio de las matemáticas no porque no pudiesen serlo, sino porque los matemáticos no las aceptan como tales, por cuestiones estéticas, de gusto. Por otro lado el estudiar el concepto de grupo **si** es aceptado como matemáticas porque responde a las motivaciones estéticas de esa comunidad.

O sea, el antropocentrismo de las matemáticas no radica en que este o aquel concepto particular sea o no antropocéntrico, sino en que globalmente se añade tal o cual ente a ellas con base en criterios válidos solamente para la especie humana. Desde un punto de vista naturalista serían un conglomerado arbitrario.

Steiner comienza preguntándose ¿qué hay de anti-naturalismo acerca de analogías y taxonomías Pitagóricas?. Esta pregunta depende de otra, de mayor peso: ¿qué es la matemática? O, ¿cuál es el criterio para [determinar qué] conceptos son "matemáticos"? [p. 63].

Como es natural, no sería de esperar que se pudiesen clasificar los conceptos matemáticos de acuerdo a un solo criterio. Steiner distingue tres tipos de conceptos, "dependiendo de si son (o pretenden ser):

3. (1) Propiedades de objetos matemáticos (p.e. "número primo");

4. (2) Propiedades de conjuntos o sistemas (p.e. "grupo");

5. (3) Propiedades de segundo orden o funciones (p.e. "el número de F-es", "la derivada de f")."

Dejando de lado si un concepto puede "pretender" o no pertenecer a una de esas categorías, la distinción, al menos como hipótesis de trabajo, parece razonable, y además aclara que podemos y debemos preguntarnos "¿qué es lo que hace [de] un *miembro* de esa categoría un concepto *matemático*? Así obtenemos tres preguntas, y no deberíamos esperar que las respuestas sean las mismas" [p. 63].

Esta clasificación no vuelve a aparecer en este capítulo, y mucho menos se proporcionan tres diferentes intentos de respuesta. Dado que Steiner no vuelve a ocuparse de ello, tampoco nosotros lo haremos. O sea que hasta el momento no se han proporcionado argumentos a favor de la tesis del antropocentrismo de las matemáticas.

Aquí aparece el ejemplo del ajedrez, pero es otra vez una afirmación, no una explicación. Pero continúa y nos dice que los matemáticos pudiesen en algún momento aceptar al ajedrez (la teoría del ajedrez) en su ciencia "si surgieran nuevos hechos estructurales acerca del ajedrez. Supóngase que cada posición ganadora tuviese una simetría geométrica. Un "teorema" de ese tipo podría ser visto como matemáticas. No es que ningún matemático espere algo así: el ajedrez, como muchos juegos de dos adversarios, es una abstracción de la guerra. El origen del ajedrez no da buenos augurios, por experiencias previas, acerca de la riqueza típica de los conceptos matemáticos" [p. 64].

¿Podría deducirse de las afirmaciones anteriores que sí pueden constatarse ciertos "hechos" que permitiesen identificar a los conceptos matemáticos. ¿Esa "riqueza conceptual" por ejemplo? Esto no invalidaría *per se* la posición de Steiner, (aun la obra de arte tiene un sustrato material objetivo)[26], pero permitiría ubicar con un poco más de claridad de qué se está hablando. Dado que no se profundiza en este sentido nos vemos obligados a interpretarlo como algo deliberado de parte del autor. Mientras menos se especifique cuáles pudiesen ser los aspectos más o menos objetivos en los que el sentido estético de los matemáticos pudiese apoyarse, mejor, ya que entonces el aspecto subjetivo adquiere más y mayor peso.

Entre esos factores más o menos objetivos pudiera encontrarse el origen de los conceptos matemáticos en necesidades objetivas, como la necesidad de

---

[26] Al menos las obras "clásicas".

establecer un calendario confiable, o de repartir tanto las tierras como las cosechas. Steiner ni niega que tal vez así pudiese haber sido, "pero las matemáticas modernas se han alejado mucho de esas raíces" [p.64]. Hoy en día tanto los criterios que permiten ubicar cuál es un concepto matemático y cuál no, así como la motivación para emprender desarrollos, están dados en términos internos a las matemáticas, sin que sea posible reducirlos a necesidades objetivas. Steiner cita a un conocido matemático, Saunders Mac Lane, quien enumera algunos de los principales métodos que rigen el desarrollo actual de las matemáticas, como la generalización, axiomatización, invariancia, abstracción, etc. E insiste en que "cualquier uso de la lista de Mac Lane para caracterizar a la matemática como "objetiva" (no antropocéntrica) simplemente presupone la cuestión" [p. 64], dado que esos procederes implican taxonomías matemáticas.

Steiner reserva la posible interacción con otras ciencias, en especial la física, al segundo factor de su argumentación, la conveniencia de cálculo.

Estas consideraciones eliminan, según él, ciertos factores que pudiesen llamarse "objetivos", pero no proporcionan argumentos a favor de cuáles son los demás factores que intervienen en la selección de conceptos.

Ahora sí puede hacerse la pregunta clave: "El que los conceptos matemáticos modernos surjan dentro de las matemáticas (más que empíricamente) es importante; ¿pero qué es lo que los hace *matemáticos*?" Ya conocemos su respuesta: "La mayoría de los matemáticos aceptaría el punto de vista de Wigner (Wigner 1967): las matemáticas modernas expresan el sentido estético humano. Los conceptos son seleccionados como matemáticos porque dan lugar a teoremas bellos y teorías hermosas" [p. 64*.

El hecho que quiere constatarse no es cuál es la opinión de "la mayoría de los matemáticos", sino que "los conceptos son seleccionados como matemáticos porque dan lugar a teoremas bellos y teorías hermosas", y el que la mayoría de los matemáticos, o algunos de los más importantes lo crean no es prueba concluyente de que así sea. Esa opinión pudiese señalar un posible problema que fuese interesante analizar, pero también pudiese ser que no, pudiese ser una concepción errónea o basada en aspectos culturales o sociales alejados de la reflexión sobre la práctica de esa ciencia. Sin embargo, es fundamental el peso de esa opinión en la argumentación de Steiner, lo que los matemáticos *dicen* es importante: "la mayoría de los matemáticos aceptaría el punto de vista de Wigner...".

Dos citas son fundamentales para él:

"El matemático tiene una gran variedad de campos a los cuales dirigirse, y disfruta de una muy amplia libertad en lo que hace con ellos. Para llegar al punto decisivo: pienso que es correcto decir que su criterio de selección y también aquellos de éxito son principalmente estéticos. ... Uno no sólo espera de una teoría matemática que describa y clasifique de una manera sencilla y elegante numerosos casos [que son] a priori diversos. Uno espera también "elegancia" en su formación estructural "arquitectónica". ... Esos criterios son claramente aquellos de cualquier arte creativo" [Von Neumann, 1956, pp. 2062].

"Los patrones matemáticos, como los del pintor o el poeta, deben ser *hermosos*; las ideas, como los colores o las palabras, deben entrelazarse de una manera armónica. La belleza es la primera prueba: no hay un lugar permanente en el mundo para matemáticas feas. ... Puede ser difícil definir la belleza matemática, pero lo mismo es verdad de cualquier otro tipo de belleza – podemos no saber exactamente qué significa que un poema sea bello, peor eso no nos impide reconocer uno cuando lo leemos" [Hardy, p. 85].

Para finalizar nos dice [p. 65]: "que el factor estético en matemáticas es constitutivo ha venido a ser actualmente un truismo[27] en la comunidad matemática. En una encuesta en un número reciente de *Mathematical Intelligencer* se pidió a los lectores que se ordenaran teoremas matemáticos en razón de su belleza. Quizá la pregunta estaba un tanto desviada al divorcias la belleza de un teorema de la "arquitectura" de su demostración. De todas maneras, dudo [i.e.,

[27] En inglés "truism". Opté por la traducción "truismo" tanto por respetar el estilo del autor como por mi impresión de que no se tiene en español *una* palabra que reproduzca adecuadamente su uso en

Steiner duda] que una revista periódica en cualquier otra ciencia llevara a cabo una encuesta semejante" [p. 65].

Steiner continúa de la siguiente manera: "Por lo tanto, parece plausible que la mejor respuesta a la pregunta "¿por qué es el ajedrez un juego, pero los espacios de Hilbert (son) matemáticas?" Dependerá de lo estético. Lo que *causó* que los matemáticos enmarcaran los conceptos (de la manera en que) lo hicieron fue frecuentemente su gusto" [p. 66].

***

A partir de este punto Steiner da por sentado que el principal factor que interviene en la selección de conceptos en las matemáticas actuales es el estético. Debo recalcar este punto para evitar en el lector la impresión de que quizá he dejado algo en el tintero[28], de no haber dicho todo. Se debe concluir que Steiner considera suficiente lo que ha argumentado para dar una base sólida a su afirmación.

Sólo otro factor más parece intervenir en esta selección, nuestras limitaciones para hacer ciertos cálculos.

Subsección 7.2. Conveniencia de cálculo.

Como se señaló, el uso que da Steiner a la palabra "conveniencia" (*convenience*) difiere un tanto del uso más usual de la palabra. "... el poder computacional de nuestro cerebro es limitado. Por lo tanto, la *conveniencia* de cálculo[29] se convierte en una razón para estudiar un concepto. Esto es, los matemáticos introducen conceptos en las matemáticas para hacer cálculos más fáciles o convenientes. Si tuviéramos cerebros mil veces más poderosos presumiblemente no necesitaríamos esos conceptos particulares" [p. 7].

---

inglés. El anglicismo "truismo" indicaría entonces la idea de una afirmación que es aceptada como cierta sin que se sienta la necesidad de cuestionarla a fondo.
[28] Para usar una expresión quizá obsoleta.

En general, no se hace algo "por conveniencia" si se ve uno obligado a hacerlo. Desde el punto de vista de la ingeniería sísmica no "me conviene" construir un edificio de treinta pisos en la colonia Roma de la ciudad de México, pero tal vez, como ingeniero, lo tenga que hacer pues quien me paga así lo ha decidido. A esa persona, a su vez, sí "le conviene" hacerlo ahí por razones comerciales, en vez de optar por construirlo, como podría, en otro lugar con un suelo más "conveniente" para el diseño de ingeniería.

La ventaja, para la posición desde la que Steiner desarrolla su doctrina, es que la palabra conveniencia "le conviene" precisamente por esa implicación de que puede haber otras posibilidades, de que a fin de cuentas quien introduce tal o cual concepto pudiese tener la libertad de introducir otro o ninguno, de acuerdo a la manera en que sintiese poder enfrentar mejor sus limitaciones. Al igual que el autor opta por usar el concepto "adivinar" en vez de "búsqueda aleatoria" o alguna semejante, opta por implicar que Cardano introdujo el concepto de número imaginario por conveniencia [p. 67], y no escribir algo como "Cardano se vio en la *necesidad* de introducir el concepto de número imaginario", o "Cardano no tuvo más opción que introducir el concepto de número imaginario".

Estos comentarios no son a efecto de criticar el uso de esas dos palabras, "adivinar" y "conveniencia", sino para tratar de entender por qué Steiner las usa y en **qué** sentido se da ese uso.

Habiendo aclarado ese uso, empieza a quedar claro qué es lo que Steiner quiere decir cuando afirma que tal o cual concepto se introdujo en las matemáticas "por conveniencia". "Nuestro poder de cálculo, como cualquier poder humano, es limitado; ayudas computacionales compensan" [p. 66]. Como ser humano, me veo severamente limitado para llevar a cabo tal o cual cálculo que necesito o deseo hacer. Busco entonces alguna manera de encaminarme hacia la respuesta, y debo introducir artificios, "cosas" artificiales (pues no son la manera "natural" de llevar a cabo lo que deseo) que, por lo mismo, genero lo más cómodas o convenientes

---

[29] En inglés "calculational comvenience", cuya traducción literal, dado el uso original del adjetivo, sería "conveniencia computacional", pero que hoy en día trae asociaciones con las computadoras.

para mí. El vecino, que hace cálculos mentales mejor que yo, los hará diferentes, más adecuados a su capacidad; un hipotético habitante de Marte podría tal vez usar el mismo artificio que yo, o que mi vecino, pero seguramente le será más "conveniente" usarlo con modificaciones, o tirarlo a la basura y diseñar uno nuevo. Un habitante de Alfa Centauri, con un cerebro "mil veces más poderoso", no tendría necesidad ni del artificio mío, ni del vecino ni del marciano, simplemente haría el cálculo y ya.

Steiner nos recalca, apoyándose en un conocido libro de divulgación, que lo asombroso es que "un concepto introducido por conveniencia resulta tener la 'magia' característica de las matemáticas" [p.67].

Los números complejos, la idea de potencial y las series de Taylor son ejemplos que se nos proponen como apoyo. En especial las series de Taylor serían paradigmáticas, pues "son tan útiles que los científicos las inventan **aun** cuando no existen. Por ejemplo, pretenden que las constantes son variables y luego las 'expanden' en potencias de la constante. (Éste es realmente un caso del formalismo llevando al científico – la cola moviendo al perro ...)" [p. 68].

Sin embargo, quizá **sí** podamos calcular bien, y sea sólo la manera de hacerlo lo que es deficiente, de la misma manera que un hombre con una pata de palo bien podría llegar a la cima del Everest, pero lo haría mejor con una buena prótesis moderna y aún mejor con sus propias piernas.

Sección 8. Procedimientos formales en la física.

La parte más detallada del libro de Steiner, los capítulos 3 al 6, presenta un análisis de casos en los cuales físicos de renombre han utilizado estrategias matemáticas formales como herramienta de exploración, en especial en la mecánica cuántica. A pesar de diferir en algunas interpretaciones y en el objetivo, coincidimos con él en que los físicos han procedido de manera sumamente formal, usando procedimientos matemáticos y lógicos (o relacionados con ellos) de una manera que podríamos llamar "mecánica".

Para Steiner hay dos maneras fundamentales de proceder "formal". En primer lugar proceder a lo largo de deducciones matemáticas de una manera puramente sintáctica. Como por ejemplo en el caso de interpretar el símbolo $\frac{dy}{dx}$ como una división y por ello proceder como si "el denominador pudiese pasar al lado izquierdo multiplicando".

En segundo lugar, un proceder "formal", según este autor, es asumir que la forma matemática de (algunas) leyes físicas en un área de la física permite inferir la forma de las leyes de otra área. Y al decir que lo que permite esa analogía es la "forma", Steiner asume con claridad que en ese proceder no intervienen ni el significado matemático de los conceptos, ni pueden ser analogías físicas [p. 53, 54].

Steiner constata que hay ejemplos significativos de que esa manera "formal" de proceder ha sido altamente eficiente. En su opinión no hay ninguna explicación racional del éxito de este proceder, y el presentar esto y analizarlo es tarea de estos capítulos. Por el momento constatemos que esa manera de usar a las matemáticas se considera algo "formal". La segunda modalidad de lo formal es el proceder de manera puramente sintáctica en deducciones.

Ahora bien, lo que pueda ser lo formal en la práctica de la física es en nuestra opinión algo más complejo. En primer lugar no queda claro qué es o pudiese ser la "forma" en matemáticas. ¿Cómo, por ejemplo, se clasifican las diversas formas a efecto de poder decir que dos de ellas son "similares", "análogas por al forma"? Y si no se quiere hablar de clasificaciones, ¿cómo definir una métrica en el conjunto de "formas" para poder establecer una "distancia" entre ellas, como en la teoría de aproximaciones, que nos diga cuál es una buen aproximación de otra? Es por ello que a lo largo de este trabajo se irá hablando de la forma y de procederes formales.

Donde tenemos una mayor coincidencia con Steiner es en su apreciación y presentación del uso del proceder sintáctico, en el sentido de que es un proceder formal, si es que bajo formal se entiende algo que está vacío (*empty*) de significado y procede de manera automática. Nuestra experiencia como expertos en el campo de la aplicación de las matemáticas a la ingeniería y la física indica en esa misma dirección.

Éste es un punto que merece atención, pues aun sin que la matemática fuese una actividad con cualidades extra-objetivos[30], sería extraño que un aspecto limitado de ella, lo sintáctico, fuese tan efectivo en la física. Sin embargo esto aún no toma en cuenta que un físico siempre tiene ciertos objetivos e intuiciones que lo guían, tal vez no hacia un resultado en lo particular, sino en una cierta dirección que se presenta como fructífera.

Dado que esta discusión histórica no contribuye a resolver el problema básico del antropocentrismo o no de las matemáticas, se ha preferido no hacer una reseña de la reseña de Steiner. La conclusión de estos capítulos es que hay que dar peso en la discusión al asombro que causa constatar que ciertos procedimientos casi puramente sintácticos contribuyan de manera significativa al proceso de conocimiento de fenómenos físicos. Si las matemáticas fuesen antropocéntricas, este hecho se interpretaría de una manera, pero mientras no se demuestre que lo son hay otras posibilidades válidas.

Parte 3. Conclusiones.

Así pues, si hemos entendido correctamente a Steiner, no puede haber una definición en términos objetivos de lo que es globalmente la matemática actual, ni siquiera de la manera un tanto imprecisa en que se caracterizan los fenómenos que estudian la biología, la economía o la sicología. Sería un conglomerado de teorías y sus conceptos, con mayor o menor grado de desarrollo, cuya cohesión estaría dada, en los fundamental, por la respuesta estética que han encontrado en una comunidad científica, la de los matemáticos.

---

[30] Como el antropocentrismo.

Un miembro de esa comunidad, entonces, no debería dejarse llevar, al momento de escoger posibles desarrollos, o desecharlos, más que por el sentimiento de belleza o elegancia que despiertan en él. "Beauty is the first test. There is no permanent place in the world for ugly mathematics" [Hardy, p. 85]. Esto por supuesto no implica que, ya en el trabajo, no deba seguir reglas y metodologías muy estrictas. Tampoco implica que eso que desarrolla sea arbitrario y subjetivo. Donde interviene el factor extra-objetivo es en la selección o rechazo, en la definición de "lo matemático" como concepto general.

El matemático actual, por lo tanto, no debería dejarse llevar por consideraciones ajenas a su propia actividad, a los criterios internos de trabajo de su ciencia. Esto no implica que en algunos casos no pueda ayudar a sus colegas de otras áreas, pues por ciertas razones (que no quedan claras) tiene la capacidad de encontrar, inventar o desarrollar[31] conceptos que son útiles en esas áreas. Pero no desarrolla, inventa o encuentra conceptos para describir o representar lo que esos colegas necesitan describir o representar. Ésta es una consecuencia, cuando se da, puramente asombrosa e ininteligible en términos racionales, y no es parte de la actividad[32] del matemático trabajar en ese sentido. Lo que sí puede hacer es auxiliarlos cuando ciertos cálculos no pueden llevarse a cabo. En ese caso se introducen nuevos conceptos que, de la misma manera asombrosa, pueden llegar a tener "la 'magia' característica de las matemáticas".

De aceptarse esta concepción, aquello que define a las matemáticas, o al menos aquello que permite saber si este o aquel concepto o teoría son matemáticos y el de más allá no, sería algo indisolublemente ligado a características específicas de los seres humanos como especie.

Steiner procede entonces a proporcionar "la evidencia" [p. 75], sus estudios de caso. Físicos destacados, al momento de investigar y llegar a descubrimientos objetivos de importancia, han procedido usando estrategias de exploración

[31] De acuerdo a la doctrina de la que se parta.
[32] De manera estricta es probable que, según lo que se deduce de la presentación, ni siquiera le sea posible trabajar en ese sentido, o, de hacerlo, dejaría de estar actuando como matemático.

basadas en esa concepción global de lo que son las matemáticas. Por lo tanto, para él, dado que algo que considera estrictamente antropocéntrico ha permitido llegar a un conocimiento no sólo relevante, sino al que aparentemente no habría manera de llegar, no hay más conclusión posible que deducir que el universo tiene un componente que le permite ser accesible a metodologías basadas en características propias de nuestra especie, y por ello ese componente es antropocéntrico.

El naturalista puede simplemente descartar [p. 72] lo que no le conviene, pues el naturalismo no es una hipótesis, sino un "*background belief*" [p. 72], o un ideal regulativo. Pero, según Steiner, negar lo que él nos está proponiendo es "irracional", pues al observar a los físicos actuales constata que su "conducta va en contra de sus creencias. O, dadas sus creencias, su conducta es irracional" [p. 73]. ¿Cuál es, según Steiner, la creencia básica que lleva su conducta a lo irracional? Creer que proceder pitagóricamente, matemáticamente, es "naturalista". La ciencia y la filosofía pueden, y a veces deben, según Steiner, introducir conceptos extra-objetivos, pero no pueden permitirse ser irracionales, anti-racionales. Dado que según él es un hecho que hay algo extra-objetivo en la matemática, es irracional no aceptarlo. Es entonces racional aceptar y actuar de acuerdo a la constatación de algo extra-objetivo.

No estamos señalando una posible contradicción, pues es racional aceptar un hecho, por más extraño que parezca. Y si acepto un hecho es también racional actuar en consecuencia. Pero, ¿acaso Steiner ha demostrado que el antropocentrismo de las matemáticas es un hecho? Tras un análisis crítico, tema del próximo capítulo, llegaremos a la conclusión de que en el mejor de los casos es tan plausible que la matemática sea antropocéntrica como lo opuesto, y que en nuestra opinión, al menos con base en sus argumentos, esta tesis de Steiner no tiene un alto grado de convencimiento.

Capítulo 3

Capítulo 3. ¿Es antropocéntrica la matemática?

Introducción.

Este capítulo se centra en el análisis de la argumentación presentada en [Steiner] a favor de la tesis que afirma el antropocentrismo de las matemáticas, cuya justificación se lleva a cabo caracterizando a esta ciencia de manera global mediante los criterios de selección de conceptos como pertenecientes a ella o no.

Dada la diversidad de teorías que presenta la matemática actual Steiner sostiene que lo único que permite unificar ese conjunto (la matemática) son los criterios que permiten incluir o excluir conceptos de ella. Si esos criterios resultasen antropocéntricos, el carácter global unificador de las matemáticas lo sería también. Por lo tanto toda estrategia de exploración en cualquier otra área que se basase no en tal o cual teoría, sino en las matemáticas globalmente, también tendría un carácter antropocéntrico. En este capítulo no se analizan las consecuencias que tendría tal característica global, sino si efectivamente es plausible asumir que las matemáticas son una actividad antropocéntrica. No se trata en una primera instancia de demostrar que las matemáticas no son antropocéntricas, sino de someter la argumentación con que Steiner sostiene su tesis a un análisis crítico para entender cómo la justifica, y si esa justificación fuese suficiente como para convencer a alguien que considerase plausible que el universo, y en especial las matemáticas no tenga rasgos antropocéntricos.

Por ejemplo, un destacado matemático y ensayista, Morris Kline, afirma que aquello que caracteriza a las matemáticas es su uso metodológico de la razón: "The distinguishing feature of mathematics is its method of reasoning" [Kline, 1961, p.77]. "[Los griegos] made reason a vital factor in Western culture" [Ibíd., p. 79], y fueron las matemáticas, en especial su método deductivo, aquello que moldeó esa concepción de la razón [Ibíd., p. 79]. Kline expone con claridad la idea de la matemática como ejemplo paradigmático de pensamiento racional.

La confrontación con puntos de vista como el de Kline es otro punto clave de la discusión con Steiner por dos motivos. En primer lugar porque su tesis del antropocentrismo en matemáticas no representa una concepción con algún nivel de consenso; es más, es una idea que no parece haber sido planteada previamente, y que introduce al elemento estético como predominante en la determinación global de lo que pudiesen ser las matemáticas. En segundo lugar Steiner está convencido de que al menos entre físicos modernos de alto nivel ha habido una fuerte tendencia a utilizar estrategias basadas en las matemáticas precisamente por sus características antropocéntricas. "The truly great discoveries in contemporary physics were made possible only by abandoning – often covertly and even unconsciously – the naturalistic point of view" [pp. 59 – 60]. Aquí se tienen dos concepciones contrapuestas, ya que de acuerdo a la postura de Kline, el uso de analogías matemáticas no implica que se esté "abandonando el punto de vista naturalista".

Una de las conclusiones a que llegaremos en este capítulo es que aún en el mejor de los casos, la argumentación ofrecida en [Steiner] no ofrece una sustentación mayor o más convincente que la de Kline, por ejemplo.

***

Antes de pasar de lleno a la discusión específica, es importante citar la nota al pie que acompaña al párrafo citado, tras la palabra "unconsciously": "Behavior can often go contrary to, be irrational in light of, one´s professed beliefs ... Since practicing scientists often advocate naturalism, at least in my sense, ..., their behavior in making discoveries is unintelligible, given their professed views. *We focus our attention here on what scientists do, not what they say*" [nota 30 al pie, p. 60], (cursivas JC).

En los capítulos 4 a 6 y los apéndices de [Steiner] se describen con precisión ciertos aspectos del quehacer de algunos científicos (físicos) a lo largo del proceso que llevó a algunos de los descubrimientos básicos de la física del siglo XX. De ahí Steiner obtiene ciertas conclusiones, como lo que esquemáticamente hemos llamado el "proceder formal" usando matemáticas de esos científicos. Esta tesis, además de haberme yo mismo planteado con anterioridad esa cuestión, recibe una fuerte sustentación de su presentación de los hechos, o sea, de analizar lo que los científicos hacen, y no lo que dicen

No ocurre lo mismo cuando presenta tesis sobre las matemáticas. Con respecto a lo estético no lleva a cabo ningún análisis de caso. Sólo se menciona el ejemplo del ajedrez, del que Steiner simplemente afirma que no se ha seleccionado como "matemática" por no presentar suficiente atractivo para los matemáticos. Dada la complejidad de la relación entre lo estético y la matemática, se requerirían uno o dos ejemplos significativos para indicar con claridad de qué se está hablando. De esta manera quedaría más delimitada la diferencia entre lo que los matemáticos dicen, y lo que hacen. En especial se requeriría al menos un ejemplo (significativo) de cómo se ha procedido en la selección de conceptos matemáticos basándose en un criterio estético.

Al contrastar con casos en donde otros criterios han sido decisivos, surge la duda de sí es posible dar los ejemplos que Steiner requiere. Es por ello que he juzgado conveniente ofrecer algunos de esos casos en la última parte de este capítulo.

***

Steiner elabora su argumentación a lo largo de dos vertientes. La principal, acerca del carácter estético de esa ciencia, y la concerniente a la introducción de conceptos a efectos de realizar ciertos cálculos.

La conclusión principal de nuestra parte es que la justificación y las razones que sustentan el antropocentrismo en matemáticas dejan por un lado demasiadas vertientes sin analizar, y por otro esas razones no comportan la suficiente fuerza lógica para ser convincentes, menos aún como para imponerse por su fuerza deductiva como necesarias.

En lo relacionado al aspecto estético, el interés principal radica en los argumentos presentados por Steiner en las páginas 63 a 66 de su libro, ya que, fuera de un par de comentarios en la introducción, en esa parte del capítulo 3 se concentran todos sus argumentos a favor de la importancia del factor estético en matemáticas. Por ello, una vez contextualizando y ubicando dentro de lo discutido en nuestro capítulo anterior, paso a analizar sus argumentos frase tras frase. Para ello en cada subsección se presenta y analiza una cita. Sigo de manera estricta el orden secuencial en el cual Steiner presenta sus ideas.

Sección 1. Antropocentrismo del universo.

¿Por qué concentrarse en la tesis del antropocentrismo de las matemáticas? Debido a que es la pieza clave de la sustentación de una tesis global: el universo es antropocéntrico, o tiene rasgos antropocéntricos. Dado que cualquier creación humana puede tener rasgos antropocéntricos, no es inmediato el paso de constatar cómo el antropocentrismo de algo particular, en este caso la matemática, pueda proporcionar elementos suficientes como para afirmar que en algo general, el universo, se constata también ese antropocentrismo. El esquema es el siguiente:

Premisa 1. Las matemáticas son antropocéntricas.

Corolario 1. Toda estrategia de acción basada en las matemáticas está, por lo tanto, preñada de antropocentrismo, explícita o implícitamente.

Premisa 2. En áreas alejadas de nuestra experiencia ésta no brinda ninguna indicación de cuál pueda ser la forma de las leyes físicas correspondientes. De tener una expresión matemática, no hay ninguna razón para asumir que deba tener algo que ver con la forma de las leyes conocidas; es más, en algunos casos se ha asumido que no debería tener la misma forma que leyes conocidas.

Corolario 2. Por lo tanto, nuestro conocimiento de las leyes físicas de áreas alejadas de nuestra experiencia debería ser, de darse, muy limitado y escaso.

Hecho 1. Nuestro conocimiento efectivo de al menos un área alejada de nuestra experiencia, la mecánica cuántica, no es ni limitado ni escaso.

Corolario 3. Por lo tanto, esos científicos están empleando alguna estrategia que les ha permitido una tasa de éxito demasiado improbable de haber sido el puro azar lo que hubiera dado la pauta en esos descubrimientos.

Hecho 2. En un número importante de esos descubrimientos es posible constatar que las estrategias básicas para llegar a ellos están basadas en las matemáticas.

Corolario 4. Por lo tanto hay estrategias antropocéntricas que permiten efectuar descubrimientos objetivos con efectividad.

Corolario 5. Por lo tanto hay algo en el universo que "responde" a características específicas de nuestra especie.

Conclusión. El universo tiene rasgos antropocéntricos.

Para Steiner un naturalista debería aceptar como válido el corolario 2, ya que el razonamiento de Peirce-Steiner lo que pretende mostrar no es una incapacidad fundamental[1], sino que para un punto de vista puramente racional[2] lo único factible de ser conocido en áreas alejadas de nuestra experiencia es aquello que por azar se llegue a entrever, lo que no puede ser ni cualitativa ni cuantitativamente satisfactorio. De manera un poco más estricta, la premisa 2 afirma que no puede haber estrategias objetivas, como por ejemplo las racionales, que ofrezcan mayores posibilidades de éxito en el proceso de descubrimiento de leyes físicas que una búsqueda aleatoria. Si las únicas estrategias viables participasen de elementos extra-objetivos, esta premisa podría entonces seguirse sustentando. Este camino le estaría vedado al naturalista, pues sus premisas le impiden aceptar como válidas estrategias no sustentadas por completo en aspectos objetivos, en especial no debe aceptar estrategias basadas en la premisa de que hay algo en el universo que responde directamente a características específicas de nuestra especie: "where the analogy is improper, as anthropocentric analogies are *for the naturalist*, guessing by analogy can be just as irrational as projecting an unprojectible hipótesis" [p. 59]. (Cursivas del autor.)

---

[1] Ya que Steiner está muy bien enterado de los avances en mecánica cuántica, sería poco congruente que afirmara a ultranza que es imposible obtener conocimiento profundo de áreas alejadas de nuestra experiencia.

[2] Asumo a lo racional como parte de lo que ha sido generado y condicionado por la evolución de nuestra especie. En mi opinión, Steiner también lo asume. Un punto de vista puramente racional es entonces ajeno a factores extra-objetivos, como cualquier otro punto de vista relacionado con nuestra evolución y las capacidades que en ella pudiésemos haber adquirido.

Pero si las matemáticas no fuesen antropocéntricas la premisa 2 no sería válida, pues habría estrategias racionales[3] para investigar áreas "alejadas de nuestra experiencia". La posibilidad de que el argumento anterior permita asignarle un valor de verdad a la conclusión depende en primera instancia de sí las matemáticas son antropocéntricas o no. Si no se da una justificación adecuada de esta tesis, alguien que esté en contra del antropocentrismo del universo no puede ser convencido con el esquema anterior, y el rechazar sus tesis no se da a partir de una posición dogmática, a pesar de lo que dice Steiner. Para él el naturalismo es un principio (*background belief*). Por lo que no puede ser refutado a pesar de que "the evidence suggests .... that nature looks 'user friendly' to human inquiry" [p. 72]. Cuando mucho se le puede presentar así una "dificultad", pero no aceptará haber sido refutado, pues un "background belief operates by labeling certain hypotheses or behaviors as inappropiate or irrelevant". [p. 72].

Para Steiner no reconocer como válida la naturaleza fundamentalmente antropocéntrica de la matemática, y por lo tanto de las estrategias basadas en ella, es vivir en "a kind of intellectual schizophrenia. This is how I regard the position of today's naturalist physicists: their behavior goes counter to their beliefs. Given the beliefs, their behavior is irrational" [p, 73].

Dados sus argumentos, su diagnóstico de "esquizofrenia intelectual" no parece correcto.

Sección 2. Análisis.

La discusión comienza por los aspectos más generales, para pasar después a la discusión del aspecto estético y luego al de conveniencia de cálculo. También se presentan esquemáticamente algunos ejemplos significativos.

La traducción ininterrumpida del texto de las pp. 63, 64 y 65 están en el apéndice 1. Las citas se presentan en cursivas para diferenciarlas visualmente de mi texto.

---

[3] Y, por lo tanto, estrategias basadas en capacidades adquiridas durante la evolución.

Subsección 1: Aspectos generales.

Primera parte: Cómo caracterizar globalmente a la matemática.

Como se ha señalado, lo esencial para Steiner es la caracterización global de las matemáticas. Necesita encontrar una manera de hablar de sus aspectos básicos, y piensa que los ah encontrado en los criterios de selección de conceptos. Es por ello que comienza la defensa específica de su tesis con la siguiente pregunta:

"Ahora, ¿qué hay de anti-naturalista[4] acerca de analogías y taxonomías pitagóricas?. Esta pregunta depende de otra, de mayor peso: ¿qué es la matemática? O, ¿cuál es el criterio para [determinar qué] conceptos son 'matemáticos'?"

O sea, si se puede mostrar que las matemáticas son anti-naturalistas (antropocéntricas) globalmente, quedaría claro que las estrategias basadas en ella también lo son. Enseguida el autor hace equivalente la pregunta acerca de la esencia de las matemáticas con la pregunta acerca de cuáles pudiesen ser los criterios para decidir si tal o cual concepto es matemático o no.

Es evidente que si se conocen esos criterios, mucho se ha de poder decir de cuál fuese la esencia de las matemáticas. Pero no queda claro si el conocer esos criterios es suficiente para determinar la esencia de las matemáticas. Parecería más bien que pueden o pudiesen proporcionar elementos necesarios para determinar esa esencia, y no forzosamente suficientes. Sería aceptable suponer que al conocer esos criterios se proporcionan elementos para la determinación de esa esencia, en ocasiones quizá fundamentales, pero no siempre. Steiner puede alegar que para poder decidir si un concepto es matemático o no tengo que saber qué son las matemáticas. Sin embargo una analogía puede indicar las dificultades de esta propuesta.

Supóngase que hay que clasificar a los primates actuales. Hay una especie que queda separada merced a un solo criterio: la carencia de pelo en casi todo el cuerpo. Con ello puedo saber si tal o cual primate es homo sapiens o no, y sin

[4] Equivale a lo que he llamado extra-objetivo.

embargo esa característica poco me dice acerca de lo esencial de ser homo sapiens.

Segunda parte. Diversidad de criterios.

A continuación Steiner presenta una clasificación "fregeana" de los conceptos matemáticos en tres categorías. No se señala si se pretende exhaustiva o no.

*"Desde un punto de vista Fregeano en sentido amplio, podemos distinguir tres categorías de conceptos matemáticos, dependiendo de **sí** son (o pretenden ser):*

(1) Propiedades de objetos matemáticos (p.e. "número primo");

(2) Propiedades de conjuntos o sistemas (p.e. "grupo");

(3) Propiedades de segundo orden o funciones (p.e. "el número de F-es", "la derivada de f").

El mismo Frege estaba interesado en las diferencias entre las categorías. Pero también podemos preguntar, de cada categoría, ¿qué es lo que hace [de] un miembro de esa categoría un concepto matemático? Así obtenemos tres preguntas, y no deberíamos esperar que las respuestas sean las mismas".

Los primeros dos tipos de conceptos están claros. El tercero no tanto. ¿Es lo mismo una "propiedad de segundo orden" que una "función"? Parece ser que el autor pretende con ello clasificar a los conceptos relacionados con propiedades construidas sobre las dos anteriores categorías como propiedades de varios elementos ("el número de F-es"), o funciones construidas sobre objetos matemáticos ("la derivada de f").

Pero lo importante es la pregunta: *"¿qué es lo que hace [de] un miembro de esa categoría un concepto matemático?"*

El párrafo concluye con una frase significativa: ya que hay tres categorías de conceptos en la matemática, con respecto a los criterios que permiten decidir si un concepto es matemático o no, se tienen *"tres preguntas, y no deberíamos esperar que las respuestas sean las mismas".*

Los criterios para seleccionar en una categoría no necesariamente deben ser los mismos que en otra. Ese planteamiento implica, entre otras posibilidades, que hay conceptos que *no son* conceptos matemáticos pero susceptibles de ser considerados como tales. Un primer problema radica en que no se sabe con precisión de dónde se van a tomar los conceptos (o cómo se van a inventar) entre los cuales es factible escoger y decidir si uno es matemático y otro no, y a qué categoría pertenece.

Más allá de sí son 3 preguntas, o cuatro o dos, esta frase pone de relieve una situación que hay que tomar en cuenta: en un ámbito tan complejo como la matemática actual no es factible esperar que la respuesta a cuáles son los criterios de selección de conceptos sea la misma para en sus diferentes ámbitos ni para diversas clases de entes o relaciones. Esto me parece muy aceptable. Lo desconcertante es que, a pesar de haberla señalado con claridad, Steiner no hace esa distinción, sino que los dos únicos criterios que presenta se asumen implícitamente como aplicables a toda la matemática.

Tercera parte. El ejemplo del ajedrez.

A partir de este momento no se vuelve a hacer referencia a esa clasificación en tres categorías. Steiner simple y sencillamente pasa a otra cuestión, y se pregunta cuál es la distinción entre un concepto como el de grupo y la teoría del ajedrez. Su respuesta es categórica: *"la distinción entre matemáticas y ajedrez es una predilección de los matemáticos, más que una distinción lógica"*:

"Por ejemplo, dado (2) [o sea la segunda categoría], *podríamos preguntar por la distinción entre el concepto de grupo y aquella de un juego como ajedrez. ¿Por qué el "teorema" de que el mate no puede ser forzado con un rey y dos caballos contra un rey no es un teorema de las matemáticas (y ningún matemático que yo consulté dice que lo es)? ¿Por qué no son las nociones del ajedrez, como "enroque", "captura al paso", "coronación de un peón", etc., de relevancia matemática? Las filosofías estándar de la matemática – logicismo, formalismo o intuicionismo – no tienen respuesta, ya que la distinción entre matemáticas y ajedrez es una predilección de los matemáticos, más que una distinción lógica.*

Esta actitud de los matemáticos cambiaría si surgieran nuevos hechos estructurales acerca del ajedrez. Supóngase que cada posición ganadora tuviese una simetría geométrica. Un "teorema" de ese tipo podría ser visto como matemáticas. No es que ningún matemático espere algo así: el ajedrez, como muchos juegos de dos adversarios, es una abstracción de la guerra. El origen del ajedrez no da buenos augurios, por experiencias previas, acerca de la riqueza típica de los conceptos matemáticos".

La afirmación "*la distinción entre matemáticas y ajedrez es una predilección de los matemáticos, más que una distinción lógica*" no recibe ningún tipo de sustentación. Es innegable que la teoría del ajedrez no se incluye entre las teorías matemáticas, pero es factible pensar en diversas razones para ello, tan plausibles o más (y en todo caso mejor sustentadas) que la "predilección de los matemáticos". De curiosa manera, Steiner mismo propone una: La riqueza "típica" o falta de ella. La riqueza de un concepto es su potencialidad de generar teorías o partes de teorías, o de llevarnos, dentro de una teoría a teoremas de interés o especialmente útiles. El concepto de grupo da lugar a toda una teoría de gran profundidad. Los conceptos de espacio vectorial y de función lineal dan lugar a toda el álgebra lineal. El concepto de producto interno o escalar no genera una teoría, pero sí contribuye notablemente a enriquecer las nociones de norma y métrica y permite definir ángulos entre vectores de cualquier tipo; entre otras posibilidades permite plantear el teorema de representación de formas lineales de Riesz, etc. Ahora bien, la riqueza de un concepto o teoría no depende de mis gustos o predilecciones, y si dejo de lado la teoría del ajedrez por su falta de riqueza conceptual es porque simple y sencillamente esa teoría no tiene esa característica.

Cuarta parte. Interludio: ¿Es extra-objetivo lo estético?

Al llegar a este punto no podemos dejar de lado una cuestión: Parece probable que lo estético haya también surgido y se haya desarrollado dentro del proceso de selección natural. Por lo tanto puede también tener o haber tenido un valor positivo[5] en ese proceso y sus cualidades no tener nada que ver con factores extra-objetivos.

Esta objeción no es contemplada por Steiner, y las posibles razones de ello iluminan con mayor claridad algunos aspectos de su sistema. Este autor no se compromete con la manera o la razón por la cual surgió nuestro sentido estético. La cualidad que le interesa es lo específico de ese sentido. Da por supuesto que difícilmente otra especie con un nivel evolutivo equivalente o mayor que el nuestro coincida con lo que nosotros percibimos como "bello".

No sería probable que, por ejemplo, el cuadro de Los Girasoles de Van Gogh les parezca bello o, en un sentido más general, estéticamente satisfactorio a una especie de la próxima galaxia, y eso inclusive asumiendo que superficies pintadas sean uno de sus medios de expresión artística.

El aspecto extra-objetivo no radica en esa característica "propia de la especie humana", sino en la posible reacción o relación del universo ante ella. Éste es un buen punto que, sin embargo, deja de lado otras posibilidades. Por ejemplo, también podría pensarse que el sentido estético es sólo el indicador de una armonía o resonancia con el universo, de la misma manera que la frecuencia de una señal de radio es un identificador específico de ella, y lo específico de nuestra especie es lo que se transmite, pero esto es posible gracias que hay una relación objetiva con el universo gracias al conocimiento de las leyes físicas objetivas que permiten enviar y recibir la señal.

Ahora bien, a pesar de las posibles respuestas de Steiner a esta objeción y a subsecuentes contra-respuestas, no es éste el aspecto de mayor peso. Hasta cierto punto es verosímil que nuestro sentido estético es específico de nuestra especie. Es algo que se puede conceder[6].

---

[5] En el sentido de contribuir a una retroalimentación positiva de ese desarrollo.

[6] Sin más afán que complementar la serie de aspectos que sus argumentos conllevan, es interesante constatar que para Steiner el sentido estético debe ser entonces neutral con respecto a los mecanismos de la selección natural.

Steiner debe pues demostrar, o al menos convencernos de que hay una relación privilegiada entre el universo en su totalidad y una característica específica, particular y por lo tanto definitoria, de nuestra especie. Si lo estético manifiesta, por algún mecanismo, la capacidad de conducirnos hacia el conocimiento objetivo ahí donde mecanismos objetivos, como aquellos basados en la razón, no pueden hacerlo, sería indudable que habría que revalorar algunas concepciones.

El mecanismo de que se vale lo estético para irrumpir en nuestro conocimiento de lo real es por medio de su capacidad de determinar qué es lo matemático. Si lo matemático es globalmente algo estético y es precisamente su aplicación global lo que ha permitido tener éxito, Steiner puede sustentar adecuadamente su tesis. Para ello descarta primero una relación con lo empírico a través de los orígenes de la matemática, para pasar entonces al núcleo del argumento: la sustentación del carácter estético de criterios fundamentales de selección de conceptos en la matemática (actual).

Quinta parte. La posible relación de los conceptos matemáticos con lo empírico en su origen.

Un argumento que ha sido esgrimido en diversas ocasiones para sustentar la tesis de una relación directa entre lo empírico y lo matemático es el origen de la aritmética y la geometría en actividades y necesidades prácticas, como la necesidad de un calendario confiable en la agricultura o cómo repartir las parcelas y contabilizar lo que a cada uno corresponde. Esos orígenes serían las raíces de donde sigue fluyendo a todo el edificio la relación con lo objetivo. Al respecto nos dice Steiner:

"Las matemáticas también tienen sus raíces en diversas actividades humanas (medir, contar, movimiento). Pero las matemáticas modernas se han alejado mucho de esas raíces. Como dice Mac Lane:

[Cita de Steiner]. *La génesis de las estructuras matemáticas más complejas tiende a tener lugar dentro de las matemáticas mismas. Aquí hay una variedad de procesos que pueden generar nuevas ideas y nuevas nociones. Esos son: enigmas (36), el proceso de completar (37), invariancia (37), estructuras comunes (analogías) (37),* *estructuras intrínsecas (38), generalización (38), abstracción (38), axiomatización (39), el análisis de las demostraciones (39).*

(Nota a pie de página correspondiente a esta cita). Mac Lane 1986. Los números en paréntesis son las referencias del autor a ese trabajo".

Steiner no niega que en sus orígenes haya habido una relación clara entre estudios de objetos reales y las matemáticas, "pero las matemáticas modernas se han alejado mucho de esas raíces". Para él esa relación con lo objetivo o empírico se ha ido diluyendo conforme las matemáticas adquirían las propiedades que actualmente las caracterizan, hasta perder toda relación con lo empírico por ese lado. Las técnicas de desarrollo de esa actividad no hacen referencia más que a ella misma, no a una posible relación con lo objetivo.

Dicho bajo una interpretación un poco más rigurosa, la pura relación original con lo empírico no garantiza que esa relación se propague o que se siga dando. Esto es aceptable, aunque hay que añadir que aceptar esta idea no implica que por ello se deben dejar de lado otras maneras de relacionarse con lo objetivo. Tampoco se está diciendo nada acerca de posibles interacciones entre diferentes maneras de relacionarse con lo empírico o con nuestra reflexión acerca de lo empírico.

Quinta parte. Las taxonomías.

Un punto básico para Steiner es el uso de taxonomías como criterios para decidir cuándo algo se "parece" o "es análogo". Si se usan criterios de clasificación basados en las matemáticas la esencia de ellas debe tener algo que ver con lo que se está clasificando. O sea, si se usan criterios matemáticos y estos son antropocéntricos, aquello para lo que fueron empleadas las clasificaciones queda también impregnado de antropocentrismo. Es por ello que tras la cita de Mac Lane concluye:

"Nótese que los procesos aquí enlistados presuponen un sistema de taxonomía o clasificación: considérese en particular "invariancia" y "analogía". Así pues, desde nuestro punto de vista, cualquier uso de la lista de Mac Lane para caracterizar a la

matemática como "objetiva" (no antropocéntrica) simplemente presupone la cuestión (no afirmo que Mac Lane intentara hacer esto)".

Quiero entender que según Steiner esos procesos presuponen el mismo sistema de clasificación que las matemáticas, y no es válido caracterizar como objetiva a la matemática con criterios que son a su vez prácticamente matemáticos. Esto es coherente con su sistema.

Subsección 2..El factor estético.

Hasta aquí Steiner ha mencionado en diversas ocasiones al factor estético como el principal criterio en la selección de conceptos como matemáticos. Es a partir de los siguientes párrafos que Steiner trae a escena sus principales razones para sustentar esa tesis. Es indispensable la cita completa.

"El que los conceptos matemáticos modernos surjan dentro de las matemáticas (mas que empíricamente) es importante; ¿pero qué es lo que los hace matemáticos? La mayoría de los matemáticos aceptaría el punto de vista de Wigner [Wigner 1967]: las matemáticas modernas expresan el sentido estético humano. Los conceptos son seleccionados como matemáticos porque dan lugar a teoremas bellos y teorías hermosas. Que el proceso enlistado por Mac Lane genere belleza es un hecho remarcable y contingente acerca de la historia de las matemáticas. En las palabras de un gran matemático del siglo XX:

[Cita de Steiner]. *El matemático tiene una gran variedad de campos a los cuales dirigirse, y disfruta de una muy amplia libertad en lo que hace con ellos. Para llegar al punto decisivo: pienso que es correcto decir que su criterio de selección y también aquellos de éxito son principalmente estéticos. ... Uno no sólo espera de una teoría matemática que describa y clasifique de una manera sencilla y elegante numerosos casos [que son] a priori diversos. Uno espera también "elegancia" en su formación estructural "arquitectónica". ... Esos criterios son claramente aquellos de cualquier arte creativo. [Von Neumann, 1956].*

Por supuesto G.H. Hardy es notorio por su concepción de que la belleza es la esencia de las matemáticas:

[Cita de Steiner], *Los patrones matemáticos, como los del pintor o el poeta, deben ser hermosos; las ideas, como los colores o las palabras, deben entrelazarse de una manera armónica. La belleza es la primera prueba: no hay un lugar permanente en el mundo para matemáticas feas. ... Puede ser difícil definir la belleza matemática, pero lo mismo es verdad de cualquier otro tipo de belleza – podemos no saber exactamente qué significa que un poema sea bello, pero eso no nos impide reconocer uno cuando lo leemos [Hardy]*

Que el factor estético en matemáticas es constitutivo ha venido a ser actualmente un truismo en la comunidad matemática. En una encuesta en un número reciente de Mathematical Intelligencer se pidió a los lectores que se ordenaran teoremas matemáticos en razón de su belleza (Wells 1988). Quizá la pregunta estaba un tanto desviada al divorciar la belleza de un teorema de la "arquitectura" de su demostración. De todas maneras, dudo que una revista periódica en cualquier otra ciencia llevara a cabo una encuesta semejante.

***

El argumento se divide en tres partes. Primero se afirma algo acerca de la comunidad de matemáticos: Que una parte mayoritaria afirma que lo estético es constitutivo. Enseguida se ejemplifica ese tipo de pensamiento con dos citas. Finalmente se confirma esa afirmación mencionando una encuesta de una revista. Por ello dividimos en tres partes el análisis.

Primera Parte. Lo que piensa la comunidad.

En primer lugar, para Steiner es un hecho que la mayoría de los matemáticos aceptaría que "las matemáticas modernas expresan el sentido estético humano". Supóngase que esto efectivamente fuera cierto, ¿se deduciría de tal hecho que efectivamente es así? Steiner mismo ha dicho que una cosa es lo que los físicos, aún mayoritariamente, *digan*, y otra lo que *hacen*. ¿O sería la comunidad matemática un caso especial? No parece haber razones para ello, Steiner al menos no ofrece ninguna.

Queda además la pregunta abierta acerca de la verosimilitud de la afirmación. No parece haber sustento estadístico, de encuestas o de algún otro tipo que permitan afirmar que efectivamente esa es la opinión de "una parte mayoritaria" de los matemáticos. Esto sin negar que es indudable que la comunidad matemática tiene una gran sensibilidad hacia aspectos estéticos, lo que se expresa habitualmente con el concepto de "elegancia". Tal demostración es "elegante", la otra no, etc. Por ello es más interesante la oración con la que Steiner concluye el párrafo:

"Que el proceso enlistado por Mac Lane genere belleza es un hecho remarcable y contingente acerca de la historia de las matemáticas".

Parecería ser altamente asombroso que esos procesos produzcan precisamente *belleza*, mientras que eso dejaría de ser misterioso si el criterio fundamental a lo largo de esos procesos fuese precisamente lo estético. De manera natural todo concepto matemático sería satisfactorio estéticamente, pues en primera instancia por eso fue seleccionado.

Esto descuida algunos aspectos. En primer lugar, si bien seleccionar algo por bello garantiza que será estéticamente atrayente, el ser estéticamente atrayente no implica que algo haya sido necesariamente seleccionado por su belleza. La belleza puede ser una cualidad secundaria, pero siempre presente, de procesos diversos.

En segundo lugar, no se ha analizado qué significa que un concepto matemático sea estéticamente satisfactorio. Por ejemplo, desde algunos puntos de vista no son fundamentalmente los conceptos lo que es "bello" o "elegante" en matemáticas, sino las demostraciones o las teorías. Debido a esto, entre otros factores, no es fácil delimitar lo que pudiese ser la belleza de un concepto. El atractivo estético de un concepto como el de "producto interno" es más detectable ya que es una consecuencia casi inmediata de su definición el que pueda ser aprovechable para definir una métrica y una norma, algo "elegante". Mientras que el concepto de vector, aunque interviene en demostraciones, no es elegante en sí mismo, pues esas demostraciones pueden serlo o no, más allá de sí interviene el concepto de vector o no. La idea de "grupo" es ciertamente atractiva por su elegancia, pero no necesariamente se asume que la idea de elemento inverso lo sea.

No es pues clara la idea de qué pueda ser el atractivo estético de un concepto matemático, y por lo tanto afirmar que los conceptos matemáticos lo poseen es una afirmación demasiado ambigua. A lo que Steiner puede, por supuesto, replicar que lo relevante no es dar una definición, algo de cualquier manera sumamente difícil, pues basta con constatar el hecho, y son experto como Von Neumann y Hardy los que lo han constatado.

En pocas palabras, no queda claro qué pueda ser el factor estético en matemáticas. Por lo tanto no queda claro si al preguntarles a dos matemáticos si el estético es un elemento constitutivo de la matemática actual se refieran a lo mismo al contestar. Tampoco queda claro por qué se afirma que una "mayoría" de los matemáticos contestaría afirmativamente. Inclusive, aun aceptando que efectivamente así fuera, la opinión mayoritaria sobre algo no es un factor riguroso de demostración.

Segunda parte. Von Neumann y Hardy.

Steiner presenta a continuación lo que parecería ser el núcleo principal de su argumentación, las citas de dos grandes matemáticos, Von Neumann y Hardy.

Hardy es uno de los primeros ejemplos de lo que hoy en día llamamos "matemáticos puros". Von Neumann representa casi un arquetipo del "matemático aplicado", quien además hace contribuciones de primer nivel a la matemática pura.

Los dos se expresan con gran claridad acerca de la importancia del factor estético en las matemáticas modernas. Para ambos es algo fundamental, con diferencias de matiz. Von Neumann habla inclusive de "criterios de selección", mientras que Hardy sí parece admitir que en alguna etapa algo "feo" pudiese haber sido considerado como matemático. Lo que Hardy no acepta es que continúe así indefinidamente.

"El matemático tiene una gran variedad de campos a los cuales dirigirse, y disfruta de una muy amplia libertad en lo que hace con ellos. Para llegar al punto decisivo: pienso que es correcto decir que su criterio de selección y también aquellos de éxito son principalmente estéticos. ... Uno no sólo espera de una teoría matemática que describa y clasifique de una manera sencilla y elegante numerosos casos [que son] a priori diversos. Uno espera también "elegancia" en su formación estructural "arquitectónica". ... Esos criterios son claramente aquellos de cualquier arte creativo". [Von Neumann, 1956, 2062].

"Los patrones matemáticos, como los del pintor o el poeta, deben ser hermosos; las ideas, como los colores o las palabras, deben entrelazarse de una manera armónica. La belleza es la primera prueba: no hay un lugar permanente en el mundo para matemáticas feas. ... Puede ser difícil definir la belleza matemática, pero lo mismo es verdad de cualquier otro tipo de belleza – podemos no saber exactamente qué significa que un poema sea bello, pero eso no nos impide reconocer uno cuando lo leemos" [Hardy, p. 85].

Las dos citas muestran que al menos dos matemáticos del más alto nivel consideran fundamental el factor estético en la selección de conceptos en su ciencia. Esto es un indicador confiable de que es de interés analizar lo que pueda ser ese factor y de qué manera ha influido en la evolución de las matemáticas. En especial sería necesario analizar el trabajar concreto de los matemáticos para entender los mecanismos por los cuales este factor se hace sentir en esa práctica.

Lo que las citas anteriores no permiten es afirmar como un hecho que ese factor sea el fundamental en la selección de conceptos. Para quien concuerde de antemano con esa posición las citas pueden ser convincentes, pero desde un punto de vista neutral no proporcionan argumentos decisivos, aunque indican la necesidad de un estudio más profundo.

Hay al menos dos ejemplos significativos en los cuales el criterio estético no jugó el papel primordial, y al menos en el segundo fue inclusive invocado por una de las partes. Ellos son el concepto de infinitesimal y el de cuaternión. Dada su relevancia serán considerados con cierto detalle en la siguiente sección, aunque por el momento se opta por no interrumpir el análisis de los razonamientos de Steiner. Un ejemplo importante, pero no tan concreto en cuanto a los criterios de selección, sino más bien en cuanto a su relación con el mundo de la experiencia es el de los números imaginarios. De ello se hablará más adelante.

Tercera parte. Encuesta.

En lo que casi se puede considerar de anecdótico, Steiner relata como una revista de matemáticas hizo una encuesta entres sus lectores sobre la belleza de teoremas. Fuera de indicar una alta sensibilidad hacia lo estético, que no hemos negado, no vemos la contribución de este señalamiento a la sustentación lógica de las tesis bajo escrutinio.

Subsección 3. Conclusiones de Steiner.

"Por lo tanto, parece plausible que la mejor respuesta a la pregunta "¿por qué es el ajedrez un juego, pero los espacios de Hilbert (son) matemáticas?" Dependerá de lo estético. Lo que causó que los matemáticos enmarcaran los conceptos (de la manera en que) lo hicieron fue frecuentemente su gusto. ... Para mí, así pues, el sentido matemático se reduce a lo estético, mientras que el Pitagorismo histórico, limitado a una sola estructura (los números naturales), afirmaba lo inverso. Decir que el sentido matemático se reduce a lo estético equivale a quitar al sentido estético del único argumento para su objetividad – o sea, que el sentido estético se basa en la objetividad de las formas matemáticas, como los pitagóricos argumentaban de hecho. Si la posición pitagórica hoy en día "begs the question" – si, como sostengo, el término "forma matemática" (dada la multitud de "formas matemáticas" actualmente) está vacío si no se introduce el sentido estético humano – entonces no hay escape de la conclusión de que el sentido estético humano no es otra cosa que específico-de-la-especie. Clasificaciones como bello / feo son entonces antropocéntricas: Así, finalmente, lo son las clasificaciones matemáticas."

***

Hay cuatro afirmaciones de interés en este párrafo.

1..Los matemáticos han decidido frecuentemente que algo es matemático, o no, por su gusto.

2. "Para mí el sentido matemático se reduce a lo estético".

3. "El término 'forma matemática' ... está vacío si no se introduce el sentido estético humano".

4. "El sentido estético humano ... es ... específico de la especie".

De ello se concluye que las clasificaciones matemáticas son antropocéntricas.

Pero, ¿han quedado demostradas las afirmaciones 1 y 3? La segunda afirmación está atenuada por presentar una opinión: "para mí ...". Sin embargo todo indicaría a que Steiner afirma que "el sentido matemático se reduce a lo estético". ¿Qué tanto apoyan las premisas planteadas esta conclusión? A partir de este momento Steiner acepta como válida esa afirmación, sin insistir más en demostrarla. Por lo tanto debe considerar como igualmente válido el proceso deductivo que presenta para apoyarla, al menos sustancialmente.

¿Qué se ha presentado? De manera condensada Steiner afirmó que la mayoría de los matemáticos apoyaría la opinión de Wigner. Que los criterios de desarrollo en las matemáticas actuales son intra-matemáticos. Que tanto Von Neumann como Hardy pensaban que el aspecto estético es fundamental para las matemáticas. Finalmente, que una revista especializada organizó una encuesta sobre la belleza de los teoremas matemáticos.

No se explica cómo se llegó a conocer la opinión de la mayoría, pero aun si así fuese esto no puede ser decisivo para determinar si efectivamente Wigner tiene o no razón.

No queda claro en qué contribuye a la verosimilitud de la tesis principal el que una ciencia proceda con criterios internos de desarrollo.

La opinión de Von Neumann y la de Hardy es indudablemente valiosa, y digna de ser tomada en cuenta, pero tampoco es una demostración de lo que se afirma.

Lo de la encuesta es más que nada anecdótico.

Los anteriores son argumentos con demasiado poca fuerza lógica como para sustentar satisfactoriamente una afirmación acerca del factor estético como fundamental en las matemáticas actuales. Por lo tanto esta afirmación tiene una cierta probabilidad de ser cierta, pero al menos con base en los argumentos de Steiner no se **la** puede considerar como una hipótesis más probable que cualquier otra, y quizá haya otras mejor sustentadas.

Ahora bien, el problema no radica en la debilidad o no de la deducción de Steiner, sino en que hemos asumido que la argumentación se da en lo que pudiésemos llamar una discusión "clásica": a partir de las premisas se va elaborando una serie de cadenas deductivas cuya conclusión es la tesis del antropocentrismo de las matemáticas, para de ahí deducir, dado el éxito de estrategias matemáticas en al física, que el universo debe tener características también antropocéntricas.

De manera un tanto sorpresiva, esa construcción parece endeble. Es el análisis específico el que finalmente permite ubicar adecuadamente lo que el autor pretende, de lo cual nos ha dado además claves al calificar la situación como "plausible", al emplear frases como "para mí ...". Además de otros detalles que pudiesen parecer incongruentes, como plantear que lo importante es lo que el científico hace, y no lo que dice, siendo que de los matemáticos lo que le atañe son sus opiniones.

La visión cambia cuando queda claro que no es una argumentación "clásica" lo que pretende, sino que a fin de cuentas, en una postura radical, la tesis del criterio estético como fundamental en las matemáticas queda como lo que es: un *principio*. No pretende, al menos implícitamente, dar una sustentación lógica de esa tesis, sino asumirla y darle plausibilidad, credibilidad. Steiner no pretende forzar en nosotros una conclusión lógica que admitamos como necesaria[7], sino dar un contexto coherente en el cual, en su concepción, esa tesis puede funcionar como un principio.

---

[7] Aunque nos parece claro que para Steiner esa idea tiene una gran fuerza lógica.

Subsección 4. Primeras conclusiones de la crítica de [Steiner].

La afirmación con que cierra la subsección anterior permite localizar una ubicación lógicamente coherente del antropocentrismo de las matemáticas en el sistema presentado en [Steiner]. Esta tesis se apoya en dos afirmaciones, la preponderancia del criterio estético en el desarrollo de las matemáticas actuales, y la necesidad de introducir conceptos por conveniencia de cálculo.

Si ambas premisas son ciertas, la tesis del antropocentrismo de las matemáticas recibe un fuerte sustento lógico. Con respecto a la primera premisa hemos llegado a la conclusión mencionada: se presenta como un principio, más que como la conclusión sumamente probable de un proceso deductivo.

Como veremos enseguida, la segunda premisa tampoco aporta la necesaria fuerza lógica y debe ser, en un enfoque radical, asumido también como un principio.

Dada la importancia del antropocentrismo del universo, no parece adecuado sustentarlo en la sola plausibilidad de su premisa fundamental, lo estético como criterio básico para seleccionar conceptos como "matemáticos". Sobre todo si esa plausibilidad no está exenta de dudas serias. Steiner está firmemente convencido, su creencia es que efectivamente las matemáticas tienen la característica global de ser antropocéntricas. La magra sustentación de esa creencia impide asumirla como justificada de manera adecuada. Queda por preguntarse si hay otras posibilidades de dar esa justificación.

Una manera eficiente, aunque inductiva, de proceder hacia la sustentación de la plausibilidad (que no necesariamente hacia una demostración) sería usar la misma metodología que emplea Steiner para sustentar su tesis del manejo de los formalismos en física: Dar una serie representativa de ejemplos detallados y adecuadamente interpretados. Esta no fue la estrategia seguida por el autor. Como se señaló, en la siguiente sección se darán ejemplos donde no se cumplen las expectativas de Steiner.

Un argumento global que no le daría tanto peso a la selección de conceptos, sino que desviaría la fuerza argumentativa hacia la tesis de Peirce-Steiner de incapacidad de conocimiento basado en nuestras capacidades surgidas en la evolución de "áreas alejadas de nuestra experiencia" podría ser más o menos el siguiente. Admítase sin reservas la tesis de Peirce-Steiner y obsérvese que ciertas estrategias matemáticas han permitido incursionar con éxito en un área definitivamente alejada de nuestra experiencia, como lo es la mecánica cuántica. Para conciliar este hecho con esa tesis se podría optar por admitir que de alguna manera la matemática no es totalmente racional. ¿Dónde podría radicar, en ese edificio aparentemente tan racional, ese factor que no lo sea? Al estudiar la reflexión de los propios matemáticos acerca de su ciencia se observa que un factor que aparece reiterativamente es el estético. Por lo tanto podría postularse de manera plausible que, dadas las premisas, es ese factor el que permite incursionar en áreas vedadas a nuestras capacidades objetivas[8].

El problema fundamental de este tipo de argumentación es que impone una caracterización de las matemáticas desde un ámbito filosófico. Las matemáticas deben tener una propiedad especial y específica de nuestra especie ante la cual el universo muestra una reacción privilegiada, porque de otra manera, dada la tesis de Peirce-Steiner, no habría manera de explicarse su éxito en las aplicaciones a ciencias empíricas, en especial a la física. Pero si se asume que son una actividad que es un ejemplo paradigmático de capacidades surgidas en nuestra evolución, como la razón, entonces ellas mismas son un contraejemplo de la imposibilidad de acceso racional a ámbitos alejados de nuestra experiencia. Con todo, una argumentación con un fuerte manejo de la coherencia de una doctrina podría ser interesante. Steiner tampoco sigue un camino de este tipo.

Aún falta analizar lo que ofrece el otro factor antropocéntrico, la conveniencia de cálculo. Tras ello es adecuado traer a colación una serie de ejemplos históricos, aunque sea de manera muy breve, en los cuales es posible vislumbrar qué es lo que ha llevado a los matemáticos a seleccionar un concepto como matemático, y a

[8] A riesgo de ser reiterativo, quisiera enfatizar que "capacidades objetivas" denotan las capacidades surgidas a lo largo de nuestro proceso evolutivo.

darle un lugar en ese conjunto. Dos pares de conceptos, infinitesimal y límite y vectores y cuaterniones, son especialmente significativos.

Subsección 5: Conveniencia de cálculo dadas nuestras limitaciones.

Con todo y lo importante que pudiese ser lo estético, aun para una posición como la de Steiner no es posible negar que muchas veces algunos conceptos se seleccionan o desarrollan en función de necesidades tanto de la misma matemática como de sus aplicaciones. La teoría de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, ha sido sometida a intensas exploraciones y desarrollos en función de las necesidades de la física, que ha expresado gran parte de sus leyes usándolas.

Todo parece indicar[9] que aquí radicaría el único criterio no estético que pudiese compararse en importancia al criterio de "belleza" o "gusto". Pero no es del criterio de necesidad en general del que Steiner habla. Son las necesidades de *cálculo* las que se ponen sobre la mesa. No se trata, por ejemplo, de la necesidad de la física de tener un concepto de vector, o de la necesidad de un aparato lógico adecuado para las nuevas exigencias de rigor. No es un problema conceptual, sino eminentemente práctico.

Para Steiner el punto clave radica en una incapacidad específica de nuestro cerebro de llevar a cabo ciertos cálculos. Por ello debemos introducir una serie de conceptos auxiliares que no habrían sido, de tener nosotros la capacidad adecuada, considerados como posibles candidatos para la matemática. La otra avenida por la que "llegan" conceptos a la matemática depende de nuestras limitaciones, y por lo tanto es también específica-de-la-especie, es un camino antropocéntrico.

Steiner comienza su argumentación en la introducción [p. 7]:

"..., el poder computacional de nuestro cerebro está limitado. Por lo tanto, la conveniencia de cálculo viene a ser una razón para estudiar un concepto. O sea,

---

[9] Para ser estricto, Steiner no explicita la relevancia relativa del criterio estético frente al de "conveniencia", pero al decir "para mí el sentido matemático se reduce a lo estético" queda claro que lo principal es lo estético.

los matemáticos introducen conceptos en las matemáticas para hacer cálculos más fáciles o más convenientes. Si tuviéramos cerebros mil veces más poderosos, presumiblemente podríamos no necesitar esos conceptos particulares. Así pues, tanto la belleza como la conveniencia (así como nociones relacionadas como la comprensibilidad) son nociones antropocéntricas o específicas-de-la-especie".

La idea de Steiner queda plasmada con claridad en este párrafo, y la reafirma en el capítulo 3 [p. 66]:

"Además de consideraciones estéticas para los conceptos matemáticos, hay otra – conveniencia. Nuestro poder de cómputo, como cualquier poder humano, está limitado: ayudas computacionales compensan".

Steiner proporciona unos ejemplos de los que quizá se puede deducir de qué limitación se trata. Presenta (sumariamente) el caso de los números imaginarios, los métodos potenciales y las series de Taylor. Una manera inmediata de hacer convincente la corrección de su tesis sería mostrar que al menos uno de esos tres ejemplos es prescindible *en los cálculos en que interviene*, aunque no se pueda mostrar cómo o con qué habría que sustituirlo. Por ejemplo, habría que plantearse si el concepto de raíz cuadrada de un número negativo es verdaderamente necesario.

Pero por el momento no se trata de analizar cada ejemplo, lo que se hará con mayor detalle en la cuarta parte de este capítulo., Sino tratar de entender a qué limitaciones se refiere Steiner, o, tal vez a qué limitaciones parece referirse, ya que su uso reiterativo de la palabra "calcular" no permite delimitar con suficiente claridad si se refiere a "capacidad de cálculo" o "generación de conceptos auxiliares en los cálculos".

Si se acepta que esos conceptos surgen de una limitación de alguna capacidad humana, entonces no es una limitación en los cálculos propiamente dichos, *sino en el marco conceptual que permite plantear en forma de un esquema computable esos cálculos.* Lo que se estaría planteando es que un cerebro más poderoso podría pasar directamente al resultado que se requiere sin necesidad de insertar un concepto extra en el planteamiento del problema. Esos conceptos le serían superfluos. Aquí surgen una serie de preguntas. En el caso de los números imaginarios hay que entender por qué surgen sólo como un subterfugio. Bien podría ser que el concepto de número imaginario sea necesario y correcto a cualquier nivel.

Pero aún no queda claro si la cuestión radica en el *cálculo*. Tomando sus palabras *strictu senso* Steiner dice que una inteligencia más poderosa podría *calcular* directamente el resultado deseado. ¿Es entonces una cuestión de poderío de cálculo? En ese caso hemos desarrollado prótesis: las computadoras. La idea de prótesis se discute someramente más adelante. ¿O más bien radica nuestra incapacidad en no poder orientarnos en las prácticamente infinitas avenidas por las que nuestros cálculos pueden transitar? ¿O quizá radica el problema en que no podemos hacer otra cosa que acercarnos al resultado, sin jamás arribar a él, cómo el naufrago que sabe hacia donde queda la tierra firme, pero cuyas fuerzas jamás le permitirán llegar a ella?

Veamos qué dice el autor.

***

Steiner nos recuerda que *"los números imaginarios fueron introducidos por Cardano como soluciones de ecuaciones cuadráticas*", y cita un conocido libro del físico Roger Penrose:

"Mientras que al principio podría parecer que la introducción de esas raíces cuadradas fue simplemente un artificio – una invención matemática diseñada para llevar a cabo un propósito específico – más tarde resulta claro que esos objetos están consiguiendo mucho más de aquello para lo cual fueron originalmente diseñados. Como mencioné arriba, aunque el propósito original de introducir los números complejos fue permitir obtener raíces cuadradas con impunidad, al introducir tales números encontramos que recibimos, como una bonificación, la potencialidad de obtener cualquier otra clase de raíz o de resolver cualquier ecuación algebraica. Más tarde encontramos muchas otras propiedades mágicas que poseen esos números complejos ... "[Penrose, p.].

Por lo tanto, continúa Steiner, *"... un concepto introducido por conveniencia resulta tener la "magia" característica de las matemáticas. Pero lo mismo pasa en aplicaciones a la física: un concepto matemático introducido por conveniencia resulta tener 'realidad física' ".*

El problema principal radica en las razones que llevan a afirmar que, al menos en su origen, el concepto de número imaginario no es otra cosa que un "artificio". En el mismo sentido la derivada de una función en el punto x no sería otra cosa que un artificio para calcular algunos de los parámetros que caracterizan el comportamiento local de la función. Newton lo que quería era calcular velocidades, Leibniz trazar tangentes usando información numérica (la tangente de esas rectas). La derivada se considera un desarrollo conceptual y no un artificio de cálculo. Los números imaginarios más que ser signo de una incapacidad que contribuirían a superar[10], ponen de manifiesto nuestra capacidad de generar, crear o descubrir conceptos apropiados para describir la realidad física. Lo mismo se puede decir del concepto de límite con respecto a la serie de problemas que plantean las paradojas de Zenón. Era necesario un concepto (el de límite) que permitiese dar bases firmes y rigurosas a una representación de la idea física de continuidad, y no nuevos procedimientos de cálculo. Fue posible generarlo (inventarlo, descubrirlo) sin apelar a factores extra-objetivos ni directa ni indirectamente.

Por otro lado, supóngase que efectivamente los números complejos tienen un origen antropocéntrico, y que por lo tanto la especie X, cuyos cerebros son mil veces más "poderosos" que los nuestros, no siente en ningún momento la necesidad de echar mano de algo como los números imaginarios para calcular. Al no tener a su disposición el concepto de número imaginario no tiene tampoco el campo de números complejos y no hay manera de plantear el concepto de espacio de Hilbert sobre el campo de los números complejos. Éste es el principal espacio vectorial de la mecánica cuántica. Por lo tanto la especie X no llegará al conocimiento de ese aspecto del mundo físico, nosotros sí.

---

[10] De manera imperfecta.

Pero eso no excluye que, precisamente por su "superior" inteligencia, la especie X pueda llegar a conocer aspectos del mundo físico igualmente fundamentales pero inaccesibles para nosotros.

Pero este nivel de especulación empieza a ser insatisfactorio, y más bien indica la falta de elementos más firmes y claros en el nivel de discusión al que nos lleva Steiner en este punto.

***

Es necesario regresar a lo que dice Steiner, reiniciando el transcurrir secuencial de su exposición.

"Tomemos el caso de los "números imaginarios". Antes del siglo XIX tenían poco uso en la física. Entonces, funciones exponenciales con valores complejos reemplazaron a las series trigonométricas para describir ondas, siendo más fácil calcular con exponenciales (la derivada de un exponencial es un exponencial). La "parte imaginaria" de esas funciones no jugaba aún un papel".

Entendemos que se quiere decir que se introdujeron las funciones exponenciales con valores complejos por "conveniencia de cálculo" para los físicos. Se introducen a la física como un "artificio". Supóngase que efectivamente así fue, ¿qué relevancia tiene este hecho para la selección de conceptos *dentro* de la matemática? Los físicos toman ese concepto ya en un estado avanzado de desarrollo, en especial por Euler. Ya era un concepto considerado como parte integral de la matemática en ese momento. Precisamente es la llamada "fórmula de Euler" la que da la relación entre funciones trigonométricas y la exponencial:

$$e^{ix} = \cos(x) + isen(x).$$

No se está hablando de selección de conceptos *en la matemática*, sino de utilidad *en la física*. La utilidad de un concepto en la física no implica que haya sido necesaria y exclusivamente esa utilidad lo que llevó a los matemáticos a desarrollarlo. Menos aún cuando esa utilidad se entiende como utilidad de cálculo, no como la necesidad de un desarrollo conceptual interactivo que involucre ambas ciencias, ya que este desarrollo conceptual es un desarrollo creativo, y por lo tanto es difícil interpretarlo como signo de una incapacidad.

La conveniencia de cálculo de un concepto para la física no puede por sí sola determinar las razones por las cuales ese concepto es o no matemático.

El siguiente ejemplo es el de potencial:

"El concepto de un potencial (del cual campos pueden ser recuperados tomando derivadas) también comenzó como una conveniencia computacional. ... Es obvio que es más fácil calcular con la función escalar".

Sería conveniente conocer la referencia de Steiner para la primera afirmación. Lo que no es obvio es la razón por la cual es "más fácil calcular con la función escalar". El problema es que se está hablando de conceptos sin definirlos y/o dar una idea intuitiva de ellos. ¿De qué "función escalar se está hablando, y por qué sería "más fácil calcular con ella"? ¿Qué campos pueden ser recuperados? La idea básica no es tan complicada.

Cierto tipo de ecuaciones diferenciales vectoriales admite soluciones escalares[11] relativamente sencillas: Esas ecuaciones se llaman entonces "potenciales", y cada una de esas soluciones un "potencial". Algunas de las ecuaciones de la física son potenciales. Dado que en este caso se tienen técnicas bastante eficientes para encontrar soluciones, han sido más estudiadas que otros casos. Pero esto no implica que voy a imponer un método potencial de resolución ahí donde no hay potenciales. Lo que ofrecen los sistemas potenciales es una gran capacidad descriptiva acompañada por una relativa facilidad de cálculo, *ahí donde son aplicables.* Es muy probable que, una vez habiendo obtenido éxito los métodos potenciales, haya habido mayor interés en estudiarlos, lo que llevaría a mejores aplicaciones, etc. Pero esto es otra vez ejemplo del tipo de interacción que señala una relación más compleja que sólo la "conveniencia de cálculo".

***

[11] Las soluciones son funciones con contradominio en los reales o los complejos.

El caso del que más se ocupa Steiner es el de la serie de Taylor. Es innegable la importancia en la física de este tipo de series, y en general de toda expansión en series. También resultan ser un buen ejemplo de lo que pudiese ser un "manejo formal". Pero es también un buen ejemplo de lo complicado que resulta hablar de ciertos conceptos, tanto matemáticos como físicos, sin dar una idea intuitiva o una definición con un cierto grado de profundidad. Para un físico la siguiente presentación de "expansión de constantes" es tan general que raya en una pérdida de sentido de lo que se dice. Lo que el autor quiere decir es: Las series de potencias son tan convenientes para calcular que se usan inclusive ahí donde su uso no parece estar justificado, y sin embargo funcionan. En palabras de Steiner:

"Finalmente, considérese el concepto de una serie de Taylor, o sea, la expansión de una función como una serie de potencias ... esta idea matemática tiene gran uso en los cálculos: calculamos el valor de una función a cualquier grado deseado de aproximación calculando los valores del número apropiado de términos de la expansión. ... Las series de Taylor son tan útiles que los científicos las inventan cuando ni siquiera existen. Por ejemplo, pretenden que las constantes son variables y las "expanden" en potencias de la constante. (Éste es realmente el caso del formalismo guiando al científico, la cola moviendo al perro - ... .)"

"Considérese la carga fundamental del electrón, e. Los científicos encuentran inmensamente útil escribir expresiones como ésta:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) e^i$$

[Donde i es un índice, no la raíz de –1. Nota de JC] *derivada de pretender que la carga es una variable. Cada uno de los coeficientes es una función de x. Como e es conocido y suficientemente pequeño, la serie converge rápidamente, es decir, útilmente"*[p. 68].

***

Éste es quizá uno de los mejores ejemplos de cómo se da un manejo formal a las matemáticas *al ser usadas en la física.* Tampoco se cuestiona el que las series de Taylor proporcionan esquemas de cálculo eficientes. Lo que es necesario analizar no es si se usa o no, y cómo, en la física, sino si el concepto de serie de Taylor fue introducido o aceptado en el cuerpo de las matemáticas por su capacidad de generar esquemas de cálculo. ¿Se aceptó la idea de serie de Taylor porque era "conveniente" usarla para "expandir constantes", o fue la riqueza del concepto de serie de Taylor lo que acabó inspirando la idea de esa expansión?

Steiner continúa constatando que las series de Taylor han tenido otros usos formales en la física, como su uso para clasificar fenómenos[12] en fenómenos de primer orden, de segundo orden, etc., dependiendo de cuántos términos de la serie se utilicen [p. 69]. Pero en ninguna parte se presenta o comenta cómo fue que ese concepto tuvo su génesis matemática. Steiner documenta manejos formalistas de conceptos y métodos matemáticos de parte de algunos científicos. Esto es algo que coincide con mis experiencias[13] en el campo de la matemática aplicada, y que debe ser analizado. El problema radica en que eso no da claves para entender cómo es que la serie de Taylor llega a ser un concepto *matemático* y, por ello, no se proporcionan elementos que pudiesen justificar que la selección de conceptos en matemáticas se da por criterios antropocéntricos. Se está planteando un problema, el uso formal, cuando se debería hablar de otro, los criterios de selección de conceptos.

Steiner comenta entonces algo más de ese uso formal, concluyendo que usar la matemática en ese sentido es algo muy similar a lo que se concibe como "magia" [p. 72]: *"algunos de los más grandes descubrimientos de nuestro siglo fueron hechos estudiando las simetrías de notación. Esperar que esto tuviera algún uso es como esperar que funcione [la] magia".*

Enseguida afirma que

---

[12] Aunque de manera estricta lo que se clasifica son aproximaciones de primer orden, segundo, etc.

[13] Que asumo representativas.

"... los físicos se condujeron como si el naturalismo fuera falso. Pero también afirmo que ellos tuvieron éxito al hacerlo".

Supongo que la manera en que esa conducta se manifiesta es al emplear ese tipo de "simetrías de notación"[14]. Esto implica que los físicos que hicieron uso de esas simetrías estaban más o menos conscientes de que usaban "algo" que iba en contra del naturalismo. O sea, "se condujeron como si el naturalismo fuera falso", ya que esperar que semejante estrategia funcionase sería tanto como "esperar que funcione la magia".

***

Conveniencia. Antes de concluir es adecuado analizar esta idea, que nos llevará a plantear una pregunta importante: ¿Cuál es la diferencia entre un concepto tal cual es y un concepto conveniente?

Steiner le está dando un significado de alguna manera diferente a lo que representa la "conveniencia". En el sentido usual en el idioma inglés se entiende por convenience, según *The new Webster Encyclopedic Dictionary*, edición de 1980:

Convenience, conveniency, ... , *n.*. The state or quality of being convenient; freedom from discomfort or trouble; ease; comfort; that which is suited to wants; opportune conjunction of affairs; opportunity.

Convenient, *a.* Suitable or proper; giving certain facilities or accommodation, commodious; opportune; at hand or readily available (*colloq.*).

Por ejemplo, si para ir a casa de un amigo hay dos caminos. El uno más corto, pero con más tránsito; el otro más largo, pero más tranquilo. Entonces puedo, según las circunstancias, optar por el que me sea más conveniente. Ésta no parece ser la interpretación de Steiner, quien dice que lo conveniente es aquello que nos permite superar más o menos una limitación. Como unas muletas, que si

[14] No queda claro que pudiesen ser esas "simetrías de *notación*". Parece ser que se están indicando similitudes entre las formas de denotar las cosas. Esto es especialmente delicado porque efectivamente ciertos descubrimientos físicos se llevaron a cabo estudiando simetrías, incluidas simetrías de "rotaciones", la rotación como operación que define un grupo.

bien no resuelven el problema de manera perfecta, permiten caminar a quien de otra manera no podría hacerlo de manera autónoma. Además esas muletas están hechas para que sean seres humanos sus usuarios y no son adecuadas para otras especies. Son "convenientes" para nosotros. Es pensable que haya una especie más inteligente que nosotros, y que además tenga un medio de propulsión tan eficiente que hiciera innecesario todo posible uso de una muleta. Por ello jamás surge entre los miembros de esa especie el concepto de "muleta". Por desgracia, ese concepto hubiese sido parte indispensable de la llave que permitiría acceder a un conocimiento de un área fundamental de la física. Ante esa carencia esta especie no puede tener ese acceso. Según esta concepción, algunos conceptos habrían entrado en las matemáticas como conceptos-muleta.

Pero, ¿Cómo reconocerlos? ¿Cómo saber con precisión cuál fue el camino desde la necesidad de cálculo a la selección o creación de un concepto? ¿Cómo decidir si las series de Taylor fueron introducidas para resolver un problema de cálculo, o ya estaban ahí, como los tensores, cuando surgió esa necesidad? En cada caso es necesario indagar por el origen del concepto. Steiner no ofrece evidencia histórica. En ninguno de los ejemplos se puede constatar que su origen haya estado ligado de manera fundamental a necesidades de cálculo, aunque sí han sido casos muy útiles para calcular en la física. La excepción podría ser el concepto de número imaginario.

Podría parecer que los números imaginarios surgen de la 'necesidad' de obtener la raíz de números negativos. Obtener esa raíz, sin embargo, no era preocupación de aquellos que la necesitaran en sus cálculos, sino "necesidad"[15] conceptual de generalizar esa operación a todo el ámbito de los números reales. El mismo Steiner lo señala: "Before the nineteenth century, these [the imaginary numbers] had little use in physics. Then complex-valued functions exponential functions replaced trigonometric functions in describing waves, exponentials being easier to calculate with" [p. 67]. Por lo tanto, esas funciones exponenciales ya estaban ahí antes de ser usadas en cálculos físicos. Euler empezó sus indagaciones al

[15] Si es que esta palabra es correcta en este contexto.

respecto en el siglo XVIII. Esto no excluye que haya habido interés y retroalimentación de parte de las ciencias físicas, lo que dio impulsos positivos al desarrollo de las funciones de variable compleja en general. Pero lo que se ve es una compleja red de interrelaciones donde las necesidades de cálculo seguramente tuvieron cierta presencia, pero que no fueron determinantes en ningún momento.

***

Hay otro punto que no considera Steiner. Si nada más hay *una* manera de hacer algo, tengo que hacerlo así, me sea conveniente o no; lo debo hacer de esa manera me sea inconfortable, inoportuno o no adecuado a mis deseos. Sólo donde hay diferentes maneras equivalentes de llevar a cabo algo hay conveniencia y no necesidad. Inclusive en casos donde hay varias opciones no todas ellas son equivalentes. Puesta, por ejemplo, una persona que carezca de un pie a elegir entre una pata de palo o una de las más modernas prótesis, tenderá a escoger esta última, pues es la que mejor le permite superar su limitación. ¿Cuál es entonces el punto específico de Steiner?

Lo adecuado parecería ser el uso del concepto de prótesis, que cubriría tanto la superación de la limitación como lo de ser algo específico de la especie que lo genera. El uso del concepto de conveniencia parece ser que indica el deseo de Steiner de subrayar que, dentro de la limitación, hay posibilidades de elección. Pero, ¿cómo proceder a la evaluación de un concepto que estoy escogiendo entre otros para realizar un cálculo que no sé cómo llevar a cabo? ¿En qué sentido es conveniente usar los números imaginarios y no alguna otra posibilidad? ¿Cuáles otras posibilidades?

Sobre todo, ¿cómo se distingue entre un concepto que es un artificio de cálculo y otro que no lo es? ¿Por qué aparecerían los números imaginarios como artificio y no los espacios de Hilbert o las geometrías no euclidianas?

***

Dado que en ninguna otra parte posterior del libro se vuelve a argumentar a favor del antropocentrismo de las matemáticas, esta cita cierra esa argumentación y a partir de ellas se asume ese antropocentrismo como suficientemente justificado. Tan es así que en esa misma página aclara que una tesis como esta si bien puede causar dificultades al naturalismo, no puede refutarlo, pues el naturalismo no es a fin de cuentas otra cosa que una "creencia" que "descarta a priori cualquier conexión entre el cerebro humano y el universo en su conjunto, excepto aquellas de las que puede dar cuenta la selección natural".

Esto implica que tras la presentación que se ha hecho en [Steiner] hasta la página 72, el autor opina que la única manera de no aceptar la tesis del antropocentrismo en matemáticas es acudir a "creencias básicas" (background beliefs). O lo que sería lo mismo, la argumentación se asume tan convincente que un naturalista no tendría otra cosa que objetar que la confrontación con sus creencias básicas.

El análisis llevado a cabo en estas páginas indica, sin embargo, que la argumentación presentada adolece de debilidades, entre ellas es cuestionable que varias de las más relevantes razones empleadas sean pertinentes para sustentar las tesis específicas de que se supone dan cuenta. Se acaba de ver un ejemplo. En vez de sustentarse la tesis de la conveniencia de cálculo como criterio de selección *en matemáticas* se plantea el problema de la manera en que ciertos conceptos y métodos son aplicados *en la física*.

Por otro lado, Steiner es expresamente consciente de que es la conducta del científico en su quehacer específico lo que permite caracterizar ese quehacer, y no lo que los científicos dicen sobre ello. Tan es así que en el caso de la física le da un peso considerable al análisis detallado de ejemplos históricos característicos. Ese análisis, por otra parte, falta totalmente en el caso de la sustentación de la predominancia del criterio estético en la selección de conceptos matemáticos, basándose la justificación en citas de lo que dos matemáticos ilustres, Hardy y Von Neumann, dijeron sobre su actividad, más la afirmación de que habría un consenso en la comunidad matemática acerca de la gran importancia del factor estético en la práctica de esa ciencia.

También presenté casos históricos bien conocidos, que se profundizan en la siguiente subsección, en los cuales podría indagarse sobre la manera en que ese factor estético ha influido en la práctica de los matemáticos. No se encuentra evidencia de que tuviera un peso decisivo.

A lo largo de la exposición de Steiner hay varios conceptos no adecuadamente definidos y varias implicaciones cuyas consecuencias deberían haber sido exploradas.

Los aspectos señalados le permitirían a un naturalista plantear objeciones serias a la argumentación de acuerdo a criterios racionales, en especial lógicos, sin necesidad de tener que acudir a la creencia o no en algunas afirmaciones básicas.

Steiner dice que "los físicos se condujeron como si el naturalismo fuera falso. Pero también afirmo que ellos tuvieron éxito al hacerlo". Esto implica que para él los científicos tienen un grado elevado de conciencia de que el universo es antropocéntrico. Por lo tanto buscan criterios antropocéntricos como guía para sus acciones. Dado que esos científicos tendrían un grado elevado de conciencia de que las matemáticas son una actividad globalmente antropocéntrica, esa característica los llevaría a usar criterios matemáticos como guía. Esto además los lleva con alta frecuencia al éxito. Sin embargo, su discurso seguía siendo naturalista. La imagen de los físicos, en especial de algunos de los más destacados entre ellos, como un grupo de personas altamente inteligentes pero incapaces de expresar su profunda convicción de que las matemáticas son antropocéntricas, llegando inclusive a afirmar precisamente lo contrario, es perturbadora.

Sería incomprensible esa insistencia en negar un conocimiento que se ve confirmado. Pero esto quizá fuese irrelevante, pues el problema no es la reacción de los científicos a una situación, sino "constatar un hecho". Si se pudiera constatar que las matemáticas se utilizan porque los científicos asumen que son antropocéntricas, se habría dado un paso hacia una justificación adecuada de que efectivamente lo son. Steiner afirma que así es, pero no proporciona sustento a esa afirmación. Parecería más fácil encontrar sustento a una tesis opuesta, según la cual los científicos usarían las matemáticas precisamente por su racionalidad[16].

Subsección 6. Ejemplos.

Pocas historias han sido contadas tantas veces en la historia de las matemáticas como el nacimiento y desarrollo del cálculo diferencial (e integral). A su vez pocas historias han sido contadas con tan poco énfasis como el surgimiento del álgebra lineal y del concepto de vector. Sin embargo, un denominador común en ambos casos es una fuerte visión teleológica de ese desarrollo de parte de los historiadores. Boyer y Crowe, [Boyer], [Crowe], se dan a la tarea de tratar de entender ese desarrollo desde dentro mismo, sujeto a sus propias restricciones y con visión que no implica una valorización o direccionamiento desde las concepciones actuales. El erudito pesimismo de Kline en su libro ya clásico, *Mathematics, the end of certainty*, [Kline], resulta también útil para dejar de lado la idea de un desarrollo secuencial y acumulativo[17]. Boyer y Crowe hacen historia, Kline trata de defender una tesis, y en ese sentido está más cerca de un planteamiento filosófico. Ninguno de los tres plantea una interpretación en el sentido que aquí se ha analizado.

Se ha discutido bastante la contribución de las necesidades de la física al surgimiento, ya fuese como descubrimiento o invención, del cálculo diferencial y de los espacios vectoriales. Esa aportación es innegable, lo que podría ser discutido por Steiner es su importancia relativa. Las necesidades de la mecánica clásica en el primer caso y del electromagnetismo en el segundo dieron impulso a los desarrollos matemáticos, al grado de que al menos en el primer caso el desarrollo físico y el surgimiento de los conceptos matemáticos están fuertemente entrelazados. Éste no fue el caso de la mecánica cuántica. La teoría de matrices, los espacios de Hilbert, las lógicas multivaluadas ya estaban ahí (aunque tal vez no totalmente en lo que pudiese ser un pleno estado de madurez) cuando los

[16] Siendo ésta una manera de mantenerse dentro de lo objetivo y lo científico.
[17] En un uso metafórico bien podría decirse que la historia de las matemáticas ha recibido de manera preferencial un enfoque "lineal".

físicos las necesitaron. Un punto al que Steiner llama la atención es que en casos relevantes ya se disponía de los conceptos matemáticos adecuados.

En este momento de la discusión, sin embargo, lo que se analiza no es la aplicación o aplicaciones, sino cuál pudo haber sido la contribución del factor estético, de las "preferencias" de los matemáticos en diversas circunstancias.

Infinitesimales vs. límites.

Ya Cavalieri, en desarrollos previos a los de Newton y Leibniz, junto con muchos otros, había dado pasos fundamentales en el camino que condujo al cálculo diferencial[18]. En él es notorio el uso del concepto de "indivisible", tomado directamente de la traducción al latín de la palabra griega "átomo". La idea es que los indivisibles forman un todo en analogía a como las hojas de papel forman un libro, con la diferencia de ser "infinitamente pequeños".

Leibniz, aun con conciencia de las dificultades que entrañaba semejante concepto, influye de manera fundamental para que "cantidades infinitamente pequeñas" adquieran carta de naturaleza en el pensamiento y explicaciones matemáticos. Un infinitesimal es una magnitud "infinitamente pequeña" pero que no es cero, aunque prácticamente no sea "nada" en tanto que magnitud. Son esos "fantasmas de cantidades desaparecidas" de los que hablaba Berkeley.

La principal propiedad de los infinitesimales era la posibilidad de expresar la razón de dos infinitesimales por medio de un número real. Si bien un infinitesimal no es un número real, su relación como razón con otro era factible de ser obtenida. La razón de uno y otro infinitesimal se podía expresar de manera análoga a una razón entre dos cantidades, como una división: $\frac{\xi}{\zeta}$. No se sabía lo que era el infinitesimal ξ u otro infinitesimal, ζ, pero sí podía decirse que ξ era c-veces mayor que ζ sí $c = \frac{\xi}{\zeta}$.

[18] Se deja de lado el cálculo integral, que por mucho tiempo fue considerado casi exclusivamente como un cálculo inverso al diferencial.

Un caso especial merece un nombre aparte. Un diferencial es una diferencia cuyo resultado es precisamente un infinitesimal. Esas diferencias aparecían al incrementar razones en infinitesimales. Se le da, por ejemplo, el incremento infinitesimal ξ a la variable x y se obtiene *(x+ξ)*. La diferencia entre el valor original y el incrementado es del tipo *dx = [(x+ξ) −x]* y es, por lo tanto, infinitesimal. Lo mismo al incrementarse aquello, *y*, que dependía de *x*, *dy= [y(x+ξ) −y(x)]*. La inmadurez del concepto de función impedía además presentar estas ideas con algo de mayor claridad. La derivada quedaba entonces determinada por la razón de esos dos infinitesimales, $\frac{dy}{dx}$.

Un ejemplo concreto puede ayudar a entender tanto las ventajas como los problemas del concepto de infinitesimal. Si se tiene una variable y su incremento infinitesimal, *(x + dx)*, es factible elevarla a una potencia, por ejemplo al cuadrado, y operar formalmente para obtener:

$$(x+dx)^2 = x^2 + 2xdx + d^2x.$$

Esto podría implicar que se sabe lo que significa multiplicar una variable real con una variable infinitesimal, sumarlos, multiplicar un infinitesimal con otro. Pero no, el procedimiento es puramente formal. La idea es proseguir las manipulaciones de manera formal hasta eliminar los infinitesimales, como se muestra en el procedimiento para encontrar una derivada.

Supongamos que se quiere obtener la derivada de $f(x) = x^2$, para ello se incrementa *x* infinitesimalmente y se evalúa *f* en ese "valor", *f(x+dx)*. Lo que se compara con la función evaluada en *x*, *f(x)*: *f(x+dx) − f(x)*, y se obtiene su razón con respecto a la diferencia entre la variable incrementada y sin incrementar, *((x+dx) − x)*:

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{(x+dx)-x}$$

Sustituyendo se obtiene

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{(x+dx)-x}=\frac{(x+dx)^2-x^2}{x+dx-x}$$

Expandiendo el término de arriba y eliminando *x* de abajo:

$$\frac{(x+dx)^2-x^2}{x+dx-x}=\frac{(x^2+2xdx+d^2x)-x^2}{dx}=\frac{2xdx+d^2x}{dx}$$

Donde en el denominador se quitaron los paréntesis y se elimino x^2 con $-x^2$. En el numerador se puede factorizar *dx*, y dividirlo entre el *dx* del denominador, lo que da uno, ya que eso sí se sabe de los infinitesimales, su razón puede ser expresada por un número real, y la misma cantidad entre la misma cantidad, infinitesimal o no, da uno:

$$\frac{dx(2x+dx))}{dx}=\frac{dx}{dx}(2x+dx)=1\cdot(2x+dx)=2x+dx\,.$$

Los infinitesimales son infinitamente pequeños, por lo que comparados con cualquier número real son negligibles. El resultado de las manipulaciones es *2x*, que es la derivada correcta.

Hay sólo una manera de evaluar una operación entre infinitesimales, su razón. Los demás aspectos son puramente formales. Hoy en día diríamos que este manejo es, dentro de lo formal, *simbólico*.

En gran cantidad de casos este tipo de manipulaciones guiadas por la regla heurística: "Introdúzcanse infinitesimales y elimínense usando manipulaciones simbólicas", dan el resultado correcto, y en los demás casos simplemente no llegan a la meta, pero no producen resultados incorrectos, si las manipulaciones son llevadas a cabo correctamente. A pesar de ello, debido a su ambigüedad, el concepto de infinitesimal conduce indirectamente a errores, el más problemático el de confundir la cadena de símbolos $\frac{dy}{dx}$ con una división.

El infinitesimal no es un concepto totalmente incorrecto, incluso puede llegar a ser correcta y rigurosamente definido, como el desarrollo del análisis no estándar ha mostrado. Tanto como elemento explicativo como operativo hubo éxitos importantes apoyados en el uso de este concepto. Sobre todo su eficacia reforzaba la idea de que la explicación del éxito del cálculo diferencial podía encontrarse al menos en parte en objetos matemáticos como el de infinitesimal y el de diferencial. La falta de claridad de esos conceptos lleva a Kline a hablar de "el desarrollo ilógico de un sujeto lógico" [Kline, cap. V].

La física a su vez adoptó varias de esas ideas. El método de incrementos infinitamente pequeños pasó a ser utilizado en sus reflexiones teóricas, lo que se refleja por ejemplo en el nombre de un famoso teorema. El *teorema del trabajo virtual*. El trabajo es "virtual" porque se realiza sobre una distancia infinitesimal.

***

Por otro lado, el concepto de límite, heredero también de los métodos de exhaustión de los griegos, ya estaba suficientemente claro, y a finales del siglo XVIII varios matemáticos de renombre, en especial D'Alembert, llamaron la atención hacia él, sin poder aplicarlo con la generalidad requerida para fundamentar el cálculo. Es Cauchy en la primera mitad del siglo XIX quien, aprovechando la precisión alcanzada en el concepto de función puede al fin dar al cálculo el rigor que hoy en día se considera una de sus mayores virtudes. El concepto de límite proporciona la base fundamental de esa nueva estructura, dando un cambio del *objeto*, el infinitesimal, hacia el *proceso*, el límite.

No se da una confrontación directa entre los dos conceptos, sino que el de límite, ya integrado en una estructura general, hace superfluo el de infinitesimal, que desaparece de la teoría. En este caso su desaparición es radical, no queda una teoría aparte de infinitesimales[19], como en el caso de las nuevas geometrías, sino que se prescinde del concepto, y su continuidad se da solamente en áreas aledañas, como en algunos planteamientos físicos, o en desarrollos muy posteriores y que no inclinan la balanza a su favor.

La motivación de los desarrollos que culminan con Cauchy es la necesidad de incrementar cualitativa y cuantitativamente el rigor en matemáticas. En este caso

[19] Eso apenas ha sido desarrollado en el siglo XX. La influencia de esas ideas ha sido reducida.

concuerdan la práctica y la reflexión sobre ella. La búsqueda del rigor era una meta clara y consciente, y efectivamente se dieron pasos de gran significado en ese sentido. El rigor no podía alcanzarse usando como concepto básico el de infinitesimal. El aumento en las exigencias y en las posibilidades de satisfacer esas exigencias es constatable. Incluso en obras posteriores de Cauchy, que no están a la altura de los estándares que él mismo había consolidado [Kline, p. 176]. El rigor se convierte en un criterio de selección de conceptos.

¿Interviene en este caso el factor estético? Cauchy no parece haberse manifestado al respecto, ni otros partidarios del concepto de límite, como Wallis, Gregory o D'Alembert. El desarrollo del trabajo de Cauchy muestra con claridad que el rigor se va buscando y encontrando, lo que las palabras de Cauchy confirman. Si una motivación como el atractivo estético del concepto hubiese sido al menos tan importante como la del rigor, fuese extraño que no hubiese quedado reflejada en su obra y reflexión. Pero, podría alegarse, quizá el rigor no sea más que una manifestación particular de lo estético, al menos en esta ciencia. Es difícil concebir argumentos adecuados que defendiesen esa tesis. Se podría aceptar que una demostración rigurosa será casi sin excepción considerada más elegante que otra que lo sea menos. Pero el concepto de derivada ejerció una inmensa fascinación por casi dos siglos antes de poder ser definido de manera rigurosa. Tal fascinación no está exenta de aspectos estéticos que no tenían nada que ver con exigencias de rigor, tal como hoy se concibe.

En unos pocos casos inclusive la formulación rigurosa es poco elegante, como las técnicas ε - δ de los límites, aunque en ciertos casos particulares se hayan dado maneras elegantes de establecer esa relación. Kline lo afirma más en general. "Rigourous thinking can be an obstacle to creativity" [Kline, p. 176]. En caso de tener que optar por uno u otra, lo estético tendría ciertamente más que ver con la creatividad que con el rigor.

Cuaterniones vs. Vectores.

Esta es una historia a la que se le ha brindado poca atención, tanto por su mayor grado de especialidad como por no haber estado en el centro de una revolución científica como la newtoniana. Su trascendencia, sin embargo, apenas está ligeramente atrás de la del cálculo diferencial. Una física sin vectores es hoy prácticamente inimaginable.

Es una historia entrelazada con el desarrollo de la física, como la del cálculo diferencial. Varios de sus principales protagonistas fueron físicos. Quizá Steiner pudiese objetar este desarrollo por eso, alegando que quienes decidieron la aceptación de un concepto y su preponderancia sobre otro no eran todos matemáticos. Esto es disputable. Por más que Hamilton haya sido un gran físico es también por derecho propio un matemático. A pesar de presentar ejemplos físicos, Grassmann es ante todo matemático en sus desarrollos, por no mencionar más que a dos de los protagonistas. A quienes desarrollan los espacios vectoriales no se les puede negar ser matemáticos, aunque no lo sean de tiempo completo. De hacerlo habría que negarle también la calidad de matemático a Leibniz, por ejemplo.

Steiner podría plantear que no es adecuado ubicar esta controversia dentro de un análisis del factor estético. Éste podría ser un buen ejemplo de un concepto, el de vector, que fue seleccionado por su conveniencia de cálculo. En efecto, hay ciertos cálculos (no todos) que son más cómodos con vectores, sin embargo, las motivaciones que llevaron al desarrollo del álgebra lineal eran de índole conceptual, inclusive en sus aspectos físicos.

Hay al menos tres maneras de entender el problema que estaba atrás de la búsqueda o invención de un nuevo tipo de concepto. Por un lado se tenía la necesidad de caracterizar ciertas entidades físicas que no podían seguir siendo expresadas usando funciones escalares, que toman valores en los reales o los complejos. Sobre todo habiéndose dado el paso a dos y tres dimensiones geométricas. El concepto de velocidad es el ejemplo por excelencia; hoy se dice que la velocidad es un campo vectorial, ¿qué se podía decir de no tener un concepto como el de vector?. Se tenía también el problema de representar los giros espaciales con un concepto equivalente al de los números complejos, que permiten representar las rotaciones del plano.

Además se deseaba generalizar a una tercera dimensión la idea de número. Esta idea no debe entenderse en el sentido en que los números racionales son una generalización de los enteros, y estos de los naturales. Dejando de lado cómo se haya llegado a esos conjuntos, hay dos características que unen a los reales con los complejos. En primer lugar los reales son isomorfos a un subconjunto de los complejos, son a fin de cuentas parte de lo mismo, los números. En segundo poseen una estructura algebraica muy útil y rica, la de campo. La búsqueda que obsesionó a Hamilton y a muchos otros fue la búsqueda de nuevos "números" que pudiesen ser tanto sumados como multiplicados. Se buscaba el eslabón tridimensional de la cadena que comienza con los reales y continúa con los complejos.

Un campo es una estructura que conjuga dos estructuras de grupo por medio de una ley distributiva. El ejemplo clásico es el de los números racionales (o los reales) que tienen una estructura de grupo con respecto a la suma, otra con respecto a la multiplicación y están relacionadas mediante la ley aritmética de distribución. En el conjunto de números complejos se definen una suma y una multiplicación, se demuestra la ley distributiva. Debería haber entonces ciertos "números" tridimensionales que pudiesen formar un campo.

Hamilton utilizó la representación de los números complejos como pares de números reales:

$$(a,b) = a + ib$$

(Donde el signo "=" debe entenderse como relación de equivalencia). De esta manera se puede prescindir del signo $i = \sqrt{-1}$, y con ello también de toda alusión a conceptos que no fueran referidos a los números reales. Si el proceso había sido generar un número complejo usando un par de números reales, bien podían definirse unos nuevos "números" usando un par de números complejos:

$$((a,b),(c,d)) = a + ib + jc + kd\,,$$

Donde ... etc. En el conjunto de esos números se puede definir una suma y una multiplicación, y relacionarlas por una ley distributiva. Un primer aspecto novedoso fue la no-conmutatividad de la multiplicación, lo que abría nuevas fronteras. Además, los cuaterniones cumplieron con dar una representación de las rotaciones tridimensionales tridimensionales[20]. Técnicamente, se tiene un isomorfismo entre O(3) y SU(2).

Pero no respondían de la misma manera a otras necesidades de los físicos, no quedaba claro cómo usar variables con valor en los cuaterniones que representasen otros aspectos físicos. Los cuaterniones resultaban confusos al momento de representar variables tridimensionales. Los vectores por su parte no permiten representar rotaciones directamente, sino que las rotaciones se entienden como la acción de operadores sobre los vectores. No forman un campo, sino un espacio vectorial en el que no se puede encontrar una estructura de grupo multiplicativo compatible con la de la suma. Aun en el caso bidimensional, donde es posible definir una multiplicación, el producto cruz, no se puede conjuntar con la suma para generar una estructura de campo. Otros productos no son verdaderas multiplicaciones. El producto interno, por ejemplo, da como resultado no un vector, sino un escalar.

En este sentido los vectores no son lo que Hamilton y sus contemporáneos buscaban. Más que nada porque no forman una estructura de campo. Por lo tanto no queda claro si pueden identificarse con el concepto de "número". En algunas aplicaciones físicas la falta de una verdadera multiplicación de vectores se deja sentir, en especial en electromagnetismo. A pesar de ello su capacidad de representar adecuadamente aspectos relacionados con la dimensión del espacio, como valor de variables, etc., los fueron haciendo cada vez más aceptados. De hecho fue gracias a este concepto que quedó claro lo que es la dimensión[21].

---

[20] Esos giros permiten describir adecuadamente ciertos aspectos de la cinemática de robots, por lo que los cuaterniones han hecho un "comeback" a las matemáticas aplicadas.

[21] Hay aquí otro punto de interés para quien piense que la matemática es constitutiva de nuestra experiencia. Como ya se comentó, en ciertas culturas la cantidad de elementos informativos básicos difiere, como la orientación en un plano por medio de las cuatro (y no dos) direcciones, norte sur, este, oeste. Pudiese ser que en nuestra cultura la dimensión sea como es por haberse dado como predominante el concepto de álgebra lineal. Tal vez otro concepto matemático hubiese dado otra percepción de la dimensión, como los cuaterniones.

En oposición a los infinitesimales, los cuaterniones siguieron siendo una parte respetable, si bien secundaria, de las matemáticas, mientras que el concepto de vector se expandió en muchas de sus principales ramas, y es hoy en día parte constitutiva de ellas. Una pregunta decisiva, *dentro de la física*, era: ¿Cuál de los dos conceptos en disputa era más adecuado a las necesidades de la teoría electromagnética? Junto con la necesidad matemática de un concepto adecuado para representaciones tridimensionales. En esta disputa se llegó inclusive a argumentar que los cuaterniones eran un concepto estéticamente más satisfactorio [Crowe].

La lucha por la selección de un concepto algebraico entre dos opciones, los cuaterniones y los vectores, se dio tanto por medio de la palabra como en la práctica real de la física y las matemáticas. La intensidad tanto de la discusión como de la investigación efectiva que se llevaba a cabo permite afirmar que si el factor estético hubiese estado consciente de su lado los partidarios de los vectores lo hubiesen invocado con seguridad como argumento, cuanto más si hubiese sido el principal criterio de selección. Lo mismo hubiesen hecho los partidarios de los cuaterniones, los que aun esgrimiendo ese factor, no le dieron peso decisivo.

En este caso no debe confundirse lo "útil" de un concepto con la conveniencia de cálculo que pudiese ofrecer. El concepto de vector es útil en primera línea porque da una respuesta a necesidades conceptuales, y no sólo a las de los matemáticos, sino también a las de los físicos. No se niega que quizá en gran parte sea más eficiente usar vectores que cuaterniones en los cálculos; los cuaterniones tienen también "ventajas". Para llevar a cabo los cálculos relacionados con representaciones de giros en el espacio los cuaterniones son más eficientes que los vectores. Esto llevó a se empleo en la mecánica cuántica, como "cálculo espinorial", donde han tenido gran auge. La conveniencia de cálculo no pudo haber sido el factor decisivo en la selección de uno u otro concepto, sino su adecuación conceptual en uno y en otro ámbito, sin negar que tanto un concepto como el otro son muy útiles para calcular.

***

Los dos ejemplos analizados son los más notorios casos en la historia de las matemáticas modernas de conceptos en confrontación. Ni en uno ni en otro fue predominante en la selección el factor estético. Ninguno de los dos casos es secundario, ambos son conceptos fundamentales para las matemáticas modernas. Un análisis profundo desde los puntos de vista planteados en estas páginas daría, con seguridad, claves importantes para entender el surgimiento de los conceptos matemáticos y los criterios de permanencia y selección. Para la presente discusión baste con la constatación hecha: En ningún caso hay evidencia de que el factor estético haya sido el criterio básico de selección, mientras que son documentables como criterios de selección al menos el *rigor* y la utilidad *conceptual*.

Geometrías no euclidianas.

Este es un concepto con una larga historia, pero cuya incorporación a las matemáticas se da en un momento concreto, y los actores son conocidos. Bolyai, Lobachetvski y, de una manera especial, Gauss.

La introducción de las geometrías no euclidianas no sólo abrió un amplio campo de investigación, sino que mostró con claridad una técnica para introducir conceptos contradictorios. Se mantienen separados los ámbitos correspondientes, las geometrías no euclidianas no acabaron con la euclidiana, ni la previa existencia de ésta impidió (al menos a partir de cierto momento) que aparecieran aquellas.

Si fuera factible mostrar que Lobachetvski y Boylai tenían una fuerte predilección estética por esas nuevas geometrías, entonces sería un gran punto a favor de Steiner, ya que esas preferencias estéticas prevalecen aun a pesar de dificultades lógicas importantes. Sin embargo, hay consenso entre los estudiosos que la motivación principal era investigar hasta donde se podía llegar sin el famoso quinto postulado.

En cuanto a Gauss las cosas no son tan claras. Más tarde afirmó que él también había avanzado en el estudio de esas nuevas geometrías, pero su contribución fundamental fue el peso de su enorme prestigio en la aceptación de ellas. Sería útil analizar si fue su gusto, su preferencia estética, la que le impidió hacer públicos sus estudios, o fueron consideraciones de otra índole.

Sección 3. Conclusiones.

En oposición a lo que afirma Steiner, no hace falta recurrir a creencias básicas, por definición prácticamente irrefutables, para plantear serias dudas lógicas, con respecto a la tesis del antropocentrismo en matemáticas y la justificación que ofrece. No se da una exposición con la suficiente fuerza argumentativa como para que un naturalista tuviese que recurrir a sus creencias básicas para justificar el mantenerse en su postura.

Quizá la dificultad radica en que es Steiner el que está recurriendo a sus creencias básicas y a mostrar la congruencia de esa posición con una cierta interpretación de algunos procederes científicos, en especial manejos formales de analogías matemáticas.

Dado que esa congruencia sólo se da en términos de una interpretación que la presupone, lo que el autor hace es confrontarnos con su creencia básica del antropocentrismo de las matemáticas. Sin embargo algunos de los argumentos que presenta carecen de base conceptual fuera del sistema[22] que sustentan.

Es por todo ello que los sustentantes de la tesis del naturalismo no tienen por qué verse obligados a recurrir a principios (background beliefs) ante el reto que presenta Steiner. No se han presentado de su parte deducciones sustentadas en premisas con una gran fuerza lógica, ni para el caso de la preponderancia de los criterios estéticos ni para los de "conveniencia" de cálculo.

Steiner es claro en una cuestión: somos privilegiados en nuestra incapacidad. Ante ello la reflexión sobre estos aspectos de la historia de las matemáticas y sobre su desempeño actual pone manifiesto una gran capacidad creativa, una interacción profunda entre las matemáticas y las otras ciencias, sobre todo con la

[22] Debo la frase a Marcuse [Marcuse], sin comprometerme con sus tesis.

física. Esta interacción no indica que ella sea la única fuente de desarrollos conceptuales en las matemáticas, indica más bien que hay una multiplicidad de factores que intervienen en esos desarrollos, en un complejo determinado en momentos por aspectos puramente internos a las matemáticas, en otros por esa interacción "hacia fuera", con todas las proporciones pensables en medio.

El análisis de esta situación puede ser a su vez sumamente complejo, sin que ello implique la necesidad de introducir factores extra-objetivos. Para apoyar las tesis planteadas y mostrar al menos un atisbo de esa complejidad he escogido desarrollar un ejemplo fundamental para Steiner: los espacios de Hilbert y su aplicación en la mecánica cuántica.

Capítulo 4

Capítulo 4. Matemáticas y formalismo en la física

Introducción.

Este capítulo tiene como objetivo principal analizar algunos aspectos de un caso concreto: El papel de las matemáticas en la física cuántica. La idea es mostrar en un ejemplo significativo que en un análisis orientado por las ideas que se han ido desarrollando en los capítulos precedentes el "misterio" de la aplicabilidad de las matemáticas, tal como Steiner lo plantea, es disipable. Por ello es necesario discutir de una manera más específica en qué consiste ese misterio en este caso, tarea de esta introducción. A lo largo de este planteamiento surgen varios problemas, como la cuestión acerca de lo que pudiese ser la "forma" de un ente matemático, que hacen necesarias un par de aparentes digresiones.

Este capítulo es el que maneja más aspectos técnicos. ¿No podría tal vez reducirse ese nivel técnico y analizarse casos más sencillos? De hecho, el misterio pudiese comenzar mucho antes, por ejemplo con las aplicaciones de la aritmética básica. Por dos razones se ha optado por permanecer en un nivel más elevado. Primero porque es de donde parte Steiner. Segundo por nuestras propias predilecciones y porque el ejemplo de los espacios de Hilbert nos es bien conocido. De hecho, se coincide con quienes creen que debe aumentarse el campo de discusión sobre la matemática a áreas de mayor complejidad.

En la primera parte se procede a dar una breve introducción a la idea de espacio de Hilbert, para pasar a plantear, de manera esquemática, qué papel juega este concepto en la mecánica cuántica, y si en algún sentido es misterioso o no.

El análisis permite contrastar con la manera en que Steiner desarrolla sus ideas, quien presenta con detalle el desarrollo del trabajo y proceder de los físicos, mientras que en este trabajo se otorga un peso primordial a los conceptos matemáticos. Este contraste permite penetrar hasta el núcleo lógico del pensamiento de ese autor. A lo largo de los dos capítulos anteriores se ha mostrado cuál es la red de interrelaciones conceptuales y lógicas que brinda sustento a sus tesis principales. Hemos asumido que la argumentación se da en lo que pudiésemos llamar una discusión "clásica": a partir de las premisas se va elaborando una serie de cadenas deductivas cuya conclusión es la tesis del antropocentrismo de las matemáticas, para de ahí deducir, dado el éxito de estrategias matemáticas en la física, que el universo debe tener características también antropocéntricas.

De manera un tanto sorpresiva, esa construcción parece endeble. Es el análisis específico el que finalmente permite ubicar adecuadamente lo que el autor pretende, de lo cual nos ha dado además claves al usar palabras como "plausibilidad", "en mi opinión", etc. Además de lo que puede parecer incongruente, como plantear que lo importante es lo que el científico hace, y no lo que dice, siendo que de los matemáticos lo que le atañe son sus opiniones.

La visión cambia cuando queda claro que no es una argumentación "clásica" lo que pretende, sino que a fin de cuentas, en una postura radical, la tesis del antropocentrismo de las matemáticas queda como lo que es: un *principio*. No pretende, al menos implícitamente, dar una sustentación estricta de esa tesis, sino asumirla y darle plausibilidad, credibilidad. Steiner no pretende forzar en nosotros una conclusión que admitamos como necesaria[1], sino dar un contexto coherente en el cual, en su concepción, esa tesis puede funcionar como un principio. También es posible asumir que el autor puede tener en mente una especie de argumento a la mejor explicación, De estos aspectos se ocupa la última parte de este capítulo.

***

En [Steiner] no se niega que en casos particulares la aplicabilidad de las matemáticas sea "no misteriosa". Para él el misterio se da cuando una situación física o una analogía entre aspectos físicos es "inexpresable en ningún otro

---

[1] Aunque nos parece claro que para Steiner esa idea tiene una gran fuerza de convicción.

lenguaje que no sea el de las matemáticas puras" [p. 3]. Ese misterio se desvanece cuando donde es posible expresar condiciones "en lenguaje no matemático" para que una cierta propiedad física "tenga" una estructura matemática [p. 29, último párrafo]. Por ejemplo, al cotejar el concepto físico de la sobreposición con el de la linealidad se da la posibilidad de que la relación entre ambos sea tan "natural" que no haya "misterio". En general no lo hay ahí donde sea posible correlacionar una propiedad física con una matemática. La estrategia para disolver el misterio en casos particulares debería consistir en "hacer corresponder conceptos matemáticos con físicos"[2], lo que inclusive permite explicar la aplicabilidad de "conceptos matemáticos mucho más complejos"[3] que la linealidad [p. 32]. Inclusive se llega a mencionar la palabra "correspondencia" Ibíd., Último párrafo).

Ahora bien, no siempre es factible encontrar esa relación que permita darles un sentido físico a conceptos matemáticos. Un aspecto del misterio de la aplicabilidad de las matemáticas consiste en el "uso", la "aplicación" de conceptos sin correlato físico que, sin embargo, conducen a predicciones o manipulaciones correctas.

El misterio tiene ese otro aspecto que se ha mencionado: El proceder formal de los físicos para descubrir cuáles entidades matemáticas son las que proporcionan la descripción y los resultados[4] requeridos. En el texto que ha sido nuestro interlocutor se afirma que el antropocentrismo en matemáticas es especialmente patente ahí donde las analogías que condujeron a descubrimientos físicos (inclusive de gran importancia) están referidas a la "forma" de los sistemas matemáticos involucrados. .

Una analogía "puramente formal" en el sentido que se toma en [Steiner] es, por ejemplo, la de asumir que las ecuaciones que rigen el comportamiento mecánico en el ámbito cuántico tienen la misma "forma" que las ecuaciones que rigen algún

[2] "Matching mathematical to physical concepts".
[3] "Far more arcane mathematical concepts". Según la Enciclopedia Británica, "arcane" significa: "known or knowable only to the initiate: secrete ...; broadly:mysterious, obscure".
[4] Recordemos que para Steiner la pura descripción no basta, debe haber posibilidad de hacer predicciones. En esto se coincide con él.

fenómeno en el ámbito macroscópico. No hay, se dice, ninguna razón para afirmar que esto conduzca a algo correcto con mayor posibilidad que cualquier otra opción[5]. Ese proceso no se reduce a plantear la analogía, sino incluye "manipularla" de manera puramente sintáctica, lo que constituye el segundo aspecto del desarrollo formalista de la analogía (el primero la apelación a la "forma"). Asumir que una analogía matemática en este sentido (referido a su pura "forma" y manipulación sintáctica) pudiese dar la respuesta no es otra cosa que ... magia: "*Mostraré que los descubrimientos hechos de esta manera dependían de una manipulación simbólica que raya en lo mágico. Digo "mágico" porque el objeto de estudio de la física llegó a ser cada vez más el propio formalismo de la física, como si símbolos fueran realidad – y la confusión de símbolos con realidad es lo que caracteriza en gran medida aquello que llamamos magia*" [Steiner, p. 136, cursivas de JC].

La aplicación de los espacios de Hilbert a la mecánica cuántica participa de ambas formas del misterio: Por un lado es un concepto matemático que parece no tener "correlato físico", y sin embargo funciona adecuadamente. Por otro lado el uso de este tipo de espacios se puede interpretar también como una analogía, ya que los espacios de Hilbert están relacionados con los espacios que se usan en la física clásica, en donde en ocasiones también se usan espacios de Hilbert. Steiner, hay que decirlo, no estudia el caso de estas estructuras desde este último punto de vista, sino como misterio en el sentido de una aplicación no aclarada.

Primera Parte. Un ejemplo de analogía formal.

Steiner menciona que la forma de ecuaciones fundamentales de la mecánica cuántica se ha derivado de manera formal de ecuaciones clásicas, por medio del llamado proceso de "cuantización". Éste proceso representa lo que podemos llamar un "ejemplo paradigmático" de manipulaciones "formales" en la física. Además, es un caso que ha sido muy trabajado, por lo que han quedado ya claras

[5] Por ejemplo escoger de manera aleatoria ciertas ecuaciones.

sus ideas básicas y es posible, con un mínimo de requisitos, dar una presentación clara y escueta de él.

En una primera instancia quiero presentarlo de la manera más esquemática posible, a fin de poner de manifiesto precisamente los aspectos formales, y como parecería no haber un "correlato físico" de las manipulaciones formales involucradas. Ahora bien, a lo largo de este capítulo iremos viendo como este tipo de manipulaciones tienen un profundo significado físico y matemático. Aún más, daré elementos que permiten vislumbrar como es la interacción entre esas dos áreas del conocimiento lo que hace significativo el proceso.

Se podría ser sumamente radical al presentar el proceso de cuantización, y en vez de hablar de "sustituir variables por operadores" se podría simplemente indicar "sustitúyanse las p y q por los símbolos $\hat{p}$ y $\hat{q}$", etc. Esto, sin embargo, daría una fuerte impresión de extrañeza, por lo que he optado por un nivel "medio" de presentación formal, dejando para un poco mas adelante dar las definiciones requeridas con cierto rigor, como la de espacio de Hilbert. Pero invito al lector a llevar a cabo el ejercicio de presentar la cuantización de una manera radicalmente formal. El resultado sería un proceso que para un físico *carecería de significado.*

Por el momento basta con lo siguiente: Una variable numérica (o "variable" a secas) está denotada por una letra como a, p, q, A, E y puede tomar valores en los números reales o complejos. Un vector es un elemento de un espacio vectorial, como un espacio de Hilbert. En mecánica cuántica es usual usar la notación[6] de Dirac, en la cual esos vectores tienen la forma $|\varphi>$. Un operador es una función definida en el espacio de Hilbert con valores en ese mismo espacio[7].

***

Dado un cierto campo de estudio de la realidad, llamado "mecánica clásica", se sabe, por las razones que fueren, que el comportamiento de los objetos de estudio

[6] Para alguien no acostumbrado a esta notación tal vez sea conveniente sustituir el símbolo $|\varphi>$ por alguno más familiar.
[7] También se pueden definir operadores con valores en algún otro espacio.

está regido por leyes expresadas matemáticamente. Una de las fundamentales tiene la forma de un esquema del tipo

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{1}$$

Donde $H = H(p_i,q_i)$, i = 1, 2, ..., n, siendo n el número de grados de libertad del sistema. H es el *Hamiltoniano* del sistema. Las p_i son llamadas impulsos o momentos, las q_i representan coordenadas generalizadas. El punto encima de las p y q indica la derivada con respecto al tiempo.

Existe otro objeto de estudio, la mecánica cuántica, de la cual en principio no se conoce mucho más allá de su diferencia fundamental con la mecánica clásica. Se plantea, como hipótesis, que es posible caracterizar matemáticamente la mecánica cuántica. Esto, sin embargo, no implica que se pueda presuponer alguna forma específica de esa caracterización, o sea, todo sistema matemático[8] pensable sería en principio un candidato igualmente viable (como posibilidad) para proporcionar la forma de las leyes que rijan el comportamiento de los elementos o subsistemas de mecánica cuántica.

Sin embargo, sin ninguna justificación aparente, o con justificación sumamente endeble, se postula que la forma correcta de la caracterización de leyes de la mecánica cuántica puede derivarse de la forma de sistemas de la mecánica clásica como (1), sometiendo esos sistemas a manipulaciones sintácticas. Una de ellas es la de sustitución, que consiste básicamente en cambiar todas las apariciones de un símbolo o grupo de símbolos por otro símbolo o grupo de símbolos. Dada la importancia de esta operación no es superfluo dar una definición que permita apreciar con rigor *sus aspectos sintácticos*[9] su aplicabilidad

---

[8] Se pueden presuponer aspectos muy generales, como un cierto grado de continuidad, sin que la idea se altere de manera significativa.

[9] Al discutir este punto a lo largo del proceso de revisión del trabajo surgió en un cierto momento la duda de sí en el sistema formal (A, R, L, S) se pudiesen generar *todas* las fórmulas "válidas", y si ese proceso no estaría entonces en contradicción con el teorema de incompletitud de Gödel. Debo por ello recalcar que se está hablando de procesos meramente de manipulación de cadenas de símbolos, sin que se pretenda generar sistemas completos. La pregunta acerca de la "completitud" de los sistemas generados *no se plantea en este contexto*. Aquí una cadena es "válida" si es derivable de S y tiene el valor 1.

y su grado de generalidad, aunque la intuición usual detrás del concepto de "sustitución" captura de manera adecuada la idea.

Regla 1. Sea dado un sistema formal (A, R, L, S), donde A es un conjunto no vacío llamado "alfabeto" cuyos elementos se llaman "símbolos", R un conjunto de reglas de manipulación de concatenaciones de elementos de A; S es un subconjunto, también no vacío, de $\mathcal{A}$(A) (el conjunto de todas las concatenaciones de elementos de A), los elementos de $\mathcal{A}$(A) se llaman "cadenas de símbolos" o simplemente cadenas; L es una función de $\mathcal{A}$(A) en {0, 1} que le asigna el valor 1 a toda cadena derivable[10] de S mediante reglas de R y 0 a las demás. Las cadenas con valor 1 se llaman "cadenas o fórmulas válidas bajo el sistema de axiomas S". Cuando menos todos los elementos de S son fórmulas válidas[11]. En R existe una regla que dice que si F es una fórmula válida y F' es una fórmula obtenida a partir de F sustituyendo toda aparición de un símbolo determinado por la misma cadena válida, entonces F' es también una fórmula válida. El sistema formal se llama *regular* si existe al menos una fórmula (concatenación) con valor 0.[12]

Esta es la regla de sustitución *irrestricta*. En la práctica es usual definir como sustituibles sólo a los elementos de un subconjunto propio[13] de A. Esta es la regla 1' de sustitución restringida. Estas definiciones deben entenderse sólo como esquemas que permiten ubicar el problema de manera más precisa. No se pretende incursionar en otros aspectos.

---

[10] "Derivable" significa que existe una secuencia de fórmulas, cada una de las cuales se obtiene de la anterior mediante la aplicación de una regla. La fórmula derivada es la última de la secuencia.
[11] R incluye la regla: "A ✱ A".
[12] Esta última condición implica que si el sistema formal es interpretado en términos de alguna área de la ciencia, entonces existen fórmulas válidas cuya interpretación no corresponde a la realidad de esa área. Tanto para Steiner como para nosotros el conjunto de todas las fórmulas que pudiesen poder interpretarse en términos de esa área pero que no son verdaderas es muchísimo mayor que el de las fórmulas verdaderas en esa interpretación.
[13] Por ejemplo, en general los paréntesis no se sustituyen, aunque las fórmulas que se utilizan para sustituir sí los pueden incluir.

El formalismo que permite obtener leyes de la mecánica cuántica es por supuesto bastante elaborado. De una manera esquemática consiste en lo siguiente[14]:

Sustitúyase cada variable a por el operador $\hat{a}$ del espacio de Hilbert H en sí mismo.

Sustitúyase H por el operador funcional $\hat{H}$. Si H es la función $H(p, q)$ que toma valores numéricos, $\hat{H}(\hat{p},\hat{q})$ es una función que tiene como valores operadores de H en sí mismo.

Sustitúyase el paréntesis de Poisson $\{H,a\}$ por el conmutador $\left[\hat{H},\hat{a}\right]$ multiplicado por el factor $(i\hbar)^{-1}$. Por ejemplo, dado

$$\frac{dA}{dt} = \{H,A\}, \text{ se obtiene } \frac{d\hat{A}}{dt} = (i\hbar)^{-1}\left[\hat{H},\hat{A}\right].$$

Un caso concreto de este proceso es el formalismo que permite derivar la ecuación de Schrödinger.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi\rangle = \hat{H}(\hat{p},\hat{q})|\varphi\rangle \qquad (2)$$

En el caso clásico, “para una partícula de masa m en un campo de fuerza

$K = -gradU$, con potencial $\boldsymbol{U}$,

la ecuación de movimiento de Newton es

$m\ddot{x} = K$.

La energía $\boldsymbol{E}$ del movimiento está dada por

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x), \qquad (3)$$

donde $p = m\dot{x}$ denota el impulso” [Teubner, p. 528].

---

[14] Agradezco al Dr. Shahen Hacyan sus acertadas explicaciones que me permitieron plantear con precisión este proceso.

Ahora se establece el esquema de cuantización para este caso: "La ecuación de Schödinger (2), que fue formulada por Schrödinger en 1926, se obtiene a partir de la fórmula clásica de la energía, al llevar a cabo ahí la sustitución

$$E \Leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad p \Leftrightarrow \frac{\hbar}{i}grad. \tag{4}$$

De ahí p^2 pasa a $-\hbar^2 grad^2 = -\hbar^2\Delta$" [Teubner, p. 529].

El resultado es

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi\rangle = -\frac{\hbar^2}{m}\Delta|\varphi\rangle + U|\varphi\rangle. \tag{5}$$

Si ahora definimos $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U$, obtenemos (2).

En pocas palabras, en la ecuación (3) se sustituyeron las variables E y p por los operadores dados en (4). Esos operadores se deben aplicar a un vector |φ>..

***

Planteado como simple manipulación de cadenas de símbolos, no se requiere asumir que las fórmulas involucradas tengan sentido, sino que se procede porque sintácticamente es válido hacer esa manipulación y en la concepción de Steiner esperar que corresponda a una realidad física sería tanto como esperar que una partida de ajedrez se pudiese ganar escogiendo en cada paso de manera aleatoria, de entre todas las que en ese momento sean realizables, la jugada a efectuarse. La probabilidad de este evento, ganar el partido de esta manera, es prácticamente cero.

Esto cambiaría radicalmente si hubiera "buenas razones" para suponer que efectivamente la forma de una y otra ley deban ser las "mismas"[15]. Steiner parte del principio de que no hay nada en nuestra experiencia ni en el proceso de selección natural que nos condujo a nuestro estado actual que nos capacite para

---

[15] Técnicamente hablando, más que tener la misma forma, habría que decir que existe una cadena deductiva válida tal que la forma de una ley en un ámbito se puede obtener a partir de la forma de una ley del otro ámbito.

tener conocimiento de áreas "alejadas de nuestra experiencia". Sin embargo, existe al menos un área radicalmente "alejada de nuestra experiencia" de la cual sí tenemos conocimientos efectivos, precisamente la mecánica cuántica. Como ya se ha señalado, Steiner no considera que esto sea una contradicción (la mecánica cuántica como contraejemplo de sus tesis). Siendo estrictos, no se afirma que estemos imposibilitados de acceder a conocimiento de ámbitos "alejados de nuestra experiencia"[16], sino solamente que no es posible acceder a ellos con los medios que hemos adquirido en el proceso de selección natural. En especial, si se considera que nuestra capacidad de pensamiento racional es producto de nuestra evolución, no puede haber manera de emplearla para acceder a ese conocimiento. Steiner afirma que el canal de acceso está más relacionado con lo que se ha dado en llamar magia que con los procedimientos que se identifican con la ciencia en general. Es más, tal vez esa magia sea la única manera de dar el salto, por decirlo así, entre ciertos ámbitos, aunque ya dentro de cada uno de ellos la adquisición o desarrollo del conocimiento proceda de manera habitual.

El salto mortal no está en sí en la sustitución, sino en asumir que una vez dada la manipulación simbólica mediante esa manipulación la fórmula que se obtiene es parte de un *nuevo sistema* que puede interpretarse como una representación de alguna ley de la mecánica cuántica. En aspectos significativos ese cambio de ámbito fue "formal", y en esto coincidimos con Steiner, la nueva situación sólo puede ser expresada en términos matemáticos con los que no se asocia ninguna experiencia física. Esto ha llevado a identificar conceptos macroscópicos con conceptos cuánticos, lo que ha problematizado la interpretación de los sistemas matemáticos involucrados. A pesar del interés de estos problemas, nos desviarían del curso que hemos tomado. En este momento la pregunta que nos guía es: ¿Es puramente formal el proceso que lleva, por ejemplo, de la fórmula de la energía clásica a la ecuación de Schrödinger?

¿Qué se entiende de manera formal por un cambio de ámbito? Dado el sistema formal (A, S, R, L) a partir del cual se ha efectuado el proceso sintáctico, se asume

---

[16] De otra manera la mecánica cuántica sí sería un contraejemplo.

que es factible generar, o encontrar, un nuevo sistema formal (A', S', R', L') con las siguientes características: a) Los conjuntos R y R' se diferencian en un número reducido de reglas; esa diferencia puede deberse a que una regla no tiene exactamente una correspondiente en el otro conjunto, o alguna regla de uno no existe en el otro. b) Una vez modificando adecuadamente R, se asume que existe un sistema de axiomas S' del cual es posible derivar las fórmulas requeridas.

Si además existe una fórmula en el primer sistema que sea un teorema, pero su "traducción" (por sustituciones) al nuevo no sea teorema, el sistema formal original y el nuevo son diferentes, y por lo tanto pudiese ser que el nuevo sistema representase un ámbito de la realidad diferente al ámbito que es representado por el primer sistema[17]. Por ejemplo, en el caso considerado se presupone que si el sistema formal de la mecánica clásica es regular, así lo será el nuevo sistema formal, pero representa otro ámbito, el de la mecánica cuántica.

***

De manera estricta ni la regla 1 ni la regla 1' son reglas matemáticas. [La sustitución en matemáticas] es una operación más restringida. Un cambio de variables en el dominio de una función puede parecer, de manera formal, precisamente sólo una sustitución de un símbolo por otro, digamos:

$x^2+4x+4=0$ se transforma en $(2t+1)^2+4(2t+1)+4=0$

sustituyendo x por (2t+1). Esto, sin embargo, no es más que un caso de composición de funciones, $(f \circ g)(x)=f(g(x))$, y para que esta operación sea posible se necesita que el rango de una caiga dentro del dominio de definición de la otra, lo cual es una restricción fuerte que no permite que toda fórmula válida sea sustituible en otra.

De manera estricta el paso de la fórmula de la energía a la ecuación de Schrödinger no es un proceso que pueda enmarcarse dentro de las matemáticas, lo que no afecta el que pueda hablarse de "analogía matemática". Siempre y

[17] O que no representase ningún ámbito objetivo, por supuesto.

cuando la forma "matemática" de una y otra fórmula sea la misma, bajo la premisa de saberse qué es la "forma matemática" de algo.

***

En este capítulo expondré como la aplicabilidad de los espacios de Hilbert y algunos conceptos relacionados puede ser entendida en términos de relaciones entre los conceptos matemáticos y conceptos físicos, en especial del significado de los conceptos matemáticos. Dada la complejidad de estas interrelaciones, no pretendo agotar el tema, pero sí avanzar lo suficiente como para poder afirmar que no hay necesidad de postular "resonancias antropocéntricas" entre las matemáticas y el universo en un análisis profundo y de interés filosófico de las aplicaciones de la matemática a la física.

Segunda Parte. Otra vez la forma en matemáticas.

En el primer capítulo se habló de la forma en matemáticas y sus muchos aspectos posibles. También se mencionaba que las estructuras matemáticas no consisten únicamente en las puras relaciones entre entes, sino que cada ente participa como entidad diferenciada y con ciertas características en esa red de relaciones, y la retroalimenta tanto por su ubicación en la red como por su definición concreta. La posición en la red, su ubicación como nodo es lo que le permite relacionarse con las demás entidades de una manera específica. Lo que una ecuación (o inecuación) muestra es una realización (o posible realización) concreta de las relaciones estructurales. Esa ecuación sigue siendo válida en un cierto sentido si se abstrae del significado de los entes involucrados. Lo que queda se puede entonces entender como la "forma" de las relaciones.

De aceptarse lo anterior, la forma sería la red concreta y local de relaciones y canales a través de los cuales cada ente se interrelacionaría con aquellos a su alrededor[18]. Aunque quizá a costa de otros aspectos, al prescindir del significado

---

[18] Aquellos en su misma teoría.

de los entes, esa red gana en claridad de relaciones. Es esta simplificación la que permite ver similitudes formales entre entes conceptualmente distintos.

***

No se ha profundizado todavía lo suficiente en lo que pudiese ser "la" forma en matemáticas. No era ese tampoco el afán en este momento, sino problematizar el concepto en oposición al proceder sin definirlo con claridad, o al menos sin delimitar adecuadamente la idea. Se podría replicar que no es necesario definir lo que sea "forma" en general, sino basta con que en cada caso concreto lo que sea eso quede determinado por criterios matemáticos. Lo que a fin de cuentas decide no es tal o cual definición, sino el hecho de que cualquiera quede determinada por criterios matemáticos. Esto es todo lo que a Steiner le hace falta. Pero si no se aclara lo que sea la "forma" no hay manera de distinguir en qué caso una analogía se base puramente en la forma y no en otros aspectos, como lo podría ser un significado de los conceptos matemáticos. Si todo fuera forma no habría manera de establecer un contraste con otras posibilidades.

Tercera Parte. Espacios de Hilbert y su aplicación en la mecánica cuántica.

Esta parte está concebida como una introducción a las ideas de espacios de Hilbert y conceptos relacionados. Al final se discute qué tan misteriosa es su aplicación en la mecánica cuántica.

Hemos tratado de dar los elementos que le permitan a un no especialista tener una comprensión de los conceptos involucrados en la discusión tanto desde el punto de vista de un matemático como de las implicaciones filosóficas más particulares, que permiten presentar un contexto estricto y concreto en el cual sustentar nuestras observaciones y conclusiones.

En especial esta presentación más a profundidad permite contrastar con los argumentos de Steiner, los que se presentan bajo una nueva luz que permite, al fin, hacer un planteamiento radical que nos lleve al núcleo lógico de la fundamentación de su tesis sobre el antropocentrismo de las matemáticas. Esta es la tarea a la que nos abocamos en la siguiente parte de este capítulo, una vez que se ha analizado lo que pudiese haber de "misterioso" en la aplicabilidad de los espacios de Hilbert.

Sección 1. Espacios vectoriales y linealidad

Una de las palabras matemáticas más usadas fuera del ámbito matemático es "lineal". Se habla por ejemplo de un "desarrollo lineal" de algo; se dice de algo con un alto grado de complejidad que es "no lineal", y de un proceso que es demasiado sencillo, casi simplón, se dice que es "lineal". Entre los pensadores actuales no es raro menospreciar una descripción de algún proceso como "lineal", siendo que para Leibniz era altamente positivo describir "linealmente" un proceso, implicando que dicha descripción tenía la ventaja de ser sencilla.

En la matemática actual "lineal" es un adjetivo aplicado a cierto tipo de funciones. No hay ninguna valorización en el hecho de que una función sea lineal o no. No es "mejor" una función por serlo, ni "peor".

Sin embargo, las "funciones lineales" (sean lo que sean) sí juegan un papel privilegiado. Esto se debe a que es factible dar una definición *limitada* de "complejidad": Una función *f* es más "compleja" que otra función *g*, si se requieren más parámetros para dar una descripción de *f* que de *g*. Esta definición es especialmente adecuada para caracterizar polinomios, y va perdiendo validez para otros tipos de funciones. Digamos que una función es más "sencilla" que otra si para describirla es necesario un menor número de parámetros. Como la anterior ésta es una definición limitada, pero útil para entender el papel de las funciones lineales.

Supóngase que se sabe lo que son las funciones lineales. En especial acéptese que funciones como f(x) = 3x, g(x) = -66.6x, etc., son lineales. Si se considera el conjunto de todos los polinomios no hay en él funciones más sencillas que las funciones constantes, como h(x) = 4, y las lineales, con la forma que se acaba de ejemplificar. En ambos casos se necesita sólo un parámetro para caracterizarlas, como el 4 para h(x) y el 3 para f(x). Sin embargo, la no-dependencia de la variable x en las funciones constantes las hace muy limitadas, mientras que las funciones lineales ya pueden tener interés tanto teórico como en aplicaciones de la matemática.

En lo que sigue es necesario tener en mente que en general la linealidad interviene en la física de una manera indirecta, ya que en ese campo lo importante para la expresión de leyes o la descripción de fenómenos no son las puras funciones, sino ecuaciones (o inecuaciones). Se puede asumir que la mayor parte de las ecuaciones que intervienen en la física tienen la forma:

$$P(u) = f, \tag{5}$$

donde u es un elemento de un espacio W, f de Y, pudiendo en ocasiones coincidir W y Y; y $P: W \to Y$ es una función (en general un operador) entre esos dos espacios, en gran parte de los casos un operador diferencial. Se dice que la ecuación (5) es lineal, si P es una función u operador lineal. Para cada f, el conjunto de las u's que hacen válida (5) se llaman *soluciones*: ese conjunto puede ser vacío. Un sistema matemático donde todas las ecuaciones que intervengan sean lineales se llama *sistema lineal*.

Es necesario poner de relieve que las soluciones de un sistema lineal no tienen que ser lineales. Por ejemplo, las soluciones de la siguiente ecuación

$$y' - y'' = 0 \tag{6}$$

son funciones como $y(x) = cos(x)$. Si (6) se presenta en la forma (5) tenemos

$$P(y) = 0, \quad P \equiv \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

y no es difícil demostrar que P es lineal, mientras que en general

$$\cos(\alpha x + \beta w) \neq \alpha \cos(x) + \beta \cos(w).$$

***

Si un cierto proceso, físico por ejemplo, es describible por medio de un sistema lineal, se tiene entonces una doble ventaja. Por un lado el sistema es más accesible y comprensible por su sencillez; por otro ya se tiene más conocimiento del sistema que en otros casos, pues los sistemas lineales han sido muy estudiados. No es que una descripción lineal de un proceso sea "mejor" o "peor" que una no lineal, sino que esa descripción es "conveniente" en bastantes situaciones.

Lo anterior es más profundo de lo que parece, pero para poder apreciarlo ya no es posible evitar una caracterización rigurosa de lo "lineal". Primero que nada hay que deslindarse del sentido geométrico habitual. Si bien bajo ciertas condiciones hay algunas funciones lineales cuya gráfica es efectivamente una línea, hoy en día el concepto se entiende de una manera más abstracta y *algebraica*.

Lo anterior puede parecer extraño a quien está acostumbrado a pensar la geometría en términos clásicos. Pero una fuerte corriente de pensamiento matemático del siglo XX ha tendido a expresar lo geométrico en términos algebraicos y topológicos, llegando a eliminar casi por completo toda representación gráfica, como en más de una ocasión se señala en [Brown]. Hay todo tipo de razones para ello, y también, como Brown reitera, a favor de los diagramas. Este es otro de tantos problemas de interés que no pueden ser tratados aquí. Mi propia concepción de "rigor" se generó en esa corriente de pensamiento, y si bien coincido con Brown en que "las matemáticas son tan ricas que ninguna forma de representación puede esperar capturar" toda la riqueza de sus conceptos [Brown, p.91], para efectos de la presente discusión considero más adecuado el planteamiento algebraico, por su mayor generalidad.

Para poder hablar de que un ente es "algebraico", hay que hablar de conjuntos con estructuras generadas por operaciones. "Estructura" se entiende aquí en el sentido más o menos usual de "sistema ordenado de relaciones entre los elementos de un conjunto". En álgebra, esas relaciones están dadas por lo que se llama una "operación", que es, en su acepción más común, una manera de relacionar dos elementos de un conjunto con un elemento de ese mismo conjunto.

Un punto clave es que todos los elementos del conjunto deben poder relacionarse con todos los demás, sí acaso con muy contadas excepciones[19].

Por ejemplo tomemos al conjunto N de los números naturales, N = {0, 1, 2, ...}. Si en N introducimos la suma aritmética, esta operación define una estructura algebraica[20] en ese conjunto llamada "estructura de semigrupo". Con la misma operación, pero definida en el conjunto Z de todos los números enteros, incluidos los negativos, Z = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}, obtenemos una estructura de "grupo" en Z. En ciertas circunstancias, una misma operación puede inducir estructuras diversas en conjuntos diferentes, como se acaba de ver en relación con la suma de enteros en N y en Z. A su vez en un mismo conjunto se puede tener más de una operación definida. En el conjunto Q de los números racionales, aquellos que son división de dos números enteros (eliminando la división entre cero, por supuesto), tanto la suma como la multiplicación definen estructuras de grupo.

La combinación de diversas estructuras simples da lugar a otros tipos de estructuras. Una de esas combinaciones es lo que se llama "espacio vectorial". Dado un conjunto cualquiera, si en él es posible definir una operación, que llamamos "suma", tal que se genere una estructura de grupo; además existe la posibilidad de "multiplicar" todo elemento de ese conjunto por números reales (que en este contexto se llaman "escalares"), y finalmente ambas operaciones pueden combinarse ("ley distributiva"), se dice que ese conjunto es un "espacio vectorial".

Uno de los ejemplos más sencillos de espacio vectorial es el conjunto que acabamos de mencionar de todos los pares ordenados de números,. Para sumar dos de esos pares sumamos el de arriba con el de arriba, el de abajo con el de abajo: $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+1 \\ 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$. Para multiplicarlos por un escalar multiplicamos ambos números por él:

[19] La operación "dividir" debe excluir a un elemento (el cero) de participar como divisor.
[20] La razón por la cual los matemáticos tienden a incluir el cero en N es precisamente porque para estas estructuras es necesario un elemento neutro, el cero.

$$3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1\\3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}.$$

La ley que relaciona ambas operaciones indica que para multiplicar una suma por un escalar, podemos primero multiplicar cada sumando por ese escalar: $5\left[\begin{pmatrix}-3\\99.02\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}33\\0.009\end{pmatrix}\right]=5\begin{pmatrix}-3\\99.02\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}33\\0.009\end{pmatrix}$, o viceversa, en estricta analogía con la ley distributiva que conocemos de la aritmética.

El conjunto de pares con las dos operaciones y esa ley distributiva es un espacio vectorial, denotado R^2.

La profundidad de estos conceptos algebraicos puede entenderse si se hace énfasis en que lo importante es la posibilidad de definir la operación, no la naturaleza concreta de los elementos del conjunto. Los elementos de diversos conjuntos pueden ser muy variados, e intervenir en muy diferentes áreas de la matemática o de la física, pero si es posible definir entre ellos una operación, por muy extraña que parezca, que respete las características esenciales de la suma, entonces en ese conjunto tenemos, además de cualquier otra cosa, una estructura de grupo o semigrupo, y todo lo que se sabe de esa estructura es válido.

Conservemos pues la idea de que si podemos "sumar" y "multiplicar por escalares" los elementos de un conjunto, entonces se tiene un espacio vectorial. Ahora considérense funciones entre espacios vectoriales.

Sea *f* una función que a cada elemento de un espacio vectorial V le asocia uno de otro espacio vectorial W, f:V $\rightarrow$ W. Si m es un elemento de V, al aplicarle *f* obtenemos un elemento n = f(m) de W, llamado "imagen" de m bajo *f*.

La función *f* es lineal si y sólo si al aplicarle la función a una suma obtenemos la suma de las respectivas imágenes: $f(m+p) = f(m) + f(p)$; y además la imagen de la multiplicación de un elemento m por un escalar α es igual a la multiplicación de la imagen de m por α, $f(\alpha m) = \alpha f(m)$. Esto suele condensarse en la fórmula:

$$f(\alpha m+\beta p) = \alpha f(m) + \beta f(p), \text{ donde } \alpha, \beta \text{ son escalares.} \qquad (1)$$

Para un matemático una función es lineal si satisface la condición (1), si no, no lo es. Tal vez los elementos de V sean segmentos de recta, mientras que los elementos de W sean ciertas funciones, o sean ciertas maneras de agrupar números, no importa. Si *f* cumple con (1) es lineal.

Una función lineal está íntimamente ligada a la estructura algebraica del espacio vectorial en que está definida. Por ejemplo, una función de un espacio en sí mismo induce una partición del espacio en subespacios, correspondientes a los diferentes valores propios de la función. Esta propiedad es fundamental para la mecánica cuántica.

Una de las enseñanzas básicas que se dan a lo largo del estudio de la linealidad es pues que no basta con dar como descripción del fenómeno una trayectoria en el espacio, por ejemplo, sino además *se debe señalar cuáles son las relaciones de esa trayectoria con las estructuras de que está dotado o con las que está relacionado ese espacio*, y de no hacerse así la representación estará incompleta. El significado de la linealidad no se agota en sus aspectos puramente formales, a pesar de definirse mediante una relación aparentemente sintáctica, o sea la condición (1), sino que esos aspectos formales adquieren un significado en virtud de nuestro conocimiento del concepto de linealidad. El concepto de función lineal es al menos tan fructífero e interesante como el de esas estructuras. Si además se recuerda que las funciones lineales son de una gran sencillez, es comprensible que hayan sido tan estudiadas.

Un caso concreto donde se puede apreciar la relevancia de las funciones lineales se da en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Puesto que gran cantidad de leyes físicas están expresadas en términos de ecuaciones diferenciales es crucial entender cómo se ubica su aplicación a la física. Además, es un área donde puede entenderse la necesidad de ser conceptualmente cuidadosos. Lo que hace la ecuación diferencial es preguntar, dada una cierta imagen, a qué posibles elementos del dominio del operador pudiese corresponder esa imagen. Ese operador puede, como se comentó, ser lineal.

Por mucho tiempo se prefirió usar sistemas lineales para describir los fenómenos físicos, aún a costa de restringir el dominio de la representación. Los avances en matemáticas, tanto puras como computacionales, han ampliado enormemente nuestra capacidad de manejo de sistemas no lineales y de hecho los desarrollos más pujantes en física se dan hoy en día en aspectos no lineales. Sin embargo, por facilidad de exposición he preferido restringirme y no incursionar en esas áreas.

***

Hay una diferencia básica entre la concepción matemática de lo lineal y el empleo no riguroso que se hace cuando, por ejemplo, un analista de procesos sociológicos o históricos dice: "el proceso que condujo a ese desenlace no es lineal". En este caso se está hablando metafóricamente, de una manera un tanto vaga (pero con resonancias) de que un análisis demasiado simple, como una cadena secuencial de eventos, difícilmente podrá dar una explicación del proceso. Habría que tomar en cuenta relaciones y referencias internas entre los eventos, etc. Las resonancias son aún geométricas, se piensa en el proceso no como una línea recta que va de un punto al otro, sino como una complicada curva que inclusive pudiese cortarse a sí misma.

Es a este tipo de imágenes a las que se tuvo que renunciar en la matemática a cambio de establecer un concepto riguroso y de una asombrosa generalización. En matemáticas aplicadas esto tiene, entre otras, una consecuencia que se debe analizar. El rigor conceptual muestra que las estructuras básicas que se asumen en un conjunto S limitan el tipo de relaciones que se pueden establecer entre S y otros conjuntos. Por ejemplo, si S no es un espacio vectorial, no es posible definir funciones lineales que lo tengan como dominio y/o rango. O en el caso contrario, si se desea o necesita interpretar situaciones físicas como funciones vectoriales, se requiere que ciertos elementos físicos sean interpretables como elementos de un espacio vectorial. En otro caso, si en física cuántica todo se interpreta como partículas aisladas, un espacio discreto puede ser un buen modelo, pero a cambio no va a ser posible definir funciones continuas sobre ese espacio. Gracias a la claridad que conlleva el rigor se pudo ver que la representación de ciertos fenómenos no es independiente de la estructura algebraica o topológica. Por ejemplo, si se quiere hablar de linealidad, esos conjuntos deben tener cuando menos la estructura de espacios vectoriales, si no sólo se puede hablar de "linealidad" en un sentido vago y metafórico.

Sección 2. ¿Qué son los espacios de Hilbert?

A lo largo de la discusión de Steiner aparece repetidamente el concepto de *espacio de Hilbert*, es necesario entender de qué se está hablando. Si se es estricto, un espacio puramente geométrico no ofrece la posibilidad de hacer cálculos de manera inmediata. O, como ya se sabía en la antigüedad, la relación entre la geometría y la aritmética dista mucho de ser trivial. Por dos puntos distintos se sabe que pasa una línea recta, pero no sabemos qué pueda ser la "suma" de dos puntos *geométricos*. Se pueden enumerar, eso sí, y se puede saber qué cantidad de puntos tiene un conjunto, pero lo que pudiese ser la suma de dos puntos no está definida. La idea genial que culminó con Descartes fue relacionar cada punto con un sistema de coordenadas, a manera de poder utilizar las posibilidades aritméticas para analizar lo geométrico. Pero siempre ha sido una estructura que se sobreimpone, que se añade a lo geométrico sin mezclarlo con ello. En otras palabras, ningún axioma geométrico se refiere a coordenadas.

Este proceso culmina por el momento[21] con los espacios vectoriales. Se desarrolla por un lado la geometría, por otro lado una estructura que permite, entre otras cosas, efectuar cálculos. Entonces ambas estructuras se relacionan de manera rigurosa y clara por medio de una categoría de funciones que a cada dos puntos asocian un vector. De esta manera se pueden efectuar en muchos casos demostraciones rigurosas de algunos teoremas geométricos y representar los

---

[21] El uso de este tipo de ideas expresadas en palabras como "culminar" es común en gran parte de los libros de historia de las matemáticas, las cuales se conciben como una ciencia acumulativa, el progreso entendido como la lucha por tener los conceptos actuales como culminación de todas esa historia. Al no compartirse esa visión sería mejor no usar palabras como "culminar".

conceptos geométricos de modo algebraico a efecto de hacer los cálculos requeridos. Por ejemplo, para obtener el punto de intersección de dos rectas se plantean las representaciones vectoriales correspondientes (ecuación vectorial de la recta[22]) y el punto de intersección se calcula como la solución de un sistema algebraico.

Pero la estructura básica de espacio vectorial no cubre todos los aspectos geométricos. Se deben añadir estructuras adicionales. Para recuperar el concepto de longitud se usa el concepto de *norma*; para la idea de distancia el de *métrica*. Pero con ninguna de las estructuras adicionales dadas por esas relaciones es posible definir el concepto de ángulo. Es aquí donde el siguiente paso no sólo es de una gran profundidad, sino de una elegancia suprema por su sencillez[23]. Basta con añadir *una* estructura al espacio vectorial para poder representar toda la problemática geométrica básica: La estructura inducida por la operación llamada "producto interno" o "producto escalar".

En principio no es más que una función que a cada dos vectores les asocia un número real[24]. Por supuesto que no cualquier función de este tipo es un producto interno, debe cumplir con ciertas condiciones. Una primera dificultad radica en la nomenclatura. No hay una manera estándar de denotarlo. Las notaciones más usuales son:

> u•v (de ahí que a veces también se llame "producto punto"), <u|v> (muy usada por los físicos), (u|v), etc. Aquí se emplea la última.

Es una función de dos argumentos. En primer lugar se exige que, si uno de ellos se mantiene constante, la función sea lineal en el otro. Funciones de este tipo se llaman *bilineales*, e indican, como en el caso lineal, que está dada una profunda

---

[22] En los niveles previos a un estudio universitario no se habla de "ecuación vectorial" de la recta, sino sólo de "ecuación de la recta". Los conceptos son estrictamente equivalentes. El adjetivo vectorial se usa aquí para enfatizar la relación del espacio vectorial con el plano geométrico. El lector que recuerde sus clases de geometría analítica puede pensarlo todo en función de esas enseñanzas.

[23] Se quiere señalar una situación en la que intervienen belleza y elegancia en matemáticas.

[24] No se ha querido insistir en el hecho de que los escalares también pueden ser números complejos.

relación con la estructura algebraica del conjunto. En general se pide que haya conmutatividad, o sea (u|v) = (v|u)[25]. Se pide aún más. En el caso en que las dos variables tomen el mismo valor, o sea (u|u), (v|v), se exige que el resultado sea un número mayor o igual a cero, y cero si y sólo si el vector es el vector cero (el elemento neutro).

Este producto permite introducir diversos conceptos geométricos en el espacio vectorial, como la generalización de "tamaños", "distancias" y ángulos. Por ejemplo, para representar la geometría plana habitual no hace falta más que añadir a R^2 el siguiente producto interno:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd .$$

Se define la "distancia" (métrica) entre dos vectores como

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\| = \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}},$$

y la "longitud" de un vector por

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

El ángulo entre dos vectores diferentes del vector cero queda definido por

$$ang\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = ang \cos \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\|}.$$

Lo anterior debe dar una idea de cómo las diversas estructuras se van entrelazando. El caso presentado es sólo uno de los posibles. Hay espacios en los cuales es posible tener métricas con valores negativos, como el espacio de

[25] En el caso de usar números complejos como escalares esta relación ya no es tan sencilla.

Minkowski. Hay espacios en los cuales no es posible definir una métrica. En R^2 se tiene la posibilidad de definir otras métricas o normas.

Teniendo esas estructuras, uno de los conceptos más usados es el de ortogonalidad, que es la generalización del concepto de perpendicularidad entre rectas. Debido a la manera en que se definen los ángulos, la ortogonalidad presupone una condición sumamente sencilla: Dos vectores diferentes son ortogonales si su producto interno es igual a cero: $(v|w) = 0$. La gran ventaja de esto es que puede definirse en espacios que poco tiene que ver con la geometría habitual, y donde la intuición geométrica usual no proporciona claves de entendimiento, en especial en espacios cuyos elementos son funciones.

De manera estricta, un espacio de Hilbert es un espacio vectorial definido sobre los números complejos[26] con producto interno. Los espacios de Hilbert que se aplican en la física son muchas veces espacios funcionales y en ocasiones tienen dimensión infinita

La palabra "dimensión", como ya se vio en cierta medida en el caso de la palabra "lineal", trae consigo una intuición que trasciende con mucho lo matemático. En política se habla de la "dimensión humana" de un conflicto; en crítica literaria no sería difícil encontrar una observación como "el uso innovador de la metáfora le añade nuevas dimensiones a la poesía de fulano".

En la vida occidental diaria damos por sentado que vivimos en un "espacio tridimensional". Esto puede parecernos lo más evidente, pero hay o ha habido culturas para las cuales hay otras direcciones: adelante, atrás, lado derecho, lado izquierdo, arriba y abajo. De hecho, en la vida cotidiana usamos cuatro direcciones, adelante y atrás, derecha e izquierda, para ubicarnos en una superficie más o menos plana, como la ciudad. Para ubicar una calle, por ejemplo, decimos "tres cuadras a la derecha y luego una a la izquierda", y no algo como "tres cuadras en dirección lateral positiva y una en dirección negativa". Tampoco decimos "el florero está en dirección frontal negativa", sino "el florero está atrás de

[26] Lo que se llama "espacio vectorial complejo".

mí". El que efectivamente el espacio tenga tres dimensiones no es tan evidente como parecería.

Si a una persona con cierta cultura se le preguntara qué significa eso de "espacio tridimensional", es bastante probable que dijera algo como: "significa que para ubicar algo en el espacio no necesito más que tres datos". Un poco más cercano a lo que se entiende en matemáticas sería: "para ubicar un punto en el espacio no necesitamos más que tres números referidos a unos ejes de coordenadas".

Parecería que la dimensión es un concepto geométrico, puesto que lo referimos a un "espacio de puntos". Quizá si no hubiese sido por ideas aparentemente extrañas como "dimensión infinita", el concepto de dimensión pudiese haber evolucionado en un sentido geométrico, pero hoy en día se considera un concepto eminentemente algebraico.

***

Si un vector se puede obtener como el resultado de multiplicar otros vectores por escalares, y luego sumarlos, decimos que ese primer vector es *generado* por aquellos vectores que intervienen en la suma. Una de las propiedades más asombrosas de un espacio vectorial es que siempre se puede encontrar un cierto subconjunto de vectores que generan *a todos* los demás. Se puede escoger ese subconjunto de manera que tenga un número relativamente pequeño de elementos, comparado con el número total de vectores en el espacio vectorial. Por ejemplo, se puede demostrar que el siguiente subconjunto de R^2: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, genera a todos los otros vectores de R^2. Hay muchos otros pares de vectores que también lo hacen, como $\left\{\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$. En general es demostrable que basta con dos vectores (que cumplan ciertas condiciones, por supuesto) para generar todos los vectores de R^2. Por eso decimos que ese espacio es de dimensión 2.

Esto lo que quiere decir es que esos subconjuntos representan a todo el espacio por medio de sumas y multiplicaciones por escalares, o, lo que es lo mismo, hay ciertas propiedades del espacio vectorial en su totalidad que no hace falta estudiarlas en todos y cada uno de los vectores, sino que es suficiente analizar esos subconjuntos generadores.

La ventaja fundamental de plantear las cosas de esta manera es que se puede hablar de cualquier número de dimensiones sin problemas. Si en cierto espacio vectorial se necesitan subconjuntos de cuando menos 8 elementos para generar a todos los vectores, entonces el espacio vectorial tiene dimensión 8. Si necesito cuando menos 233 elementos en ese subconjunto, el espacio tiene dimensión 233. Una intuición geométrica no permite esta libertad tan rigurosamente limitada. Si se conciben las dimensiones como "direcciones", no hay manera de imaginarse 233 direcciones; un concepto basado en esas intuiciones difícilmente podría tener el rigor que las matemáticas modernas exigen.

Es más, nada impide hablar de sumas con números cada vez más grandes de sumandos, hasta llegar a un número infinito de ellos[27].

Al mencionar la palabra "infinito" nos metemos en aspectos controvertidos que, sin embargo, en la práctica usual de las matemáticas no representan mayor problema. La mayor parte de la comunidad admite sin reservas que se dispone de conjuntos con un número infinito de elementos, y se trabaja con ellos. Desde un punto de vista filosófico esto parecería conllevar necesariamente un compromiso con una cierta ontología de los objetos matemáticos[28], pero en su gran mayoría a los matemáticos los tiene sin cuidado la manera de existir de esos objetos, su concreción como entes. Si están fuera del espacio-tiempo, como plantean algunos platonistas, o si un concepto matemático existe de la misma manera que un concepto teórico, o cualquier otra posibilidad, no quita el sueño más que a unos pocos, ya que estrictamente hablando todas esas concepciones son equivalentes

[27] O, desde otro punto de vista, se está efectuando un paso de lo discreto a lo continuo, lo que ilumina ciertos aspectos de los espacios cuyos elementos son funciones.

[28] Para poder contar algo, primero tengo que tener, de alguna manera, ese algo. Por supuesto que esos "algos" no tienen necesariamente que ser concebidos como existentes en el mundo objetivo. Puedo tanto hablar de cinco manzanas, como de cinco partículas elementales o de cinco entes abstractos, como cinco números. Por ello en ciertos momentos para poder hablar de que tengo cinco entes parecería necesario decir qué clase de entes son esos, cómo existen de manera que pueda contarlos.

pues no hay, desde el punto de vista matemático, ninguna razón para preferir una u otra, basta con la pura disponibilidad de los entes básicos. La matemática, como la ciencia que es actualmente, no se compromete con posturas ontológicas definidas[29]. Dijérase que trata de mantenerse neutral al respecto. Simplemente se admite que se dispone de conjuntos con un número finito o infinito de elementos[30]; si además esos conjuntos tienen una estructura de espacio vectorial es entonces factible hacer todo tipo de sumas, inclusive algunas con un número infinito de sumandos.

En especial todo polinomio puede pensarse como sí a elementos del siguiente conjunto P =: $\{1, x, x^2, x^3, x^4, ...\}$ los multiplicáramos por algún escalar y luego los sumáramos. Recordemos que 0 es un escalar válido, por lo que un polinomio como $3 + x^2 - 5x^3$ puede representarse como

$$3(1) + 0(x) + 1(x^2) + (-5)(x^3) + 0(x^4) + 0(x^5) + \ldots.$$

Por ello, P genera todos los polinomios, y además tiene un número infinito de elementos, ya que con un número finito de ellos siempre es posible encontrar un polinomio de grado mayor a ese número que no quedaría representado por sumas y multiplicaciones por escalares de elementos de P. El conjunto de todos los polinomios es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Pero, puede objetarse, en el caso de espacios vectoriales como R^2 la ventaja de trabajar con esos conjuntos generadores es clara: El número de elementos en ellos es abrumadoramente menor que la cantidad total de vectores en el espacio. ¿Existe alguna ventaja en trabajar con conjuntos generadores si tienen un número infinito de elementos?

---

[29] Lo cual no quiere decir que esto sea algo que no interesa o no tiene importancia. Muchos de los problemas con los números complejos surgieron de la incapacidad de decir qué eran esos entes. El término "número imaginario" indicaba precisamente que la forma de existencia de esos "objetos" parecía diferente a la de los números previamente conocidos.

[30] Para algunos filósofos la situación es otra. Putnam, por ejemplo, plantea que lo que las matemáticas ofrecen son posibilidades. Pero ningún matemático diría, por ejemplo: "si existiese un conjunto adecuado, se le podría asignar una estructura de espacio vectorial, y entonces habría la posibilidad de definir un subconjunto que tuviese la propiedad de ser un conjunto generador". No, en matemáticas se dice "en un espacio vectorial como R^2 hay un conjunto generador".

Éste es otro de los puntos más específicos de la matemática. Las sumas infinitas, que llamamos "series", han estado con nosotros al menos desde el siglo XVI, pero sucesiones infinitas de números se han estudiado, implícita o explícitamente, desde la antigüedad, en especial por Arquímedes (aunque no en la *forma* en que ahora se conocen). O sea, la matemática se ha tenido que enfrentar con el problema del infinito desde ese tiempo. Pero a diferencia de las reflexiones al respecto que se han dado en la teología o la filosofía, éste fue un problema eminentemente *técnico*: cómo efectuar cálculos, manipulaciones, deducciones con entes que tenían un número infinito de elementos, de una u otra manera. El problema fundamental no era si existían o no, o cómo. Simple y sencillamente uno se los encontraba en el camino y había que hacer algo con ellos. La pregunta era cómo caracterizar ese "infinito" de manera *práctica*.

En cuanto a las manipulaciones y deducciones la respuesta que se considera hoy en día como adecuada fue el concepto de límite, que tiene su propia problemática. Por otro lado se seguía encontrando el problema de caracterizar la cantidad de elementos en conjuntos infinitos. Una de las respuestas (hay más) fue dada por Kronecker: Un conjunto tiene un número infinito de elementos si tiene al menos un subconjunto propio con el cual es posible ponerlo en correspondencia biunívoca. ¿Qué significa esto en un caso concreto? Un subconjunto propio de los números naturales es el conjunto de todos los números pares. Denotemos este conjunto por N_2. N_2 es un subconjunto propio de N porque existen elementos de N que no son elementos de N_2, precisamente los números impares, pero todos los elementos de N_2 son elementos de N. Como estamos acostumbrados a conjuntos con un número finito de elementos, podríamos pensar que N_2 tuviese menos elementos que N. Sin embargo, en un sentido muy específico de la palabra "contar" resulta que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos.

Contar significa enumerar, o sea a cada elemento de un conjunto irle asignando un elemento, y sólo uno, de los números naturales en el orden que estos vienen dados. En matemáticas esto se lleva a cabo definiendo una función que a cada elemento del conjunto le asigna uno y sólo un número natural. Por decirlo así, poniéndoles una etiqueta en la cual está escrito un número, se puede usar cada etiqueta sólo una vez, y a cada elemento del conjunto se le puede "poner" sólo una etiqueta. Ahora se puede tratar de enumerar en este sentido los números pares. Se sabe que todo número par puede dividirse entre dos, y el resultado es un número natural: 2/2 =1, 4/2 = 2, 6/2 = 3, etc. Asigno ahora ese número natural a cada número par. Está claro que a cualquier número par le puedo asignar de esa manera un número natural. Por otro lado cualquier número natural nos da un número par si lo multiplicamos por 2: 1(2) = 2, 2(2) = 4, 2(3) = 6, etc. O sea, a todo número natural se le asigna de manera única un número par. De esta manera hemos "contado" todos los números pares, pues les hemos asignado de manera única un número natural. No ha sobrado ni un número natural, ni ha faltado o sobrado algún número par de habérsele asignado un número natural. Por lo tanto hay tantos números pares como números naturales. En matemáticas se prefiere, en vez de usar la expresión "ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos", emplear la frase "ambos conjuntos tienen la misma *cardinalidad*", cuando se habla de conjuntos infinitos.

Pero N_2 debería ser "más chico" que N, pues le falta una inmensa cantidad de números (los impares). De muy curiosa manera, esto no le causa problemas a un matemático, por más contraintuitivo que parezca. El que haya conjuntos con esa propiedad no es un problema, acabamos de ver un ejemplo. Por otro lado, si un conjunto tiene un número finito de elementos esto nunca puede darse. Por lo tanto esa propiedad caracteriza a los conjuntos con un número infinito de elementos.

No es este el momento de discutir las consecuencias de plantear de esta manera lo que pudiese ser "el infinito". En una primera instancia para un matemático no basta que esta definición sea lógicamente correcta (no conduce a contradicciones), sino que además le sea *útil* (incluso conceptualmente). Por ejemplo, regresando al caso de un espacio vectorial de dimensión infinita, el conjunto generador puede tener un número infinito de elementos, y sin embargo, como hemos visto, puede ser un subconjunto propio del espacio vectorial. Sin entrar en más detalles técnicos, aun en el caso de un conjunto generador con un número infinito de elementos es sumamente ventajoso poderse reducir a esos elementos, pues en todo el espacio vectorial hay muchísimos más elementos que los que pudiese contener el subconjunto generador. Entre otras razones, una de las ventajas de tener una base de este tipo es que en muchos casos es posible caracterizar algorítmicamente a los vectores de ella, y, por ello, poder hacer cálculos con ellos.

Analizar el conjunto generador de un espacio vectorial, tanto en el caso finito como en el otro, no es sólo una cuestión de cantidad. Es analizar un subconjunto que concentra, por decirlo así, gran parte de la información esencial sobre el espacio vectorial.

Por ejemplo, al usar coordenadas para ubicar los puntos del espacio lo esencial no se limita a asignarle tres números a ese punto. Si los ejes de coordenadas son rectilíneos hay que saber a qué ángulo se encuentran unos con respecto a los otros. Pero también tenemos coordenadas curvilíneas, como la representación polar de los números complejos y otras. Tanto en uno como en otro caso hay que definir un punto como "origen".

O sea, *los tres números sólo adquieren significado en el contexto de un sistema de referencia*. Los conjuntos generadores del espacio vectorial proporcionan esos sistemas. La dimensión es una característica del espacio vectorial que se transfiere al espacio geométrico.

Ahora ya se puede dar una definición bastante adecuada de lo que se entiende por un espacio de Hilbert: Es un espacio vectorial de dimensión posiblemente infinita en el cual está dado un producto interno. O sea, un espacio vectorial que permite representar cualitativa y cuantitativamente una geometría, con la peculiaridad de poder tener dimensión infinita. Muchas veces es un espacio cuyos elementos son funciones, un espacio funcional.

Una geometría en un espacio funcional de dimensión infinita es algo para lo cual la geometría intuitiva no nos prepara. La concepción cotidiana de espacio no da claves al respecto. Dado que se tienen propiedades geométricas que podemos caracterizar con dimensión igual a 1, a 2, a 3, no hay ninguna dificultad lógica en generalizar el concepto de dimensión a cualquier número natural. Desde ese punto de vista, esto pudiese parecer un artificio puramente formal, sintácticamente correcto pero formal.

De ser así, sería en verdad asombroso poder representar fenómenos reales con esos conceptos, reunidos bajo el nombre de "espacio de Hilbert". Sin embargo, hay buenas razones que indican que estos conceptos generales no son un artificio formal, sino que permiten ampliar la capacidad del sistema cognitivo empleado en el análisis de nuevas estructuras, relaciones, objetos. Porque no es lo formal lo fundamental. El caso de la dimensión es un buen ejemplo de que lo relevante, tanto en matemáticas como en física, son las diversas interpretaciones conceptuales. La dimensión puede entenderse espacial y geométricamente, o de manera mucho más general como índice de los grados de libertad de un sistema, o en otros sentidos.

Aquí se vuelven a delimitar concepciones diversas. El que las matemáticas sean útiles y ocupen un papel en el conocimiento del universo es un hecho. Frente a quienes sustentan que hay o debe haber una explicación de este hecho en términos objetivos o naturalistas, Steiner sostiene que esa coincidencia de la matemática y el mundo es "misteriosa", a menos que se acepte que hay algo en el universo que responde globalmente a características propias de nuestra especie.

Sección 3. Operadores lineales.

El formalismo de espacios de Hilbert involucra tanto a los espacios como a las funciones entre ellos, y de manera especial a las funciones de un espacio en sí mismo. Como vimos en la analogía formal presentada en la primera parte de este capítulo, la "traducción" se lleva a cabo precisamente sustituyendo variables por operadores, y como tal parece ser un claro ejemplo de una analogía "puramente" matemática. Esto, sin embargo, no es tan claro como pudiera parecer. Es necesario ubicar el problema con mayor precisión para poder pasar a plantear otras posibles explicaciones.

De manera muy puntual habría que plantear, por ejemplo, si es "misterioso", "formal", el sustituir la variable numérica E por el operador diferencial $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, o sustituir p por $\frac{\hbar}{i}grad$. Pero se trata de dar una visión más amplia, enfocada a entender lo que son los operadores y a partir de ello tratar de entender las razones de su capacidad de expresar aspectos de la física. Esta visión es la que permite explicar, entre otros aspectos, la aparición de los vectores $|\varphi>$ en las fórmulas finales, ya que el operador debe estar aplicado a algún elemento de su dominio, y como "funcionan" esas fórmulas. El camino parecería ser aún un poco largo, pero habiendo sido fascinante para matemáticas y física debería poder serlo también desde la filosofía.

***

Los elementos de los espacios de Hilbert pueden ser muy diversos, tanto como los elementos de diferentes espacios vectoriales. Entre otras posibilidades pueden ser funciones, como el espacio de todos los polinomios. También se pueden tener espacios de funciones continuas o integrables en un intervalo, y de todas las funciones lineales con dominio y rango en los reales.

Entre espacios de Hilbert, como con otros conjuntos, se pueden definir funciones. Mientras se trate de espacios cuyos elementos sean números, díadas o tríadas de números, o segmentos de recta, se puede mantener la intuición que se obtiene del conocimiento de funciones con dominio y rango en los reales, pero en la historia de las matemáticas causó bastante extrañeza poder definir funciones en espacios cuyos elementos eran a su vez funciones, a las que se hacía referencia como "funciones de funciones". Es por ello que se les dio nombres especiales: *operadores, funcionales*, etc. Hoy en día se tiene ya suficiente claridad del concepto de función, por lo que no representa ningún problema definir funciones entre cualquier tipo de espacios, pero aún se mantiene las palabras "operador" y "funcional" para designar ciertos tipos de relaciones entre espacios de funciones (llamados espacios *funcionales*, y de ahí que el análisis avanzado se llame hoy *análisis funcional*).

En especial, se pueden definir funciones (operadores) *lineales* entre espacios de Hilbert. Denotemos los espacios de Hilbert por H y M. Sea *F* una función lineal con dominio H y rango M, F: H $\rightarrow$ M.

Toda función lineal tiene una íntima relación con la estructura de espacio vectorial de los conjuntos en que está definida. Cada función lineal de un espacio en sí mismo puede quedar perfectamente definida por una cierta estructuración del espacio vectorial. De manera un poco más estricta a cada función lineal le corresponde una y solo una organización[31] del espacio vectorial en subespacios. Cualquier cosa que sea esa "organización", viene dada o representada por un conjunto generador del espacio vectorial.

Operadores lineales y bases. Sea entonces *F* un operador lineal tal que su dominio y rango coinciden, F: H $\rightarrow$ H. En general, al aplicarle *F* a un vector $b \in$ H, se obtiene otro vector *w* que no tendrá más relación con *b* que ser precisamente su imagen bajo *F*, $F(b) = w$. Por otro lado siempre se podrán encontrar[32] ciertos elementos de H con la siguiente propiedad: $F(v) = \alpha v$, donde α es un escalar, real o complejo. Por supuesto que puede existir también algún otro vector *d* tal que haya otro escalar β y tengamos $F(d) = \beta d$. Es más, bajo ciertas premisas puede haber un gran número de esos vectores y escalares (el número posible de escalares depende de la dimensión del espacio). Pero lo fundamental es que el conjunto de todos esos escalares define perfectamente a la función lineal. Dicho con un poco más de rigor, a cada función lineal definida en H (con dominio y rango en H) le corresponde uno y sólo un conjunto de escalares α_i, llamados *valores propios* de esa función, con la propiedad de que existe al menos un elemento v de

---

[31] Es quizá más exacto decir que a cada función lineal de un espacio en sí mismo se le puede asociar una manera de organizar ese espacio en subespacios, los subespacios de vectores propios correspondientes a valores propios. Pero lo importante es simplemente la idea de que se induce una estructura particular de subconjuntos del espacio, que es lo que aquí se está llamando "organización" del espacio vectorial, asociada a una cierta serie de números, el espectro del operador.

[32] En matemáticas se dice "... existe $v \in$ H tal que ...". Esto puede parecer una afirmación típicamente platonista, en cuyo caso la neutralidad con respecto a posiciones ontológicas parecería, a su vez, quedar en entredicho. Pero la afirmación de existencia se puede quizá interpretar como una afirmación de posibilidad lógica. Afirmar la existencia de ese tipo de vectores no implica necesariamente asumir una u otra postura ontológica.

H diferente de cero tal que *F(v)* = $\alpha_i v$. Ese conjunto se llama *espectro* de *F*, y cada escalar se llama un *valor propio* de *F*.

Si se conoce *F* se puede encontrar su espectro, pero también si se conoce el espectro se puede reconstruir *F*. Dependiendo tanto de cómo está definida *F* como de la dimensión de H, el espectro puede tener un número finito o infinito (contable) de elementos; o sea, *F* puede tener un número finito o infinito de valores propios.

A su vez, los vectores tales que *F(v)* = $\alpha_i v$ se llaman vectores propios de *F* correspondientes al valor propio α_i. Otro punto clave es el siguiente: A cada valor propio le corresponde un conjunto de vectores propios, y ese conjunto es un subespacio del espacio de Hilbert. *Es también posible formar una base de H con vectores propios de F*. Es por esto que cada función lineal caracteriza de manera única una organización de H dada por una base y una estructuración en subespacios, y viceversa. De otra manera, si se conoce una base construida con vectores propios de *F*, se puede reconstruir *F*; y si se conoce *F* se puede construir esa base.

Con esto se han reunido casi todos los elementos que permiten discutir el papel de los espacios de Hilbert en la mecánica cuántica. Falta un concepto, que ya no es de álgebra, el de "estado" de un sistema.

Sección 4. El concepto de "estado".

En su sentido más técnico y específico, el concepto de "estado de un sistema" pertenece a la teoría de sistemas. En la física, sin embargo, se maneja de manera más básica, en muchos casos haciendo implícita referencia a la intuición cotidiana. Parecería quedar claro de qué se habla cuando se menciona "el estado de salud de fulano", o "el estado de la economía de un país", y de ahí tener una idea de lo que se habla al mencionar "el estado de un sistema físico".

De una manera un poco más rigurosa, el estado de un sistema descrito por *n* parámetros es el valor que toman esos parámetros en un momento dado. Son los valores que permiten describir la configuración de un sistema en un instante particular. Para dar una descripción o definición general de un sistema es indispensable dar el conjunto de todos sus estados, en el caso matemático, o, en un caso empírico, al menos dar una aproximación o visión global de ese conjunto.

La dinámica de un sistema está dada por una función tal que, bajo cualquier entrada al sistema (*input*) en un cierto estado, permite calcular tanto el estado siguiente en que se encontrará el sistema, como la salida (*output*) correspondiente[33]. Muchos sistemas físicos pueden entenderse como sistemas sin entradas ni salidas, por lo que su dinámica está dada estrictamente por una función de transición temporal de estados. Esa función se entendería o interpretaría como una ley física que describe el comportamiento del sistema.

El movimiento de una partícula en el campo gravitatorio de la tierra es un buen ejemplo. El estado de este sistema está dado por seis parámetros, tres para determinar la posición, tres las velocidades o impulsos. Las leyes de Newton rigen la dinámica del sistema en el sentido de que dado el valor de esos seis parámetros en un cierto momento es posible determinar el estado del sistema para cualquier tiempo t (pasado, presente o futuro).

El problema radica en lo que se exija de la función de transición de estados. En un caso discreto, o sea donde el número de estados es finito, basta con dar una tabla. En el caso de sistemas continuos[34], al menos en la física, para poder saber cómo se da esa transición, hay que poder calcular cómo obtener un estado con la información del precedente. Calcular, sin embargo, no es algo que pueda llevarse a cabo en todas sus modalidades en todos los conjuntos. Se requiere poder definir las estructuras algebraicas necesarias. Una de las estructuras mínimas requeridas en la física es la de espacio vectorial. Es por ello que, por ejemplo en el caso de la trayectoria de una partícula, esos seis valores se interpretan como los componentes de un vector en R^6 y el conjunto de estados del sistema es el conjunto de todos los vectores de R^6, o sea el espacio vectorial R^6.

---

[33] Esta dinámica se da en forma de un par de funciones, una de las cuales permite obtener el siguiente estado, y otra la salida correspondiente.
[34] O de sistemas discretos con un número muy grande, no manejable, de estados.

Con esto se han dado elementos básicos que permiten discutir el papel de los espacios de Hilbert en ciertos aspectos de la mecánica cuántica.

Sección 5. Espacios de Hilbert en la mecánica cuántica.

Los espacios de Hilbert no estaban ahí, en la historia de la mecánica cuántica, desde el principio. En una primera instancia lo que estaba a disposición eran diversas entidades matemáticas conocidas por su exitosa implementación en otras áreas de la física. Por ejemplo desarrollos en series de Fourier, inclusive con algunas ideas de ortogonalidad entre las funciones de la serie. Sin embargo, por más refinadas y exitosas, esas entidades no permitían una representación adecuada de fenómenos que habían venido a ser claves.

Uno de esos fenómenos era la aparición de líneas de emisión y absorción en los espectros de elementos químicos. Estas líneas podían ser asociadas con números reales, dada la secuencialidad del espectro físico. Hoy en día se dice que esos valores representan los valores propios de un operador definido en un espacio de Hilbert adecuado. Heisenberg y sus colegas no utilizaban el concepto de operador, pero sí el de matriz, aunque de manera elemental[35], y fueron desarrollando, y más tarde aprendiendo cálculo matricial[36]. Esas matrices tienen valores y vectores propios.

E primer uso de matrices no provino de su concepción como representaciones de operadores lineales, sino de que esos arreglos permitían un manejo más eficiente de la información de que se disponía. En su Biografía de la Física, Sir J. Jean caracteriza la situación diciendo que era conveniente manejar ciertos datos o parámetros "íntimamente relacionados" [Jean, 19.., p.] de manera conjunta. Una vez agrupados, se tenían entidades que no eran caracterizables con escalares, como la temperatura, o por medio de coordenadas vectoriales, como una fuerza. El estado del sistema quedaba determinado por conjuntos de números que no

[35] Es conocida la anécdota de que Bohr, al recurrir a colegas matemáticos, encontrara ya desarrollado el cálculo matricial.

[36] Operaciones con y entre matrices.

admitían una representación o una "forma" vectorial; la manera de organizar los datos debía ser diferente. Se empezó a vislumbrar el potencial de esa elección constatando que una vez puesta la información en forma de arreglos tipo matricial era factible, al menos de manera formal, realizar operaciones entre esos arreglos y otros de tipo vectorial.

Ilya Prigogine, ganador de un premio Nobel en química, dice que "la transición de funciones a operadores fue forzada sobre nosotros por los experimentos espectroscópicos que revelaron la existencia de niveles de energía" [Prigogine, p. 50]. Prigogine pone de relieve, aunque de manera sumamente esquemática un problema concreto que puede proporcionar más claridad en las relaciones entre las dos ciencias en cuestión.

Como se dijo antes, un valor propio de un operador $F: V \rightarrow W$ es un escalar α tal que $F(v) = \alpha v$. El conjunto de todos esos valores propios del operador lo identifica plenamente, es como su huella digital.

Las líneas de emisión y absorción, por su parte, son un fenómeno que aparece cuando se analiza la luz que emiten los elementos físicos al ser excitados energéticamente. Al descomponer esa luz en las bandas de diferente frecuencia (colores) se observan, siempre en los mismos lugares para el mismo elemento, unas líneas oscuras llamadas líneas absorción, o una líneas brillantes, llamadas de emisión. Estas líneas son el resultado de fenómenos que tienen que ver con los "saltos" entre los niveles de energía en el átomo. Si se ubica el lugar de esas líneas en una escala numérica como R, la sucesión de esos números identifica con exactitud a cada elemento. Esto es lo que permite, analizando la luz que llega de ellas, establecer los elementos de que se componen.

Si bien la idea de "matriz" parece haber sido introducida en un principio más que nada, como Steiner relata, como un arreglo cómodo de los datos referentes a un ente físico, poco a poco su riqueza conceptual fue quedando de manifiesto. Pauli aplica el método de Heisenberg al átomo de hidrógeno con éxito. Poco después Schrödinger pudo mostrar que el espectro puede interpretarse como el conjunto de valores propios de un *operador diferencial* de un espacio de Hilert complejo en sí mismo. Este tipo de operadores involucra derivadas ya sea temporales o espaciales o ambas. Son esos operadores los que definen las ecuaciones diferenciales que, junto con las diversas condiciones iniciales y de frontera forman los sistemas que describen gran cantidad de los sistemas físicos de interés en las diversas áreas de la física.

Hoy en día entendemos a las matrices como representaciones de operadores lineales. Los valores propios de un operador son los mismos para todas las matrices que lo representan. Si se conocen los valores propios es posible reconstruir el operador. Dado que la idea de matriz ya había sido introducida, fue sólo cuestión de un breve tiempo antes que alguien[37] llegara a la idea de que la sucesión de valores asociada con las líneas de emisión y absorción de un elemento podía ser interpretada como la sucesión de valores propios de un operador (su espectro), y tratara de encontrar la matriz correspondiente (una representación de un operador determinado). Cuándo se constató que el resultado era físicamente útil, "la transición de funciones a operadores fue forzada sobre nosotros por los experimentos espectroscópicos que revelaron la existencia de niveles de energía", pues ante el éxito de la identificación de las líneas de emisión y absorción con el espectro de un operador, ya no era posible más que constatar la utilidad (¿la imprescindibilidad?) del concepto de operador en la física.

Una analogía con una idea biológica puede aclarar lo anterior. En la moderna teoría de la evolución no se afirma que haya estructuras biológicas que surgen "para algo", sino que esas estructuras empiezan a surgir en virtud de cambios aleatorios en el material genético (mutaciones). Si contribuyen a una mejor adaptación[38] serán conservadas y desarrolladas. Es el caso por ejemplo de las plumas. La evidencia apunta a que surgen en el contexto de un mejor aislamiento frente a cambios climáticos. Pero ya una vez presentes (en estado tal vez rudimentario) resultaron útiles para un desarrollo que condujo a su empleo en los mecanismos de vuelo.

[3737] No me ha sido posible ubicar con cierta exactitud cuándo o por quién se da esta situación. La lectura de historia de esa época da más la impresión de que fue algo que "estaba en el aire".
[38] Ocasionalmente son neutrales y simplemente permanecen.

De la misma manera podría pensarse que las matrices se introdujeron en la mecánica cuántica por un uso menor, casual: servir de esquemas de organización de datos. Como las plumas rudimentarias, una vez presentes pudieron encontrar otro uso que llevó a un desarrollo de mayor importancia. La idea de espectro matemático, los niveles de energía y otras circunstancias (tanto físicas como matemáticas) ejercieron una "presión evolutiva" que, en los términos de Prigogine, "forzó" sobre nosotros la transición de funciones a operadores.

Lo anterior no pretende ser más que meramente ilustrativo, por más que la idea tenga repercusiones interesantes y quizá valga la pena, en algún momento posterior, desarrollarla. Por ahora lo que interesa es constatar otro mecanismo de interacción entre la física y la matemática.

Sección 6. Analogías matemáticas.

Lo anterior forma parte significativa del contexto en el que proponemos analizar una de las tesis básicas de Steiner. Según él no podía haber habido una razón significativa para usar analogías matemáticas como herramienta de exploración. Para un ente racional no debería haber habido ninguna razón que lo condujera a escoger esa opción y no *cualquier otra*. Según Steiner esa debería ser la posición de los estudiosos de la mecánica cuántica. Sin embargo, penetran en un ámbito nuevo y pronto aprenden que sus leyes básicas deben ser fundamentalmente diferentes de las conocidas, y sin embargo escogen la "forma" de las leyes conocidas como punto de partida. Esta contradicción desaparecería si la convicción de los físicos fuera que ciertas relaciones quedan fuera de aquellas que se dan entre objetos de "nuestro" espacio-tiempo, y por lo tanto fuera de los cauces "normales" de investigación. Bajo esta premisas sería válido asumir conductas sustentadas en la convicción de que hay características de este universo que no son explicables en términos naturalistas, como el antropocentrismo. El científico sería por convicción antropocéntrico y sólo de palabra naturalista. Esto quedaría probado por su preferencia por analogías matemáticas. Steiner afirma con claridad que éste ha sido el caso entre físicos modernos de relevancia[39]. De palabra son naturalistas pero proceden "como si" el universo fuera antropocéntrico, pues utilizan analogías matemáticas. De manera implícita esto implica que en el sistema de Steiner esos físicos saben o intuyen que las matemáticas son antropocéntricas. De alguna manera deben o deberían saberlo.

Pero aun admitiendo que pudiese ser considerada extraña o limitada la estrategia de incursionar en ámbitos nuevos postulando que va a funcionar lo que ya funcionó en áreas muy diferentes, hay posibilidades de explicación de ese tipo de estrategias que no requieren la introducción de agentes extra-naturales. Hay principios heurísticos que indican la conveniencia de usar de nuevo lo que ya en alguna ocasión fue útil [Ayres].

Estos se basan en la repetición de situaciones, como en aquellas denominadas "de causa-efecto". Bajo ciertas condiciones la probabilidad de ocurrencia de un evento es prácticamente 1. La velocidad con la que un objeto llega al suelo está predeterminada por su velocidad inicial y la distancia que recorra. La velocidad al hacer contacto con el piso es predecible con una gran exactitud. Éste es un caso extremo, pero que indica hasta qué nivel de confiabilidad puede tener el suponer que una situación se repita y, por lo tanto, tenga sentido reaccionar ante ella de una manera experimentada con anterioridad y que ha llevado a una respuesta adecuada; exagerando la intencionalidad se podría decir que ha llevado a una respuesta exitosa.

Pocas veces tiene una situación real la nitidez de un experimento físico, por lo que el principio rector debe debilitarse a "ante situaciones similares procédase de tal o cual manera". A pesar de la ambigüedad del concepto de similitud, este principio sigue siendo útil, la probabilidad de que reaccionar de la misma manera conduzca al "éxito" ya no es 1, pero sigue siendo alta en muchos casos. Por ello es válido preguntarse si es algo poco racional que un físico incursionando en la mecánica cuántica decida expresar sus preguntas en términos de sus previos conocimientos. Steiner afirma que en un área "alejada de nuestra experiencia" esa

[39] Por ejemplo, afirma que Yang, en sus búsquedas, fue "claramente antropocentrista" [p. 70].

estrategia debería ser dejada de lado, para enfatizar que ese ámbito no se comporta como lo ya conocido.

Steiner mismo acepta que a fin de cuentas los físicos tuvieron éxito aplicando sus analogías matemáticas. Lo más inmediato sería ver esto como una confirmación del mencionado principio heurístico: se aplicó lo ya conocido a un campo que, dentro de sus diferencias sustanciales, se intuía similar (de alguna manera quizá no clarificada) y se tuvo éxito. Steiner afirma que no fue este el caso. Lo que se aplicó no fue ese principio, sino el conocimiento o la intuición de los físicos de que el antropocentrismo de las matemáticas permitía un acceso privilegiado al conocimiento de ámbitos "alejados de nuestra experiencia". Ésta es, en pocas palabras, la diferencia entre su posición y aquella que me parece tanto o más sustentada. La concepción y resultados de la física previa son un punto obligado de referencia de la nueva: "El plan de Bohr había consistido en mantener la partícula-electrón y modificar la mecánica newtoniana; Born y Jordan mantuvieron la mecánica newtoniana (por lo menos en la forma) y modificaron la partícula-electrón, sustituyéndola por algo que era desconocido, pero que sería, ciertamente, más complejo que una simple partícula" [Jeans, 1968, p. 382]. Pero no parece convincente afirmar que esto se debe a un conocimiento o intuición de un cierto antropocentrismo del universo reflejado en la forma de las leyes de la mecánica newtoniana.

Sección 7. Operadores.

Las funciones más habituales en la física por mucho tiempo eran aquellas donde el valor de la o las variables, y de sus imágenes, están dadas por un escalar o un conjunto de ellos[40], por ejemplo el tiempo en el primer caso y la posición espacial en el otro. Uno de los grandes avances de la matemática del siglo XIX, en especial en el área de lo que sería el álgebra lineal, fue haber sentado las bases para entender que una función puede estar definida sin problemas en un conjunto de

[40] Conjunto muchas veces dado en forma de vector.

funciones. Aún hoy día para algunos de nosotros es motivo de asombro constatar como una variable toma como valores funciones, e inclusive de manera continua. Asombro comparable al de pasar de la aritmética al álgebra elemental[41].

En física, la variación de parámetros como el tiempo, la posición espacial, la temperatura, la velocidad es fundamental para poder describir el estado de un sistema. La conjunción de la variación e interrelación de esos parámetros está dada por una función F que determina el paso del estado Q_i en el tiempo t_i al Estado Q_{i+1} en el tiempo t_{i+1}. ¿Qué pasa en casos donde además lo que varía es ese manera de conjuntar globalmente los valores de los parámetros? Si al pasar al estado Q_{i+1} la función F pudiese transformarse también en otra función, digamos F'. Para describir esta evolución hay que considerar una función de los posibles cambios de estado más una función de las funciones que regulan esos cambios de estado. O sea, una función (llamada *operador*) cuyo dominio de variación tiene a su vez funciones como elementos

El uso del concepto de operador no es algo que se adivina o se encuentra casualmente, sino que es una respuesta a una pregunta que surge en el proceder del físico: Si cada estado del sistema está dado (representado, descrito) por una función ¿qué debo usar para representar la variación de esos estados? Un operador, porque un operador es precisamente una función cuyo dominio es un conjunto de funciones. Esta no es una respuesta trivial, como lo pone de manifiesto el hecho de que los operadores estaban implícitos en las ecuaciones diferenciales sin ser reconocidos como tales. El físico clásico usaba matemáticas que son interpretables en términos de operadores. El problema no se había planteado a la manera del párrafo anterior, sino como el de determinar las condiciones que debía cumplir una función que representase al sistema buscado, como ser dos veces continuamente diferenciable, o tal que su derivada cumpliese esta o aquella condición en la frontera.

---

[41] Dicho sea marginalmente, lo que percibe gran parte de los alumnos de la escuela elemental no es asombro, sino una creciente dificultad. Superar esta situación es una de las tareas abiertas de la pedagogía de las matemáticas.

Desde este punto de vista la naturalidad del uso de este concepto no se da en función de que tenga "un claro correlato físico", sino en términos de la búsqueda de un conocimiento físico. Se busca una cierta descripción o representación, y el concepto se aplica porque es la respuesta, o una posible respuesta, a la pregunta que se está haciendo un físico frente a ciertas situaciones físicas. Las relaciones y objetos con los que se confronta la física rara vez tienen una única manera de ser representados matemáticamente, pero dado que un físico tiene ciertos objetivos en mente hay ciertos desarrollos matemáticos más apropiados, más "naturales", que otros para conjugarlos con el resto de su conocimiento y poder delimitar con mayor precisión el problema bajo análisis. Esta exigencia pragmática lleva a ejercer una cierta presión sobre los aspectos matemáticos.

Una de las razones para el desarrollo de un concepto matemático como el de vector, y más adelante el de tensor, fue la necesidad de darle una representación adecuada a objetos y situaciones que aparecían reiteradamente en la física[42]. Estaba claro cómo interpretar cantidades escalares y su evolución, pero ¿cómo representar objetos que tienen "magnitud, dirección y sentido", dicho con las palabras que aún hoy en día utilizan algunos físicos e ingenieros?.

A mediados del siglo XIX Hamilton cree haber encontrado la solución al desarrollar el concepto de cuaternión. Por ahora baste con decir que los cuaterniones son un concepto parecido al de vectores, con algunas diferencias específicas. La diferencia fundamental radica en que además de poderse sumar los cuaterniones pueden multiplicarse entre sí dando como resultado otro cuaternión. Lo único parecido para vectores es el producto cruz, pero éste es una propiedad única de ciertas dimensiones, como la tercera. Además la multiplicación de cuaterniones no siempre es asociativa. Los cuaterniones tuvieron bastante éxito en la física, pero se mantenía abierta la discusión pues para algunos no resultaban totalmente satisfactorios, dándose una serie de esfuerzos para delimitar otro concepto, hasta que se consiguió con el de vector. El problema no acabó ahí.

---

[42] Esta manera de plantear la situación es no-Steineriana,

En la física hay entidades que no pueden describirse ni como escalares ni como vectores. Por ejemplo, en mecánica del medio continuo se requieren básicamente tres números[43], en el caso homogéneo y constante, para describir el estado de esfuerzos de un cuerpo. Pero la información proporcionada por ellos no puede organizarse como un elemento del espacio vectorial tridimensional, sino que debe organizarse en forma de arreglo cuadrático (una matriz), rellenando con ceros los espacios faltantes. En tal situación se encontraban los pioneros de la mecánica cuántica. Ciertos conjuntos de datos sobre ciertos sistemas atómicos no podían manejarse ni como escalares ni como vectores. La necesidad de expresar esa situación llevó a esos investigadores a utilizar una idea de matriz, que lleva implícito el concepto de operador lineal. En oposición al caso de los vectores, resultó haberse ya desarrollado con anterioridad el concepto de matriz y de varias de sus propiedades algebraicas.

***

Es necesario aclarar qué es un cuaternión, dado que podemos asumir una mayor familiaridad con el concepto de vector. Una idea básica del concepto de cuaternión es que reproduce el proceso que permite pasar de números reales a complejos, una pareja de números reales es un complejo. De la misma manera, una pareja de números complejos es un cuaternión[44]. Por lo mismo un cuaternión es representable por cuatro números reales ordenados.

Esto último es una ventaja y una desventaja. Hay situaciones físicas que requieren en principio sólo tres números para ser identificadas, como la posición de una partícula en un cierto instante. ¿Qué hacer con el cuarto número? Pero en otras situaciones es útil, como para indicar ángulos de giro u origen de un giro o una traslación. Esta propiedad, que los acerca más a los operadores ortogonales[45] que

[43] Ya que es simétrico y tiene determinante positivo, existe una representación matricial del tensor de esfuerzos con los tres valores propios del tensor en la diagonal principal y ceros en las demás componentes.
[44] El proceso puede repetirse y formar nuevos números como pareja de cuaterniones, con los que a su vez se forman otras parejas, etc.
[45] Ya que estos operadores representan rotaciones.

a los vectores, los hizo resurgir, tras una pausa, en la mecánica cuántica como "espinores", y con su mismo nombre en la robótica y control de satélites.

Funciones con dominio en los cuaterniones son tan posibles como las funciones vectoriales, pero habría una diferencia formal interesante. Dadas las diferencias entre vectores y cuaterniones, la representación matricial de algunas de esas funciones sería un poco más compleja que una matriz. Esto tendría algunas consecuencias: Por ejemplo, la definición de linealidad, que se puede expresar de manera muy formalista, sufriría ciertas modificaciones sustanciales

Parecería que la introducción de las matrices en la mecánica cuántica se da en primer lugar por razones de organización y manejo de datos, y sólo posteriormente como representación de operadores, de manera similar a como una característica física se desarrolla en el curso de la evolución por razones que muchas veces poco o nada tienen que ver con el uso final que se le da, como las plumas, que surgen como Esto daría sustento a la idea de que hay conceptos más adecuados que otros para representar lo que un físico requiere, pues en algunas áreas de la física esos arreglos tomaron precisamente la forma adecuada para ser representaciones de operadores sobre espacios vectoriales, y no sobre espacios de cuaterniones. Lo que no depende de que haya una predilección estética entre los matemáticos por el concepto de "vector".

Claro está que puede alegarse que Bohr sí conocía los vectores, por lo que pudiese haber habido una propensión a ciertos arreglos, Inducida por el uso de ese concepto. La pregunta es entonces: ¿Se tendrían los mismos conceptos físicos en la mecánica cuántica[46] si los conceptos de álgebra lineal, tensor y matriz, no hubiesen sido aplicados en ella sino los conceptos de álgebra de cuaterniones? A pesar del interés de esta cuestión no es nuestra tarea profundizar en ella. Se deja abierta, como tantas otras.

---

[46] Y, de manera natural, también en otras áreas de la física con otros conceptos matemáticos.

Sección 8. El "misterio" de la aplicación de espacios de Hilbert en la mecánica cuántica.

Para especificar el papel de los espacios de Hilbert se comienza "precisando las asociaciones entre entes matemáticos y cantidades físicas relevantes que están en la base de la teoría.

a) A cada sistema físico S se le asocia un espacio de Hilbert H.

b) Los estados de un sistema físico individual S están descritos por vectores normalizados[47] en el espacio H [...].

c) Los observables físicos del sistema están representados por operadores autoadjuntos del espacio H" [Giradi, en [Boniolo 1997, p. 353]].

El que un vector esté normalizado significa que su longitud es 1.[48] Esta es una convención que permite simplificar cálculos y tomar ventaja de algunos teoremas de una manera más adecuada, pero su mayor importancia radica en que puede interpretarse como manera de expresar que un sistema se encuentra en un cierto estado con probabilidad 1.

Técnicamente, un operador A es autoadjunto sí $\langle A\varphi | \phi \rangle = \langle \varphi | A\phi \rangle$. Esto tiene diversas condiciones, la más importante en este caso es que esta propiedad garantiza que todos los valores propios de A son reales. De otra manera no sería posible asociar el espectro de A (el conjunto de todos sus valores propios) al espectro físico, por ejemplo. La propiedad física, las posiciones de las líneas de absorción o emisión, determina esa característica del ente matemático.

Si el estado del sistema en cada instante está dado por un vector de H, la evolución del sistema está dada por una función G del parámetro t $\times$ R en H. G depende también al menos de un cierto vector v_0 de H llamado "condición inicial". Puede llamarse "ley" a G, y G evaluado en v_0 la "particularización de esa ley a un caso concreto". El cambio o evolución de G debe permitir cierto nivel de predicción

---

[47] Con mayor precisión, por conjuntos de vectores módulo una fase, lo que denomina "rayos".

[48] Todo vector puede ser normalizado, o sea, siempre es posible encontrar una transformación lineal que a todo vector le asocie otro vector cuya única característica diversa al original es tener longitud 1. En general no se usa el concepto de "longitud", sino su generalización, el de "norma".

de los estados subsiguientes, ya sea determinística o probabilísticamente. En este caso G es llamado "operador de evolución", y corresponde al tipo de representación introducida por Heisenberg. En la representación de Schrödinger son los estados los que cambian o, como se acostumbra decir, "evolucionan".

La situación es análoga a la de la física clásica. Dado que los parámetros del sistema físico están dados por mediciones cuantitativas, y que toda predicción debe hacerse también en términos cuantitativos, es fundamental poder hacer cálculos, por lo que otra vez el concepto de espacio vectorial es parte del juego. Es más, de hecho muchos espacios de la mecánica clásica son, por definición, espacios de Hilbert, pues es gracias al producto interno que se manejan aspectos geométricos.

Además, también en la mecánica clásica el estado del sistema físico está dado por un vector, y su evolución es igualmente una trayectoria calculable gracias a una función de t y de un vector que representa las condiciones iniciales. El punto a) de la cita con que comienza este apartado es perfectamente aplicable a muchos de los sistemas clásicos. La normalización mencionada en el punto b) no es algo esencial, por lo que el resto del párrafo sería igualmente aplicable.

La diferencia radica en el punto c). En mecánica cuántica sólo se puede determinar el estado del sistema por medio de un operador autoadjunto, llamado *observable*, que representa la acción que un observador ejerce sobre el sistema a efecto de llevar a cabo una medición, inmersos tanto ese observador como el fenómeno observado en un sistema regido por ciertas leyes comunes a ambos (considerados como sistemas físicos).

Cada uno de esos operadores, como se comentó, determina una base particular del espacio, un sistema de referencia que lleva, por decirlo así, la huella del acto de haber hecho esa observación, representada por el operador. Lo que es medible entonces es una serie de valores que se interpretan como valores propios de un operador. Esta serie de valores, como señalábamos, permite reconstruir al operador, denotémoslo por A. Teniendo A se tienen también sus vectores propios, y con ellos se construye una base del espacio de Hilbert.

En H existen vectores v con la propiedad Av = λ.v, donde λ es un escalar. Cada uno de esos escalares se llama valor propio de A, y los vectores correspondientes se llaman vectores propios de A correspondientes al valor propio λ. El conjunto correspondiente a cada valor propio es un subespacio de H, y por ello es posible dar una base de ese subespacio. El conjunto formado por los elementos de cada una de las bases de todos los subespacios correspondientes a todos lo valores propios de A forma una base de todo H.

Todo vector de H tiene entonces una representación en términos de esa base. Se podría decir que de esta manera todo vector de H está siendo representado "desde el punto de vista proporcionado por A". Al efectuar otra observación, a la que corresponde otro operador B, se obtiene otra información, pues el vector de estado del sistema se contempla "desde otro punto de vista". El conjunto de observables u operadores es lo que permite obtener la información máxima del sistema, es lo que Steiner llama "principio de maximalidad":

"Si un espacio de Hilbert H representa un sistema cuántico Q, entonces cada base, o conjunto de 'ejes', de H corresponde a una propiedad física de Q, y cada propiedad física de Q corresponde a una base, o al menos a un subconjunto de una base, de H" [p. 39].

Dicho sea de otra manera, toda la información factible de ser obtenida (¿máxima?) sobre un sistema cuántico se obtiene estableciendo los operadores adecuados sobre *ese* espacio de Hilbert. Una vez que se tiene el conjunto de observables se puede obtener toda la información posible sobre ese sistema.

Un observable es entonces una de esas propiedades físicas. Los operadores autoadjuntos que las representan permiten acceder a la información correspondiente[49].

---

[49] ¿A qué información tenemos acceso? Aquí se engrana otro círculo de problemas relacionado con la intervención del observador. ¿Ha alterado nuestra intervención aquello que podemos saber del sistema cuántico? En caso de ser así, podemos preguntar de qué manera reflejan esos operadores nuestra intervención, entre otras cuestiones. No corresponde al presente trabajo incursionar en esta problemática.

En la física son fundamentales las cantidades invariantes, que se mantienen bajo cambios de base, como el determinante del operador. Sin embargo, hay ciertos aspectos de la información que se puede "leer" de un sistema que se ponen de relieve en una base y no es otras. En ciertos casos el proceso de pasar de un observable a otro puede interpretarse como un cambio de base, un proceso que inclusive es algoritmizable: hay procedimientos de cálculo para pasar de una base a otra. ¿Cómo es posible, se pregunta Steiner, que baste con un cambio formal de coordenadas para poder obtener otra información física? Éste es el principal problema:

"... podemos 'obtener' (read off) información acerca del mundo – de una manera no física y sin embargo también no deductiva – del formalismo. De esta manera se adquiere un sentido para la naturaleza misteriosa del concepto de espacio de Hilbert en su aplicación a la física" [Steiner, p. 177].

Basta con efectuar un cambio de base en el espacio H para obtener información física sobre el sistema (cuántico) representado por H. Ya que un cambio de base significa únicamente dar una matriz no singular (con determinante diferente de cero) y efectuar con ella una serie de operaciones, es algo puramente formal (según Steiner) que, sin embargo, conduce a obtener información física contrastable, directa o indirectamente, con mediciones.

Pero aun dejando de lado esos problemas (habría inclusive que plantearlos con mayor rigor y claridad), hay aquí una cuestión de fondo: Si bien puede haber procesos cuyo resultado *final* quede planteado de manera puramente "formal", esto no significa que *el proceso que llevó a esos resultados* haya sido necesariamente también "formal".

Por ejemplo, se acostumbra escribir las unidades de la aceleración como m/seg^2. Esto es una manera formal de decir que la aceleración representa la tasa de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, o sea, sus unidades son metro sobre segundo *sobre segundo*, (m/seg)/seg. Lo que puede rescribirse formalmente como m/seg^2. Y esto es formal porque elevar segundos al cuadrado no tiene un sentido físico directo, aunque sea una manipulación formalmente correcta. Tan correcta que es congruente con toda la física involucrada. Tampoco es una manipulación matemática, ya que la matemática actual no se ocupa de las unidades físicas. Es simplemente una manera simbólica y eficiente de expresar un resultado físico, lo que no implica de ninguna manera que la deducción o estudio de ese fenómeno físico hayan sido algo puramente formal.

Es innegable que hay un fuerte trabajo de ajuste, de prueba, inclusive de prueba y error, pero todo bajo el signo de los aspectos físicos que se busca representar. Esos aspectos son la "brújula" que guía el proceso. A su vez, lo que proporciona los medios para sobrepasar los "obstáculos" y variaciones del camino son las matemáticas. Inclusive, y tal vez esto sea de mayor importancia, permiten expresar de manera concreta los diversos *objetivos* físicos. El interés de esta situación es suficiente como para presentar un ejemplo un tanto extenso, pero ilustrativo y significativo.

***

Supóngase que se (re-)quiere mover un cuerpo rígido Ω de tal manera que todo punto del cuerpo se desplace con la misma velocidad en la misma dirección. Esto no es fácil, ya que la mayor parte de los movimientos, representados por funciones *f*, no sólo producen un desplazamiento del cuerpo, sino giros o vibraciones. ¿Qué forma debe tener el movimiento *f* para evitar esos desplazamientos adicionales?

Dado un punto p_0 de Ω que se toma como referencia (como el centro de masa o el centro geométrico), la velocidad de cualquier otro punto *p* del cuerpo viene dada por

$$v(p) = v_0 + r(p) \times \omega(p)\,, \tag{1}$$

donde v_0 es la velocidad de p_0, $r(p)$ el vector de posición de *p* con respecto a p_0 y $\omega(p)$ es la velocidad angular de *p*. Es demostrable que en este caso

$$\omega(p) = \frac{1}{2} rot\, v(p)\,. \tag{2}$$

A su vez este último término, el llamado rotacional de *v*, *rot v*, es, para cada punto *p*, el vector con coordenadas

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2},\quad \frac{\partial v_3}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_3},\quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1},$$

donde a su vez v_1, v_2, v_3 son las funciones que dan las coordenadas de *v* para cada punto *p*.

Una condición necesaria y suficiente para que el movimiento buscado tenga la propiedad deseada es

$$v(p) = v_0 .$$

Dado que el vector de posición no es el vector cero, esta condición implica que la velocidad angular de cualquier punto p sea cero, lo que en virtud de (2) implica a su vez la condición:

$$rot\ v(p) = 0 , \tag{3}$$

para todo punto *p*.

Dado que *v* es la derivada temporal *f*, y que el rotacional involucra derivadas de *v*, de (3) se pueden derivar condiciones que f debe cumplir de acuerdo al objetivo físico. O sea, la condición (3) expresa de manera concreta y rigurosa la exigencia física propuesta, la ausencia de giros o vibraciones en un desplazamiento.

***

En el caso de la mecánica cuántica, el operador autoadjunto A se establece con base en su capacidad de representar un aspecto físico del sistema bajo estudio y con base en las exigencias físicas del caso.

El que, al final, haya efectivamente una matriz tal que es factible efectuar un cambio de coordenadas de la base correspondiente a "A" y aquella correspondiente a "B" es, desde el punto de vista matemático, un lema resultante de la unidad profunda de los conceptos algebraicos involucrados (en especial del de base). Los conceptos matemáticos nunca están aislados de una teoría. En especial los operadores y sus representaciones matriciales son definibles sólo como parte integral de un espacio vectorial. Cualquier aplicación descriptiva que se haga de ellos conlleva un cierto espacio vectorial y, al menos, toda una concepción algebraica (y usualmente una concepción topológica). De otra manera ni siquiera como descripción serviría. Los desarrollos teóricos matemáticos están implícitos en esa descripción, y por ello, más que como un misterio, esta relación debe interpretarse físicamente como manifestación de la unidad profunda de las diversas maneras en podemos representar un sistema físico que se manifiesta ante nosotros.

***

Si se quisiera presentar la información que determina a una función continua de un intervalo [a, b] en los reales por medio de una tabla, ésta debería tener un número infinito de entradas. Es más, ni siquiera habría manera de dar una estructura a esa tabla, pues precisamente la demostración de que R tiene una cardinalidad mayor a la de N se basa en que no es posible dar una tabla estructurada de los números reales, pues en ese caso serían enumerables con N. La información específica que proporciona una función de ese tipo no puede entonces quedar explícita en una tabla. Todo esquema de cálculo es potencial y no necesariamente agota el sentido completo de la función. Es factible que otro esquema finito, otra forma o simbología, puedan iluminar mejor otros aspectos de la función (y disminuir la claridad de algunos que en otro esquema pudiesen ser mejor analizados).

Por ejemplo, dada una función lineal de un espacio de dimensión finita en sí mismo, es equivalente dar una representación matricial que dar su espectro. Parecería ser algo superfluo tener dos representaciones de la misma cosa si ambas proporcionaran exactamente la misma información. Sin embargo, es extremadamente útil tanto en matemáticas puras como en la física poder disponer de ambas representaciones.

El subconjunto de todos los vectores unitarios en un espacio de Hilbert representa el conjunto de todos los posibles estados de un sistema físico. Toda la información del sistema está representada por esos vectores, dada una función de transición de estados que permita representar la dinámica, o sea la secuencia continua de estados que representa su evolución. La única diferencia entre un cambio de coordenadas y la evolución de un sistema cuyos estados están representados por vectores unitarios es la interpretación que se hace de ello. Ambos están dados por operadores autoadjuntos[50], en la representación de Heisenberg.

En el caso de la representación de Schrödinger el que un observable esté dado por un operador autoadjunto A significa tanto que el sistema cuyo estado era el vector v cambia al estado Av, como el vector v pasa a tener la representación Av en el sistema de coordenadas $\{w_1, w_2\}$ donde Av = w_1 y Av = w_2, y $\{v_1, v_2\}$ es la base en que estaban expresadas las coordenadas de v.

***

Puede parecer efectivamente misterioso que haya un ente matemático que permita describir con tal capacidad una realidad física, tal como hasta el momento se ha presentado en el caso de los espacios de Hilbert. Como se mencionó "a cada sistema físico S está asociado un espacio de Hilbert H". Podría parecer entonces que el espacio de Hilbert contiene toda la información sobre el sistema, cuando en realidad es sólo una parte de ella. ¿Se diría de un espacio geométrico tridimensional que contiene toda la información sobre el movimiento de una partícula sólo porque representa el conjunto de todas y cada una de las posiciones posibles de la partícula? No, sin la ley que rige el tránsito de una posición a la que sigue, la dinámica, no hay manera de caracterizar a un sistema. No hay duda alguna de que cualquier trayectoria que pudiese seguir la partícula es un subconjunto de ese espacio geométrico. Pero ¿cuál de todas? Inclusive, determinar una sola trayectoria es poco útil. Las leyes que rigen al sistema son necesarias.

La forma matemática de esas leyes no queda determinada por la estructura de espacio de Hilbert. El "formalismo de espacio de Hilbert" aplica a cualquier sistema determinado por operadores lineales o por campos tensoriales. Por ejemplo, si lo que se quisiera analizar fuese un sistema donde el papel de los campos que decrecen de acuerdo a una ley cuadrática fuera sustituido por campos que decreciesen de acuerdo a una tercera potencia, o a una primera, y ese análisis se

---

[50] Dicho con más rigor, ambos están dados por una familia monoparamétrica continua de esos operadores, donde el parámetro se interpreta como el tiempo.

hiciese por operadores autoadjuntos, aplicaría exactamente el mismo "formalismo de espacio de Hilbert", pero no habría manera de "deducir del formalismo" información sobre sistemas objetivos. El formalismo no puede por sí mismo proporcionar información, sino ser la metodología para obtenerla en su aplicación en sistemas particulares que mantengan una relación especial (de correlación, descriptiva, expresiva u otra) con una clase de sistemas físicos. Se debe cotejar con los datos conocidos.

¿Qué es lo que proporcionan entonces los espacios de Hilbert? Como ya se comentó, siendo espacios vectoriales lo que proporcionan es un marco estructurado tanto para *definir* ciertos conceptos como para efectuar *cálculos*.

En el concepto de espacio vectorial no intervienen más que operaciones básicas, sencillas, que responden a las necesidades más elementales del trabajo de los físicos. Lo interesante, incluso asombroso, es que la estructura determinada por la combinación de esas dos operaciones, la de espacio vectorial, sea tan rica. En una primera instancia esa estructura permite un manejo sumamente organizado y controlado de sus unidades básicas, los vectores, por lo que, si es factible interpretarlos como representando la información de sistemas físicos, el manejo y la organización de esos datos se lleva a cabo por medio de la estructura algebraica con gran efectividad.

Lo anterior no debe entenderse sólo en un sentido técnico sino en términos de la adecuación de dos áreas del conocimiento bajo la premisa de requerimientos básicos. Esa adecuación brinda argumentos a favor de una relación, directa e indirecta, compleja, con altas y bajas, entre conceptos matemáticos y entidades físicas. Además de lo hasta ahora dicho, para explorar esta posibilidad habría aun que hacerse, entre otras, más preguntas concretas, como, por ejemplo, ¿por qué fue el concepto de espacio vectorial el que ha intervenido en algunos desarrollos fundamentales de la física moderna y no el de espacios de cuaterniones? ¿Por qué reapareció en otros desarrollos, pero ahora como "espinor"?

En el caso del infinitesimal vs. límite la cuestión puede también formularse de otra manera: ¿Puede haber ensayos, antecesores o diferentes versiones de los conceptos matemáticos? En 1975 Steiner opinaba que sí: "[This is merely the Quine-Neurath point that] we use our bad concepts to make good ones. We pull ourselves up by our own bootstraps. Once we have the good concepts, however, they remain independent; we know how to use them in their own right" [Steiner, 1975, p.36].

***

No se ha resuelto de manera categórica la cuestión de un posible "misterio" de la aplicabilidad de los espacios de Hilbert a la física. Ciertos hechos de la historia de la mecánica cuántica pueden interpretarse como indicadores físicos de la necesidad o posibilidad de usar espacios de Hilbert y operadores, como las líneas de emisión y absorción del espectro de un elemento o la necesidad de emplear arreglos matriciales para "administrar" la información. Este último caso permite inclusive pensar una analogía que quizá valiese la pena explorar en algún momento. En la teoría de la evolución es básico eliminar toda teleología. No se desarrollaron las plumas con el objetivo de volar, sino que por razones más inmediatas, como protección frente al frío, fueron surgiendo, y ya de avanzadas en su desarrollo encontraron una nueva e inesperada utilidad. De la misma manera se podría pensar que las matrices se introducen por una necesidad inmediata y más tarde son útiles de otra manera.

Pero no es el caso ahora especular, sino plantear la posibilidad de contraponer a la propuesta de Steiner otras opciones. Esto ha permitido explorar diversos aspectos del problema de la aplicabilidad de las matemáticas, tanto a nivel global como a partir de conceptos particulares. El problema se presenta ahora con una mayor complejidad.

Es esta complejidad lo que permite volver a llegar, desde este caso particular, a lo que nos parece el núcleo básico del pensamiento de Steiner y que ya se mencionó en el capítulo anterior.

Cuarta Parte. Conclusiones: Otra vez se encuentra la estructura lógica radical de la presentación de Steiner.

Como se ha comentado, Steiner no niega que haya aplicaciones "no misteriosas", inclusive ofrece algunos ejemplos. Tampoco niega que casos que hoy día pareciesen misteriosos en algún momento puedan dejar de serlo. Es por ello que la idea de presentar de manera detallada el caso de los espacios de Hilbert, sobre todo en sus aspectos matemáticos, no es la de ofrecer un contraejemplo que pudiese minar la estructura lógica de su argumentación, sino indicar que es la comprensión de los conceptos matemáticos lo que en mayor medida permite entender las razones de su aplicabilidad, y no necesaria ni exclusivamente el encontrarles un "correlato físico". La aplicación de la linealidad no deja de ser misteriosa sólo porque se constate un correlato físico, sino porque proporciona una estructura axiomática en la cual enmarcar con la precisión requerida nuestro conocimiento del principio físico de superposición.

Por otro lado, la presentación más a fondo de los conceptos permite ir discerniendo y delimitando los problemas filosóficos que surgen, y la riqueza de ellos, riqueza que ofrece muchas más posibilidades y caminos de los que es posible explorar en este trabajo, pero en los casos que ha sido posible se han ido indicando. Esto ha permitido enriquecer el contexto, lo que a su vez permite ver con mayor claridad, en contraste, el trasfondo radical de lo que Steiner plantea.

En especial, nos permite volver a plantear una duda, ¿por qué los argumentos de Steiner parecen poco desarrollados? Ello se debe, como se indicaba, a que en realidad no funcionan como elementos de cadenas deductivas estrictas, sino como elementos de un contexto en el cual el autor sostiene que su tesis no sólo es plausible, sino que el sistema generado teniendo como principio el antropocentrismo de las matemáticas es coherente.

Ahora bien, en el fondo lo que la discusión sobre espacios de Hilbert permite poner de manifiesto es la inmensa capacidad representativa o descriptiva de los conceptos matemáticos. Una de las dudas que surgen con respecto a la posición de Steiner proviene de una controversia conocida por el naturalista. ¿Es preferible una explicación basada en parámetros ocultos (para decirlo en el lenguaje de la física) que una haciendo apelación a aquello que se conoce, o es pensable sea conocido? ¿Es preferible pensar que la matemática tiene esa capacidad de expresión porque se ha desarrollado en un intercambio fructífero con el resto de nuestro conocimiento, aunque quizá cada vez de manera más mediata, o pensar que hay una característica del universo (el antropocentrismo) explicable a fin de cuentas en términos de alguna entidad o propiedad sobrenatural?

Al preguntarnos sobre la necesidad o no de introducir entidades fuera del espacio-tiempo hemos llegado al núcleo lógico de la presentación que hace Steiner de sus ideas. Ha usado la palabra "plausible". Ha dicho con toda claridad que "para él" el sentido matemático se reduce a lo estético. No argumenta formando una cadena lógica completa o completable para exhibir una tesis como necesaria dadas las premisas, sino para darle plausibilidad a una afirmación, para darle sentido y credibilidad a un *principio*.

En primer lugar la tesis Peirce-Steiner sería superflua si la argumentación fuese radicalmente estricta. Es suficiente con constatar que de una premisa antropocéntrica exitosa en ciencia, analogías matemáticas, se puede llegar de alguna manera a postular esa misma característica del universo. Un universo donde estrategias antropocéntricas son útiles, o aplicables con altas probabilidades de éxito, no está en contradicción con un universo donde también sea igualmente útil otro tipo de estrategias. Basta con que las estrategias antropocéntricas sean al menos tan eficientes como cualquier otra para que la tesis del antropocentrismo del universo reciba un buen espaldarazo (aunque es discutible sí sería definitivo).

Por lo tanto, para la deducción lógica de la tesis del antropocentrismo del universo basta con la tesis del antropocentrismo de las matemáticas. No haría falta postular o insistir en alguna incapacidad humana de acceder a conocimiento de áreas alejadas de nuestra experiencia. Lo que esta incapacidad proporciona es hacer ese antropocentrismo más plausible.

¿Cuál ha sido la sustentación de la tesis del antropocentrismo de las matemáticas? Que el criterio fundamental de introducción de conceptos en matemáticas es el estético. ¿Cuál ha sido la sustentación de esta afirmación? Yendo a lo más radical, todo se reduce por un lado a la constatación de que en la comunidad de matemáticos hay un consenso más o menos global de que hay un factor estético importante en la práctica y percepción de esta ciencia por sus practicantes. Por otro a la opinión de tres grandes matemáticos modernos acerca de la relevancia de ese factor. Todo esto puede y debe ser considerado seriamente como un indicador de alguna problemática, pero su fuerza argumentativa parecería poca, a menos que Steiner asuma que no haya otra explicación mejor[51]. Ya que si Steiner pretende estar empeñado en poner a un naturalista genérico (a cualquier naturalista) en un predicamento, no ha tenido éxito, pues no ha dado argumentos capaces de poner la estructura lógica del naturalista en problemas tan serios como para no tener más remedio que presentar principio contra principio. La fuerza de su argumentación no es tal que permita ubicarse en la estructura lógica de su contendiente, y desde ahí fundamentar deductivamente sus afirmaciones y, con ello, generar una contradicción dentro del sistema de su adversario naturalista, a la que éste no tendría más remedio que oponer un principio dogmático. En la página 72 afirma que la única manera de que un naturalista pueda contestarle es negar ciertos aspectos *a priori*, es confrontar al adversario con un background belief, o sea, un conjunto de principios. Esto es lo que el autor no ha conseguido.

Una manera de ubicarse en la estructura lógica de un contendiente es encontrar una serie finita y clara de principios admitidos como válidos tanto por una como por otra parte, y a partir de ellos demostrar deductivamente ya sea que la tesis propia es cierta, o que las tesis del adversario no lo son (o ambos). Desde una perspectiva estricta, las premisas presentadas, como la opinión de tres matemáticos, no son suficientes para sustentar al antropocentrismo de las matemáticas como conclusión. Steiner parte de que son convincentes. Mientras

[51] Agradezco al Dr. Axel Barceló haberme ayudado a encontrar la expresión correcta.

Steiner no amplíe su argumentación no ha conseguido dar una deducción o al menos una propuesta lógica que tenga suficiente fuerza como para que su adversario se vea cuestionado a fondo. *Stricto sensu* el antropocentrismo de las matemáticas se presenta como un principio y no como una consecuencia lógicamente necesaria de las premisas de que Steiner parte. No parece haber habido argumentos de suficiente peso de su parte, sobre todo a favor de su concepción de las matemáticas, que hagan preferible renunciar a una explicación más apegada al resto de nuestro conocimiento, como el naturalismo.

***

Una conclusión específica se puede ya establecer tras lo dicho en éste capítulo y el anterior. La tesis del antropocentrismo del universo se sustenta de manera fundamental en la tesis del antropocentrismo de las matemáticas. Pero ésta última no se presenta como un teorema dentro de un sistema deductivo estricto, sino parecería que se presenta como un principio (un "axioma") suficientemente convincente. Sin embargo, como se acaba de comentar, Steiner podría objetar que más que un principio, su afirmación forma la base de un sistema que proporciona la mejor explicación disponible. De manera estricta, Steiner no habla en ningún momento de un "argumento a la mejor explicación", pero creo hacerle justicia afirmando que para él el antropocentrismo proporciona una (en varios sentidos) mejor explicación de la efectividad de la aplicación de las matemáticas otras posiciones, a pesar de que no lleva a cabo más confrontación con otras posiciones que señalar que el naturalismo no puede dar una explicación adecuada de ese hecho.

Pero se ha visto que la tesis del antropocentrismo de las matemáticas no es más convincente, quizá menos, que otras opciones. No se consiguió, de su parte, enfrentar al naturalista a un misterio de magnitud tal que hubiese que invocar aspectos extra-objetivos como única opción para explicarlos. Hay otras posibilidades.

***

Con esto se ha cumplido con uno de los objetivos del presente trabajo. Ahora bien, lo que se buscaba no era simplemente explicitar el esquema lógico de un cierto autor, analizarlo y establecer si ese esquema deductivo cumplía o no con sustentar o al menos hacer plausible una cierta tesis. Se trata de aprovechar esa discusión para analizar algo más amplio, el problema filosófico que la aplicabilidad de las matemáticas representa o puede representar hoy en día. No bastaba con mostrar que una tesis está sustentada o no, sino mostrar que hay más elementos a favor de un planteamiento complejo e interesante del problema que no requiere y tampoco implica la introducción de factores extra-objetivos. En el siguiente y último capítulo, además de poner sobre la mesa algunos aspectos que considero son relevantes y que no pudieron ser discutidos con profundidad, se retoman los aspectos positivos de la discusión para hacer un balance de lo que se ha analizado y enfatizar cómo se han dado avances con respecto a los demás objetivos planteados al principio del trabajo.

Capítulo 5

Capítulo 5. Conclusiones. El proceder formal en la física.

Primera Parte. Contribuciones y conclusiones.

¿Representa un problema filosófico la aplicabilidad de la matemática? La discusión ha mostrado que ésta es una pregunta compleja. La relación de las matemáticas con el mundo de la experiencia o con lo objetivo ha estado siempre entre las preocupaciones de la reflexión filosófica sobre ellas. Su aplicabilidad es un aspecto de esa relación que ha ido adquiriendo un perfil cada vez más específico conforme la noción de aplicación ha tomado el sentido (o los sentidos) que tiene hoy en día. El concepto de "matemáticas aplicadas" es moderno, aunque tenga antecedentes previos. Para poder ubicar qué tipo de problema filosófico pudiese representar esa idea, la de las matemáticas aplicadas, hay que precisar qué se entiende o se quiere entender por "aplicar".

Ese no es el único problema que aparece al preguntarse lo que pudiese representar esa aplicabilidad. Diversas preguntas surgen conforme la reflexión avanza. Por ejemplo, habría que preguntarse si es la aplicabilidad de la matemática en su totalidad, como ente global, lo que puede llegar a ser un "problema", o es la posibilidad de aplicar tal o cual concepto lo que causaría esa problemática. Otro aspecto que podría ser considerado es el planteado por la evolución del concepto, lo que conlleva contrastar con algunos aspectos históricos. La enumeración de preguntas podría prolongarse, pero no es el caso. Lo que hay que poner de manifiesto es la complejidad del entramado atrás de la reflexión sobre la pregunta acerca del significado de la aplicabilidad de las matemáticas. Según Steiner la problemática filosófica surge de una respuesta a esa pregunta: ese significado viene dado porque hay (gracias al antropocentrismo) una relación especial entre el universo y las matemáticas. Creo que la discusión ha puesto sobre la mesa suficientes argumentos como para poder afirmar que la falta de respuestas definitivas es una de las razones en las cuales fundamentar la relevancia filosófica del problema.

Sin embargo, es posible que a lo largo del camino haya yo caído ocasionalmente en digresiones que pudiesen oscurecer un tanto el hilo argumentativo del discurso. Por ello es necesario preguntarse si ha contribuido la discusión de los capítulos anteriores a desbrozar el camino. Podría parecer que hemos discutido una serie de problemas particulares motivados por la crítica a un autor que afirma que efectivamente esa aplicabilidad representa un problema filosófico (al menos para ciertas corrientes de pensamiento). La crítica culmina con la aseveración de que las tesis de ese autor no han quedado suficientemente fundamentadas, lo cual implicaría que el problema que plantea quizá no fuese un problema adecuadamente planteado. ¿Significaría esto que no se han dado pasos firmes hacia una respuesta positiva, hacia la afirmación de que la aplicabilidad de las matemáticas representa un problema filosófico de interés?

Por lo contrario, tanto este trabajo como el de Steiner muestran que ya el mero hecho de tratar de plantear correctamente el problema involucra preguntas no sólo interesantes en sí mismas, sino relevantes para la filosofía de la física y la de cualquier otra ciencia donde aparezcan las matemáticas, así como ideas no negligibles en planteamientos de filosofía de la ciencia en general[1].

---

[1] Por ejemplo, según un conocido matemático francés, [Ekeland, pp. 106-109], nuestra noción de causalidad está entrelazada con la aplicación de un concepto matemático, el de sistemas completamente integrables. Esos sistemas son aquellos para los cuales las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange admiten una solución general [Ibíd., p.106]. Sólo una parte bastante pequeña de los sistemas físicos puede ser representada por sistemas de ese tipo. Para los demás sistemas, los no-integrables, no se dispone de soluciones generales, y por ello sólo pueden encontrarse algunas soluciones particulares con gran esfuerzo de cálculo. Esto motivó una fuerte concentración en los sistemas integrables, lo que a su vez llevó a darles una importancia excesiva que condujo a una noción especial de causalidad: "C'est sur la notion de causalité que l'éducation implicite donnée par les systèmes complètement intégrables a laissé les traces plus profondes. Ce qu'aurait dû nous apprendre la mécanique classique, c'est que tout est cause de tout : on ne peut pas isoler de filières de causalité particulières qui ferant dépendre certains événements de certains autres, et non de la totalité du devenir. Or c'est tout le contraire qui s'est passé : en raison de l'attention exclusive portée sûr les systèmes complètement intégrables, on a accrédité l'idée que les événements s'arrangent naturellement on chaînes, ou chaque maillon est la cause du suivant et l'effet du précédent, et que ces chaînes se déroulent parallèlement les unes aux autres. " [Ibíd., p. 108].

***

Con respecto a las tesis de Steiner, lo que analicé fue una tesis particular, una manera de enfocar el problema. Las debilidades de ese enfoque fueron puestas de manifiesto. Al menos en su forma actual esa tesis no tiene suficiente fuerza lógica como para constituir un problema para otras maneras, otras posibilidades de enfocar el círculo de problemas relacionado con la aplicabilidad de las matemáticas

Como se mostró, hay diferentes maneras de plantear cuáles pueden ser los criterios de selección de conceptos en matemáticas. Por ejemplo los criterios basados en aspectos racionales serían predominantes para alguien como Kline, quien, haciéndose eco de toda una corriente de pensamiento, afirma que las matemáticas representan algo esencial para el pensamiento racional. Esto último y la profunda interacción con la física indican con claridad una base fundamentalmente objetiva del desarrollo de esta ciencia. Es a partir de esta idea que se fueron analizando los problemas particulares, como el de la aplicabilidad de los espacios de Hilbert.

En mi opinión, al menos los siguientes aspectos de la discusión son pertinentes a una reflexión filosófica interesante y seguramente útil en otras áreas de la filosofía de la ciencia.

Los diferentes conceptos de "aplicación". Steiner insiste, con razón, en la necesidad de establecer los diferentes sentidos de lo que pueda ser "aplicar las matemáticas". En concreto aplicarlas a la física. Esto le permite, por un lado, delimitarse frente a ciertas problemáticas clásicas. Por otro, ubicar con precisión de qué problemas sí se ocupa e inclusive caracterizar un tipo de aplicación diferente, la de la matemática como fuente de "instrumentos de exploración" de nuevas leyes y conceptos en la física. En este trabajo se ha profundizado en la caracterización del concepto de aplicación.

Los problemas planteados por conceptos particulares. Para Steiner una aplicación particular deja de ser "misteriosa" en el momento en que se puede mostrar un "correlato físico" de ella. Dejando de lado lo que pudiese significar ese misterio, en mi opinión el asombro y el interés que la aplicación de un cierto concepto causan va más allá de la noción de "correlato físico". Los problemas planteados por la linealidad, por ejemplo, no se disipan en el momento en que establecemos su relación con el principio físico de superposición de soluciones[2].

El problema "global". Creo que es más adecuado pasar a la problemática global a partir de reflexiones concretas. Si hay suficientes casos de problemas planteados por conceptos particulares, la idea global de aplicabilidad no puede estar exenta de interés. Lo que no parece fácil es ubicar una sola razón, o una razón fundamental que determine el interés por esa pregunta. Steiner afirma que es el antropocentrismo la razón fundamental de que esa pregunta tenga interés filosófico. Ya hemos visto su argumentación, y sigue siendo más plausible pensar que la aplicabilidad de las matemáticas es interesante por diversas razones, algunas de las cuales han sido analizadas o comentadas en este trabajo, muchas otras ni siquiera mencionadas. A su vez esa diversidad se conjuga, o debe conjugarse, de la misma manera que la diversidad de instrumentos y sonidos de una orquesta se conjugan para ofrecernos una sinfonía.

La profunda interacción de la física y las matemáticas a lo largo de su historia. Esta interacción muestra cómo ambas ciencias se han influido mutuamente.

La idea de analogía matemática en las ciencias. Ésta es una contribución de Steiner que aún debe explorarse con profundidad, tanto en sí misma como por sus implicaciones.

Los problemas planteados por procedimientos formales de los físicos. Más de la mitad del libro de Steiner se ocupa de presentar casos detallados de esa manera de proceder. En este trabajo esos problemas han estado implícitamente atrás de algunas reflexiones, y de manera explícita se les dedica la segunda parte de este capítulo.

***

---

[2] El problema de la causalidad planteado por Ekeland surge precisamente por esta propiedad

La contribución principal de este trabajo radica en el análisis de los problemas planteados por conceptos y casos particulares, lo que a su vez encontró resonancia en una mayor precisión de la idea de aplicar las matemáticas y en posibles caminos hacia una comprensión global de lo que significa la aplicabilidad de las matemáticas. La aplicación de las matemáticas en la física implica un complejo proceso de interacción y mutuo condicionamiento entre ambas ciencias que a su vez puede influir, en mayor o menor medida, en desarrollos puramente matemáticos y físicos, propios de cada una de ellas.

Como se señalaba en la introducción, es mejor enfocar el estudio de los problemas planteados por la aplicabilidad de las matemáticas en la física a partir de la práctica concreta de las aplicaciones, tal como se dan en el proceder físico. De esta manera es posible ir dándole un sentido al entramado de interacciones y mutuas dependencias entre esas dos ciencias, y a partir de esa visión empezar a delimitar la problemática global. Al menos por el momento, es necesario entender cómo y, hasta donde sea posible, por qué los espacios de Hilbert proporcionan un marco adecuado para expresar y explorar la mecánica cuántica; por qué los números complejos permiten modelar aspectos de la hidrodinámica; por qué gran parte de las leyes físicas encuentran su expresión en ecuaciones diferenciales; etc. , hasta poder formular con precisión, de acuerdo a las diversas enseñanzas de esos casos, cuál es la problemática general. Por ejemplo, tanto el aplicar las matemáticas para calcular como para establecer analogías están íntimamente relacionados con la capacidad de representación de ellas, y por ello pudiesen verse como dos aspectos de lo mismo, siendo que no es lo mismo aplicar las matemáticas para hacer predicciones cuantitativas comprobables (calcular) como aplicarlas como medio de exploración cualitativo (exploración por medio de analogías).

Esto, por supuesto, no significa que debamos renunciar a entender los aspectos generales hasta dilucidar adecuadamente todos o casi todos los casos particulares. Nuestra comprensión de lo qué es la matemática, de lo qué es la física y sus interacciones ya permite formular planteamientos acerca de algunos de los problemas globales que hacen de esta problemática un caso significativo de estudio de la filosofía de la ciencia.

***

Los aspectos históricos no fueron tratados como problemas históricos o filosóficos en sí, pero intervinieron frecuentemente en la discusión. Lo mismo pasó con la idea de analogía matemática, que merece más atención de la que se pudo darle.

El último círculo de problemas, centrado en ciertas manipulaciones simbólicas de parte de los físicos, o de algunos físicos, es de interés tanto para la filosofía de la física como para la de la matemática. Para efectos de este trabajo no ha sido un punto muy discutido, a pesar de que Steiner le dedica varios capítulos. La inquietud al respecto me lleva a dedicarle unas cuantas páginas, sin ánimo de agotar el tema, antes de pasar a los últimos comentarios. Está temática permite también resumir buena parte de las ideas aquí vertidas.

Segunda Parte. Proceder formal de los físicos.

Steiner dedica los tres últimos capítulos del libro a dar cuenta detallada de cómo un cierto tipo de proceder fue fundamental en una serie relevante de descubrimientos físicos a lo largo del siglo XX. Él llama a ese proceder un "proceder formal". Lo 'formal' significa que en algunos puntos clave del planteamiento de nuevas leyes se dieron pasos basados en una pura manipulación sintáctica de elementos matemáticos, o que se asumió la forma de una ley a partir de la forma de otra, sin poder dar una interpretación física de las razones para proceder así.

Con diferencias en el énfasis, y sobre todo en la interpretación final, las inquisiciones históricas de Steiner parecen describir adecuadamente lo que tuvo lugar. El hecho con el que nos confronta Steiner es:

Hay ámbitos de la física en los cuales se ha dado al menos un descubrimiento importante gracias a haber procedido en lo fundamental de acuerdo a metodologías que involucran solamente la forma del conocimiento matemático.

Un ejemplo clásico es el del proceso llamado "cuantización": Se toma una ecuación válida en la mecánica clásica que esté en función de las posiciones e impulsos de una partícula, y se hace una sustitución de esas variables por una función "parecida" cuyas variables son operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert. Todo esto sin explicitar razones físicas que indiquen la pertinencia de esa sustitución.

Llegar, pues, a descubrimientos físicos relevantes usando aspectos formales de otra ciencia[3], sin interpretación física, no debería menos que causar asombro. Steiner pretende hacer llegar las raíces de esta situación hasta características generales del universo. En su caso el asombro desaparecería debido a que la aplicabilidad de las matemáticas está condicionada por algo muy general: Si el universo fuese antropocéntrico, no sería de extrañar que estrategias antropocéntricas fueran eficaces. Quien no acepte el antropocentrismo debe proponer y analizar otras opciones de interpretación de ese hecho. Eso es lo que presento en esta parte.

***

Hay efectivamente un alto grado de manejo formal en la práctica de la física, que se da sobre todo en aspectos básicos. Un ejemplo muy representativo es el manejo del símbolo $\frac{dy}{dx}$. Se procede con él como si fuera una división, como en el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
&y'(x) = 4 \\
&\frac{dy}{dx} = 4 \\
&dy = 4dx \\
&\int dy = 4\int dx \\
&y(x) = 4x + C
\end{aligned} \tag{1}$$

Esto no tiene ningún sentido conceptual, ya que ese símbolo no representa una división, sino un límite, y no se debe separar como si se tuvieran un numerador y

[3] De manera estricta, usando aspectos formales de dos ciencias, la matemática y la lógica.

un denominador. Se está abusando de una notación que es sólo algorítmica: el método empleado en (1) permite calcular la función buscada en muchos casos de interés para la física. El tener éxito parecer ser entonces suficiente razón para llevar a cabo un proceso de manera formal, sin atenerse al significado matemático del símbolo.

Además del anterior, documentables desde libros de texto hasta las propias reflexiones de algunos físico, pasando por la práctica cotidiana, hay suficientes ejemplos representativos que permiten afirmar que es una práctica usual en la física moderna aprovechar los aspectos algorítmicos, de cálculo, de ciertos conceptos matemáticos sin tomar en cuenta y a veces contraponiéndose al significado matemático de esos conceptos. Las prácticas que documenta Steiner son complementarias a esta manera de proceder. La alta tasa de éxito en las manipulaciones formales básicas da un sustento heurístico a extrapolarlas a otros aspectos, como el uso de analogías matemáticas.

En lo que sigue daré argumentos conducentes a mostrar que esas prácticas formales se encuentran enmarcadas en una clara concepción del problema físico. Esto, por su parte, puede dar claves acerca de la manera en que el conocimiento matemático expresa el conocimiento físico. La concentración casi exclusiva en los aspectos de cálculo no ha permitido, en parte de los casos, obtener el mejor provecho físico de la profundidad de los conceptos matemáticos que se manejan. El conocimiento profundo de un concepto matemático debe encontrar un puente hacia el conocimiento físico ahí donde aparece. En mi opinión en casos significativos la física no ha aprovechado adecuadamente el conocimiento matemático. Claro está que sustentar esta afirmación rebasa los límites y la temática de este trabajo, por lo que debo restringirme a un par de ejemplos que indiquen lo que quiero decir. Es necesario remarcar que a largo plazo la tendencia es a incorporar los últimos desarrollos matemáticos.

En algunos libros de texto[4] avanzados, tanto de teoría de la relatividad como de mecánica del medio continuo, véanse por ejemplo [Das], [Foster], [Mould], [Narasinham], se encuentra todavía como definición de "tensor" algo en el siguiente tenor:

"Un tensor es un arreglo de n por n números a_{kl} que al cambiar de base mediante la matriz $C = (c_{ij})$ cambian a $a'_{ij} = \sum_l \left(\sum_k (c'_{ik} a_{kl}) c_{lj} \right)$, *donde las c'_{ik} son las componentes de la matriz inversa de C. Usando la convención de Einstein de sumas sobre índices repetidos se tiene* $a'_{ij} = (c'_{ik} a_{kl}) c_{lj}$."

Sobre esta definición se construyen otras, como la de tensor covariante o covariante según la posición de los índices, o las diferentes operaciones que pueden llevarse a cabo son esos arreglos.

Esas definiciones no son incorrectas, y en principio son suficientes para llevar a cabo cualquier cálculo requerido. Sin embargo dejan de lado los aspectos algebraicos. No se pone el énfasis en la estructura generada por esas operaciones, sino en la posibilidad de efectuar cálculos específicos, siendo que desde el punto de vista matemático lo que da validez a los cálculos es el marco estructural, mucho más fructífero que el simplemente calcular.

En mi opinión la física se enriquece cuando se deja de lado el puro hecho de poder calcular con tensores para pasar a fundamentar la física correspondiente en las estructuras algebraicas que conllevan y definen al concepto de tensor.

Otro caso, que afortunadamente ha sido superado, es pasar de la definición de vector como "algo con magnitud, dirección y sentido", al concepto de vector como elemento de un espacio vectorial.

---

[4] Considero más representativo de las corrientes de pensamiento los libros de texto, pues es con ellos que se forman los nuevos físicos.

Sección 1. ¿Qué tan formal es el proceder de los físicos?

Supóngase que en un área de la física es válida una ley con la forma:

$$e^{p} + pq + 3 = 0, \quad p = p(q,t), \tag{1}$$

Donde *p* es una función de *q*, que representa las variables o los conjuntos de variables que junto con el tiempo *t* intervienen en el problema. La función exponencial aparece en el primer término, el segundo es una multiplicación y el tercero una constante numérica. La suma de los tres términos debe dar entonces cero.

¿Qué significaría proceder por analogía a partir de esa ecuación como herramienta de exploración en otro ámbito físico? Una posibilidad es, si (1) corresponde a la mecánica clásica y se quiere obtener un análogo cuántico, úsese un cambio de las variables numéricas por operadores (dicho con rigor: campos de operadores), el resultado es una nueva ecuación que debería funcionar análogamente como ley. Adáptese, de ser necesario, la nueva expresión por medio de reglas sintácticas para ver si es posible que dé cuenta de los fenómenos registrados en la mecánica cuántica, o permita hacer predicciones comprobables.

Esta formulación soslaya, sin embargo, dos preguntas fundamentales. Primero la pregunta por la razón de escoger precisamente las ecuaciones de la mecánica clásica, y no las de, digamos, el electromagnetismo como base de la analogía. Dicho de manera general, si hay n ámbitos previos de la física, A_1, A_2, ..., A_n, y un nuevo ámbito B, del cual, como dice Steiner, no se sabe mucho más que su diferencia fundamental con los A_i, ¿cómo saber de cual de los A_i es posible inferir analogías con cierta posibilidad de ser correctas? Y aun habiendo ubicado un ámbito como prometedor, ¿cómo es posible seleccionar de entre todas las leyes válidas en ese ámbito la ley física particular en cuya forma se base la analogía? De ser congruentes con los planteamientos de Steiner no habría ninguna manera objetiva de darle preferencia a uno u otro ámbito, una u otra ley.

Pero los físicos de sus ejemplos, que consideramos representativos, no parecen tener muchas dudas, o al menos saben *grosso modo* cual ámbito está relacionado con B. Tampoco parece ilimitado el conjunto del cual escoger las leyes físicas a emplear en las analogías.

Para evitar, en una primera instancia, involucrar aspectos concernientes a la física, y sin embargo dar una idea de la magnitud del problema, es conveniente restringirse al ámbito estricto de las analogías matemáticas. Supóngase que por alguna razón ya se ha establecido que la ecuación (1), que representa una ley física del área A_1 de la física, debe ser adecuada como base para establecer una ley en el ámbito B. Surge entonces la pregunta de *cuál* analogía debe emplearse. La mecánica cuántica ha mostrado la posibilidad de sustituir a p y q por sus equivalentes como operadores, P y Q. Pero esa no es la única posibilidad. Si p y q son escalares, podríase sustituirlas por sus equivalentes vectoriales, p y q. O, en otra sustitución clásica, podrían seguir considerándose escalares pero pertenecientes a otro cuerpo, por ejemplo pasar de reales a complejos.

O manteniendo el mismo cuerpo de escalares, podríase dar una formulación integral, como:

$$\int \left(e^{p} + pq + 3\right) dq = 0, \quad p = p(q,t),$$

Lo que permitiría pasar al dominio de las funciones integrables, o sea, se permite ahora un número finito de discontinuidades de primer orden (aquellas que tienen lugar en un conjunto de medida cero, como un “salto” en los valores de la función) en el integrando. Otra opción también usada es sustituir formalmente el término de la izquierda por cualquier otra expresión con la misma solución, o con una solución que pueda verse como aproximada, aunque quedase en otro espacio, como en un espacio de interpolación.

No hay una, ni siquiera sólo un número pequeño de posibilidades de analogías matemáticas. Las posibilidades son múltiples, en varias direcciones, de diversa índole. Decir, como dice Steiner, que se procede por medio de analogías matemáticas es dejar dos posibilidades abiertas. En primer lugar no hay manera de saber cuál es la analogía adecuada, y en principio se debería estar probando el mayor número de posibilidades, sin saber a ciencia cierta cuál es la adecuada. La segunda es que hay criterios o al menos líneas directrices que permiten dejar de lado casi todas esas posibilidades y concentrarse en algunas que permiten entrever mayores probabilidades de llegar a lo buscado.

Dado que hay un éxito que sobrepasa lo puramente aleatorio, debe haber alguna o algunas estrategias que orientan al físico. Se tienen diversas posibilidades, y a efectos de la presente discusión la pura presencia de diversas posibilidades es significativa[5]. Por ejemplo:

1. La información que se puede obtener sobre el ámbito B indica que hay rasgos de semejanza con ámbitos ya conocidos. Dado que precisamente se está buscando, y no se tiene, la expresión matemática de las leyes de B, la semejanza no puede basarse más que en consideraciones físicas. Esa semejanza dará líneas directrices en la dirección y manera de uso de las analogías matemáticas.
2. Los rasgos de semejanza entre dos ámbitos pueden ser de tipo cualitativo. En este caso al experiencia y la intuición juegan un papel fundamental, y en ocasiones pudiesen ir aparentemente contra la información cuantitativa de que se dispone. Steiner nos da un buen ejemplo de esta situación al mostrarnos como se usaron en mecánica cuántica ecuaciones de la misma "forma" que en la mecánica clásica, a pesar de que la información concreta de que se disponía señalaba diferencias básicas entre esos ámbitos.
3. En la práctica real de la física es usual combinar ambas estrategias, la basada en aspectos cuantitativos y la basada en aspectos cualitativos. De hecho, en muchos casos es difícil separar esos aspectos.
4. Estrategias heurísticas. Es este un rubro sobre el cual cabría una amplia discusión, lo que no puede ser el caso en este trabajo. En una primera instancia sólo se habla de metodologías generales de resolución de problemas, en el sentido presentado en [Ayres y Nalebuff]. En especial es

[5] Como señalé anteriormente, si Steiner tiene en mente algo parecido a un argumento a la mejor explicación, plantear opciones válidas resta fuerza a sus conclusiones.

pertinente a la presente discusión el siguiente principio: "Toma lo que ya conoces como correcto y construye sobre eso" [Ayres y Nalebuff, p. 96]. Esto puede tomarse en dos sentidos. Uno más restringido, donde se toma lo que se conoce sobre el problema específico. De manera más amplia se puede plantear el principio heurístico de interés de la siguiente manera: Si una estrategia ya conocida te ha dado resultado en una situación X, y hay la posibilidad de que el ámbito X' sea "similar" en algún sentido a X, usa la misma estrategia, con posibles cambios. En concreto, si determinada formulación matemática ha sido empleada con éxito en la mecánica clásica, y hay indicios, así sean puramente cualitativos, de que en mecánica cuántica ciertos sistemas pudiesen ser similares a los previamente considerados, usa la misma formulación, o alguna similar, para tratar de encontrar la representación matemática adecuada.

5. En este trabajo no se ha considerado la posibilidad de que las matemáticas sean constitutivas de nuestra experiencia. Quizá haya sido, por ejemplo, la elección un tanto arbitraria de las leyes de la mecánica clásica como base de las analogías en mecánica cuántica lo que determinó que nuestra visión del mundo se desarrollara en la dirección actual, a partir de las relaciones matemáticas empleadas. Sin embargo, las razones que pudiesen haber llevado a esa aplicación o a alguna otra no tienen porque ser arbitrarias o basarse en criterios subjetivos. También en este caso hay diferentes opciones para explicar el mismo hecho desde diversos puntos de vista y con la misma plausibilidad. No cabe en este trabajo una discusión de estos problemas, pero con seguridad algunas de las consideraciones aquí presentadas podrían ser relevantes en ella.

En mi experiencia como "matemático aplicado" la tercera tesis es la que se presenta como más adecuada a un científico, en especial a un físico. También, como se ha visto, la cuarta opción ha sido empleada con éxito.

Ahora bien, si bien para esta discusión es relevante que haya diversas posibilidades en las estrategias con las cuales se pueden enfrentar nuevos conocimientos físicos, esto no elimina de manera inmediata algunos de los aspectos extraños del hecho presentado: ese proceder formal. Su descripción se vuelve más compleja.

Hay aún que aclarar bajo qué criterios pudiesen clasificarse fenómenos físicos como "similares", dado que el problema se planteó en lo referente a la matemática. Esos criterios deben ser los criterios más generales de la física, aquellos que permiten entender a esta ciencia como unidad. La ventaja en este caso es que se ha establecido con un alto grado de claridad lo que es la física en general, o de qué se ocupa la física. Los planteamientos correspondientes acerca de las matemáticas son más ambiguos. No es factible dar en unas pocas palabras esa caracterización, pero en el quehacer del físico es percibible, por ello se procede a dar una descripción interpretativa de qué es lo que tiene lugar cuando se habla de que los físicos proceden formalmente con cierta frecuencia en su proceder de búsqueda.

Sección 2. Una propuesta.

Es postulable el siguiente esquema más amplio y modificado del hecho que Steiner presenta:

A partir de cierto nivel de evidencia acumulada, empieza a perfilarse un nuevo ámbito B como posible área de exploración para la física. Esa exploración primaria[6] permite una clasificación tentativa de B como similar a un ámbito más conocido, digamos A_k. Esta clasificación se basa en consideraciones físicas y heurísticas.

Si investigaciones posteriores permiten dar mayor plausibilidad a la clasificación, es posible tratar de identificar relaciones físicas similares en uno y otro ámbito. Es

---

[6] Aquí se está abstrayendo del "cómo" es que se llega a esa acumulación inicial de evidencia y cómo se lleva a cabo esa exploración primaria. Esos aspectos serían de interés para la filosofía de la física, pero para este trabajo se asume que se llega a esa evidencia y que es factible proseguir explorando ese campo, aún no delimitado con precisión.

entonces cuando surge la posibilidad de establecer analogías matemáticas, ya que si se sabe que las relaciones de tipo Ψ en A están regidas por el sistema matemático φ y que además son "similares" a las relaciones de tipo Φ en B, es factible suponer que si existiese un sistema matemático ϕ que rigiese a las Φ, entonces debería haber alguna semejanza entre ϕ y φ. La clasificación de fenómenos como "físicamente similares" debe dar una idea de cuáles serían los tipos de relación formal ente esos dos sistemas, junto con un detallado estudio de las características físicas de los fenómenos.

***

Las ideas mencionadas acerca de las relaciones formales pueden quedar un poco más claras si se concretiza a un nivel más cercano a la práctica actual. Por ejemplo, al identificar las variables físicas independientes y dependientes en B y analizar cómo condensar en cada una de ellas la información física apropiada y disponible, se puede establecer formalmente qué tipo de variable debe ser. Una vez que un cierto tipo de fenómeno ha sido identificado como factible de ser estudiado, se puede establecer qué información se requiere para fijar su comportamiento en el tiempo. Si una ocurrencia particular del fenómeno queda adecuadamente caracterizada con un número, se asociará con una variable real, escalar. Si dos o más números son requeridos para esa caracterización, surgirá la posibilidad de que sea una variable vectorial. Ya con cuatro números puede darse también la posibilidad de que no sea vectorial, pudiendo serlo, sino tensorial. Discernir cuál de estas posibilidades es la adecuada puede resolverse de diferentes maneras formales. Una de ellas es la conveniencia o necesidad de cálculo. Ciertos arreglos se conjugan de maneras más adecuadas que otras, o proporcionan tras combinarse un tipo específico de variable, que depende de las necesidades o la congruencia físicas.

Un operador puede interactuar, *operar* con un vector, siendo el resultado un vector. La interacción entre dos vectores puede dar un escalar, si se usa el producto interno. Por lo tanto, si se observa que un cierto campo de propiedades altera un fenómeno vectorial dando como resultado otro del mismo tipo, se puede concluir que el campo de propiedades físicas tiene la posibilidad de ser expresado como un campo de operadores. En otro caso físico, se pudiese estar tratando de predecir la concentración de una sustancia en otra. Esa concentración se expresa en general normalizada al intervalo [0, 1], o al intervalo [0, 100]. El campo de concentraciones será un campo escalar. Sin embargo, en la determinación del escalar buscado intervienen variables vectoriales, en especial la velocidad del fluido. Es muy útil el producto interno para poder llegar a un escalar a partir de vectores. Por lo tanto hay que determinar qué variables están interactuando con la velocidad para poder establecer si esa interacción se da con un escalar como resultado. De ahí es posible deducir formalmente que la otra variable debe ser también vectorial, y que las multiplicaciones deberán equipararse con productos internos.

Hay otras posibilidades, pero es importante tener en cuenta que en el proceso de identificación se pueden dar razonamientos formales motivados por consideraciones extra-matemáticas, en este caso físicas, a efecto de llegar a un resultado preestablecido por esos requerimientos o determinaciones..

Una vez que se ha determinado el tipo de las diversas variables, es factible tratar de establecer qué tipo de transformación formal podría usarse para pasar de la ecuación que representa a una ley a un análogo en el otro ámbito. Supóngase que en un caso concreto se ha identificado que la variable independiente en la manifestación del fenómeno en B es tensorial, y la dependiente escalar. Sus análogos en A_k sean uno vectorial y el otro escalar. Una de las opciones inmediatas es pensar que quizá para generar la ecuación análoga en B sea adecuado tomar la misma ecuación que en A_k, pero efectuando una transformación a variables tensoriales, de manera parecida a como una transformada de Laplace le asocia a cada elemento de un cierto conjunto de funciones otra función, pero definida en otro espacio, donde las variables y las relaciones entre ellas no son del mismo tipo, pero la asociación permite alternar entre ambas formulaciones y obtener información de una y otra.

***

La heurística puede ser muy formal en cuanto a los aspectos matemáticos. Muy formal en primer lugar porque no se procede de una manera que los matemáticos consideren rigurosa. Se sustituye o altera sin justificar las razones o exhibir el significado matemático de lo que se hace. Se procede lo más apegado a ciertas reglas, de manera mecánica, dejado de lado otras, junto con parte sustancial del conocimiento matemático. Dos ejemplos relativamente sencillos proporcionan una muestra adecuada de lo que se entiende por proceder formal de acuerdo a esta interpretación. El primero es el ya mencionado del manejo del símbolo $\frac{dy}{dx}$ como una división.

Otro ejemplo muestra que no porque haya una cadena de frases simbólicas manipuladas de manera sintáctica que conducen a una respuesta correcta se garantiza que el proceso esté correcto, mucho menos riguroso. Una cosa son las reglas formalmente correctas y otra la corrección del proceso en su totalidad. Esto puede verse en el caso de la definición del uso del operador ∇. se considera al operador ∇ como una entidad abstracta de tres componentes escritos uno encima del otro:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

que interactúa formalmente con los elementos de un espacio vectorial sin ser elemento de ese espacio. Por ejemplo, sea u una función del espacio de puntos E^3 en R. Para cada punto su gradiente es un vector de R^3, denotado en coordenadas:

$$grad\ u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix}.$$

Si se utiliza de manera formal la definición de producto interno de R^3 se obtiene el llamado laplaciano de u:

$$\Delta u = (\nabla \bullet grad\ u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Este proceder es formal porque toma sólo el aspecto manipulatorio de una operación que sólo puede ser definida en una estructura vectorial adecuada. Para empezar un producto interno es una operación que a cada dos elementos de un mismo espacio vectorial les asigna un escalar. El operador ∇ puede ser elemento de un espacio vectorial de operadores, pero de ninguna manera se encuentra en el mismo espacio vectorial que el vector $v \in R^3$. Se deja de lado todo aquello que le da sentido a un producto interno para quedarse con una pura regla sintáctica Se ha pasado al ámbito de la pura manipulación simbólica.

***

Aun matizando y tratando de verlo de una manera más compleja, es un hecho el que una ciencia, la física, ha utilizado como herramienta de exploración aspectos formales del manejo de relaciones matemáticas.

La extrañeza que causa la anterior afirmación proviene del uso de procesos formales (en un uso un tanto ambiguo de la palabra se habla de procesos sintácticos) sin justificación física para llegar a resultados predecibles, confirmables. Pareciera que sin una guía confiable, el proceder formal no fuese capaz de distinguir el camino correcto entre la madeja de posibles combinaciones sintácticas, lo cual es precisamente uno de los pilares del argumento de Steiner. ¿Cómo es posible, entonces, que esos procederes lleven al éxito?

Hay que preguntarse dos cosas. En primer lugar si esas manipulaciones sintácticas en verdad no tienen nada que ver con ideas físicas. Por ejemplo, al menos algunas de esas manipulaciones se hacen con la clara intención de llegar a un resultado físico especificado.

En segundo lugar habría que tratar de entender en qué medida esas manipulaciones pudiesen carecer de significado matemático, o sea, en qué medida pudiesen ser puramente “formales”. Esto se ha discutido en gran parte de este trabajo. Esta discusión ha indicado cuan problemático es dar un concepto de forma en matemáticas que diferencie con precisión entre forma y significado, caso de que fuera posible establecer ese concepto. Sería inclusive cuestionable que un concepto o procedimiento que careciese por completo de toda referencia a un significado matemático pudiese ser considerado precisamente como algo matemático. Inclusive para poder negar todo significado matemático ese concepto o procedimiento debe tener (al menos) la posibilidad de hacer referencia a lo matemático, cuando no la posibilidad de ser o haber sido un ente matemático. Por ejemplo, la manipulación del símbolo $\frac{dy}{dx}$ como si fuese una división no se hace para obtener el resultado de ninguna división sino siempre dirigida por la conciencia de que ese símbolo representa una derivada.

Desde un punto de vista estricto, esa manipulación no sólo es puramente sintáctica, sino trasgresora. El símbolo $\frac{dy}{dx}$ no representa una división, sino un límite, y no debe ser tratado como una división. Esta trasgresión sólo tiene sentido dentro de las matemáticas. El afirmar que el significado de este símbolo puede ser “dejado de lado” y tratarlo como una división sigue siendo una afirmación que se da en función estricta de lo matemático, aunque sea trasgrediéndolo.

Tercera Parte. Lo formal y lo físico

Supóngase que en el mencionado ámbito B se puede caracterizar a un aspecto de un fenómeno como algo similar a una velocidad. ¿Hay criterios físicos para ello, o es algo arbitrario asumir esa semejanza? En principio todo proceso que tiene lugar en el tiempo es factible de ser analizado con respecto a la relación de cambio temporal. Si se establece que la función V que representa esos aspectos es (o puede ser) vectorial, varía con el tiempo, $V = V(t)$, existe un campo $U = U(t)$ que proporciona los cambios espaciales y es tal que para cada punto e instante se tiene $\frac{\partial}{\partial t}U = V$, es entonces una posibilidad que *V* tenga las características físicas de una velocidad. Por lo tanto, no es difícil que en B haya aspectos de algún fenómeno que presentan, tanto desde el punto de vista físico como matemático, similitudes físicas y matemáticas con lo que es una velocidad.

El físico sabe que la velocidad no es algo que se da por sí solo, sino que es un parámetro que interactúa con otros, y por lo tanto su comportamiento no puede ser arbitrario, sino que se da en un contexto que por un lado lo condiciona y por otro lo hace intervenir en otras representaciones. O sea, la velocidad interviene en ciertas leyes físicas. Son estas leyes las que se están buscando y para las cuales se postula una cierta *forma* matemática.

¿Hasta qué punto es arbitraria esa forma? Es ésta otra manera de preguntar por lo que sea la forma en matemáticas. Un problema básico radica en la imposibilidad de separar nítidamente lo que es forma y contenido (o cualquier otro nombre que quiera dársele). Hacerlo es, en mi opinión, un error de Steiner. En un proceder puramente sintáctico el alfabeto carece de significado, es sólo un conjunto de símbolos que pueden combinarse de acuerdo a ciertas reglas para formar "palabras" válidas. Estas cadenas de símbolos pueden, a su vez, ser elaboradas y manipuladas para llegar a nuevas palabras válidas.

En oposición, los símbolos matemáticos básicos sólo pueden manipularse adecuadamente bajo la premisa de tomar en cuenta su significado. Por ejemplo, las dos cadenas

$$\frac{ax}{ay} = d, \quad \frac{dx}{dy} = c$$

pueden entenderse como cadenas del mismo tipo, constantes multiplicando a escalares igualadas a otra constante. O diferentes, en la primera constantes multiplicando a escalares, la segunda como una derivada. En el primer caso la manipulación formal

$$ax = ayd; \quad dx = dyc$$

es válida, no lo es para la segunda igualdad.

Las manipulaciones formales que se llevan a cabo en la física muchas veces no respetan esta situación, pero tampoco pueden desentenderse por completo de ella. Ciertos tipos de símbolos sólo pueden interactuar de una *forma* específica con otros. Esta frase puede escribirse también como: Ciertos tipos de símbolos sólo pueden interactuar de una *manera* específica con otros. Al cotejar ambas frases se tiene otro planteamiento para la forma en matemáticas: La forma como "manera de interactuar". Una cierta cadena de símbolos tiene la forma que corresponde a la manera de interactuar de las entidades que esos símbolos representan. Por ejemplo, dados los símbolos

$$u, t, x, f, \Delta, =, (,),$$

en el contexto de un primer curso de análisis vectorial, la siguiente cadena es válida:

$$\Delta u(t, x) = f(t, x),$$

mientras que en el mismo contexto la siguiente cadena no lo es:

$$u(t, \Delta) = f(t, x),$$

ya que *u* no puede tener como argumento un operador.

En matemáticas el significado restringe y modula la sintaxis. Esto se puede ver con claridad en el siempre útil ejemplo del símbolo $\frac{dy}{dx}$. Desde un punto de vista sintáctico, dicho símbolo es equivalente a cualquier otro del tipo $\frac{ay}{bx}$ y por lo tanto ser susceptible al mismo tipo de manipulaciones. Pero el significado de ese símbolo introduce otra regla que indica que está excluido de algunas de esas manipulaciones. En otros casos el significado modula la sintaxis, como en el caso de N, el conjunto de los números naturales, en donde no es correcto escribir a – b cuando a < b. La prohibición de dividir entre cero[7] proviene del hecho de que el cero es el elemento neutro de la suma.

Por ello todo proceso de manipulación sintáctica en física, por más que introduzca elementos y reglas *ad hoc* debe llevar como resultado[8] a una cadena de símbolos no sólo sintácticamente correcta, sino con un doble significado: Debe ser primero una cadena de símbolos con algún sentido matemático, el símbolo $\frac{dy}{dx}$ puede ser y es manipulado como una división, pero si aparece o reaparece en alguna expresión física significativa se interpreta como una derivada. En segundo lugar debe ser también algo significativo desde el punto de vista de la física. Pero sólo expresiones matemáticamente correctas son empleadas en las representaciones resultantes. Aún el procedimiento más formal o más trasgresor debe concluir en una expresión correcta para poder ser significativo en la física.

El significado matemático de las cadenas simbólicas no puede dejarse de lado totalmente, ni aun en los casos aparentemente más formales. No cualquier manipulación formal conduce a una expresión matemáticamente correcta. Obtener como resultado una expresión correcta implica someterse de una u otra manera a restricciones que no son puramente sintácticas, sino que implican el conocimiento del significado matemático de los símbolos involucrados.

***

Hay un ejemplo representativo en mecánica cuántica. En física cuántica es usual usar la siguiente nomenclatura para denotar el producto interno de dos vectores *u* y *v*: $\langle u \mid v \rangle$. Se ha encontrado conveniente separar de manera formal ese producto interno en dos partes: $\langle u |$ y $| v \rangle$. Esta manera de establecer esta separación no tiene sentido matemático y sin embargo funciona. ¿Por qué? Porque las reglas sintácticas con las que se manipulan esos símbolos respetan el significado matemático que tendrían de estar correctamente definidos, y sobre todo, porque

[7] O de asignarle un símbolo especial, ∞, a esa división.
[8] Quizá algunos pasos intermedios carezcan de significado, pero no el resultado.

ahí donde esa simbología debe proporcionar una manera de hacer cálculos, se recupera la forma original y significativa de la expresión matemática.

Un físico puede ser poco riguroso, puede ser formal, puede plantear analogías poco claras o alterar y simplificar sus manipulaciones, pero al momento de establecer una ley física no puede transgredir el significado matemático de los símbolos empleados ni de las relaciones entre ellos. Esto también le permite reubicar cierto tipo de errores que pudiese haber cometido. Si el resultado no tiene sentido matemático puede retroceder en su cadena de deducciones, implicaciones o intuiciones en una búsqueda de aquello que ha llevado al error matemático, lo que en principio debe poder llevarse a cabo. Por otro, caso de partir de una analogía, o sea, dando una propuesta de cual podría ser el resultado final, puede construir uno o varios caminos que lleven a él a partir de un sistema conocido.

Estas situaciones pueden tener consecuencias de interés para un análisis de lo que pudiese ser el conocimiento matemático.

***

Las consideraciones anteriores indican que en muchos casos lo que parece un proceder puramente formal tiene detrás fundamentos y justificación tanto dentro de las matemáticas como de la física, pero lo fundamental, aquí y en general en las más diversas aplicaciones, viene dado por algo que no es precisamente ni matemáticas ni física puras, sino algo que surge de su interacción. No se descarta un cierto grado de formalismo puro, convencional o basado en consideraciones estéticas, o inclusive con un cierto toque de arbitrariedad, pero no parecen ser las razones fundamentales o las directrices determinantes en procesos como los que describe Steiner. Lo arbitrario tiene una contribución al permitir considerar diversos ángulos de un fenómeno, pero esa ambigüedad está limitada y dirigida por consideraciones matemáticas, físicas, heurísticas (como la ya señalada) y más que nada por la profunda y compleja interacción de todos los factores involucrados, lo que ya no se puede reducir a una explicación basada en uno solo de ellos.

El hecho que nos ocupa, procedimientos formales que conducen a descubrimientos físicos, sigue estando ahí, pero esos procedimientos no son independientes ni del significado matemático de las cadenas simbólicas, ni de los objetivos físicos que se persiguen. También ha sido posible formular algunos principios heurísticos con base en la experiencia de trabajo, como, dicho en muy pocas palabras, usar o aplicar aquello que ya antes ha dado resultado. Dado que no resulta asombroso que el conocimiento físico contribuya a ampliar y definir sus propios desarrollos, ni que principios heurísticos tan generales sean razonablemente efectivos, queda sólo preguntas con la que todo estudio de las matemáticas aplicadas acaba por enfrentarse: ¿Por qué la física no puede transgredir las matemáticas? ¿Qué es lo que las hace tan adecuadas para las tareas de la física? Lo que inevitablemente lleva a preguntarse qué es el conocimiento matemático y de qué manera participa en el desarrollo de otras áreas del conocimiento. ¿Son las matemáticas sólo un marco adecuado para ordenar nuestro conocimiento físico, como una buena caja donde puedo separar eficientemente los diferentes tornillos, tuercas, clavos? ¿O hay algo en ellas de especial relevancia para el conocimiento empírico? De ahí a preguntarnos por la naturaleza de las matemáticas hay sólo un paso.

No es esta última pregunta a la que dedicamos este trabajo. Lo que sí se tuvo en mente fue, a partir de una discusión puntual con Steiner, tratar de ubicar puntos de interés para una posible discusión acerca de lo que el conocimiento matemático contribuye en sus andanzas por el mundo de la física.

Cuarta Parte. Comentarios finales.

Con respecto a Steiner se ha dicho ya que si bien sus conclusiones no son convincentes, hay una gran riqueza en su trabajo y tiene, sobre todo, la virtud de haber puesto sobre la mesa de una nueva manera un problema que ha sido poco analizado en los últimos tiempos: la relevancia filosófica de la aplicabilidad de las matemáticas, como un subtema con interés propio y actual de la relación entre las matemáticas y la realidad, en general como un subtema con carácter propio de la filosofía de la ciencia. En especial ha mostrado que las implicaciones de esa aplicabilidad pueden tener un significado muy amplio. La contribución básica de este trabajo ha sido de delimitación y profundización de ciertos temas.

Un pilar básico de nuestro conocimiento físico es nuestro conocimiento matemático. Nuestro conocimiento matemático ha seguido senderos profundamente influidos por nuestras indagaciones físicas. La aplicabilidad de las matemáticas debe entenderse y analizarse en este contexto.

***

Quisiera concluir haciendo referencia a algo que se mencionó en el capítulo anterior.

Los conceptos matemáticos sólo tienen sentido en el entramado de una teoría. Ese sentido es fundamental para establecer su significado. Ese significado interviene, de una u otra manera, en toda aplicación. Aunque no siempre es aparente, es toda la teoría lo que está sustentando esa aplicación, no tal o cual concepto. Cada vez que se aplica el concepto de vector es toda el álgebra lineal la que se encuentra atrás, y cuando no es así, el concepto de vector ni siquiera sirve como descripción, como en la desafortunada definición de vector como "algo con magnitud, dirección y sentido". Los desarrollos teóricos matemáticos están implícitos en esa descripción, y por ello, más que como un misterio, esta relación debe interpretarse físicamente como manifestación de la unidad profunda de las diversas maneras de representar un sistema físico que se manifiesta ante nosotros.

Bibliografía

Bibliografía.

Ayres, I., y Nalebuff, B., "Principled problem solving", *Scientific American Mind*, Special Edition, Vol. 14, Number 1, 2004, pp. 96, 97.

Boniolo, Giovanni, *Filosofia della fisica*, Bruno Mondadori, Milano, 1997.

Bourbaki, Nicolás, *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Editorial, Madrid, 1972.

Boyer, Carl B, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover, New York, 1959.

Brown, J.R., *Philosophy of mathematics*, Routledge, London and new York, 2000.

Cleró, Jean Pierre, *Épistémologie des mathématiques*, Éditions Nathan, Paris, 1998.

Collette, J-P., *Historia de las matemáticas*, tomos I y II, Siglo XXI, México, 1986.

Courant, R., y Robbins, H. (revised by Stewart, I.), *What is mathematics*, Oxford University Press, New York-Oxford, 1996.

Crowe, Michael J., *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system*, Dover, New York, 1994.

Das, A., *The special theory of relativity*, Springer Verlag, New York, 1993.

Diuedonné, Jean, *Pour l'honneur de l'esprit humain. Le mathématique aujourd'hui*, Hachette, Paris, 1987.

Foster, J. y Nightingale, J.D., *A short course in general relativity*, Springer Verlag, New York, 1995.

Espinoza, Miguel, *Les mathématiques et le monde sensible*, Ellipses, Paris, 1997.

Hacking, I., *Representar e intervenir*, UNAM, México, 1999.

Hart, W.D. (ed.), *The philosophy of mathematics*, Oxford University Press, 1996.

Heinz, Bettina, *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*, Springer, Viena, 2000.

Feynmann, Richard P., *Bedarf die Physik der Mathematik ?*, en Bohnet, Heidi y Piper, Klaus (eds.), *Lust am Denken, ein Lesebuch aus Philosophie, Natur- und Humanwissenscahfte 1981 – 1991*, Piper, Munich, 1992.

Folscheid, D. y Wunenburger, J-J., *Méthodologie philosophique*, Presses Universitaires de France, París, 1992.

Frege, G., *The foundations of arithmetic*, trad. por J.L. Austin, Oxford Blackwell, Oxford, 1959.

Ekeland, Ivar, *Le meilleur des mondes possibles (Mathematiques et destinée)*, Éditions du Seuil, París, 2000.

Gil, J., *Einführung in philosophisches denken*, UTB für Wissenschaft, Fink, Munich, 1998.

Handlexikon zur Wissenschaftstheorie, dtv, Munich, 1994.

Hardy, G.H., *A mathematician´s apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. (Edición original 1940.)

Jeans, J., *Physics and Philosophy*, Dover, New York, 1981.

Jeans, J., *Historia de la física*, FCE, México, 1968.

Kitcher, Philip, "Mathematical change and scientific change", en [Tymoczko].

Kline, Morris, *Mathematics: The loss of certainty*, Oxford University Press, New York, 1982.

Körner, S., *The philosophy of mathematics*, Dover, New York, 1960.

Lakatos, Imre, "A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?", en [Tymoczko].

Lakatos, Imre, "What does a mathematical proof prove?*", en* [Tymoczko].

Lambert, Dominique, "L'incroyable efficacité des mathématiques", en *La Recherche*, N° 316, enero 1999, Société d'Editions Scientifiques, Paris.

Leibniz, Gottfried Wilhelm, *Schrifften zur Logic und zur philosophischen Grundlegung von Mathematik und Naturwissenschaft*, Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1992.

Lizcano, E., *Imaginario colectivo y creación matemática*, Gedisa, Barcelona, 1993.

Maddy, Penelope, "Does V equal L?", en [Tymoczko].

Maddy, Penelope, *Realism in mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

Panza, Marco y Salanskis, Jean Michel (eds.), *L'objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles*, Massson, Paris, 1995.

Penrose, Roger, *The emperor's new mind. Concerning computers, minds and the laws of Physics*, Penguin Books, New York, 1991.

Prigogine, Ilya, *From being to becoming (Time and complexity in the physical sciences)*, W.H. Freeman, New York, 1980.

Le Lionnais, François (ed.), *Le grands courants de la penséemathématique*, Hermann Editeurs, París 1998, (edición original : 1948).

Mould, R.A., *Basic relativity*, New York, 1994.

Narasimhan, 0.n.3., *Principles of continuum mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., new Yoek, 1993.

Putnam, H., "What is mathematical truth?", en [Tymoczko].

Serfati, M. (ed.), *La recherche de la vérité*, Colección *L'écriture des mathématiques. Recherches en histoire et philosophie des mathématiques*, ACL-Les éditions de Kangourou, Paris, 1999.

Shermer, M., "Physic drift", *Scientific American*, febrero 2003, p. 21.

Sokal, Alan y Bricmont, Jean, *Eleganter Unsinn : wie die Denker der Postmoderne die Wissenschaft missbrauchen*, C.H. Beck, Munich, 1999 (traducción del inglés y francés).

Steiner, Mark, *The applicability of mathematics as a philosophical problem*, Harvard University Press, Cambridge and London, 1998.

Steiner, Mark, *Mathematical knowledge*, Cornell University Press, Ithaca and London, 1975.

Teubner-Tachenbuch der Mathematik, fundado por Bronstein, I.N. y Semendjajev, K.A. Reelaborado por Grosche, G, Siegler, V. y Ziegler, D. Editado por Ziegler, E. B.G. Teubner, Stuttgart-Leipzig, 1996.

Thiel, C., *Philosophie und Mathematik*, WBD, Darmstadt, 1995.

Tymoczko, Thomas, *New directions in the philosophy of mathematics*, Princenton University Press, Princenton, New Jersey, 1998.

Wigner, E., *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, en *Symmetries and reflections*, Bloomington, Indiana Univ. Press, 1967, pp. 222-37.

Wilder, R.L., *Mathematics as a cultural system*, Pergamon Press, Oxford, 1981.