



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERÍA

CONTROL DE SISTEMAS LINEALES POR
MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Maestro en Ingeniería
Ingeniería Eléctrica - Control

PRESENTA:

Marco Tulio ANGULO Ballesteros



Tutor:
Dr. Leonid Fridman

2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: **DR. RENE GERARDO ESPINOSA PEREZ**
Secretario: **DR. JAIME ALBERTO MORENO PEREZ**
Vocal: **DR. LEONID FRIDMAN**
1er Suplente: **DR. LUIS AGUSTIN ALVAREZ-ICAZA LONGORIA**
2do Suplente: **DR. FRANCISCO BEJARANO RODRIGUEZ**

Lugar donde se realizó la tesis:

**Universidad Nacional Autónoma de México, D. F., Facultad de
Ingeniería.**

TUTOR DE TESIS:
DR. LEONID FRIDMAN

FIRMA

Agradecimientos

Este trabajo es resultado de todas las personas que tuve el gusto de conocer durante mi estancia en la Facultad de Ingeniería, UNAM. Al Dr. Leonid Fridman por su confianza y apoyo a lo largo de todo el proceso así como a todos los profesores del posgrado. A Javier Bejarano por toda su ayuda a todo lo largo del proceso de elaboración de este trabajo y por supuesto a todo el Grupo de Modos Deslizantes.

También debo agradecer a mis padres, Marco Tulio Angulo Sanchez y Martha Ballesteros Cortes, por su monumental e inmensurable apoyo y entendimiento. Finalmente, debo agradecer al Maestro Tesshin y todo el Centro Zen de México. Muchas gracias a todos.

*México DF,
Abril 2009*

Marco Tulio Angulo

Director de tesis:

Dr. Leonid Fridman



Copyright © 2007 by M.T. Angulo

Nada existe, pero que fascinantes
las hormigas corriendo en la luz de la luna,
Son los engaños del ojo:
Las hormigas – no son mas que luz de luna.

La idea del “Ser” es imposible:
No hay ni luna ni hormigas.

Shinkichi Takahashi.

Contacto: darkbyte@gmail.com

Resumen

Se presenta el diseño de algoritmos globales de control por modos deslizantes de alto orden para sistemas lineales e invariantes en el tiempo con múltiples entradas y múltiples salidas considerando entradas desconocidas acopladas. Se comienza asumiendo todo el estado disponible para después considerar disponible únicamente la salida. Se hace uso del diferenciador por modos deslizantes para estimar sus derivadas, que posteriormente son usadas para construir el control. Se propone una ganancia adaptable para el diferenciador con el fin de obtener globalidad y mayor precisión. Así mismo, el diferenciador se analiza para encontrar un criterio de separación que permita detectar su convergencia para después encender el controlador. Resultados en simulación son presentados.

Palabras clave: Modos Deslizantes de Alto Orden, Control Dinámico por Salida, Diferenciador por Modos Deslizantes de Alto Orden.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
1.1. Estado del Arte	2
1.2. Contribuciones	3
1.3. Motivación y metodología	4
1.4. Organización de la tesis	5
2. Modos Deslizantes de Alto Orden	7
2.1. Antecedentes	7
2.2. Algoritmos globales de Control	9
2.3. Análisis del Diferenciador	19
2.3.1. Un criterio de separación	24
3. Control en Tiempo Finito por Realimentación de Estados	27
3.1. Caso de Una Entrada	28
3.1.1. Transformación de Estados y Entradas	29
3.1.2. Ejemplo	31
3.2. Caso de Múltiples Entradas	32
3.2.1. Transformación de Estados y Entradas	32
3.2.2. Diseño del Control	37

3.2.3. Ejemplo	38
4. Control por Realimentación de Salida: grado relativo bien definido	43
4.1. Preliminares	45
4.2. Diseño del control	47
4.3. Adaptación de la ganancia del diferenciador	49
4.4. Ejemplo	50
5. Control por Realimentación de Salida: grado relativo parcial	55
5.1. El estado en su forma algebraica	56
5.2. Adaptación de la ganancia del diferenciador	58
5.3. Diseño del control	59
5.4. Ejemplo	60
6. Conclusiones	67
6.1. Trabajo futuro	68
Bibliografía	69

Introducción

Desde sus inicios, los dispositivos con realimentación no fueron concebidos con el fin último de realizar seguimiento o regulación alguna, sino para proporcionar robustez del sistema ante incertidumbres externas (perturbaciones) o internas inherentes. Esto es debido a que si el sistema es exactamente conocido y no existen perturbaciones, el control ideal está dado por el inverso del mismo, simplemente. Por esto, desde un principio el control bajo condiciones de incertidumbre, *control robusto*, ha permanecido como una de las ramas del control automático más activas.

Existen varias tendencias en cuanto a cómo abordar problemas de control robusto. Dos que gozan gran popularidad actualmente son la teoría de \mathcal{H}_∞ y control por Modos Deslizantes (MD). La teoría de control \mathcal{H}_∞ es una herramienta madura que permite atacar el problema de una manera muy general, sin embargo necesita que la incertidumbre esté en \mathcal{L}_2 (desaparecen con el tiempo) y no logra su compensación exacta. Esta última condición sobre las características de la incertidumbre es poco factible en condiciones reales, pues implica suponer que la perturbación no actúa cuando el tiempo es muy grande.

El segundo enfoque basado en MD comienza en los 50's [Eme57] como una aproximación muy intuitiva y un tanto burda al problema: actuar con un esfuerzo energético suficientemente grande ante cualquier desviación (por pequeña que sea) del sistema de su punto de operación, de modo que las trayectorias del sistema son confinadas (por la acción del control) a una dinámica (superficie) que no depende de la dinámica original del sistema. El control clásico por MD (ver [Utk92], por ejemplo) garantiza la compensación exacta (elimina completamente el efecto) de perturbaciones “acopladas” (a la señal de control) acotadas y la convergen-

cia asintótica del estado a cero. Resulta claro que el control debe ser discontinuo (pues conmuta constantemente entre dos acciones de control) y (en este modo de operación) promueve oscilaciones de alta frecuencia y poca amplitud que degradan el desempeño del sistema. Este fenómeno es conocido como *chattering*. Otra limitante central de la teoría clásica de MD es que se requiere que la superficie tenga grado relativo 1 con respecto a la señal de control.

1.1. Estado del Arte

En los 80's aparecen los Modos Deslizantes de Segundo Orden (MD2O) [Eme86] que relajan la condición de grado relativo 1 a grado relativo 2. Estos son algoritmos (casi) *plug & play* para sistemas con perturbaciones acopladas acotadas: twisting, sub-optimo, terminal. Sin embargo todos ellos requieren de la estimación de la derivada de la salida para construir la “superficie”. En este sentido, la “superficie” sigue teniendo grado relativo 1 (artificialmente construido por diferenciación) solo que ahora el movimiento hacia el origen no es tan simple como en MD de primer orden (donde se viaja directamente “sobre” la superficie), sino que puede surgir un movimiento más complejo [Eme57; Lev07], por ejemplo. La aplicación inmediata que tuvieron fue a sistemas mecánicos [Bar03]. Un poco después es introducido el algoritmo super-twisting [Lev93] como un algoritmo de MD2O pero con la característica de que puede ser usado en sistemas con grado relativo 1 produciendo una señal de control continua (en este caso la “superficie” si tiene grado relativo 1). La aplicación natural de super-twist fue reemplazar el control relevado de MD clásicos [Utk92] para usar un control continuo [Bar00] y se pensó que el chattering había sido eliminado ya que el control era continuo. Esto resultó no ser cierto [Boi07], pues no vieron que sólo se escondía detrás de un integrador, que ayudó atenuándolo (el promedio de la integral de oscilaciones casi-simétricas es menor que las propias oscilaciones). Tiempo después, se encontró que super-twisting podía funcionar como diferenciador para estimar la derivada requerida [Lev98]. Sin embargo, aún persistía el problema sobre el grado relativo para sistemas con grado relativo mayor a 2.

Este problema es superado en [Lev01] para el caso SISO donde son introducidos los MD de orden arbitrario, tan alto como el grado relativo de la salida. La metodología de diseño se basa solo en el conocimiento del grado relativo de la salida y cotas constantes conocidas para el sistema. Recientemente, en [Lev08a], sus contrapartes “globales” han sido introducidos usando ganancias variables para sobrellevar cotas “variables”. Para construir el controlador (igual que en caso de MD2O) es necesario evaluar en tiempo real cierto número de derivadas de la salida. Estas pueden ser obtenidas mediante un diferenciador exacto y en tiempo finito por MD de orden superior [Lev03], basado de nuevo en super-twisting. El controlador hace uso de las estimaciones del diferenciador y es encendido después de *suficiente tiempo* de modo que el diferenciador ya haya convergido. Sin embar-

go, no resulta claro cuánto es necesario esperar, solamente dicen hay que esperar “lo suficiente”. Aun así, la principal limitante es que el diseño solo considera una sola entrada y una sola salida.

El trabajo más reciente encontrado por el autor para superar los obstáculos antes mencionados está en [Edw08]. En el se presenta un controlador (basado en MD2O) por salida para sistemas MIMO con perturbaciones acopladas bajo las condiciones

- entrada acotada – estado acotado (con respecto a la perturbación),
- la perturbación y su primera derivada deben estar acotadas por una constante conocida,
- grado relativo bien definido,
- ceros invariantes estables,

usando un algoritmo por MD2O para la observación del estado, los autores aplican el controlador de [Bar00] para obtener estabilidad asintótica del origen. De esta forma, los principales problemas abiertos hasta 2008 eran

1. Criterio de separación para saber cuando es correcto utilizar las estimaciones de las derivadas del diferenciador en el controlador.
2. Algoritmos de control por modos deslizantes de orden mayor a 2 para sistemas con múltiples entradas.
3. Control global por salida de sistemas MIMO por modos deslizantes de orden mayor a 2.

1.2. Contribuciones

Las contribuciones de esta tesis son:

1. Control por MD globales de Orden Arbitrario para sistemas lineales con múltiples entradas.
2. Control por salida basado en MD globales de Orden Arbitrario para sistemas lineales MIMO con perturbaciones acopladas bajo las condiciones
 - perturbaciones uniformemente acotadas,
 - no existen ceros invariantes (observabilidad fuerte del sistema),

3. Relaciones entre grado relativo bien definido, observabilidad fuerte y dinámica cero.
4. Introducimos un criterio de separación que permite detectar la convergencia del diferenciador [Lev03] (o del observador, equivalentemente). Se analizan dos casos
 - deslizamiento ideal: sin imperfecciones de conmutación,
 - deslizamiento real: considerando discretización y ruido “integrable” a la vez.
5. Se presenta un método de “auto-ajuste” para las ganancias del diferenciador [Lev06a].

mejorando, en comparación, los siguientes puntos

1. Mejoramos [Bar00] al reemplazar MD2O por MD globales de orden arbitrario, logrando globalidad y mayor precisión.
2. Mejoramos [Edw08] logrando mayor precisión y estabilidad “global” en tiempo finito del origen. De este modo se remueven las restricciones sobre BIBS, perturbación suave y grado relativo bien definido. La extensión al caso de polos invariantes estables y grado relativo bien definido es directa.
3. Mejoramos [Lev01] al presentar un criterio para encender el controlador justo en el instante que el diferenciador converge. Se analiza el efecto de discretización y ruido determinístico a la vez, que resulta diferente al enfoque típico, por ejemplo de [Lev05], donde se analizan sus efectos por separado.
4. Al adaptar la ganancia, hacemos uso más eficiente del diferenciador logrando una mayor precisión y por tanto menor chattering.

1.3. Motivación y metodología

Las convergencia exacta y en tiempo finito son propiedades deseada de los controladores para sistemas híbridos. Si esta condición se cumple, se evita la acumulación de error entre tiempos de vida (*dwell times*) y el problema de control se simplifica.

Para lograr los objetivos hacemos uso de MD orden arbitrario en su versión global [Lev08a], del diferenciador [Lev06a] proponiendo una ganancia de modo que sea global (en el caso estabilidad en tiempo finito de cero) y proponemos un criterio para encender el control. Además, se emplean los conceptos de “observabilidad fuerte” y “grado relativo bien definido” con efectos de control por salida.

1.4. Organización de la tesis

En el Capítulo 2 abordamos la teoría de modos deslizantes de alto orden (HOSM). Se comienza introduciendo algunos conceptos para después saltar a los algoritmos globales de control introducidos recientemente en [Lev08a], revisando su funcionamiento a través de varios lemas y teoremas sobre sus propiedades. Después, realizamos un nuevo estudio sobre el diferenciador por HOSM [Lev03; Lev06a] para encontrar condiciones que indiquen que el diferenciador ha convergido. Se consideraron dos casos: cuando no existe ruido ni muestreo (deslizamiento ideal) y cuando existen (deslizamiento real). Finalmente se presenta una propuesta de criterio de separación que permite construir el control con las estimaciones de las derivadas.

En el Capítulo 3 presentamos el diseño de algoritmos por HOSM para sistemas con múltiples entradas considerando todo el estado disponible. En el Capítulo 4 abordamos el problema considerando que solamente la salida está disponible y que además el sistema tiene grado relativo bien definido. En Capítulo 5 presentamos la metodología de diseño considerando disponible solamente la salida y suponiendo que el grado relativo no está bien definido, que es el caso más general. Finalmente en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones.

Modos Deslizantes de Alto Orden

Comenzamos introduciendo algunos conceptos de fundamental importancia en la teoría de modos deslizantes de alto orden (HOSM). En la siguiente subsección, revisamos los resultados previamente obtenidos en [Lev08a] tratando de hacerlos entendibles, de forma que intentamos no pasar por alto ningún paso (presentando todas las pruebas de los lemas, a diferencia del autor) y evitando las palabras “obviamente se cumple que”, que tanto agradan a su autor. Finalmente, en la subsección 2.3, presentamos un nuevo análisis realizado al diferenciador por HOSM para encontrar una forma de determinar cuando ha convergido (un criterio de separación), es decir, se encuentra en un deslizamiento ideal o real.

2.1. Antecedentes

Definición 2.1.1 (Dilatación). *La familia de dilataciones d_k asociada al vector de pesos (m_1, m_2, \dots, m_n) , $m_i \in \mathbb{R}$, se define como el mapeo*

$$d_k : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (k^{m_1} x_1, k^{m_2} x_2, \dots, k^{m_n} x_n), \quad \forall k > 0$$

donde m_i es el peso (o grado) de x_i y se expresa como $\deg x_i := m_i$.

Definición 2.1.2 (Homogeneidad de un campo vectorial). *Un campo vectorial $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ se dice homogéneo de grado q si*

$$f(d_k x) = k^q f(x)$$

y generalmente se expresa $\deg f(x) := q$.

Definición 2.1.3 (Homogeneidad de una ecuación/inclusión diferencial). *Una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ (o una inclusión diferencial $\dot{x} \in F(x)$) se dice homogénea de grado $-q < 0$ si es invariante con respecto a la transformación (de tiempo y coordenadas)*

$$(t, x) \mapsto (k^q t, d_k x)$$

es decir

$$\frac{d}{dt} x = f(x) \Leftrightarrow k^{-q} d_k \frac{d}{dt} x = \frac{d}{dk^q t} (d_k x) = f(d_k x)$$

$$(o \frac{d}{dt} x \in F(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dk^q t} (d_k x) = F(d_k x))$$

Definición 2.1.4 (Contraíble por dilatación). *Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ es contraíble por dilatación si $d_k D \subset D$ para toda $0 \leq k < 1$.*

Definición 2.1.5 (Contracción de una inclusión diferencial). *Una inclusión diferencial $\dot{x} \in F(x)$ se dice contractiva si existen conjuntos compactos D_1, D_2 y cierto tiempo T tales que*

- (i) $0 \in D_2 \subset \text{interior}(D_1)$.
- (ii) D_1 es contraíble por dilatación.
- (iii) $\forall x(0) \in D_1, \exists T : x(T) \in D_2$.

Note que no es necesario que $x(t) \in D_2, \forall t \geq T$, sino que puede entrar a D_2 y después salir. El siguiente teorema es quizá el más importante

Teorema 2.1.1. [Lev05] *Sea $\dot{x} \in F(x)$ una inclusión diferencial homogénea con grado de homogeneidad $-q < 0$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes*

- (i) Estabilidad global en tiempo finito del origen.
- (ii) Estabilidad asintótica uniforme y global del origen.
- (iii) Propiedad de contracción.

Además las siguientes afirmaciones se cumplen

- (a) El tiempo de llegada (o asentamiento) al origen es una función homogénea continua de la condición inicial y el peso q .
- (b) La estabilidad en tiempo finito del origen es robusta a pequeñas perturbaciones homogéneas.

De esta manera, es suficiente mostrar que existe contracción en cierta region del espacio (sin importar que tan pequeña sea) para mostrar que dicha propiedad se cumple en todo el espacio y por tanto existe estabilidad global en tiempo finito.

2.2. Algoritmos globales de Control

Considere un sistema incierto

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(t, x) + b(t, x)u, & b(t, x) &\neq 0 \\ \sigma &= \sigma(x, t)\end{aligned}$$

con $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ y $\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es la salida (medible) del sistema. Sobre las funciones $a(t, x)$, $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ supondremos que solo se conoce una cota superior, que se especifica mas adelante. Suponemos además que cualquier número de derivadas de la salida σ están disponibles. Se supone que el grado relativo r de σ es conocido y constante, asi

$$\sigma^{(r)} = h(t, x) + g(t, x)u$$

donde h, g son funciones de nuevo desconocidas y $g(t, x) \neq 0$. La suposición tradicional del planteamiento de modos deslizantes de alto orden es suponer $C \geq |h(t, x)|$ para una C constante. En lugar de esto, supondremos que conocemos una función $\Phi(t, x)$ integrable (en el sentido de Lebesgue) tal que

$$\alpha g(t, x)\Phi(t, x) > |h(t, x)|$$

es decir, la funcion $\alpha g\Phi$ domina la dinámica incierta con una ganancia α suficientemente grande. Los controladores por modos deslizantes de orden superior conocidos hasta el momento son construidos de forma recursiva. Quizá, los mas interesantes son los nombrados casi-continuos [Lev06b; Lev08b] ya que son continuos excepto en el punto $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$. Estos son construidos con la siguiente recursión

$$\begin{aligned}\varphi_{0,r} &= \sigma & N_{0,r} &= |\sigma| & \Psi_{0,r} &= \frac{\varphi_{0,r}}{N_{0,r}} = \text{sign}\sigma \\ \varphi_{i,r} &= \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} \Psi_{i-1,r} & N_{i,r} &= |\sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} & \Psi_{i,r} &= \frac{\varphi_{i,r}}{N_{i,r}}\end{aligned}$$

y

$$u = -\alpha \Phi(t, x) \Psi_{r-1,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \quad (2.1)$$

Lo primero que encontramos es que el control tiene una singularidad en $\sigma = 0$. Sin embargo dado que la medida de este punto es cero, las soluciones del sistema no se ven afectadas [Fil60]. Además, es interesante notar que $N_{i,r}$ es una especie de norma homogénea de la función homogénea $\varphi_{i,r}$, por lo que en ese sentido el control generado por $\Psi_{r-1,r}$ es un control por unidad [Utk92] pero en coordenadas homogéneas. Es conocido [Lev06b] que con $\Phi \equiv 1$, un conjunto de parámetros $\{\beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$ apropiados y una ganancia $\alpha > 0$ suficientemente grande el controlador provee la igualdad $\sigma \equiv 0$ para cualquier condición inicial. Sin embargo, puede suceder que sean necesarias ganancias muy altas para atraer trayectorias que inician muy lejos del origen y resulten excesivas cuando estas se acercan al origen. Por esto resulta conveniente utilizar una ganancia que se adapte en el espacio.

Para remover la ganancia constante y permitir una “función de ganancia” $\Phi(x, t)$ es necesario mostrar que el siguiente teorema es cierto

Teorema 2.2.1. *Considere un conjunto de parámetros $\{\beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$ y $\alpha > 0$ suficientemente grande. Entonces*

- (i) *El controlador (2.1) asegura $\sigma \equiv 0$ en tiempo finito para cualquier condición inicial.*
- (ii) *Cualquier incremento en la función de ganancia Φ no interfiere con la convergencia.*

De este modo, se permite una ganancia variable del controlador. Hay que notar que no cualquier combinación paramétrica $\{\beta_i\}$ que asegure convergencia en tiempo finito permite un incremento arbitrario de α ó Φ . Aquellos conjuntos $\{\beta_i\}$ que sí los permiten son llamados *robustos con función de ganancia* [Lev08a]. Para encontrar estos conjuntos de parámetros “robustos con función de ganancia” se utiliza el siguiente teorema

Teorema 2.2.2. *Estabilidad en tiempo finito de la ecuación diferencial*

$$\sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1} N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \Psi_{r-2,r} = 0$$

garantiza la robustez con función de ganancia del conjunto de parámetros $\{\beta_1, \dots, \beta_{r-1}\} > 0$.

Ahora introducimos algunos lemas que permiten probar el Teorema 2.2.1. Primero algunas propiedades de las funciones con las que construimos el controlador

Lema 2.1. *Lo siguiente es cierto*

- (i) *$N_{i,r}$ es positiva definida, es decir $N_{i,r} = 0 \Leftrightarrow \{\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i)}\} = 0, i = 1, \dots, r$.*

(ii) $N_{i,r} \neq 0 \Rightarrow |\Psi_{i,r}| \leq 1$.

Demostración. (i) Por inducción. $N_{0,r} = |\sigma|$ es positiva definida. Suponga ahora que $N_{i-1,r}$ es positiva definida. Ahora $N_{i,r} := |\sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}}$, $\beta_i \neq 0$ es claramente positiva definida pues la función $(\cdot)^{\frac{r-i}{r-i+1}}$ es monótonamente creciente (cero si y solo si $(\cdot) = 0$).

(ii) Por inducción. $|\Psi_{0,r}| = |\text{sign}\sigma| \leq 1$. Suponga que $|\Psi_{i-1,r}| \leq 1$ entonces

$$\Psi_{i,r} = \frac{\sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}}}{|\sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}}} \Psi_{i-1,r}$$

dado que $N_{i,r} \neq 0$ entonces $\Psi_{i,r}$ está bien definido. Entonces

$$|\Psi_{i,r}| \leq \frac{\left| \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} \right|}{\left| |\sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} \right|}$$

Para el numerador debemos acotarlo por el máximo valor posible $|\sigma^{(i)}| + \beta_i \left| N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} \right|$. Para el denominador deberíamos acotarlo por el mínimo valor posible, pero dado que $N_{i-1,r} > 0$, entonces de nuevo es $|\sigma^{(i)}| + \beta_i \left| N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} \right|$. Por tanto $|\Psi_{i,r}| \leq 1$.

□

Ahora introducimos la definición de *Homogeneidad r-deslizante* (*r-sliding homogeneity*)

Definición 2.2.1. Decimos que el sistema es **homogéneo r-deslizante** si el sistema es homogéneo con pesos

$$\deg \sigma = r, \deg \dot{\sigma} = r - 1, \dots, \deg \sigma^{(r-1)} = 1, \deg \sigma^{(r)} = 0, \deg t = 1$$

esto es $\deg \sigma^{(i)} = r - i$, $i = 0, \dots, r - 1$. Si esto es cierto, el sistema es invariante con respecto al cambio de coordenadas y tiempo

$$(t, \sigma) \mapsto (kt, d_k \sigma)$$

donde d_k es una dilatación.

Lema 2.2. *Lo siguiente es cierto*

(i) *El peso de $N_{i,r}$ es $r - i$, $i = 0, \dots, r - 1$.*

(ii) *Toda función homogénea localmente acotada $\omega(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-i)})$ con peso $r - i$ satisface*

$$|\omega| \leq cN_{i,r}$$

para algún $c > 0$.

Demostración. (i) Por inducción. $N_{0,r} := |\sigma|$ tiene peso r pues $k^r |\sigma| = |k^r \sigma|$. Suponga que el peso de $N_{i-1,r}$ es $r - i + 1$. Entonces

$$\begin{aligned} N_{i,r}(d_k \sigma) &= |k^{r-i} \sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}}(d_k \sigma) = |k^{r-i} \sigma^{(i)}| + \beta_i [k^{r-i+1} N_{i-1}(\sigma)]^{\frac{r-i}{r-i+1}} \\ &= k^{r-i} N_{i,r}(\sigma) \end{aligned}$$

(ii) Denote $\omega_{r-i}(\sigma) := \omega(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-i)})$. Si $\omega_{r-i}(\sigma)$ es homogénea con peso $r - i$ entonces $\omega_{r-i}(d_k \sigma) = k^{r-i} \omega_{r-i}(\sigma)$, o equivalentemente

$$\omega_{r-i}(\sigma) = \frac{1}{k^{r-i}} \omega_{r-i}(d_k \sigma)$$

Previamente se mostró que $N_{i,r}(d_k \sigma) = k^{r-i} N_{i,r}(\sigma)$, es decir

$$k^{r-i} = \frac{N_{i,r}(d_k \sigma)}{N_{i,r}(\sigma)}$$

así

$$\omega_{r-i}(\sigma) = \frac{\omega_{r-i}(d_k \sigma)}{N_{i,r}(d_k \sigma)} N_{i,r}(\sigma)$$

dada que $\omega(\sigma)$ está acotada, entonces $|\omega(d_k \sigma)| \leq \lambda_\omega$ y claramente $N_{i,r}(\sigma)$ está acotada para cualquier σ acotado, además $|N_{i,r}| = N_{i,r}$. Entonces

$$|\omega_{r-i}(\sigma)| \leq cN_{i,r}(\sigma)$$

□

Lema 2.3. *Para cualquier $\gamma > 0$ y $\beta_{r-1} > 0$ y con una $\alpha > 0$ suficientemente grande, la siguiente desigualdad*

$$\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1} N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \Psi_{r-2,r} \right| \leq \gamma N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$$

es establecida en tiempo finito y mantenida después.

Presentamos dos pruebas diferentes,

Demostración. Considere el conjunto

$$\Omega(\xi) := \left\{ (\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) : |\Psi_{r-1,r}| \leq \xi \right\} \cup \{0\}$$

para algún ξ fijo tal que $0 \leq \xi \leq \gamma/4$, $\xi < 3/4$. Asumiendo que $N_{r-2,r} > 0$ y que $|\sigma^{(r-1)}| \geq 3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$ obtenga, dado que $|\Psi_{r-2,r}| \leq 1$,

$$|\Psi_{r-1,r}| = \frac{\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}\Psi_{r-2,r} \right|}{\left| |\sigma^{(r-1)}| + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \right|} \geq \frac{3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}}{3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{3}{4} \geq \xi$$

es decir $|\sigma^{(r-1)}| \geq 3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow |\Psi_{r-1,r}| \geq \xi$, entonces negando obtenemos

$$|\Psi_{r-1,r}| < \xi \Rightarrow |\sigma^{(r-1)}| < 3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$$

Ahora podemos mostrar que $\Omega(\xi) \subset \Omega_1(\xi)$ donde

$$\Omega_1(\xi) := \left\{ (\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) : \left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}\Psi_{r-2,r} \right| \leq 4\xi\beta_{r-1,r}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \right\} \cup \{0\}$$

mostrando que $\Omega(\xi)$ y $|\sigma^{(r-1)}| \leq 3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$ implican $\Omega_1(\xi)$. Esto es cierto pues $\Omega(\xi)$ implica $|\Psi_{r-1,r}| \leq \xi$, es decir

$$|\Psi_{r-1,r}| = \frac{\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}\Psi_{r-2,r} \right|}{\left| |\sigma^{(r-1)}| + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \right|} \leq \xi$$

ó $\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}\Psi_{r-2,r} \right| \leq \xi|\sigma^{(r-1)}| + \xi\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$. Ahora como $|\sigma^{(r-1)}| \leq 3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$, ciertamente

$$\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}\Psi_{r-2,r} \right| \leq 4\xi\beta_{r-1,r}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$$

Ahora note que $|\sigma^{(r-1)}| \leq 4\xi\beta_{r-1,r}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$ es posible expresarla como

$$\theta_- \leq \sigma^{(r-1)} \leq \theta_+$$

donde $\theta_+ := 4\xi\beta_{r-1,r}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$ y $\theta_- = -\theta_+$. Ahora recuerde que $\deg(N_{r-2,r}) = r - (r - 2) = 2$ y por tanto $\deg(N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}) = 1$ e igualmente θ_-, θ_+ son funciones homogéneas de $(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-2)})$ con peso 1. Ahora aproxime estas funciones por arriba y por abajo por funciones homogéneas Θ_-, Θ_+ de peso 1 pero suaves en todos lados excepto tal vez en 0, de modo que $\Omega(\xi) \subset \Omega_2$ donde

$$\Omega_2 := \left\{ (\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) : \Theta_- \leq \sigma^{(r-1)} \leq \Theta_+ \right\}$$

Así, se asegura que $|\Psi_{r-1,r}| \geq \xi$ fuera de Ω_2 y $|\Psi_{r-1,r}| \leq \xi$ dentro de Ω_2 y por tanto $\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}\Psi_{r-2,r} \right| \leq \gamma N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$, $\gamma = 4\xi\beta_{r-1}$ dentro de Ω_2 que es lo que se busca. Ahora hay que mostrar que todas las trayectorias entran a Ω_2 con un α suficientemente grande. Para ello, suponga $\pi_+ := \sigma^{(r-1)} - \Theta_+ > 0$, es decir que esta se encuentra más allá de la frontera Θ_+ y por tanto fuera de Ω_2 . Ahora, como $\deg \Theta_+ = 1$ y $\deg t = 1$ entonces $\deg \dot{\Theta}_+ = 0$ y por tanto $|\dot{\Theta}_+| \leq \kappa$ para un κ constante. Derivando

$$\dot{\pi}_+ = \sigma^{(r)} + \dot{\Theta}_+ = h(t, x) - \alpha g(t, x)\Phi(t, x)\Psi_{r-1,r} + \dot{\Theta}_+$$

pues $u = \alpha\Phi(t, x)\Psi_{r-1,r}$. Eligiendo α_1 de modo que $\alpha_1 g\Phi > \kappa + 1 + |h|$ y tomando $\alpha = \alpha_1/\xi$ entonces $\dot{\pi}_+ \leq -1$ y por tanto π_+ desaparece en tiempo finito entrando a Ω_2 . Lo mismo ocurre si el sistema inicia más allá de Θ_- y π_- se desvanece con un α suficientemente grande entrando de nuevo a Ω_2 . Eligiendo $\xi := \gamma/4\beta_{r-1}$ finalmente se prueba el lema. □

Demostración. Mostramos que el lema se cumple en cierta región Ω_2 y que todas las trayectorias son atraídas en tiempo finito a él.

Primero encontramos la región donde el lema es cierto. Comencemos considerando la región

$$\Omega(\xi) := \left\{ (\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) : |\Psi_{r-1,r}| \leq \xi \right\} \cup \{0\}$$

para algún ξ fijo tal que $0 \leq \xi \leq \gamma/4$, $\xi < 3/4$. Suponiendo que $N_{r-2,r} > 0$ y que $|\sigma^{(r-1)}| \geq 3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$ obtenga, dado que $|\Psi_{r-2,r}| \leq 1$,

$$|\Psi_{r-1,r}| = \frac{\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}\Psi_{r-2,r} \right|}{\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \right|} \geq \frac{\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}}{3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{3}{4} \geq \xi$$

es decir $|\sigma^{(r-1)}| \geq 3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow |\Psi_{r-1,r}| \geq \xi$, entonces negando obtenemos

$$|\Psi_{r-1,r}| \leq \xi \Rightarrow |\sigma^{(r-1)}| \leq 3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$$

Es decir, dentro de la región $\Omega(\xi)$ se cumple $|\Psi_{r-1,r}| \leq \xi$ y $|\sigma^{(r-1)}| \leq 3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$ mientras que fuera de $\Omega(\xi)$ se cumple $|\Psi_{r-1,r}| \geq \xi$ y $|\sigma^{(r-1)}| \geq 3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$. Note ahora que $|\sigma^{(r-1)}| \leq 3\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$ puede ser reescrita como

$$\theta_- \leq \sigma^{(r-1)} \leq \theta_+$$

donde $\theta_+ := 3\xi\beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$ y $\theta_- = -\theta_+$. Como $\deg(N_{r-2,r}) = r - (r-2) = 2$ y por tanto $\deg(N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}) = 1$ e igualmente θ_-, θ_+ son funciones homogéneas de $(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-2)})$ con peso 1. Ahora aproxime estas funciones por arriba y por abajo por funciones homogéneas Θ_-, Θ_+ de peso 1 pero suaves, de modo que $\Omega(\xi) \subset \Omega_2$ donde

$$\Omega_2 := \left\{ (\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) : \Theta_- \leq \sigma^{(r-1)} \leq \Theta_+ \right\}$$

En Ω_2 el lema es cierto, pues

$$\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}\Psi_{r-2,r} \right| \leq |\sigma^{(r-1)}| + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \leq \Theta_{\pm} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$$

como $\deg \Theta_{\pm} = 1$ y $\deg N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} = 1$ entonces por el Lema 2.2 (ii), podemos acotarla por

$$\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}\Psi_{r-2,r} \right| \leq \gamma N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$$

para cierta γ . Note que γ depende directamente de ξ , es decir del tamaño de $\Omega(\xi)$ y por tanto del Ω_2 que lo contiene. Es decir, dada un γ es necesario elegir ξ suficientemente pequeño.

Ahora mostramos que todas las trayectorias entran en tiempo finito a Ω_2 con una α suficientemente grande. Para ello, suponga $\pi_+ := \sigma^{(r-1)} - \Theta_+ > 0$, es decir que esta se encuentra mas allá de la frontera Θ_+ y por tanto fuera de Ω_2 . Ahora, como $\deg \Theta_+ = 1$ y $\deg t = 1$ entonces $\deg \dot{\Theta}_+ = 0$ y por tanto $|\dot{\Theta}_+| \leq \kappa$ para una κ constante. Derivando

$$\dot{\pi}_+ = \sigma^{(r)} + \dot{\Theta}_+ = h(t, x) - \alpha g(t, x)\Phi(t, x)\Psi_{r-1,r} + \dot{\Theta}_+$$

pues $u = \alpha \Phi(t, x) \Psi_{r-1, r}$. Eligiendo α_1 de modo que $\alpha_1 g \Phi > \kappa + 1 + |h|$ y tomando $\alpha = \alpha_1 / \xi$ entonces $\dot{\pi}_+ \leq -1$ y por tanto π_+ desaparece en tiempo finito entrando a Ω_2 . Lo mismo ocurre si el sistema inicia mas allá de Θ_- y π_- se desvanece con una α suficientemente grande entrando de nuevo a Ω_2 .

□

Una vez que este lema es cierto, se inicia un colapso en cadena dado por el siguiente lema

Lema 2.4. *Sea $i = 1, 2, \dots, r - 2$. Para cualquier $\beta_i, \gamma_i, \gamma_{i+1}$ positivas y una $\beta_{i+1} > 0$ suficientemente grande, la desigualdad*

$$\left| \sigma^{(i+1)} + \beta_{i+1} N_{i, r}^{\frac{r-i-1}{r-i}} \Psi_{i, r} \right| \leq \gamma_{i+1} N_{i, r}^{\frac{r-i-1}{r-i}}$$

asegura que la desigualdad

$$\left| \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1, r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} \Psi_{i-1, r} \right| \leq \gamma_i N_{i-1, r}^{\frac{r-i}{r-i+1}}$$

es satisfecha en tiempo finito y mantenida posteriormente.

Demostración. La prueba es similar a la del lema anterior. En la región

$$\Omega(\xi) := \left\{ (\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i)}) : |\Psi_{i, r}| \leq \xi \right\} \cup \{0\}$$

se satisface $|\sigma^{(i)}| \leq 3\beta_i N_{i-1, r}^{\frac{r-i}{r-i+1}}$. Dado que $\deg N_{i-1, r} = r - (i - 1) = r - i + 1$ y por tanto $\deg N_{i-1, r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} = r - i$. Aproxime $3\beta_i N_{i-1, r}^{\frac{r-i}{r-i+1}}$ por arriba y por abajo mediante funciones homogéneas $\Theta_{i, \pm}$ de peso $r - i$ suaves en todos lados menos en cero. Entonces, reescriba

$$\Theta_{i, -} \leq \sigma^{(i)} \leq \Theta_{i, +}$$

donde $\deg \Theta_{i, \pm} = r - i$. La región $\Omega_{2, i}$ donde el lema es cierto estaría dada por

$$\Omega_{2, i} := \{(\sigma, \dots, \sigma^{(i)}) : \Theta_{i, -} \leq \sigma^{(i)} \leq \Theta_{i, +}\}$$

pues (dado que $\deg(\Theta, +) = r - i$, $\deg(N_{i-1, r}) = r - i + 1$)

$$\left| \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1, r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} \Psi_{i-1, r} \right| \leq |\sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1, r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} \leq \Theta_{i, +} + N_{i-1, r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} \leq \gamma_i N_{i-1, r}^{\frac{r-i}{r-i+1}}$$

Igual que en el lema anterior, mostramos que todas las trayectorias entran en $\Omega_{2,i}$ en tiempo finito (por simetría solo consideramos un lado). Suponga que inicia más allá de Ω_2 , es decir, $\pi_{i,+} = \sigma^{(i)} - \Theta_{i,+} > 0$. Derivando obtenga

$$\dot{\pi}_{i,+} = \sigma^{(i+1)} - \dot{\Theta}_{i,+}$$

Ahora note que $|\sigma^{(i+1)}| + \left| \beta_{i+1} N_{i,r}^{\frac{r-i-1}{r-i}} \Psi_{i,r} \right| \leq \gamma_{i+1} N_{i,r}^{\frac{r-i-1}{r-i}}$ y fuera de $\Omega_{2,i}$ (por definición y construcción) se cumple $|\Psi_{i,r}| > \xi$ por lo que

$$\left| \sigma^{(i+1)} \right| \leq (-\beta_{i+1}\xi + \gamma_{i+1}) N_{i,r}^{\frac{r-i-1}{r-i}}$$

También se cumple que $\deg(\dot{\Theta}_{i,+}) = r - i - 1$ por lo que se cumple (por el Lema 2.2(ii)) que $|\dot{\Theta}_{i,+}| \leq \kappa N_{i,r}^{\frac{r-i-1}{r-i}}$, de modo que

$$\dot{\pi}_{i,+} \leq (-\beta_{i+1}\xi + \gamma_{i+1} + \kappa) N_{i,r}^{\frac{r-i-1}{r-i}}$$

Como $\deg(\pi_{i,+}) = r - i$ entonces $|\pi_{i,+}| \leq \kappa_i N_{i,r}$ de modo que $\kappa_{i,-} N_{i,r} \leq \pi_{i,+} \leq \kappa_{i,+} N_{i,r}$. Dado que $-\beta_{i+1}\xi + \gamma_{i+1} + \kappa < 0$ entonces hay que acotar $N_{i,r}$ por un valor menor, es decir $N_{i,r} \geq \kappa_{i,+}^{-1} \pi_{i,+}$ y así

$$\dot{\pi}_{i,+} \leq (-\beta_{i+1}\xi + \gamma_{i+1} + \kappa) (\kappa_{i,+}^{-1} \pi_{i,+})^{\frac{r-i-1}{r-i}}$$

como $(r - i - 1)/(r - i) < 1$, $\pi_{i,+}$ se desvanece en tiempo finito con una β_{i+1} suficientemente grande. □

El Lema 2.4 es reemplazado por el siguiente lema si $i = 0$.

Lema 2.5. *La desigualdad*

$$\left| \dot{\sigma} + \beta_1 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}} \text{sign } \sigma \right| \leq \gamma_1 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}$$

con $0 \leq \gamma_1 < \beta_1$ garantiza que la identidad $\sigma \equiv 0$ es establecida en tiempo finito y mantenida posteriormente.

Demostración. La desigualdad es simplemente la inclusión diferencial

$$\dot{\sigma} + \beta_1 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}} \text{sign } \sigma \in [-\gamma_1, \gamma_1] |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}$$

convexa, semicontinua por arriba y por tanto entendible en el sentido de Filippov. Con la función de Lyapunov $V = (r + 1)^{-1}|\sigma|^{r+1}$ se obtiene que su derivada en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es

$$\dot{V} = |\sigma|^r \text{sign}(\sigma)\dot{\sigma} \leq -|\sigma|^{r-1}(\beta_1 - [\gamma_1, -\gamma_1]) \leq -\rho_1|\sigma|^{r-1}$$

con $\beta_1 - \gamma_1 = \rho_1$. Dado que $V^{\frac{r-1}{r+1}} = \rho_2|\sigma|^{r-1}$, entonces

$$\dot{V} \leq -\frac{\rho_1}{\rho_2}V^{\frac{r-1}{r+1}}$$

y dado que $(r - 1)/(r + 1) < 1$, (por el lema de comparación) V se desvanece en tiempo finito, por tanto también σ . □

Ahora estamos listos para armar la prueba del Teorema 2.2.1, poniendo secuencialmente todos los lemas anteriores

Demostración. del Teorema 2.2.1 Asigne valores β_1, γ_1 que satisfagan las condiciones del Lema 2.5. Ahora los parámetros β_2, γ_2 son asignados de acuerdo al Lema 2.4, de igual forma β_3, γ_3 y todos los subsecuentes. En el último paso el parámetro α es seleccionado de acuerdo al Lema 2.3. Después de un transitorio finito, la trayectoria pertenece a la intersección (por tanto debe pertenecer a cada región) de las regiones invariantes (definidas por las desigualdades de cada lema), una de las cuales es el origen $\sigma \equiv 0$ (Lema 2.5). □

y también del Teorema 2.2.2

Demostración. del Teorema 2.2.2 De acuerdo al Lema 2.3, 2.4 y 2.5, los parámetros son elegidos para garantizar que después de un transitorio finito la siguiente desigualdad es cierta (Lema 2.3)

$$\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}\Psi_{r-2,r} \right| \leq \gamma N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$$

que se puede reescribir como una inclusión diferencial r-sliding homogénea

$$\sigma^{(r-1)} \in \gamma[-N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}, N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}] - \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}\Psi_{r-2,r}$$

que para satisfacer las condiciones de Filippov, debe ser aumentada en los puntos de discontinuidad de $\Psi_{r-2,r}$ para obtener las propiedades de convexidad y semicontinuidad requeridas. Ciertamente, la inclusión diferencial con $\gamma = 0$ satisface estas propiedades. Ahora, dado que la estabilidad en tiempo finito de inclusiones diferenciales con peso (grado de homogeneidad) negativo es robusta ante pequeñas

perturbaciones homogéneas (Teorema 2.1.1 o [Lev05]), la estabilidad en tiempo finito de la ecuación diferencial obtenida con $\gamma = 0$ (que es la premisa del teorema) implica la estabilidad en tiempo finito de la inclusión con una γ suficientemente pequeña.

□

2.3. Análisis del Diferenciador

En capítulos posteriores de este trabajo, frecuentemente supondremos que todas las derivadas deseadas de cierta señal están disponibles para el diseño de la realimentación por medio de los “diferenciadores exactos robustos” [Lev03]. El diferenciador de primer orden basado en modos deslizantes de segundo orden fue originalmente introducido en [Lev98] para después ser modificado, por el mismo autor, para obtener un estimado en tiempo finito de cualquier orden de derivada, vea, por ejemplo, [Lev03].

Si se desea diferenciar una señal $f(t) \in \mathbb{R}$, entonces, el diferenciador de orden k toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_0 &= v_0 = -\lambda_k L^{\frac{1}{k+1}} |z_0 - f|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign}(z_0 - f) + z_1, \\
 \dot{z}_1 &= v_1 = -\lambda_{k-1} L^{\frac{1}{k}} |z_1 - v_0|^{\frac{k-1}{k}} \text{sign}(z_1 - v_0) + z_2, \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{k-1} &= v_{k-1} = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} |z_{k-1} - v_{k-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{k-1} - v_{k-2}) + z_k, \\
 \dot{z}_k &= -\lambda_0 L \text{sign}(z_k - v_{k-1}).
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde z_i es la estimación de la señal verdadera $f^{(i)}(t)$. El diferenciador converge en tiempo finito si L es una cota superior (conocida de antemano) para $|f^{(k+1)}|$ y la secuencia paramétrica $\lambda_i > 0$ es elegida adecuadamente [Lev03]. En particular los parámetros $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 1,5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 5, \lambda_5 = 8$ son suficientes para construir un diferenciador de orden 5 y es interesante notar que posee “estabilidad práctica” con respecto a efectos de ruido y muestreo, características importantes para su implementación.

Este diferenciador solo provee la estimación exacta de las derivadas después de tiempo finito, por lo que para construir el control resulta lo más conveniente primero esperar a que el diferenciador converja para después encender el controlador pues, de otra forma, en un inicio estaremos aplicando un realimentación incorrecta. El problema es, ¿Cómo sabemos cuando el diferenciador (2.2) ha convergido?. Esta pregunta es contestada en el siguiente lema

Lema 2.6. *Considere el diferenciador (2.2) de orden k y suponga que L y $\{\lambda_0, \dots, \lambda_k\}$ fueron apropiadamente elegidas de modo que el diferenciador proporciona (si no hay ruido ni muestreo) una estimación exacta y en tiempo finito de la derivadas, es decir, $\exists T$ tal que*

$$[z_0, z_1, \dots, z_k] \equiv [f, \dot{f}, \dots, f^{(k)}], \quad \forall t \geq T$$

entonces la condición $z_0 \equiv f, \forall t \in [t_0, t_1], t_1 > t_0$ implica que $[z_1, \dots, z_k] \equiv [\dot{f}, \dots, f^{(k)}], \forall t \in [t_0, t_1]$.

Demostración. Defina $\sigma_i := (z_i - f^{(i)})/L$. Restando \dot{f} en ambos lados de la ecuación z_0 de (2.2), se obtiene

$$\dot{z}_0 - \dot{f} = -\lambda_k L^{\frac{1}{k+1}} |z_0 - f|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign}(z_0 - f) + z_1 - \dot{f}$$

dado que $z_0 - f := L\sigma_0$ y $z_1 - \dot{f} = L\sigma_1$ entonces (dado que $|L\sigma_0|^{\frac{k}{k+1}} = L^{\frac{k}{k+1}} |\sigma_0|^{\frac{k}{k+1}}$)

$$L\dot{\sigma}_0 = -\lambda_k L^{\frac{1}{k+1}} L^{\frac{k}{k+1}} |\sigma_0|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign}(\sigma_0) + L\sigma_1$$

dividiendo entre L (dado que $L^{\frac{1}{k+1}} L^{\frac{k}{k+1}} = L^{\frac{k+1}{k+1}} = L$), se obtiene

$$\dot{\sigma}_0 = -\lambda_k |\sigma_0|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign}(\sigma_0) + \sigma_1$$

Iterando este procedimiento (restando $f^{(i+1)}$ en ambos lados de la ecuación de z_i y dividiendo entre L) se obtiene la siguiente inclusión diferencial

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_0 &= -\lambda_k |\sigma_0|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign}(\sigma_0) + \sigma_1, \\ \dot{\sigma}_1 &= -\lambda_{k-1} |\sigma_1 - \dot{\sigma}_0|^{\frac{k-1}{k}} \text{sign}(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) + \sigma_2, \\ &\vdots \\ \dot{\sigma}_{k-1} &= -\lambda_1 |\sigma_{k-1} - \dot{\sigma}_{k-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_{k-1} - \dot{\sigma}_{k-2}) + \sigma_k, \\ \dot{\sigma}_k &\in -\lambda_0 \text{sign}(\sigma_k - \dot{\sigma}_{k-1}) + [-1, 1]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde el último renglón de la inclusión es obtenido por el hecho de que $\dot{z}_k - f^{(k+1)} := \dot{\sigma}_k L$ y $f^{(k+1)} \in [-L, L]$.

Ahora la condición $z_0 \equiv f$ en un intervalo de tiempo no cero es equivalente a $\sigma_0 := (z_0 - f)/L \equiv 0$ y $\dot{\sigma}_0 \equiv 0$ en el mismo intervalo. Por tanto, (de la primera línea de (2.3) se obtiene que $\sigma_1 \equiv 0$. Después dado que $\sigma_1 \equiv 0, \dot{\sigma}_0 \equiv 0$ (de la segunda línea de de (2.3) se obtiene que $\sigma_2 \equiv 0$. Iterando este razonamiento se obtiene que $\sigma_i := (z_i - f^{(i)})/L \equiv 0, i = 1, \dots, k$, es decir $z_i \equiv f^{(i)}$, para $i = 1, \dots, k$. \square

Lo que uno siempre teme a la hora de diferenciar es el ruido, debido a que el operador derivada no es acotado. Este hecho se ve reflejado en el uso de una inyección *discontinua* en la estructura del diferenciador (2.2). Los términos discontinuos resultan robustos ante incertidumbre aditiva a la entrada (como bien es sabido de la función $\text{sign}(x)$), sin embargo son mucho menos robustos que un término lineal ante ruido aditivo a la medición. Para ver esto considere el efecto del ruido η en un término del tipo lineal $v(x)$, este ocasiona $|v(x) - v(x + \eta)| = O(\eta)$, es decir, pequeño ruido ocasiona pequeñas desviaciones, continuidad. La cosa no es tan “suave” con un término discontinuo, por ejemplo, $\exists x : |M \text{sign}(x) - M \text{sign}(x + \eta)| \geq 2M$ para cierta M . En otras palabras, puede que $\text{sign}(x) = 1$, mientras que $\text{sign}(x + \eta) = -1$, de modo que un pequeño ruido η (sin importar que tan pequeño sea) puede ocasionar grandes desviaciones en un término discontinuo. De hecho, conjeturo que no puede haber un diferenciador exacto que no utilice inyecciones discontinuas, pues de otra forma, el diferenciador poseería suavidad con respecto al ruido, característica que no posee el operador derivada.

Sin embargo el diferenciador (2.2) utiliza términos continuos para todas las inyecciones a excepción de la última ecuación, por tanto las primeras $k - 1$ ecuaciones son robustas con respecto al ruido y solo la última ocasiona problemas. Por tanto, podemos esperar un desempeño aceptable, de hecho el mejor posible de acuerdo a Kolmogorov [Kol62], en presencia de ruido. El siguiente lema es el análogo del anterior pero considerando los efectos del ruido en la medición (discretización y ruido *per se*)

Teorema 2.3.1. *Considere el diferenciador (2.2) de orden k , donde $f(t) \in \mathbb{R}$ es la señal que se desea diferenciar. Suponga que L y $\{\lambda_0, \dots, \lambda_k\}$ fueron seleccionados de modo que el diferenciador provee de estimación exacta en tiempo finito en ausencia de ruido. Sea*

$$f(t) = f_0(t) + \eta(t), \quad |f_0^{(k+1)}(t)| < L, \quad |\eta(t)| \leq \varepsilon,$$

donde $f_0(t)$ es un señal “básica” desconocida y $\eta(t)$ es ruido Lebesgue-medible. Suponga además que f es muestreada con paso $\tau > 0$ y que $\varepsilon \leq k_\varepsilon L \xi^{k+1}$, $\tau \leq k_\tau \xi$, con ξ , k_ε y k_τ constantes positivas.

Entonces existen constantes positivas $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ y γ_t tales que si la desigualdad

$$|z_0 - f(t)| \leq \gamma_0 L \xi^{k+1} \tag{2.4}$$

se satisface durante un intervalo de tiempo $\gamma_t \xi$ entonces también se satisfacen

$$|z_i - f^{(i)}(t)| \leq \gamma_i L \xi^{k-i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k \tag{2.5}$$

y mas aún, a partir de ese momento las desigualdades (precisiones) (2.4) y (2.5) se mantienen.

Nota. En cualquier caso las precisiones (2.4) y (2.5) son obtenidas después de un transitorio finito independientemente de ξ . En particular, la estimación exacta es obtenida en el caso límite $\xi = 0$, es decir, sin ruido y sin muestreo [Lev03].

Demostración. Defina $\sigma_i := (z_i - f_0^{(i)})/L$, $\vec{\sigma} := [\sigma_0, \dots, \sigma_k]^T$. Restando $f_0^{(i+1)}$ de ambos lados en la ecuación sobre z_i y dividiendo entre L obtenga (como en el Lema 2.5) la inclusión diferencial

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_0 &= -\lambda_k |\sigma_0 - \eta(t)/L|^{k-1} \text{sign}(\sigma_0 - \eta(t)/L) + \sigma_1, \\
\dot{\sigma}_1 &= -\lambda_{k-1} |\sigma_1 - \dot{\sigma}_0|^{k-2} \text{sign}(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) + \sigma_2, \\
&\vdots \\
\dot{\sigma}_{k-1} &= -\lambda_1 |\sigma_{k-1} - \dot{\sigma}_{k-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_{k-1} - \dot{\sigma}_{k-2}) + \sigma_k, \\
\dot{\sigma}_k &\in -\lambda_0 \text{sign}(\sigma_k - \dot{\sigma}_{k-1}) + [-1, 1].
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Las derivadas en el lado derecho pueden ser removidas de la siguiente manera. Note que $\eta/L \in [-k_\varepsilon \xi^{k+1}, k_\varepsilon \xi^{k+1}]$. Entonces de la primera línea se puede obtener

$$|\sigma_1 - \dot{\sigma}_0| = \lambda_k |\sigma_0 - \eta/L|^{k-1}$$

así

$$\lambda_{k-1} |\sigma_1 - \dot{\sigma}_0|^{k-2} \leq \lambda_k \lambda_{k-1} |\sigma_0 + [-k_\varepsilon \xi^{k+1}, k_\varepsilon \xi^{k+1}]|^{k-1}$$

iterando este procedimiento podemos concluir que

$$\lambda_{k-j} |\sigma_j - \dot{\sigma}_{j-1}|^{k-j-1} \leq \tilde{\lambda}_{k-j} |\sigma_0 + [-k_\varepsilon \xi^{k+1}, k_\varepsilon \xi^{k+1}]|^{k-j-1}$$

y obtener la siguiente forma no recursiva

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_0 &\in -\tilde{\lambda}_k |\sigma_0 + [-k_\varepsilon \xi^{k+1}, k_\varepsilon \xi^{k+1}]|^{k-1} \text{sign}(\sigma_0 + [-k_\varepsilon \xi^{k+1}, k_\varepsilon \xi^{k+1}]) + \sigma_1, \\
\dot{\sigma}_1 &\in -\tilde{\lambda}_{k-1} |\sigma_0 + [-k_\varepsilon \xi^{k+1}, k_\varepsilon \xi^{k+1}]|^{k-2} \text{sign}(\sigma_0 + [-k_\varepsilon \xi^{k+1}, k_\varepsilon \xi^{k+1}]) + \sigma_2, \\
&\vdots \\
\dot{\sigma}_{k-1} &\in -\tilde{\lambda}_1 |\sigma_0 + [-k_\varepsilon \xi^{k+1}, k_\varepsilon \xi^{k+1}]|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_0 + [-k_\varepsilon \xi^{k+1}, k_\varepsilon \xi^{k+1}]) + \sigma_k, \\
\dot{\sigma}_k &\in -\tilde{\lambda}_0 \text{sign}(\sigma_0 + [-k_\varepsilon \xi^{k+1}, k_\varepsilon \xi^{k+1}]) + [-1, 1].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

el lado derecho de (2.7) debe ser ampliado de forma mínima para proveer convexidad y semicontinuidad-por-arriba, de modo que la inclusión diferencial resultante pueda ser entendida en el sentido de Filippov [Fil60]. El muestreo τ de la señal $f(t)$

corresponde a un retardo variable del lado derecho no excediendo $k_i \xi$. Denotando (2.7) por $\dot{\vec{\sigma}} \in \Sigma(\vec{\sigma}(t), \xi)$, se puede obtener el sistema con muestreo como

$$\dot{\vec{\sigma}} \in \Sigma(\vec{\sigma}(t - [0, k_t \xi]), \xi) \quad (2.8)$$

Ahora hacemos uso del siguiente lema (cuya prueba se presenta al final)

Lema 2.7. *Para todo $\{T, \gamma\} > 0$, existen $\delta > 0$ y $\xi > 0$ suficientemente pequeño tales que si la desigualdad $|\sigma_0| \leq \delta$ se satisface en un intervalo de tiempo T entonces también las desigualdades*

$$|\sigma_i| \leq \gamma, \quad i = 1, \dots, k$$

son satisfechas en el mismo intervalo.

Fije el valor más grande para ξ (digamos ξ_0) tal que al mantener la desigualdad $|\sigma_0| \leq \delta$ durante un intervalo de tiempo $[0, T]$ implica que $|\sigma_i| \leq \gamma$, $i = 1, \dots, k$, (es decir, el ξ más grande tal que el Lema 2.7 se cumple). Debido a las propiedades de homogeneidad descritas anteriormente, las soluciones de (2.8) se transforman en otras soluciones de (2.8) bajo la transformación de tiempo-coordenadas-parámetros

$$G_\kappa : (t, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k, \xi) \mapsto (\kappa t, \kappa^{k+1} \sigma_0, \kappa^k \sigma_1, \dots, \kappa \sigma_k, \kappa \xi).$$

Entonces, la transformación G_κ con $\kappa = \xi/\xi_0$ transfiere soluciones del sistema (2.8) con perturbación ξ_0 en soluciones del sistema (2.8) con perturbación ξ . Como resultado las desigualdades se transforman. Por ejemplo $(\xi_0/\xi)^{k+1} \sigma_0 \mapsto \sigma_0$ y la desigualdad

$$(\xi_0/\xi)^{k+1} |\sigma_0| \leq \delta \mapsto |\sigma_0| \leq \delta$$

es decir

$$|\sigma_0| \leq \delta (\xi/\xi_0)^{k+1} \mapsto |\sigma_0| \leq \delta$$

mientras que $(\xi_0/\xi)[0, T] \mapsto [0, T]$. Las demás coordenadas σ_i , $i = 1, \dots, k$ de manera similar. Entonces para un ξ arbitrario mantener la desigualdad $|\sigma_0| \leq \delta (\xi/\xi_0)^{k+1}$ durante un intervalo de tiempo $[0, (\xi/\xi_0)T]$ implica que las desigualdades

$$|\sigma_i| \leq \gamma (\xi/\xi_0)^{k-i+1} \quad i = 1, \dots, k$$

son también mantenidas en el mismo intervalo de tiempo. Multiplicando por L se obtiene la prueba del teorema. \square

Demostración. Prueba del Lema 2.7. Por contradicción, esto es, suponga que $\exists \{\gamma, \xi\}$ tales que $|\sigma_0| \leq \delta$ pero $|\sigma_i| > \gamma$. Considere dos secuencias $\{\delta_s\} \rightarrow 0$, $\{\xi_s\} \rightarrow 0$. Para cada elemento de ξ_s de $\{\xi_s\}$ existe una solución $\vec{\sigma}_s = \vec{\sigma}(\xi_s, t)$ a la inclusión diferencial (2.8) con $\xi = \xi_s$ tal que $|\sigma_0| \leq \delta$ pero $|\sigma_i| > \gamma$. Ésta secuencia de soluciones será denotada como $\{\vec{\sigma}_s\} := \{\vec{\sigma}(\{\xi_s\})\}$. Por simplicidad,

supondremos que cada solución esta definida en el segmento $[0, T]$. Note además que, dadas la convergencia del diferenciador y las propiedades de robustez de inclusiones diferenciales homogéneas, siempre existen soluciones que satisfacen $|\sigma_0| \leq \delta$ y $|\sigma_i| \leq \gamma$ si ξ es suficientemente pequeño [Lev05].

Por otro lado, $\|\vec{\sigma}_s\|$ permanece acotado para cada s pues si no fuese cierto, entonces de (2.8) con $\max |\sigma_i|, i = 1, \dots, k$ suficientemente grande, existiría un tiempo $t_1 \in [0, T]$ tal que $|\sigma_0| \leq \delta$ no podría ser mantenido en todo el intervalo $[0, T]$. Entonces, el lado derecho de (2.8) está localmente acotado. Por tanto, las soluciones $\vec{\sigma}_s(t)$ están acotadas (esto también resulta claro pues por suposición el diferenciador proporciona convergencia) y poseen una constante Lipschitz en común. Entonces, debido al teorema de Arzela-Ascoli, existe una subsecuencia $\vec{\sigma}_{s_l}, l \rightarrow \infty$ que converge uniformemente. Obviamente el limite de esta subsecuencia es el mismo que el de la secuencia original $\vec{\sigma}_s$, esto es, el sistema nominal

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_0 &= -\tilde{\lambda}_k |\sigma_0|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign } \sigma_0 + \sigma_1, \\ \dot{\sigma}_1 &= -\tilde{\lambda}_{k-1} |\sigma_0|^{\frac{k-1}{k+1}} \text{sign } \sigma_0 + \sigma_2, \\ &\vdots \\ \dot{\sigma}_{k-1} &= -\tilde{\lambda}_1 |\sigma_0|^{\frac{1}{k+1}} \text{sign } \sigma_0 + \sigma_k, \\ \dot{\sigma}_k &\in -\tilde{\lambda}_0 \text{sign } \sigma_0 + [-1, 1], \end{aligned} \tag{2.9}$$

que por el Lema 2.6 proporciona la propiedad deseada. □

2.3.1. Un criterio de separación

En esta subsección introducimos un criterio para determinar cuando el diferenciador ha convergido. Defina como $y_i = c_i x$, $i = 1, \dots, m$ como la i -ésima salida del sistema y suponga que un diferenciador de orden $r_i - 1$ ha sido usado (en cada salida) para estimar las derivadas requeridas. Denote como $z_{i,0}$ la variable z_0 del diferenciador aplicado a la i -ésima salida. El Teorema 2.3.1 de la subsección anterior proporciona una forma sencilla de ver si el i -ésimo diferenciador ha convergido al verificar si la desigualdad $|z_{0,i} - y_i| \leq \gamma_{0,i} L_i \tau_i^{r_i}$ se satisface en un intervalo de tiempo $\gamma_{i,t} \tau_i$.

Resulta natural estimar las constantes $\gamma_{0,i}$ y $\gamma_{i,t}$ por medio de simulaciones. Además, este criterio es robusto en el sentido que el valor de ξ en el Teorema 3.2.1 puede ser fácilmente aumentado sin cambiar la magnitud del ruido o el tamaño del paso de muestreo. También, la longitud del intervalo de tiempo $\gamma_t \xi$ puede ser libremente aumentado sin cambiar la afirmación del Teorema.

De esta forma, se propone construir el control final en la forma

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u} & \text{si } |z_{0,i} - y_i| \leq \gamma_{0,i} L_i \tau_i^{r_i} \text{ en el intervalo } \gamma_{i,t} \tau_i \\ & i = 1, \dots, m. \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (2.10)$$

donde \bar{u} es el control calculado usando las estimaciones de las derivadas producidas por el diferenciador.

Control en Tiempo Finito por Realimentación de Estados

Consideraremos un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) con entradas desconocidas

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw(t) \quad (3.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y $w \in \mathbb{R}^q$ son entradas desconocidas (perturbaciones). Supondremos que todo el estado x es medible y que $\text{rank}(B) = m$, de modo que no hay controles que actúen exactamente en el mismo subespacio y por lo tanto resulten redundantes. Las matrices A , B y D se suponen conocidas y de dimensiones apropiadas.

El objetivo de control es diseñar $u = u(x)$ de forma que

$$x(t) \equiv 0, \forall t \geq T$$

en presencia de entradas desconocidas acotadas $\|w(t)\| \leq W^+$ (W^+ una constante conocida) que además satisfacen la siguiente suposición

Suposición A 3.1. *Las perturbaciones $w(t)$ en (3.1) satisfacen la llamada condición de acoplamiento (matching condition) $\text{span}(D) \subseteq \text{span}(B)$.*

Lema 3.1. *Dadas $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\text{rank}(B) = m$ y*

$$\text{span}(D) \subseteq \text{span}(B)$$

entonces la matriz D puede ser expresada como $D = B\bar{D}$, donde \bar{D} puede ser calculada como

$$\bar{D} = (B^T B)^{-1} B^T D$$

Demostración. Para cualquier D dada, la condición $\text{span}(D) \subseteq \text{span}(B)$ quiere decir que cada columna de D es una combinación lineal de las columnas de B , lo que implica que existe $\bar{D} \in \mathbb{R}^{m \times q}$ tal que

$$D = B\bar{D}$$

Como $\text{rank}(B) = m$, la pseudoinversa de B por la derecha existe y la formula $\bar{D} = (B^T B)^{-1} B^T D$ se verifica. \square

Considerando la suposición A3.1, siempre podemos reescribir el sistema (3.1) como $\dot{x} = Ax + B[u + \bar{D}w(t)]$, o como

$$\dot{x} = Ax + B[u + \bar{w}(t)] \quad (3.2)$$

donde $\bar{w} := \bar{D}w$ se encuentra “acoplada” a la entrada de control u . De aquí en adelante, consideraremos siempre al sistema (3.2) cuando nos refiramos a sistemas con entradas desconocidas acopladas. En la siguiente sección del capítulo comenzamos abordando el problema de control para el caso de una entrada. Posteriormente, se introduce una transformación de estados y entradas para tratar el problema de múltiples entradas. Finalmente se presentan algunos ejemplos en simulación.

3.1. Caso de Una Entrada

Comenzaremos introduciendo el siguiente lema,

Lema 3.2. *Dado el siguiente sistema en Forma Canónica de Controlador*

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u + w(t)]$$

con $z(t) \in \mathbb{R}^n$ disponible y la entrada desconocida $w(t) \in \mathbb{R}^1$ acotada como $|w(t)| \leq W^+$, W^+ una constante conocida. Entonces el origen $z = 0$ es estable en tiempo finito con una selección apropiada de la entrada de control $u(t)$.

Demostración. Elija $\sigma := z_1$. Entonces el sistema es equivalente a

$$\sigma^{(n)} = a^T z + u + w := h(t, z) + u,$$

donde $a^T := [a_1, a_2, \dots, a_n]$ y $h(t, z) := a^T z + w(t)$. Note que es el mismo problema descrito en el subsección 2.2, [Lev08a]. El problema es solucionable si podemos encontrar la “función de ganancia” $\Phi(t, z)$ de modo que $\alpha\Phi(t, z) \geq |h(t, z)|$ para una α suficientemente grande. Se puede calcular

$$|h(t, z)| \leq \|a\|\|z\| + W^+$$

y eligiendo

$$\Phi(z) := \varrho_1\|z\| + \varrho_2$$

con $\varrho_1 > \|a\|$ y $\varrho_2 > W^+$, se asegura que $\alpha\Phi(z) \geq |h(t, z)|$. Entonces el uso del controlador

$$\begin{aligned} u &= -\alpha\Phi(z)H_n(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(n-1)}) \\ &= -\alpha\Phi(z)H_n(z_1, z_2, \dots, z_n) \end{aligned}$$

donde $H_n(z)$ es un controlador de orden n por modos deslizantes con “parámetros robustos para función de ganancia”. Como se mostró en la subsección 2.2 [Lev08a] la siguiente identidad es cierta después de tiempo finito

$$\{\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(n-1)}\} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \equiv 0$$

esto es $z(t) \equiv 0, \forall t > T$. □

Es prudente mencionar que los controladores “clásicos” por modos deslizantes de orden superior, [Lev01; Lev03], solo pueden lograr estabilidad semiglobal de origen, dado que requieren una cota del tipo $|h(t, z)| \leq C = \text{const}$. Para el problema formulado en el lema anterior, esto es solo cierto en una vecindad del origen, dado que el termino lineal $a^T z$ no está uniformemente acotado. Por otro lado, es posible considerar una clase más amplia de entradas desconocidas si podemos encontrar la función de ganancia $\Phi(z, t)$ apropiada.

En este punto, hacemos uso de un hecho bien conocido: todo sistema controlable (en este caso con una entrada) es transformable a la forma canónica de controlador mediante una transformación de estados. Así, usamos el lema anterior y tenemos todo listo. En la siguiente sección planteamos el problema de que transformación necesitamos.

3.1.1. Transformación de Estados y Entradas

Problema 3.1.1. *Dado*

$$\dot{x} = Ax + bu$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, y (A, b) controlable, es decir $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$ son linealmente independientes (forman una base para \mathbb{R}^n) encontrar una transformación de estados $z = Q^{-1}x$ tal que el sistema transformado esté en la **forma**

canónica de controlador

$$Q^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} =: \bar{b}, \quad Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{bmatrix} =: \bar{A}$$

donde $\{a_i\}$ son los coeficientes del polinomio característico de A .

Una posible solución puede ser encontrada de la siguiente forma. Defina $Q := [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$, entonces

$$Q^{-1}b = \bar{b} \iff b = Q\bar{b} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = q_n$$

por lo que $q_n = b$. Por otro lado $Q^{-1}AQ = \bar{A}$ es decir $AQ = Q\bar{A}$ así

$$[Aq_1 \ Aq_2 \ \dots \ Aq_n] = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

Analizando por columnas, tendríamos que

- Columna n : $Aq_n = q_{n-1} + a_1q_n \Rightarrow q_{n-1} = Aq_n - a_1q_n = Ab - a_1b$
- Columna $n - 1$: $Aq_{n-1} = q_{n-2} + a_2q_n \Rightarrow q_{n-2} = A^2b - a_1Ab - a_2b$
- \vdots
- Columna 2: $Aq_2 = q_1 + a_{n-1}q_n \Rightarrow q_1 = A^{n-1}b - a_1A^{n-2}b - \dots - a_{n-2}Ab - a_{n-1}b$

Si $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$ son linealmente independientes, entonces los q_j obtenidos también son linealmente independientes pues solo un elemento de la base es agregado en cada paso

- $q_n = b$

- $q_{n-1} = Ab - a_1b \in \text{span}(q_n) \Leftrightarrow \{b, Ab\}$ son linealmente dependientes (LD).
- $q_{n-2} = A^2b - a_1Ab - a_2b \in \text{span}(q_{n-1}) \Leftrightarrow \{b, Ab, A^2b\}$ son LD .

Solución 3.1.1. Con el uso de la transformación

$$Q := [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n], \quad q_j = A^{n-j}b - \sum_{k=1}^{n-j} a_k A^{n-j-k}b$$

donde a_i son los coeficientes del polinomio característico de A , el sistema transformado $z = Q^{-1}x$ es

$$\dot{z} = Q^{-1}AQz + Q^{-1}bu =: \bar{A}z + \bar{b}u$$

donde el par (\bar{A}, \bar{b}) está en la forma canónica de controlador.

3.1.2. Ejemplo

Considere el sistema con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

donde $\lambda(A) = \{9, 67, -0,33 \pm 1,19j\}$ y $p_A(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 5\lambda - 15$. Note que el sistema es inestable. La matriz de controlabilidad del sistema

$$C(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 72 \\ 1 & 17 & 149 \\ 2 & 14 & 142 \end{bmatrix}, \text{rank } C(A, b) = 3$$

por lo que el sistema es controlable. Identificamos

$$a_1 = 9, a_2 = 5, a_3 = 15$$

Calcule

$$q_3 = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, q_2 = Ab - a_1b = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}, q_1 = A^2b - a_1Ab - a_2b = \begin{bmatrix} 36 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

de modo que la matriz de transformación es

$$Q = \begin{bmatrix} 36 & 4 & 0 \\ -9 & 8 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

y el sistema transformado $z = Q^{-1}x$ es

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & 5 & 9 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + w(t))$$

Suponemos una perturbación “desconocida” acoplada al control de la forma

$$w(t) = 0,2 \cos(15t) + 0,2 \sin(30t) + 1$$

y una condicion inicial $x(0) = [3, 5, -1]^T$. El control se elije como

$$u = -\alpha \Phi(z) \frac{z_3 + 2\lambda^{\frac{3}{2}} \left[|z_2| + \lambda |z_1|^{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[z_2 + \lambda |z_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign} z_1 \right]}{|z_3| + 2\lambda^{\frac{3}{2}} \left[|z_2| + \lambda |z_1|^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

donde $\Phi(z) := \|z\|_1 + 1,4$, $\alpha = 6$ y $\lambda = 0,7$. La Figura 3.1 presenta los resultados en simulación obtenidos.

Nota. Las precisiones aseguradas por modos deslizantes de alto orden a través de v son para z . Por tanto, la precisión en las coordenadas originales x es la más pobre que se obtuvo para z .

3.2. Caso de Múltiples Entradas

El caso de múltiples entradas se aborda transformando el sistema a varios bloques en forma canónica de controlador con una sola entrada. Así, para cada bloque, se diseña el control de la misma forma que en la seccion anterior.

3.2.1. Transformación de Estados y Entradas

Este problema fue abordado por D. Luenberger en [Lue67] y debido a esto esta forma canónica es conocida como “Segunda Forma Canonica de Luenberger”. El problema puede ser planteado como sigue

Problema 3.2.1 (Transformación de estados). *Dados (A, B) controlable con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\text{rank}(B) = m$ encontrar una matriz no singular T tal que*

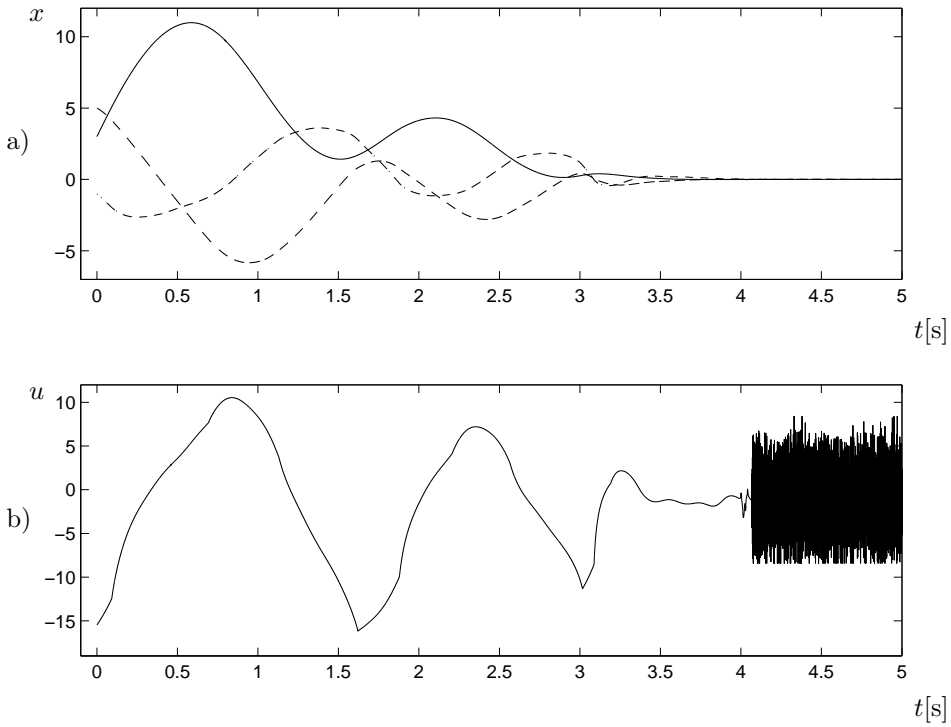


Figura 3.1: Resultados en simulación para una sola entrada. a) Estado x , continua: x_1 , segmentada: x_2 , línea-punto: x_3 . b) Señal de control u .

$A_c := T^{-1}AT, B_c := T^{-1}B$ están en la forma

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & \beta_{2m} \\ \hline & & \vdots & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{ii,1} & a_{ii,2} & \cdots & a_{ii,\sigma_i-1} & a_{ii,\sigma_i} \end{bmatrix}, A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{ij,1} & a_{ij,2} & \cdots & a_{ij,\sigma_j-1} & a_{ij,\sigma_j} \end{bmatrix}$$

Una prueba formal para la transformación puede ser encontrada en [Fur88], aquí solo presentamos un bosquejo con fines constructivos. Considere la matriz de controlabilidad \mathcal{C} del sistema. Seleccione secuencialmente n vectores columna linealmente independientes de

$$\mathcal{C} = [b_1, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_m]$$

organice dichos vectores como

$$S = [b_1, Ab_1, \dots, A^{\sigma_1-1}b_1, b_2, \dots, A^{\sigma_2-1}b_2, \dots, b_m, \dots, A^{\sigma_m-1}b_m]$$

donde $\{\sigma_i\}$ son los *índices de controlabilidad*. Como S no es singular, calcule su inversa

$$L := S^{-1} = \begin{bmatrix} l_1^T \\ \vdots \\ l_{\rho_1}^T \\ \vdots \\ l_{\rho_2}^T \\ \vdots \\ l_{\rho_m}^T \end{bmatrix}$$

donde $\rho_1 := \sigma_1$, $\rho_2 := \sigma_1 + \sigma_2$ y

$$\rho_i := \sum_{j=1}^i \sigma_j$$

Escoja ahora los m renglones correspondientes a $l_{\rho_i}^T$, $i = 1, \dots, m$ para cons-

truir la transformación

$$T := \left[\begin{array}{c} l_{\rho_1}^T \\ l_{\rho_1}^T A \\ \vdots \\ l_{\rho_1}^T A^{\sigma_1-1} \\ \hline l_{\rho_2}^T \\ \vdots \\ l_{\rho_2}^T A^{\sigma_2-1} \\ \hline \vdots \\ \hline l_{\rho_m}^T \\ \vdots \\ l_{\rho_m}^T A^{\sigma_m-1} \end{array} \right]$$

Considere el producto LS ,

$$LS = \left[\begin{array}{c} l_1^T \\ \vdots \\ l_{\rho_1}^T \\ \vdots \\ l_{\rho_2}^T \\ \vdots \\ l_{\rho_m}^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccccccc} b_1 & \dots & A^{\sigma_1-1}b_1 & b_2 & \dots & A^{\sigma_2-1}b_2 & \dots & b_m & \dots & A^{\sigma_m-1}b_m \end{array} \right]$$

como $LS = I_{n \times n}$, entonces

- $l_{\rho_1}^T b_1 = 0, \dots, l_{\rho_1}^T b_m = 0 \Leftrightarrow l_{\rho_1}^T B = 0$
- $l_{\rho_1}^T AB = 0, \dots, l_{\rho_1}^T A^{\sigma_1-2}B = 0$
- $l_{\rho_1}^T A^{\sigma_1-1}b_1 = 1, l_{\rho_1}^T A^{\sigma_1-1}b_2 = \beta_{12}, \dots, l_{\rho_1}^T A^{\sigma_1-1}b_{1m} = \beta_{1m}$

por lo que vemos que $l_{\rho_i}^T$ es ortogonal a $B, AB, \dots, A^{\sigma_i-2}B$ y a $A^{\sigma_i-1}[b_1, \dots, b_{i-1}]$. De esta forma B_c tiene efectivamente la forma deseada.

Por otro lado se tiene que $TA = A_c T$, así, por ejemplo para el primer bloque,

se tendría

$$\begin{bmatrix} l_{\rho_1}^T A \\ l_{\rho_1}^T A^2 \\ \vdots \\ l_{\rho_1}^T A^{\sigma_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ a_{11,1} & a_{11,2} & \dots & a_{11,\sigma_1} & a_{12,\dots} & \dots & a_{1m,\sigma_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{\rho_1}^T \\ l_{\rho_1}^T A \\ \vdots \\ l_{\rho_1}^T A^{\sigma_1-1} \\ \hline l_{\rho_2}^T \\ \vdots \\ l_{\rho_2}^T A^{\sigma_2-1} \\ \hline \vdots \\ l_{\rho_m}^T \\ \vdots \\ l_{\rho_m}^T A^{\sigma_m-1} \end{bmatrix}$$

Es claro que la ecuación anterior se cumple por la estructura con diagonal superior de la matriz A_c y además, dado que los renglones de T son una base de \mathbb{R}^n , cualquier vector $l_{\rho_1}^T A^{\sigma_1} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, puede ser escrito como una combinación lineal de la base

$$l_{\rho_1}^T A^{\sigma_1} = LC\{l_{\rho_1}^T, \dots, l_{\rho_1}^T A^{\sigma_1-1}\} + \dots + LC\{l_{\rho_m}^T, \dots, l_{\rho_m}^T A^{\sigma_m-1}\}$$

donde $LC\{\cdot\}$ es el “operador” combinación lineal.

Ahora se introduce una transformación de entradas adicional de forma que solo una entrada de control afecta solo a cada bloque (control no interactivo)

Lema 3.3 (Transformación de Entradas). *Con B_c como previamente se definió, siempre es posible construir una transformación de entradas*

$$u = Gv$$

dada por la inversa de los renglones $\{\rho_i\}$ de B_c agrupados, es decir,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} \\ 0 & 1 & \beta_{23} & \dots & \beta_{2m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

tal que $B_c G v = \bar{B}_c v$ donde

$$\bar{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.2. Diseño del Control

Usando la transformación descrita en la subsección anterior, obtenemos un conjunto de m bloques en forma canónica de controlador que posiblemente están acoplados en la última fila de la matriz A_{ij} . El siguiente lema presenta la metodología de diseño para este caso

Teorema 3.2.1. *Considere el sistema (3.2) con todo el estado x disponible, (A, B) controlable y $\|w(t)\| \leq W^+$, W^+ una constante conocida. Entonces, el sistema es estabilizable en tiempo finito a $x = 0$ con el uso del controlador*

$$v_i = -\alpha_i \Phi_i(z) H_{\mu_i}(z_{\mu_{i-1}+1}, \dots, z_{\mu_i-1}), \quad i = 1, \dots, m.$$

donde μ_i es el i -ésimo índice de controlabilidad, $z = Tx$, $u = Gv$ y

$$\Phi_i(z) := k_{i,1} \|z\| + k_{i,2}$$

con constantes $\alpha_i, k_{i,1}$ y $k_{i,2}$ suficientemente grandes.

Demostración. Introduzca las transformación de estados $z = Tx$ y de entradas $u = Gv$ previamente definidas. En esta forma el sistema es descompuesto como m subsistemas con una sola entrada, es decir, en la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1, \mu_1} &= A_{11} z_{1, \mu_1} + \bar{A}_{11} \bar{z}_{1, \mu_1} + \bar{B}_{c,1} u + B_{c,1} w \\ \dot{z}_{\mu_1+1, \mu_2} &= A_{22} z_{\mu_1+1, \mu_2} + \bar{A}_{22} \bar{z}_{\mu_1+1, \mu_2} + \bar{B}_{c,2} u + B_{c,2} w \\ &\vdots \\ \dot{z}_{\mu_{m-1}+1, \mu_m} &= A_{mm} z_{\mu_{m-1}+1, \mu_m} + \bar{A}_{mm} \bar{z}_{\mu_{m-1}+1, \mu_m} + \bar{B}_{c,m} u + B_{c,m} w \end{aligned}$$

donde $z_{i,j} = [z_i, z_{i+1}, \dots, z_j]^T$, $\bar{z}_{i,j}$ es el vector de elementos de z que no pertenecen a $z_{i,j}$, \bar{A}_{ij} es la concatenación (juntar) A_{ij} , $i \neq j$, $B_{c,i}$ es el i -ésimo bloque de B_c y $\bar{B}_{c,i}$ es el i -ésimo bloque de \bar{B}_c . Cada subsistema satisface la formulación del problema del Lema 3.2 con $\sigma_i = [1, 0, \dots, 0]z_{\mu_{i-1}+1, \mu_i}$, esto es

$$\sigma_i^{(\mu_i)} = a_i^T z + v_i + b_i^T w, \quad i = 1, \dots, m.$$

donde a_i^T es el ultimo renglón de la matriz $[A_{i1} \cdots A_{im}]$ y b_i^T es el ultimo renglón del i -ésimo bloque de B_c . Entonces, por el Lema 3.2, eligiendo $k_{i,1} > \|a_i\|$ y $k_{i,2} > \|b_i\|W^+$ se obtiene la afirmación del teorema. \square

3.2.3. Ejemplo

Considere un sistema con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con $x(0) = [1, 2, 3, -1, -2]^T$. Los autovalores $\lambda(A) = \{-1, 1, -1, -1, -2\}$, por lo que el sistema es inestable. La entrada “desconocida” se elige, para propósitos de simulación como

$$w(t) = \begin{bmatrix} 0,5 \sin(15t) + 0,3 \\ 0,7 \sin(30t) + 0,5 \end{bmatrix}$$

Calcule la matriz de controlabilidad del sistema como

$$C(A, B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & \cdots \end{bmatrix}$$

y construya la matriz S con las primeras 5 columnas linealmente independientes de C

$$S = [b_1 \quad Ab_1 \quad A^2b_1 \quad b_2 \quad Ab_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

de modo que los índices de controlabilidad son $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2$ y por tanto $\rho_1 = \sigma_1, \rho_2 = \sigma_1 + \sigma_2$. Encuentre

$$L := S^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,25 & -0,75 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -0,5 & 0,5 & -0,75 & -0,25 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^T \\ l_2^T \\ l_{\rho_1}^T \\ l_4^T \\ l_{\rho_2}^T \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz de transformación T se construye como

$$T := \begin{bmatrix} l_1^T \\ l_{\rho_1}^T A \\ l_{\rho_1}^T A^2 \\ l_{\rho_1}^T \\ l_{\rho_2}^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 & -0,75 & -0,25 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & 0,25 & 0,75 & -2 \\ -0,5 & 0,5 & 0,25 & -0,25 & 4 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & -1 \\ 0 & 0 & -0,5 & -0,5 & 2 \end{bmatrix}$$

y el sistema transformado $z = Tx$ es

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \bar{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, la transformación de entradas $u = Gv$ con

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y finalmente el sistema transformado es

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}Gv = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v$$

los controladores $v = [v_1, v_2]^T$ se eligen como

$$v_1 = -\alpha_1 \Phi_1(z) \frac{z_3 + 2\lambda_1^{\frac{3}{2}} \left[|z_2| + \lambda_1 |z_1|^{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[z_2 + \lambda_1 |z_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign} z_1 \right]}{|z_3| + 2\lambda_1^{\frac{3}{2}} \left[|z_2| + \lambda_1 |z_1|^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

donde $\Phi_1(z) := \|z\|_1 + 1,2$, $\alpha_1 = 16,875$ y $\lambda_1 = 1,5$ y

$$v_2 = -\alpha_2 \Phi_2(z) \frac{z_5 + \lambda_2 |z_4|^{\frac{1}{2}} \text{sign} z_4}{|z_5| + \lambda_2 |z_4|^{\frac{1}{2}}}$$

con $\Phi_2(z) = \|z\|_1 + 1$, $\alpha_2 = 1,452$ y $\lambda_2 = 2,2$.

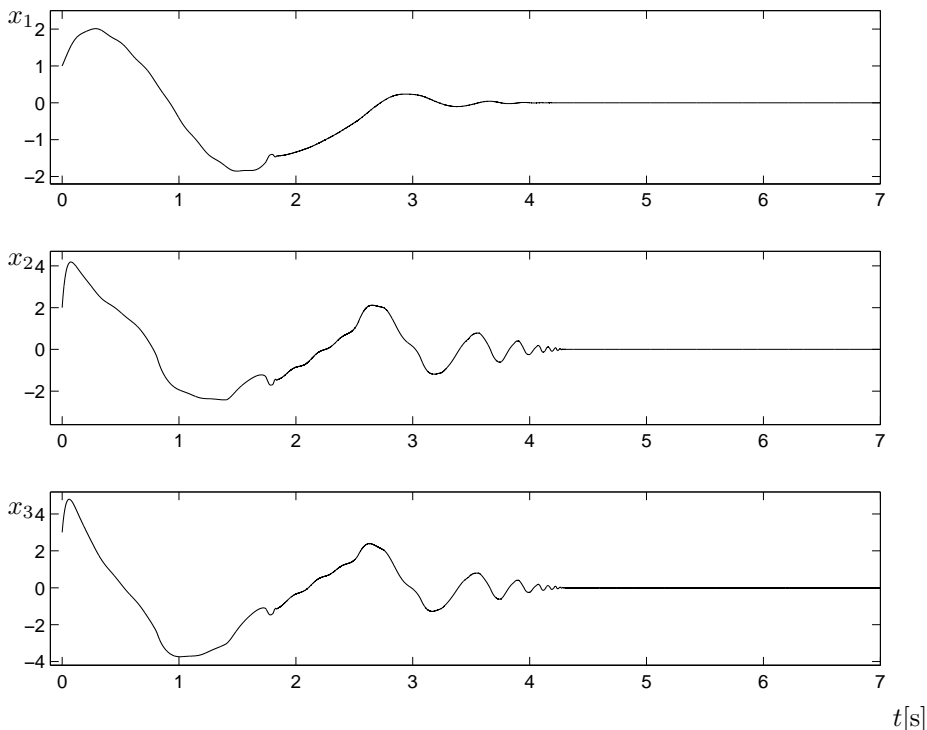


Figura 3.2: Resultados en simulación múltiples entradas. Estados x_1 , x_2 y x_3 .

Las Figuras (3.2),(3.3) y (3.4) muestran los resultados en simulación obtenidos. Es interesante notar que a partir de la Figura (3.4) se observa colapso dinámico para el segundo bloque alrededor de los 2 segundos, a partir del cual todas las trayectorias del sistema presentan chattering. Así mismo, dado que $u_1 = v_1 - 3v_3$, esta señal de control presenta switcheo de alta frecuencia con desviación (bias) distinta de cero para después colapsar el primer bloque alrededor de los 4 segundos.

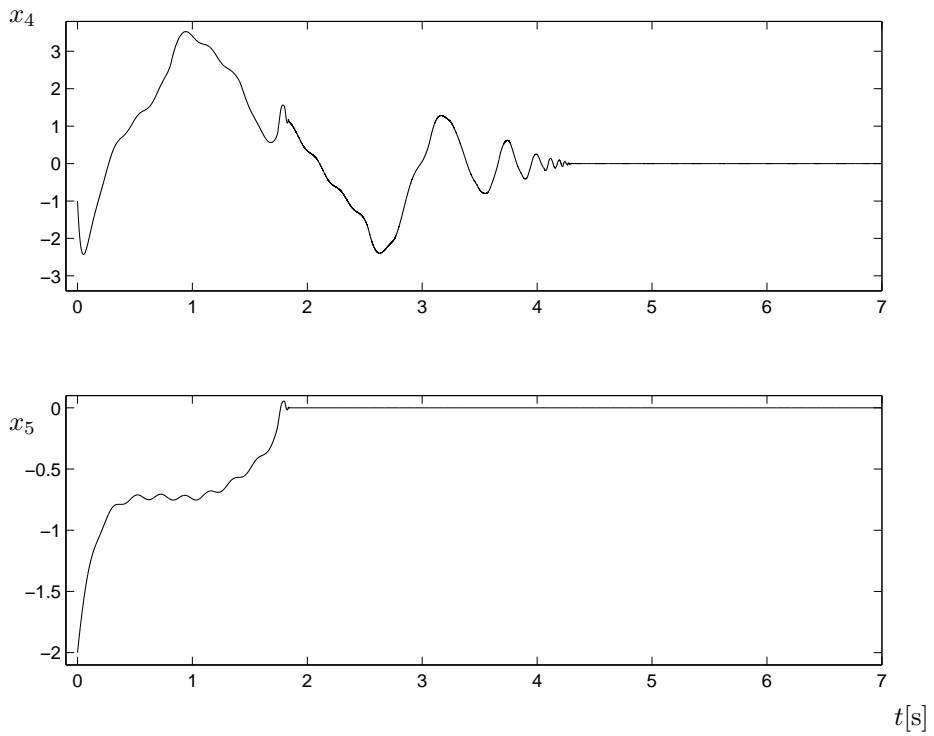


Figura 3.3: Resultados en simulación múltiples entradas. Estados x_4 y x_5 .

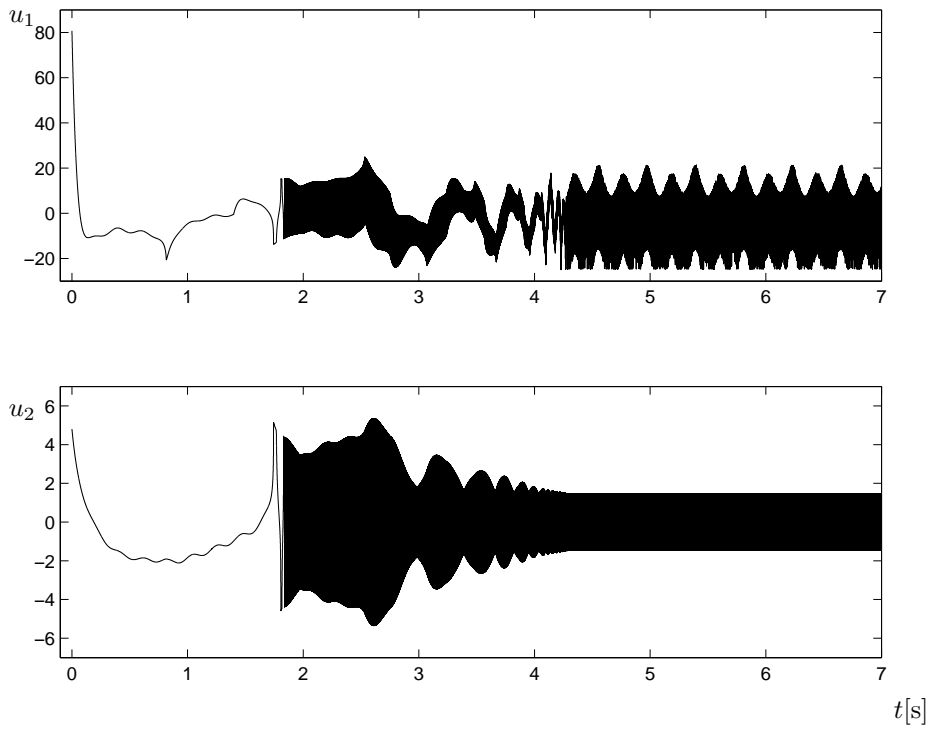


Figura 3.4: Resultados en simulación múltiples entradas. Señales de control u_1 y u_2 .

Control por Realimentación de Salida: grado relativo bien definido

Consideraremos sistemas del tipo (LTI con entradas desconocidas acopladas)

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B[u + w(t)] \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.1)$$

donde las señales $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^m$ son el estado, entrada de control, salida medida, entrada desconocida (perturbación), respectivamente. Supondremos que solamente la salida $y(t)$ está disponible. El objetivo de control es diseñar u de manera que el origen $x = 0$ sea estable en tiempo finito, esto es, existe $T < \infty$ tal que

$$x(t) \equiv 0, \forall t \geq T$$

en presencia de entradas desconocidas uniformemente acotadas $\|w(t)\| \leq W^+$, W^+ una constante conocida.

Antes de nada, introduzcamos el siguiente concepto

Definición 4.0.1 (Isidori, 1996). *La salida $y = Cx$ tiene **grado relativo bien definido** (r_1, \dots, r_m) si*

$$c_i A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r_i - 2, i = 1, 2, \dots, m$$

y se cumple

$$\text{rank}(Q) = m, \quad Q := \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1-1} B \\ c_2 A^{r_2-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1} B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Por otro lado, el siguiente concepto tiene un importancia central

Definición 4.0.2 (Hautus, 1983). *El sistema Σ (4.1), o la tripleta (A, B, C) , se dice que es **fuertemente observable** si $y(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0, \forall (u + w(t), x_0)$.*

Esta última condición, permite la distinguibilidad entre cualquier condición inicial ante cualquier entrada $u + w$, en este caso desconocida. Resulta más o menos intuitivo como una extrapolación del concepto clásico de observabilidad (donde no se involucran entradas, pues son conocidas). Considere dos experimentos: uno con condición inicial x_0^1 y entrada \bar{w}_1 y otro con condición inicial x_0^2 y \bar{w}_2 . Las salidas correspondientes son $y_1(t, x_0^1, \bar{w}_1)$ y $y_2(t, x_0^2, \bar{w}_2)$. Lo único que conocemos es la salida, por lo que esperamos que si encontramos $y_1(t, x_0^1, w_1) \equiv y_2(t, x_0^2, w_2)$ se cumpla que $x_0^1 = x_0^2$ (sin importar \bar{w}), de otra forma no podríamos distinguir las condiciones iniciales, pues no existe más información disponible.

Resulta claro, por lo menos para el caso SISO, que esto resulta cierto si y solo si el sistema no tiene ceros. Si tuviese un cero, digamos en a , y escogemos una condición inicial $x_0 \in \ker(C)$, $x_0 \neq 0$ pues $\text{rank}(C) < n$, se tiene que $y(0) = 0$ una entrada e^{at} no es reflejada en la salida, por lo que $y(t) \equiv 0$ mientras que $x(t)$ no es idénticamente cero. Esto mismo, resulta que se extrapola al caso MIMO a través del siguiente lema

Lema 4.1 (Hautus, 1983). *Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes*

- (i) *el sistema es fuertemente observable,*
- (ii) *el sistema no tiene ceros invariantes, es decir*

$$\text{rank } R(s) := \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m, \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

De esta forma tenemos una manera computacional de verificar si un sistema es fuertemente observable o no.

Ahora presentamos algunas conexiones que encontramos entre observabilidad fuerte y grado relativo bien definido.

4.1. Preliminares

Definamos como Σ_I la parte interna de Σ (en el sentido típico de dinámica cero), donde

$$\Sigma_I : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B[u + w(t)] \\ \tilde{y} = \tilde{C}x \end{cases} \quad (4.2)$$

y $\tilde{C} := [c_1^T, \dots, (c_1 A^{r_1-1})^T, \dots, c_m, \dots, (c_m A^{r_m-1})^T]^T$. Lo siguiente es cierto

Lema 4.2. Σ es fuertemente observable si, y solo si, Σ_I es fuertemente observable.

Demostración. (\Rightarrow) Por contradicción. Suponga que Σ no es fuertemente observable, entonces existe al menos una condición inicial x_0 y una entrada $\bar{u}(t) = u(t) + w(t)$ tales que $y(t) \equiv 0, t \geq 0$ y $x(t) \neq 0$. Note que la condición $y(t) \equiv 0, \forall t \geq 0$ también implica que

$$\begin{bmatrix} y_i \\ \dot{y}_i \\ \vdots \\ y_i^{(r_i-1)} \end{bmatrix} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

entonces para la misma entrada $\bar{u}(t)$ y con una condición $x_0 \in \ker(\tilde{C})$, se tiene que $\tilde{y}(t) \equiv 0$ y $x(t) \neq 0$ y Σ_I no es fuertemente observable.

(\Leftarrow) Si Σ_I es fuertemente observable resulta claro que Σ dado que $\{y\} \subseteq \{\tilde{y}\}$. \square

El siguiente lema nos dice cuando los renglones de \tilde{C} son linealmente independientes

Lema 4.3. Si Σ tiene grado relativo bien definido, entonces $\text{rank } \tilde{C} = \sum_{i=1}^m r_i := r^*$.

Demostración. Por contradicción. Primero note que $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{r^* \times n}$ y suponga que $\text{rank } \tilde{C} < r^*$. Entonces existe un vector en el kernel izquierdo $\lambda \in \mathbb{R}^{r^*}$ no trivial tal que

$$\lambda^T \tilde{C} = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda^T \tilde{C} B = 0$$

donde se ha multiplicado por B en ambos lados. Sea λ_{r_i} los elementos correspondientes de λ , entonces se tiene que

$$\lambda_{r_i}^T \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1-1} B \\ c_2 A^{r_2-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1} B \end{bmatrix} = 0$$

y por tanto la porción de λ correspondiente a λ_{r_i} debe ser cero dado que Q es de rango completo. Ahora multiplique por AB para obtener $\lambda^T \tilde{C}AB = 0$. Sea λ_{r_i-1} la porción correspondiente de λ y obtenga

$$\lambda_{r_i-1}^T \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1-1} B \\ c_2 A^{r_2-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1} B \end{bmatrix} = 0$$

de modo que la porción de λ correspondiente a λ_{r_i-1} es cero. Prosiga con este proceso para obtener que $\lambda \equiv 0$. Con esto obtenemos la contradicción deseada, pues $\lambda = 0$ es trivial, por tanto $\text{rank}(\tilde{C}) = r^*$. \square

Teorema 4.1.1. *Si Σ tiene grado relativo bien definido entonces es fuertemente observable si, y solo si, $\sum_{i=1}^m r_i = n$.*

Demostración. (\Rightarrow) Suponga grado relativo bien definido y $\sum r_i = n$. Si el grado relativo está bien definido entonces, por el Lema 4.3, se obtiene que $\text{rank } \tilde{C} = \sum r_i$, sin embargo $\sum r_i = n$, por tanto $\text{rank } \tilde{C} = n$. Dado $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{r^* \times n}$ es necesario que $r^* = n$ y \tilde{C} es una matriz cuadrada y de rango completo. Entonces, dado que $\tilde{y} = \tilde{C}x$, $x = 0$ si y solo si $\tilde{y} = 0$, eso significa observabilidad fuerte para Σ_I y, por el Lema 4.2, entonces Σ también es fuertemente observable.

(\Leftarrow) Suponga grado relativo bien definido y observabilidad fuerte. Por contradicción. Suponga $\text{rank } \tilde{C} < n$ entonces podemos encontrar $x_0 \neq 0$ de modo que $x_0 \in \ker(\tilde{C})$ y por tanto $\tilde{y}(0) = 0$. Derive una vez para obtener

$$\dot{\tilde{y}} = \tilde{C}Ax + \tilde{C}Bu, \quad \tilde{C}B \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

dado que

$$\text{rank}(\tilde{C}B) = \text{rank} \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1-1} B \\ c_2 A^{r_2-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1} B \end{bmatrix} = m$$

entonces existe una entrada, de hecho $u = (\tilde{C}B)^{-1}(-\tilde{C}A)x$, de modo que $\dot{\tilde{y}} = 0$ y por tanto $\tilde{y}(t) \equiv 0, \forall t \geq 0$ mientras que $x(t)$ no es idénticamente cero, lo que conduce a una contradicción. Por tanto $\text{rank } \tilde{C} = n$ y, como se mostró arriba, esta condición implica $\sum r_i = n$ debido al lema 4.3. \square

Note además que, si las condiciones del teorema anterior se cumplen, entonces

$$x = M \begin{bmatrix} Y_{r,1} \\ Y_{r,2} \\ \vdots \\ Y_{r,p} \end{bmatrix} := MY_r, \quad Y_{r,i} := \begin{bmatrix} y_i \\ \dot{y}_i \\ \vdots \\ y_i^{(r_i-1)} \end{bmatrix}$$

para $M = \tilde{C}$ y el estado x puede ser representado como una combinación lineal de la salida y sus derivadas.

4.2. Diseño del control

Consideremos las siguientes dos suposiciones

Suposición A 4.1. *El sistema Σ tiene grado relativo bien definido (r_1, \dots, r_p) con respecto a $u + w$.*

Suposición A 4.2. *El vector de grados relativos satisface $\sum r_i = n$.*

Note que por el Teorema 4.1.1, A4.1 y A4.2 son equivalentes a la observabilidad fuerte del sistema. Entonces es posible reformular el problema de control como diseñar u de modo que

$$y(t) \equiv 0, \quad \forall t \geq T$$

El siguiente teorema introduce la metodología de diseño para este caso:

Teorema 4.2.1. *Considere el sistema Σ , las suposiciones A4.1, A4.2 y $\|w(t)\| \leq W^+$, W^+ una constante conocida. Entonces el sistema Σ es estabilizable en tiempo finito a $x = 0$ con el uso del controlador*

$$v_i = -\alpha_i \Phi_i(Y_r) H_{r_i}(y_i, \dot{y}_i, \dots, y_i^{(r_i-1)}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.3)$$

con α_i suficientemente grande, donde $u = Q^{-1}v$,

$$\Phi_i(Y_r) := k_{i,1} \|Y_r\| + k_{i,2}, \quad i = 1, \dots, m,$$

y $k_{i,1} > \|c_i A^{r_i}\|$, $k_{i,2} > \|c_i A^{r_i-1} B\| W^+$.

Demostración. Derive cada salida y_i hasta que aparezca una entrada

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= c_i A x & (4.4) \\ &\vdots \\ y_i^{(r_i)} &= c_i A^{r_i} x + c_i A^{r_i-1} B [u + w(t)] \end{aligned}$$

de modo que tenemos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1^{(r_1)} &= c_1 A^{r_1} x + c_1 A^{r_1-1} B [u + w(t)] \\ y_2^{(r_2)} &= c_2 A^{r_2} x + c_2 A^{r_2-1} B [u + w(t)] \\ &\vdots \\ y_m^{(r_m)} &= c_m A^{r_m} x + c_m A^{r_m-1} B [u + w(t)] \end{aligned}$$

Por la suposición A4.1, la matriz Q es cuadrada y de rango completo. Introduzca la transformación de entradas $u = Q^{-1}v$ de modo que

$$\begin{aligned} y_1^{(r_1)} &= c_1 A^{r_1} x + v_1 + c_1 A^{r_1-1} B w \\ &\vdots \\ y_m^{(r_m)} &= c_m A^{r_m} x + v_m + c_m A^{r_m-1} B w \end{aligned}$$

Cada salida y_i satisface la formulación del problema de la subsección 2.2 y por tanto del Lema 3.2, con

$$h_i := c_i A^{r_i} x + c_i A^{r_i-1} B w, \quad i = 1, \dots, m,$$

Cotas para esta última ecuación se pueden obtener como

$$|h_i| \leq \|c_i A^{r_i}\| \|M\| \|Y_r\| + \|c_i A^{r_i-1} B\| W^+$$

Si se elige

$$\Phi_i(Y_r) := k_{i,1} \|Y_r\| + k_{i,2}$$

y seleccionando, por ejemplo, $k_{i,1} > \|c_i A^{r_i}\|$, $k_{i,2} > \|c_i A^{r_i-1} B\| W^+$ y α_i suficientemente grande (para compensar M) se tiene que $\alpha_i \Phi_i > |h_i|$. Ahora, por el Lema 3.2, diseñando

$$v_i = -\alpha_i \Phi_i(Y_r) H_{r_i}(y_i, \dot{y}_i, \dots, y_i^{(r_i-1)})$$

la siguiente igualdad es obtenida después de tiempo finito

$$\{y_i, \dot{y}_i, \dots, y_i^{(r_i-1)}\} \equiv 0, \quad \forall t \geq T$$

para $i = 1, \dots, m$, esto es $\{y_1, \dots, y_m\} \equiv 0, \forall t \geq T$. Ahora, por las suposiciones A4.1, A4.2 y el Teorema 4.1, el sistema Σ es fuertemente observable y, por definición, esto implica que $x(t) \equiv 0, \forall t \geq T$. \square

Es interesante notar que, como se expone en [Hau83], las condiciones necesarias y suficientes para estimar el estado en presencia de entradas desconocidas pero sin usar diferenciadores son que (para el caso visto en esta sección) que todas las salidas tengan grado relativo 1. Si esto ocurre, el control diseñado de acuerdo al teorema anterior es del tipo $v_i = -\alpha_i \Phi_i(y) \text{sign}(y_i)$ y efectivamente no es necesario estimar ninguna derivada. En este sentido, el teorema anterior, también proporciona condiciones necesarias y suficientes para realimentación estática por salida en presencia de perturbaciones cuando el grado relativo es bien definido.

4.3. Adaptación de la ganancia del diferenciador

Para construir el controlador (4.3), se necesita de la ganancia L_i para cada diferenciador para poder estimar las derivadas deseadas. En este sentido, para cada salida y_i se necesita calcular las derivadas hasta el orden $r_i - 1$, de modo que (como se expone en la sección 2.3) debemos de calcular la cota superior L para $|y_i^{(r_i)}|$. De las ecuaciones (4.4) observamos claramente que cada $y_i^{(r_i)}$ puede ser acotada por arriba (en valor absoluto) por una expresión de la forma $k_d(\|x\| + 1)$. Sin embargo, por las suposiciones A4.1 y A4.2 es posible calcular $x = MY_r$ y entonces también podría ser acotada por una expresión del tipo $k_d(\|Y_r\| + 1)$, para una k_d distinta. El problema es que Y_r no se obtiene hasta que los propios diferenciadores han convergido, y es necesaria para hacer que estos converjan, algo así como un ciclo vicioso.

Lo que se propone hacer para salir de este ciclo vicioso es seleccionar una ganancia inicial $L_{0,i}$ (que puede ser estimada crudamente a partir de la estimación de Y_r por diferencias finitas) suficientemente grande (o por ejemplo, mediante una cota superior para el estado inicial) de modo que garantiza la convergencia del diferenciador en un tiempo arbitrario elegido. Cuando se detecta la convergencia de todos los diferenciadores (de acuerdo a la sección 2.3), el valor para L_i es cambiado a

$$L_i(t) = k_{d,i}(\|Y_r\| + 1) \quad (4.5)$$

donde Y_r es construida usando la propia estimación provista por los diferenciadores. Es decir, una especie de autorregulación o un “circulo virtuoso” ocurre. A partir de ese instante, cada diferenciador tiene la forma de (2.2) con $L = L_i(t)$. Ya fue previamente probado en [Lev06a] que la convergencia en tiempo finito persiste para el diferenciador con ganancia variable y que mantiene la misma precisión que en (2.4) y (2.5).

Sin embargo, la precisión “asintótica” resultante es $O(k_{d,i})$ y puede ocurrir que $k_{d,i} < L_{0,i}$, de modo que se ve seriamente mejorada la precisión del algoritmo como ocurre en el siguiente ejemplo.

4.4. Ejemplo

Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [u + w(t)] \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

que no posee ceros invariantes y por tanto es fuertemente observable. La entrada “desconocida” es elegida, para propósitos de simulación, como

$$w(t) = \begin{bmatrix} 0,5 + 0,2\text{sq}(0,33t) \\ 0,2 + 0,7 \sin(4t) \end{bmatrix}$$

donde $0,2\text{sq}(0,33t)$ es una señal cuadrada de amplitud 0.2 con periodo de 0.33 segundos y 50 % de ciclo de trabajo. El vector de grados relativos es $(r_1, r_2) = (3, 2)$ y resulta claro que está bien definido con $Q = I_{2 \times 2}$ y $Y_r := [y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2]^T$.

Se requieren diferenciadores de orden 2 y 1 para cada salida, respectivamente. Los parámetros seleccionados para cada uno de ellos de acuerdo a la sección 2.3 son presentados en la Tabla 4.1.

Parámetro	Primer diferenciador	Segundo Diferenciador
orden	2	1
k_d	15	10
L_0	200	100
γ_t	20	20
γ_0	10^{-1}	10^{-3}
τ	10^{-2}	10^{-2}

Cuadro 4.1: *Parámetros de los diferenciadores*

Siguiendo el procedimiento del Teorema 4.1.2, los controladores son elegidos como casi-continuos globales

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &:= -\alpha_1 \lambda_1^3 \Phi_1(Y_r) H_3(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1) \\ &= -\alpha_1 \lambda_1^3 \Phi_1(Y_r) \frac{\ddot{y}_1 + 2\lambda_1^{\frac{3}{2}} \frac{\dot{y}_1 + \lambda_1 |y_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign } y_1}{\left[|\dot{y}_1 + \lambda_1 |y_1|^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}}}{|\ddot{y}_1| + 2\lambda_1^{\frac{3}{2}} \left[|\dot{y}_1| + \lambda_1 |y_1|^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

con $\alpha_1 = 8$, $\lambda_1 = 1,2$ para regular la velocidad de convergencia [Lev08a], y $\Phi_1(Y_r) = \|Y_r\|_2 + 1$. El segundo controlador es elegido de igual forma

$$\begin{aligned}\bar{u}_2 &:= -\alpha_2 \lambda_2^2 \Phi_2(Y_r) H_2(y_2, \dot{y}_2) \\ &= -\alpha_2 \lambda_2^2 \Phi_2(Y_r) \frac{\dot{y}_2 + \lambda_2 |y_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign } y_2}{|\dot{y}_2| + \lambda_2 |y_2|^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

con $\alpha_2 = 5$, $\lambda_2 = 0,9$ y $\Phi_2(Y_r) := \|Y_r\|_2 + 1$.

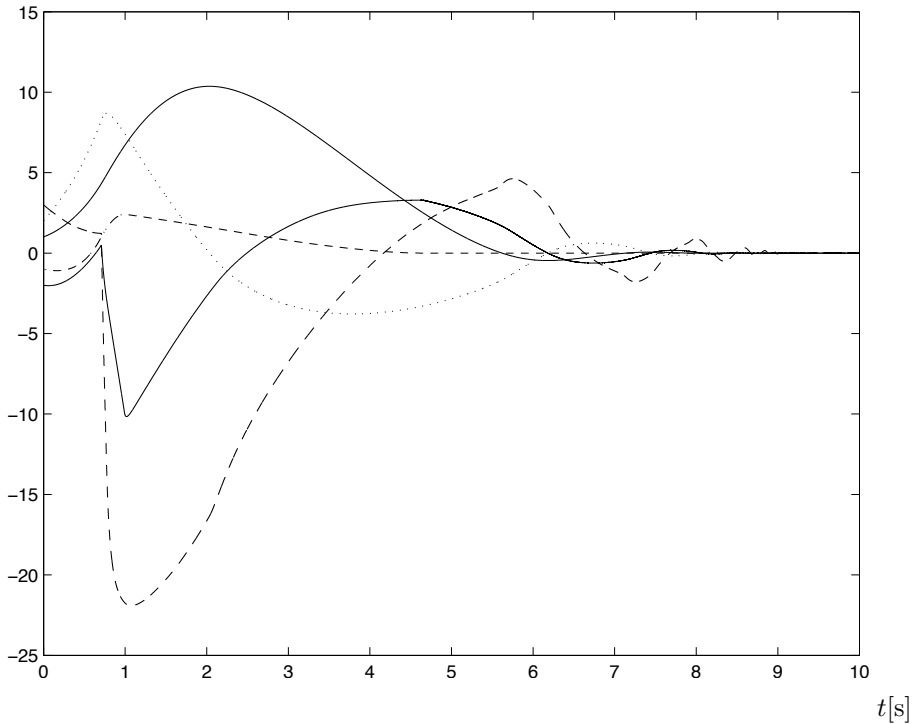


Figura 4.1: Estado $x(t)$.

El controlador completo es construido de acuerdo a (2.10). La simulación fue realizada usando el método de integración de Euler con paso 10^{-4} . Los resultados son presentados en la Figura 4.1 para el estado $x(t)$, en la Figura 4.2 para la entrada de control $u(t)$, en la Figura 4.3 para la señal de convergencia de ambos diferenciadores y en la Figura 4.4 para la ganancia de cada uno de los diferenciadores.

Resulta interesante notar que cuando el controlador se enciende se produce un sobrepaso considerable, pero que es detectado por el propio diferenciador ajustando su ganancia (drásticamente) de modo que no se pierde convergencia de éste.

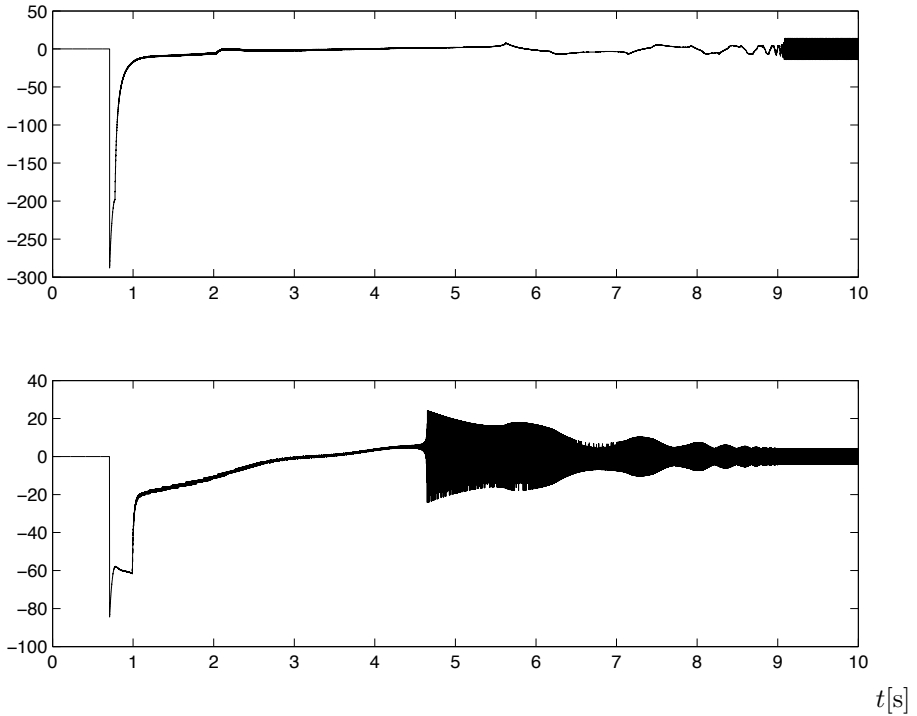


Figura 4.2: Señal de control $u(t)$. Arriba: $u_1(t)$, abajo: $u_2(t)$.

También es claro que las precisiones para la estimaciones de las derivadas cambian del $O(100)$ a $O(10)$ (asintóticamente) debido a la adaptación de la ganancia del diferenciador, lo que representa una mejora en un orden en la precisión final del sistema.

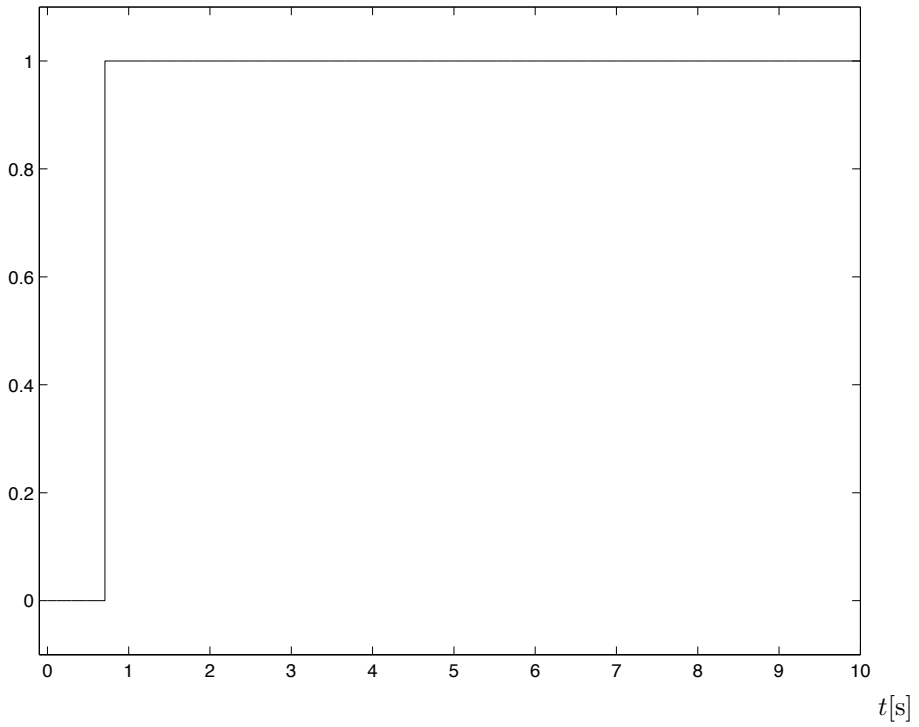


Figura 4.3: *Detección de convergencia del diferenciador. Valor 1: cierto, valor 0: falso.*

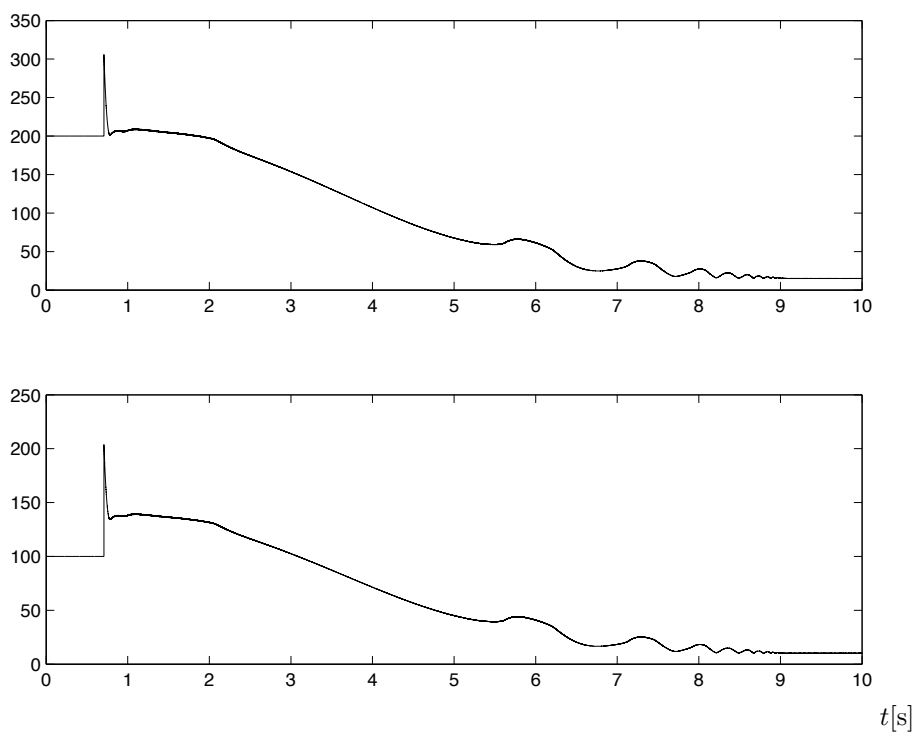


Figura 4.4: Ganancia L del diferenciador. Arriba: $L_1(t)$, abajo: $L_2(t)$.

Control por Realimentación de Salida: grado relativo parcial

Si el grado relativo no está “bien definido” diremos que es “parcial”. Consideraremos de nuevo un sistema del tipo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B[u + w(t)] \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde las señales $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, $w \in \mathbb{R}^m$ son el estado, entrada de control, salida medida, entrada desconocida (perturbación), respectivamente. De nuevo, supondremos que solamente la salida $y(t)$ está disponible. El objetivo de control es diseñar u de manera que el origen $x = 0$ sea estable en tiempo finito, esto es, existe $T < \infty$ tal que

$$x(t) \equiv 0, \forall t \geq T$$

en presencia de entradas desconocidas uniformemente acotadas $\|w(t)\| \leq W^+$, W^+ una constante conocida.

Cuando la condición sobre el grado relativo bien definido no se satisface, resulta lo más natural primero estimar el estado del sistema para después aplicar los resultados del Capítulo 3. También resulta que es posible considerar aplicar *control no interactivo* [Mor71] en el sistema de modo que un nuevo “sistema extendido” tenga grado relativo bien definido (y aplicar los resultados del capítulo anterior), sin embargo encontramos que este enfoque era un tanto más restrictivo con respecto a la primera alternativa, debido a que requería considerar que la perturbación era suficientemente suave. Por ello, se decidió emplear la primera idea.

Comenzamos describiendo una reconstrucción algebraica del estado (para sistemas con entradas desconocidas) basado en combinaciones lineales de la salida y sus derivadas.

5.1. El estado en su forma algebraica

El primer trabajo constructivo sobre observación de sistemas lineales con entradas desconocidas se reporta en [Hau83], como una aplicación clara de los resultados obtenidos sobre el desacoplamiento de entradas. En él, se proporcionan condiciones necesarias y suficientes para la observación con entradas desconocidas sin usar diferenciadores (observabilidad fuerte*): observabilidad fuerte y grado relativo 1 de al menos m salidas.

Recientemente, la posibilidad de estimar derivadas con la máxima certidumbre posible [Lev03], propicio renovados esfuerzos en la construcción de un observador que, naturalmente, eliminara la condición sobre el grado relativo (esta dirección ya se menciona en [Bas92], por ejemplo). Resulta un tanto paradójico el hecho de que una condición “necesaria y suficiente” pueda ser sobrepasada, pues podemos considerar las estimaciones por diferenciadores por modos deslizantes como observadores (sistemas dinámicos) que logran remover este obstáculo.

Los resultados más completos sobre esto son, sin duda, los obtenidos en [Fri08] y más recientemente [Bej09]. Ambos proporcionan un estimado exacto y en tiempo finito del estado $x(t)$ en presencia de entradas desconocidas bajo la condición necesaria y suficiente de observabilidad fuerte. Ambos trabajos hacen uso del bautizado “Algoritmo de Molinari” [Mol76] (aunque originalmente propuesto como un algoritmo de subespacios por M. Wohnam) para buscar nuevas direcciones libres de entrada, aunque el segundo hace un uso más eficiente de él, al utilizar diferenciadores de orden más alto. Por esto se decidió utilizar este último en este trabajo. El procedimiento se describe a continuación y es idéntico al de [Bej09], solo se expone aquí con fines de que este documento esté autocontenido¹

Considere, el sistema (5.1) con $\bar{w} := u + w$, la siguiente suposición

Suposición A5.1. *El sistema (5.1) es fuertemente observable.*

¹Se usa la siguiente notación: para una función $f(t)$ denotaremos como $f^{[k]}$ el k -ésimo anti-derivador, es decir

$$f^{[k]}(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} f(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1$$

donde $f^{[0]}(t) := f(t)$. Entonces se define

$$F^{[k]} := \begin{bmatrix} F^{[k-1]} \\ f^{[k]} \end{bmatrix}, \quad F^{[1]} = \begin{bmatrix} f(t) \\ f^{[1]} \end{bmatrix}$$

y las matrices M_{k+1} producidas por medio del siguiente algoritmo recursivo (algoritmo de Molinari [Mol76])

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= N_{k+1}^{\perp\perp} N_{k+1}, & M_1 &= C \\ N_{k+1} &= T_k \begin{bmatrix} M_k A \\ C \end{bmatrix}, & T_k &= (M_k B)^\perp \end{aligned}$$

donde la matriz $N_{k+1}^{\perp\perp}$ se incluye para excluir los términos linealmente independientes de N_{k+1} de modo que M_{k+1} siempre tiene rango completo por filas [Bej09]. El procedimiento llevado a cabo por este algoritmo puede ser fácilmente entendido si se aplica paso a paso

($k = 1$) Defina $\Phi_1 := y = Cx = M_1 x$.

($k = 2$) Derive $\dot{\Phi}_1 = M_1 A x + M_1 B \bar{w}$, multiplique por $(M_1 B)^\perp := T_1$ entonces $T_1 \dot{\Phi}_1 = T_1 \dot{y} = T_1 \frac{d}{dt} M_1 x = T_1 M_1 A x$ esta libre de entrada. De acuerdo a la recursión,

$$\Phi_2 := N_2^{\perp\perp} T_1 \begin{bmatrix} M_1 A \\ M_1 \end{bmatrix} x := M_2 x$$

es decir, agrupamos toda lo que no esté contaminado por la entrada desconocida. Note también que esta última expresión puede ser reescrita como

$$\Phi_2 := N_2^{\perp\perp} T_1 \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} M_1 x \\ y \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} N_2^{\perp\perp} T_1 \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y^{[1]} \end{bmatrix} := \frac{d}{dt} J_2 \begin{bmatrix} y \\ y^{[1]} \end{bmatrix}$$

($k = 3$) De acuerdo al algoritmo

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= M_3 x = N_3^{\perp\perp} T_2 \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} M_2 x \\ y \end{bmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} N_3^{\perp\perp} T_2 \begin{bmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \end{bmatrix} \\ &:= \frac{d^2}{dt^2} J_3 \begin{bmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y la recursión resulta ya evidente. Entonces, en la k -ésima iteración, al sacar el operador derivada se obtiene una expresión del tipo

$$\Phi_k = M_k x = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} N_k^{\perp\perp} T_{k-1} \begin{bmatrix} J_{k-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} Y^{[k-1]} = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} J_k Y^{[k]}$$

Dada que la condición $\text{rank } M_{i-1} = \text{rank } M_i$ implica $\text{rank } M_{i+1} = \text{rank } M_i$ y dada la suposición A.5.1, existe entero tal que M_i es de rango completo [Mol76], el rango de M_i debe aumentar al menos en uno en cada iteración. Entonces se necesitan a los más $n - p$ diferenciaciones para que $\det M_{n-p+1}^{-1} \neq 0$ y de esta forma obtener el estado como

$$x = \frac{d^{n-p}}{dt^{n-p}} M_{n-p+1}^{-1} J_{n-p+1} Y^{[n-p]} := \frac{d^{n-p}}{dt^{n-p}} HY^{[n-p]}$$

de esta forma, solo es necesario evaluar las derivadas correspondientes para realizar una “observación algebraica” $\hat{x}(t)$ en tiempo finito

$$\hat{x} := \frac{d^{n-p}}{dt^{n-p}} HY^{[n-p]} \quad (5.2)$$

que es construido usando algún algoritmo para la estimación de la derivadas requeridas. Si el algoritmo provee estimación exacta y en tiempo finito de la derivada, entonces el estimado (o el observador) es exacto y en tiempo finito.

5.2. Adaptación de la ganancia del diferenciador

Si utilizamos el diferenciador por modos deslizantes de orden superior (2.2) para estimar las derivadas necesarias en (5.2), (como se vio en la sección 2.3) es necesario que la derivada de orden $n - p + 1$ esté acotada. Afortunadamente, esto es cierto pues

$$\frac{d^{n-p+1}}{dt^{n-p+1}} HY^{[n-p]} = \dot{x} = Ax + B[u + w] = A \frac{d^{n-p}}{dt^{n-p}} HY^{[n-p]} + B[u + w]$$

entonces resulta claro que esta última ecuación puede ser acotada por arriba en norma por una expresión del tipo $k_d(\|x\| + 1)$, de modo que cada renglón estaría acotado por una expresión $k_{d,i}(\|x\| + 1)$. Con esto en mente, procedemos en las mismas líneas de razonamiento que cuando el grado relativo está bien definido.

Para cada diferenciador i , se elige una ganancia inicial $L_{0,i}$ suficientemente grande (suponiendo una cota máxima para condiciones iniciales o estimándola usando diferencias finitas) de modo que provee convergencia en tiempo finito al valor real de la derivada. A partir de ese momento se obtiene un estimado exacto para el valor de x , i.e. $\hat{x} \equiv x$ y la ganancia del diferenciador es cambiada a

$$L_i(t) = k_{d,i}(\|\hat{x}\| + 1), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.3)$$

donde $k_{d,i}$ debe ser diseñada suficientemente grande para compensar por la fila de A involucrada y por la entrada $u + w$.

5.3. Diseño del control

El diseño del control en este caso se basa en la observación del estado en tiempo finito por medio de la expresión obtenida en la subsección anterior y los diferenciadores exactos. Después podemos aplicar los resultados del capítulo 2, teorema 3.2.1 para diseñar el control

Teorema 5.3.1. *Considere el sistema (5.1) con $\|w(t)\| \leq W^+$, W^+ una constante conocida y la suposición A.5.1. Empleando la estimación algebraica del estado usando (5.2), bajo las condiciones*

1. uso de $n - p$ diferenciadores (2.2) (en el peor de los casos),
2. inicializados con una ganancia $L_{0,i}$ suficientemente grande, de modo que se garantiza convergencia en tiempo arbitrario.
3. una vez detectada la convergencia de todos los diferenciadores en $t = t_1$ (de acuerdo al Teorema 3.2.1), la ganancia es cambiada por (5.3)

entonces $x = 0$ es estabilizable en tiempo finito con el uso del controlador

1. $u(t) = 0, \forall t \in [0, t_1]$,
2. $u(t) = Gv, \forall t \geq t_1$, (con G previamente introducida en el Capítulo 2) y

$$v_i = -\alpha_i \Phi_i(z) H_{\mu_i}(z_{\mu_i-1+1}, \dots, z_{\mu_i-1}), \quad i = 1, \dots, m.$$

donde μ_i es el i -ésimo índice de controlabilidad, $z = T\hat{x}$, (previamente introducida en el Capítulo 2) y

$$\Phi_i(z) := k_{i,1}\|z\| + k_{i,2}$$

con constantes $\alpha_i, k_{i,1}$ y $k_{i,2}$ suficientemente grandes.

Demostración. La selección de la ganancia $L_{0,i}$ garantiza la convergencia en un tiempo arbitrario finito de cada diferenciador. Después, la ganancia puede ser cambiada por $L_i(t) = k_{d,i}(\|\hat{x}\| + 1)$ pues es una cota para la derivada de un orden mayor. Está probado en [Lev06a] que con este cambio de ganancia la convergencia ya lograda persiste. De modo que el la observación en tiempo finito es asegurada, es decir, $\hat{x} = x, \forall t \geq T$. El resto de la prueba es una consecuencia del teorema 3.2.1 del Capítulo 3. \square

Note que si H tiene una columna de ceros, es posible disminuir en uno el orden del diferenciador del renglón correspondiente. Además, al aplicar el control $u = 0$ mientras el diferenciador converge, la ganancia $L_{0,i}$ puede ser menor.

5.4. Ejemplo

Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [u + w(t)] \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

que no posee ceros invariantes y por tanto es fuertemente observable. La entrada “desconocida” es elegida, para propósitos de simulación, como

$$w(t) = \begin{bmatrix} 0,5 + 0,2\text{sq}(0,33t) \\ 0,2 + 0,7 \sin(4t) \end{bmatrix}$$

donde $0,2\text{sq}(0,33t)$ es una señal cuadrada de amplitud 0.2 con periodo de 0.33 segundos y 50% de ciclo de trabajo. El vector de grados relativos es $(2, 2)$ pero no está bien definido pues

$$\ddot{y}_1 = -x_2 + u_1 + w_1, \quad \ddot{y}_2 = -x_2 + u_1 + w_1$$

y entonces $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tiene rango 1. Aplicando el algoritmo de la subsección 5.1, se llega a

$$\hat{x} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^{[1]} \\ y_2^{[1]} \\ y_1^{[2]} \\ y_2^{[2]} \end{bmatrix}$$

o también puede ser fácilmente visto si se nota que $\dot{y}_1 = x_1, x_2 = \frac{d^2}{dt^2} \{y_2^{[1]} - y_1^{[1]} - y_1\}$. Revisando la expresión notamos que solo necesitamos un diferenciador de primer orden para calcular

$$\hat{x}_1 = \frac{d}{dt} y_1$$

y un diferenciador de segundo orden para calcular

$$\hat{x}_2 = \frac{d^2}{dt^2} \{y_2^{[1]} - y_1^{[1]} - y_1\}$$

dato que $x_3 = y_1, x_4 = y_2$. Los parámetros de cada diferenciador se presentan en la Tabla 5.1

Parámetro	Primer diferenciador	Segundo Diferenciador
order r_i	1	2
k_d	15	10
L_0	70	190
γ_t	20	20
γ_0	10^{-1}	10^{-3}
τ	10^{-2}	10^{-2}

Cuadro 5.1: *Parámetros de los diferenciadores*

Ahora utilizamos el procedimiento del Capítulo 3, Teorema 3.2.1, para calcular la transformación de estados. Calculamos la matriz de controlabilidad y seleccionamos las primeras 4 columnas linealmente independientes obteniendo (después de organizarlas)

$$S = [b_1, Ab_1, b_2, Ab_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y $\text{rank}(S) = 4$ de modo que los índices de controlabilidad son $\mu_1 = 2, \mu_2 = 2$. Calculamos $L = S^{-1}$ y elegimos los renglones correspondientes a μ_1 y $\mu_1 + \mu_2$ para obtener la transformación

$$T = \begin{bmatrix} l_{\mu_1}^T \\ l_{\mu_1}^T A \\ l_{\mu_1 + \mu_2}^T \\ l_{\mu_1 + \mu_2}^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema transformado $z = Tx$, tiene la forma

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [u + w]$$

de modo que la transformación de entradas es $G = I$, por lo que se omite. Los controladores son diseñados como cuasi-continuos globales de segundo orden pues $\mu_1 = \mu_2 = 1$, así

$$u_1 = -\alpha_1 \Phi_1(z) H_2(z_1, z_2), \quad u_2 = -\alpha_2 \Phi_2(z) H_2(z_3, z_4)$$

con $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$, $\Phi_1(z) = \Phi_2(z) = \|z\|_2 + 0,5$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Los resultados de la simulación se presentan en la Figura 5.1 para el estado, la Figura 5.2 para la señal de control, la Figura 5.3 para la ganancia de cada diferenciador y la Figura 5.4 para el error de observación $e = x - \hat{x}$ y la detección de la convergencia del observador.

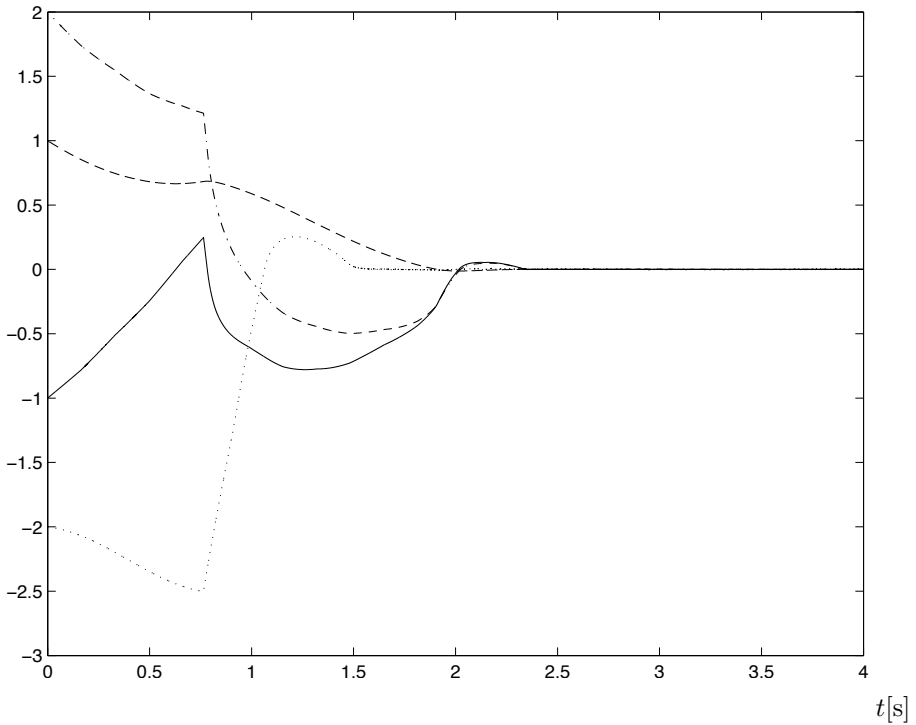


Figura 5.1: Estado $x(t)$.

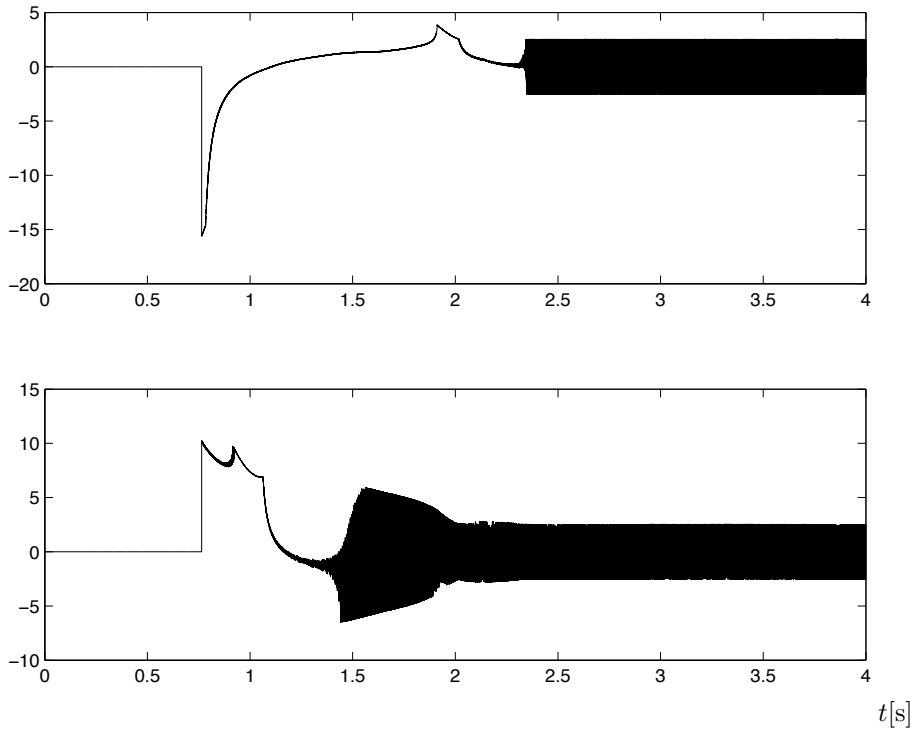


Figura 5.2: Señal de control $u(t)$. Arriba: $u_1(t)$, abajo: $u_2(t)$.

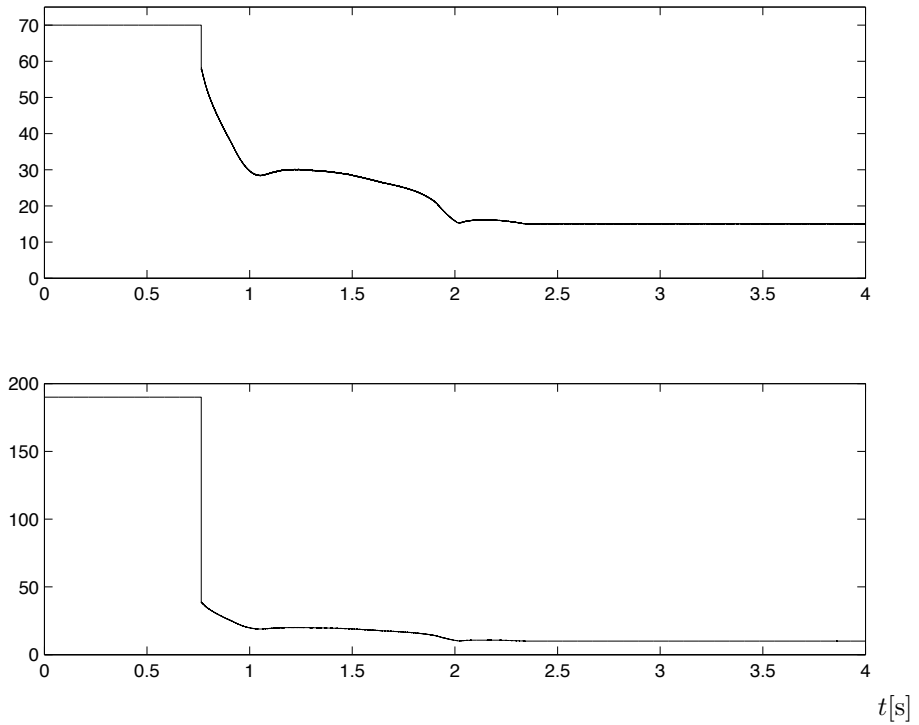


Figura 5.3: Ganancias del diferenciador. Arriba: $L_1(t)$, abajo: $L_2(t)$.

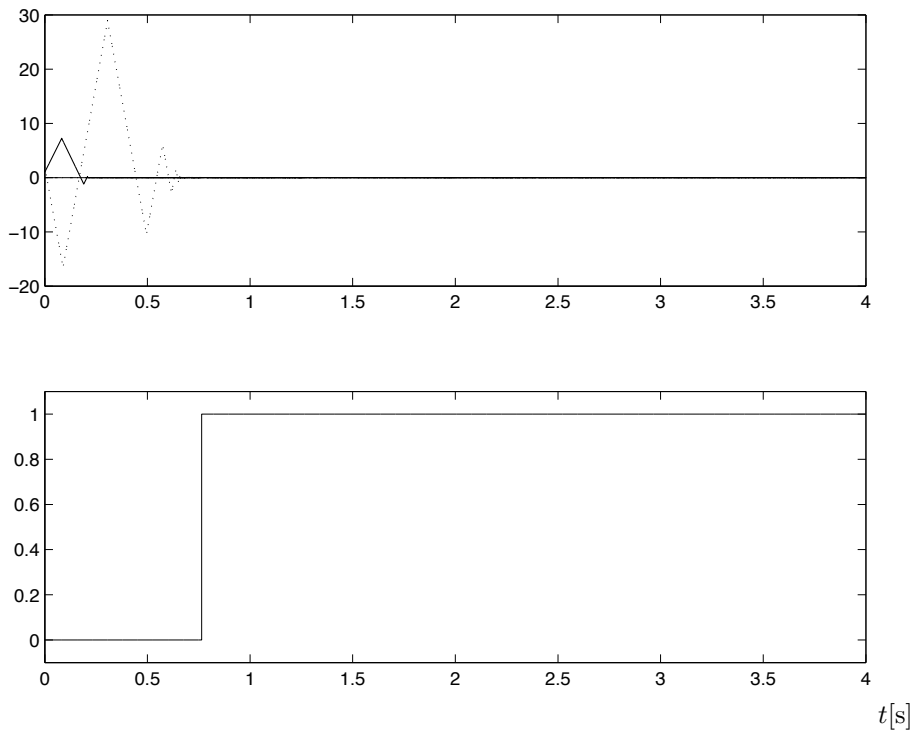


Figura 5.4: Arriba: error de observación $e = x - \hat{x}$. Abajo: detección de la convergencia del observador, valor 0: falso, valor 1: cierto.

Conclusiones

Varios resultados fueron incluidos en esta tesis. Se realizó un nuevo estudio sobre el diferenciador por HOSM [Lev03; Lev06a] para encontrar condiciones que indiquen que el diferenciador ha convergido. Se consideraron dos casos: cuando no existe ruido ni muestreo (deslizamiento ideal) y cuando existe (deslizamiento real). Finalmente se presenta una propuesta de criterio de separación que permite construir el control con las estimaciones de las derivadas realizadas por el diferenciador por HOSM.

Posteriormente introducimos el diseño de algoritmos por HOSM para sistemas con múltiples entradas considerando todo el estado disponible. El enfoque se basa en una transformación de estados (a la forma canónica de controlador) y una posterior transformación de entradas. Se presenta el diseño del control para asegurar estabilidad global y en tiempo finito del origen para sistemas lineales con entradas desconocidas (uniformemente acotadas) acopladas. Estos resultados mejoran los existentes hasta el momento (por ejemplo [Bar00]) al utilizar modos deslizantes de orden arbitrario (en lugar de orden 2, mejorando la precisión asintótica) y al garantizar estabilidad en tiempo finito (en lugar de estabilidad asintótica)

Después se abordó el mismo problema, pero ahora considerando que solamente la salida está disponible y que además el sistema tiene grado relativo bien definido. Comenzamos introduciendo el concepto de observabilidad fuerte (central para la observación de sistemas con entradas desconocidas) y presentamos algunas relaciones que encontramos entre esta y grado relativo bien definido. Después, introducimos la metodología de diseño del control para este caso que asegura la estabilidad global en tiempo finito del origen. Además, presentamos la primera propuesta hasta el momento (que conoce el autor) para seleccionar la ganancia

del diferenciador [Lev06a] en un caso de importancia práctica, de modo que la precisión se mejora disminuyendo el *chattering*. Mostramos que en el caso de que el grado relativo de cada salida sea 1, no es necesario realizar ninguna diferenciación (resultado acorde a la observabilidad fuerte* introducida por Hautus [Hau83]). Estos resultados mejoran los existentes hasta el momento [Edw08] removiendo varias restricciones (BIBS, suavidad de la perturbación, precisión y estabilidad asintótica del origen).

Finalmente, presentamos la metodología de diseño considerando solamente disponible la salida y suponiendo que el grado relativo no está bien definido, que es el caso más general posible. Comenzamos introduciendo la reconstrucción algebraica recientemente presentada en [Bej09] y presentamos una propuesta para adaptar la ganancia del diferenciador [Lev06a] de modo que el observador lo constituyen los diferenciadores únicamente, y por tanto convergen exactamente y en tiempo finito. Esto solo es recomendable con fines de estabilidad del origen, en otro caso una ganancia del diferenciador muy grande conlleva a mas *chattering*. Terminamos introduciendo la metodología de diseño del control para este caso que se basa en los resultados previamente obtenidos en el segundo capítulo. Estos resultados mejoran [Edw08] al remover todas las restricciones previamente superadas en los resultados del Capítulo 4 y adicionalmente la restricción sobre grado relativo bien definido.

6.1. Trabajo futuro

La extensión para el caso de detectabilidad en el caso de grado relativo bien definido es directa. Sin embargo, cuando esta condición sobre el grado relativo no se cumple sería necesario analizar el desempeño de los algoritmos de control por modos deslizantes de orden superior ante una perturbación pequeña y desvaneciente en la medición. Resulta intuitivo que debería obtenerse estabilidad práctica del origen en el caso de controladores casi-continuos, debido a que son continuos en todos lados menos en el origen (que tiene medida cero) y por tanto no afecta la solución en el sentido de Filippov.

Por otro lado, la generalización para sistemas no lineales parece ser una dirección clara. El caso de control en tiempo finito, si el grado relativo esta bien definido, es una aplicación directa de los resultados aquí obtenidos solo con herramientas un poco diferentes. Cuando la condición sobre grado relativo bien definido no se cumple, es necesario realizar un estudio sobre la observabilidad de sistemas no lineales con entradas desconocidas, que suena muy interesante.

Aplicación de los resultados aquí obtenidos para el control de sistemas lineales híbridos resulta directa también, debido a la propiedad de convergencia en tiempo finito.

BIBLIOGRAFÍA

- [Bar00] G. Bartolini, A. Ferrara, E. Usai, and V. Utkin. On multi-input chattering-free second order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45(9):pp. 1711–1717, 2000.
- [Bar03] G. Bartolini, A. Pisano, E. Punta, and E. Usai. A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems. *International Journal of Control*, vol. 45(i9/10):pp. 875–892, 2003.
- [Bas92] G. Basile and G. Marro. *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*. Prentice Hall, London, 1992.
- [Bej09] F. Bejarano and L. Fridman. Observer for linear systems with unbounded unknown inputs. *Submitted to CDC09*, 2009.
- [Boi07] I. Boiko, L. Fridman, A. Pisano, and E. Usai. Analysis of chattering in systems with second order sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52(11):pp. 2085–2102, 2007.
- [Edw08] C. Edwards, T. Floquet, and S. Spurgeon. Circumventing the relative degree condition in sliding mode design. *Modern Sliding Mode Control Theory New Perspectives and Applications, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 375:pp. 137–158, 2008.
- [Eme57] S. V. Emel’yanov. Method of designing complex control algorithms using an error and its first derivative. *Automation and Remote Control*, vol. 18(10):pp. 123–133, 1957.
- [Eme86] S. V. Emel’yanov, S. K. Korovin, and L. V. Levantovsky. Second order sliding modes in controlling uncertain processes. *Soviet Journal of Computer and System Science*, vol. 24(4):pp. 63–68, 1986.
- [Fil60] A. Filippov. *Differential equations with discontinuous right-hand side*. Kruwler, London, 1960.

- [Fri08] L. Fridman, A. Levant, and J. Davila. Observation and identification via high-order sliding modes. *Modern Sliding Mode Control Theory New Perspectives and Applications, Lecture Notes in Control and Information Sciences, G Bartolini, L Fridman, APisano, EUsai (eds)*, vol. 375(G):pp. 293–320, 2008.
- [Fur88] K. Furuta. *State Variable Methods in Automatic Control*. John Wiley and Sons, 1st edn., 1988.
- [Hau83] M. Hautus. Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, vol. 50:pp. 353–468, apr 1983.
- [Kol62] A.Ñ. Kolmogorov. On inequalities between upper bounds of consecutive derivatives of an arbitrary function defined on an infinite interval. *Amer Math Soc Transl*, vol. 2(9):pp. 233–242, 1962.
- [Lev93] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, vol. 58(6):pp. 1247–1263, 1993.
- [Lev98] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, vol. 34(3):pp. 379–384, 1998.
- [Lev01] A. Levant. Universal siso sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46(9):pp. 1447–1451, 2001.
- [Lev03] A. Levant. High-order sliding modes: differentiation and output feedback control. *International Journal of Control*, vol. 76(9-10):pp. 1924–041, nov 2003.
- [Lev05] A. Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, vol. 41(5):pp. 823–830, 2005.
- [Lev06a] A. Levant. Exact differentiation of signals with unbounded higher derivatives. In *Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5585 – 5590. 2006.
- [Lev06b] A. Levant. Homogeneous quasi-continuous sliding-mode control. *Lecture Notes in Control and Information Sciences - Special Issue: Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*, vol. 334:pp. 143–168, 2006.
- [Lev07] A. Levant. Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, vol. 43(4):pp. 576–586, 2007.
- [Lev08a] A. Levant and A. Michael. Adjustment of high-order sliding-mode controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Nov 2008.

- [Lev08b] A. Levant and Y. Pavlov. Generalized homogeneous quasi-continuous controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control - Special Issue: Advances in Higher Order Sliding Mode Control*, vol. 18(4-5):pp. 385 – 398, 2008.
- [Lue67] D. G. Luenberger. Canonical forms for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 12(3):pp. 290 – 293, jun 1967.
- [Mol76] B. P. Molinari. A strong controllability and observability in linear multivariable control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 91(5):pp. 761 – 764, 1976.
- [Mor71] A. Morse and M. Wonham. Status of noninteracting control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16(6):pp. 568–581, 1971.
- [Utk92] V. I. Utkin. *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer, 1992.