

01149



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPFI

Pronóstico de ingresos de escurrimientos
mensuales al proyecto hidroeléctrico la Parota

T E S I S

P R E S E N T A D A P O R :

ALEXIS LÓPEZ MONTES

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA



ASESOR: DR. CARLOS AGUSTÍN ESCALANTE SANDOVAL

MÉXICO, D. F.

MAYO 2004



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

*A mis padres
A mi querido hermano
A mi muy querida hermana*

*A la maestra Lilia
y
al Prof. Escalante*

Dedico esta Tesis

ALM

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Aleis López Montes

FECHA: 15 / 03 / 2009

FIRMA: 

INDICE**INTRODUCCIÓN**

1.	SERIE DE TIEMPO.....	3
1.1	Proceso Estocástico.....	3
1.2	Características de una Serie de Tiempo.....	4
1.3	Componentes de una serie de tiempo.....	5
2.	MODELO AUTORREGRESIVO DE PROMEDIOS MÓVILES.....	9
2.1	Modelo Autorregresivo	9
2.2	Modelo de Promedios Móviles	12
2.3	Modelo Autorregresivo y de Promedios Móviles	13
2.4	Criterio de Akaike	13
3.	MODELO AUTORREGRESIVO INTEGRADO DE PROMEDIOS MOVILES.....	14
3.1	Proceso de Diferenciación.....	14
3.2	Modelo ARIM Simple.....	17
3.3	Modelo ARIMA Estacional.....	17
3.4	Modelo ARIMA Multiplicativo.....	18
3.5	Metodología.....	20
4.	APLICACIÓN DEL MODELO ARIMA MULTIPLICATIVO.....	23
4.1	Series de tiempo Mensuales	23
4.2	Transformación.....	40
4.3	Diferenciación e Identificación.....	49
4.4	Obtención de Parámetros y Diagnóstico.....	53
4.5	Pronóstico.....	64
5.	CONCLUSIONES.....	74
6.	BIBLIOGRAFÍA.....	76

INTRODUCCIÓN

La necesidad de poder pronosticar a largo plazo eventos hidrológicos como son los escurrimientos, precipitación, nos lleva a buscar modelos que permitan realizar la predicción de eventos conocidas las condiciones en el pasado, los modelos que permiten realizar la predicción de eventos son los modelos estocásticos, como lo son los modelos AR, MA, ARMA y en especial el modelo ARIMA que permiten realizar pronósticos de manera muy exacta.

El presente trabajo presenta una aplicación del modelo estocástico ARIMA Multiplicativo esto es, se obtendrá el modelo ARIMA Multiplicativo que mejor se ajuste a cada una de las series ubicadas dentro del proyecto hidroeléctrico La Parota, con la finalidad de realizar el pronóstico de eventos, que serán utilizados en la etapa de planeación del proyecto.

En el primer capítulo se hace una descripción de las características de una serie de tiempo, se da una definición de ésta y se hace énfasis en las medidas de tendencias y de dispersión que la caracterizan. Al final del capítulo se describen las componentes que puede presentar una serie de tiempo y las medidas para atenuar o eliminar dichas componentes.

El modelo Autorregresivo de Promedios Mviles ARMA es descrito en el capítulo dos, esto es, se analizaron los modelo AR y MA por separado para después formar el modelo ARMA, también se describen de forma breve los casos especiales AR(1) y MA(1).

El proceso de diferenciación es explicado en el capítulo tres, así también, el modelo ARIMA simple y el modelo ARIMA estacional. Estos modelos junto con el proceso de diferenciación forman el modelo ARIMA Multiplicativo que es descrito al final de este capítulo, también se presentan dos caminos para la obtención matemática del modelo ARIMA Multiplicativo.

En el capítulo cuarto se aplicó el modelo ARIMA Multiplicativo, a las tres series de escurrimientos registradas en las estaciones La Parota, Agua Salada y El Puente ubicadas aguas arriba del Proyecto Hidroeléctrico La Parota. Las series antes mencionadas se ajustaron a 5 modelos ARIMA Multiplicativo, y por medio de pruebas estadísticas se eligió un solo modelo con el cual se realizaron 60 pruebas obteniendo 60 valores pronosticados correspondientes a 5 años de cada registro para cada estación, de esta forma se logró comprobar que el modelo ARIMA Multiplicativo daba un buen valor pronosticado en comparación con el valor registrado en cada estación. También se realizó el pronóstico para los mismos 5 años, pero con el modelo ARMA(1,1) y se comparó con el valor registrado y con el valor obtenido con el modelo ARIMA Multiplicativo.

En el capítulo cinco se presentan las conclusiones de este trabajo y en el capítulo sexto se presenta la bibliografía empleada.

1. SERIE DE TIEMPO

1.1 Proceso Estocástico

Una Serie de tiempo es una colección de observaciones tomadas secuencialmente a través del tiempo. (Box – Jenkins, 1970)

El objetivo por el cual se analiza una serie de tiempo, es para obtener una exacta descripción de las características del particular proceso con el cual se generó la serie y poder desarrollar un modelo que reproduzca el comportamiento de ésta en términos de variables externas, así como reproducir propiedades similares del proceso observado.

Una serie de tiempo se puede dividir en series simples (univariadas) y series múltiples (multivariadas), esto se refiere a la forma en como es observada la variable, es decir, en cuantos puntos del espacio es obtenida. La primera clasificación se refiere a que la variable es registrada en un solo punto en el espacio (ej. Altura de precipitación mensual registrada en una sola estación), y la segunda se refiere a que la variable es observada en varios puntos (ej. escurrimientos en varios puntos del río, Altura de precipitación mensual en varias estaciones).

Las series simples y múltiples también se distinguen por el intervalo de tiempo en el cual es observada la variable X_t , estos intervalos pueden ser, de forma continua (registro sin interrupciones) o como fracciones del día (1 h, 2 h, 6 h y 12 h), fracciones del año (días, semanas, meses y estaciones del año), e intervalos de un año. Los periodos antes descritos, generan un comportamiento cíclico en las series, derivado de los movimientos de rotación y traslación que experimenta la tierra, generando la estacionalidad en la serie.

Según la forma en como es registrada la variable X_t , las series se clasifican en discretas y continuas.

Las Series discretas, son aquellas en donde las observaciones no se hacen de manera inmediata a la anterior, sino, con periodos de tiempo entre cada observación (ej. Altura de precipitación cada 24 horas).

Las Series continuas, son aquellas en donde las observaciones se hacen de manera inmediata a la anterior (ej. registro de un pluviógrafo).

En un Proceso Hidrológico cuando la variabilidad y la aleatoriedad de las salidas es casi nula para una entrada dada al sistema, éste siempre presenta la misma salida, se dice que el modelo que describe el proceso es determinista.

El Proceso estocástico se define como un modelo matemático derivado de un proceso empírico con bases fundamentadas en leyes probabilística, todos los procesos hidrológicos pueden ser caracterizados por un proceso estocástico o como la combinación de un proceso determinista y uno estocástico.

El término *estocástico* se puede entender como aleatoriedad y el de *proceso* como un mecanismo generador de datos.

La Hidrología emplea los procesos estocásticos para la obtención de modelos que servirán en la generación de muestras aleatorias (sintéticas) y en la predicción de valores futuros, apoyándose en las series de tiempo observadas en el pasado.

El proceso estocástico sigue reglas, la primera hace alusión al tamaño de la serie de tiempo por analizar, la segunda se refiere a que todos los valores de la serie pueden estar asociados a una distribución de probabilidad $F(X)$, la tercera implica la dependencia entre el modelo estocástico obtenido y la serie de tiempo analizada. Una vez que se define la distribución de probabilidad (si es posible) se obtienen el o los parámetros y se hace la selección del modelo con base en pruebas estadísticas, se dice entonces que el proceso estocástico queda definido por un modelo matemático o estocástico.

Los campos donde se estudian y aplican estos modelos son la economía, sociología, física, medicina e ingeniería, entre otros.

1.2 Características de una Serie de Tiempo

El análisis de una serie de tiempo se realiza observando el comportamiento de sus estadísticos como lo son las distribuciones de probabilidad, medidas de tendencia central (media, moda o mediana), medidas de dispersión (varianza, desviación estándar) y análisis de la correlación.

Los estadísticos antes mencionados son obtenidos utilizando el concepto de esperanza de una variable aleatoria X .

Si la variable aleatoria X es discreta y P la probabilidad de que ocurra el evento, entonces la esperanza (valor esperado) de X se define como:

$$E(X) = \sum_x xP(X = x) = \sum_x xP(x) \quad 1.1$$

Por el contrario si la variable aleatoria X es continua, entonces, la esperanza se define como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad 1.2$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad y x la variable aleatoria.

El primer momento de X respecto del origen es igual a la esperanza de una variable aleatoria x , y se conoce como **Media**.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \mu \quad 1.3$$

La Varianza de la variable x se expresa como el segundo momento de X alrededor de la media μ .

$$E(X - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx = \sigma^2 \quad 1.4$$

La Covarianza es la relación lineal entre dos variables aleatorias expresándose como:

$$E[(X - \mu_x)(X - \mu_y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_x)(X - \mu_y) f(x, y) dx dy = Cov(X, Y) \quad 1.5$$

El coeficiente de correlación entre dos variables X y Y se define como :

$$\rho = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad 1.6$$

Los estadísticos antes mencionados no solo dan un diagnóstico de la serie, sino, también nos permiten clasificarla en función de sus componentes.

Antes de obtener los estadísticos es necesario analizar la representación gráfica de la serie, esto permitirá observar las características, estructura y componentes de la serie. Un primer análisis gráfico permitirá más adelante hacer una correcta selección del modelo estocástico a seguir.

1.3 Componentes de una serie de tiempo

Respecto a las componentes que presentan las series de tiempo, éstas se dividen en dos grupos; las series deterministas y las series estocásticas. Las series deterministas se dividen en periódicas y no periódicas, las periódicas a su vez se dividen en senoidales (fenómenos o magnitudes cuyas variaciones en función del tiempo o del espacio son representadas gráficamente por una sinusoidal) y de alta periodicidad, mientras que las no periódicas se dividen en series de baja periodicidad o series transitorias. Las series estocásticas se dividen en: estacionarias y no estacionarias.

Estacionariedad

Si las características de una serie no cambian en el tiempo esta es llamada estacionaria, es decir, sus propiedades son invariantes en el tiempo. Lo contrario será una serie no estacionaria. Se dice que las series anuales son estacionarias, mientras que las series periódicas no lo son.

Lo anterior queda expresado de la siguiente forma, cuando los valores de una serie presentan baja dispersión respecto a la media, la varianza permanece constante en el tiempo y la serie es independiente, se dice entonces que es una serie estacionaria.

En general las series de tiempo X_t son estacionarias si cumplen las siguientes hipótesis:

- Media de $X_t = E(X_t) = \mu$ 1.7
- Varianza de $X_t = E[(X_t - \mu)^2] = \sigma^2$ 1.8
- Autocorrelación $(X_t, X_{t+k}) = [(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] / \sigma^2 = \rho_k$ 1.9

Si definimos un conjunto de series $X(t)$ en el tiempo, todas ellas con la misma longitud de registro N y variando desde 0 hasta T en el tiempo se pueden establecer las siguientes hipótesis.

Si las medias de las series son iguales a las del universo, entonces se tendrá una probabilidad igual a 1 esto nos dice que las series $X(t)$ son estacionarias en la media o estacionarias de primer orden.

Lo mismo sucede con la covarianza, si esta es independiente de la posición t pero dependiente del retraso τ y para un cierto retraso esta permanece proporcional al producto de la varianza del universo σ_x^2 multiplicada por una constante ρ_τ que representa el coeficiente de autocorrelación del universo, entonces se dice que la serie es estacionaria en la covarianza. Para el caso particular en que $\tau = 0$ y $\rho_\tau = 1$ se dice que también es estacionaria en la varianza. Si las series son estacionarias en ambos parámetros se dice que las series son estacionarias de segundo orden.

Sin embargo, si las series son estacionarias en la covarianza no significa que también lo sea en la media, por lo general las series hidrológicas satisfacen las 2 condiciones y presentan estacionariedad de segundo orden.

Usualmente si la media y la varianza no cambian a lo largo de las series, en hidrología se puede decir que esta es una prueba que permite definir la estacionariedad de un proceso estocástico.

Periodicidad (Ciclicidad)

Una serie de tiempo puede representarse por medio de una función seno o coseno, esto es, una serie de escurrimientos o lluvias que presentan una componente periódica muy cercana a una función seno.

Al analizar una serie mensual, un patrón estacional aparecerá en intervalos de 12 meses y esto existirá con un grado de regularidad. Este efecto se define como fluctuaciones estacionales o periódicas.

Si en la representación gráfica de la serie, se presentan repetidos valores cercanos a los anteriores en intervalos de tiempo regulares, se dice, que la serie presenta una propiedad llamada periodicidad.

Tendencia

Se define como cualquier cambio sistemático en el nivel de la serie de tiempo. Si se presenta tendencia en la serie se dice que esta es no estacionaria.

Si no existe tendencia en la serie se asume que la media es constante y para cada periodo de tiempo se asume que el valor observado es representativo de la media.

En la representación gráfica de la serie y en el correlograma, se pueden observar si existen tendencias lineales o no lineales así como saltos en la serie.

Para analizar la estacionalidad se recomienda eliminar primeramente la tendencia de la serie

Análisis de una serie

Las series antes de ser empleadas en la generación de datos o en la predicción se deben analizar en las siguientes componentes:

- ✓ Los estadísticos deben permanecer constantes
- ✓ No debe existir Tendencia en los datos
- ✓ No deberá existir algún patrón estacional o periódico

Los puntos anteriores deberán cumplirse en su totalidad ya que esto llevará a emplear una serie estacionaria, si alguno de ellos no se cumple, se deberá emplear uno de los métodos que a continuación se mencionan.

❖ Estabilización de la varianza

Para lograr la estabilización de la varianza se puede emplear el método en el cual se ajustan los datos a una curva considerando la varianza constante, también se puede hacer aplicando el método de Box - Cox o calculando las raíces cuadradas de los valores de la serie.

❖ Remoción de la tendencia

La remoción de la tendencia se hace por medio del proceso de diferenciación o ajustando la serie a un polinomio, los procedimientos anteriores no siempre logran la remoción total, sin embargo, en la mayoría de los casos resulta exitosa.

❖ Eliminación de la estacionariedad

Esta se lleva a cabo mediante el método de diferenciación, en este proceso se debe cuidar la diferenciación de la serie sólo hasta lograr eliminar la estacionalidad ya que este proceso elimina términos de la serie.

Proceso de Normalización.

Este proceso es la operación mediante la cual la serie de tiempo es transformada a una serie normal. El proceso mediante el cual se logra es empleando el método de Box-cox o simplemente obteniendo el logaritmo natural

Proceso de Estandarización

Es la operación mediante la cual se convierte la media y la desviación estándar en cero y uno respectivamente. La operación empleada es la siguiente:

$$z_t = \frac{y_t - \mu_t}{\sigma_t} \quad 1.10$$

donde z_t es la serie normalizada y estandarizada, y_t es la serie normalizada, μ_t la media y σ_t la desviación estándar.

2. MODELO AUTORREGRESIVO DE PROMEDIOS MÓVILES

2.1 Modelo Autorregresivo AR

Este modelo se emplea en el análisis de series anuales y series periódicas. Las características de las series anuales son:

Media

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t \quad 2.1$$

Varianza sesgada

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2 \quad 2.2$$

Varianza insesgada

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2 \quad 2.3$$

Coefficiente de Asimetría sesgado

$$g = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^3}{(S^2)^{(3/2)}} \quad 2.4$$

Coefficiente de Asimetría insesgado

$$g = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} g_{sesgado} \quad 2.5$$

Coefficiente de curtosis sesgado

$$k_{sesgado} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^4}{(S^2)^2} \quad 2.6$$

Coefficiente de curtosis insesgado

$$k = \frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)} k_{sesgado} \quad 2.7$$

Desviación estándar

$$S = \sqrt{S^2} \quad 2.8$$

Función de Autocovarianza lineal

$$C_k = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \quad 0 \leq k \leq n \quad 2.9$$

donde k es el tiempo de retraso entre los pares (X_t, X_{t+k})

Coefficiente de autocorrelación serial

$$C_k = \frac{C_k}{C_0} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})^2} \quad 2.10$$

Por otra parte las características estadísticas de una serie periódica son las siguientes:

Media

$$\bar{X}_\tau = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_{v,\tau}, \quad \tau = 1, 2, \dots, \omega \quad 2.11$$

Varianza insesgada

$$S_\tau^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{v=1}^n (x_{v,\tau} - \bar{x}_\tau)^2 \quad 2.12$$

Coefficiente de Asimetría insesgado

$$g_\tau = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} g_\tau^{sesgado} \quad 2.13$$

Coefficiente de curtosis insesgado

$$k_{\tau} = \frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)} k_{\tau}^{\text{sesgado}} \quad 2.14$$

donde: $x_{v,\tau}$, para $v = 1, 2, \dots, n$ años y $\tau = 1, 2, \dots, \omega$ periodos en el año

Coefficiente de autocorrelación serial

$$C_{k,\tau} = \frac{\sum_{v=1}^n (x_{v,\tau} - \bar{x}_{\tau})(x_{v,\tau-k} - \bar{x}_{\tau-k})}{S_{\tau} S_{\tau-k}} \quad 2.15$$

Cuando $\tau-k < 1$ los términos $1/n$, $n = 1$, $x_{v,\tau-k}$, $x_{\tau-k}$ y $S_{\tau-k}$ se remplazan por $1/n-1$, $n = 2$, $x_{v-1,\omega+\tau-k}$, $x_{\omega+\tau-k}$ y $S_{\omega+\tau-k}$

Los estadísticos antes mencionados son medidas de tendencia central como lo es la media, también se presentan estadísticos que miden la variación o la dispersión de los datos como lo es la varianza y la desviación estandar.

Para poder ajustar una serie al modelo AR, antes se le debe dar un tratamiento a la serie ya sea para remover la tendencia, quitar la periodicidad o lograr que la serie sea estacionaria, por ello la series deberán ser normalizadas y_t y estandarizadas z_t .

Se dice que una serie de tiempo es regida por un proceso Autorregresivo, si la serie Z_t puede ser expresada como una función lineal. Este proceso hace uso de valores anteriores a Z_t como lo son Z_{t-1} , es por ello que este modelo se denomina autorregresivo.

El proceso Autorregresivo tiene las siglas AR(p) donde la literal p indica el orden del modelo, el número de parámetros $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ y orden de retraso que se le asignará a la variable Z_{t-p} , esto es, si $p = 1$, entonces se tendrá Z_{t-1} .

El modelo AR(p) para su construcción (obtención de los parámetros) cuenta sólo con la serie de tiempo Z_t , ya que los errores a_t (ruido blanco) son obtenidos al calcular los parámetros del modelo.

El modelo AR(p) en forma general se expresa como:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \quad 2.16$$

Un caso particular de este modelo es un AR(1) el cual tiene la forma:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t \quad 2.17$$

La función de autocorrelación para este modelo es

$$\rho_k = \phi_1^k, \quad k \geq 0 \quad 2.18$$

El parámetro autorregresivo se estima de la siguiente manera

$$\phi_1 = r_1 \quad 2.19$$

y debe cumplir con las siguientes restricciones

$$-1 < \phi_1 < 1 \quad y \quad -1 < \rho_1 < 1 \quad 2.20$$

2.2 Modelo de Promedios Móviles MA

Un proceso en el cual la serie de tiempo se ajusta a una función lineal, con ruido blanco a_t y parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ se denomina **Modelo de Promedios Móviles** y se designa con las siglas **MA(q)** en donde la literal q indica el orden del modelo, el número de parámetros y el retraso de la variable Z_{t-q} .

La forma general del modelo **MA(q)** es:

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad 2.21$$

En ambos modelos **AR** y **MA** se presenta el ruido blanco designado por a_t , esta serie de residuales (errores) deben cumplir con ser normales, independientes, con media igual con cero y varianza constante. Lo anterior para poder validar la correcta obtención de los parámetros del modelo.

Un caso particular es el modelo **MA(1)** el cual se expresa como:

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad 2.22$$

su o sus parámetros se obtienen con las siguientes expresiones:

$$C_1 = -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2 \quad 2.23$$

$$C_0 = (1 + \theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2 \quad 2.24$$

$$|\theta_1| < 1 \quad 2.25$$

donde C_0 y C_1 representan el coeficiente de correlación de retraso 0 y 1, y σ_ε^2 representa la varianza de los residuales. Estas expresiones se resuelven de manera simultánea para obtener el o los parámetros del modelo.

Los parámetros en los modelos AR y MA se encuentran seguidos de los signos negativo y positivo los cuales no deberán interferir en el cálculo de los parámetros y deben cumplir con estar dentro del círculo unitario, esto es, el valor absoluto del parámetro deberá ser menor que la unidad, esta condición asegura que la serie es estacionaria.

2.3 Modelo Autorregresivo de Promedios Móviles ARMA

Los modelos AR y MA se pueden combinar para dar un modelo que se denomina Autorregresivo de Promedios Móviles y sus siglas son ARMA(p, q).

Este modelo se forma de la siguiente manera:

$$\text{Sea } Z_t - \phi_1 Z_{t-1} = e_t \quad 2.26$$

$$e_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad 2.27$$

igualando 2.26.y 2.27 se tiene:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad 2.28$$

que representa al modelo ARMA (1,1)

El modelo anterior es un caso particular del modelo ARMA(p, q), en este modelo se involucra una nueva serie de residuales e_t que también se denomina ruido blanco.

El modelo general ARMA(p, q) se escribe de la siguiente manera

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad 2.29$$

donde p representa el parámetro autorregresivo y q el parámetro de promedios móviles.

Estos modelos estocásticos se emplean en la generación de muestras sintéticas y en la obtención de modelos para pronóstico.

2.4 Criterio de Akaike

Para seleccionar el modelo que mejor describe el comportamiento de la serie de tiempo analizada, se emplea la prueba conocida como criterio de información de Akaike CIA. Para un modelo ARMA o ARIMA la función queda expresada de la siguiente forma:

$$CIA(p, q) = n \ln(\sigma_\epsilon^2) + 2(p + q) \quad 2.30$$

Para emplear este criterio primero se calcula para cada modelo y después se comparan los valores entre si, el menor valor de Akaike corresponderá al mejor modelo.

3. MODELO AUTORREGRESIVO INTEGRADO DE PROMEDIOS MOVILES

3.1 Proceso de Diferenciación

Una serie después de pasar por un proceso de normalización y estandarización se puede escribir como una serie diferenciada, esto es:

$$\omega_t = Z_t - Z_{t-1} \quad 3.1$$

el símbolo ω_t se emplea para describir el proceso de diferenciación. Este proceso se emplea para remover o atenuar la no estacionariedad que presente la serie.

Otro símbolo que es empleado en la diferenciación es ∇ su significado matemático es:

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} \quad 3.2$$

Un caso particular del operador diferencial ∇ es el siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 Z_t &= \nabla(\nabla Z_t) \\ &= \nabla(Z_t - Z_{t-1}) \\ &= \nabla Z_t - \nabla Z_{t-1} \\ &= (Z_t - Z_{t-1}) - (Z_{t-1} - Z_{t-2}) \\ &= Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2} \end{aligned} \quad 3.3$$

en general el operador de diferenciación de orden d se escribe como:

$$\nabla^d Z_t \quad 3.4$$

Debido a que las series utilizadas en la Hidrología pueden ser estacionales (periódicas), se requiere de un operador de diferencias que describa el proceso. Si definimos el símbolo ∇_s como el operador para diferencias estacionales y el subíndice s como el periodo de la serie, el nuevo operador se expresa de la siguiente manera:

$$\nabla_s Z_t = Z_t - Z_{t-s} \quad 3.5$$

Un caso especial de la combinación anterior es para cuando se requiere la diferencia de segundo orden $D = 2$ y periodo mensual $s = 12$:

Considerando que d es el orden de diferencia del proceso simple y D es el orden de diferencia del proceso estacional.

$$\begin{aligned}
\nabla_{12}^2 Z_t &= \nabla_{12}(\nabla_{12} Z_t) \\
&= \nabla_{12}(Z_t - Z_{t-12}) \\
&= \nabla_{12} Z_t - \nabla_{12} Z_{t-12} \\
&= (Z_t - Z_{t-12}) - (Z_{t-12} - Z_{t-24}) \\
&= Z_t - 2Z_{t-12} + Z_{t-24}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

en general la combinación de un proceso estacional y consecutivas diferencias se expresa como:

$$\omega_t = \nabla_s^D \nabla^d Z_t \tag{3.7}$$

donde D representa el orden del operador diferencial estacional (modelo estacional), s representa el periodo y d el orden del consecutivo operador diferencial (modelo simple). En general los operadores se escriben como:

$$\begin{aligned}
\nabla_s^D &= (1 - B^s)^D \\
\nabla^d &= (1 - B)^d
\end{aligned} \tag{3.8}$$

La necesidad de expresar los modelos por medio de operadores como ∇ , nos lleva a introducir un nuevo parámetro B llamado de retraso que se define como:

$$\begin{aligned}
BZ_t &= Z_{t-1} \\
B^2 Z_t &= B(BZ_t) = BZ_{t-1} = Z_{t-2} \\
\therefore B^k Z_t &= Z_{t-k}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

El operador diferencial ∇ presenta la siguiente relación con el operador de retraso B:

$$\begin{aligned}
\nabla Z_t &= Z_t - Z_{t-1} = Z_t - BZ_t = (1 - B)Z_t \\
\therefore \nabla &= 1 - B
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Al emplear los operadores para lograr la estacionaridad de la serie se pueden tener varias combinaciones, pero solo una es la correcta para la serie que se este analizado, esto de penderá de cómo se comportan las componentes de la serie en estudio.

A continuación se presentan los modelos matemáticos ω_t que más comúnmente se emplean para diferenciar las series, todas ellos con base en el orden de diferencia d (simple) y D (estacional) que la serie requiera para lograr la estacionariedad.

Caso 1. $d = 0$, $D = 0$ y $s = 12$

$$\omega_t = \nabla_s^D \nabla^d Z_t = \nabla_{12}^0 \nabla^0 = \nabla_{12}^0 (\nabla^0 Z_t) = \nabla_{12}^0 (1 - B)^0 Z_t = Z_t$$

$$\therefore \omega_t = Z_t \quad 3.11$$

Caso 2. $d = 0$, $D = 1$ y $s = 12$

$$\begin{aligned} \omega_t &= \nabla_s^D \nabla^d Z_t = \nabla_{12}^1 \nabla^0 = \nabla_{12}^1 (\nabla^0 Z_t) = \nabla_{12}^1 (1 - B)^0 Z_t = \nabla_{12}^1 Z_t = (1 - B^{12}) Z_t = \\ &= Z_t - B^{12} Z_t = Z_t - Z_{t-12} \end{aligned}$$

$$\therefore \omega_t = Z_t - Z_{t-12} \quad 3.12$$

Caso 3. $d = 1$, $D = 0$ y $s = 12$

$$\begin{aligned} \omega_t &= \nabla_s^D \nabla^d Z_t = \nabla_{12}^0 \nabla^1 = \nabla_{12}^0 (\nabla^1 Z_t) = \nabla_{12}^0 (1 - B)^1 Z_t = \nabla_{12}^0 (Z_t - B Z_t) = \\ &= \nabla_{12}^0 (Z_t - Z_{t-1}) = Z_t - Z_{t-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \omega_t = Z_t - Z_{t-1} \quad 3.13$$

Caso 4. $d = 1$, $D = 1$ y $s = 12$

$$\begin{aligned} \omega_t &= \nabla_s^D \nabla^d Z_t = \nabla_{12}^1 \nabla^1 = \nabla_{12}^1 (\nabla^1 Z_t) = \nabla_{12}^1 (1 - B)^1 Z_t = \nabla_{12}^1 (Z_t - B Z_t) = \\ &= \nabla_{12}^1 (Z_t - Z_{t-1}) = \nabla_{12}^1 Z_t - \nabla_{12}^1 Z_{t-1} = (1 - B^{12})^1 Z_t - (1 - B^{12})^1 Z_{t-1} = \\ &= (Z_t - B^{12} Z_t)^1 - (Z_{t-1} - B^{12} Z_{t-1})^1 = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13} \end{aligned}$$

$$\therefore \omega_t = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13} \quad 3.14$$

El proceso ω_t se utiliza como filtro para obtener una serie totalmente estacionaria y que podrá ajustarse a un modelo ARMA y convertirse posteriormente en un modelo ARIMA.

3.2 Modelo ARIMA Simple

Una serie diferenciada al ser ajustada a una modelo ARMA(p,q) da como resultado un modelo Autorregresivo Integrado de Promedios Móviles Simple ARIMA (p,d,q).

Empleando los operadores antes descritos podemos representar el modelo ARIMA(p,d,q) de forma general:

$$\phi(B)\omega_t = \theta(B)a_t \quad 3.15$$

donde $\phi(B)$ y $\theta(B)$ representan polinomios, estos se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi(B) &= 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \\ \theta(B) &= 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \end{aligned} \quad 3.16$$

la literal p representa el orden del proceso Autorregresivo, la d el nivel del proceso de diferenciación y q representa el orden del proceso de Promedios Móviles

3.3 Modelo ARIMA (estacional)

Un modelo ARMA ajustado a una serie con diferencias periódicas, originan un modelo ARIMA estacional (P,D,Q)_s. La combinación del modelo estacional Autorregresivo con el modelo estacional de Promedios Móviles se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Phi(B^s)\omega_t = \Theta(B^s)a_t \quad 3.17$$

donde $\Phi(B)$ y $\Theta(B)$ representan polinomios, esto se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Phi(B^s) &= 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps} \\ \Theta(B^s) &= 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs} \end{aligned} \quad 3.18$$

la literal P representa el orden del proceso Autorregresivo Estacional, la D representa el nivel del proceso de diferenciación Estacional y Q representa el orden del proceso de Promedios Móviles Estacional

3.4 Modelo ARIMA Multiplicativo

Si mezclamos el proceso ARIMA (p,d,q) simple con el proceso ARIMA(P,D,Q) estacional, obtenemos el modelo denominado ARIMA(p,d,q) x (P,D,Q)_s Multiplicativo.

Este se define como:

$$\phi(B)\Phi(B^s)\omega_t = \theta(B)\Theta(B^s)a_t \quad 3.19$$

desarrollando los polinomios se tiene:

$$(1-\phi_1B-\dots-\phi_pB^p)(1-\Phi_1B^s-\dots-\Phi_pB^{ps})\omega_t = (1-\theta_1B-\dots-\theta_qB^q)(1-\Theta_1B^s-\dots-\Theta_QB^{Qs})a_t \quad 3.20$$

donde $\Phi(B)$, $\phi(B)$ representan los polinomios del proceso Autorregresivos y $\theta(B)$, $\Theta(B)$ representan los polinomios del Proceso de Promedios Móviles

El modelo ARIMA Multiplicativo se obtiene con ayuda de los operadores antes mencionados y aplicando las operaciones básicas para los polinomios de cada modelo AR y MA.

A continuación se presentan dos procedimientos para la obtención de modelos ARIMA (p,d,q)x(P,D,Q)_s

Primer procedimiento.

Este modelo se obtuvo empleando los operadores ∇ , B y efectuando operaciones básicas con los polinomios autorregresivos y de promedios móviles.

$$ARIMA(0,1,1)x(0,1,1)_{12}$$

$$(1-B^{12})^1(1-B)^1Z_t = (1-\Theta B^{12})(1-\theta_1B)a_t$$

$$(1-B^{12})^1(Z_t - Z_{t-1}) = (1-\theta_1B - \Theta_1B^{12} + \Theta_1\theta_1BB^{12})a_t$$

$$(1-B^{12})Z_t - (1-B^{12})^1Z_{t-1} = (a_t - \theta_1Ba_t - \Theta_1B^{12}a_t + \Theta_1\theta_1BB^{12}a_t)$$

$$(Z_t - Z_{t-1}) - (Z_{t-12} - Z_{t-13}) = (a_t - \theta_1a_{t-1} - \Theta_1a_{t-12} + \Theta_1\theta_1Ba_{t-12})$$

$$Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13} = a_t - \theta_1a_{t-1} - \Theta_1a_{t-12} + \Theta_1\theta_1a_{t-13}$$

$$\therefore Z_t = Z_{t-1} + Z_{t-12} - Z_{t-13} + a_t - \theta_1a_{t-1} - \Theta_1a_{t-12} + \Theta_1\theta_1a_{t-13} \quad 3.21$$

Segundo procedimiento.

El siguiente procedimiento se basa en el análisis por etapas realizado por Box y Jenkins, en el cual primero la serie es diferenciada y ajustada al modelo estacional SMA(1) para después ajustar los residuales obtenidos por éste al modelo MA(1), lo anterior se hace con ayuda de los operadores B, ∇ y utilizando operaciones básicas. El modelo así obtenido es el mismo que desarrollado con el primer procedimiento.

$$ARIMA(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$$

Se ajusta la serie Z_t al modelo SAM(1) obteniendo la siguiente expresión:

$$Z_t = e_t - \Theta_1 e_{t-12}.$$

A éste modelo se le aplica el operador diferencial ∇^1_{12} quedando:

$$\nabla^1_{12} Z_t = e_t - \Theta_1 e_{t-12}.$$

al despejar el residual e_t se obtiene la ec.3.22 :

$$e_t = \nabla^1_{12} Z_t + \Theta_1 e_{t-12} \quad 3.22$$

agrupando los residuales e_t del modelo SMA(1) a un modelo MA(1), esto es, $Z_t = e_t$ y aplicando el operador diferencial ∇^1 para $d = 1$ se obtiene la ec. 3.23 :

$$\nabla^1 e_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}. \quad 3.23$$

Para poder igualar 3.22 con 3.23 se requiere calcular $\nabla^1 e_t$ que es :

$$\nabla^1 e_t = \nabla^1 \nabla^1_{12} Z_t + \Theta_1 \nabla^1 e_{t-12}$$

Al igualar esta última ec. con 2 se obtiene la ec.3.24:

$$a_t - \theta_1 a_{t-1} = \nabla^1 \nabla^1_{12} Z_t + \Theta_1 \nabla^1 e_{t-12}. \quad 3.24$$

Como se requiere que la ec. 3.24 este en términos de los residuales a_t , se obtendrá $\nabla^1 e_{t-12}$ al aplicar el operador B^{12} a la ec. 3.23, quedando:

$$\nabla^1 B^{12} e_t = B^{12} a_t - \theta_1 B^{12} a_{t-1}, \nabla^1 e_t = a_{t-12} - \theta_1 a_{t-13}. \quad 3.25$$

esta última será la ec. 3.25, si se sustituye 3.24 en 3.23 se tiene:

$$a_t - \theta_1 a_{t-1} = \nabla^1 \nabla^1_{12} Z_t + \Theta_1 (a_{t-12} - \theta_1 a_{t-13}),$$

por último, se realizarán operaciones básicas hasta llegar al modelo ARIMA (0,1,1) \times (0,1,1) $_{12}$ con la expresión obtenida de sustituir la ec. 3.24 en 3.23.

$$\begin{aligned}
 a_t - \theta_1 a_{t-1} &= \nabla_1 \nabla_{12}^1 Z_t + \Theta_1 a_{t-12} - \Theta_1 \theta_1 a_{t-13} \\
 a_t - \theta_1 a_{t-1} &= Z_t - Z_{t-12} - Z_{t-1} + Z_{t-13} + \Theta_1 a_{t-12} - \Theta_1 \theta_1 a_{t-13} \\
 \therefore Z_t &= Z_{t-1} + Z_{t-12} - Z_{t-13} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \Theta_1 a_{t-12} + \Theta_1 \theta_1 a_{t-13}
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

3.5 Metodología

Se debe entender por el término *Pronóstico* la predicción de valores basados en series de tiempo registradas en el pasado.

Para obtener un pronóstico por medio del modelo ARIMA Multiplicativo se debe seguir una metodología que permita ajustar a éste el fenómeno que se desea predecir.

Box y Jenkins (Box, Jenkins et al, 1970) proponen los siguientes pasos para obtener un pronóstico por medio del modelo ARIMA Multiplicativo:

- ❖ **Identificación**
- ❖ **Estimación**
- ❖ **Diagnóstico**
- ❖ **Pronóstico**

Identificación

En este primer paso se analiza la representación gráfica de la serie, así como, su correlograma en ellos se busca la existencia de alguna componente como lo es la periodicidad, la tendencia o saltos, es decir, se trata de verificar si la serie es estacionaria. También se decide el orden de diferenciación d y si existe estacionalidad se decide cual diferencia D es necesaria, en algunas ocasiones las gráficas no son de gran ayuda por lo que se requiere contar con cierta experiencia para la selección del orden de las diferencias y del orden de los polinomios autorregresivos y de promedios móviles ya sea simples p , q o estacionales P , Q . Cabe recordar que para poder ajustar una serie a un modelo ARIMA la serie deberá ser estacionaria

Estimación

Después de elegir el modelo se realiza la estimación de los parámetros por medio de un método matemático, para estos casos el método de máxima verosimilitud resulta ser de gran ayuda. En general, éste método hace una estimación de los parámetros $(\phi, \theta, \Theta, \Phi)$ al maximizarse la función de verosimilitud, ésta función se puede expresar de la siguiente forma:

$$L(.) = \frac{1}{(2\pi\sigma_\varepsilon)^N} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2\right\}
 \tag{3.27}$$

donde σ_ε es la desviación estandar de los residuales, ε_t es el residual y N el numero de elementos de la serie.

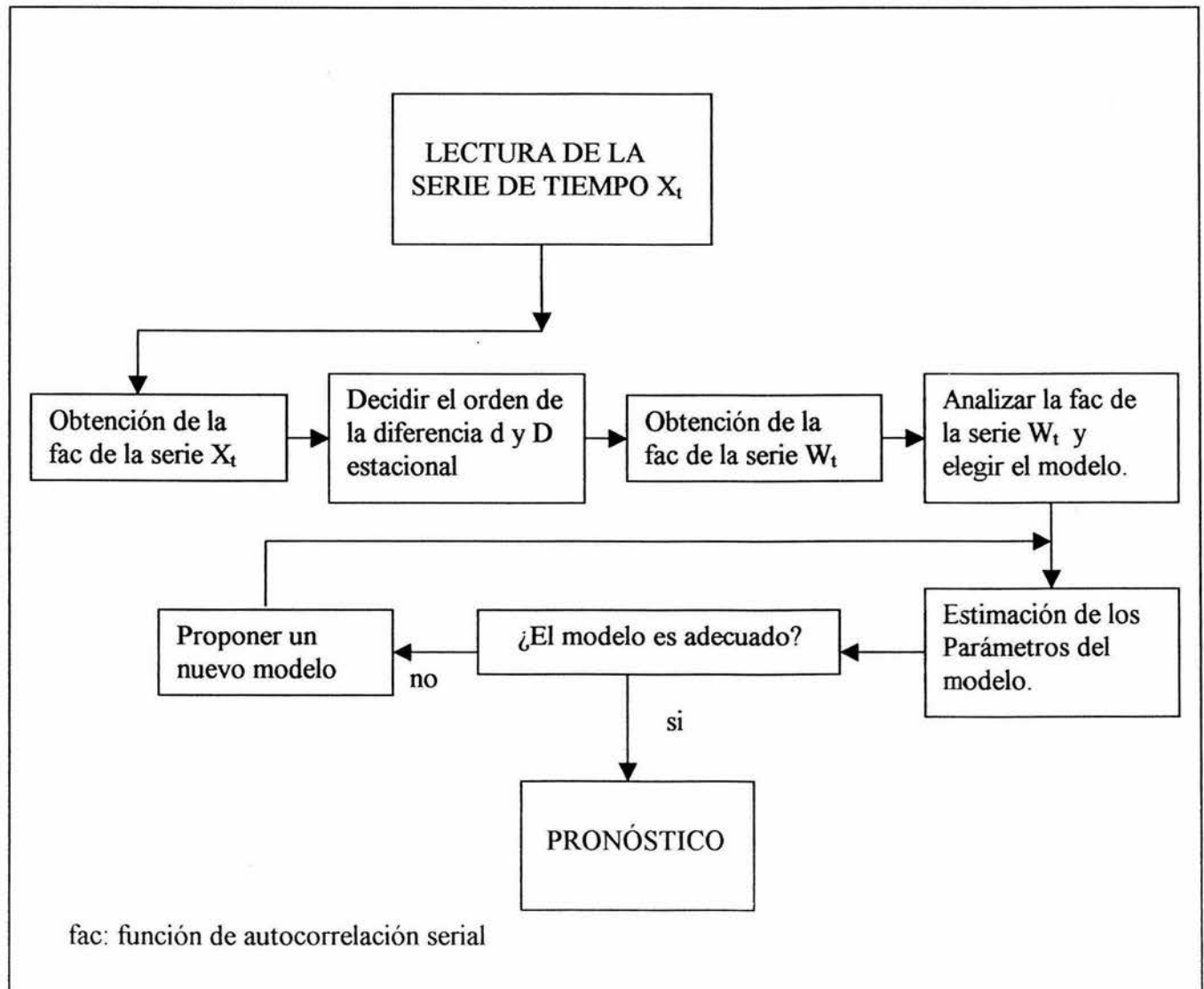
Diagnóstico

Para decidir si el modelo es adecuado se revisan los residuales (ruido blanco) de éste y se verifica que sean normales e independientes, si no lo son el modelo se desecha, también se realiza la prueba de Akaike si es que existen varios modelos en competencia.

Pronóstico

Finalmente el modelo seleccionado se emplea en la predicción o pronóstico, del modelo se despeja la variable Z_t y se pone en función de los valores pasados y de los residuales que el modelo arrojó al obtener los parámetros.

Para agrupar lo anterior Box y Jenkins proponen el siguiente diagrama funcional:



Por otro lado, para pronosticar mediante el modelo ARIMA Multiplicativo **Salas** (Salas 1980) propone el siguiente procedimiento:

- ✓ **Transformación**
- ✓ **Diferenciación e Identificación**
- ✓ **Obtención de Parámetros y Diagnóstico**
- ✓ **Pronóstico**

ésta metodología presenta gran similitud que la propuesta por Box y Jenkins, por lo que es indistinto la utilización de una o de otra ya que ambas nos llevan a obtener el pronostico de una serie de tiempo, sin embargo en este trabajo se empleará la propuesta por Salas ya que presenta un camino mas detallado.

Transformación

En este paso se le da un tratamiento a la serie de tiempo esto es se revisa si es estacionaria o no, para lograr la estacionariedad la serie pasa por un proceso de normalización y de estandarización.

Diferenciación e Identificación

se le aplica a la serie estandarizada un proceso de diferenciación hasta lograr eliminar la periodicidad o ciclicidad, para después hacer un análisis de los modelos ARIMA Multiplicativo que mejor se ajuste a la serie de tiempo diferenciada.

Obtención de parámetros y Diagnóstico

Ya habiendo seleccionado el modelo que mejor se ajuste a la serie de tiempo se obtienen los parámetros del modelo mediante el método de máxima verosimilitud y se revisan los residuales que le modelo arroja, esto para verificar la aleatoriedad del modelo.

Pronóstico

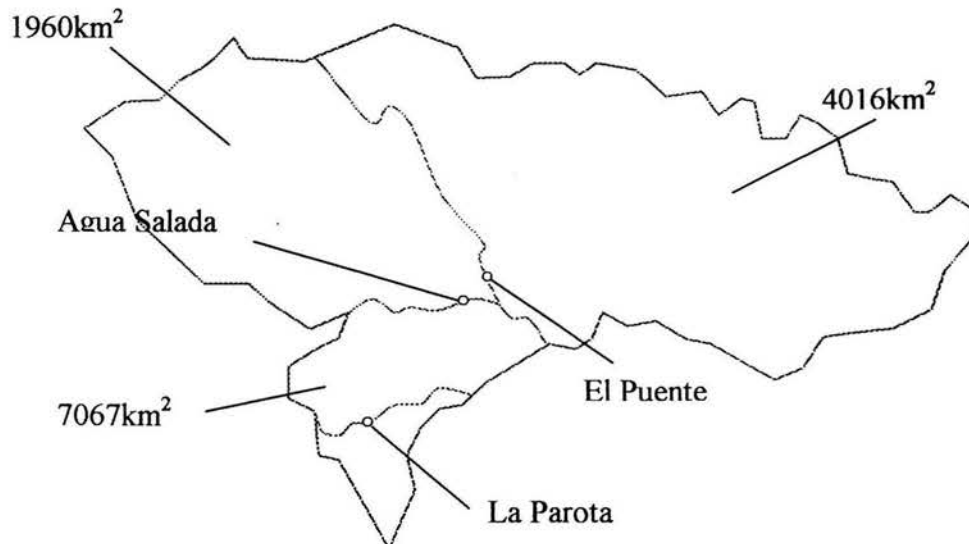
Con el modelo seleccionado se obtiene el pronóstico para el año deseado siguiendo el camino ya antes mencionado en la metodología propuesta por Box y Jenkins.

4. APLICACIÓN DEL MODELO ARIMA MULTIPLICATIVO (p,d,q) x (P,D,Q)_s

4.1 Series de tiempo Mensuales

La Cuenca donde quedará localizada la Presa Hidroeléctrica La Parota se encuentra ubicada en la región Hidrológica N° 20 denominada Costa Chica-Río Verde.

Para propósitos de este estudio, se tomaron para caracterizar a la cuenca tres puntos de referencia, el primero de ellos lo define el área drenada (1,960 km²) hasta la estación hidrométrica Agua Salada (99°38'00"-17°11'00"); el segundo hasta la estación hidrométrica El Puente (99°25'00"-17°08'45"), con área drenada de 4,016 km², y finalmente, la estación hidrométrica La Parota (99°37'30"-16°55'45"), con área hasta el sitio de 7067 km².



En el área de influencia donde se encontrará el proyecto hidroeléctrico La Parota se disponen de 3 estaciones hidrométricas con información de escurrimientos acumulados en forma mensual y anual (Agua Salada, El Puente y La Parota). En las tablas 66 a 68 se presenta dicha información.

Para cada una de las 3 estaciones hidrométricas disponibles en el área de influencia del proyecto hidroeléctrico La Parota se procedió a determinar si existen cambios significativos en el padrón de escurrimientos mensuales, para lo cual se aplicaron las pruebas estadísticas de homogeneidad (Helmert, t de Student y Cramer) e independencia (Anderson).

Prueba de Helmert

Esta prueba consiste en analizar el signo de las desviaciones de cada evento de la serie con respecto a su valor medio, si una desviación de un cierto signo es seguida por otra del mismo signo, una secuencia es creada. En contraste si una desviación es seguida por otra de signo contrario un cambio será registrado. Cada año, excepto el primero definirán una secuencia o un cambio

Si la serie es homogénea, la diferencia entre el número de secuencias y el número de cambios en el registro deberá ser cero.

Prueba estadística de la t de Student

Cuando la causa de la pérdida de homogeneidad de la serie es un cambio abrupto en la media, la prueba paramétrica de la t de Student es especialmente útil. La prueba es poderosa para detectar la inconsistencia en la media además de ser una prueba robusta excepto cuando la longitud de los dos periodos seleccionados para comparación de sus medias son desiguales. Se recomienda al aplicar la prueba t de Student, que los valores de n_1 y n_2 de cada media que se compara sean similares.

La ecuación que define a la prueba t de Student es:

$$t_d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\left[\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} (1/n_1 + 1/n_2) \right]^{1/2}} \quad 4.1$$

siendo S_1^2 y S_2^2 las varianzas de X_i en los dos periodos de registro respectivamente, entonces $n_1 S_1^2$ puede ser calculada con la ecuación siguiente:

$$n_1 S_1^2 = \sum_1^{n_1} x_i^2 - 1/n_1 (\sum_1^{n_1} x_i)^2 \quad 4.2$$

El valor de t_d se compara con el valor de t de la distribución de t de Student de dos colas y con $v = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad y con un 5 % de nivel de significancia.

Prueba estadística de Cramer

Algunas veces puede ser más conveniente comparar la media de toda la serie y la media de cierta parte del registro, para investigar la homogeneidad, por tal propósito esta prueba es de gran utilidad, además de ser complementaria de la prueba t de Student.

En la prueba de Cramer X y S son respectivamente la media y la desviación típica del registro de n valores, por otro lado X_k es la media del subperíodo de n' valores es decir:

$$\bar{X}_k = \frac{\sum_{i=k+1}^{i=k+n} x_i}{n'} \quad 4.3$$

$$\tau_k = \frac{\bar{x}_k - \bar{x}}{S} \quad 4.4$$

$$t_k = \left\{ \frac{n'(n-2)}{n - n' [1 + (\tau_k)^2]} \right\}^{1/2} \quad 4.5$$

La estadística t_k tiene distribución t de Student de dos colas con $v = n-2$ grados de libertad y es utilizada en la misma forma que la estadística t_d

En cuanto al análisis de la representación gráfica de las series, en las figuras 1 a 6 se presentan las tendencias de las series de escurrimiento mensual de la estación Agua Salada, La Parota y El puente. Gráficamente se observa que para algunos meses el escurrimiento tiende a disminuir con el tiempo (marzo, abril, etc.) y en otros al aumentar (junio, julio, etc.). Ahora, se debe demostrar que dichas tendencias son significativas desde el punto de vista estadístico. En las tablas 4 a 6 se presentan en primera instancia los estadísticos muestrales de las series mensuales de escurrimiento. Se observa que el patrón de escurrimiento es altamente variable (coeficientes de variación entre 0.2 y 0.9) y que la mayor concentración se da en el periodo julio-noviembre, un mes desfasado al patrón de lluvias. Al realizar la pruebas de homogeneidad e independencia (figuras 1 a 6) a las series mensuales de cada estación se concluye que con excepción de los escurrimientos de junio y julio las tendencias no son significativas y que el conjunto de datos esta formado por variables aleatorias, por lo que se pueden hacer inferencias estadísticas a partir de ellos.

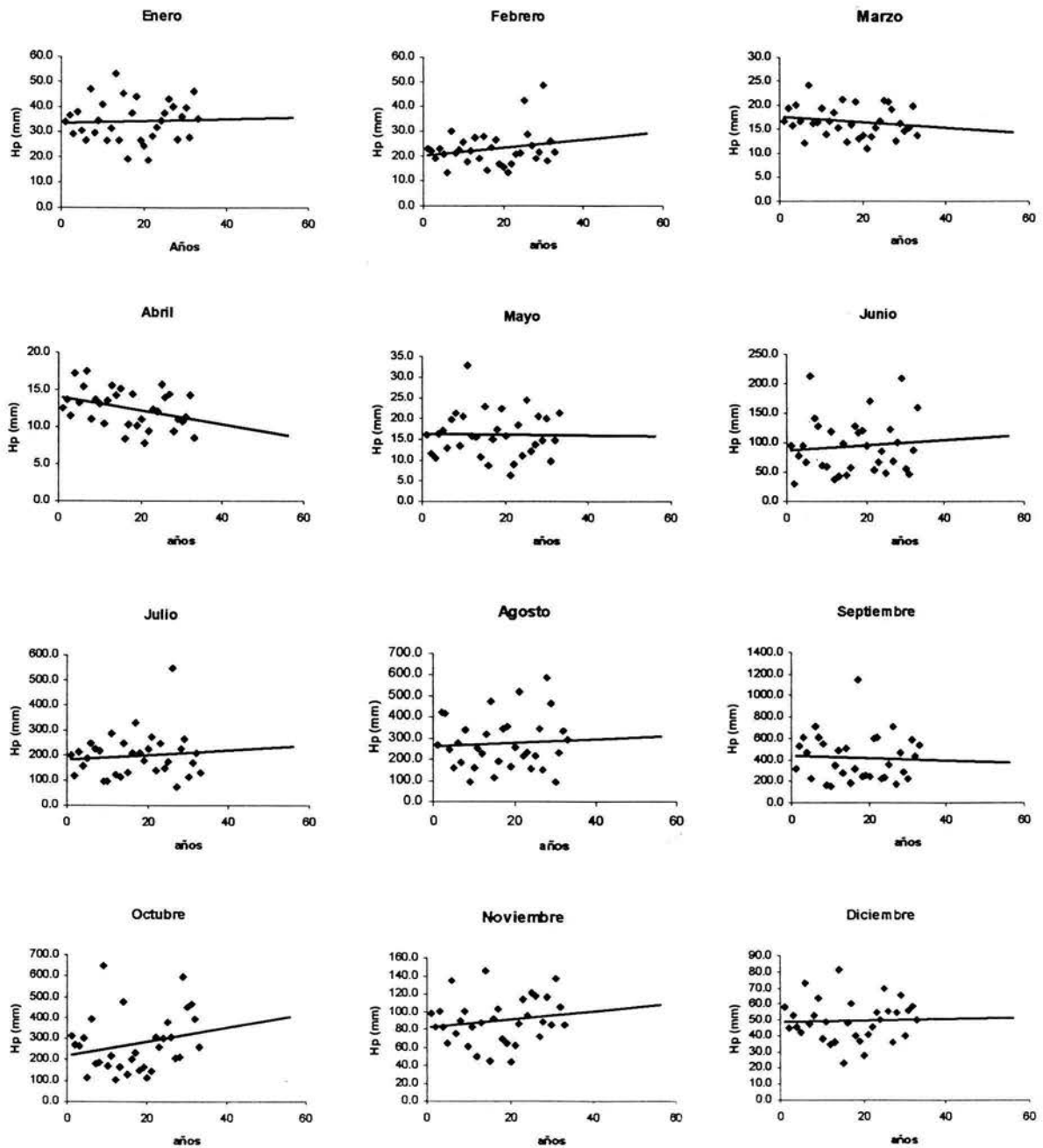


Figura 1. Tendencia del volumen de escurrimiento mensual (Mm^3) periodo 1968-2000 estación Agua Salada.

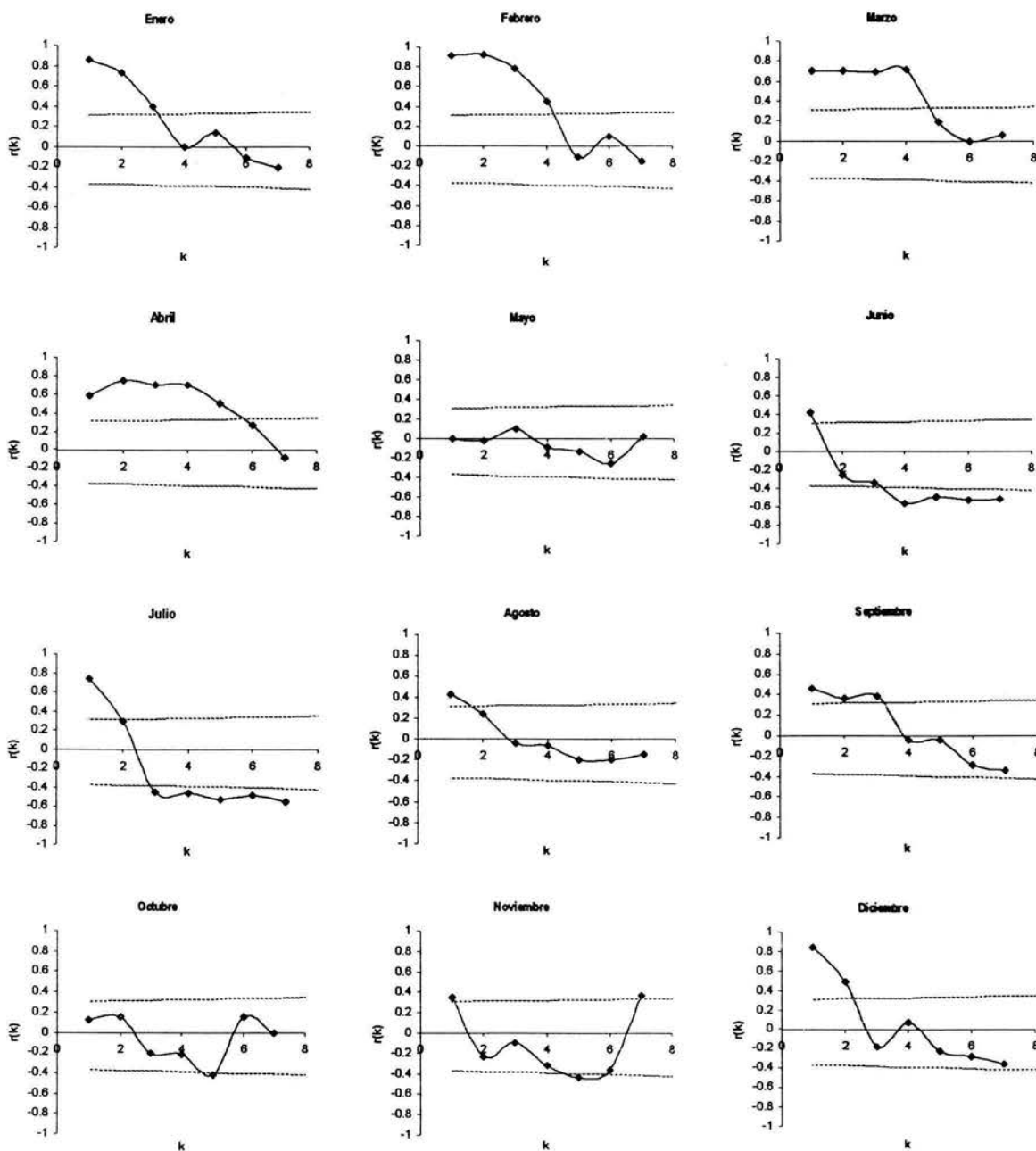


Figura 2. Correlogramas de las series de escurrimiento mensual (Mm^3) de la estación Agua Salada.

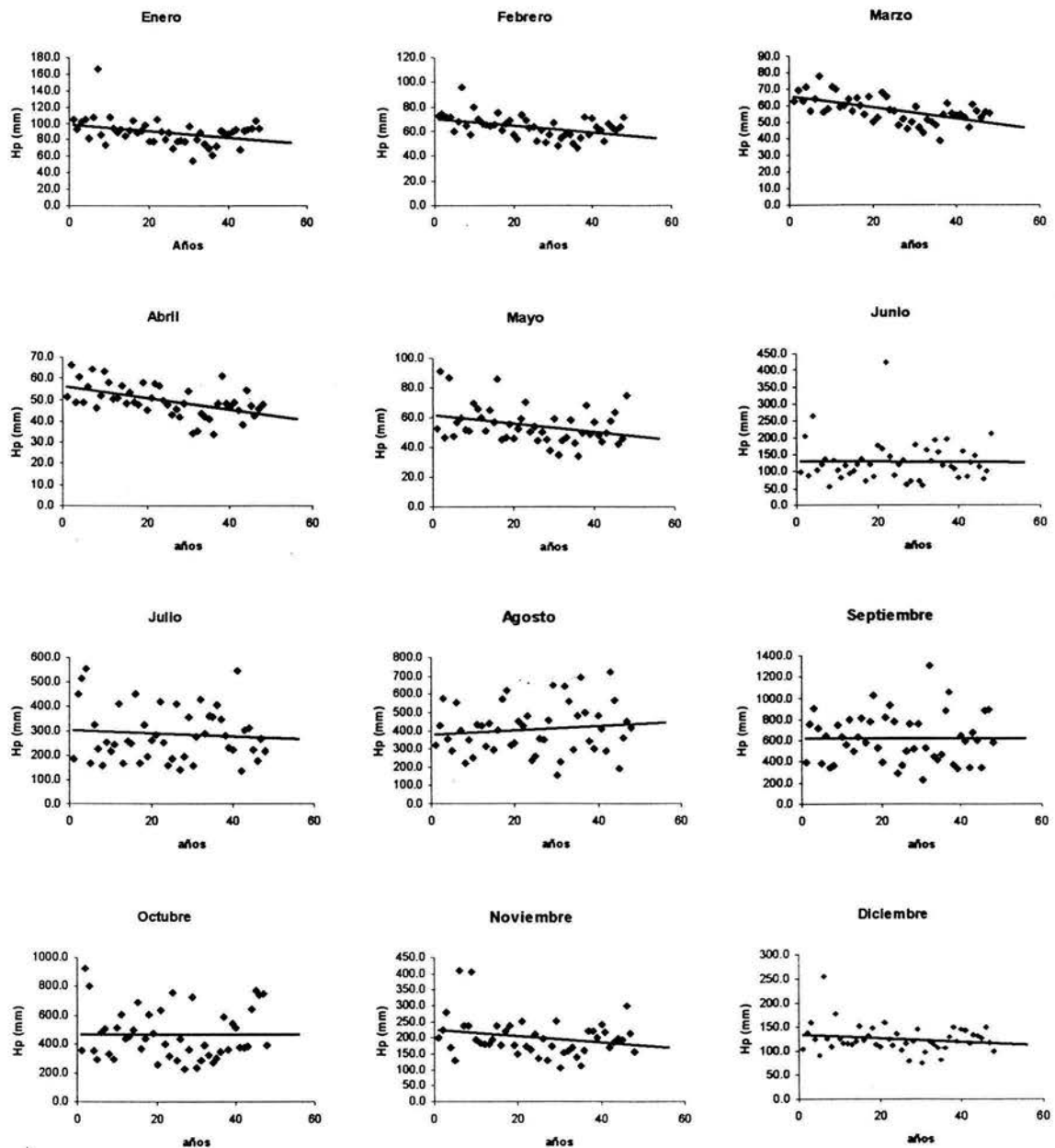


Figura 3. Tendencia del volumen de escurrimiento mensual (Mm^3) periodo 1953-2000 estación El Puente.

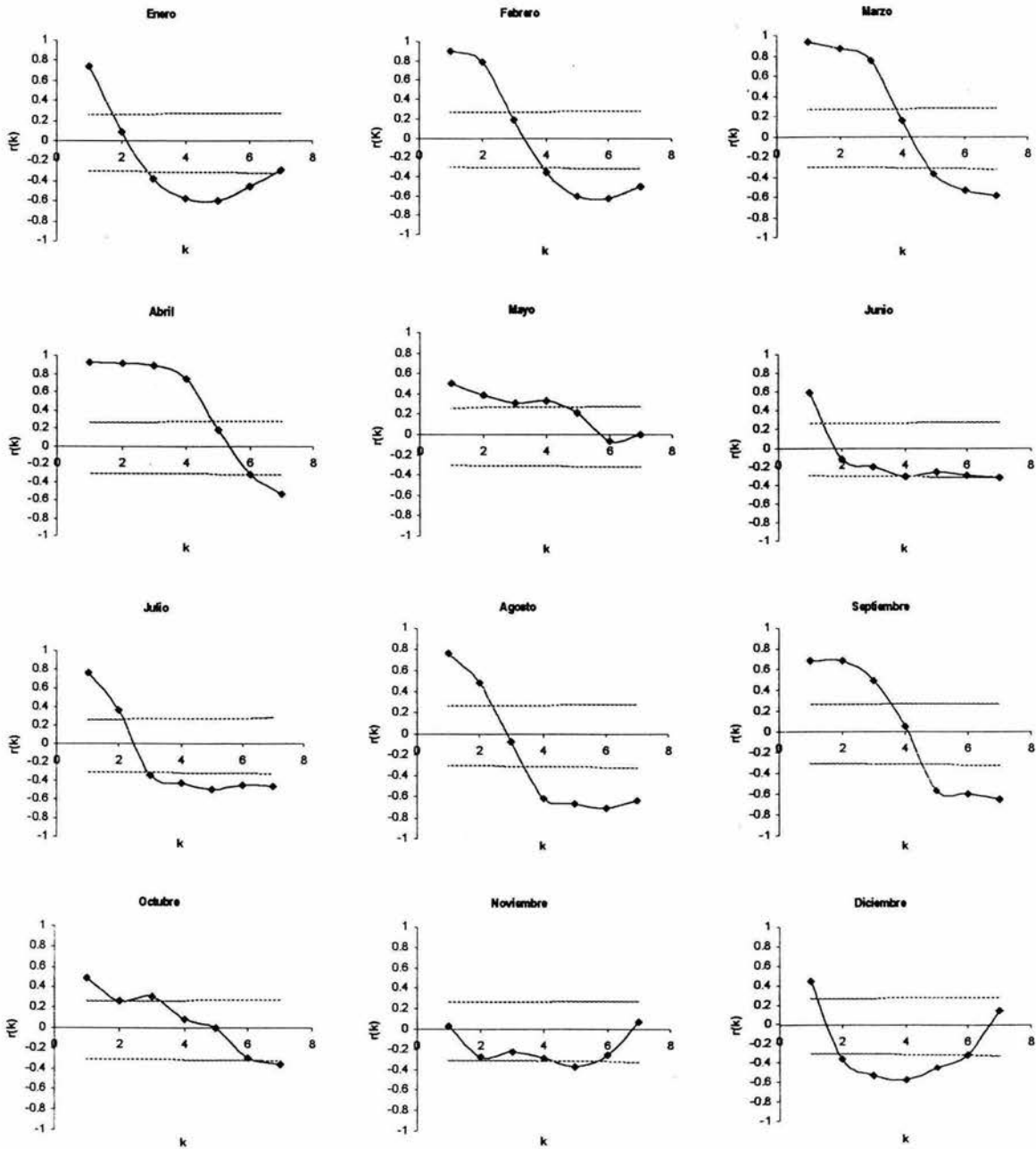


Figura 4. Correlogramas de las series de escurrimiento mensual (Mm^3) de la estación El Puente

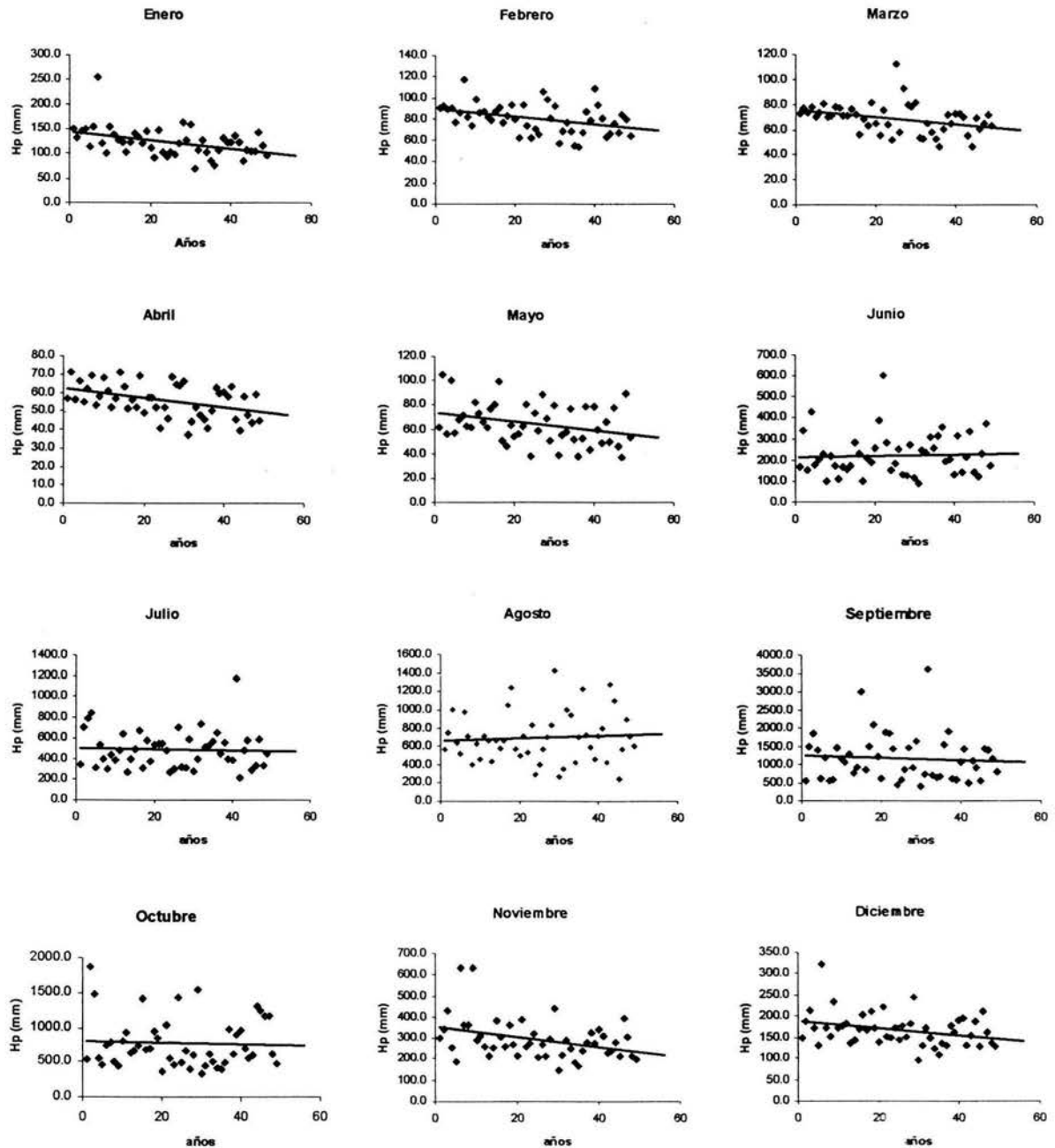


Figura 5. Tendencia del volumen de escurrimiento mensual (Mm^3) periodo 1953-2001 estación La Parota.

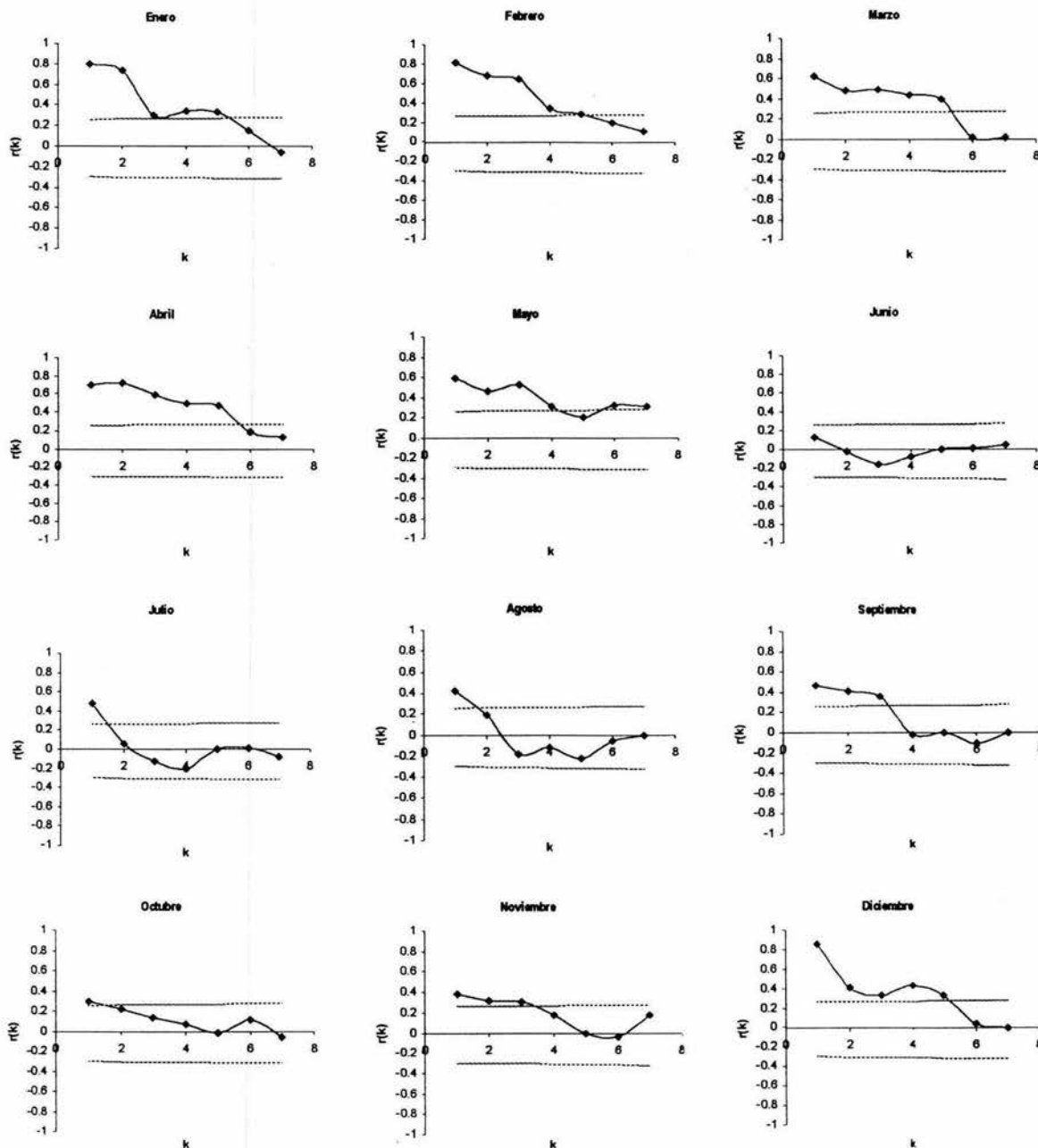


Figura 6. Correlogramas de las series de escurrimiento mensual (Mm^3) de la estación La Parota.

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic	Anual
1968	34.1	22.8	16.5	12.5	16.1	93.9	198.1	265.4	313.1	313.0	98.5	58.4	1442.4
1969	36.4	22.0	19.4	13.7	11.6	30.4	118.9	422.1	524.2	267.3	82.3	44.9	1593.3
1970	29.0	18.9	15.6	11.5	10.6	77.2	214.8	417.4	609.1	265.2	100.6	52.8	1822.8
1971	37.7	23.0	20.1	17.1	16.3	94.3	158.4	246.6	461.6	299.6	82.0	45.0	1501.8
1972	30.4	20.9	16.6	13.2	17.2	66.6	185.4	160.1	221.8	116.1	63.7	41.7	953.8
1973	26.5	13.2	12.1	15.4	12.9	213.2	249.6	276.2	710.6	395.3	134.7	73.3	2132.9
1974	46.7	30.2	24.1	17.6	19.7	140.1	225.4	182.8	603.8	183.2	75.2	47.5	1596.3
1975	29.5	21.2	16.1	11.0	21.3	127.9	219.3	341.2	552.6	185.6	90.1	52.8	1668.7
1976	34.3	22.7	16.4	13.7	13.4	61.8	95.0	95.0	166.2	648.5	100.6	63.8	1331.4
1977	41.0	25.7	19.3	13.1	20.4	59.1	95.0	158.1	151.2	169.4	60.4	38.1	850.8
1978	26.6	17.6	13.8	10.5	32.9	118.7	286.5	251.8	345.1	216.8	82.0	48.5	1450.8
1979	31.2	22.0	16.6	13.6	15.8	37.7	121.2	226.8	489.5	102.4	49.8	34.2	1160.8
1980	53.1	27.4	18.5	15.6	15.6	42.3	112.4	317.2	274.4	164.7	87.7	36.0	1164.8
1981	26.7	19.0	15.2	14.3	10.7	98.7	248.2	474.3	511.4	478.7	145.2	81.0	2123.4
1982	45.2	27.9	21.1	15.1	22.9	44.5	131.9	113.3	178.5	129.4	44.8	22.9	797.5
1983	19.3	14.0	12.2	8.4	8.6	57.1	209.1	189.5	317.9	204.0	92.7	48.1	1180.9
1984	37.2	23.2	15.9	10.2	14.9	127.7	331.2	345.5	1147.4	231.1	103.6	60.4	2448.4
1985	43.7	26.3	20.6	14.4	17.2	117.2	207.0	357.3	246.1	150.0	68.5	39.9	1308.3
1986	26.6	16.8	12.9	10.2	22.3	120.3	178.5	163.7	251.9	163.4	64.2	36.6	1067.4
1987	24.4	15.4	13.7	11.0	15.7	94.0	228.2	255.3	245.6	112.0	43.1	27.7	1085.8
1988	18.6	13.2	10.9	7.8	6.3	170.7	274.1	520.7	598.6	143.0	61.7	40.9	1866.8
1989	28.2	16.6	13.4	9.3	8.9	54.1	140.3	214.7	609.2	305.3	85.5	45.1	1530.6
1990	31.9	20.5	15.1	12.4	18.5	66.3	249.8	229.6	226.0	259.8	114.0	54.8	1298.8
1991	34.5	21.3	16.5	12.1	11.0	85.7	147.2	153.8	233.0	302.0	95.7	50.0	1162.8
1992	37.3	42.3	20.9	15.7	24.6	48.6	175.7	218.4	358.1	377.5	121.8	69.6	1510.5
1993	43.1	28.8	20.6	14.0	12.2	123.0	548.8	346.1	708.9	304.8	117.6	55.4	2323.3
1994	40.1	24.3	19.1	14.4	13.7	68.4	75.9	147.1	176.1	206.3	71.0	35.7	892.1
1995	27.0	19.0	12.5	9.4	20.5	100.2	224.0	584.8	469.4	215.0	88.4	54.7	1824.9
1996	36.3	21.6	16.2	11.0	14.8	210.1	263.2	465.3	284.8	595.0	115.8	65.5	2099.6
1997	39.5	48.5	14.5	10.8	20.1	56.2	112.2	91.2	225.3	452.1	85.2	39.9	1195.5
1998	27.7	17.9	15.3	11.3	9.8	46.6	170.5	230.3	586.0	466.6	137.2	56.2	1775.4
1999	45.9	26.1	19.7	14.2	14.7	87.0	210.8	334.4	439.9	391.6	105.6	59.0	1748.9
2000	35.2	21.7	13.7	8.6	21.2	159.5	130.0	294.4	535.1	261.2	85.3	50.3	1616.2

Tabla 1. Volumen de escurrimiento acumulado mensual y anual (millones de m³) en la estación Agua Salada.

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic	Anual
1953	104.5	72.1	62.6	51.2	52.9	98.4	184.5	318.0	394.5	356.0	200.0	105.2	2000.0
1954	93.3	74.0	69.2	66.4	91.1	206.9	450.6	425.8	761.5	926.5	225.3	137.7	3528.3
1955	102.5	71.4	63.0	48.9	46.9	89.2	513.8	575.3	903.7	804.1	278.5	159.5	3656.8
1956	104.3	71.9	71.0	60.6	86.8	264.4	556.7	356.5	719.6	359.1	170.6	125.1	2946.6
1957	82.5	60.0	56.3	48.5	47.4	105.3	164.7	288.7	385.1	298.9	128.7	91.6	1757.6
1958	108.0	67.7	64.3	56.1	57.3	120.9	325.0	554.6	640.1	481.4	410.3	254.0	3139.6
1959	167.0	95.4	77.9	64.5	59.9	137.5	225.7	401.7	346.4	506.4	237.4	125.4	2445.3
1960	86.5	64.3	56.0	46.2	51.9	56.9	159.2	220.0	367.6	335.0	237.6	108.0	1789.2
1961	74.1	57.3	57.8	51.8	51.4	132.3	254.7	348.9	749.8	293.5	404.0	178.2	2653.8
1962	107.8	80.1	71.6	63.1	69.6	102.9	216.7	253.3	631.2	513.1	192.7	125.6	2427.5
1963	93.8	70.2	69.8	58.3	66.1	80.0	245.3	431.8	558.5	605.0	185.4	116.1	2580.1
1964	88.9	66.4	59.5	50.1	59.8	118.6	412.6	429.5	793.4	436.1	179.7	116.7	2811.2
1965	92.5	65.2	60.1	50.8	51.1	95.0	168.7	315.7	500.4	454.5	181.0	113.5	2148.5
1966	85.3	64.4	64.1	56.8	65.3	102.0	256.7	440.3	634.9	496.3	192.6	120.6	2579.3
1967	91.3	65.0	56.8	48.4	57.2	121.6	248.1	296.6	809.9	686.4	239.4	152.0	2872.5
1968	103.1	74.9	64.5	53.2	86.3	138.4	450.8	404.5	580.9	374.2	178.6	122.8	2632.0
1969	89.0	61.2	60.0	48.8	45.2	71.3	166.0	573.1	781.3	440.3	223.0	130.9	2690.0
1970	90.7	65.9	54.4	47.8	46.7	119.4	326.8	619.1	1023.9	607.6	239.8	147.8	3389.9
1971	98.5	69.2	65.2	58.1	55.6	86.2	195.9	319.0	526.7	478.6	176.5	113.0	2242.5
1972	77.4	57.3	50.1	45.0	46.0	175.7	261.8	332.6	398.6	257.9	150.4	108.3	1961.2
1973	77.3	53.6	52.4	50.9	52.7	165.9	282.5	448.1	822.6	635.0	253.6	159.1	3053.7
1974	105.3	73.6	68.3	57.7	59.3	424.8	421.5	424.5	937.4	400.7	174.3	125.4	3272.6
1975	90.5	69.0	65.5	56.6	70.3	143.3	254.4	481.9	780.5	317.5	164.0	110.6	2604.0
1976	80.0	62.7	57.3	49.6	50.5	86.7	156.6	231.8	291.5	754.1	210.4	136.1	2167.5
1977	89.0	63.2	56.6	47.5	54.2	121.5	183.5	256.4	365.6	284.4	136.7	103.1	1761.6
1978	70.3	52.1	48.3	42.8	44.4	132.7	411.9	352.2	498.6	441.6	199.0	116.7	2410.8
1979	78.4	60.7	52.3	45.4	50.6	63.0	139.4	346.8	754.0	230.9	128.9	79.8	2030.0
1980	79.2	51.2	45.9	41.9	44.8	71.9	192.8	458.6	515.2	361.9	172.3	120.1	2155.8
1981	78.3	57.6	49.8	48.0	37.5	178.4	355.3	649.8	757.5	730.6	250.9	144.8	3338.6
1982	96.2	67.1	59.1	54.2	59.3	72.4	158.6	158.9	228.2	231.1	107.3	75.6	1367.9
1983	55.7	48.4	46.4	34.3	35.1	59.3	277.4	228.3	531.7	289.9	153.5	98.2	1858.3
1984	80.6	54.8	43.5	35.3	44.7	162.5	427.8	645.1	1304.9	395.9	158.6	120.4	3474.1
1985	88.2	57.7	51.4	43.6	46.4	130.0	287.0	561.1	441.8	323.9	170.0	112.6	2313.6
1986	75.6	57.6	50.3	41.9	58.8	191.7	363.0	297.2	417.2	274.6	140.3	107.2	2075.3
1987	69.6	50.3	47.9	41.2	43.3	157.4	355.7	483.7	465.6	302.6	113.8	82.3	2213.4
1988	62.2	46.3	38.4	33.9	33.8	117.3	405.1	692.3	883.6	345.0	160.6	106.4	2924.9
1989	73.0	54.6	54.9	48.1	49.5	194.3	348.4	497.1	1062.7	593.8	221.5	128.7	3326.6
1990	90.8	71.2	61.2	61.1	68.0	115.6	280.7	343.1	371.0	365.1	222.9	150.1	2200.8

Tabla 2. Volumen de escurrimiento acumulado mensual y anual (millones de m³) en la estación El Puente.

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic	Anual
1991	89.0	57.7	55.5	48.3	48.7	107.6	231.8	298.8	327.9	543.5	200.6	120.8	2130.2
1992	87.9	70.9	54.1	46.9	56.8	82.0	223.2	478.7	646.7	518.1	240.9	144.8	2651.0
1993	90.6	63.5	54.8	49.0	47.8	158.3	546.5	410.5	586.7	378.6	218.9	142.5	2747.7
1994	92.3	61.1	52.9	44.9	43.9	84.2	135.6	288.7	343.1	375.8	171.6	115.8	1809.9
1995	68.7	52.1	46.4	38.4	49.5	128.0	303.4	719.9	673.2	389.8	187.8	133.5	2790.7
1996	91.7	65.9	60.7	54.3	58.0	146.9	310.5	566.2	602.2	642.6	198.9	132.5	2930.4
1997	93.1	62.5	56.6	47.4	64.0	114.4	222.5	195.3	343.4	773.0	193.6	126.4	2292.2
1998	94.5	61.3	52.7	42.5	42.0	76.7	175.0	361.0	878.7	739.6	299.6	149.8	2973.4
1999	103.7	63.7	56.2	45.8	46.0	101.1	265.8	450.3	894.6	752.5	214.4	118.3	3112.4
2000	93.4	71.4	55.1	47.6	74.5	211.0	215.2	412.3	579.7	393.3	155.5	100.8	2409.8

Tabla 2. Volumen de escurrimiento acumulado mensual y anual (millones de m³) en la estación El Puente (continuación).

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic	Anual
1953	151.0	90.0	73.0	57.0	61.0	167.0	337.0	567.0	543.0	541.0	301.0	148.0	3036.0
1954	132.0	92.0	77.0	71.0	105.0	340.0	704.0	750.0	1484.0	1881.0	342.0	188.0	6166.0
1955	146.0	89.0	74.0	56.0	56.0	152.0	786.0	1003.0	1851.0	1479.0	429.0	213.0	6334.0
1956	149.0	90.0	78.0	66.0	100.0	428.0	842.0	633.0	1380.0	545.0	255.0	173.0	4739.0
1957	115.0	77.0	70.0	55.0	57.0	179.0	309.0	519.0	615.0	454.0	188.0	132.0	2770.0
1958	155.0	86.0	74.0	62.0	68.0	204.0	536.0	969.0	1186.0	748.0	635.0	321.0	5044.0
1959	256.0	117.0	81.0	69.0	71.0	231.0	398.0	709.0	536.0	793.0	362.0	173.0	3796.0
1960	120.0	82.0	70.0	53.0	62.0	99.0	300.0	402.0	580.0	508.0	363.0	151.0	2790.0
1961	101.0	74.0	71.0	58.0	61.0	222.0	439.0	620.0	1454.0	446.0	634.0	235.0	4415.0
1962	155.0	99.0	78.0	68.0	82.0	174.0	384.0	457.0	1165.0	806.0	290.0	173.0	3931.0
1963	138.3	85.6	77.1	60.8	73.4	108.1	483.0	707.5	1066.9	936.4	313.6	177.1	4227.8
1964	127.7	86.8	70.8	52.1	66.3	166.7	643.2	657.7	1269.3	636.0	258.5	181.8	4216.9
1965	124.0	81.5	71.2	56.7	61.6	156.3	265.0	437.1	754.6	657.9	212.5	137.6	3016.0
1966	101.9	79.0	76.2	70.9	76.8	169.8	396.7	657.0	908.7	735.1	253.7	145.1	3670.9
1967	123.1	87.3	71.8	63.2	80.4	283.0	487.6	577.7	3008.9	1425.0	381.6	169.6	6759.2
1968	140.0	91.5	56.4	51.1	99.4	229.9	669.5	665.1	848.1	675.2	304.6	203.2	4034.0
1969	134.5	76.8	68.3	56.4	50.9	99.3	307.4	1048.0	1486.3	689.1	257.3	168.1	4442.4
1970	120.1	83.2	63.1	51.8	45.8	208.9	576.5	1240.7	2105.2	941.5	364.1	209.9	6010.8
1971	145.3	93.8	81.7	69.2	63.2	187.7	378.2	560.4	1198.1	856.4	270.1	172.4	4076.5
1972	113.0	79.5	65.2	48.9	54.2	256.8	536.0	497.3	605.4	360.6	214.6	138.0	2969.5
1973	92.8	62.4	54.9	57.6	55.9	386.8	542.9	706.5	1877.0	1036.7	388.2	220.2	5481.9
1974	148.7	93.1	75.1	57.5	62.0	602.2	549.0	530.1	1847.9	547.0	258.8	150.8	4922.2
1975	103.8	73.3	63.6	52.2	80.2	282.4	478.9	825.8	1411.9	461.3	275.5	149.8	4258.7
1976	93.5	62.4	51.8	40.4	38.1	153.4	269.3	294.7	415.2	1426.4	322.1	173.6	3340.9
1977	102.6	70.5	112.0	52.0	72.7	183.3	300.0	397.8	572.3	484.2	206.0	143.1	2696.5
1978	98.7	65.2	57.7	46.1	58.9	250.6	701.5	559.5	839.5	656.8	271.8	176.6	3782.9
1979	121.8	105.8	93.1	68.5	88.3	128.7	321.3	696.0	1455.7	386.1	213.6	151.3	3830.2
1980	164.0	98.1	80.0	64.6	69.0	125.6	310.4	832.2	909.8	590.6	296.5	182.6	3723.4
1981	127.3	80.6	78.0	64.0	50.5	271.8	587.5	1416.7	1641.0	1544.7	442.1	244.2	6548.4
1982	158.8	91.9	81.8	66.1	79.6	113.1	280.7	270.6	387.1	333.7	146.5	94.9	2104.8
1983	69.4	56.6	53.3	36.8	38.5	90.1	391.6	344.8	728.2	444.5	215.4	131.2	2600.4
1984	108.5	68.7	52.2	44.2	54.9	245.5	741.0	999.6	3594.7	620.2	288.8	173.7	6992.0
1985	126.7	76.3	64.4	52.0	57.9	235.5	513.9	932.5	705.2	499.6	249.5	150.2	3663.7
1986	103.9	68.8	58.1	47.9	76.3	307.0	518.5	423.6	645.3	412.8	182.8	123.6	2968.6
1987	86.0	55.1	52.3	45.2	51.2	254.4	567.2	700.4	664.1	400.6	165.8	108.3	3150.6
1988	75.6	54.1	46.3	40.7	38.2	312.0	647.1	1227.4	1538.4	494.0	239.1	135.7	4848.6
1989	106.4	67.4	60.2	50.2	52.1	354.3	443.8	725.0	1920.8	973.9	281.9	132.1	5168.1
1990	132.0	86.7	71.8	62.8	78.8	194.5	554.8	583.6	600.8	612.8	324.1	177.8	3480.5

Tabla 3. Volumen de escurrimiento acumulado mensual y anual (millones de m³) en la estación La Parota.

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic	Anual
1991	123.8	78.8	64.8	59.6	43.0	202.5	395.9	451.9	585.4	890.2	275.8	163.1	3334.8
1992	122.4	109.4	72.6	60.4	78.3	130.4	380.4	712.5	1056.8	954.5	344.7	190.9	4213.3
1993	136.7	93.5	72.4	57.7	59.6	313.0	1180.7	794.4	1416.7	686.4	308.7	196.4	5316.2
1994	122.5	80.6	70.2	63.3	49.1	142.2	213.9	419.9	495.7	558.1	229.1	130.7	2575.3
1995	84.2	63.1	54.8	45.6	66.2	214.3	483.9	1277.6	1082.3	604.8	241.0	153.7	4371.5
1996	106.9	66.3	46.2	39.3	49.7	333.9	573.2	1095.3	906.4	1314.4	279.5	187.8	4998.9
1997	105.0	76.1	69.1	58.2	77.5	138.6	283.3	245.7	551.0	1249.1	213.8	127.7	3195.1
1998	104.8	67.9	60.7	47.9	45.8	119.1	335.6	566.2	1439.3	1172.3	396.6	210.5	4566.7
1999	142.6	83.9	64.5	43.7	36.9	229.1	589.8	886.6	1383.4	1167.4	307.2	163.2	5098.3
2000	116.8	79.7	71.4	59.2	89.5	369.9	335.3	708.2	1141.9	619.7	213.0	136.1	3940.7
2001	96.6	64.8	63.3	44.9	53.4	173.4	451.8	596.7	793.8	476.3	199.5	128.1	3142.6

Tabla 3. Volumen de escurrimiento acumulado mensual y anual (millones de m³) en la estación La Parota (continuación).

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Estadísticos												
Tamaño (años)	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33
Media (mills m3)	41.7	27.6	20.3	14.6	14.1	52.8	145.7	236.9	334.5	317.6	191.7	71.3
Desv. Std.	12.7	8.6	7.6	3.1	5.0	49.6	73.9	110.5	175.8	171.2	140.0	29.8
C. asimetría	0.4	0.5	2.3	0.4	1.8	1.4	0.6	1.0	0.3	0.9	1.2	0.5
C. curtosis	2.7	2.8	9.9	3.2	8.3	5.4	3.1	4.5	2.6	3.0	4.3	2.7
C. variación	0.3	0.3	0.4	0.2	0.3	0.9	0.5	0.5	0.5	0.5	0.7	0.4
Helmert												
Secuencias	19	23	21	16	15	25	18	13	16	19	29	23
Cambios	13	9	11	16	17	7	14	19	16	13	3	9
Abs(S-C)	6	14	10	0	2	18	4	6	0	6	26	14
Tolerancia	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6
Cumple	No	No	No	Si	Si	No	Si	No	Si	No	No	Si
t de Student												
<i>Tamaño (años)</i>												
1ª muestra	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
2ª muestra	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
Medias												
1ª muestra	34.2	21.7	17.1	13.5	16.6	85.2	179.3	258.6	401.9	258.7	86.8	49.3
2ª muestra	48.7	33.1	23.3	15.6	11.8	22.3	114.0	216.6	271.0	373.0	290.4	92.0
Desv std												
1ª muestra	8.8	4.6	3.1	2.4	5.9	47.5	61.0	112.0	177.9	145.5	26.9	14.7
2ª muestra	11.8	7.9	9.4	3.4	2.4	26.7	72.4	108.4	152.5	178.9	131.3	25.2
t calculado	3.8	4.8	2.4	1.9	2.9	4.5	2.7	1.0	2.2	1.9	5.9	5.7
t crítico	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
Cumple	No	No	Si	Si	No	No	No	Si	No	Si	No	No
Cramer												

<i>Tamaño (años)</i>												
1er bloque	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
2° bloque	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
<i>Medias</i>												
1er bloque	45.6	30.6	21.8	15.1	12.5	29.9	125.5	227.4	289.9	337.3	243.4	81.1
2° bloque	53.2	36.2	26.5	16.7	12.1	16.4	95.6	209.8	281.4	385.7	348.3	103.4
<i>Desv std</i>												
1er bloque	2.7	8.8	8.8	3.3	3.4	30.1	71.9	114.1	151.2	182.6	145.9	31.5
2° bloque	4.6	5.9	9.9	2.9	2.2	4.7	50.8	126.5	145.8	175.0	120.7	19.9
<i>t calculado</i>												
1er bloque	2.7	3.1	2.0	1.3	2.9	4.7	2.3	0.7	2.1	0.9	3.4	2.9
2° bloque	4.7	5.4	9.9	3.0	1.6	3.3	3.0	0.9	1.2	1.6	7.1	6.5
t crítico	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
<i>Cumple</i>												
1er bloque	No	No	Si	Si	Si	No	No	Si	No	Si	Si	Si
2° bloque	Si	No	No	No	Si	No	No	Si	Si	Si	Si	Si

Tabla 4. Estadísticos y pruebas de homogeneidad para volúmenes mensuales estación Agua Salada.

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Estadísticos												
Tamaño (años)	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48
Media (mills m3)	212.9	110.5	79.4	62.3	56.3	76.7	167.3	257.5	395.3	442.5	352.6	265.6
Desv. Std.	202.4	61.6	30.9	16.9	12.3	45.2	140.8	163.7	237.7	219.9	182.2	203.1
C. asimetría	1.7	1.4	1.2	1.0	0.9	2.2	1.2	0.4	0.3	0.4	0.9	1.7
C. curtosis	5.0	4.1	3.3	3.0	4.3	9.5	4.0	2.5	2.3	3.0	4.1	5.6
C. variación	0.9	0.6	0.4	0.3	0.2	0.6	0.8	0.6	0.6	0.5	0.5	0.7
Helmert												
Secuencias	46	44	44	36	30	42	34	34	33	25	26	44
Cambios	1	3	3	11	17	5	13	13	14	22	21	3
Abs(S-C)	45	41	41	25	13	37	21	21	19	3	5	41
Tolerancia	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8
Cumple	No	No	No	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si
t de Student												
<i>Tamaño (años)</i>												
1ª muestra	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
2ª muestra	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
<i>Medias</i>												
1ª muestra	105.3	74.0	63.5	55.4	58.7	103.9	267.0	367.7	533.1	506.1	304.8	152.1
2ª muestra	320.4	146.9	95.3	69.3	53.8	49.4	67.5	147.3	257.5	378.8	400.3	379.1
<i>Desv std</i>												
1ª muestra	23.4	12.4	6.6	6.9	13.1	50.6	134.8	125.5	218.5	223.7	166.6	46.7
2ª muestra	243.0	69.4	37.3	20.9	11.1	7.9	39.4	116.8	167.5	200.9	187.9	235.0
<i>t calculado</i>												
t crítico	4.2	4.9	4.0	3.0	1.3	5.1	6.8	6.1	4.7	2.0	1.8	4.5
t crítico	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
Cumple	No	No	No	Si	Si	No	No	No	No	Si	Si	No

Cramer*Tamaño* (años)

1er bloque	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32
2° bloque	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16

Medias

1er bloque	269.8	130.7	87.0	66.2	53.2	53.4	99.8	196.9	287.5	416.0	415.0	331.2
2° bloque	425.9	181.2	114.4	78.8	59.0	50.9	47.3	86.8	192.8	340.0	420.8	472.2

Desv std

1er bloque	227.7	66.7	35.3	19.3	2.6	14.9	87.0	156.5	186.8	235.1	187.8	220.3
2° bloque	233.6	59.8	30.5	19.2	9.3	7.6	6.7	53.5	117.4	162.8	200.2	230.0

t calculado

1er bloque	2.9	3.5	2.5	2.2	2.6	7.1	6.2	4.1	5.6	1.1	3.7	3.4
2° bloque	7.5	9.4	9.0	6.4	1.0	2.9	5.1	7.4	5.1	2.3	1.8	7.0
t crítico	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0

Cumple

1er bloque	No	No	No	No	No	No	No	Si	No	Si	No	No
2° bloque	No	No	No	No	Si	No	No	Si	No	No	Si	No

Tabla 5. Estadísticos y pruebas de homogeneidad para volúmenes mensuales estación El Puente.

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Estadísticos												
Tamaño (años)	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49
Media (mills m3)	123.0	80.4	68.6	55.6	64.2	222.8	484.1	691.8	1156.1	770.0	294.0	167.7
Desv. Std.	29.6	13.8	11.9	8.9	16.6	99.3	181.8	270.8	639.7	360.1	97.8	38.9
C. asimetría	1.7	0.2	0.7	-0.1	0.5	1.3	1.3	0.7	1.6	1.2	1.7	1.3
C. curtosis	10.7	3.3	5.8	2.4	3.0	6.5	6.4	3.5	7.3	4.1	7.8	7.2
C. variación	0.2	0.1	0.1	0.1	0.2	0.4	0.4	0.4	0.5	0.5	0.3	0.2
Helmert												
Secuencias	27	29	31	27	18	26	22	24	22	26	27	22
Cambios	21	19	17	21	30	22	26	24	26	22	21	26
Abs(S-C)	6	10	14	6	12	4	4	0	4	4	6	4
Tolerancia	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9
Cumple	Si	No	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
t de Student												
<i>Tamaño</i> (años)												
1ª muestra	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
2ª muestra	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
<i>Medias</i>												
1ª muestra	132.7	84.6	70.5	58.5	67.9	228.6	484.0	668.1	1233.2	816.0	328.0	179.3
2ª muestra	113.7	76.4	66.8	52.8	60.6	217.3	484.1	714.6	1082.2	725.9	261.3	156.5
<i>Desv std</i>												
1ª muestra	32.7	11.4	7.9	7.7	16.8	115.6	161.3	221.0	614.0	385.6	112.0	40.8
2ª muestra	23.3	14.9	14.8	9.3	15.9	82.8	202.9	314.1	667.5	335.7	69.4	34.2

<i>t</i> calculado	2.3	2.1	1.0	2.2	1.5	0.4	0.1	0.6	0.8	0.8	2.4	2.0
<i>t</i> crítico	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
Cumple	No	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si
Cramer												
<i>Tamaño</i>												
(años)												
1er bloque	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33
2° bloque	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
<i>Medias</i>												
1er bloque	115.0	76.8	66.5	53.1	59.5	230.6	477.0	714.1	1151.6	741.4	269.1	160.5
2° bloque	111.3	74.8	62.5	51.6	59.0	236.7	498.1	726.3	995.7	769.8	261.8	153.8
<i>Desv std</i>												
1er bloque	22.7	14.1	13.6	9.0	15.1	106.1	184.0	308.7	655.6	334.7	67.6	33.3
2° bloque	18.9	13.9	8.7	8.0	15.9	82.5	212.1	287.2	421.7	312.4	61.3	29.9
<i>t calculado</i>												
1er bloque	2.9	2.8	1.8	2.8	3.0	0.8	0.4	0.8	0.1	0.8	2.7	1.9
2° bloque	2.0	2.1	2.8	2.3	1.6	0.7	0.4	0.6	1.2	0.1	1.7	1.8
<i>t</i> crítico	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
<i>Cumple</i>												
1er bloque	No	No	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
2° bloque	Si	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Tabla 6. Estadísticos y pruebas de homogeneidad para volúmenes mensuales estación La Parota.

4.2 Transformación

En este primer paso se analizó la representación gráfica de la serie (Fig.7) en ella se encontraron pequeños saltos y alta periodicidad, mientras que en el correlograma y en el coeficiente de auto correlación r_k (Fig.8) sólo se presentó alta estacionalidad, en ambas gráficas no se tiene presencia de algún tipo de tendencia.

En las figuras 9 y 10 se encuentra representada la variación de la media y la varianza respecto al tiempo en especial se encuentra la variación a lo largo de un año, estas figuras son de especial ayuda en la investigación de estacionalidad, ciclicidad y algún tipo de tendencia que puedan presentar las series.

Debido a que la media y la varianza deben permanecer constantes se analizó su representación gráfica contra el tiempo, (Figs.9 y 10) en ellas se observó que la media y la varianza no permanecen constantes, además de presentar ciclicidad. El anterior análisis muestra la necesidad de estabilizar la media, la varianza y eliminar los pequeños saltos, para ello se eligió aplicar el método de Box – Cox de primera y segunda potencia, además de estandarizar las series. (Tablas 6,7 y 8)

El correlograma de las nuevas series normalizadas y estandarizadas (Fig.11) no presentan tendencia ni saltos, pero, si alta periodicidad, este efecto se podrá atenuar o eliminar en el proceso de Diferenciación e Identificación

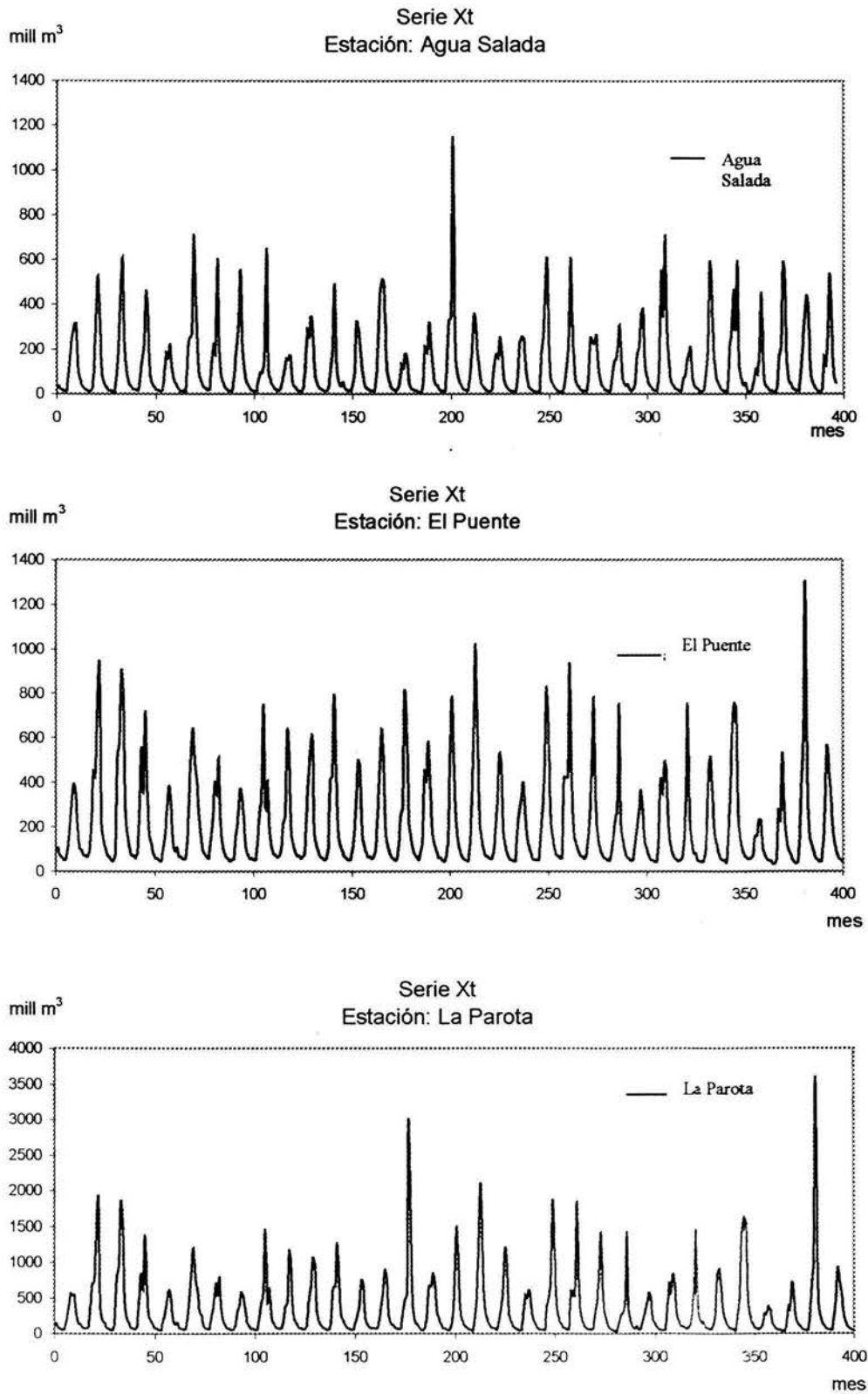


Figura 7 Representación gráfica de las series X_t

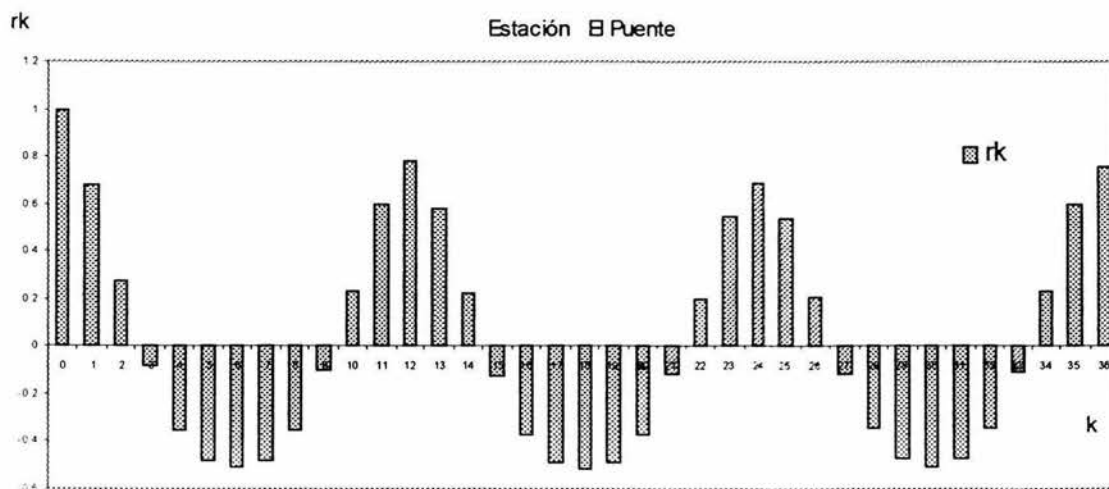
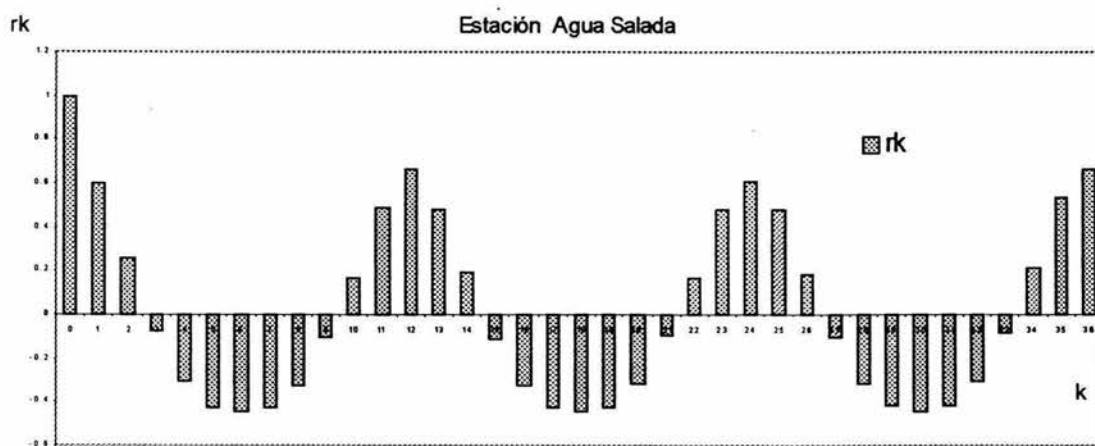
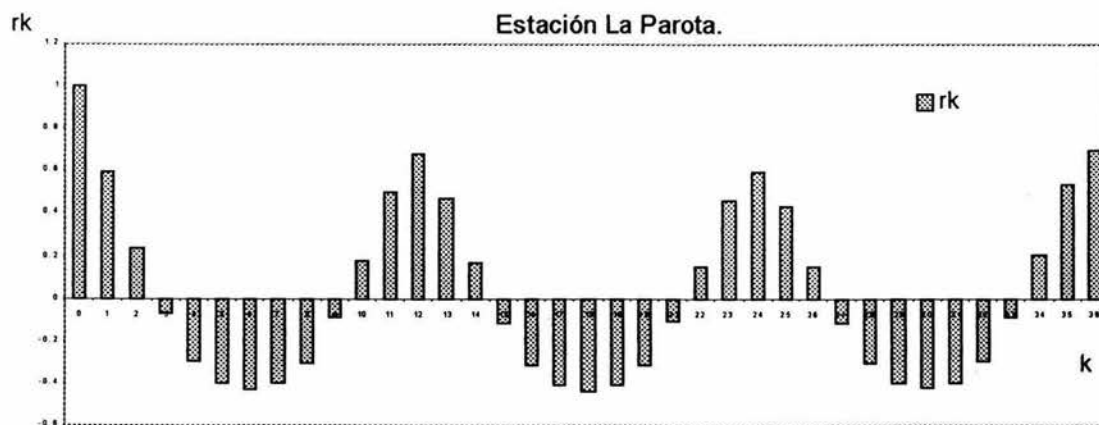


Figura 8. Correlograma (fac) de las series X_t

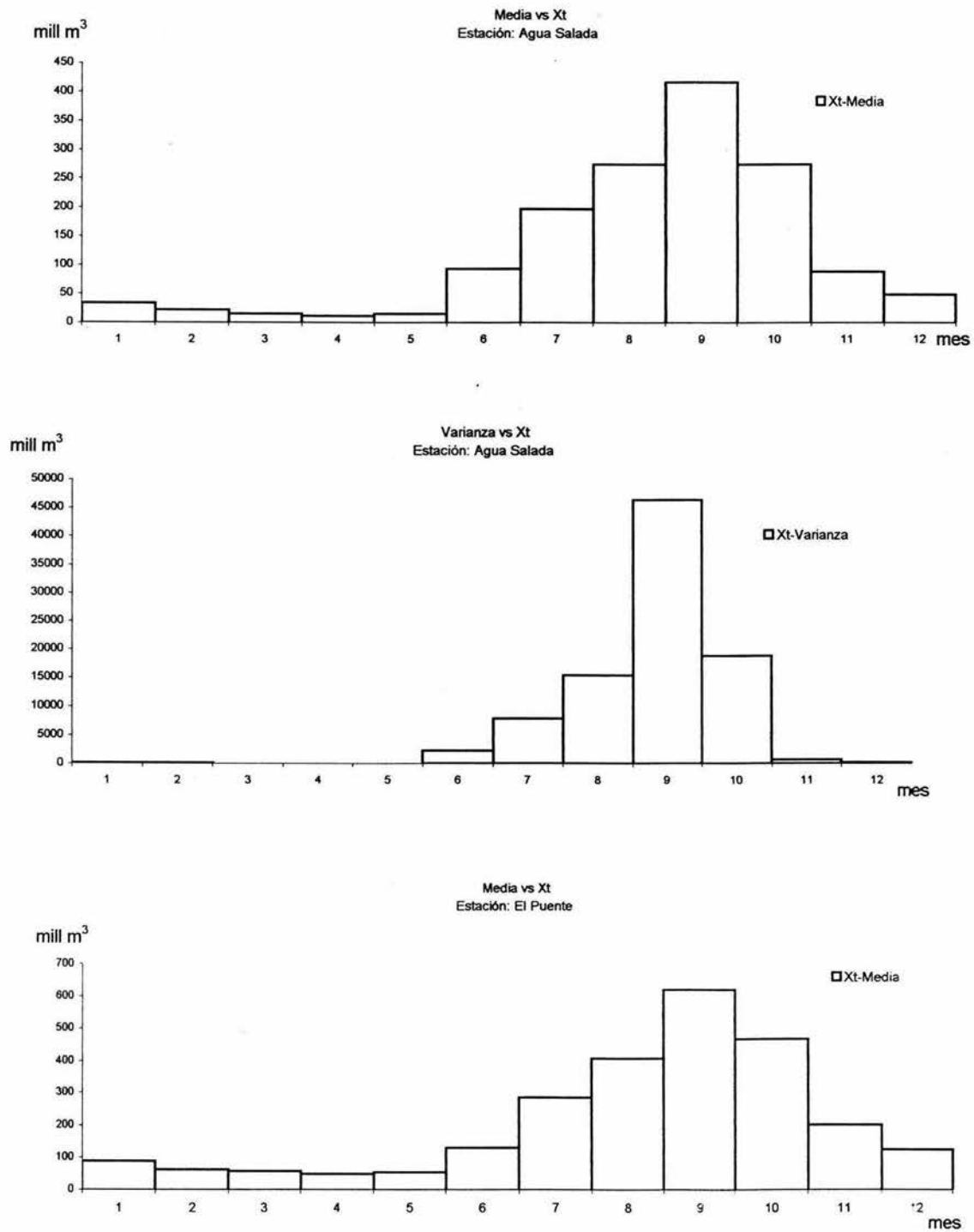


Figura 9. Representación gráfica de la Media y Varianza

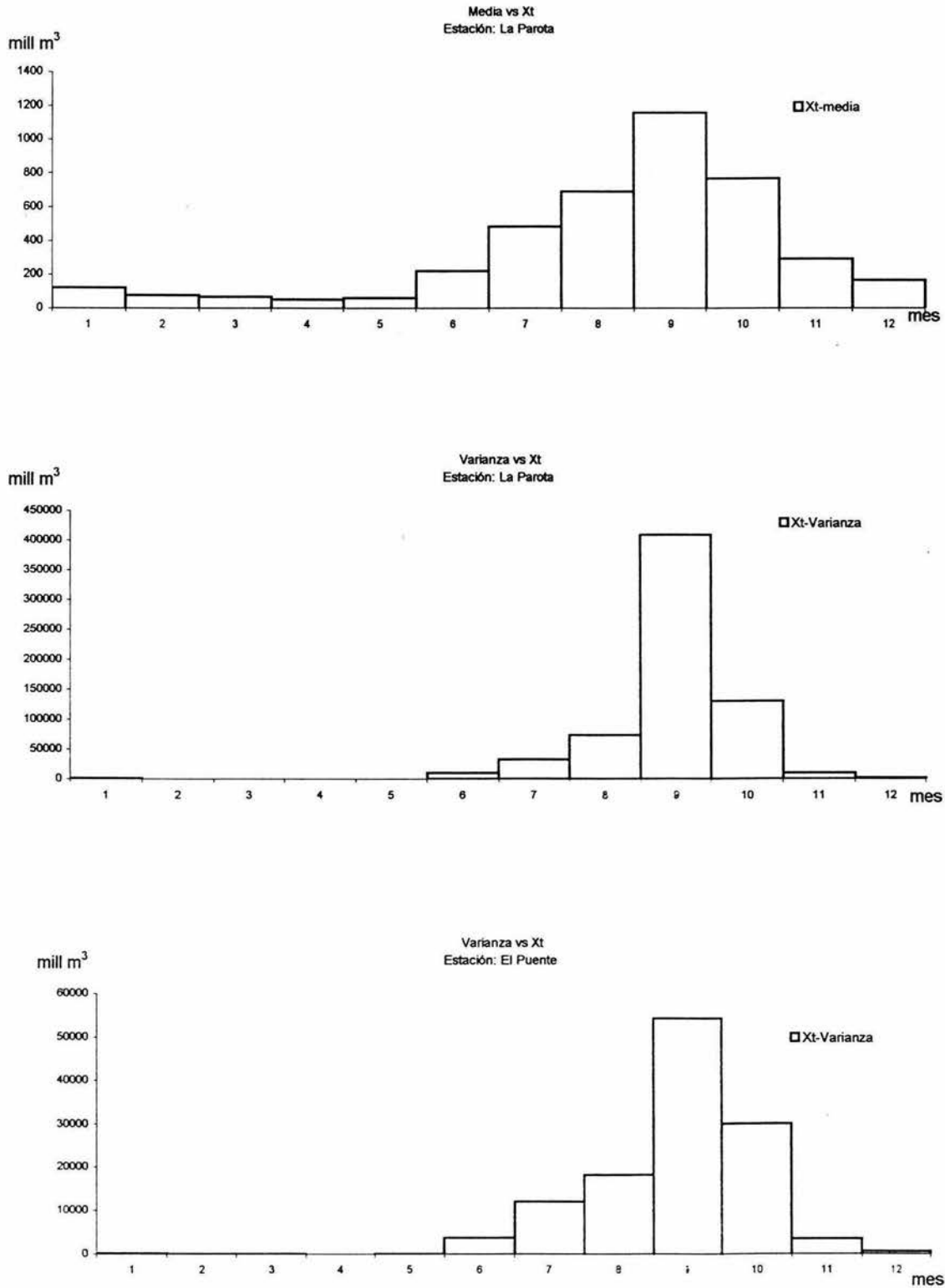


Figura 10 Representación gráfica de la Media y Varianza

t	SERIE REGISTRADA VOL E6 M3	SERIE NORMALIZADA Yt = Ln (V)	SERIE NORMALIZADA BOX - COX Yt	SERIE ESTANDARIZADA Zt	SERIE DIFERENCIADA d=1, D=0	SERIE DIFERENCIADA d=0, D=1
538	773	6.65	45.22	1.91	14.89	3.90
539	193.6	5.27	22.74	0.36	-22.49	-0.31
540	126.4	4.84	18.26	-0.12	-4.48	-0.45
541	94.5	4.55	15.68	-0.45	-2.58	0.12
542	61.3	4.12	12.43	-0.93	-3.25	-0.13
543	52.7	3.96	11.44	-1.10	-0.99	-0.46
544	42.5	3.75	10.15	-1.34	-1.29	-0.64
545	42	3.74	10.08	-1.35	-0.07	-2.65
546	76.7	4.34	14.03	-0.68	3.95	-3.31
547	175	5.16	21.59	0.24	7.56	-2.81
548	361	5.89	31.10	1.05	9.51	8.26
549	878.7	6.78	48.13	2.05	17.03	17.80
550	739.6	6.61	44.26	1.86	-3.87	-0.96
551	299.6	5.70	28.34	0.85	-15.92	5.60
552	149.8	5.01	19.94	0.07	-8.40	1.68
553	103.7	4.64	16.47	-0.34	-3.47	0.79
554	63.7	4.15	12.69	-0.89	-3.77	0.26
555	56.2	4.03	11.85	-1.03	-0.84	0.41
556	45.8	3.82	10.58	-1.26	-1.27	0.44
557	46	3.83	10.61	-1.25	0.03	0.53
558	101.1	4.62	16.25	-0.37	5.64	2.22
559	265.8	5.58	26.69	0.71	10.44	5.09
560	450.3	6.11	34.70	1.30	8.01	3.60
561	894.6	6.80	48.55	2.07	13.86	0.42
562	752.5	6.62	44.64	1.88	-3.92	0.37
563	214.4	5.37	23.95	0.47	-20.69	-4.39
564	118.3	4.77	17.64	-0.20	-6.30	-2.30
565	93.4	4.54	15.58	-0.46	-2.06	-0.88
566	71.4	4.27	13.50	-0.76	-2.08	0.81
567	55.1	4.01	11.72	-1.05	-1.78	-0.13
568	47.6	3.86	10.81	-1.21	-0.91	0.23
569	74.5	4.31	13.81	-0.71	3.00	3.21
570	211	5.35	23.75	0.45	9.94	7.50
571	215.2	5.37	23.99	0.47	0.24	-2.70
572	412.3	6.02	33.22	1.20	9.23	-1.48
573	579.7	6.36	39.29	1.58	6.07	-9.26
574	393.3	5.97	32.45	1.15	-6.84	-12.19
575	155.5	5.05	20.32	0.11	-12.13	-3.62
576	100.8	4.61	16.22	-0.37	-4.10	-1.42
ESTADÍSTICOS						
X	212.919	4.9477	13.15	0.00	-0.0005	0.0326
S ²	43846.664	0.7976	108.49	1.00	50.31	29.71
S	209.396	0.8931	10.42	1.00	7.093	5.451
g	1.706	0.4100	0.95	0.41		
K	5.882	1.9741	3.00	1.95		

Tabla 6. Serie normalizada, estandarizada y diferenciada para la Estación El Puente

t	SERIE REGISTRADA VOL E6 M3	SERIE NORMALIZADA $Y_t = \ln(V)$	SERIE NORMALIZADA BOX-COX Y_t	SERIE ESTANDARIZADA Z_t	SERIE DIFERENCIADA $d=1, D=0$	SERIE DIFERENCIADA $d=0, D=1$	SERIE DIFERENCIADA $d=1, D=1$
550	1172.30	7.07	24.90	1.70	-1.81	-0.55	-8.15
551	396.60	5.98	16.99	0.66	-7.91	3.47	4.02
552	210.50	5.35	13.44	0.05	-3.55	2.36	-1.11
553	142.60	4.96	11.57	-0.33	-1.87	1.33	-1.03
554	83.90	4.43	9.36	-0.84	-2.21	0.79	-0.54
555	64.50	4.17	8.38	-1.09	-0.97	0.21	-0.57
556	43.70	3.78	7.08	-1.47	-1.30	-0.29	-0.51
557	36.90	3.61	6.56	-1.63	-0.52	-0.67	-0.38
558	229.10	5.43	13.87	0.13	7.31	3.10	3.76
559	589.80	6.38	19.59	1.04	5.72	3.60	0.51
560	886.60	6.79	22.61	1.43	3.02	3.30	-0.30
561	1383.40	7.23	26.36	1.86	3.75	-0.36	-3.66
562	1167.40	7.06	24.87	1.69	-1.49	-0.04	0.32
563	307.20	5.73	15.47	0.41	-9.39	-1.52	-1.48
564	163.20	5.09	12.19	-0.20	-3.28	-1.25	0.27
565	116.80	4.76	10.69	-0.52	-1.50	-0.87	0.37
566	79.70	4.38	9.16	-0.89	-1.53	-0.20	0.68
567	71.40	4.27	8.75	-0.99	-0.41	0.58	-0.01
568	59.20	4.08	8.08	-1.17	-0.67	0.71	0.13
569	89.50	4.49	9.61	-0.78	1.52	2.38	1.67
570	369.90	5.91	16.56	0.59	6.96	5.79	3.41
571	335.30	5.82	15.98	0.49	-0.58	-0.01	-5.79
572	708.20	6.56	20.90	1.21	4.92	1.59	1.60
573	1141.90	7.04	24.68	1.67	3.78	-2.04	-3.63
574	619.70	6.43	19.94	1.08	-4.74	-4.97	-2.93
575	213.00	5.36	13.50	0.06	-6.44	-3.49	1.47
576	136.10	4.91	11.36	-0.37	-2.14	-2.08	1.42
577	96.60	4.57	9.91	-0.70	-1.45	-0.78	1.29
578	64.80	4.17	8.40	-1.09	-1.51	-0.76	0.03
579	63.30	4.15	8.32	-1.11	-0.08	-0.43	0.33
580	44.90	3.80	7.17	-1.44	-1.15	-0.92	-0.48
581	53.40	3.98	7.73	-1.27	0.57	-1.87	-0.96
582	173.40	5.16	12.48	-0.14	4.75	-4.08	-2.21
583	451.80	6.11	17.81	0.78	5.33	1.83	5.91
584	596.70	6.39	19.67	1.05	1.86	-1.23	-3.06
585	793.80	6.68	21.75	1.32	2.08	-2.93	-1.70
586	476.30	6.17	18.15	0.83	-3.60	-1.79	1.14
587	199.50	5.30	13.17	-0.01	-4.98	-0.33	1.45
588	128.10	4.85	11.09	-0.43	-2.07	-0.27	0.06
ESTADÍSTICOS							
X	348.13	5.30	14.06	0.00	0.00	0.00	0.00
S ²	170274.19	1.08	33.12	1.00	15.18	8.85	8.77
S	412.64	1.04	5.75	1.00	3.90	2.97	2.96
g	2.67	0.35	0.83	0.43			
K	14.06	2.04	3.00	2.13			

Tabla 7. Serie normalizada, estandarizada y diferenciada para la Estación La Parota

t	SERIE REGISTRADA VOL E6 M3	SERIE NORMALIZADA $Y_t = \ln(V)$	SERIE NORMALIZADA BOX - COX Y_t	SERIE ESTANDARIZADA Z_t	SERIE DIFERENCIADA $d=1, D=0$	SERIE DIFERENCIADA $d=0, D=1$	SERIE DIFERENCIADA $d=1, D=1$
359	85.2	4.4450	12.6331	0.2632	-14.78	-2.02	1.54
360	39.9	3.6864	8.6075	-0.3575	-4.03	-2.49	-0.47
361	27.7	3.3214	7.0737	-0.6560	-1.53	-1.49	1.00
362	17.9	2.8848	5.5157	-1.0132	-1.56	-4.01	-2.52
363	15.3	2.7279	5.0204	-1.1416	-0.50	0.16	4.17
364	11.3	2.4248	4.1495	-1.3895	-0.87	0.12	-0.04
365	9.8	2.2824	3.7760	-1.5060	-0.37	-2.13	-2.25
366	46.6	3.8416	9.3327	-0.2305	5.56	-0.94	1.19
367	170.5	5.1387	17.5860	0.8307	8.25	3.15	4.09
368	230.3	5.4394	20.2099	1.0766	2.62	7.15	4.00
369	586	6.3733	30.7627	1.8407	10.55	10.76	3.60
370	466.6	6.1455	27.8048	1.6543	-2.96	0.39	-10.37
371	137.2	4.9214	15.8808	0.6529	-11.92	3.25	2.86
372	56.2	4.0289	10.2714	-0.0772	-5.61	1.66	-1.58
373	45.9	3.8265	9.2600	-0.2429	-1.01	2.19	0.52
374	26.1	3.2619	6.8447	-0.7047	-2.42	1.33	-0.86
375	19.7	2.9806	5.8342	-0.9348	-1.01	0.81	-0.52
376	14.2	2.6532	4.7958	-1.2026	-1.04	0.65	-0.17
377	14.7	2.6878	4.8991	-1.1743	0.10	1.12	0.48
378	87	4.4659	12.7627	0.2803	7.86	3.43	2.31
379	210.8	5.3509	19.4040	1.0043	6.64	1.82	-1.61
380	334.4	5.8123	23.9476	1.3817	4.54	3.74	1.92
381	439.9	6.0865	27.0837	1.6061	3.14	-3.68	-7.42
382	391.6	5.9702	25.7104	1.5109	-1.37	-2.09	1.58
383	105.6	4.6597	14.0182	0.4388	-11.69	-1.86	0.23
384	59	4.0775	10.5271	-0.0375	-3.49	0.26	2.12
385	35.2	3.5610	8.0548	-0.4600	-2.47	-1.21	-1.46
386	21.7	3.0773	6.1685	-0.8557	-1.89	-0.68	0.53
387	13.7	2.6174	4.6904	-1.2320	-1.48	-1.14	-0.47
388	8.6	2.1518	3.4522	-1.6129	-1.24	-1.34	-0.20
389	21.2	3.0540	6.0867	-0.8748	2.63	1.19	2.53
390	159.5	5.0720	17.0464	0.7761	10.96	4.28	3.10
391	130	4.8675	15.4808	0.6088	-1.57	-3.92	-8.21
392	294.4	5.6849	22.6062	1.2775	7.13	-1.34	2.58
393	535.1	6.2825	29.5499	1.7663	6.94	2.47	3.81
394	261.2	5.5653	21.4084	1.1796	-8.14	-4.30	-6.77
395	85.3	4.4462	12.6404	0.2641	-8.77	-1.38	2.92
396	50.3	3.9180	9.7069	-0.1680	-2.93	-0.82	0.56
ESTADÍSTICOS							
X	125.070	4.12	12.55	0.00	0.0045	0.0090	-0.0028
S ²	24045.993	1.49	59.36	1.00	29.34	18.42	18.95
S	155.068	1.22	7.70	1.00	5.417	4.292	4.354
g	2.198	0.20	0.87	0.20			
K	9.503	1.87	3.00	1.84			
C ₀	1.240	0.30	0.61	1.87			

Tabla 8. Serie normalizada, estandarizada y diferenciada para la Estación Agua Salada

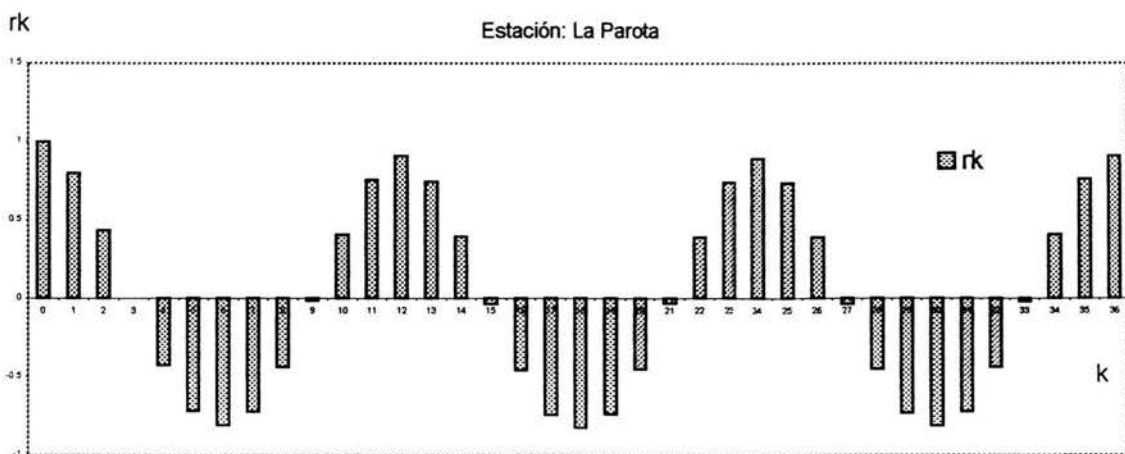
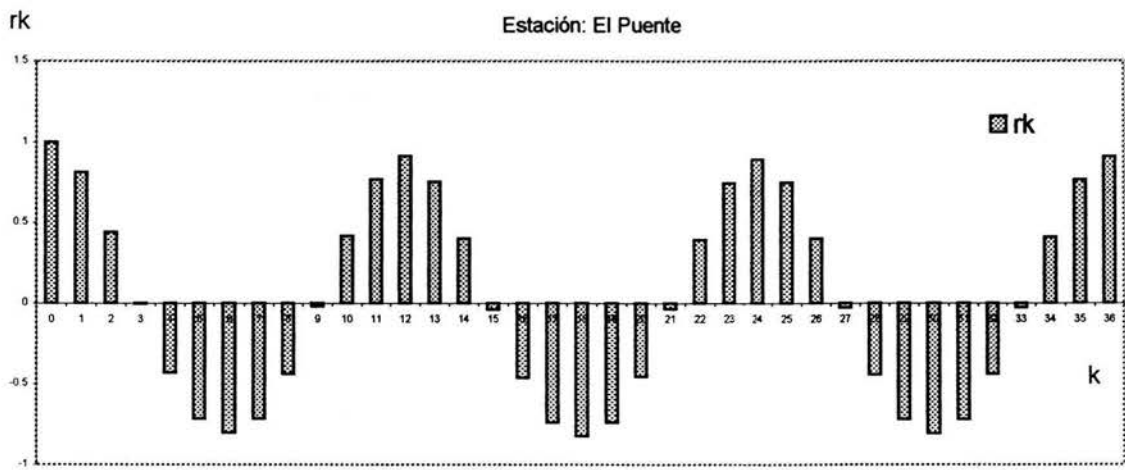
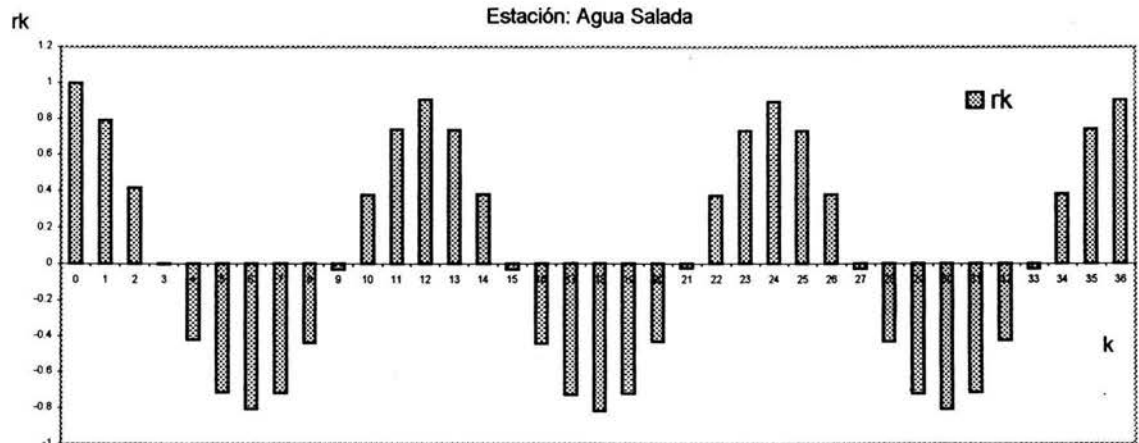


Figura 11 Correlograma (fac) de las series Z_t

4.3 Diferenciación e Identificación

En el paso anterior se encontró que las series en estudio presentan ciclicidad o periodicidad, por ello es necesario diferenciarlas, el orden en el cual fueron diferenciadas fue: $d = 0,1$ y $D = 0,1$, ya que esto nos permite eliminar la ciclicidad que presentan las series, siendo 1 el orden más grande de diferenciación. También se observó que las series en cuanto más diferenciadas eran (Fig.12, 13 y 14) más se eliminaba la ciclicidad, pero, al diferenciarlas se cuidó de no sobre diferenciar ya que esto nos lleva a perder información; las series solo se diferenciaron lo necesario para eliminar o atenuar la periodicidad, considerando que la forma del correlograma ya no presenta ciclicidad o algún tipo de tendencia.

En las tablas 6, 7 y 8 se presenta sólo la última parte del registro de cada serie diferenciada para los siguientes procesos de diferenciación:

- ❖ $W_t : D = 1, d = 0$
- ❖ $W_t : D = 0, d = 1$
- ❖ $W_t : D = 1, d = 1$

Los modelos que aquí se utilizarán son los propuestos por autores como *Box y Jenkins 1970* y *Salas 1980*, estos modelos fueron ya antes ajustados a series mensuales y en algunos casos a series hidrológicas.

1. Modelo $(1,1,0) \times (0,0,1)_{12}$
2. Modelo $(2,0,0) \times (0,1,1)_{12}$
3. Modelo $(1,1,0) \times (0,1,1)_{12}$
4. Modelo $(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$
5. Modelo $(1,0,0) \times (0,1,1)_{12}$

Los modelos anteriores presentan un orden no mayor a 1 en el proceso de diferenciación, también existe una gran variedad de combinaciones de polinomios autorregresivos y de promedios móviles ya sea simples o estacionales, esto nos permitirá entender el comportamiento que presenta un Modelo ARIMA Multiplicativo en cuanto a series mensuales hidrológicas se refiere.

En este paso se ha logrado la eliminación total de cualquier tipo de componente como lo es la periodicidad, tendencia o saltos, es decir, las series ya son estacionarias, por lo que se podrá trabajar con los modelos antes mencionados en la obtención de sus parámetros.

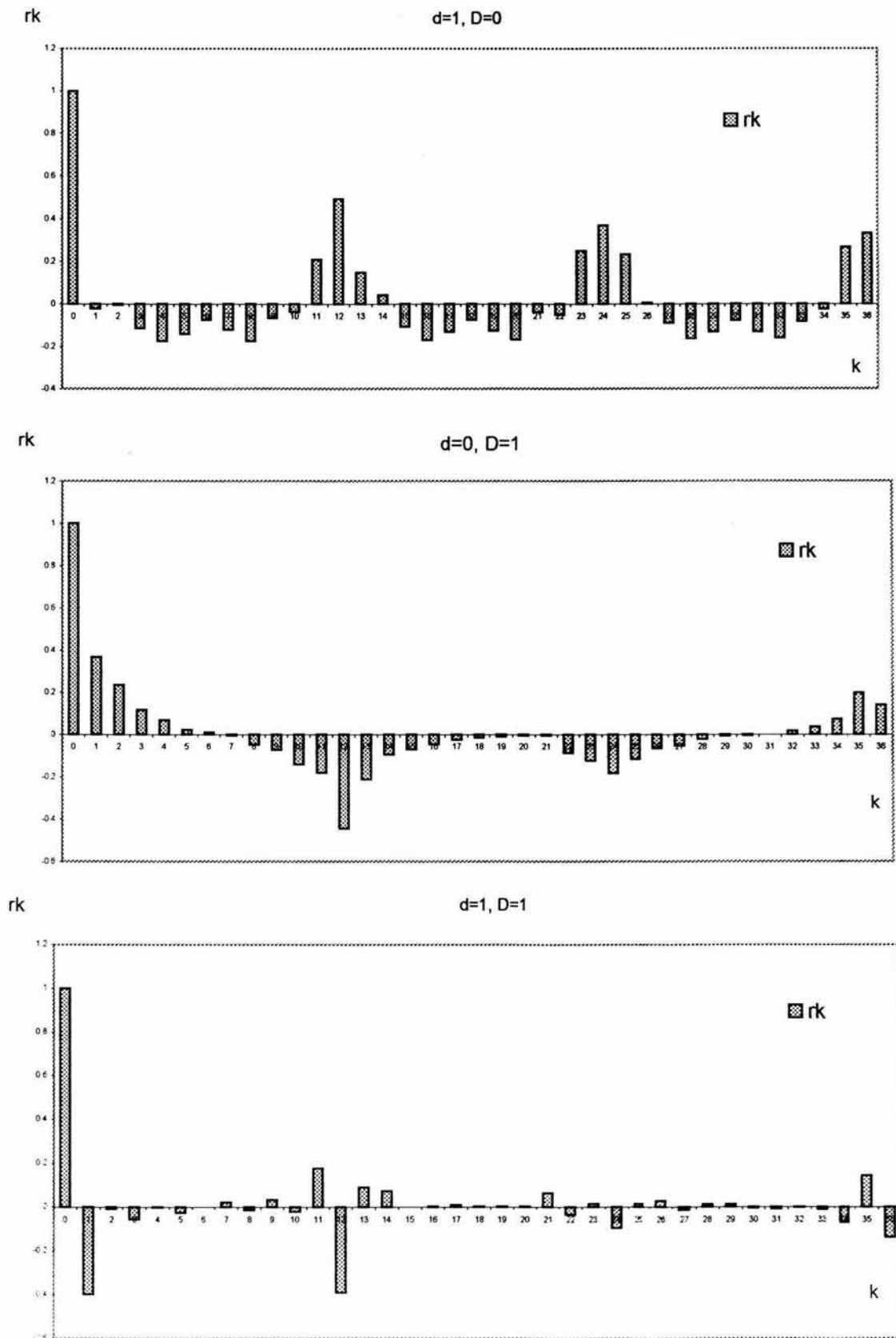


Figura 12. Correlograma de las series diferenciada en la estación El Puento

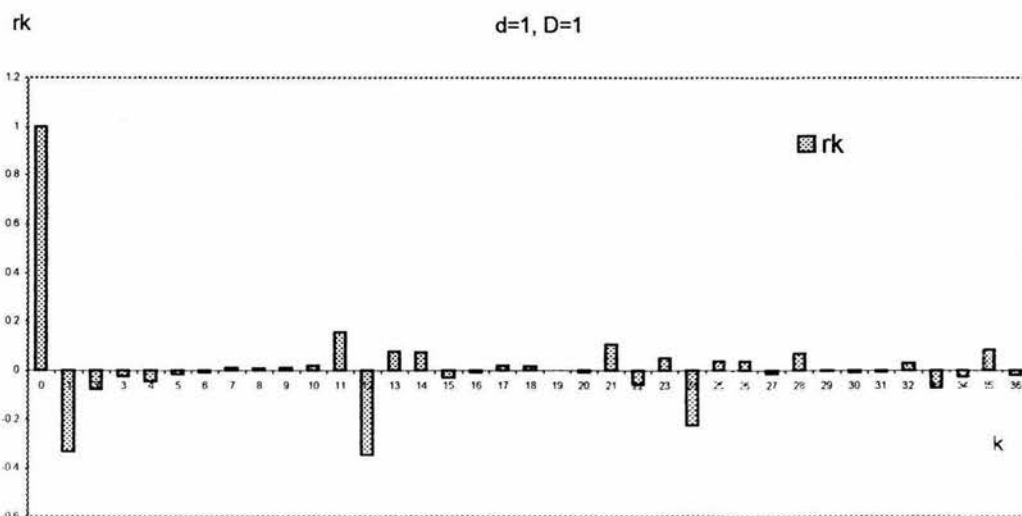
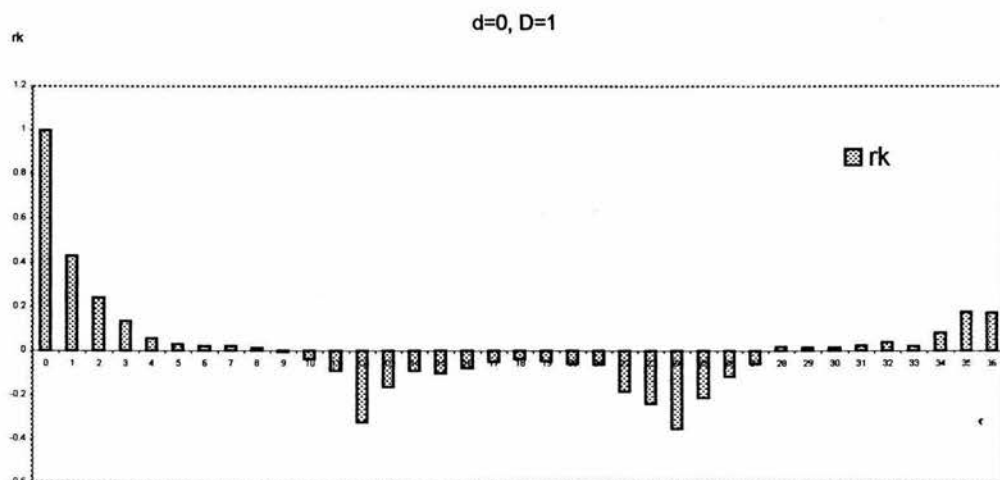
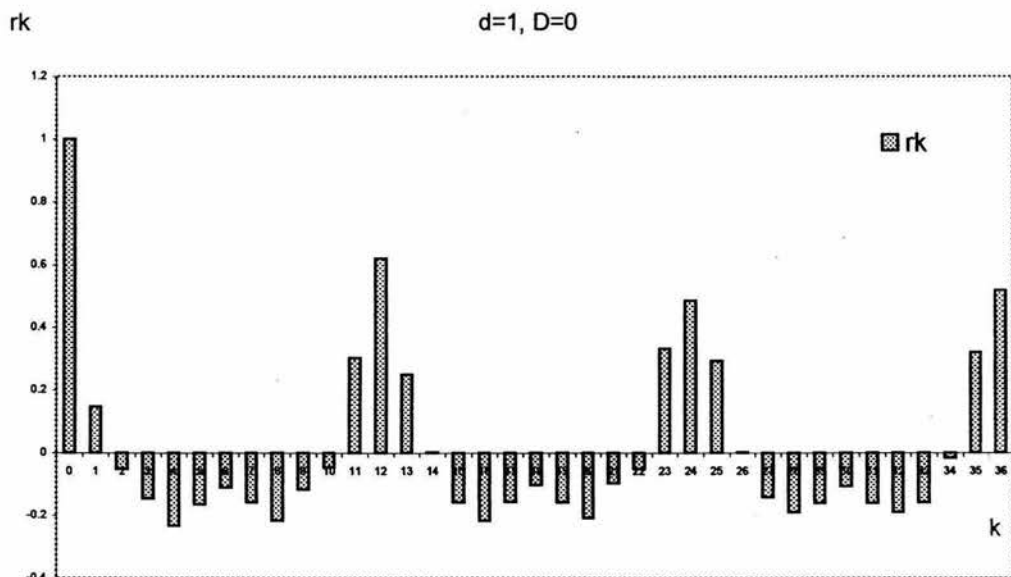


Figura 13 Correlograma de las series diferenciada en la estación La Parota

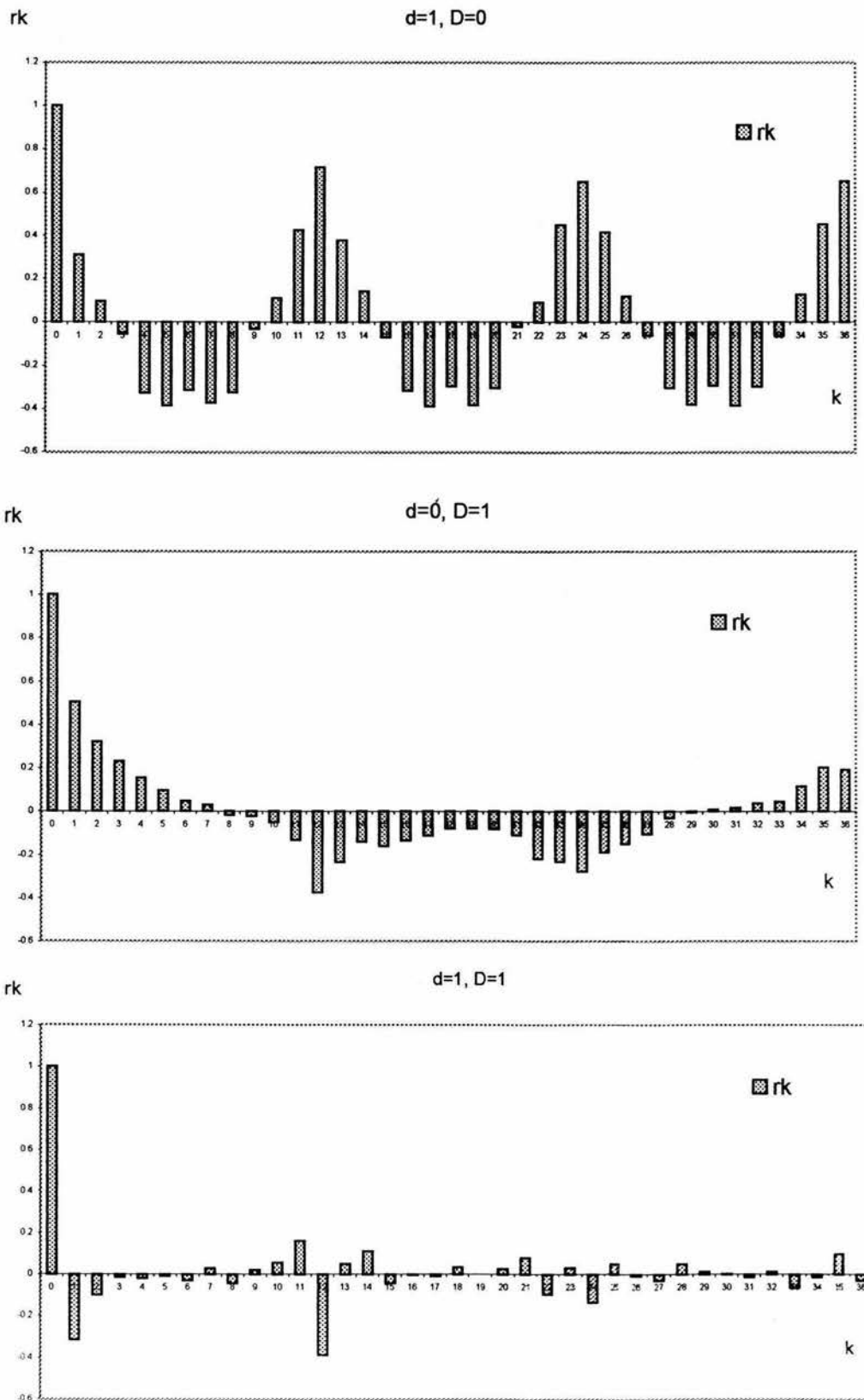


Figura 14. Correlograma de las series diferenciada en la estación Agua Salada

4.4 Obtención de Parámetros y Diagnóstico

Antes de calcular los parámetros de los modelos se debe obtener la expresión matemática de cada uno.

Con la ayuda de los polinomios autorregresivos de promedios móviles y de los operadores de diferencias se obtendrán los 5 modelos propuestos, utilizando el primer procedimiento expuesto en el capítulo dos.

1. Modelo (1,1,0) x (0,0,1)₁₂

$$\begin{aligned}
 (1 - \varphi_1 B)(1 - B)Z_t &= (1 - \Theta_1 B^{12})a_t \\
 (1 - \varphi_1 B)(Z_t - Z_{t-1}) &= (a_t - \Theta_1 a_{t-12}) \\
 Z_t - Z_{t-1} - \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_1 Z_{t-2} &= a_t - \Theta_1 a_{t-12} \\
 \therefore Z_t &= Z_{t-1} + \varphi_1 Z_{t-1} - \varphi_1 Z_{t-2} + a_t - \Theta_1 a_{t-12}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

2. Modelo (2,0,0) x (0,1,1)₁₂

$$\begin{aligned}
 (1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2)(1 - B^{12})Z_t &= (1 - \Theta_1 B^{12})a_t \\
 (1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2)(Z_t - Z_{t-12}) &= (a_t - \Theta_1 a_{t-12}) \\
 Z_t - Z_{t-12} - \varphi_1 Z_{t-1} - \varphi_2 Z_{t-2} + \varphi_1 Z_{t-13} + \varphi_2 Z_{t-14} &= a_t - \Theta_1 a_{t-12} \\
 \therefore Z_t &= Z_{t-12} + \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-2} - \varphi_1 Z_{t-13} - \varphi_2 Z_{t-14} + a_t - \Theta_1 a_{t-12}
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

3. Modelo (1,1,0) x (0,1,1)₁₂

$$\begin{aligned}
 (1 - \varphi_1 B)(1 - B^{12})(1 - B)Z_t &= (1 - \Theta_1 B^{12})a_t \\
 (1 - \varphi_1 B)(1 - B^{12})(Z_t - Z_{t-1}) &= (a_t - \Theta_1 a_{t-12}) \\
 (1 - \varphi_1 B)(Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13}) &= a_t - \Theta_1 a_{t-12} \\
 Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13} - \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_1 Z_{t-2} + \varphi_1 Z_{t-13} - \varphi_1 Z_{t-14} &= a_t - \Theta_1 a_{t-12} \\
 \therefore Z_t &= Z_{t-1} + Z_{t-12} - Z_{t-13} + \varphi_1 Z_{t-1} - \varphi_1 Z_{t-2} - \varphi_1 Z_{t-13} + \varphi_1 Z_{t-14} + a_t - \Theta_1 a_{t-12}
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

4. Modelo (0,1,1) x (0,1,1)₁₂

$$\begin{aligned}
 (1 - B^{12})(1 - B)Z_t &= (1 - \Theta_1 B^{12})(1 - \theta_1 B)a_t \\
 (1 - B^{12})(Z_t - Z_{t-1}) &= (1 - \Theta_1 B^{12})(a_t - \theta_1 a_{t-1}) \\
 Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13} &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \Theta_1 a_{t-12} + \Theta_1 \theta_1 a_{t-13} \\
 Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13} &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \Theta_1 a_{t-12} + \Theta_1 \theta_1 a_{t-13} \\
 \therefore Z_t &= Z_{t-1} + Z_{t-12} - Z_{t-13} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \Theta_1 a_{t-12} + \Theta_1 \theta_1 a_{t-13}
 \end{aligned}
 \tag{4.44}$$

5. Modelo (1,0,0) x (0,1,1)₁₂

$$\begin{aligned}
 (1 - \varphi_1 B)(1 - B^{12})Z_t &= (1 - \Theta_1 B^{12})a_t \\
 (1 - \varphi_1 B)(Z_t - Z_{t-12}) &= (a_t - \Theta_1 a_{t-12}) \\
 Z_t - Z_{t-12} - \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_1 Z_{t-13} &= a_t - \Theta_1 a_{t-12} \\
 \therefore Z_t &= Z_{t-12} + \varphi_1 Z_{t-1} - \varphi_1 Z_{t-13} + a_t - \Theta_1 a_{t-12}
 \end{aligned}
 \tag{4.45}$$

Método de Máxima Verosimilitud

Habiendo obtenido los modelos matemáticos, los parámetros de cada uno se calculan despejando el residual a_t y proponiendo valores de los parámetros dentro del círculo unitario, con la condición de que se obtenga el mínimo valor de la suma de los residuales Σa_t^2 , al obtener los parámetros mediante este procedimiento se arroja una serie de residuales a_t (ruido blanco) cuyo correlograma servirá para seleccionar el mejor modelo dentro de un conjunto de ellos, así también, para corroborar su independencia mediante la prueba de Anderson, ya que cada modelo debe arrojar residuales normales e independientes.

La obtención de los parámetros de los cinco modelos en estudio se hizo mediante el método anterior, considerando que la longitud de la serie influye en el proceso, primero se obtuvieron los parámetros utilizando toda la longitud de cada serie, después se quito un año de los registros y se obtuvieron los parámetros, por último se quitaron dos años de cada serie y se obtuvieron los parámetros, esto se puede ver en las tablas 9, 10 y 11.

Para la selección del mejor modelo se utilizaron las Pruebas de Akaike y de Anderson aplicada a los residuales (Figs.15 – 20), así también, se tomo como parámetro de selección el valor de la mínima suma de los residuales Σa_t^2 (Tablas 9,10 y 11).

El modelo que mejor se ajusto a cada serie en estudio fue el modelo **(2,0,0) x (0,1,1)₁₂**.

ESTACIÓN: AGUA SALADA						
MODELO	PARÁMETROS POR MÁX. VEROSIMILITUD				SUMA MIN. RESIDUALES $S(\theta, \phi, \Phi) = \sum a^2 t$	TEST ACI (p,q)
	θ_1	ϕ_1	ϕ_2	θ_1		
(1,1,0)x(0,0,1) ₁₂	-0.4820	0.2012			143.5836	-396.74
(2,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9538	0.4285	0.1285		42.4531	-879.98
(1,1,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9498	-0.3358			51.0810	-808.01
(0,1,1)x(0,1,1) ₁₂	0.961			0.5494	47.5393	-836.61
(1,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.949	0.495			42.9750	-877.49
ESTACIÓN: EL PUENTE						
MODELO	PARÁMETROS POR MÁX. VEROSIMILITUD				SUMA MIN. RESIDUALES $S(\theta, \phi, \Phi) = \sum a^2 t$	TEST ACI (p,q)
	θ_1	ϕ_1	ϕ_2	θ_1		
(1,1,0)x(0,0,1) ₁₂	-0.4639	0.2923			98.4977	-694.68
(2,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.921	0.495	0.102		32.9005	-1129.37
(1,1,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9093	-0.2712			38.6743	-1066.88
(0,1,1)x(0,1,1) ₁₂	0.911			0.462	37.0645	-1083.79
(1,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.901	0.576			32.9811	-1130.46
ESTACIÓN: LA PAROTA						
MODELO	PARÁMETROS POR MÁX. VEROSIMILITUD				SUMA MIN. RESIDUALES $S(\theta, \phi, \Phi) = \sum a^2 t$	TEST ACI (p,q)
	θ_1	ϕ_1	ϕ_2	θ_1		
(1,1,0)x(0,0,1) ₁₂	-0.5175	0.2502			145.8863	-816.61
(2,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.8975	0.4801	0.1012		47.6823	-1474.32
(1,1,0)x(0,1,1) ₁₂	0.8985	-0.3215			56.6021	-1373.32
(0,1,1)x(0,1,1) ₁₂	0.8975			0.5235	53.1255	-1410.68
(1,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.8952	0.5276			48.2589	-1467.40

Tabla.9 Obtención de los parámetros de cada modelo ARIMA Multiplicativo

ESTACIÓN: AGUA SALADA						
MODELO	PARÁMETROS POR MÁX. VEROSIMILITUD				SUMA MIN. RESIDUALES $S(\theta, \Theta, \phi, \Phi) = \sum a^2 t$	TEST ACI (p,q)
	Θ_1	ϕ_1	ϕ_2	θ_1		
(1,1,0)x(0,0,1) ₁₂	-0.5520	0.1748			137.3773	-389.72
(2,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9511	0.4451	0.1168		41.0204	-854.52
(1,1,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9531	-0.3365			49.0554	-787.16
(0,1,1)x(0,1,1) ₁₂	0.9612			0.5412	45.9921	-812.02
(1,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9492	0.5028			41.6085	-851.51

ESTACIÓN: EL PUENTE						
MODELO	PARÁMETROS POR MÁX. VEROSIMILITUD				SUMA MIN. RESIDUALES $S(\theta, \Theta, \phi, \Phi) = \sum a^2 t$	TEST ACI (p,q)
	Θ_1	ϕ_1	ϕ_2	θ_1		
(1,1,0)x(0,0,1) ₁₂	-0.4751	0.2906			96.7424	-989.33
(2,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9061	0.5365	0.0789		32.0944	-1612.08
(1,1,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9079	-0.2696			37.7789	-1521.66
(0,1,1)x(0,1,1) ₁₂	0.9062			0.4335	36.2733	-1544.74
(1,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9052	0.5835			32.2533	-1611.61

ESTACIÓN: LA PAROTA						
MODELO	PARÁMETROS POR MÁX. VEROSIMILITUD				SUMA MIN. RESIDUALES $S(\theta, \Theta, \phi, \Phi) = \sum a^2 t$	TEST ACI (p,q)
	Θ_1	ϕ_1	ϕ_2	θ_1		
(1,1,0)x(0,0,1) ₁₂	-0.5288	0.2175			143.4085	-797.88
(2,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.8951	0.4649	0.1132		47.4183	-1435.61
(1,1,0)x(0,1,1) ₁₂	0.8951	-0.3198			56.3565	-1335.86
(0,1,1)x(0,1,1) ₁₂	0.8962			0.5212	52.9053	-1372.37
(1,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.8942	0.5268			47.9870	-1428.96

Tabla.10 Obtención de los parámetros para cada modelo ARIMA Multiplicativo

ESTACIÓN: AGUA SALADA						
MODELO	PARÁMETROS POR MÁX. VEROSIMILITUD				SUMA MIN. RESIDUALES $S(\theta, \phi, \Phi) = \sum a^2 t$	TEST ACI (p,q)
	θ_1	ϕ_1	ϕ_2	θ_1		
(1,1,0)x(0,0,1) ₁₂	-0.5459	0.1728			135.2691	-371.32
(2,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9521	0.4401	0.1132		40.8102	-818.13
(1,1,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9527	-0.3349			48.8954	-751.87
(0,1,1)x(0,1,1) ₁₂	0.9613			0.5386	45.8074	-776.22
(1,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9485	0.4969			41.3601	-815.67

ESTACIÓN: EL PUENTE						
MODELO	PARÁMETROS POR MÁX. VEROSIMILITUD				SUMA MIN. RESIDUALES $S(\theta, \phi, \Phi) = \sum a^2 t$	TEST ACI (p,q)
	θ_1	ϕ_1	ϕ_2	θ_1		
(1,1,0)x(0,0,1) ₁₂	-0.4741	0.2869			94.8114	-967.43
(2,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9068	0.5239	0.0922		31.7664	-1571.43
(1,1,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9106	-0.2801			37.3124	-1484.21
(0,1,1)x(0,1,1) ₁₂	0.9117			0.4434	35.7563	-1507.95
(1,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.9104	0.5815			31.9483	-1570.61

ESTACIÓN: LA PAROTA						
MODELO	PARÁMETROS POR MÁX. VEROSIMILITUD				SUMA MIN. RESIDUALES $S(\theta, \phi, \Phi) = \sum a^2 t$	TEST ACI (p,q)
	θ_1	ϕ_1	ϕ_2	θ_1		
(1,1,0)x(0,0,1) ₁₂	-0.5266	0.2196			141.0525	-778.66
(2,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.8911	0.4739	0.1092		46.4985	-1404.78
(1,1,0)x(0,1,1) ₁₂	0.8912	-0.3221			55.1807	-1307.98
(0,1,1)x(0,1,1) ₁₂	0.8941			0.5149	51.9085	-1342.62
(1,0,0)x(0,1,1) ₁₂	0.8901	0.5331			47.0754	-1398.00

Tabla.11 Obtención de los parámetros de cada modelo ARIMA Multiplicativo

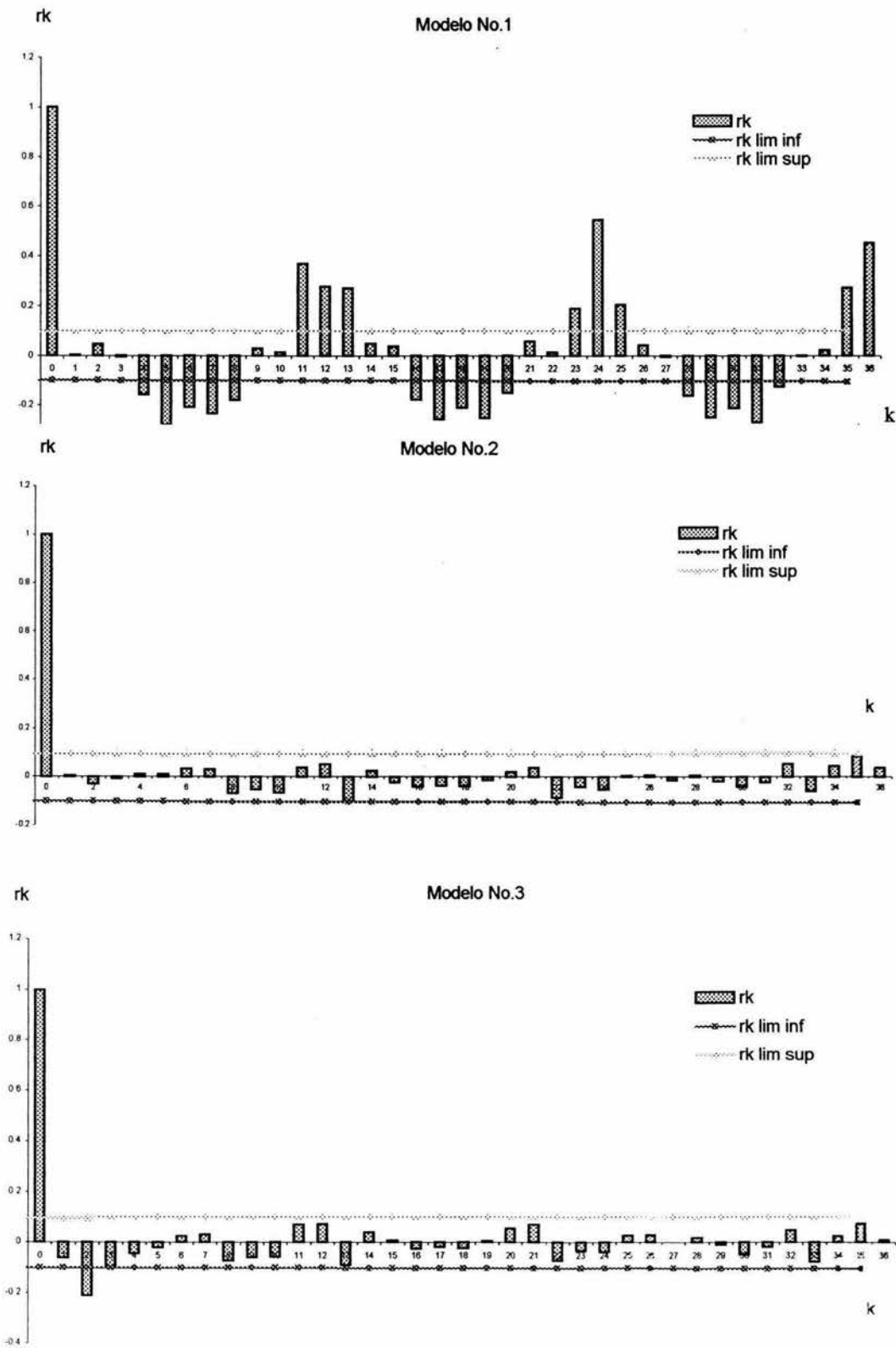


Figura.15 Correlograma de la serie a_t para la estación La Parota

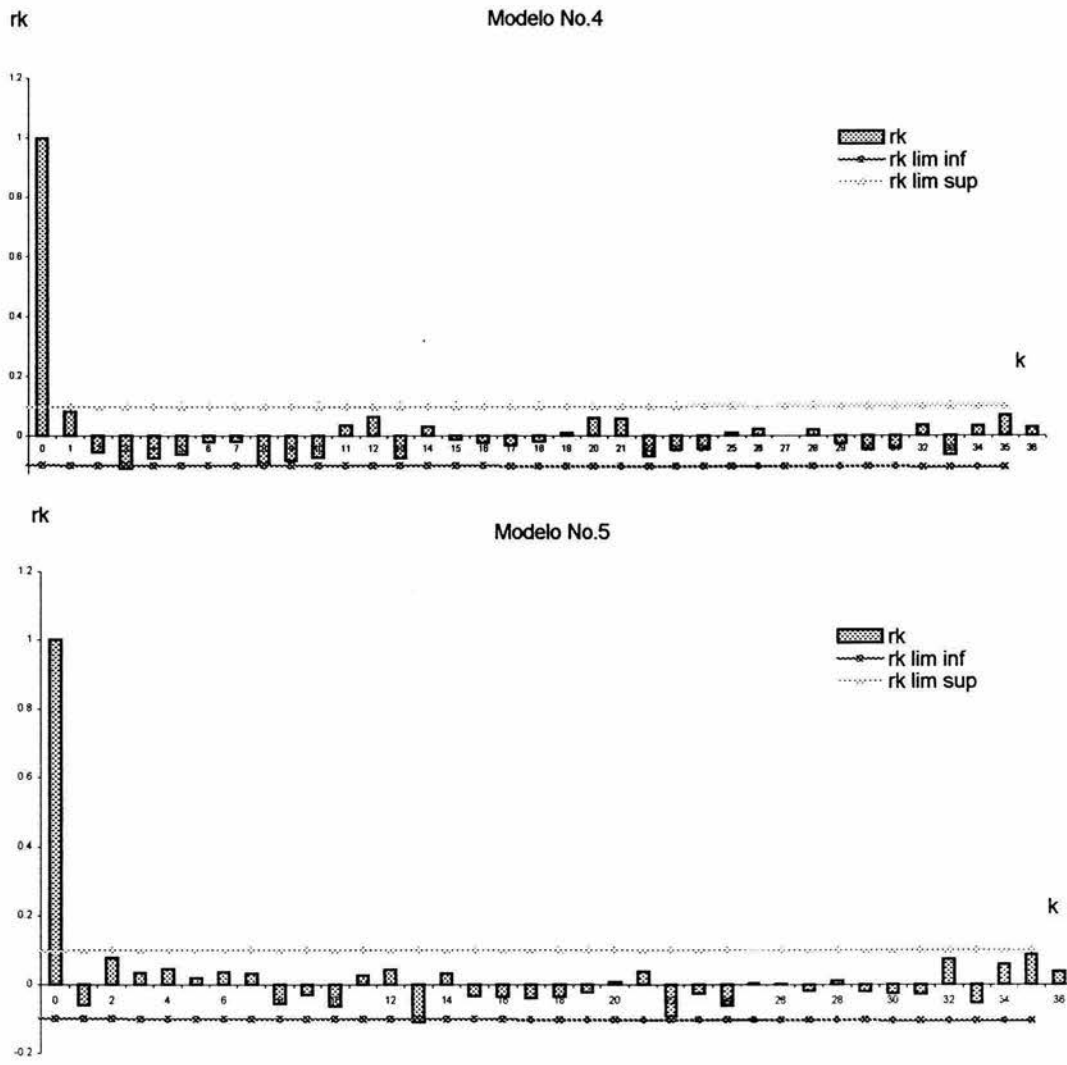


Figura.16 Correlograma de la serie a_t para la estación La Parota

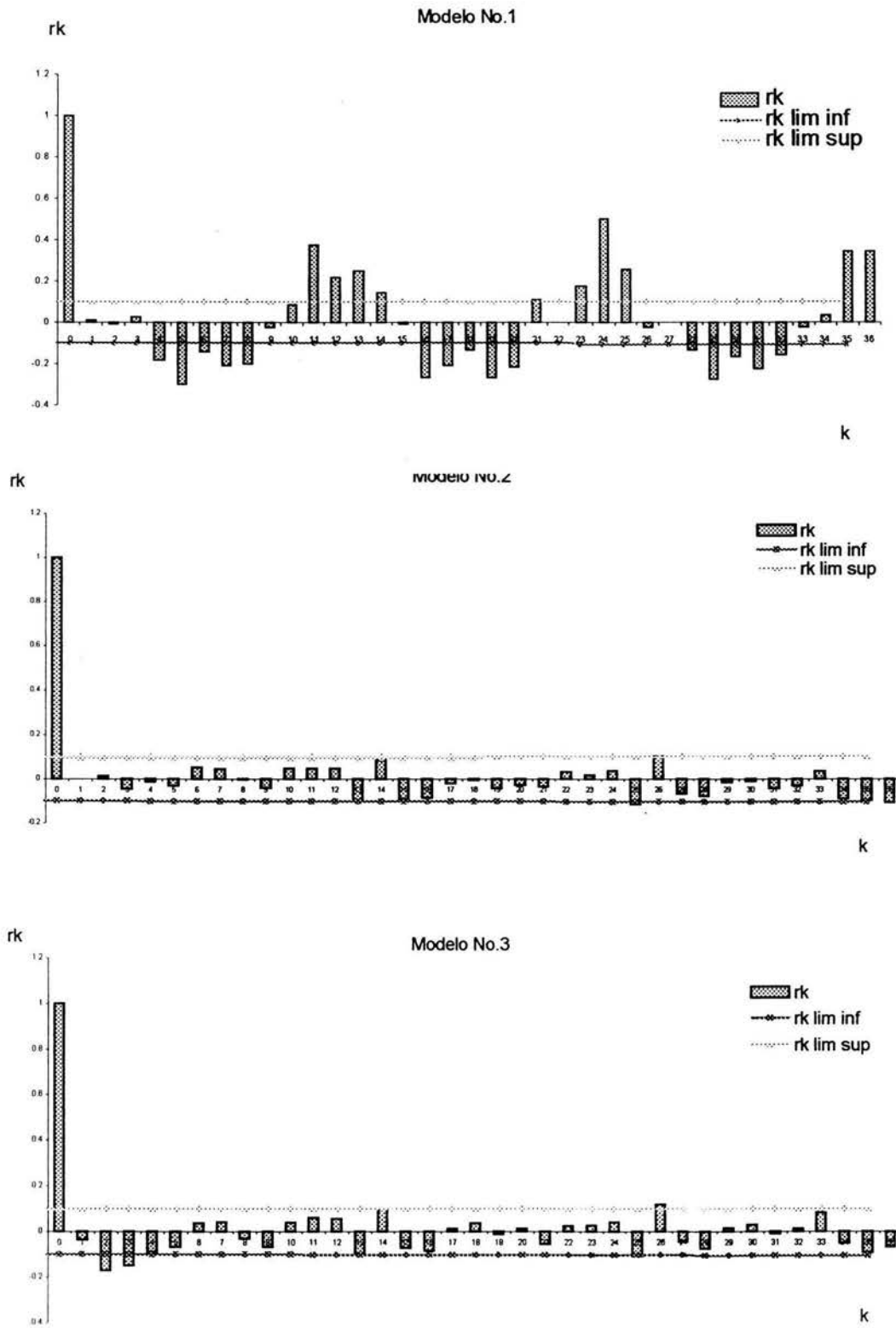


Figura.17 Correlograma de la serie a_t para la estación El Puente

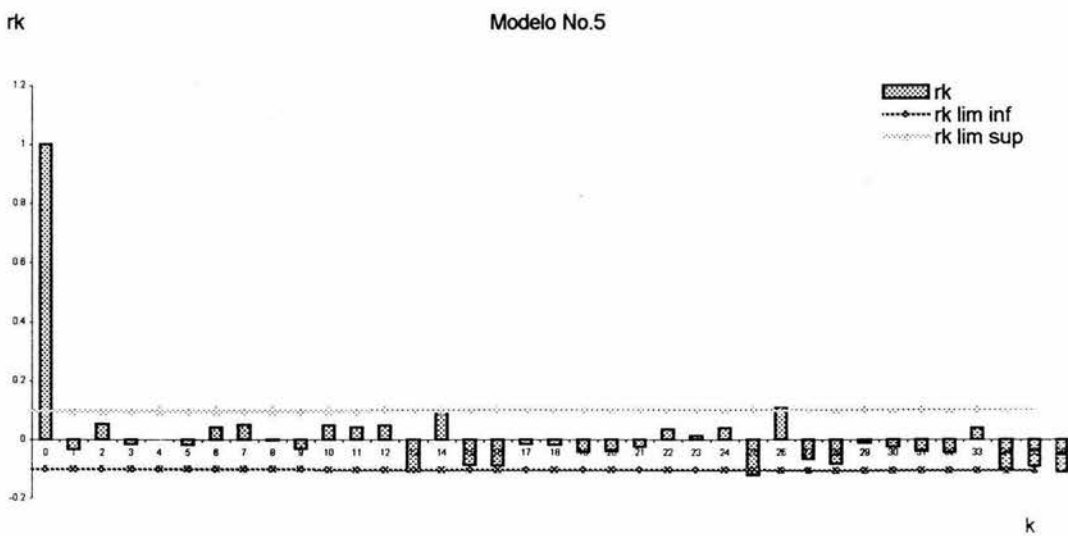
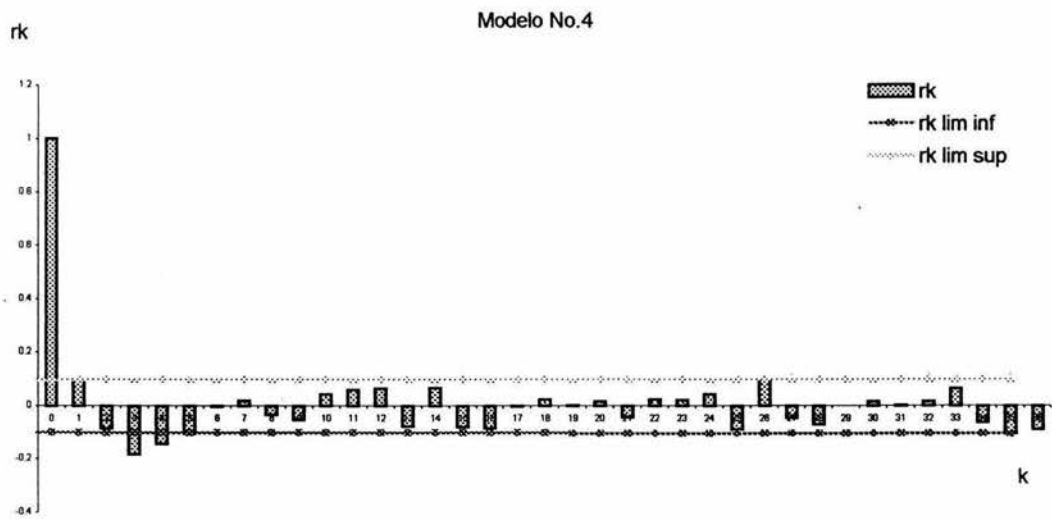


Figura.18 Correlograma de la serie a_t para la estación El Puente

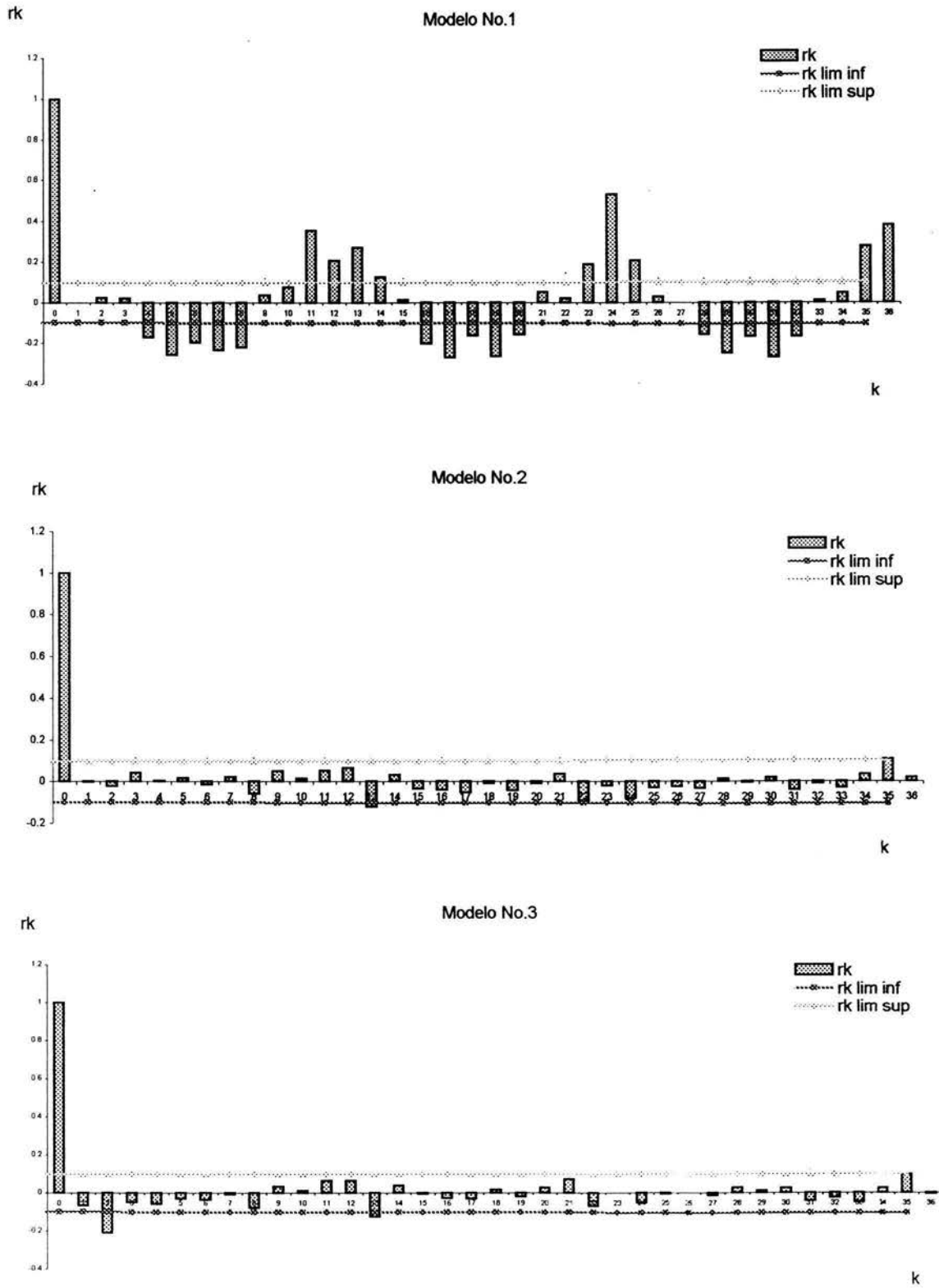


Figura.19 Correlograma de la serie a_t para la estación Agua Salada

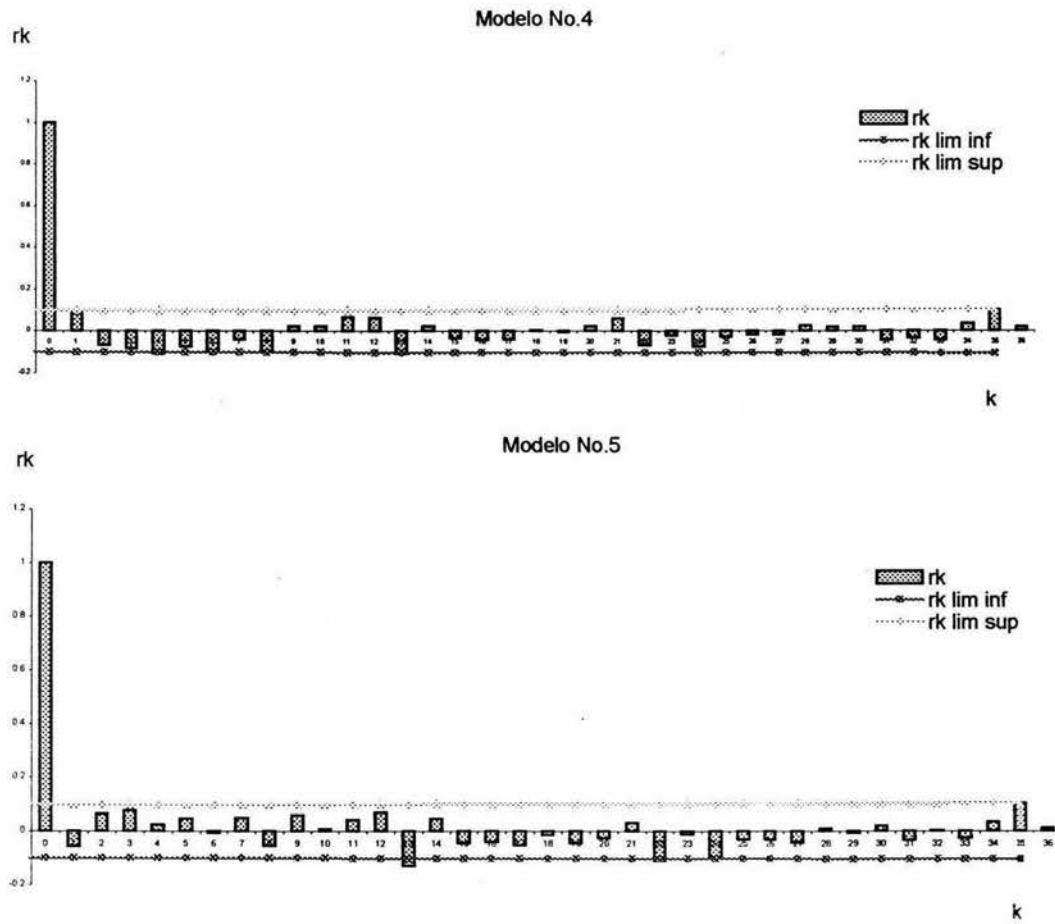


Figura.20 Correlograma de la serie a_t para la estación Agua Salada

4.5 Pronóstico

Antes de realizar un pronóstico o predecir el valor de Z_t se debe revisar el modelo y seleccionar el tipo de pronóstico, esto es, si será pronóstico en tiempo real o pronóstico actualizado.

Pronóstico en tiempo real

En este se usan datos vigentes para recalibrar el modelo, es decir, se vuelven a estimar los parámetros con base en las nuevas observaciones para cada nuevo pronóstico.

Pronóstico actualizado

Se hace el pronóstico sin cambiar la serie de tiempo dada, esto es, no se recalibran los parámetros y se mantienen constantes mientras se pronostican los valores Z_t y Z_{t+n}

En esta tesis se trabajo con el pronostico en tiempo real ya que es el método más exacto de los dos procedimientos anteriores, ya que siempre se trabaja con valores reales.

Revisión

Ya seleccionado el tipo de pronóstico, se debe verificar si el modelo es o no representativo del fenómeno observado, revisándose con el pronóstico que este arroje y compararlo con un valor verdadero. Por ello se reviso el modelo seleccionado en 60 ocasiones para cada estación en estudio.

El modelo ARIMA (2,0,0) X (0,1,1)₁₂ fue comparado con el modelo ARMA (1,1), para verificar su efectividad. En las figuras 21 y 22 se ve el comportamiento del modelo ARIMA Multiplicativo comparado con el modelo ARMA y con el valor registrado, esto permitió corroborar que el modelo ARIMA da mejores resultados a largo plazo que el modelo ARMA sin considerar los picos donde el modelo ARMA es mejor y que guarda un margen de error muy pequeño respecto al valor registrado en cada estación. Los valores pronosticados junto con sus parámetros tanto para el modelo ARIMA(2,0,0) X (0,1,1)₁₂ y el modelo ARMA(1,1) se ven en las tablas 12 a 17.

El modelo ARIMA y el modelo ARMA empleados para pronosticar fueron los siguientes:

Modelo ARIMA Multiplicativo (2,0,0) x (0,1,1)₁₂

$$Z_t = Z_{t-12} + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} - \phi_1 Z_{t-13} - \phi_2 Z_{t-14} + a_t - \Theta_1 a_{t-12} \quad 4.51$$

Modelo ARMA (1,1)

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad 4.52$$

PRONÓSTICO REALIZADO CON EL MODELO ARMA(1,1)

ESTACIÓN: AGUA SALADA						
T	ϕ	θ	ϵ_t^2	σ_ϵ^2	PRONÓSTICO	Valor Registrado
517	0.6683	-0.4921	97.845	0.292	52.755	36.3
518	0.6675	-0.4896	98.179	0.292	35.871	21.6
519	0.6693	-0.4912	98.434	0.292	23.694	16.2
520	0.6696	-0.4911	98.478	0.291	20.757	11
521	0.6735	-0.4866	98.471	0.290	14.075	14.8
522	0.6703	-0.4901	98.376	0.289	24.013	210.1
523	0.6645	-0.4979	101.540	0.298	404.603	263.2
524	0.6625	-0.4918	101.518	0.297	130.418	465.3
525	0.6728	-0.4828	102.058	0.298	436.822	284.8
526	0.6678	-0.4782	101.992	0.296	140.087	595
527	0.6762	-0.4656	102.638	0.297	552.556	115.8
528	0.6693	-0.4568	104.469	0.302	46.610	65.5
529	0.6719	-0.4538	104.846	0.302	74.589	39.5
530	0.6718	-0.4512	105.379	0.303	34.310	48.5
531	0.6728	-0.4479	105.750	0.303	61.030	14.5
532	0.6762	-0.4404	107.016	0.306	12.301	10.8
533	0.6776	-0.4412	106.717	0.304	17.826	20.1
534	0.6765	-0.4399	106.781	0.303	30.271	56.2
535	0.6741	-0.4419	107.341	0.304	75.629	112.2
536	0.6738	-0.4435	107.671	0.304	109.248	91.2
537	0.6749	-0.4445	107.963	0.304	73.689	225.3
538	0.6762	-0.4423	108.758	0.305	241.630	452.1
539	0.6765	-0.4447	108.499	0.304	312.227	85.2
540	0.6678	-0.4505	109.913	0.307	42.771	39.9
541	0.6721	-0.4464	110.186	0.307	44.434	27.7
542	0.6686	-0.4456	110.514	0.307	29.162	17.9
543	0.6692	-0.4503	110.667	0.307	21.584	15.3
544	0.6696	-0.4481	110.657	0.306	20.678	11.3
545	0.6718	-0.4476	110.623	0.305	14.963	9.8
546	0.6758	-0.4486	110.367	0.303	14.633	46.6
547	0.6713	-0.4478	111.559	0.306	84.857	170.5
548	0.6716	-0.4511	111.966	0.306	165.568	230.3
549	0.6689	-0.4532	111.973	0.305	171.823	586
550	0.6757	-0.4528	112.226	0.305	488.111	466.6
551	0.6738	-0.4512	111.684	0.303	236.019	137.2
552	0.6719	-0.4525	112.050	0.303	82.476	56.2
553	0.6693	-0.4549	112.450	0.303	48.593	45.9
554	0.6722	-0.4521	112.739	0.303	49.155	26.1
555	0.6691	-0.4561	113.164	0.303	25.901	19.7
556	0.6732	-0.4546	113.256	0.303	25.183	14.2
557	0.6738	-0.4552	113.348	0.302	17.577	14.7
558	0.6751	-0.4532	113.264	0.301	21.467	87
559	0.6678	-0.4571	114.852	0.305	145.677	210.8
560	0.6714	-0.4559	114.929	0.304	165.539	334.4
561	0.6725	-0.4572	114.969	0.303	263.878	439.9
562	0.6722	-0.4584	114.653	0.302	291.145	391.6
563	0.6762	-0.4545	114.319	0.300	245.450	105.6
564	0.6698	-0.4585	115.033	0.301	60.231	59
565	0.6719	-0.4582	115.334	0.301	59.281	35.2
566	0.6721	-0.4578	115.754	0.301	33.309	21.7
567	0.6709	-0.4585	115.959	0.301	25.109	13.7
568	0.6752	-0.4561	116.051	0.301	16.924	8.6
569	0.6768	-0.4551	115.884	0.299	11.906	21.2
570	0.6738	-0.4585	116.182	0.299	38.879	159.5
571	0.6701	-0.4638	117.625	0.302	222.705	130
572	0.6662	-0.4621	118.003	0.303	78.928	294.4
573	0.6713	-0.4555	118.956	0.304	318.660	535.1
574	0.6731	-0.4574	118.482	0.302	333.322	261.2
575	0.6746	-0.4574	118.405	0.301	145.919	85.3
576	0.6752	-0.4485	118.894	0.302	60.336	50.3

Tabla. 14 Pronóstico realizado con el modelo AFMA(1 1)

PRONÓSTICO REALIZADO CON EL MODELO ARMA(1,1)

ESTACIÓN: ELPUNTE						
T	ϕ	θ	ϵ_t^2	σ_ϵ^2	PRONÓSTICO	Valor Registrado
517	0.709	-0.490	132.986	0.259	131.088	91.7
518	0.709	-0.491	133.347	0.259	87.048	65.9
519	0.707	-0.490	133.518	0.259	71.659	60.7
520	0.709	-0.492	133.583	0.258	71.357	54.3
521	0.709	-0.490	133.644	0.258	62.503	58
522	0.710	-0.491	133.658	0.258	72.101	146.9
523	0.707	-0.491	134.555	0.259	204.795	310.5
524	0.708	-0.493	134.820	0.259	301.339	566.2
525	0.711	-0.492	134.939	0.258	514.536	602.2
526	0.711	-0.494	134.535	0.257	426.410	642.6
527	0.713	-0.491	134.253	0.256	507.032	198.9
528	0.708	-0.490	135.566	0.258	113.974	132.5
529	0.708	-0.490	135.851	0.258	145.119	93.1
530	0.708	-0.489	136.302	0.259	84.553	62.5
531	0.711	-0.489	136.462	0.258	68.185	56.6
532	0.710	-0.487	136.495	0.258	67.241	47.4
533	0.710	-0.490	136.525	0.258	54.692	64
534	0.709	-0.488	136.616	0.257	86.678	114.4
535	0.710	-0.490	136.957	0.257	138.830	222.5
536	0.708	-0.489	137.425	0.258	244.582	195.3
537	0.708	-0.490	137.710	0.258	158.605	343.4
538	0.709	-0.488	138.458	0.259	385.425	773
539	0.712	-0.489	138.372	0.258	663.607	193.6
540	0.704	-0.493	140.498	0.262	96.349	126.4
541	0.705	-0.490	140.846	0.262	148.600	94.5
542	0.704	-0.487	141.314	0.262	85.287	61.3
543	0.705	-0.488	141.486	0.262	66.610	52.7
544	0.704	-0.489	141.500	0.262	62.720	42.5
545	0.707	-0.490	141.482	0.261	49.823	42
546	0.709	-0.488	141.305	0.260	54.835	76.7
547	0.706	-0.490	141.589	0.260	107.623	175
548	0.706	-0.490	142.131	0.260	207.603	361
549	0.705	-0.492	142.480	0.260	357.825	878.7
550	0.709	-0.490	142.641	0.260	797.828	739.6
551	0.709	-0.490	142.004	0.259	438.902	299.6
552	0.707	-0.493	142.257	0.259	199.061	149.8
553	0.705	-0.493	142.616	0.259	127.823	103.7
554	0.704	-0.494	142.900	0.259	102.317	63.7
555	0.706	-0.495	143.237	0.259	63.586	56.2
556	0.706	-0.493	143.242	0.259	69.161	45.8
557	0.707	-0.495	143.308	0.258	51.817	46
558	0.709	-0.492	143.183	0.258	59.934	101.1
559	0.706	-0.494	143.749	0.258	143.663	265.8
560	0.704	-0.496	144.348	0.259	297.785	450.3
561	0.707	-0.497	144.373	0.258	392.125	894.6
562	0.711	-0.495	144.367	0.258	786.102	752.5
563	0.709	-0.496	143.722	0.256	452.461	214.4
564	0.705	-0.499	144.613	0.257	130.839	118.3
565	0.706	-0.499	144.874	0.257	118.423	93.4
566	0.707	-0.497	145.148	0.257	93.601	71.4
567	0.706	-0.499	145.348	0.257	76.142	55.1
568	0.707	-0.501	145.454	0.257	61.672	47.6
569	0.708	-0.498	145.420	0.256	57.339	74.5
570	0.707	-0.500	145.634	0.256	102.108	211
571	0.705	-0.501	146.495	0.257	268.657	215.2
572	0.705	-0.501	146.755	0.257	169.561	412.3
573	0.706	-0.498	147.623	0.259	466.943	579.7
574	0.706	-0.499	147.289	0.257	425.439	393.3
575	0.706	-0.499	147.214	0.257	279.589	155.5
576	0.706	-0.498	147.899	0.258	112.801	100.8

Tabla. 15 Pronóstico realizado con el modelo ARMA(1,1)

PRONÓSTICO REALIZADO CON EL MODELO ARMA(1,1)

ESTACIÓN: LA PAROTA						
T	ϕ	θ	ϵ_t^2	σ_ϵ^2	PRONÓSTICO	Valor Registrado
517	0.683	-0.484	145.129	0.282	158.145	106.9
518	0.683	-0.484	145.448	0.282	108.138	66.3
519	0.684	-0.484	145.627	0.282	74.327	46.2
520	0.685	-0.484	145.549	0.281	58.301	39.3
521	0.687	-0.484	145.278	0.280	54.096	49.7
522	0.687	-0.485	145.059	0.279	73.698	333.9
523	0.682	-0.487	147.394	0.283	589.892	573.2
524	0.682	-0.486	147.384	0.282	404.534	1095.3
525	0.686	-0.481	147.825	0.283	1034.409	906.4
526	0.686	-0.481	147.527	0.282	529.989	1314.4
527	0.690	-0.477	147.648	0.281	1129.105	279.5
528	0.685	-0.471	149.690	0.285	131.483	187.8
529	0.686	-0.468	150.090	0.285	226.385	105
530	0.687	-0.465	150.807	0.286	90.329	76.1
531	0.687	-0.464	150.867	0.285	95.274	69.1
532	0.688	-0.464	150.945	0.285	83.106	58.2
533	0.689	-0.464	150.941	0.284	72.535	77.5
534	0.689	-0.464	150.991	0.284	107.379	138.6
535	0.688	-0.465	151.300	0.284	174.921	283.3
536	0.688	-0.465	151.768	0.284	317.989	245.7
537	0.687	-0.465	152.103	0.284	204.420	551
538	0.688	-0.465	153.034	0.286	637.211	1249.1
539	0.688	-0.469	152.853	0.285	966.498	213.8
540	0.682	-0.468	155.245	0.289	103.888	127.7
541	0.682	-0.467	155.518	0.289	162.294	104.8
542	0.683	-0.465	155.870	0.289	105.176	67.9
543	0.684	-0.466	156.020	0.288	78.050	60.7
544	0.683	-0.466	155.983	0.288	78.800	47.9
545	0.685	-0.466	155.952	0.287	59.603	45.8
546	0.684	-0.469	155.727	0.286	64.400	119.1
547	0.685	-0.468	156.295	0.287	186.667	335.6
548	0.681	-0.470	156.830	0.287	373.943	566.2
549	0.684	-0.470	156.983	0.287	494.366	1439.3
550	0.688	-0.469	157.288	0.287	1281.545	1172.3
551	0.686	-0.470	156.752	0.286	646.349	396.6
552	0.685	-0.471	157.135	0.286	254.523	210.5
553	0.684	-0.471	157.453	0.286	189.711	142.6
554	0.685	-0.472	157.784	0.286	138.854	83.9
555	0.684	-0.472	158.103	0.286	87.134	64.5
556	0.685	-0.471	158.131	0.285	79.993	43.7
557	0.685	-0.472	158.143	0.285	53.018	36.9
558	0.689	-0.470	157.798	0.284	52.645	229.1
559	0.682	-0.474	160.065	0.287	438.271	589.8
560	0.682	-0.474	160.120	0.287	480.922	886.6
561	0.683	-0.474	160.162	0.287	738.632	1383.4
562	0.686	-0.473	159.823	0.285	1013.747	1167.4
563	0.687	-0.473	159.315	0.284	719.311	307.2
564	0.683	-0.473	160.213	0.285	180.034	163.2
565	0.682	-0.476	160.494	0.285	166.687	116.8
566	0.684	-0.474	160.818	0.285	117.213	79.7
567	0.682	-0.476	161.015	0.285	89.007	71.4
568	0.684	-0.476	161.063	0.285	89.158	59.2
569	0.683	-0.477	161.113	0.284	71.628	89.5
570	0.684	-0.475	161.273	0.284	128.224	369.9
571	0.682	-0.478	162.491	0.286	504.156	335.3
572	0.681	-0.477	162.859	0.286	234.256	708.2
573	0.684	-0.472	163.849	0.287	799.042	1141.9
574	0.683	-0.474	163.453	0.286	779.311	619.7
575	0.684	-0.475	163.455	0.285	389.640	213
576	0.682	-0.477	164.074	0.286	157.035	136.1

Tabla. 16 Pronóstico realizado con el modelo ARMA(1,1)

ESTACIÓN: AGUA SALADA						PRONÓSTICO	VALOR REGISTRADO
T	Θ	ϕ_1	ϕ_2	ϵ_t^2	σ_ϵ^2		
517	0.9374	0.4629	0.1062	34.8210	0.0474	35.2	36.3
518	0.9374	0.4646	0.1073	34.8218	0.0475	22.9	21.6
519	0.9371	0.4619	0.1076	34.8251	0.0472	16.3	16.2
520	0.9376	0.4619	0.1082	34.8251	0.0471	12.2	11.0
521	0.9376	0.4619	0.1078	34.8361	0.0470	14.5	14.8
522	0.9376	0.4619	0.1096	34.8366	0.0470	82.3	210.1
523	0.9376	0.4619	0.1071	35.7146	0.0485	290.9	263.2
524	0.9385	0.4605	0.1085	35.7245	0.0484	325.6	465.3
525	0.9381	0.4565	0.1184	35.8507	0.0484	478.7	284.8
526	0.9391	0.4501	0.1213	36.1196	0.0482	232.3	595.0
527	0.9463	0.4393	0.1338	36.9836	0.0495	125.4	115.8
528	0.9469	0.4370	0.1357	36.9896	0.0493	62.8	65.5
529	0.9463	0.4353	0.1357	36.9914	0.0492	39.5	39.5
530	0.9471	0.4375	0.1359	36.9914	0.0491	24.2	48.5
531	0.9458	0.4351	0.1447	37.4762	0.0497	23.6	14.5
532	0.9458	0.4266	0.1434	37.7094	0.0491	13.0	10.8
533	0.9448	0.4280	0.1405	37.7441	0.0489	14.2	20.1
534	0.9459	0.4265	0.1415	37.8637	0.0487	98.4	56.2
535	0.9466	0.4247	0.1389	38.1777	0.0485	166.3	112.2
536	0.9465	0.4304	0.1350	38.3314	0.0485	195.0	91.2
537	0.9481	0.4350	0.1417	38.9030	0.0494	201.1	225.3
538	0.9481	0.4338	0.1389	38.9161	0.0492	181.2	452.1
539	0.9524	0.4364	0.1236	39.7338	0.0499	107.6	85.2
540	0.9524	0.4313	0.1237	39.7878	0.0496	52.9	39.9
541	0.9514	0.4338	0.1202	39.8670	0.0494	30.5	27.7
542	0.9507	0.4350	0.1213	39.8764	0.0494	20.1	17.9
543	0.9519	0.4331	0.1223	39.8891	0.0492	14.3	15.3
544	0.9519	0.4325	0.1221	39.8941	0.0491	11.5	11.3
545	0.9516	0.4325	0.1229	39.8945	0.0490	14.9	9.8
546	0.9518	0.4350	0.1190	40.0707	0.0489	70.6	46.6
547	0.9518	0.4398	0.1212	40.2419	0.0491	136.0	170.5
548	0.9512	0.4354	0.1217	40.2925	0.0488	220.8	230.3
549	0.9519	0.4359	0.1201	40.2941	0.0486	321.4	586.0
550	0.9505	0.4369	0.1161	40.6546	0.0486	328.7	466.6
551	0.9509	0.4419	0.1142	40.7761	0.0486	121.2	137.2
552	0.9521	0.4428	0.1142	40.7915	0.0485	64.3	56.2
553	0.9511	0.4391	0.1127	40.8105	0.0482	37.2	45.9
554	0.9513	0.4391	0.1140	40.8535	0.0481	25.9	26.1
555	0.9510	0.4391	0.1142	40.8535	0.0480	17.9	19.7
556	0.9511	0.4391	0.1148	40.8625	0.0480	13.5	14.2
557	0.9519	0.4394	0.1173	40.8645	0.0480	16.6	14.7
558	0.9520	0.4396	0.1145	40.8805	0.0478	84.8	87.0
559	0.9521	0.4397	0.1169	40.8805	0.0478	190.0	210.8
560	0.9504	0.4398	0.1156	40.8915	0.0476	261.8	334.4
561	0.9524	0.4411	0.1141	40.9515	0.0475	399.4	439.9
562	0.9506	0.4410	0.1121	40.9615	0.0473	308.1	391.6
563	0.9516	0.4410	0.1165	41.0165	0.0474	109.2	105.6
564	0.9519	0.4412	0.1171	41.0175	0.0473	55.8	59.0
565	0.9509	0.4412	0.1181	41.0205	0.0473	37.4	35.2
566	0.9509	0.4412	0.1163	41.0244	0.0471	23.2	21.7
567	0.9524	0.4411	0.1171	41.0285	0.0470	16.1	13.7
568	0.9524	0.4411	0.1124	41.0565	0.0467	11.3	8.6
569	0.9504	0.4471	0.0998	41.1414	0.0465	12.7	21.2
570	0.9539	0.4470	0.0890	41.4285	0.0460	95.3	159.5
571	0.9554	0.4475	0.0881	41.6974	0.0460	258.7	130.0
572	0.9551	0.4476	0.0855	42.1765	0.0461	224.9	294.4
573	0.9554	0.4485	0.0854	42.2494	0.0460	362.0	535.1
574	0.9533	0.4483	0.0851	42.3994	0.0459	334.8	261.2
575	0.9530	0.4481	0.0848	42.4615	0.0458	92.1	85.3
576	0.9507	0.4483	0.0838	42.4695	0.0457	48.6	50.3

Tabla. 17 Pronóstico realizado con el modelo ARIMA (2 0 0)x(0,1,1)

ESTACIÓN: ELPUEENTE						PRONÓSTICO	VALOR REGISTRADO
T	Θ	ϕ_1	ϕ_2	ϵ_t^2	σ_ϵ^2		
517	0.9051	0.5257	0.1049	29.2755	0.0172	86.7	91.7
518	0.9051	0.5257	0.1044	29.2787	0.0171	63.8	65.9
519	0.9051	0.5258	0.1050	29.2797	0.0171	56.2	60.7
520	0.9051	0.5258	0.1046	29.2858	0.0171	49.7	54.3
521	0.9051	0.5258	0.1056	29.2935	0.0171	55.0	58.0
522	0.9051	0.5258	0.1058	29.2963	0.0170	131.6	146.9
523	0.9051	0.5258	0.1056	29.3084	0.0170	313.7	310.5
524	0.9051	0.5258	0.1057	29.3085	0.0170	448.1	566.2
525	0.9044	0.5251	0.1077	29.3631	0.0169	650.5	602.2
526	0.9044	0.5244	0.1081	29.3691	0.0169	434.0	642.6
527	0.9044	0.5227	0.1122	29.5228	0.0169	239.2	198.9
528	0.9045	0.5215	0.1120	29.5568	0.0169	132.7	132.5
529	0.9045	0.5215	0.1121	29.5568	0.0168	87.3	93.1
530	0.9045	0.5215	0.1119	29.5609	0.0168	64.4	62.5
531	0.9045	0.5215	0.1112	29.5619	0.0168	55.1	56.6
532	0.9045	0.5215	0.1112	29.5626	0.0167	48.1	47.4
533	0.9045	0.5215	0.1125	29.5627	0.0167	51.1	64.0
534	0.9045	0.5204	0.1118	29.6135	0.0167	137.9	114.4
535	0.9051	0.5210	0.1108	29.6485	0.0167	278.1	222.5
536	0.9054	0.5232	0.1081	29.6984	0.0166	374.6	195.3
537	0.9081	0.5257	0.1087	30.1202	0.0169	356.9	343.4
538	0.9081	0.5257	0.1096	30.1216	0.0169	298.2	773.0
539	0.9056	0.5235	0.0970	31.0178	0.0180	244.9	193.6
540	0.9056	0.5202	0.0986	31.0727	0.0180	132.4	126.4
541	0.9056	0.5202	0.0980	31.0749	0.0180	85.4	94.5
542	0.9056	0.5203	0.0984	31.0850	0.0179	64.4	61.3
543	0.9056	0.5204	0.0987	31.0874	0.0179	54.7	52.7
544	0.9056	0.5207	0.0976	31.0889	0.0179	46.1	42.5
545	0.9056	0.5209	0.0964	31.0958	0.0178	48.9	42.0
546	0.9061	0.5209	0.0970	31.1190	0.0178	107.6	76.7
547	0.9062	0.5229	0.0968	31.2333	0.0178	211.4	175.0
548	0.9062	0.5240	0.0972	31.2687	0.0178	298.8	361.0
549	0.9062	0.5240	0.0941	31.3047	0.0177	481.1	878.7
550	0.9084	0.5268	0.0885	31.6657	0.0179	571.7	739.6
551	0.9070	0.5309	0.0858	31.7311	0.0179	256.0	299.6
552	0.9067	0.5313	0.0870	31.7556	0.0179	164.6	149.8
553	0.9067	0.5313	0.0858	31.7645	0.0178	98.0	103.7
554	0.9070	0.5315	0.0864	31.7675	0.0178	68.4	63.7
555	0.9070	0.5315	0.0863	31.7726	0.0178	56.0	56.2
556	0.9070	0.5315	0.0864	31.7726	0.0177	47.5	45.8
557	0.9070	0.5315	0.0859	31.7740	0.0177	50.4	46.0
558	0.9070	0.5316	0.0868	31.7824	0.0177	110.0	101.1
559	0.9070	0.5316	0.0857	31.7896	0.0177	242.0	265.8
560	0.9065	0.5317	0.0850	31.7986	0.0176	389.6	450.3
561	0.9067	0.5327	0.0839	31.8196	0.0176	595.1	894.6
562	0.9067	0.5338	0.0839	31.9856	0.0176	605.7	752.5
563	0.9047	0.5350	0.0841	32.0322	0.0176	262.8	214.4
564	0.9047	0.5350	0.0824	32.0736	0.0175	136.5	118.3
565	0.9047	0.5350	0.0803	32.0942	0.0175	84.4	93.4
566	0.9047	0.5351	0.0814	32.1044	0.0175	63.0	71.4
567	0.9047	0.5351	0.0805	32.1202	0.0174	59.0	55.1
568	0.9047	0.5351	0.0808	32.1249	0.0174	47.3	47.6
569	0.9053	0.5362	0.0799	32.1249	0.0174	50.9	74.5
570	0.9054	0.5363	0.0793	32.2694	0.0174	141.7	211.0
571	0.9058	0.5377	0.0822	32.4276	0.0174	377.1	215.2
572	0.9059	0.5328	0.0783	32.7400	0.0174	374.2	412.3
573	0.9059	0.5316	0.0797	32.7493	0.0174	580.1	579.7
574	0.9059	0.5316	0.0797	32.7493	0.0174	487.2	393.3
575	0.9074	0.5316	0.0805	32.7944	0.0173	175.9	155.5
576	0.9070	0.5308	0.0836	32.8101	0.0173	107.6	100.8

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

ESTACIÓN: LA PAROTA						PRONÓSTICO	VALOR REGISTRADO
T	Θ	ϕ_1	ϕ_2	ϵ_t^2	σ_ϵ^2		
517	0.8896	0.4588	0.1355	42.9501	0.0302	122.7	105.0
518	0.8896	0.4588	0.1354	42.9743	0.0302	75.5	76.1
519	0.8896	0.4588	0.1350	42.9744	0.0301	62.0	69.1
520	0.8896	0.4588	0.1352	42.9862	0.0301	54.5	58.2
521	0.8896	0.4588	0.1349	42.9905	0.0300	61.6	77.5
522	0.8896	0.4588	0.1358	43.0429	0.0300	255.0	138.6
523	0.8919	0.4578	0.1326	43.4134	0.0300	403.0	283.3
524	0.8919	0.4618	0.1294	43.5372	0.0301	527.6	245.7
525	0.8949	0.4655	0.1355	44.1138	0.0306	532.3	551.0
526	0.8949	0.4646	0.1347	44.1151	0.0305	465.5	1249.1
527	0.8913	0.4647	0.1205	45.0718	0.0318	322.4	213.8
528	0.8905	0.4596	0.1227	45.2389	0.0316	155.6	127.7
529	0.8905	0.4610	0.1221	45.2779	0.0316	97.7	104.8
530	0.8906	0.4610	0.1214	45.2829	0.0315	71.8	67.9
531	0.8906	0.4610	0.1212	45.2861	0.0315	59.6	60.7
532	0.8907	0.4610	0.1216	45.2864	0.0315	51.0	47.9
533	0.8907	0.4610	0.1214	45.2904	0.0314	56.8	45.8
534	0.8907	0.4618	0.1208	45.3369	0.0314	182.5	119.1
535	0.8908	0.4633	0.1211	45.5187	0.0314	337.4	335.6
536	0.8908	0.4633	0.1214	45.5187	0.0313	517.1	566.2
537	0.8908	0.4634	0.1201	45.5270	0.0313	807.6	1439.3
538	0.8927	0.4642	0.1158	45.8601	0.0313	907.9	1172.3
539	0.8904	0.4668	0.1152	45.9244	0.0313	335.3	396.6
540	0.8914	0.4675	0.1167	45.9520	0.0313	200.9	210.5
541	0.8914	0.4676	0.1165	45.9542	0.0312	133.6	142.6
542	0.8914	0.4676	0.1178	45.9583	0.0312	87.5	83.9
543	0.8914	0.4676	0.1169	45.9601	0.0311	68.3	64.5
544	0.8909	0.4677	0.1165	45.9635	0.0311	53.4	43.7
545	0.8909	0.4677	0.1165	46.0040	0.0310	53.5	36.9
546	0.8909	0.4677	0.1160	46.1423	0.0310	155.6	229.1
547	0.8918	0.4673	0.1142	46.2918	0.0309	446.6	589.8
548	0.8919	0.4693	0.1120	46.3692	0.0309	734.5	886.6
549	0.8919	0.4695	0.1121	46.4046	0.0308	1132.9	1383.4
550	0.8914	0.4708	0.1124	46.4444	0.0308	968.6	1167.4
551	0.8901	0.4709	0.1136	46.4789	0.0308	339.6	307.2
552	0.8901	0.4710	0.1129	46.4890	0.0307	178.9	163.2
553	0.8896	0.4715	0.1120	46.4976	0.0307	115.9	116.8
554	0.8899	0.4706	0.1124	46.4976	0.0306	77.0	79.7
555	0.8899	0.4707	0.1124	46.4988	0.0306	64.7	71.4
556	0.8899	0.4707	0.1131	46.5084	0.0305	54.5	59.2
557	0.8911	0.4713	0.1129	46.5152	0.0305	59.9	89.5
558	0.8911	0.4715	0.1129	46.6758	0.0305	254.8	369.9
559	0.8911	0.4731	0.1152	46.8141	0.0305	639.6	335.3
560	0.8911	0.4687	0.1116	47.2286	0.0305	606.8	708.2
561	0.8911	0.4681	0.1122	47.2524	0.0304	977.7	1141.9
562	0.8911	0.4682	0.1120	47.2765	0.0304	880.7	619.7
563	0.8937	0.4682	0.1112	47.3978	0.0304	244.5	213.0
564	0.8937	0.4684	0.1113	47.4168	0.0303	139.0	136.1
565	0.8937	0.4684	0.1108	47.4173	0.0303	102.3	96.6
566	0.8937	0.4684	0.1117	47.4205	0.0302	69.3	64.8
567	0.8937	0.4684	0.1116	47.4250	0.0302	58.2	63.3
568	0.8937	0.4684	0.1116	47.4322	0.0302	50.8	44.9
569	0.8937	0.4684	0.1112	47.4475	0.0301	54.3	53.4
570	0.8937	0.4684	0.1116	47.4477	0.0301	201.5	173.4
571	0.8940	0.4684	0.1117	47.4702	0.0300	393.6	451.8
572	0.8941	0.4684	0.1114	47.4892	0.0300	651.5	596.7
573	0.8941	0.4684	0.1115	47.4969	0.0299	948.3	793.8
574	0.8941	0.4691	0.1097	47.5289	0.0299	698.7	476.3
575	0.8960	0.4731	0.1038	47.6773	0.0299	204.7	199.5
576	0.8953	0.4850	0.0823	47.7187	0.0300	131.9	128.1

ESTACIÓN: AÑO	T	AGUA SALADA			EL PUENTE			LA PAROTA			
		ARMA	ARIMA	VALOR REGISTRADO	ARMA	ARIMA	VALOR REGISTRADO	ARMA	ARIMA	VALOR REGISTRADO	
1996	517	52.75	35.23	36.3	131.09	88.69	91.7	158.14	122.67	106.9	
	518	35.87	22.89	21.6	87.05	63.78	65.9	108.14	75.46	66.3	
	519	23.69	16.31	16.2	71.66	56.15	60.7	74.33	61.98	46.2	
	520	20.76	12.21	11	71.36	49.71	54.3	58.30	54.52	39.3	
	521	14.07	14.47	14.8	62.50	55.01	58	54.10	61.63	49.7	
	522	24.01	82.30	210.1	72.10	131.61	146.9	73.70	254.99	333.9	
	523	404.60	290.87	263.2	204.80	313.70	310.5	589.89	402.98	573.2	
	524	130.42	325.80	465.3	301.34	448.12	566.2	404.53	527.59	1095.3	
	525	436.82	478.73	284.8	514.54	650.49	802.2	1034.41	532.27	906.4	
	526	140.09	232.33	595	426.41	434.01	642.8	529.99	485.48	1314.4	
	527	552.56	125.40	115.8	507.03	239.18	198.9	1129.10	322.37	279.5	
	528	46.61	62.84	65.5	113.97	132.69	132.5	131.48	155.63	187.8	
	529	74.59	39.48	39.5	145.12	87.33	93.1	226.39	97.67	105	
530	34.31	24.16	48.5	84.55	84.45	62.5	90.33	71.83	76.1		
531	61.03	23.59	14.5	68.18	55.13	58.6	95.27	59.57	69.1		
532	12.30	13.04	10.8	67.24	46.05	47.4	83.11	61.02	58.2		
533	17.83	14.23	20.1	54.69	51.11	64	72.53	58.82	77.5		
1997	534	30.27	98.40	56.2	86.68	137.92	114.4	107.38	162.49	138.6	
	535	75.63	166.26	112.2	138.83	278.08	222.5	174.92	337.43	283.3	
	536	109.25	195.02	91.2	244.58	374.59	195.3	317.99	517.13	245.7	
	537	73.69	201.09	225.3	158.61	356.87	343.4	204.42	807.57	551	
	538	241.63	181.23	452.1	385.43	298.20	773	637.21	907.91	1249.1	
	539	312.23	107.65	85.2	663.61	244.91	193.6	966.50	335.26	213.8	
	540	42.77	52.92	39.9	96.35	132.40	126.4	103.89	200.90	127.7	
	541	44.43	30.54	27.7	148.60	85.44	94.5	162.29	133.62	104.8	
	542	29.16	20.05	17.9	85.29	84.39	61.3	105.18	87.49	67.9	
	543	21.58	14.27	15.3	66.61	54.73	52.7	78.05	68.30	60.7	
	544	20.68	11.54	11.3	62.72	46.13	42.5	78.80	63.44	47.9	
	545	14.96	14.90	9.8	49.82	48.84	42	59.60	53.52	45.8	
	546	14.63	70.59	46.6	54.83	107.59	76.7	64.40	155.62	119.1	
1998	547	84.86	135.95	170.5	107.62	211.36	175	186.67	446.57	335.6	
	548	165.57	220.78	230.3	207.60	298.84	361	373.94	734.46	566.2	
	549	171.82	321.40	586	357.82	481.10	878.7	494.37	1132.66	1439.3	
	550	488.11	328.72	466.6	797.83	571.68	739.6	1281.55	968.64	1172.3	
	551	236.02	121.15	137.2	438.90	256.01	299.6	646.35	339.57	396.6	
	552	82.48	64.32	56.2	199.06	164.56	149.8	254.52	178.89	210.5	
	553	48.59	37.24	45.9	127.82	98.02	103.7	189.71	115.88	142.6	
	554	49.16	25.88	26.1	102.32	88.41	63.7	138.85	76.98	83.9	
	555	25.90	17.89	19.7	83.59	56.05	56.2	87.13	64.71	64.5	
	556	25.18	13.47	14.2	69.16	47.52	45.8	79.99	54.50	43.7	
	557	17.58	16.63	14.7	51.82	50.43	46	53.02	59.95	36.9	
	1999	558	21.47	84.75	87	59.93	110.00	101.1	52.65	254.83	229.1
		559	145.68	190.00	210	143.66	242.01	265.8	438.27	639.64	589.8
560		165.54	261.77	334.4	297.79	389.62	450.3	480.92	806.81	886.6	
561		263.88	399.41	439.9	392.12	595.14	894.6	738.63	977.74	1383.4	
562		291.14	308.08	391.6	786.10	605.68	752.5	1013.75	880.67	1167.4	
563		245.45	109.22	105.6	452.46	262.60	214.4	719.31	244.50	307.2	
564		60.23	55.82	59	130.84	136.53	118.3	180.03	138.99	163.2	
565		59.28	37.37	35.2	118.42	84.38	93.4	166.69	102.32	116.8	
566		33.31	23.19	21.7	93.60	82.98	71.4	117.21	66.29	79.7	
567		26.11	16.09	13.7	76.14	59.02	55.1	89.01	68.16	71.4	
568		16.92	11.27	8.6	61.67	47.26	47.6	89.16	60.80	59.2	
569		11.91	12.70	21.2	57.34	50.95	74.5	71.63	54.26	89.5	
2000		570	38.88	95.29	159.5	102.11	141.67	211	128.22	201.60	369.9
	571	222.70	256.72	130	268.66	377.12	215.2	504.16	393.65	335.3	
	572	78.93	224.93	294.4	169.56	374.21	412.3	234.26	651.48	708.2	
	573	318.66	362.04	535.1	466.94	580.13	579.7	799.04	948.25	1141.9	
	574	333.32	334.78	261.2	425.44	487.19	393.3	779.31	698.69	619.7	
	575	145.92	92.07	85.3	279.59	175.91	155.5	389.64	204.74	213	
	576	60.34	48.57	50.3	112.80	107.60	100.8	157.03	131.91	136.1	

Tabla. 18 Pronóstico realizado con el modelo ARIMA y ARMA

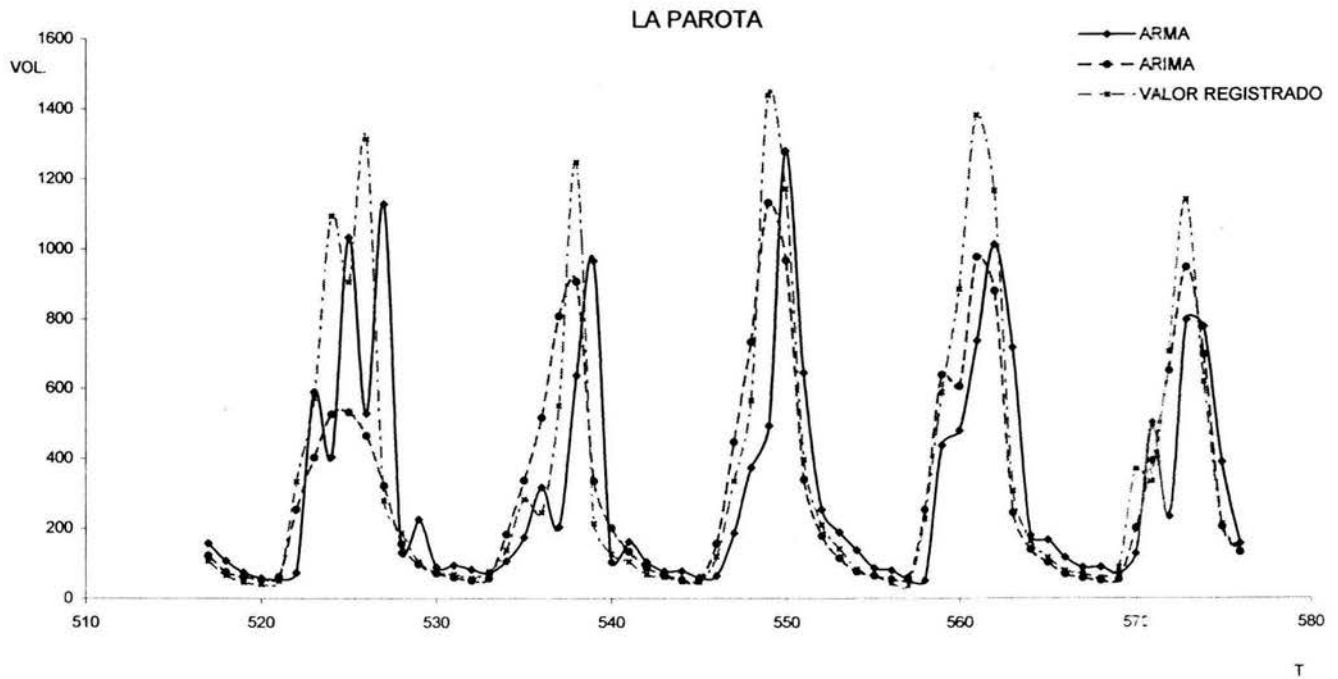
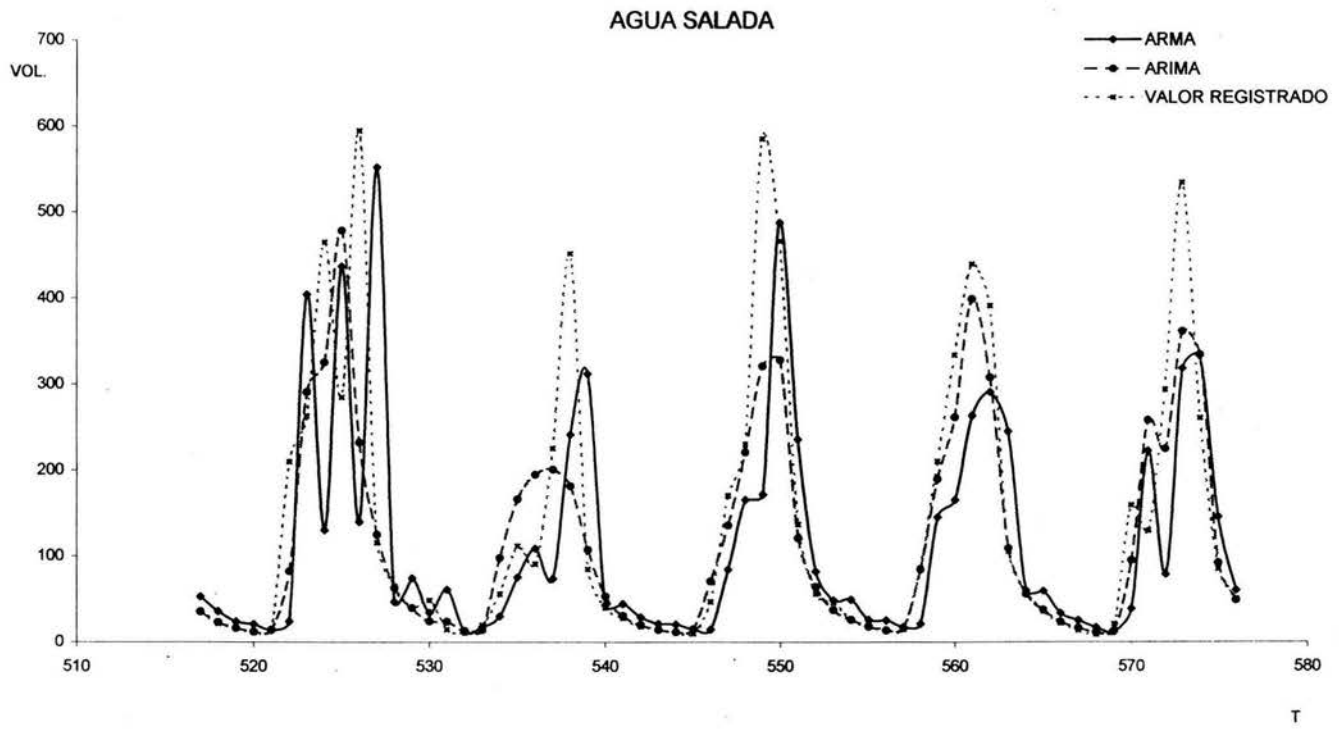


Figura. 22 Representación gráfica del pronóstico y de su valor real

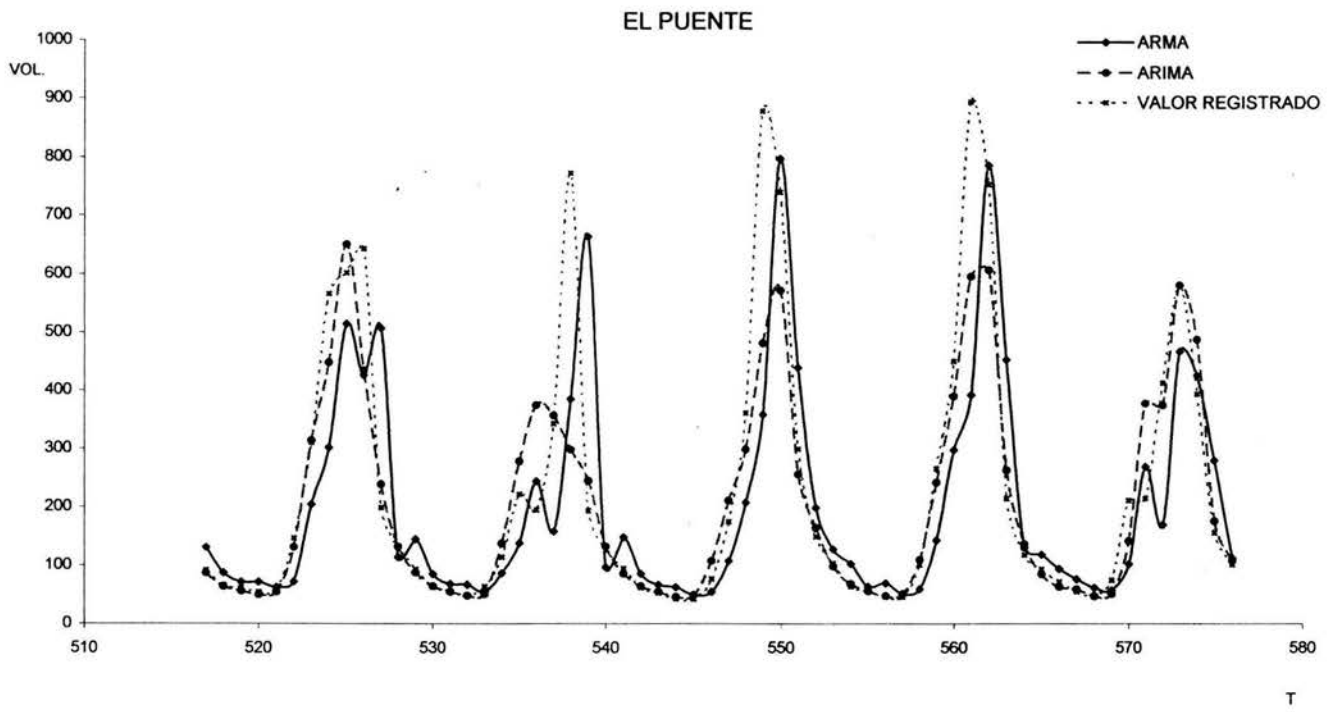


Figura. 23 Representación gráfica del pronóstico y de su valor real

5. CONCLUSIONES

Las series de escurrimientos mensuales de las tres estaciones (La Parota, El Puente y Agua Salada) ubicadas aguas arriba del proyecto hidroeléctrico La Parota fueron ajustadas al modelo ARIMA Multiplicativo basándose en la metodología propuesta por Salas 1980 y que consta de las siguientes etapas: Transformación, Diferenciación e Identificación, Obtención de parámetros y Diagnóstico y por último el pronóstico.

En la etapa de Transformación se analizaron las tres series con la finalidad de encontrar algún tipo de tendencia, saltos o periodicidad, como las series presentaban alguna de estas características fue necesario eliminarlas ya que para poder ajustar un modelo a una de estas series se debe cumplir que sean estacionarias por ello las series pasaron por un proceso de normalización como lo es el método de Box-Cox, que nos permitió transformar a la serie en estacionaria.

Con el objetivo de obtener un modelo matemático que permita pronosticar en cada estación en estudio ya sea con el modelo ARIMA Multiplicativo o con el modelo ARMA, las series pasaron por un proceso de diferenciación en el cual se vio que estas presentaban un comportamiento periódico el cual es necesario eliminar para poder pasar a la etapa de Obtención de parámetros y Diagnóstico por ello se analizaron las tres series con tres opciones de diferenciación, de ello se observó que para un proceso $D = 1$ y $d = 1$ las series perdían la periodicidad por ello al proponer los modelos ARIMA Multiplicativo que se ajustarían a las series en estudio se tomó esto en cuenta al seleccionar los modelos ARIMA Multiplicativo.

Para lograr tener un panorama amplio en cuanto al comportamiento de modelos ARIMA Multiplicativo se ajustaron cinco modelos a cada una de las tres series en estudio, estos modelos ya han sido ajustados con anterioridad a series periódicas y en algunos casos a series hidrológicas, lo que nos da la seguridad de haber elegido correctamente dentro de los modelos estocásticos ARIMA Multiplicativo existentes.

En la integración de los parámetros se empleó el método de máxima verosimilitud logrando de esta forma obtener para cada serie los parámetros de los cinco modelos propuestos considerando que antes del cálculo de los parámetros se obtuvieron los modelos matemáticos de cada modelo propuesto. El cálculo de los parámetros se hizo en tres ocasiones para diferentes longitudes de registro esto es, primero se tomo toda la longitud del registro y después se elimino en dos ocasiones un año del registro y se calcularon los parámetros de cada modelo para cada serie en estudio, así también se calculo el valor ACI, la suma mínima al cuadrado de los residuales y la función de autocorrelación de los residuales de cada modelo de cada serie esto, con la finalidad de tener un parámetro de selección entre cada modelo, la suma mínima. del cuadrado de los residuales, el valor de ACI y el correlograma de cada serie de residuales se utilizaron para seleccionar el modelo que mejor se ajuste a cada serie en estudio, bajo este criterio el modelo que mejor se ajusto a las tres series fue el segundo modelo ARIMA Multiplicativo $(2,0,0) \times (0,1,1)_{12}$.

Finalmente en la etapa de Pronóstico se seleccionó el método en tiempo real para la predicción de los eventos de las tres series en estudio, para revisar si el modelo ARIMA Multiplicativo arrojaba un pronóstico aceptable se realizo éste para los últimos cinco años de cada serie con el modelo $ARIMA(2,0,0) \times (0,1,1)_{12}$ obtenido en la etapa de Diagnóstico y para tener un punto de comparación en cuanto a modelo estocásticos se obtuvo también para los mismos cinco años el pronóstico pero con un modelo $ARMA(1,1)$. Al comparar los resultados arrojados por el modelo ARIMA y ARMA se concluye que el modelo ARIMA Multiplicativo da un mejor pronostico comparado con el valor real, ya que a lo largo del tiempo el modelo ARIMA se acerca más al valor real que el modelo ARMA, lo cual se logra observar en las figuras 21 y 22, en ellas se ve también la cercanía entre el valor real y el pronosticado obtenido por el modelo ARIMA, sin embargo existe gran diferencia en cuanto a los picos por lo que se recomienda utilizar sólo para la modelación de los picos el modelo ARMA (1,1).

6. BIBLIOGRAFÍA

1. Robert L. Winkler, William L. Hays., 1975. *Statistics, Probability, Inferences and Decision*. Series in Quantitative Methods for Decision Making.
2. Vujica Yevjevich., 1972. *Stochastic Proceses in Hydrology*. Water Resources Publications Fort Collins, Colorado , U.S. A.
3. J. D. Salas, J. W. Delleur ,1980. *Applied Modeling of Hydrologic Time Series*. Water Resources Publications, Littleton, Colorado 80161 , U.S. A.
4. Box, G.E.P and Cox, D.R. 1964. *An Analysis of Transformation*. Journal of Ropyal Statistical Society B-26, 211.
5. Box, G.E.P. and G.M. Jenkins. 1970. *Time Series Analysis Forecasting and Control*. San Francisco: Holden - Day
6. Brockwell, P.J. y R.A. Davis 1987. *Time Series: Theory and Methods*. Segunda edición. EUA: Springer – Verlag.
7. Chatfield, C. 1984. *The Anlysis of Time Series: An Introduction*, Londres: Chapman and Hall.
8. Pankratz, A. 1983. *Forecasting with Univariate Box – Jenkins, Models. Concepts and Cases*. EUA: John Wiley & Sons.
9. Kendall, S.M. and Ord, J.K. 1990. *Time Series*. Londres: Edward Arnol.
10. Escalante Sandoval C. A., Reyes Chávez L. 2002. *Técnicas Estadísticas en Hidrología*. Facultad de Ingeniería UNAM.
11. Delleur, J.W. and Kavvas, M.L., 1978. Stochastic models for monthly rainfall forecasting and syntetic generation. *Journal. Appl. Meteor.* 17,10,pp.1528-1536.
12. O' Connell, P. E., 1971. *A simple sthocastic modeling of Hurst law*. In *Mathematic Models in Hidrology*. Warsaw Symposium, 1,pp. 169-187.
13. O' Connell, P. E. 1977. *ARIMA Models in synthetic hydrology*. In *Mathematic Models for Surface Hydrology*, T.A. Ciriani, U. Maione and J.R Wallis, Editors, Wiley, New York.
14. Salas, J.D.,1972 *Range Analysis of periodic-sthocastic processes*. Hydrology Paper 57, Colorado STATE University, Fort Collins, Colorado.