UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"TEORIA DE VALORES EXTREMOS PARA SUCESIONES DE VARIABLES ALEATORIAS NO ESTACIONARIAS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICO CON ESPECIALIDAD EN ESTADISTICA MATEMATICA

P R E S E N T A :

ADAN DIAZ HERNANDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARIA ASUNCION BEGOÑA FERNANDEZ FERNANDEZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Teoría de Valores Extremos para sucesiones de variables aleatorias no estacionarias"

realizado por Adán Díaz Hernández

con número de cuenta 09531605-9, quien cubrió los créditos de la carrera de:

Matemáticas con especialidad en Estadística Matemática

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dra. María Asunción Begoña Fernández Fernández

Propietario Dra. Ana Meda Guardiola

Propietario Dr. Juan González Hernández

Suplente Dr. Alberto Contreras Cristán

Suplente Dr. Manuel Galán Medina

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

Agradecimientos

Este trabajo fue posible gracias al apoyo y enseñanzas de mi asesora de tesis, la Dra. Ma. Asunción Begoña Fernández Fernández. Gracias por el tiempo dedicado y la disposición prestada.

A mis sinodales, la Dra. Ana Meda Guardiola, el Dr. Juan González Hernández, el Dr. Alberto Contreras Cristán y el Dr. Manuel Galán Medina, por los valiosos comentarios, sugerencias y correcciones que enriquecieron este trabajo de tesis.

A mis padres, pues sin ustedes nada de esto hubiera sido posible. Viviré agradecido por haberme enseñado como meta siempre la superación y luchar con todas mis fuerzas por mis ideales. El apoyo siempre constante ha sido y será el factor determinante en este y muchos otros logros en mi vida. Gracias por el infinito amor que siempre me han dado, los amo.

A mi hermano y mi hermana que crecimos juntos, siempre estaré con ustedes en las buenas y en las malas, y sé que ustedes también conmigo.

A Éricka, gracias por estar a mi lado, no en valde los regaños y presiones para culminar la tesis. Este es un triunfo más y sé que celebraremos juntos los que todavía faltan. Siempre contaré contigo y tú conmigo.

Las experiencias vividas como estudiante, dentro y fueras de las aulas, han sido de las mejores de mi vida, pero no lo hubieran sido así sin el apoyo y compañía de todos mis amigos que hicieron que la estancia en la facultad no hubiera sido de paso, sino que todo valió la pena y le dieron sentido a esos años en la facultad. Gracias Francis, Yuri y Paloma por estar siempre cerca. Irán, Javier, Alejandro, Abel, César, Luis, Harim, Marcos, Adrían, Juan Luis, Pepe, Pedro, Samadhí, son sólo algunos. La lista es enorme y sé que algunos escapan ahora de mi mente, pero más tarde los recordaré y agradeceré por todo lo compartido y vivido en esta etapa tan bella que ha sido el ser estudiante en la UNAM.

Índice General

Introducción

Generalmente, cuando sabemos que ciertas propiedades o resultados son válidos para casos particulares, surge el interes por saber si es posible hacer extensiones de tales resultados a situaciones más generales, con el objetivo de poder aplicarlos en la solución de una gama más amplia de problemas. Esto mismo sucede en Matemáticas cuando tenemos resultados teóricos que nos permiten decir algo sobre algún conjunto de entes matemáticos y queremos saber si es posible afirmar lo mismo para un conjunto más grande, o más aún, averiguar qué tanto podemos decir al respecto a medida que agregamos o quitamos hipótesis.

Cuando tenemos un conjunto de variables aleatorias $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ que son independientes y con igual función de distribución F, y nos preguntamos por el comportamiento asintótico del máximo $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ de n de ellas, a medida que n crece, la Teoría de Valores Extremos (TVE) clásica nos da la respuesta a ésta y algunas otras preguntas al respecto, como por ejemplo, el comportamiento de la distribución de excesos $F_u = P\{X - u \leq x \mid X > u\}$ para umbrales u grandes, las propiedades del proceso que cuenta el número de excesos a umbrales altos y su intrínseca relación con el máximo, así como con las estadísticas de orden. De manera más precisa, si $M_n \xrightarrow{d} X, n \to \infty$ ($(M_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en distribución a la variable aleatoria X) donde X es no degenerada, entonces el Teorema de Fisher-Tippet nos dice que la función de distribución de M_n (debidamente normalizado) debe ser una de las de Valores Extremos, es decir, Gumbel, Fréchet o Weibull. Si denotamos por N_n el número de veces que se excede un cierto valor u_n por las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ y el número promedio de excesos a u_n se estabiliza, para n suficientemente grande, alrededor de alguna constante $0 < \tau < \infty$, entonces $N_n \xrightarrow{d} N$, donde N es un proceso de Poisson sobre $(0, 1]$ con intensidad τ. Estos interesantes resultados y otros más, también son válidos en el caso en que $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es estacionaria y satisface dos condiciones, una que involucra un cierto tipo de independencia asintótica, y la otra que anula la posibilidad de excesos por pares a umbrales altos.

El objetivo principal de este trabajo es revisar las condiciones necesarias bajo las cuales los resultados centrales de la TVE pueden ser extendidos al caso más general en el que $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ no necesariamente sea estacionaria, además de analizar hasta donde es posible lograrlo, las diferencias entre el caso estacionario y el no estacionario, así como presentar ejemplos interesantes en los que se verifiquen tanto los resultados y como su aplicación. Tal generalización en los resultados da pie y sustento a la aplicación de los métodos y técnicas de la TVE en tareas en las que se requieran buenas estimaciones sobre la ocurrencia de observaciones muy grandes, que en general son muy poco probables pero de magnitudes importantes, por lo que conocer el comportamiento distribucional en el área de la cola nos permite describir de manera más adecuada los efectos de los eventos extremos. El sector asegurador y financiero de toda sociedad está siempre preocupado por la latente posibilidad de la ocurrencia de eventos extremos (siniestros con grandes reclamaciones y catástrofes financieras), por lo que obtener buenas estimaciones sobre las medidas de riesgo que se utilicen permitirán hacer reservas y previsiones adecuadas con el objeto de estar preparados en caso de que alguno de estos eventos suceda. Cabe mencionar que la TVE permite obtener buenos estimadores de las dos medidas de riesgo más utilizadas, el Valor en riesgo (VaR) y la Esperanza Condicional de la Cola (ES), siendo ésta última una medida de riesgo coherente, y cuyas estimaciones en general resultan ser más adecuadas que cuando suponemos que los datos provienen de una distribución Normal (ver [5]).

Este documento consta de tres capítulos y un apéndice, y a continuación procederemos a dar una descripción sobre la estructura y organización de éstos. Para poder abordar el caso de sucesiones no estacionarias es necesario conocer con detalle tanto los resultados como las condiciones que se requieren para extender la TVE del caso independiente e idénticamente distribuido al estacionario, esto debido a la posible similitud entre la técnica usada y la que se requerirá para pasar de este último al caso no estacionario. Por tal motivo, el primer capítulo pretende ser un resumen de la TVE en el caso estacionario. Revisamos resultados básicos como el Teorema de Fisher-Tippet, que caracteriza la distribución asintótica no degenerada del máximo, y la Aproximación de Poisson, que relaciona la estabilización del número promedio de excesos a umbrales con la probabilidad de que el máximo no los exceda, y que más generalmente, nos permite decir cuál es la distribución asintótica del proceso que cuenta el número de excesos a umbrales altos de nuestra muestra aleatoria. Para hacer la extensión del Teorema de Fisher-Tippet al caso estacionario necesitamos de una condición de independencia asintótica o leve dependencia, conocida como Condición $D(u_n)$, y para extender también la Aproximación de Poisson requerimos que además se satisfaga una cierta condición de antiagrupamientos de la sucesión estacionaria denominada Condición $D'(u_n)$. Cuando sólo se satisface la primera condición, en general, no es posible evitar los agrupamientos sobre ciertos umbrales y surge entonces el concepto de índice extremo de un sucesión estacionaria, el cual desempeña un papel determinante cuando comparamos la distribución asintótica del máximo de la sucesión estacionaria con la que éste tendria si las variables aleatorias en cuestión fueran independientes.

En el segundo capítulo centraremos nuestra atención en la extensión de los resultados de la TVE vistos en el Capítulo 1 a alguna situación más general. Para empezar, las sucesiones de variables aleatorias con que trabajaremos serán lo más generales posibles (no estacionarias) y con distribuciones marginales no necesariamente iguales. Además, las sucesiones de umbrales que consideraremos podrán ser distintas para cada variable aleatoria de la sucesión $(X_i)_{i=1}^{\infty}$, por lo que los eventos que determinan al máximo serán el caso particular cuando trabajemos con una única sucesión de umbrales. De nuevo, cuando comparamos la distribución límite del máximo de nuestra sucesión general con la que éste tendría si además las variables aleatorias fueran independientes (la sucesión independiente asociada) requerimos de ciertas condiciones para garantizar el mismo comportamiento asintótico distribucional. A una de estas condiciones se le conoce como Condición A, la cual nos garantiza que la distribución límite del máximo sea no degenerada, y otras dos, la Condición $D\{u_{ni}\}$ que es del tipo de leve dependencia y una de antiagrupamientos a umbrales altos llamada Condición $D'\{u_{ni}\}$. Veremos que la familia a la que pertenece la distribución límite del máximo de variables aleatorias independientes pero no idénticamente distribuidas es más grande que la familia de distribuciones de Valores Extremos, pero en el caso en que la sucesion es no estacionaria pero con iguales marginales podremos tener una versión extendida del Teorema de Fisher-Tippet. Una vez derivada la Aproximación de Poisson, trabajaremos con el respectivo proceso de excedentes, el cual resultará converger a un proceso de Poisson no homogéneo. De nuevo, como en el caso estacionario, si sólo se satisface la Condición $D\{u_{ni}\}$ surge la noción de índice extremo, el cual desempeñará un papel parecido, pero no igual, que el que este concepto tiene en el caso estacionario.

En el tercer capítulo aplicaremos y corroboraremos, mediante tres ejemplos de familias de sucesiones no estacionarias, los resultados de la TVE obtenidos en el segundo capítulo. En la primera sección consideraremos las sucesiones generales no estacionarias max-autorregresivas $(X_i)_{i=1}^{\infty}$, conocidas como max-AR(1), con el propósito de estudiar el comportamiento asintótico de M_n y evaluar el índice extremo. En la segunda sección examinamos el comportamiento extremo de sucesiones gaussianas no estacionarias, y como era de esperarse, de nuevo como en el caso estacionario, las restricciones se harán sobre la sucesión de covarianzas. En la última sección estudiamos una clase de distribuciones multivariadas conocidas como Farlie-Gumbel-Morgenstern para discutir las propiedades extremas de sucesiones de variables aleatorias con dicha distribución. Veremos que el comportamiento extremo de esta sucesión es como el que tendría si no existiera dependencia entre sus componentes.

Finalmente, en el Apéndice revisamos conceptos básicos sobre procesos puntuales y en particular el Proceso de Poisson, así como un resultado importante que caracteriza la convergencia débil de este último y que resulta de gran utilidad en las demostraciones sobre la convergencia del proceso de excedentes a un proceso de Poisson.

Capítulo 1

TVE en el caso estacionario

Antes de estudiar la Teoría de Valores Extremos (TVE) para el caso de sucesiones de variables aleatorias (v.a.) no estacionarias (caso general), debemos tratar primero los resultados más importantes de la TVE en el caso estacionario, que incluye al caso de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.). En este último destaca un resultado central de la TVE: el Teorema de Fisher-Tippet, que nos dice explícitamente la forma funcional de la distribución asintótica no degenerada del máximo M_n de n v.a. (debidamente normalizado) a medida que n crece. Cuando la sucesión de v.a. es estacionaria, también es posible obtener una versión del resultado tan importante antes mencionado. Las condiciones y restricciones que se piden para su validez pueden no cumplirse en general, así que surge la noción de índice extremo de la sucesión estacionaria.

Por tal razón, en la sección 1 revisaremos los conceptos y resultados principales de la TVE en el caso de v.a.i.i.d. Una vez hecho esto, en la sección 2 de este capítulo haremos la extensión del Teorema de Fisher-Tippet del caso independiente e idénticamente distribuido al estacionario, para lo cual requerimos de una condición de independencia asintótica o leve dependencia, a saber la Condición $D(u_n)$. En la sección 3 revisaremos una Condición de antiagrupamientos de la sucesión estacionaria conocida como la Condición $D'(u_n)$, que junto con

$D(u_n)$, hace que otro resultado del caso independiente, la Aproximación de Poisson, también se satisfaga. En la sección 4 introducimos el concepto de sucesión independiente asociada y verificamos que bajo $D(u_n)$ y $D'(u_n)$ los resultados del caso independiente y el estacionario son idénticos; por otro lado, si sólo se cumple la Condición $D(u_n)$ en general no podemos evitar los agrupamientos sobre ciertos niveles y entonces surge la noción de índice extremo de la sucesión estacionaria y revisamos los resultados y el papel tan importante que juega este concepto. En la sección 5 de manera muy somera revisamos el Teorema de Gnedenko-Balkema-Pickands-de Haan (GBPdH) que nos dice cuál es la distribución asintótica de los excesos por encima de umbrales altos. Finalmente, en la última sección revisaremos el comportamiento asintótico de la distribución del número de excesos dado un cierto umbral. Este capítulo pretende ser un resumen de la TVE en el caso estacionario y es tomado principalmente de [5], [6] y [18]. Cabe mencionar que en la medida de lo posible se demuestran los resultados presentados, pero esto con el fin de comparar la técnica usada en el caso estacionario con la que se usará en los siguientes capítulos para el caso no estacionario.

1.1 Resultados básicos de la TVE para v.a.i.i.d.

Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a.i.i.d., denotamos al máximo de n de ellas como $M_n = \max(X_1, \ldots X_n)$. El objetivo es estudiar la distribución de M_n y todas sus propiedades inherentes cuando $n \to \infty$.

Si conocemos lo que pasa con M_n es posible derivar fácilmente propiedades parecidas para el mínimo de las primeras n observaciones usando la relación

$$m_n = \min(X_1, \ldots, X_n) = -\max(-X_1, \ldots, -X_n).$$

De la definición de M_n tenemos que

$$P\{M_n \le x\} = P\{X_1 \le x, \ldots, X_n \le x\} = F^n(x),$$

donde F es la función de distribución común de cada X_i.

El primer resultado que presentaremos es uno muy útil y, en general, aplicable a cualquier sucesión de reales $(u_n)_{n=1}^{\infty}$.

Teorema 1 *(Aproximación de Poisson) Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a.i.i.d., entonces para $0 \leq \tau \leq \infty$ una sucesión de reales $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - F\left(u_n\right)\right) = \tau \tag{1.1}$$

si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq u_n\right\} = e^{-\tau}. \tag{1.2}$$

Demostración.

Caso1. $0 \leq \tau < \infty$.

($\Rightarrow$) Supongamos cierta la expresión (1.1). Sea $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales, entonces

$$\left(1 - F\left(u_n\right)\right) = \frac{\tau}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq u_n\right\} &= \lim_{n\to\infty} F^n\left(u_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \left(1 - F\left(u_n\right)\right)\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\tau}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{-\tau}.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Si ahora suponemos (1.2), podemos asegurar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - F\left(u_n\right)\right) = 0,$$

ya que si no fuera cierto entonces tendríamos que existen $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ y $\varepsilon > 0$ tales que para toda $n > 0$ natural existe $n_k > n$ para la cual $1 - F\left(u_{n_k}\right) > \varepsilon$, con lo que $P\left\{M_{n_k} \leq u_{n_k}\right\} = F^{n_k}\left(u_{n_k}\right) < (1-\varepsilon)^{n_k} \to 0, n \to \infty$, que es una contradicción a nuestra hipótesis. También observamos que la hipótesis se puede escribir como

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 - \left(1 - F\left(u_n\right)\right)\right) = -\tau,$$

lo que nos lleva a que

$$n\left(1-F\left(u_n\right)\right)=\tau+o\left(1\right)$$

pues sabemos que $\ln\left(1+x\right)\approx x$ si $x\to 0$.

Caso 2. $\tau=\infty$ (por contradicción)

($\Rightarrow$) Primero supongamos que se cumple (1.1) pero $\lim_{n\to\infty}P\left\{M_n\leq u_n\right\}\neq 0$. Existe entonces $\left(n_k\right)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de naturales tal que

$$\lim_{n_k\to\infty}P\left\{M_{n_k}\leq u_{n_k}\right\}=e^{-\tau'}\text{ para alguna }\tau'<\infty,$$

que como antes, implicaría que $\lim_{n\to\infty}n\left(1-F\left(u_n\right)\right)=\tau'<\infty$, lo cual es una contradicción.

($\Leftarrow$) Similarmente, si ahora es cierta (1.2), pero $\lim_{n\to\infty}n\left(1-F\left(u_n\right)\right)\neq\tau$, entonces existe $\left(u_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de reales tal que

$$\lim_{n_k\to\infty}n\left(1-F\left(u_{n_k}\right)\right)=\tau'\text{ para algún }\tau'<\infty,$$

lo cual según el *Caso 1* nos llevaría a que $\lim_{n_k\to\infty}P\left\{M_{n_k}\leq u_{n_k}\right\}=e^{-\tau'}>0$, que contradice lo supuesto. ■

El resultado anterior nos dice que, a medida que n crece, el número promedio de excesos a u_n en la muestra se ubica alrededor de una constante, si y sólo si, la probabilidad de que el máximo no exceda a u_n se estabiliza también alrededor de una cierta constante que depende directamente de esta primera.

Si denotamos $x_F=\sup\left\{x|F\left(x\right)<1\right\}$, llamado el punto final de la distribución F, obtenemos a partir del teorema anterior el siguiente corolario.

Corolario 2 *(i) $M_n\to x_F$ con probabilidad 1 si $n\to\infty$.*

(ii) Si $x_F<\infty$, $F\left(x_F-\right)<1$ (F tiene un salto en su punto final derecho) y para alguna sucesión $\left(u_n\right)_{n=1}^{\infty}$ sucede que

$$P\left\{M_n\leq u_n\right\}\to r,n\to\infty,$$

entonces $r=0$ o $r=1$.

Demostración.

(i) Sea $u_n = u < x_F$ para todo natural n, entonces $1 - F(u_n) > 0$, de donde

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) = \tau \text{ para } \tau = \infty,$$

así que $\lim_{n\to\infty} P\{M_n \le u\} = 0$ según el Teorema 1. Dado que $P\{M_n > x_F\} = 0$ para cada n, tenemos que $M_n \to x_F$ en probabilidad. Tenemos además, que $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona, por lo que converge casi seguramente, y entonces $M_n \to x_F, n \to \infty$ casi seguramente.

(ii) Supongamos que $x_F < \infty$ y $F(x_F-) < 1$. Sea $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales tal que $P\{M_n \le u_n\} \to r, n \to \infty$ para alguna $0 \le r \le 1$, es decir,

$$P\{M_n \le u_n\} \to e^{-\tau}, n \to \infty$$

para alguna $0 \le \tau \le \infty$, es decir,

$$n(1 - F(u_n)) \to \tau, n \to \infty,$$

por el Teorema 1.

Si sucede que $u_n < x_F$ para una infinidad de valores de n, entonces $\tau = \infty$, pues $1 - F(u_n) > 1 - F(x_F-) \ge 0$, con lo que tenemos $r = 0$.

En el otro caso, cuando $u_n \ge x_F$ para n suficientemente grande tenemos $n(1 - F(u_n)) = 0$, así que $\tau = 0$, y en este caso $r = 1$. ∎

El Corolario anterior es el caso de en el que la distribución del máximo es degenerada. Nuestro propósito es aproximar la distribución de M_n de manera asintótica mediante alguna distribución no degenerada. Primero precisaremos la idea de la aproximación.

Definición 3 *Diremos que F pertenece al dominio de atracción para máximos de G, lo cual escribiremos como $F \in D(G)$, si existen sucesiones $(a_n > 0)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ de reales, tales que*

$$P\{a_n(M_n - b_n) \le x\} \xrightarrow{d} G(x)$$

La notación $\xrightarrow{d}$ significa que la convergencia ocurre en los puntos de continuidad de G, y se conoce como convergencia en distribución.

Existe un tipo de funciones de distribución que juegan un papel importante en el desarrollo de la TVE, ya que más adelante veremos que la familia a la que pertence G coincide con este tipo de distribuciones.

Definición 4 *Se dice que la distribución no degenerada G es max-estable si para cada $n = 2, 3, \ldots$ existen reales $a_n > 0$ y b_n tales que $G^n(a_n x + b_n) = G(x)$.*

El siguiente teorema nos damos cuenta que es posible caracterizar las distribuciones límite del máximo debidamente normalizado.

Teorema 5 *(i) Una función de distribución no degenerada G es max-estable, si y sólo, si existe una sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones de distribución y $(a_n > 0)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que*

$$F_n\left(\frac{1}{a_{nk}}x + b_{nk}\right) \xrightarrow{d} G^{\frac{1}{k}}(x), n \to \infty$$

para cada $k = 1, 2, \ldots$

(ii) En particular, si G es no degenerada, $D(G)$ es no vacío si y sólo si G es max-estable. Entonces además $G \in D(G)$. Así la clase de distribuciones no degeneradas G tales que $P\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} \to G(x)$ (para $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d.) coincide con la clase de distribuciones max-estables.

Demostración.

(*i*) Dado que G es no degenerada, también $G^{\frac{1}{k}}$ es no degenerada para cada k, así que si $F_n\left(\frac{1}{a_{nk}}x + b_{nk}\right) \xrightarrow{d} G^{\frac{1}{k}}(x), n \to \infty$ para cada $k = 1, 2, \ldots$, tenemos que por el Teorema de Khintchine (Teorema 1.2.3 de [18])

$$G^{\frac{1}{k}}(x) = G(\alpha_k x + \beta_k)$$

para alguna $\alpha_k > 0$ y β_k, con lo que G es max-estable.

Si ahora suponemos que G es max-estable, entonces

$$G^n\left(\frac{1}{a_n}x+b_n\right)=G(x)$$

para alguna $(a_n>0)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Sea $F_n=G^n$, entonces

$$F_n\left(\frac{1}{a_{nk}}x+b_{nk}\right)=\left(G^{nk}\left(\frac{1}{a_{nk}}x+b_{nk}\right)\right)^{\frac{1}{k}}=(G(x))^{\frac{1}{k}}\xrightarrow{d}G^{\frac{1}{k}}(x)\,,n\to\infty.$$

(ii) Supongamos que G es max-estable, es decir, existen sucesiones $(a_n>0)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$G^n(a_nx+b_n)=G(x)\xrightarrow{d}G(x)\,,n\to\infty,$$

con lo que tenemos que $g\in D(G)$.

Si $D(G)$ es no vacío, tenemos que existe $F\in D(G)$, tal que

$$F^n\left(\frac{1}{a_n}x+b_n\right)\xrightarrow{d}G(x)\,.$$

Entonces

$$F^{nk}\left(\frac{1}{a_{nk}}x+b_{nk}\right)\xrightarrow{d}G(x)\,,$$

así que

$$F_n\left(\frac{1}{a_{nk}}x+b_{nk}\right)\xrightarrow{d}G^{\frac{1}{k}}(x)$$

para $F_n=F^n$, y por (i) tenemos que G es max-estable y

$$P\{a_n(M_n-b_n)\le x\}=F^n\left(\frac{1}{a_n}x+b_n\right)\xrightarrow{d}G(x)\,.$$

■

Corolario 6 *Si G es max-estable, entonces existen funciones reales $a(s)>0$ y $b(s)$, definidas para $s>0$, tales que*

$$G^s(a(s)x+b(s))=G(x)\ \ \textit{para todos los reales } x,s>0.$$

Demostración.

Dado que G es max-estable, tenemos que existen $(a_n > 0)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $G^n(a_n x + b_n) = G(x)$, así que para $s > 0$,

$$G^{[ns]}\left(a_{[ns]}x + b_{[ns]}\right) = G(x),$$

y como $\frac{[ns]}{s} \approx n$ para n suficientemente grande, sucede que

$$G^{n}\left(a_{[ns]}x + b_{[ns]}\right) \xrightarrow{d} G^{\frac{1}{s}}(x),$$

por lo que de nuevo por el Teorema Khintchine (Teorema 1.2.3 de [18]) tenemos que existen $a(s) > 0$ y $b(s)$ tales que

$$G(a(s)x + b(s)) = G^{\frac{1}{s}}(x),$$

pues $G^{\frac{1}{s}}(x)$ es no degenerada, lo anterior para cada $s > 0$. ■

Definición 7 *Decimos que dos distribuciones G_1 y G_2 son del mismo tipo si $G_2 = G_1(ax + b)$ para algún $a > 0$ y b, números reales.*

En el sentido de esta definición, G es max-estable si G y G^n son del mismo tipo para cada $n = 2, 3, \ldots$. Equivalentemente, si existe una sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de distribuciones tales que

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} G_1(x) \text{ y } F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{d} G_2(x),$$

con $a_n, \alpha_n > 0$ y G_1, G_2 no degeneradas, entonces ambas son del mismo tipo.

El siguiente teorema es uno de valores extremos que nos dice explícitamente la forma funcional que tienen las distribuciones max-estables.

Teorema 8 *Cada distribución max-estable coincide con $G(ax + b)$ para algún $a > 0$ y b reales, donde G es alguna de las tres distribuciones: Gumbel (Λ), Fréchet (Φ_α), Weibull (Ψ_α), donde*

Gumbel: $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, -\infty < x < \infty;$

$$\textit{Fréchet: } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-x^{-\alpha}}, \textit{ para alguna } \alpha > 0, & x > 0; \end{cases}$$

$$\textit{Weibull: } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}}, \textit{ para alguna } \alpha > 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Recíprocamente, las distribuciones Gumbel (Λ), *Fréchet* (Φ_α) *y Weibull* (Ψ_α) *son distribuciones max-estables.*

Demostración.

($\Leftarrow$) Supongamos que G es una de las tres distribuciones:

Para el tipo Gumbel $\Lambda(x)$,

$$G^n(x + \ln n) = \left(e^{-e^{-(x+\ln n)}}\right)^n = e^{-ne^{-(x+\ln n)}} = e^{-e^{-(x+\ln n - \ln n)}} = G(x).$$

Para el tipo Fréchet $\Phi_\alpha(x)$,

$$G^n\left(n^{\frac{1}{\alpha}}x\right) = \begin{cases} 0^n, & x \leq 0 \\ e^{-n\left(n^{\frac{1}{\alpha}}x\right)^{-\alpha}}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-nn^{-1}x^{-\alpha}}, & x > 0 \end{cases} = G(x).$$

Para el tipo Weibull $\Psi_\alpha(x)$,

$$G^n\left(n^{-\frac{1}{\alpha}}x\right) = \begin{cases} 0^n, & x \leq 0 \\ e^{-n\left(-n^{-\frac{1}{\alpha}}x\right)^{\alpha}}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-nn^{-1}(-x)^{\alpha}}, & x > 0 \end{cases} = G(x).$$

Tenemos entonces que G es max-estable.

($\Rightarrow$) Ahora, supongamos que G es max-estable, entonces existen las funciones $a(s) > 0$ y $b(s)$ definidas para $s > 0$, tales que

$$G^s(a(s)x + b(s)) = G(x) \text{ para cualesquiera } x, s > 0,$$

así que para $0 < G(x) < 1$ tenemos

$$-s \ln G(a(s)x + b(s)) = -\ln G(x),$$

es decir,

$$\ln(-\ln G(a(s)x + b(s))) - \ln s = -\ln(-\ln G(x)).$$

Definamos $V(x) = -\ln(-\ln G(x))$. Dado que la propiedad max-estable para $n = 2$ implica que G no tiene saltos en cualquier extremo finito superior e inferior y que $V(x)$ es no decreciente, sudece que

$$\inf\{V(x)\} = -\infty \text{ y } \sup\{V(x)\} = +\infty.$$

Entonces existe $U(y)$, la función inversa de $V(x)$, definida para todo real y. Dado que se cumple

$$V(a(s)x + b(s)) - \ln s = V(x),$$

entonces según una propiedad de la inversa generalizada (Lema 1.2.1 (i) de [18]),

$$\frac{1}{a(s)}(U(y + \ln s) - b(s)) = U(y).$$

Podemos pues, escribir que

$$U(y) - U(0) = \frac{1}{a(s)}(U(y + \ln s) - U(\ln s)).$$

Si hacemos $z = \ln s$, $\widetilde{a}(z) = a(e^z)$, y $\widetilde{U}(y) = U(y) - U(0)$, entonces

$$\widetilde{U}(y)\widetilde{a}(z) = \widetilde{U}(y+z) - \widetilde{U}(z) \text{ para cualesquiera reales } y, z.$$

Así

$$\widetilde{U}(y)\widetilde{a}(z) + \widetilde{U}(z) = \widetilde{U}(y+z) = \widetilde{U}(z)\widetilde{a}(y) + \widetilde{U}(y),$$

es decir,

$$\widetilde{U}(y)(1 - \widetilde{a}(z)) = \widetilde{U}(z)(1 - \widetilde{a}(y)).$$

Tenemos los dos siguientes casos:

*Caso*1. $\widetilde{a}(z) = 1$ para todo z.

Aquí $\widetilde{U}(y) = \widetilde{U}(y+z) - \widetilde{U}(z)$, o sea que para todos los reales y, z se cumple

$$\widetilde{U}(y+z) = \widetilde{U}(y) + \widetilde{U}(z),$$

cuya única solución monótona creciente es

$$\widetilde{U}(y) = ry \text{ para alguna } r > 0.$$

Entonces $U(y) - U(0) = ry$, por lo que

$$V^{-1}(y) = U(y) = ry + U(0),$$

y como V^{-1} es continua tenemos que $x = V^{-1}(V(x)) = rV(x) + U(0)$. Así que tenemos

$$-\ln(-\ln G(x)) = V(x) = \frac{1}{r}(x - U(0)),$$

de donde $G(x) = e^{-e^{-\frac{1}{r}(x-U(0))}}$ cuando $0 < G(x) < 1$.

Dado que G no tiene saltos en ningún punto final finito inferior y superior, la expresión es válida para cualquier real x, y por lo tanto $G(x) = e^{-e^{-x}}$, para $-\infty < x < \infty$.

*Caso*2. $\widetilde{a}(z) \neq 1$ para alguna z.

Podemos entonces escribir $\widetilde{U}(y) = \frac{\widetilde{U}(z)}{1-\widetilde{a}(z)}(1 - \widetilde{a}(y)) = c(1 - \widetilde{a}(y))$, donde $c = \frac{\widetilde{U}(z)}{1-\widetilde{a}(z)} \neq 0$, ya que $\widetilde{U}(z) = 0$ nos llevaría a que $\widetilde{U}(y) = 0$ para toda y, lo cual implicaría que $U(y) = U(0)$ constante.

Escribimos por tanto,

$$c(1 - \widetilde{a}(y+z)) - c(1 - \widetilde{a}(z)) = c(1 - \widetilde{a}(y))\widetilde{a}(z),$$

que simplicando queda como

$$\widetilde{a}(y+z) = \widetilde{a}(y)\widetilde{a}(z) \text{ para cualquier } y, z \text{ reales.}$$

Debido a que $\widetilde{a}$ es monótona, la ecuación funcional anterior tiene solución monótona no constante

$$\widetilde{a}(y) = e^{ry} \text{ para } r \neq 0.$$

Entonces

$$V^{-1}(y) = U(y) = \widetilde{U}(y) + U(0) = c(1 - e^{ry}) + U(0).$$

Debemos notar que dado que V es creciente, así también U lo es, por lo que $c < 0$ si $r > 0$, y $c > 0$ si $r < 0$.

Tenemos pues,

$$x = V^{-1}(V(x)) = c\left(1 - e^{rV(x)}\right) + U(0) = c\left(1 - (-\ln G(x))^{-r}\right) + U(0),$$

y despejando

$$G(x) = e^{-\left(1-\frac{1}{c}(x-U(0))\right)^{-\frac{1}{r}}},$$

donde $0 < G(x) < 1$ es continua en cualesquiera puntos finales finitos y por tanto la expresión anterior vale para todo real x.

Si $c < 0$, sabemos que $r > 0$, por lo que $G(x) = e^{-x^{-\alpha}}$ con $\alpha = \frac{1}{r}$ y para $x > 0$, mientras que $G(x) = 0$ en otro caso.

Si $c > 0$, entonces $r < 0$, para cuando $x \leq 0$ se tiene $G(x) = e^{-(-x)^{\alpha}}$, con $\alpha = -\frac{1}{r}$, y $G(x) = 1$, para $x > 0$. ■

Podemos ahora probar fácilmente uno de los resultados centrales de la TVE, debido al cuál Λ, Φ_α y Ψ_α son conocidas como Distribuciones de Valores Extremos.

Teorema 9 *(Fisher-Tippet) Sea $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, donde $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. Si existen sucesiones de reales $(a_n > 0)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que*

$$P\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} \xrightarrow{d} G(x)$$

para alguna distribución G no degenerada, entonces G es una Distribución de Valores Extremos. Recíprocamente, cada Distribución de Valores Extremos puede *aparecer como límite de máximos debidamente normalizados, de hecho, sucede cuando G es la distribución de cada X_i.*

Demostración.

Si $P\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} \xrightarrow{d} G(x)$, tenemos que se satisfacen las condiciones del Teorema 5 y por tanto G es max-estable, así que el Teorema 8 nos dice que G es una Distribución de Valores Extremos. Recíprocamente, si G es una Distribución de Valores Extremos, entonces es max-estable por el Teorema 8, y usando la parte (ii) del Teorema 5 tenemos que $G \in D(G)$. ∎

Las distribuciones de Valores Extremos se pueden reescribir en una sola expresión mediante el uso de la llamada función de distribución de Valores Extremos Generalizada (VEG) que a continuación definimos.

Definición 10 *La Distribución de Valores Extremos Generalizada (VEG) está dada por*

$$H_\xi(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}} & si\ \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-x}} & si\ \xi = 0 \end{cases}$$

donde $1 + \xi x > 0$ *y* ξ *es el parámetro de forma.*

De la definición de H_ξ tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{lllll} \xi = 0 & \text{Gumbel} & H_0(x) & = \Lambda(x) \\ \xi > 0 & \text{Fréchet} & H_\xi\left(\frac{x-1}{\xi}\right) & = \Phi_{\frac{1}{\xi}}(x) \\ \xi < 0 & \text{Weibull} & H_\xi\left(\frac{-(x+1)}{\xi}\right) & = \Psi_{-\frac{1}{\xi}}(x) \end{array}$$

Esencialmente, casi todas las distribuciones continuas comunes en Estadística están en $D(H_\xi)$ para alguna ξ. La distribución normal, por ejemplo, se encuentra en $D(H_0)$ (caso Gumbel), clase de distribuciones conocidas como de cola ligera.

Las distribuciones en $D(H_\xi)$ para $\xi > 0$ (caso Fréchet) son conocidas como distribuciones de cola pesada. Esta clase incluye, por ejemplo, las distribuciones Pareto y t de Student.

Gnedenko (1943) demostró que para $\xi > 0$, se satisface que $F \in D(H_\xi)$, si y sólo si, $1 - F(x) = x^{-\frac{1}{\xi}} L(x)$, para alguna función positiva $L(x)$ bien definida tal que $\lim_{x \to \infty} \frac{L(xt)}{L(x)} = 1$, $t > 0$ (decimos que L es de variación lenta en ∞). Entonces para este caso tenemos que la distribución H_ξ tendrá j-ésimo momento finito si $j < \frac{1}{\xi}$.

1.2 Teorema de Fisher-Tippet para variables aleatorias estacionarias

Antes de preguntarnos sobre las condiciones bajo las cuales el Teorema de Fisher-Tippet y la Aproximación de Poisson pueden extenderse al caso estacionario debemos revisar algunas condiciones de independencia asintótica. Entre los casos más sencillos de dependencia tenemos la llamada m-dependencia.

Definición 11 *Se dice que la sucesión de variables aleatorias* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *es* m-*dependiente, para algún natural* m, *si* X_i *y* X_j *son independientes para cualesquiera índices* i, j *tales que* $|i - j| > m$.

Ejemplo 12 *Definiendo* $X_n = \max(Y_n, \ldots, Y_{n+k})$, *para algún natural* k *fijo, donde* $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de v.a.i.i.d., tenemos inmediatamente que* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *es* k-*dependiente.*

Por notación y comodidad escribiremos $F_{i_1,\ldots i_n}(u)$ en vez de $F_{i_1,\ldots i_n}(u, \ldots, u)$, la distribución conjunta n-dimensional evaluada en el vector $u = (u, \ldots, u)$. Ahora definimos un tipo de independencia asintótica que precisamente nos permitirá demostrar la extensión del Teorema de Fisher-Tippet al caso estacionario.

Definición 13 *Sean* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de v.a. y* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de reales, la condición* $D(u_n)$ *se satisface si para cualesquiera enteros*

$$1 \leq i_1 < \ldots < i_p < j_1 < \ldots < j_q \leq n,$$

para los cuales $j_1 - i_p \geq l$, *se cumple que*

$$\left| F_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q}(u_n) - F_{i_1,\ldots,i_p}(u_n) F_{j_1,\ldots,j_q}(u_n) \right| \leq \alpha_{n,l}, \tag{1.3}$$

donde $\alpha_{n,l_n} \to 0, n \to \infty$ *para alguna sucesión* $l_n = o(n)$

Ejemplo 14 *Consideremos* $X_n = \max(Y_n, \ldots, Y_{n+k-1})$, $n \geq 1$, *donde* $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de v.a.i.i.d. con distribución común* $\sqrt[k]{F}$, *para* $k \geq 2$. *En este contexto, tenemos que*

$$\begin{aligned} P\{X_n \leq x\} &= P\{\max(Y_n, \ldots, Y_{n+k-1}) \leq x\} = P\{Y_n \leq x, \ldots, Y_{n+k-1} \leq x\} \\ &= P\{Y_n \leq x\} \cdots P\{Y_{n+k-1} \leq x\} = \underbrace{\sqrt[k]{F} \cdots \sqrt[k]{F}}_{k-veces} = F \end{aligned}$$

Así que entonces $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *tiene distribución* F *y cumple con la condición* $D(u_n)$ *para* $l \geq k$ *y* $\alpha_{n.l} = 0$, *ya que* $F_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q}(u_n) = F_{i_1,\ldots,i_p}(u_n) F_{j_1,\ldots,j_q}(u_n)$ *cuando* $j_1 - i_p > k - 1$ *por ser* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión* $(k-1)$*-dependiente, según lo visto en el Ejemplo 12*

Ahora precisamos el concepto de sucesión estacionaria.

Definición 15 *Decimos que* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de v.a. es estacionaria si* $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n})$ *y* $(X_{i_1+m}, \ldots, X_{i_n+m})$ *tienen la misma distribución para cualquier elección de* n, $i_1, \ldots, i_n$, *y* m.

En lo que resta de este capítulo trabajaremos con sucesiones de variables aleatorias estacionarias.

En esta sección pretendemos demostrar una extensión del Teorema de Fisher-Tippet para una sucesión estacionaria que cumple con la condición $D(u_n)$, el cual primero enunciaremos pero será probado como consecuencia de algunos resultados muy técnicos, por lo que la demostración se puede revisar al final de esta sección. Pero la técnica usada en las demostraciones de tales resultados es importante porque cuando trabajemos con sucesiones no estacionarias veremos que existe mucha semejanza en la manera de probar los resultados.

Teorema 16 *(Fisher-Tippet caso estacionario) Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. estacionaria y $(a_n > 0)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de reales dadas tales que $P\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} \xrightarrow{d} G(x)$, para alguna $G(x)$ distribución no degenerada. Supongamos que $D(u_n)$ se cumple para $u_n = \frac{x}{a_n} + b_n$ para cada real x, entonces $G(x)$ es una distribución de Valores Extremos.*

Observación 17 *Por el Teorema 8, demostrar esta generalización del Teorema de Fisher-Tippet bajo tales condiciones, es equivalente a demostrar que la distribución G es max-estable, lo cual a su vez es equivalente, según el Teorema 5, a que*

$$P\{a_{nk}(M_n - b_{nk}) \leq x\} \to G^{\frac{1}{k}}(x), n \to \infty$$

para cada $k = 1, 2, \ldots$. Entonces pretendemos probar que si esto se vale para $k = 1$, se debe cumplir que

$$P\left\{M_{nk} \leq \frac{x}{a_{nk}} + b_{nk}\right\} - P^k\left\{M_n \leq \frac{x}{a_{nk}} + b_{nk}\right\} \to 0, n \to \infty. \tag{1.4}$$

para $k = 2, 3, \ldots$

Denotaremos

$$M(E) = \max\{X_i \mid i \in E\},$$

para E un conjunto de enteros y $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de v.a. estacionaria. Consideraremos un intervalo como un conjunto finito de enteros $\{i_1, \ldots, i_2\}$, cuya longitud será $i_2 - i_1 + 1$. Además, si $\{j_1, \ldots, j_2\}$ es otro intervalo tal que $j_1 > i_2$, diremos que ambos intervalos están separados por $j_1 - i_2$.

El siguiente lema nos da una idea de cómo la condición $D(u_n)$ establece un cierto "grado de independencia".

Lema 18 *Supongamos que $D(u_n)$ se cumple para alguna $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de reales. Sean n, r, y k enteros fijos y $E_1, \ldots, E_r$ subintervalos de $\{1, \ldots, n\}$, donde E_i y E_j están separados por al menos k, para cada $i \neq j$. Entonces*

$$\left| P\left(\bigcap_{j=1}^{r} \{M(E_j) \leq u_n\}\right) - \prod_{j=1}^{r} P\{M(E_j) \leq u_n\}\right| \leq (r-1)\,\alpha_{n,k}, \tag{1.5}$$

donde $\alpha_{n,k}$ está definida como en la Definición 13.

Demostración. (Por inducción sobre r)

Sea $E_j = \{k_j, \ldots, l_j\}$, donde $k_1 \leq l_1 < k_2 \leq l_2 < \cdots < k_r \leq l_r$, renumerando si es necesario. Por notación, además, sea $D_j = \{M(E_j) \leq u_n\}$, $j = 1, \ldots, r$.

Para $r = 2$, tenemos que

$$P(D_1 \cap D_2) - P(D_1)P(D_2)$$

$$= \left|F_{k_1,\ldots,l_1;k_2,\ldots,l_2}(u_n) - F_{k_1,\ldots,l_1}(u_n)\,F_{k_2,\ldots,l_2}(u_n)\right| \leq \alpha_{n,k}$$

ya que $k_2 - l_1 \geq k$, y aplicando la definición de $D(u_n)$.

Supongamos el resultado cierto para $r-1$, entonces

$$\left| P\left(\bigcap_{j=1}^{r} D_j\right) - \prod_{j=1}^{r} P(D_j)\right| \leq$$

$$\left| P\left(\bigcap_{j=1}^{r} D_j\right) - P\left(\bigcap_{j=1}^{r-1} D_j\right) P(D_r)\right| + \left| P\left(\bigcap_{j=1}^{r-1} D_j\right) - \prod_{j=1}^{r-1} P(D_j)\right| P(D_r)$$

$$\leq \alpha_{n,k} + (r-2)\,\alpha_{n,k}\,(1) = (r-1)\,\alpha_{n,k},$$

pues $\bigcup_{j=1}^{r-1} E_j \subseteq \{k_1, \ldots, l_{r-1}\}$ y $k_r - l_{r-1} \geq k$. ■

Dado que para cualquier entero k tenemos que $\left[\frac{n}{k}\right] k \leq n < \left(\left[\frac{n}{k}\right] + 1\right) k$, es posible dividir los primeros $\left[\frac{n}{k}\right] k$ enteros en $2k$ intervalos consecutivos, de la manera siguiente:

Para n suficientemente grande, sea m tal que $k < m < \left[\frac{n}{k}\right]$, y definamos

$$\begin{aligned} I_j &= \left\{(j-1)\left[\frac{n}{k}\right] + 1, \ldots, j\left[\frac{n}{k}\right] - m\right\}, \\ I_j^* &= \left\{j\left[\frac{n}{k}\right] - m + 1, \ldots, j\left[\frac{n}{k}\right]\right\} \end{aligned}$$

con longitudes $\left[\frac{n}{k}\right] - m$ y m respectivemente, para $1 \leq j \leq k$.

También consideramos el resto de los índices,

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \left\{(k-1)\left[\frac{n}{k}\right] + m + 1, \ldots, k\left[\frac{n}{k}\right]\right\}, \\ I_{k+1}^* &= \left\{k\left[\frac{n}{k}\right] + 1, \ldots, k\left[\frac{n}{k}\right] + m\right\}. \end{aligned}$$

A continuación enunciamos y probamos el siguiente lema

Lema 19 *Con la notación anterior, si se satisface la condición $D(u_n)$ para alguna sucesión de reales $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces*

(*i*)

$$\begin{aligned} 0 \leq P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\{M(I_j) \leq u_n\}\right) - P\{M_n \leq u_n\} \\ \leq (k+1) P\{M(I_1) \leq u_n < M(I_1^*)\}, \end{aligned}$$

(*ii*)

$$\left|P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\{M(I_j) \leq u_n\}\right) - P^k\{M_n \leq u_n\}\right| \leq (k-1)\,\alpha_{n,m},$$

(*iii*)

$$\left|P^k\{M(I_1) \leq u_n\} - P^k\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n\right\}\right| \leq kP\{M(I_1) \leq u_n \leq M(I_1^*)\}.$$

Así, sumando las tres expresiones resulta que

$$\left|P\left\{M_n \leq u_n\right\} - P^k\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n\right\}\right|$$

$$\leq (2k+1)\, P\left\{M\left(I_1\right) \leq u_n \leq M\left(I_1^*\right)\right\} + (k-1)\, \alpha_{n,m},$$

por la desigualdad del triángulo.

Demostración.

(i) Tenemos que $\{M_n \leq u_n\} \subset \bigcap\limits_{j=1}^{k} \{M(I_j) \leq u_n\}$ y además,

$$\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left\{M\left(I_j\right) \leq u_n\right\} - \left\{M_n \leq u_n\right\}\right) \subset \bigcup_{j=1}^{k+1}\left\{M\left(I_j\right) \leq u_n < M\left(I_j^*\right)\right\},$$

ya que si se da la diferencia, debe ocurrir que $M\left(I_j\right) \leq u_n < M\left(I_j^*\right)$ para alguna $j \leq k$, o si no, $X_j \leq u_n$ para $1 \leq j \leq k\left[\frac{n}{k}\right]$ pero $X_j > u_n$ para alguna $k\left[\frac{n}{k}\right]+1 \leq j \leq \left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)k$, lo cual nos llevaría a que $M\left(I_{k+1}\right) \leq u_n < M\left(I_{k+1}^*\right)$, pues $m > k$.

Entonces usando el hecho de que $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es estacionaria, tenemos que

$$0 \leq P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left\{M\left(I_j\right) \leq u_n\right\}\right) - P\left\{M_n \leq u_n\right\}$$

$$\leq (k+1)\, P\left\{M\left(I_1\right) \leq u_n < M\left(I_1^*\right)\right\}.$$

(ii) Dado que los intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_k$ están separados por m, tenemos que como consecuencia del lema anterior,

$$\left|P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left\{M\left(I_j\right) \leq u_n\right\}\right) - P^k\left\{M_n \leq u_n\right\}\right| \leq (k-1)\, \alpha_{n,m}.$$

(iii) Se sigue de la desigualdad

$$0 \leq y^k - x^k = \left(y^{k-1} + y^{k-2}x + \ldots + yx^{k-2} + x^{k-1}\right)(y-x) \leq k\,(y-x),$$

cuando $0 \leq x \leq y \leq 1$ y del hecho de que

$$P\{M(I_1) \leq u_n \leq M(I_1^*)\} = P\{M(I_1) \leq u_n\} - P\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n\right\} \geq 0.$$

■

Con ayuda del resultado anterior probaremos el lema siguiente, el cual nos permitirá llegar a la expresión (1.4).

Lema 20 *Si $D(u_n)$ se cumple, $r \leq 1$ es un entero fijo, y $n \geq (2r+1)mk$, entonces con la notación anterior*

$$P\{M(I_1) \leq u_n < M(I_1^*)\} \leq \frac{1}{r} + 2r\alpha_{n,m}.$$

Además,

$$P\{M_n \leq u_n\} - P^k\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n\right\} \to 0, n \to \infty. \tag{1.6}$$

Demostración.

Dado que $\left[\frac{n}{k}\right] \geq (2r+1)m$, podemos escoger intervalos $E_1, \ldots, E_r$ de longitud m de $I_1 = \left\{1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{k}\right] - m\right\}$, de manera que estén separados uno del otro y de I_1^* por al menos m, donde $k < m < \left[\frac{n}{k}\right]$.

Entonces

$$P\{M(I_1) \leq u_n < M(I_1^*)\} \leq P\left(\bigcap_{s=1}^{r}\{M(E_s) \leq u_n\}, \{M(I_1^*) > u_n\}\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{s=1}^{r}\{M(E_s) \leq u_n\}\right) - P\left(\bigcap_{s=1}^{r}\{M(E_s) \leq u_n\}, \{M(I_1^*) \leq u_n\}\right),$$

pero por ser $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ estacionaria, tenemos que

$$P\{M(E_s) \leq u_n\} = P\{M(I_1^*) \leq u_n\} = p, \text{ digamos.}$$

Así

$$\begin{aligned} P\{M(I_1) \leq u_n < M(I_1^*)\} &\leq \prod_{s=1}^{r} P\{M(E_s) \leq u_n\} + (r-1)\alpha_{n,m} \\ &\quad - P\{M(I_1^*) \leq u_n\} \prod_{s=1}^{r} P\{M(E_s) \leq u_n\} + r\alpha_{n,m} \\ &\leq p^r - p^{r+1} + 2r\alpha_{n,m}, \end{aligned}$$

pero $p^r - p^{r+1} \leq \frac{1}{r+1}$, pues $0 \leq p \leq 1$, por lo que

$$P\{M(I_1) \leq u_n < M(I_1^*)\} \leq \frac{1}{r} + 2r\alpha_{n,m}.$$

Entonces con lo anterior tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|P\{M_n \leq u_n\} - P^k\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n\right\}\right|$$

$$\leq (2k+1)\left(\frac{1}{r} + 2r\limsup_{n\to\infty}\alpha_{n,l_n}\right) + (k-1)\limsup_{n\to\infty}\alpha_{n,l_n} = \frac{2k+1}{r},$$

donde $\limsup_{n\to\infty}\alpha_{n,l_n} = 0$, $l_n = m = o(n)$.

Haciendo $r \to \infty$, obtenemos que

$$P\{M_n \leq u_n\} - P^k\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n\right\} \to 0, n \to \infty.$$

■

Ahora estamos en condiciones de demotrar el Teorema de Fisher-Tippet en el caso estacionario.

Demostración. (**Del Teorema 16**)

Sea $u_n = \frac{x}{a_n} + b_n$, entonces por el Lema 20

$$P\{M_{nk} \leq u_{nk}\} - P^k\{M_n \leq u_{nk}\} \to 0, n \to \infty,$$

es decir,

$$P\left\{M_{nk} \leq \frac{x}{a_{nk}} + b_{nk}\right\} - P^k\left\{M_n \leq \frac{x}{a_{nk}} + b_{nk}\right\} \to 0, n \to \infty,$$

que se satisface para toda k, lo cual nos dice que G es máx-estable, como vimos en la Observación 17, ya que $P\{a_{nk}(M_n - b_{nk}) \leq x\} \to G^{\frac{1}{k}}(x)$. Entonces G debe ser una distribución de Valores Extremos, según el Teorema 8. ■

1.3 La Condición $D'(u_n)$ y la convergencia de $P\{M_n \leq u_n\}$

En la sección anterior demostramos una extensión del Teorema de Fisher-Tippet cuando la sucesión es estacionaria pero satisface la Condición $D(u_n)$, así que a simple vista podemos pensar que esta condición es suficiente para que se cumpla la Aproximación de Poisson (Teorema 1), pero en realidad no basta con ella y debemos pedir una hipótesis adicional. Cuando $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es estacionaria la equivalencia entre (1.1) y (1.2) no es cierta en general, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 21 *Consideremos el Ejemplo 14 para $k \geq 2$. Si suponemos que se cumple (1.2) entonces*

$$\begin{aligned}
P\{M_n \leq u_n\} &= P\{\max(X_1,\ldots,X_n) \leq u_n\} \\
&= P\{\max(Y_1,\ldots,Y_n,Y_{n+1},\ldots,Y_{n+k-1}) \leq u_n\} \\
&= P\{\max(Y_1,\ldots,Y_n) \leq u_n, Y_{n+1} \leq u_n,\ldots,Y_{n+k-1} \leq u_n\} \\
&= P\{\max(Y_1,\ldots,Y_n)\} F^{k-1}(u_n) \to e^{-\frac{\tau}{k}}, n \to \infty
\end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
nP\{Y_1 > u_n\} &= n\left(1 - F^{\frac{1}{k}}(u_n)\right) \\
&= \frac{n(1-F(u_n))}{1 + F^{\frac{1}{k}}(u_n) + \cdots + F^{\frac{k-1}{k}}(u_n)} \to \frac{\tau}{k}, n \to \infty,
\end{aligned}$$

en el entendido de que $F(u_n) \to 1, n \to \infty$, pues $u_n \to x_F$ si $n \to \infty$. Para que utilizando el hecho de que $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ es sucesión de v.a.i.i.d. aseguremos que se cumple $P\{\max(Y_1,\ldots,Y_n)\} \to e^{-\frac{\tau}{k}}, n \to \infty$.

En este ejemplo sucede que $P\{M_n \leq u_n\} \to e^{-\frac{\tau}{k}} \geq e^{-\tau}$ porque $k \geq 2$. Pero también nos deja claro que la condición $D(u_n)$ no es suficiente para que se de la equivalencia, ya que si suponemos que se cumple la expresión (1.2), solamente podemos asegurar que $P\{M_n \leq u_n\} \geq e^{-\tau}$, tal como podemos observar en el desarrollo de la demostración del Teorema 23. Tendremos la igualdad si suponemos cierta una hipótesis adicional, la cual establecemos en la siguiente definición.

Definición 22 *La condición $D'(u_n)$ se satisface para la sucesión estacionaria $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ y la sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ de reales si*

$$\limsup_{n\to\infty} n \sum_{j=2}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_1 > u_n, X_j > u_n\} \to 0, \ \ si\ k \to \infty.$$

Podemos observar que de cumplirse $n(1 - F(u_n)) \to \tau, n \to \infty$, entonces hay en promedio $\frac{\tau}{k}$ excedentes de u_n en el bloque $X_1, \ldots, X_{\left[\frac{n}{k}\right]}$. La condición $D'(u_n)$ acota la probablidad de que haya más de un excedente por $X_1, \ldots, X_{\left[\frac{n}{k}\right]}$. Conviene mencionar que el número de excedentes define un proceso puntual (ver Apéndice) que converge débilmente a un proceso Poisson, suponiendo $D(u_n)$ $D'(u_n)$, como veremos en la última sección de este capítulo.

Además, ésta es una condición de antiagrupaminetos para la sucesión $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ estacionaria, pues si se cumple $D'(u_n)$ entonces

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{1\leq i<j\leq\left[\frac{n}{k}\right]} I_{\{X_i>u_n, X_j>u_n\}}\right) &= \sum_{1\leq i<j\leq\left[\frac{n}{k}\right]} E\left(I_{\{X_i>u_n, X_j>u_n\}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]-1} \sum_{j=i+1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P(X_1 > u_n, X_j > u_n) \to 0, n \to \infty, \end{aligned}$$

es decir, la aparición de excedentes a u_n por pares (X_i, X_j) es en promedio improbable si $n \to \infty$, o sea, en promedio habrán pocas acumulaciones o "clusters" si n es grande.

En general verificar la Condición $D'(u_n)$ es muy difícil, pero para sucesiones estacionarias gaussianas ésta se satisface si la sucesión de covarianzas cumple ciertas condiciones (ver [18]), que en la práctica no son difíciles de verificar.

Teorema 23 *(Aproximación de Poisson caso estacionario) Sea* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesión de reales tales que* $D(u_n)$ *y* $D'(u_n)$ *se satisfacen para la sucesión de v.a. estacionaria* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$*. Sea* $0 \leq \tau < \infty$*, entonces*

$$P\{M_n \leq u_n\} \to e^{-\tau}, n \to \infty, \tag{1.7}$$

si y sólo si,

$$n(1 - F(u_n)) \to \tau, n \to \infty. \tag{1.8}$$

Demostración.

Como $\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} > u_n\right\} = \bigcup_{j=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} \{X_j > u_n\}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_j > u_n\} - \sum_{1 \leq i < j \leq \left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_i > u_n, X_j > u_n\}$$

$$\leq P\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} > u_n\right\} \leq \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_j > u_n\}, \tag{1.9}$$

pero como $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es estacionaria tenemos

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_j > u_n\} = \left[\frac{n}{k}\right](1 - F(u_n)),$$

y así

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i < j \leq \left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_i > u_n, X_j > u_n\} &= \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]-1} \sum_{j=i+1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_i > u_n, X_j > u_n\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]-1} \sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_1 > u_n, X_k > u_n\} \\
&\leq \left[\frac{n}{k}\right] \sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_1 > u_n, X_k > u_n\}, \quad (1.10)
\end{aligned}$$

con lo que por (1.9) y (1.10)

$$
\begin{aligned}
1-\left[\frac{n}{k}\right](1-F(u_n)) &\leq P\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n\right\} \\
&\leq 1-\left[\frac{n}{k}\right](1-F(u_n)) \\
&\quad +\left[\frac{n}{k}\right]\sum_{j=2}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_i > u_n, X_j > u_n\}, \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

donde $\limsup\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{k}\right]\sum\limits_{j=2}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_i > u_n, X_j > u_n\} = o\left(\frac{1}{k}\right)$, pues se cumple $D'(u_n)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que se cumple (1.8), entonces es inmediato que

$$
\left[\frac{n}{k}\right](1-F(u_n)) \to \frac{\tau}{k}, n\to\infty,
$$

con lo que obtenemos las desigualdades

$$
\begin{aligned}
1-\frac{\tau}{k} &\leq \liminf_{n\to\infty} P\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n\right\} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} P\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n\right\} \leq 1-\frac{\tau}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right),
\end{aligned}
$$

pero como la condición $D(u_n)$ se satisface tenemos que

$$
P\{M_n \leq u_n\} - P^k\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n\right\} \to 0, n\to\infty,
$$

según el Lema 20.

Entonces

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{\tau}{k}\right)^k &\leq \liminf_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n\} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n\} \leq \left(1-\frac{\tau}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k,
\end{aligned}
$$

de donde haciendo $k\to\infty$

$$
\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n\} = e^{-\tau}.
$$

($\Rightarrow$) Si ahora suponemos que se cumple (1.7), por la condición $D(u_n)$ tenemos que

$$P\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n\right\} \to e^{-\frac{\tau}{k}}, n \to \infty.$$

Utilizando (1.11) tenemos que

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{\tau}{k}} &\leq \frac{1}{k}\liminf_{n\to\infty} n\left(1 - F\left(u_n\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{k}\limsup_{n\to\infty} n\left(1 - F\left(u_n\right)\right) \\ &\leq 1 - e^{-\frac{\tau}{k}} + o\left(\frac{1}{k}\right), \end{aligned} \tag{1.12}$$

pues $\left[\frac{n}{k}\right] \approx \frac{n}{k}$ para n grande.

Si aplicamos la regla de L'Hopital tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1 - e^{-\frac{\tau}{k}}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(1 - e^{-\frac{\tau}{k}}\right)}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \tau e^{\frac{\tau}{k}} = \tau,$$

por lo que multiplicando por k y haciendo $k \to \infty$ en la desigualdad (1.12) llegamos a que $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - F\left(u_n\right)\right) = \tau$. ■

Cabe mencionar que si $n\left(1 - F\left(u_n\right)\right) \to \infty, n \to \infty$ se satisface, entonces la condición $D'\left(u_n\right)$ no necesariamente se satisface, aún para el caso independiente. Lo anterior se debe a que el Teorema anterior nos dice que (1.7) y (1.8) son equivalentes si se cumplen $D\left(u_n\right)$ y $D'\left(u_n\right)$ simultáneamente, pero la primera se satisface automáticamente en el caso independiente y es posible encontrar una sucesión de reales $\left(u_n\right)_{n=1}^{\infty}$ adecuada que para $\tau = \infty$ satisfaga (1.7) pero no (1.8), como queda reflejado en el siguiente resultado.

Corolario 24 *Sea $\left(X_n\right)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estacionaria y supongamos que para τ arbitrariamente grande existe una sucesión de reales $\left(v_n\right)_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$n\left(1 - F\left(v_n\right)\right) \to \tau, n \to \infty,$$

y además se satisfacen las condiciones $D(v_n)$ y $D'(v_n)$. Entonces para cualquier sucesión de reales $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ tenemos que

$$P\{M_n \leq u_n\} \to 0, n \to \infty$$

si y sólo si

$$n(1 - F(u_n)) \to \infty, n \to \infty.$$

Demostración.

Sea $\tau < \infty$.

Si suponemos que $n(1 - F(u_n)) \to \infty, n \to \infty$, entonces claramente $u_n \leq v_n$ para n suficientemente grande.

Por el teorema anterior

$$\limsup_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n\} \leq \lim_{n\to\infty} P\{M_n \leq v_n\} = e^{-\tau},$$

pues se cumplen las condiciones $D(v_n)$ y $D'(v_n)$.

Así que si $\tau \to \infty$, entonces

$$P\{M_n \leq u_n\} \to 0, n \to \infty.$$

Supongamos ahora que $P\{M_n \leq u_n\} \to 0, n \to \infty$. Para $\tau > 0$ tomemos las sucesión $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $n(1 - F(v_n)) \to \tau, n \to \infty$. Entonces como se cumplen $D(v_n)$ y $D'(v_n)$,

$$P\{M_n \leq v_n\} \to e^{-\tau} > 0, n \to \infty.$$

Así que $u_n \leq v_n$ para n suficientemente grande, con lo que

$$n(1 - F(u_n)) \geq n(1 - F(v_n)) \to \tau, n \to \infty.$$

Dado que esto sucede para toda $\tau > 0$ arbitrariamente grande, entonces

$$n(1 - F(u_n)) \to \infty, n \to \infty.$$

■

Ejemplo 25 *Por el Teorema 23 podemos ver que para la sucesión $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ del Ejemplo 14, con $k=2$, la condición $D'(u_n)$ no debe cumplirse, a pesar de que $D(u_n)$ sí se satisface.*

Dado que X_1 y X_j son independientes para $j \geq 3$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
& n\sum_{j=2}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_1 > u_n, X_j > u_n\} \\
&= nP\{X_1 > u_n, X_2 > u_n\} + n\sum_{j=3}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P\{X_1 > u_n, X_j > u_n\} \\
&= nP\{\max(Y_1, Y_2) > u_n, \max(Y_2, Y_3) > u_n\} + n\left(\left[\frac{n}{k}\right] - 2\right) P^2\{X_1 > u_n\} \\
&= n\left(P\{Y_2 > u_n, Y_3 \leq u_n\} + P\{Y_2 > u_n \ o\ Y_1 > u_n, Y_3 > u_n\}\right) \\
&\quad + k\left[\frac{n}{k}(1 - F(u_n))\right]\left[\left(\left[\frac{n}{k}\right] - 2\right)(1 - F(u_n))\right] \\
&= n\left(P\{Y_2 > u_n, Y_3 \leq u_n\} + P\{Y_2 > u_n \ o\ Y_1 > u_n, Y_3 > u_n\}\right) + \frac{\tau^2}{k} + o(1),
\end{aligned}
$$

cuando $n \to \infty$. Donde

$$nP\{Y_2 > u_n, Y_3 \leq u_n\} \sim nP\{Y_1 > u_n\} \to \frac{\tau}{2}, n \to \infty,$$

con lo que la condición $D'(u_n)$ no se satisface. De hecho,

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} I_{\{X_i > u_n, X_{i+1} > u_n\}}\right) = nP\{X_1 > u_n, X_2 > u_n\} \to \frac{\tau}{2}$$

nos dice que el promedio de excedentes por pares (X_i, X_{i+1}) se estabiliza alrededor de $\frac{\tau}{2} > 0$. Los máximos aparecen en "clusters" de tamaño 2.

1.4 Sucesiones independientes asociadas y el índi extremo

Definición 26 *Denotaremos por $\left(\widetilde{X}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ a la sucesión de v.a.i.i.d. que tienen la misma distribución F que una sucesión estacionaria $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ dada. A $\left(\widetilde{X}_n\right)_{n=1}^{\infty}$*

se le conoce como sucesión independiente asociada a $(X_n)_{n=1}^{\infty}$*, y escribiremos* $\widetilde{M}_n = \max\left(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n\right)$.

Para nuestros propósitos deseamos averiguar si existe cierta similitud entre la distribución límite no degenerada de la sucesión independiente asociada y la correspondiente a la sucesión estacionaria en cuestión.

Teorema 27 *Sea* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión estacionaria que satisface las Condiciones* $D(u_n)$ *y* $D'(u_n)$*. Entonces para* $r > 0$ *tenemos que*

$$P\{M_n \leq u_n\} \to r, n \to \infty$$

si y sólo si

$$P\left\{\widetilde{M}_n \leq u_n\right\} \to r, n \to \infty.$$

El mismo resultado se cumple para $r = 0$ *si las Condiciones* $D(u_n)$ *y* $D'(u_n)$ *son reemplazadas pidiendo que para* $\tau > 0$ *arbitrariamente grande exista* $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ *que satisfaga* $n(1 - F(v_n)) \to \tau, n \to \infty$ *y las Condiciones* $D(v_n)$ *y* $D'(v_n)$ *sean válidas.*

Demostración.

Claramente

$$P\left\{\widetilde{M}_n \leq u_n\right\} \to r = e^{-\tau}, n \to \infty,$$

si y sólo si,

$$1 - F(u_n) \to \frac{\tau}{n}, n \to \infty,$$

aplicando el Teorema 1 con $\tau = -\ln r$, ya que $\left(\widetilde{X}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. Lo anterior también es cierto para $P\{M_n \leq u_n\}$ si usamos el Teorema 23.

Para el caso $r = 0$, aplicamos el Corolario 24. ∎

Teorema 28 *Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estacionaria que satisface las Condiciones $D(u_n)$ y $D'(u_n)$, donde $u_n = \frac{x}{a_n} + b_n$ para cada real x, y $(a_n > 0)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de reales. Entonces*

$$P\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} \xrightarrow{d} G(x),$$

para alguna distribución G no degenerada, si y sólo si,

$$P\left\{a_n\left(\widetilde{M}_n - b_n\right) \leq x\right\} \xrightarrow{d} G(x).$$

Demostración.

Si $G(x) > 0$, el resultado es cierto por la primera parte del Teorema 27, haciendo $r = G(x)$.

En el caso en que $G(x) = 0$, dado que G es continua (pues necesariamente es una distribución de Valores Extremos), tenemos que dado $0 < \tau < \infty$ existe x_0 tal que $G(x_0) = e^{-\tau}$.

Así que como en particular para $v_n = \frac{x_0}{a_n} + b_n$ se satisfacen $D(v_n)$ y $D'(v_n)$, tenemos que si suponemos que se cumple

$$P\left\{\widetilde{M}_n \leq u_n\right\} \to e^{-\tau}, n \to \infty$$

o

$$P\{M_n \leq u_n\} \to e^{-\tau}, n \to \infty,$$

entonces por el Teorema 23 o por el Teorema 1, según sea lo supongamos, llegamos a que $n(1 - F(v_n)) \to \tau, n \to \infty$. Entonces la equivalencia, en este caso, es consecuencia de la segunda parte del Teorema 27. ■

Si la Condición $D(u_n)$ se satisface para una apropiada $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, los teoremas vistos hasta ahora nos dicen que cualquier distribución límite no degenerada para el máximo de la sucesión estacionaria $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ debe ser una de Valores Extremos. Pero es aún más interesante observar el papel que desempeña $D'(u_n)$, ya que cuando se añade a la Condición $D(u_n)$, tenemos que la existencia de una distribución límite para el máximo $\widetilde{M}_n$ de la sucesión independiente asociada. implica una distribución límite del mismo tipo para M_n.

Recordemos que como hemos visto, la expresión (1.8) junto con la Condición $D(u_n)$, sólo son suficientes para garantizar que $\liminf\limits_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n\} \geq e^{-\tau}$. En el siguiente resultado podemos ver cómo $P\{M_n \leq u_n\}$ puede converger a $e^{-\theta\tau}$ para algún real $1 \leq \theta \leq 1$, sin pedir que se cumpla la Condición $D'(u_n)$.

Teorema 29 *Para $\tau > 0$ sea $(u_n(\tau))_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales definida tal que $n(1 - F(u_n(\tau))) \to \tau, n \to \infty$ y la Condición $D(u_n)$ se satisfacen para cada τ. Entonces existen constantes θ, θ', $0 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$ tales que*

$$\limsup_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n(\tau)\} = e^{-\theta\tau}$$
$$y \ \liminf_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n(\tau)\} = e^{-\theta'\tau}.$$

Así que si existe $\tau^* > 0$ tal que $P\{M_n \leq u_n(\tau^*)\}$ converge, entonces $\theta = \theta'$ y $\lim\limits_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n(\tau)\} = e^{-\theta\tau}$ para toda $\tau > 0$.

Demostración.

Como antes, dado que $D(u_n(\tau))$ se satisface, tenemos que

$$P\{M_n \leq u_n(\tau)\} - P^k\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n(\tau)\right\} \to 0, n \to \infty,$$

donde k es fijo.

Supongamos que $\limsup\limits_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n(\tau)\} = \psi(\tau)$, entonces por lo anterior tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} P\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]} \leq u_n(\tau)\} = \psi^{\frac{1}{k}}(\tau).$$

Ahora necesitamos hacer una observación técnica. Sean $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales y $k_1, \ldots, k_m$ enteros distintos en $\{1, 2, \ldots, Kn\}$. para alguna constante K, tal que $m \leq Kn$, entonces, si por ejemplo $u_n \geq v_n$,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{X_{k_i} \leq u_n\}\right) - P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{X_{k_i} \leq v_n\}\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{m}\{v_n < X_{k_i} \leq u_n\}\right)$$

$$\leq Kn\left(F\left(u_n\right)-F\left(v_n\right)\right),$$

con lo que llegamos a que

$$\left|F_{k_1,\ldots,k_m}\left(u_n\right)-F_{k_1,\ldots,k_m}\left(v_n\right)\right|\leq Kn\left|F(u_n)-F(v_n)\right|,$$

por ser $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ estacionaria.

Entonces

$$\begin{aligned}
&\left|P\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]}\leq u_n\left(\tau\right)\right\}-P\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]}\leq u_{\left[\frac{n}{k}\right]}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right\}\right|\\
&\leq\left[\frac{n}{k}\right]\left|\left(1-F\left(u_{\left[\frac{n}{k}\right]}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right)\right)-\left(1-F\left(u_n\left(\tau\right)\right)\right)\right|\\
&=\left[\frac{n}{k}\right]\left|\frac{\frac{\tau}{k}}{\left[\frac{n}{k}\right]}\left(1+o\left(1\right)\right)-\frac{\tau}{n}\left(1+o\left(1\right)\right)\right|\\
&=o\left(1\right)\longrightarrow 0, n\rightarrow\infty.
\end{aligned}$$

Así que dado que $\limsup_{n\to\infty}P\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]}\leq u_{\left[\frac{n}{k}\right]}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right\}=\psi\left(\frac{\tau}{k}\right)$, tenemos por la observación anterior que

$$\limsup_{n\to\infty}P\left\{M_{\left[\frac{n}{k}\right]}\leq u_n\left(\frac{\tau}{k}\right)\right\}=\psi\left(\frac{\tau}{k}\right),$$

lo que nos permite escribir $\psi\left(\frac{\tau}{k}\right)=\psi^{\frac{1}{k}}\left(\tau\right)$ para toda $\tau>0$, $k=1,2,\ldots$

Observemos que dado que para toda $\tau'<\tau$ sucede que para n suficientemente grande $u_n\left(\tau'\right)>u_n\left(\tau\right)$, entonces $\psi\left(\tau\right)$ es no creciente y positiva, pues $\liminf_{n\to\infty}P\{M_n\leq u_n\}\geq e^{-\tau}$ como ya se había mencionado antes. Con lo anterior, la ecuación funcional $\psi\left(\frac{\tau}{k}\right)=\psi^{\frac{1}{k}}\left(\tau\right)$, con ψ positiva y no creciente, tiene como única solución

$$e^{-\tau}\leq\psi\left(\tau\right)=e^{-\theta\tau},\text{ con }\theta\geq 0.$$

Así que

$$\limsup_{n\to\infty}P\{M_n\leq u_n\left(\tau\right)\}=e^{-\theta\tau}$$

para algún $0\leq\theta\leq 1$.

De manera análoga llegamos a que $\liminf_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n(\tau)\} = e^{-\theta'\tau}$, donde $0 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$.

Si sucede que $P\{M_n \leq u_n(\tau)\}$ converge para alguna $\tau > 0$, entonces necesariamente $e^{-\theta\tau} = e^{-\theta'\tau}$, con lo que

$$\theta = \theta' \text{ y } \lim_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n(\tau)\} = e^{-\theta\tau}$$

para toda $\tau > 0$. ■

Esto nos motiva para dar la siguiente definición.

Definición 30 *(Índice Extremo) Decimos que* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de v.a. tiene índice extremo* θ $(0 \leq \theta \leq 1)$ *si para cada* $\tau > 0$ *existe una sucesión* $(u_n(\tau))_{n=1}^{\infty}$ *de reales tal que*

(i) $n(1 - F(u_n(\tau))) \to \tau, n \to \infty$

(ii) $P\{M_n \leq u_n(\tau)\} \to e^{-\theta\tau}, n \to \infty$.

Observación 31 *Es importante destacar que si (i) se cumple para alguna* $\tau^* > 0$ *entonces se satisface también para toda* $\tau > 0$. *En efecto, verificamos que para* $u_n(\tau) = u_{\left[\frac{n}{\tau}\tau^*\right]}(\tau^*)$ *cuando* $n \to \infty$.

$$n(1 - F(u_n(\tau))) \sim \frac{\tau}{\tau^*}\left[\frac{n}{\tau}\tau^*\right]\left(1 - F\left(u_{\left[\frac{n}{\tau}\tau^*\right]}(\tau^*)\right)\right) \to \frac{\tau}{\tau^*}\tau^* = \tau$$

Por el Teorema 29, si (i) se satisface y se cumple la Condición $D(u_n(\tau))$ *para cada* τ, *y* $P\{M_n \leq u_n(\tau^*)\}$ *converge para alguna* $\tau^* > 0$, *entonces (ii) se satisface para algún* $0 \leq \theta \leq 1$ *y toda* $\tau > 0$, *con lo que* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *tiene índice extremo* θ.

Teorema 32 *Sea* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *estacionaria con índice extremo* θ. *Si* $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de reales y* $0 \leq r \leq 1$, *entonces*

(i) Para $\theta > 0$,

$$P\left\{\widetilde{M}_n \leq v_n\right\} \to r, n \to \infty$$

si y sólo si

$$P\{M_n \le v_n\} \to r^{\theta}, n \to \infty$$

(*ii*) *Para* $\theta = 0$, *si*

$$\liminf_{n\to\infty} P\{\widetilde{M}_n \le v_n\} > 0$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \le v_n\} = 1,$$

y si $\limsup_{n\to\infty} P\{M_n \le v_n\} < 1$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\widetilde{M}_n \le v_n\} = 0.$$

Demostración.

(*i*) Supongamos que $\theta > 0$.

($\Rightarrow$) Si $P\left\{\widetilde{M}_n \le v_n\right\} \to r$ donde $0 < r \le 1$, tomemos $\tau > 0$ tal que $e^{-\tau} < r$. Entonces como

$$P\left\{\widetilde{M}_n \le u_n(\tau)\right\} \to e^{-\tau}, n \to \infty$$

y

$$P\left\{\widetilde{M}_n \le v_n\right\} \to r > e^{-\tau}, n \to \infty$$

podemos asegurar que para n suficientemente grande $v_n \ge u_n(\tau)$. Así que tenemos

$$\liminf_{n\to\infty} P\{M_n \le v_n\} \ge \lim_{n\to\infty} P\{M_n \le u_n(\tau)\} = e^{-\theta\tau},$$

para toda $\tau > 0$ tal que $e^{-\tau} < r$, por lo que

$$\liminf_{n\to\infty} P\{M_n \le v_n\} \ge r^{\theta}.$$

Si ahora tomamos $\tau > 0$ tal que $e^{-\tau} > r$ donde $0 \le r < 1$, para n suficientemente grande tenemos $v_n \le u_n(\tau)$ pues

$$P\left\{\widetilde{M}_n \le u_n(\tau)\right\} \to e^{-\tau}, n \to \infty$$

y

$$P\left\{\widetilde{M}_n \leq v_n\right\} \to r < e^{-\tau}, n \to \infty$$

con lo que

$$\limsup_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq v_n\right\} \leq \lim_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq u_n\left(\tau\right)\right\} = e^{-\theta\tau},$$

y por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq v_n\right\} \leq r^{\theta}.$$

Observando que de las dos desigualdades obtenidas $\lim_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq v_n\right\}$ vale $1 = r^{\theta}$ para $r = 1$, y cuando $r = 0$ vale $0 = r^{\theta}$, combinando los dos límites obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq v_n\right\} = r^{\theta} \text{ para } 0 < r < 1.$$

($\Leftarrow$) Si ahora suponemos cierto que $\lim_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq v_n\right\} = r^{\theta}$, de una manera análoga a la anterior podemos demostrar que $\lim_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leq v_n\right\} = r$.

(ii) Supongamos que $\theta = 0$.

Sea $u_n\left(\tau\right)$ tal que $\lim_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq u_n\left(\tau\right)\right\} = 1$ para cada $\tau > 0$.

Si $\liminf_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leq v_n\right\} = r > 0$ y τ es tal que $r > e^{-\tau}$, tenemos que para n suficientemente grande $v_n \geq u_n\left(\tau\right)$, pues sabemos además que

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leq u_n\left(\tau\right)\right\} = e^{-\tau}.$$

Por lo anterior tenemos

$$\liminf_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq v_n\right\} \geq \lim_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq u_n\left(\tau\right)\right\} = 1,$$

con lo que necesariamente $\lim_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq v_n\right\} = 1$.

Si ahora sucede que $\limsup_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq v_n\right\} < 1$, es inmediato que para τ suficientemente grande $v_n \leq u_n\left(\tau\right)$, así que obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leq v_n\right\} \leq \liminf_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leq u_n\left(\tau\right)\right\} = e^{-\tau}$$

entonces haciendo $\tau \to \infty$, llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leq v_n\right\} = 0.$$

■

De este teorema se desprende el siguiente corolario, que nos da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la distribución asintótica para $\widetilde{M}_n$ del mismo tipo que la correspondiente para M_n.

Corolario 33 *Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. estacionaria con índice extremo $\theta > 0$, entonces M_n tiene una distribución límite no degenerada, si y sólo si, $\widetilde{M}_n$ también la tiene, y son entonces del mismo tipo, es decir, existen reales $\alpha > 0$ y β tales que $G(\alpha x + \beta) = G^*(x)$, donde G y G^* son las distribuciones límite de M_n y $\widetilde{M}_n$, respectivamente. La misma normalización puede ser usada, o un conjunto de constantes puede ser alterado para dar precisamente la misma distribución límite.*

Demostración.

Supongamos que $P\left\{a_n\left(\widetilde{M}_n - b_n\right) \leq x\right\} \to G(x)$, para G distribución no degenerada, entonces según (i) del Teorema 32 tenemos que

$$P\left\{a_n\left(M_n - b_n\right) \leq x\right\} \to G^{\theta}(x),$$

aplicada a $u_n = \frac{x_n}{a_n} + b_n$.

Recordemos que como G es de valores extremos y así max-estable (Teorema 8), entonces G^{θ} es también del mismo tipo.

Si ahora sucede que

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a_n\left(M_n - b_n\right) \leq x\right\} \to H(x),$$

con $H(x)$ no degenerada, de la misma manera que antes, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a_n\left(\widetilde{M}_n - b_n\right) \leq x\right\} \to H^{\frac{1}{\theta}}(x),$$

y por ser $H^{\frac{1}{\theta}}(x)$ la distribución límite los máximos de una sucesión de v.a.i.i.d., debe ser distribución de Valores Extremos y por tanto max-estable (Teorema 8).

Para ver que sucede con la normalización, supongamos que

$$P\left\{a_n\left(\widetilde{M}_n - b_n\right) \leq x\right\} \to G(x),$$

entonces por lo antes demostrado,

$$P\left\{a_n\left(M_n - b_n\right) \leq x\right\} \to G(ax + b),$$

donde $G^{\theta}(x) = G(ax+b)$ para reales $a > 0$ y b. Entonces podemos escribir que

$$P\left\{\alpha_n\left(M_n - \beta_n\right) \leq x\right\} \to G(x),$$

con $\alpha_n = aa_n$, $\beta_n = b_n - \frac{b}{aa_n}$, según el Teorema de Khintchine (Teorema 1.2.3 de [18]). ∎

Corolario 34 *Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ estacionaria con índice extremo $\theta = 0$ y que satisface $D(u_n(\tau))$ para $u_n(\tau)$ tal que $n(1 - F(u_n(\tau))) \to \tau, n \to \infty$, para $0 < \tau < \infty$, entonces no es posible tener*

$$P\left\{a_n\left(\widetilde{M}_n - b_n\right) \leq x\right\} \xrightarrow{d} G(x) \ \ y \ P\left\{a_n\left(M_n - b_n\right) \leq x\right\} \xrightarrow{d} H(x)$$

para G y H distribuciones no degeneradas.

Demostración.

Supongamos lo contrario, es decir, es posible tener $\widetilde{M}_n$ y M_n ambos con distribuciones límite no degeneradas.

Sea $v_n = \frac{x_n}{a_n} + b_n$, ocurre que por el teorema anterior parte (ii), $H(x) = 1$ cuando $G(x) > 0$. Así tenemos que $x_0 = \inf\{x \mid G(x) > 0\} < \infty$ y $H(x) = 1$ para $x \geq x_0$.

Dado que G es de valores extremos y tiene punto final finito, debe ser del tipo Frechét Φ_α (Corolario 1.6.3 de [18]), i.e. $G(x) = \psi(a(x - x_0))$ donde $\psi(x) = 0$

para $x \leq 0$ y $\psi(x) = e^{-x^{-\alpha}}$ para $x > 0$, y alguna $\alpha > 0$. Por el Teorema 1.2.3 de [18], si $\gamma_n = u_n(1)$, entonces

$$P\{M_n \leq \gamma_n x\} \to \psi(x).$$

Además

$$P\left\{\widetilde{M}_n \leq \frac{x}{a_n} + b_n\right\} \to \psi(a(x - x_n)),$$

por lo que

$$\gamma_n^{-1} a_n^{-1} \to a, n \to \infty,$$

y

$$\gamma_n^{-1}(b_n - 0) \to -a x_0, n \to \infty.$$

Entonces

$$P\{M_n \leq \gamma_n x\} \xrightarrow{d} H\left(\frac{x}{a} + x_0\right),$$

ya que $P\left\{M_n \leq \frac{x}{a_n} + b_n\right\} \xrightarrow{d} H(x)$.

Dado que $D(u_n)$ se debe satisfacer cuando $u_n = \frac{x_n}{a_n} + b_n$, entonces H es distribución de Valores Extremos y por tanto continua, así que

$$P\{M_n \leq 0\} \to H(x_0) = 1, n \to \infty.$$

Pero $F^n(0) = P\{M_n \leq 0\} \to \psi(0) = 0, n \to \infty$, por lo que

$$P\{M_n \leq 0\} \leq P\{X_1 \leq 0\} = F(0) < 1, n \to \infty$$

lo cual es una contradicción, pues $P\{M_n \leq 0\} \to 1, n \to \infty$. ■

Recomendamos ver [1], [3], [6], [9], [18], [19], y [22] para casos interesantes de sucesiones estacionarias en las que se puede verificar si se cumplen o no las Condiciones $D(u_n)$ y $D'(u_n)$, y además calcular el índice extremo, según sea el caso. Debido a que algunos requieren de tratamientos muy particulares y como estamos interesados en el caso general no estacionario sólo damos las referencias.

1.5 La Distribución Pareto Generalizada y el Teorema de GBPdH

Daremos una breve introducción sobre la distribución Pareto Generalizada (DPG), así como el papel que desempeña en otro resultado central de la TVE conocido como el Teorema de Gnedenko-Balkema-Pickands-de Haan (GBPdH), y gracias al cual se deriva un método de estimación de altos cuantiles conocido como Modelo de Picos sobre el Umbral (POT) que puede ser de gran utilidad en la Administración de Riesgos (para revisar algunas aplicaciones de este método ver [5] y [6]).

Para precisar la noción de exceso tenemos la siguiente definición.

Definición 35 *Sea X una v.a con función de distribución F y extremo derecho x_F. Para todo u fijo, $u < x_F$, decimos que*

$$F_u(x) = P\{X - u \leq x | X > u\}, x \geq 0$$

es la función de distribución de exceso sobre el umbral u de la v.a. X.

Una propiedad importante de F_u es que su definición nos permite escribir que

$$\overline{F}(u + y) = \overline{F}(u)\,\overline{F}_u(y), 0 \leq y < x_F - u.$$

Definición 36 *La función media de exceso de una v.a. X con distribución F está dada por*

$$e(u) = E(X - u \mid X > u)$$

La siguiente familia de distribuciones se relaciona con los excesos por encima de un umbral alto.

Definición 37 *(Distribución Pareto Generalizada) La función de distribución G_ξ definida como*

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 1-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}} & si\ \xi \neq 0 \\ 1-e^{-x} & si\ \xi = 0 \end{cases}$$

donde

$$x \geq 0 \qquad si\ \xi \geq 0$$

$$0 \leq x \leq -\tfrac{1}{\xi} \quad si\ \xi < 0$$

se conoce como la Distribución Pareto Generalizada (DPG). Si x lo reemplazamos por $\frac{x-v}{\beta}$ para los reales v y $\beta > 0$, obtenemos la familia $G_{\xi,v,\beta}$ con parámetros de localización y escala, también referida comoDPG.

Cabe mencionar que $G_{\xi,0,\beta}$ juega un papel importante en la práctica, y se puede reescribir como

$$G_{\xi,\beta}(x) = 1-\left(1+\xi\frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, x \in D(\xi,\beta),$$

donde

$$D(\xi,\beta) = \begin{cases} [0,\infty) & \text{si } \xi \geq 0 \\ \left[0,-\frac{\beta}{\xi}\right] & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

A continuación enunciamos un resultado básico en la TVE que establece la relación entre el dominio de atracción del máximo de la distribución VEG $D(H_\xi)$ y la DPG.

Teorema 38 *(Gnedenko-Balkema-Pickands-de Haan (GBPdH)) Sea ξ real. Son equivalentes:*

(*i*) $F \in D(H_\xi)$.

(ii) Existe una función positiva bien definida $a(u)$ tal que para $1+\xi x>0$ se tiene que

$$\lim_{u\to x_F}\frac{1-F(u+xa(u))}{1-F(u)}=\overline{G}_\xi(x)=\begin{cases}(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}} & si\ \xi\neq 0\\ e^{-x} & si\ \xi=0\end{cases}$$

(iii) Para x, $y>0$, $y\neq 1$,

$$\lim_{s\to\infty}\frac{U(sx)-U(s)}{U(sy)-U(s)}=\begin{cases}\frac{x^\xi-1}{y^\xi-1} & si\ \xi\neq 0\\ \frac{\ln x}{\ln y} & si\ \xi=0\end{cases},$$

donde $U(t)=F^{-1}\left(1-\frac{1}{t}\right)$, $t>0$, con $F^{-1}(t)=\inf\{x|F(x)\geq t\}$ y $0<t<1$.

No demostraremos este teorema y solamente haremos observaciones interesantes respecto a este resultado central. Entonces derivar alguna extensión del Teorema de Fisher-Tippet para el caso no estacionario, pero donde las variables aleatorias tengan igual distribución, nos permitirá utilizar el método POT para la estimación de altos cuantiles.

Observación 39 *Haciendo cálculos de manera directa*

$$\frac{1-F(u+xa(u))}{1-F(u)}=\frac{P(X>u+xa(u))}{P(X>u)}=P\left(\frac{X-u}{a(u)}>x|X>u\right),$$

por lo que el Teorema 38 implica que dada la v.a. X con distribución $F\in D(H_\xi)$, entonces

$$\lim_{u\to x_F}P\left(\frac{X-u}{a(u)}>x|X>u\right)=\begin{cases}(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}} & si\ \xi\neq 0\\ e^{-x} & si\ \xi=0\end{cases}$$

nos da una aproximación (en escala) a la distribución de los excesos sobre un umbral alto u, donde el factor de escala es $a(u)$. Esta importante relación puede reescribirse como

$$\lim_{u\to x_F}\left|F_u(x)-G_{\xi,\beta(u)}(x)\right|=0.$$

También podemos establecer algunas propiedades de la DPG, que resultan útiles en la derivación del Modelo POT.

Teorema 40 *(Propiedades de la DPG) Supongamos que X tiene una DPG con parámetros ξ y β, entonces:*

(i) Para cada real ξ tenemos que $F \in D(H_\xi)$ si y sólo si

$$\lim_{u\to x_F} \sup_{0<x<x_F-u} \left|F_u(x) - G_{\xi,\beta(u)}(x)\right| = 0 \tag{1.13}$$

para alguna función positiva β.

(ii) Si $x_i \in D(\xi,\beta)$ para $i = 1, 2$, entonces

$$\frac{\overline{G}_{\xi,\beta}(x_1 + x_2)}{\overline{G}_{\xi,\beta}(x_1)} = \overline{G}_{\xi,\beta+\xi x_1}(x_2). \tag{1.14}$$

(iii) Supongamos que $\xi < 1$. Entonces para $u < x_F$

$$e(u) = E(X - u|X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1-\xi}, \beta + u\xi > 0. \tag{1.15}$$

Demostración.

(i) De acuerdo con la primera parte del Teorema 38

$$\lim_{u\to x_F} P\left(\frac{X-u}{a(u)} > x|X > u\right) = \lim_{u\to x_F} \frac{1 - F(u + xa(u))}{1 - F(u)}$$

$$= \begin{cases} (1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ e^{-x} & \text{si } \xi = 0 \end{cases},$$

que se puede reescribir como

$$\lim_{u\to x_F} P(X - u > x|X > u) = \begin{cases} \left(1+\xi \frac{x}{a(u)}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ e^{-x} & \text{si } \xi = 0 \end{cases} = G_{\xi,a(u)}(x),$$

por lo que

$$\lim_{u\to x_F}\left|F_u(x)-G_{\xi,\beta(u)}(x)\right|=0,$$

donde $\beta(u)=a(u)$.

Como la DPG es continua entonces

$$\lim_{u\to x_F}\sup_{0<x<x_F-u}\left|F_u(x)-G_{\xi,\beta(u)}(x)\right|=0.$$

(ii)

$$\begin{aligned}\overline{G}_{\xi,\beta+\xi x_1}(x_2)\,\overline{G}_{\xi,\beta}(x_1) &= \left(1+\xi\frac{x_2}{\beta+\xi x_1}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\left(1+\xi\frac{x_1}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\\ &= \left[1+\frac{\xi}{\beta}\left(x_1+\frac{x_2\beta}{\beta+\xi x_1}+\frac{\xi x_1x_2}{\beta+\xi x_1}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\\ &= \left[1+\frac{\xi}{\beta}(x_1+x_2)\right]^{-\frac{1}{\xi}}=\overline{G}_{\xi,\beta}(x_1+x_2).\end{aligned}$$

(iii) Por la definición de $e(u)$ tenemos que

$$\begin{aligned}e(u) &= \int_u^{x_F}(x-u)\,d\frac{F(x)}{\overline{F}(u)}=\frac{1}{\overline{F}(u)}\left((x-u)F(x)\Big|_u^{x_F}-\int_u^{x_F}F(x)\,dx\right)\\ &= \frac{1}{\overline{F}(u)}\left((x_F-u)-\int_u^{x_F}F(x)\,dx\right)=\frac{1}{\overline{F}(u)}\int_u^{x_F}\overline{F}(x)\,dx,\end{aligned}$$

para $0<u<x_F$, con X v.a. positiva con distribución F y esperanza finita.

Pero

$$\begin{aligned}\int_u^{x_F}\overline{G}_{\xi,\beta}(x)\,dx &= \int_u^{x_F}\left(1+\xi\frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}dx=\left(\frac{\beta}{\xi\left(1-\frac{1}{\xi}\right)}\left(1+\xi\frac{x}{\beta}\right)^{1-\frac{1}{\xi}}\right)\Big|_u^{x_F}\\ &= \left(0-\frac{\beta}{\xi-1}\left(\frac{\beta+\xi u}{\beta}\right)\left(1+\xi\frac{u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)=\frac{\beta+\xi u}{1-\xi}\overline{G}_{\xi,\beta}(u),\end{aligned}$$

pues $x_F=-\frac{\beta}{\xi}$ para $\xi<0$, y $x_F=\infty$ si $\xi\geq 0$, pero $1-\frac{1}{\xi}<0$.

Así que

$$e(u) = \frac{1}{\overline{G}_{\xi,\beta}(u)} \int_u^{x_F} \overline{G}_{\xi,\beta}(x)\, dx = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi},$$

para $\beta + \xi u > 0$. ∎

De la propiedad (i) tenemos que para una función β, que puede estimarse de los datos, podemos escribir

$$\overline{F}_u(x) = P\{X - u > x | X > u\} \approx \overline{G}_{\xi,\beta}(x), \ x > 0,$$

es decir, la DPG es una aproximación adecuada de la distribución de exceso F_u para u grande.

La propiedad (iii) nos dice que la función media de exceso $e(u)$ es una función lineal, de manera que un umbral u aceptable para estimar $e(u)$ debería ser alguno en el que el estimador en uso sea aproximadamente una función lineal alrededor de u.

1.6 Proceso puntual de los excedentes

En el Ejemplo 131 del Apéndice introducimos el concepto de proceso puntual de excedentes de un umbral u_n por las v.a. $X_1, \ldots, X_n$, a saber,

$$N_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{i}{n}}(\cdot)\, 1_{\{X_i > u_n\}}, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{1.16}$$

Donde para cada $A \in \mathcal{B}((0,1])$ definimos $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A \\ 0, & si\ x \notin A \end{cases}$, la medida de Dirac.

También indicamos su relación tan estrecha con la TVE, ya que si denotamos por $X_{n,n} \leq \cdots \leq X_{1,n} = M_n$ las estadísticas de orden de la muestra $X_1, \ldots, X_n$, entonces

$$\begin{aligned} \{N_n(0,1] = 0\} &= \{M_n \leq u_n\}, \\ \{N_n(0,1] < k\} &= \{X_{k,n} \leq u_n\}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

De las dos expresiones anteriores, concluimos que saber algo sobre la distribución asintótica de N_n nos permite no sólo saber cómo se comporta la distribución de M_n a medida de que n crece, sino que podemos decir también qué pasa con las estadísticas de orden.

En esta sección demostraremos la convergencia débil de la sucesión $(N_i)_{i=1}^{\infty}$ de tales procesos puntuales a un proceso Poisson homogéneo N sobre el espacio de estados $E = (0,1]$. Los conceptos básicos sobre procesos puntuales y el proceso Poisson pueden revisarse en el Apéndice.

1.6.1 Caso para v.a.i.i.d.

Supongamos que $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. y sea $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales. Por el Teorema 1, para cualquier $0 \leq \tau \leq \infty$, tenemos que $P\{M_n \leq u_n\} \to e^{-\tau}, n \to \infty$, si y sólo si,

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i > u_n\}}\right] = n\overline{F}(u_n) \to \tau, n \to \infty. \tag{1.18}$$

Esta última condición nos asegura que hay, en promedio, τ excedentes de los umbrales u_n por $X_1, \ldots, X_n$. Además, como veremos en el siguiente teorema, implica la convergencia débil de $(N_i)_{i=1}^{\infty}$ en $M_p(E)$, el espacio de todas las medidas puntuales sobre E (ver Apéndice).

Teorema 41 *Sea la sucesión $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ de v.a.i.i.d. con función de distribución común F. Supongamos que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de reales tal que* (1.18) *se satisface para alguna $0 < \tau < \infty$. Entonces el proceso puntual de excedentes $(N_i)_{i=1}^{\infty}$, dado por* (1.16), *converge débilmente en $M_p(E)$ a un proceso Poisson* *homogéneo N sobre $E = (0,1]$ con intensidad τ (N es un PPM($\tau\,|\cdot|$) con $|\cdot|$ la medida de Lebesgue, ver Apéndice).*

Demostración.

Podemos suponer que el proceso límite N es un proceso Poisson homogéneo sobre $[0,\infty)$. En este caso, por el Ejemplo 136, tenemos que N debe ser simple. Entonces podemos aplicar el Teorema 143.y por ende, solamente debemos verificar que se cumplen las expresiones (.6) y (.7) del Apéndice.

Para cada $A = (a,b] \subset (0,1]$

$$\begin{aligned} E\left[N_n(A)\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{i}{n}}(A)\, 1_{\{X_i>u_n\}}\right] = E\left[\sum_{a<\frac{i}{n}\le b} 1_{\{X_i>u_n\}}\right] = E\left[\sum_{i=[na]+1}^{[nb]} 1_{\{X_i>u_n\right.} \\ &= \sum_{i=[na]+1}^{[nb]} E\left[1_{\{X_i>u_n\}}\right] = \left([nb]-[na]\right)\overline{F}(u_n) \qquad (1. \\ &= \left(\frac{1}{n}[nb]-\frac{1}{n}[na]\right) n\overline{F}(u_n) \to (b-a)\,\tau = \tau\,|A| = E\left[N(A)\right], n \to \infty \end{aligned}$$

que prueba (.6).

Como $N_n(A) = \sum_{i=[na]+1}^{[nb]} 1_{\{X_i>u_n\}}$, tenemos que $N(A)$ se distribuye binomial con parámetros $\left([nb]-[na], \overline{F}(u_n)\right)$, entonces

$$\begin{aligned} P\left\{N_n(A)=0\right\} &= \left(1-\overline{F}(u_n)\right)^{[nb]-[na]} = \left(1-\frac{n\overline{F}(u_n)}{n}\right)^{\frac{1}{n}[nb]-\frac{1}{n}[na]} \\ &\to e^{-\tau(b-a)}, n \to \infty. \end{aligned}$$

Sea $k \geq 1$ y $B = \bigcup_{i=1}^{k}(c_i, d_i]$ de intervalos $(c_i, d_i]$ disjuntos entre si tales que $a < c_1 < d_1 < \cdots < c_k < d_k \leq b$, entonces para n suficientemente grande

$$\begin{aligned}
P\{N_n(B) = 0\} &= P\{N_n(c_i, d_i] = 0, i = 1, \ldots, k\} \\
&= P\left\{\max_{[nc_i]<j\leq[nd_i]} X_j \leq u_n,\ i = 1, \ldots, k\right\} \\
&= \prod_{i=1}^{k} P\left\{\max_{[nc_i]<j\leq[nd_i]} X_j \leq u_n\right\} = \prod_{i=1}^{k} P\{N_n(c_i, d_i] = 0\} \\
&\to \prod_{i=0}^{k} e^{-\tau(d_i - c_i)} = e^{-\tau\sum_{i=1}^{k}(d_i - c_i)} = e^{-\tau|B|} \\
&= e^{-E[N(B)]} = P\{N(B) = 0\},
\end{aligned}$$

que prueba (.7). ■

Ejemplo 42 *Aplicando el Teorema 41 y (1.17) tenemos que*

$$P\{X_{k,n} \leq u_n\} = P\{N_n(0,1] < k\} \to P\{N(0,1] < k\} = e^{-\tau}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\tau!}{i!}, n \to \infty,$$

lo que nos dice cómo se comporta la distribución de la estadística de orden $X_{k,n}$ *cuando* n *crece si* (1.18) *se satisface. De hecho, cuando* $k = 1$ *tenemos* $P\{M_n \leq u_n\} \to e^{-\tau}, n \to \infty$, *es decir, se cumple el Teorema 1.*

Ejemplo 43 *(Distribución límite para las estadísticas de orden) Sea* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *sucesión de v.a.i.i.d. y supongamos que existen sucesiones* $(a_n > 0)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *de números reales tales que* $P\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} \xrightarrow{d} H(x)$, *entonces para si aplicamos el ejemplo anterior a* $u_n = \frac{x}{a_n} + b_n$ *y* $\tau = \tau(x) = -\ln H(x)$ *tenemos que para cada* $k \geq 1$

$$P\{a_n(X_{k,n} - b_n) \leq x\} \to H^{(k)}(x) = H(x)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(-\ln H(x))!}{i!}, \tag{1.20}$$

que interpretamos como cero si $H(x) = 0$. Al revés, si para alguna $k \geq 1$ tenemos que $P\{a_n(X_{k,n} - b_n) \leq x\} \to G(x)$, para alguna G no degenerada, entonces por el Teorema 9, $G = H^{(k)}$ para alguna distribución de valores extremos H y (1.20) se satisface para toda $k \geq 1$.

1.6.2 Caso estacionario

En la Sección 3 fue posible extender el Teorema 1 al caso en el que la sucesión de v.a. $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es estacionaria (Teorema 23), pidiendo que se satisfacieran las Condiciones $D(u_n)$ y $D'(u_n)$ (definidas en las Secciones 2 y 3, respectivamente), respecto a alguna sucesión de reales $(u_n)_{n=1}^{\infty}$. En este sentido, es de esperarse que el Teorema 41 pueda extenderse al caso estacionario.

Teorema 44 *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. estacionaria y $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales que satisface* (1.18) *y las Condiciones $D(u_n)$ y $D'(u_n)$. Sea $(N_i)_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de procesos de excedentes definidos por* (1.16)*. Entonces $N_n \xrightarrow{d} N$ en $M_p(E)$, donde N es un proceso Poisson homogéneo sobre $E = (0,1]$ con intensidad τ.*

Demostración.

De nuevo, aplicaremos el Teorema 143 del Apéndice y entonces será necesario probar las expresiones (.6) y (.7) del Apéndice. En nuestro caso, siguen siendo válidas las líneas de (1.19) y por lo tanto, (.6) se satisface automáticamente. Resta entonces probar (.7) usando $D(u_n)$ y $D'(u_n)$.

Para facilitar los cálculos, podemos considerar conjuntos simples de la forma $B = (c_1, d_1] \cup (c_2, d_2]$ con $0 < c_1 < d_1 < c_2 < d_2 \leq 1$. El caso general se hace por analogía.

Sea $(a, b] \subset (0, 1]$, entonces

$$P\{N_n(a,b] = 0\} = P\left\{\max_{i \leq [nb]-[na]} X_i \leq u_n\right\} \to e^{-\tau(b-a)} = P\{N(a,b] = 0\}, \tag{1.21}$$

ya que $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es estacionaria, y aplicando el Teorema 23.

Como se satisface $D(u_n)$, tenemos que

$$\begin{aligned} P\{N_n(B)=0\} &= P\{N_n(c_1,d_1]=0, N_n(c_2,d_2]=0\} \\ &= P\left\{ \max_{c_1<\frac{i}{n}\le d_1} X_i \le u_n, \max_{c_2<\frac{i}{n}\le d_2} X_i \le u_n \right\} \\ &= P\left\{ \max_{c_1<\frac{i}{n}\le d_1} X_i \le u_n \right\} P\left\{ \max_{c_2<\frac{i}{n}\le d_2} X_i \le u_n \right\} + o(1). \end{aligned}$$

pues la distancia entre los conjuntos $\{[nc_1]+1,\ldots,[nd_1]\}$ y $\{[nc_2]+1,\ldots,[nd_2]\}$ excede $(c_2-d_1)n > l_n = o(n)$ que implica $\alpha_{n,l_n} \to 0$. Entonces por (1.21),

$$P\{N_n(B)=0\} \to e^{-\tau(d_1-c_1)}e^{-\tau(d_2-c_2)} = e^{-\tau|B|} = P\{N(B)=0\},$$

quedando así probada (.7) del Apéndice. ■

También en el caso estacionario es posible decir qué pasa con las estadísticas de orden, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 45 *Denotemos por $X_{n,n} \le \cdots \le X_{1,n}$ a las estadísticas de orden de $X_1,\ldots,X_n$. Bajo los supuestos del Teorema 44, tenemos que*

$$P\{X_{k,n} \le u_n\} = P\{N_n(0,1] < k\} \to P\{N(0,1] < k\} = e^{-\tau}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\tau!}{i!}, n \to \infty.$$

Como en la Sección 4, podemos ahora determinar la distribución límite de $X_{k,n}$ utilizando el concepto de sucesión independiente asociada $\left(\widetilde{X}_i\right)_{i=1}^{\infty}$ dada la sucesión estacionaria $(X_i)_{i=1}^{\infty}$, y denotaremos por $\widetilde{X}_{k,n}$ a la estadística de orden asociada correspondiente a $X_{k,n}$.

Ejemplo 46 *(Distribución límite para las estadísticas de orden) Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión estacionaria tal que existen sucesiones $(a_n>0)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales tales que $P\{a_n(M_n-b_n)\le x\} \xrightarrow{d} H(x)$, para alguna H distribución de*

Valores Extremos. Supongamos que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *dada por* $u_n = \frac{1}{a_n}x + b_n$ *satisface las condiciones* $D(u_n)$ *y* $D'(u_n)$*. Entonces para cada* $k \geq 1$ *se satisfacen*

$$P\left\{a_n\left(X_{k,n} - b_n\right) \leq x\right\} \rightarrow H(x) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-\ln H(x))!}{i!}$$

$$P\left\{a_n\left(\widetilde{X}_{k,n} - b_n\right) \leq x\right\} \rightarrow H(x) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-\ln H(x))!}{i!}.$$

Este resultado nos confirma la fuerte similitud que existe entre el comportamiento asintótico de las estadísticas de orden de la sucesión estacionaria $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *y las correspondientes de su sucesión independiente asociada* $\left(\widetilde{X}_i\right)_{i=1}^{\infty}$*, claro está, si se cumplen las Condiciones* $D(u_n)$ *y* $D'(u_n)$*.*

Capítulo 2

TVE para sucesiones de variables aleatorias no estacionarias.

En el capítulo anterior revisamos los resultados centrales de la TVE para sucesiones de variables aleatorias estacionarias (incluido el caso de v.a.i.i.d.), las cuáles por supuesto eran idénticamente distribuidas, más precisamente, dada la sucesión estacionaria $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ y una sucesión de reales $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ estudiamos las propiedades asintóticas de $P\{M_n \leq u_n\} = P\{X_i \leq u_n, 1 \leq i \leq n\}$ y su relación con $\prod_{i=1}^{n} P\{X_i \leq u_n\} = F^n(u_n)$ cuando n es suficientemente grande, observando que para n fijo u_n es una cota superior en los eventos $\{X_i \leq u_n\}$ que no depende de i, es decir, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ funciona como un conjunto de barreras contantes para $(X_i)_{i=1}^{\infty}$.

Dado que el objetivo principal de este documento es tratar las extensiones de los resultados del caso estacionario a alguna situación más general, en este capítulo estaremos interesados en sucesiones de variables aleatorias $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ cualesquiera, en general no estacionarias y no necesariamente con distribuciones marginales $F_i(x) = P\{X_i \leq x\}$ idénticas. Además, iremos un poco más lejos al considerar barreras no constantes $\{u_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ que dependen de i y n.

Sea pues $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. con función de distribución marginal

$F_i(x) = P\{X_i \leq x\}$ para cada i. Nos centraremos en la aproximación asintótica de probabilidades del tipo

$$P_{n,\{u_{ni}\}} = P\{X_i \leq u_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$$

mediante

$$\widetilde{P}_{n,\{u_{ni}\}} = P\left\{\widetilde{X}_i \leq u_{ni}, 1 \leq i \leq n\right\} = \prod_{i=1}^{n} F_i(u_{ni})$$

donde $\left(\widetilde{X}_i\right)_{i=1}^{\infty}$ es la sucesión asociada de variables aleatorias independientes con $F_i(x) = P\left\{\widetilde{X}_i \leq x\right\}$ para cada i. Entonces daremos condiciones suficientes para que la sucesión $(X_i)_{i=1}^{\infty}$, con respecto a $\{u_{ni}, i \leq n, n \geq 1\}$ dada, satisfaga $P_{n,\{u_{ni}\}} - \widetilde{P}_{n,\{u_{ni}\}} \to 0, n \to \infty$. Pondremos nuestra atención solamente en el caso interesante en el que $\widetilde{P}_{n,\{u_{ni}\}}$ tienda a un valor diferente de 0 o 1, es decir, desecharemos el caso degenerado.

Para conseguir el objetivo deseado necesitaremos tres condiciones. La primera condición nos asegurará que $\widetilde{P}_{n,\{u_{ni}\}}$ tiende a un valor entre 0 y 1, además de que relaciona a $(F_i)_{i=1}^{\infty}$ con $\{u_{ni}, i \leq n, n \geq 1\}$. La segunda condición es análoga a la Condición $D(u_n)$ del Capítulo anterior y por ende nos sirve para que las variables aleatorias cuyos índices están sufientemente separados, sean asintóticamente independientes. La tercera condición necesaria nos dice que las contribuciones significativas a $P_{n,\{u_{ni}\}}$ provienen solamente de aquellos términos cuyos índices difieren en una cantidad suficientemente grande; este tipo de condición es similar a $D'(u_n)$ vista en el Capítulo 1.

En el caso que $u_{ni} = u_n$ para toda $i \geq 1$, tenemos que $P_{n,\{u_{ni}\}}$ nos da la distribución del máximo parcial $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Como vimos en el primer apartado del Capítulo 1, la TVE clásica caracteriza la posible distribución asintótica de M_n cuando $n \to \infty$, donde las $X_i's$ son v.a.i.i.d., es decir,

$$P\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} = [F(u_n(x))]^n \to G(x)$$

donde $G(\cdot)$ es una Distribución de Valores Extremos, $(a_n > 0)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones normalizadoras, y $u_n(x) = \frac{x}{a_n} + b_n$.

Vimos que el mismo resultado es cierto aún si $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión estacionaria que satisface restricciones de dependencia débiles ($D(u_n)$ y $D'(u_n)$). Para probar este resultado demostramos que

$$P\{M_n \leq u_n(x)\} = [F(u_n(x))]^n + o(1). \tag{2.1}$$

El mismo procedimiento puede ser usado para el caso de una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas pero no estacionaria, es decir, se puede demostrar que para $n \to \infty$,

$$P\{X_i \leq u_{ni}, i \leq n\} = \prod_{i=1}^{n} F(u_{ni}) + o(1)$$

bajo ciertas condiciones (ver [11]).

Es importante observar que la expresión anterior puede incluir algunos casos en los que las variables aleatorias no son idénticamente distribuidas y es posible hacer transformaciones adecuadas via normalización. Por ejemplo, si $\left(\widetilde{X}_i\right)_{i=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión normal no estacionaria con $\mu_i = E\left(\widetilde{X}_i\right)$, $\sigma_i^2 = Var\left(\widetilde{X}_i\right)$ y $M_n = \max\left\{\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n\right\}$, entonces

$$\begin{aligned} P\left\{\widetilde{M}_n \leq u_n\right\} &= P\left\{\widetilde{X}_i \leq u_{ni}, i \leq n\right\} = P\left\{\left(\widetilde{X}_i - \mu_i\right)/\sigma_i \leq (u_{ni} - \mu_i)/\sigma_i, i \leq n \right. \\ &= P\{X_i \leq u_{ni}, i \leq n\}, \end{aligned}$$

donde $u_{ni} = (u_{ni} - \mu_i)/\sigma_i$ y $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión normal estándar no estacionaria.

Sin embargo, no siempre es posible hacer tales transformaciones, y por lo tanto supondremos que las distribuciones marginales son distintas. Debido a tal grado de generalización, no estaremos exentos de limitaciones en los resultados a obtener, tal como veremos en la extensión del Teorema de Fisher-Tippet para el caso más general, ya que en este caso la distribución límite resultante no está perfecta y explícitamente caracterizada como en los Teoremas 9 y 16, sino que pertenece a cierta familia de distribuciones que contiene de manera propia a la de Valores Extremos, pues existen casos en que la distribución límite de máximo no resulta ser una de Valores Extremos.

Este capítulo está dividido en cuatro secciones. En la primera definimos condiciones de independencia asintótica y de antiagrupamientos, en el contexto no estacionario general, que nos permiten extender la Aproximación de Poisson. En la sección 2 estudiamos los resultados que se cumplen cuando la condición de antiagrupamientos no se satisface pero sí la de independencia asintótica y surge la noción de índice extremo, el cual resulta jugar un papel importante y análogo al del caso estacionario, aunque tiene un comportamiento un poco diferente al del índice extremo de una sucesión estacionaria. Para la tercera sección dejamos el problema de determinar la distribución límite del máximo y precisamos el análogo al Teorema de Fisher-Tippet para sucesiones no estacionarias. En la última sección trataremos el proceso puntual que definen los excedentes de una sucesión no estacionaria sobre un cierto conjunto de barreras $\{u_{ni}, i \leq n, n \geq 1\}$, así como las condiciones suficientes para su convergencia distribucional y algunas variantes que se pueden hacer a tales condiciones con el fin de que sean más fáciles de verificar en la práctica.

Este capítulo es tomado principalmente de [11], [12] y [14].

2.1 Resultados bajo las Condiciones $D(\{u_{ni}\})$ y $D'(\{u_{ni}\})$

En esta sección revisaremos los resultados que se cumplen bajo ciertas condiciones parecidas a las que fueron necesarias para desarrollar la TVE en el caso estacionario, como se vió en el Capítulo 1.

Definamos $x_{0,i} = \sup\{x \mid F_i(x) < 1\}$ y sea $F_i(x_{0,i}-) = 1$ para cada i. Supondremos que

$$\overline{F}_{n,\max} = \sup\left\{\overline{F}_i(u_{in}), i \leq n\right\} \to 0, n \to \infty, \tag{2.2}$$

que es equivalente a que

$$u_{ni} \to x_{0,i}, n \to \infty, \text{ uniformemente en } i,$$

donde $\overline{F}_i(x) = 1 - F_i(x)$ para toda i. Además, centraremos nuestra atención en el caso en el que $\prod_{i=1}^{n} F_i(u_{ni})$ tiende a un valor diferente de 0 o 1, para que la distribución límite sea no degenerada.

Las definiciones siguientes nos darán las condiciones necesarias para probar que

$$P_{n,\{u_{ni}\}} - \prod_{i=1}^{n} F_i(u_{ni}) \to 0, n \to \infty \tag{2.3}$$

Definición 47 *Para cada natural $n \geq 1$ sean $(u_{ni})_{i=1}^{n}$ una sucesión de números reales y $F_n^* = F_n^*(\{u_{ni}\}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i(u_{ni})$. Decimos que $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ satisface la Condición A si*

$$\limsup_n F_n^* < \infty \qquad y \qquad \liminf_n F_n^* > 0 \tag{2.4}$$

Observación 48 *Trivialmente (2.3) se cumple para subsucesiones $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tales que $F_{n_k}^* \to 0, k \to \infty$ porque en este caso sucede que $P_{n_k,\{u_{n_k}\}} \to 1$ y además, $\prod_{i=1}^{n_k} F_i(u_{n_k,i}) = e^{\sum_{i=1}^{n_k} \ln F_i(u_{n_k,i})} \to e^0 = 1$.*

Observación 49 *Por la expresión (2.2) tenemos que $\overline{F}_i(u_{ni}) \to 0, n \to \infty$ ya que $0 \leq \overline{F}_i(u_{ni}) \leq \overline{F}_{n,\max}$ para toda n. Entonces*

$$\prod_{i=1}^{n} F_i(u_{ni}) = \prod_{i=1}^{n} e^{\ln\left(1-\overline{F}_i(u_{ni})\right)} = \prod_{i=1}^{n} e^{-(1+o(1))\overline{F}_i(u_{ni})} = e^{-(1+o(1))F_n^*},$$

ya que $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1, x \to 0$.

Así que si $F_n^* \to \tau, n \to \infty$ *con* $0 < \tau < \infty$, *entonces*

$$\prod_{i=1}^{n} F_i(u_{ni}) \to e^{-\tau}, n \to \infty.$$

En este sentido, la Condición A es necesaria si queremos garantizar la convergencia de $\prod_{i=i}^{n} F_i(u_{ni})$ *a un valor diferente de* 0 *o* 1.

Definición 50 *Dada la sucesión de reales* $(u_{ni})_{i=1}^{n}$ *para cada natural* $n \geq 1$, *decimos que* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *satisface la Condición* $D(\{u_{ni}\})$ *si para cualesquiera enteros* $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p < j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leq n$ *tales que* $j_1 - i_p \geq m$, *se cumple que*

$$\sup_{I,J} |P(B(I \cup J)) - P(B(I))\,P(B(J))| \leq \alpha_{n,m}$$

para los conjuntos $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_q\}$, $B(I) = \{X_i \leq u_{ni}, i \in I\}$, $B(J) = \{X_i \leq u_{ni}, i \in J\}$, *y* $\alpha_{n,m_n^*} \to 0, n \to \infty$ *para alguna sucesión* $(m_n^*)_{n=1}^{\infty}$ *tal que* $m_n^* \overline{F}_{\max} \to 0, n \to \infty$.

Observemos que $\alpha_{n,m}$ puede ser tomada tal que $\alpha_{n,m}$ sea no decreciente en m para n fijo. A los conjuntos de enteros I, J los llamaremos "intervalos", los cuales están separados por al menos m.

En el siguiente Lema mostramos cómo esta condición nos da un cierto grado de independencia.

Lema 51 *Sean* n, r *naturales fijos y* $J_1, \ldots, J_r$ *intervalos de* $\{1, \ldots, n\}$ *tales que* J_i *y* J_j *están separados por al menos* m *para* $i \neq j$. *Si se satisface la Condición* $D(\{u_{ni}\})$ *para sucesión* $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$ *de reales dada, entonces*

$$\left| P\left(\bigcap_{i=1}^{r} B(J_i)\right) - \prod_{i=1}^{r} P(B(J_i)) \right| \leq (r-1)\,\alpha_{n,m}$$

con $\alpha_{n,m}$ *definida como en la Definición 50.*

Demostración. *(Por inducción sobre* r*)*

Sea $J_i = \{k_i, \ldots, l_i\}$, $i = 1, \ldots, r$ *tal que* $k_1 \leq l_1 < k_2 \leq l_2 < \ldots < k_r \leq l_r$, *renumerando si es necesario.*

Para $r = 2$ *claramente tenemos que por definición si se cumple* $D(\{u_{ni}\})$, *entonces*

$$|P(B(J_1) \cap B(J_2)) - P(B(J_1))P(B(J_2))| \leq \alpha_{n,m}$$

ya que $k_2 - l_1 \geq m$.

Supongamos el resultado cierto para $r - 1$, *entonces tenemos que*

$$\left| P\left(\bigcap_{i=1}^{r} B(J_i)\right) - \prod_{i=1}^{r} P(B(J_i))\right| \leq$$

$$\left|P\left(\bigcap_{i=1}^{r} B(J_i)\right) - P\left(\bigcap_{i=1}^{r-1} B(J_i)\right) P(B(J_r))\right| + \left|P\left(\bigcap_{i=1}^{r-1} B(J_i)\right) - \prod_{i=1}^{r-1} P(B(J_i))\right| P($$

$$\leq \alpha_{n,m} + (r-2)\,\alpha_{n,m}(1) = (r-1)\,\alpha_{n,m}$$

pues $\bigcap_{i=1}^{r-1} B(J_i) = B\left(\bigcup_{i=1}^{r-1} J_i\right)$ *y sucede que* $\bigcup_{i=1}^{r-1} J_i$ *y* J_r *están separados por al menos* m. ■

Continuamos para establecer una tercera condición.

Definición 52 *Sean* n, r *naturales cualesquiera e* I *un subconjunto de* $\{1, \ldots, n\}$ *de la forma* $\{i_1 \leq i \leq i_2\}$ *tal que* $\sum_{i \in I} \overline{F}_i(u_{ni}) \leq \frac{1}{r} F_n^*$. *Decimos que la sucesión de v.a.* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *satisface la Condición* $D'(\{u_{ni}\})$ *respecto a* $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$ *si existe una sucesión* $\left(\alpha_{n,r}^*\right)_{n,r=1}^{\infty}$ *de números reales y una función* $g(r)$ *tales que*

$$\max_{I} \min_{I^* \subset I} \sum\sum_{i<j \in I^*} P\{X_i > u_{ni}, X_j > u_{nj}\} \leq \alpha_{n,r}^* \tag{2.5}$$

donde

$$\lim_{r \to \infty} \lim_{n \to \infty} \mathrm{sup} r \alpha_{n,r}^* = 0$$

y el min *en* (2.5) *se toma sobre subconjuntos* $I^* \subset I$ *tales que existe* $n_0(r)$ *que cumple*

$$\sum_{i \in I - I^*} \overline{F}_i(u_{ni}) \leq \frac{g(r)}{r} \text{ para toda } n \geq n_0(r)$$

y

$$\lim_{r\to\infty} g\left(r\right) = 0.$$

Esta condición acota la probabilidad de agrupamientos de más de un excedente en intervalos pequeños. Además, nos permite determinar la distribución asintótica para el número de excedentes de una manera similar a lo visto en el Capítulo 1. Naturalmente, la Condición $D'\left(\{u_{ni}\}\right)$ es más débil que la condición simple

$$\max_{I} \sum_{i<j\in I}\sum P\left\{X_i > u_{ni}, X_j > u_{nj}\right\} \leq \alpha'_{n,r} \tag{2.6}$$

donde I es como en la definición de $D'\left(\{u_{ni}\}\right)$ y

$$\lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} r\alpha'_{n,r} = 0.$$

La ventaja de la Condición $D'\left(\{u_{ni}\}\right)$ es que la desigualdad (2.6) no necesariamente puede ser satisfecha para I, sino que para cada I existe un subconjunto "asociado" I^* que difiere de I sólo en algunos puntos "no muy importantes", pero tal que la doble suma sobre I^* es esencialmente menor y satisface la desigualdad (2.6). Por su parte, la Condición $D\left(\{u_{ni}\}\right)$ establece un tipo de independencia asintótica (o de leve dependencia) en la sucesión $\left(X_i\right)_{i=1}^{\infty}$ para eventos del tipo de $B\left(I\right)$, es decir, una independencia asintótica para los máximos por bloques (subintervalos) conforme el tamaño de n crece. El papel que juegan estas condiciones es análogo al que desempeñan las condiciones $D\left(u_n\right)$ y $D'\left(u_n\right)$ que se utilizan para establecer la versión del caso estacionario del Teorema de Fisher-Tippet como remarcamos en el Capítulo 1.

En el caso estacionario además de probar la expresión (2.1) demostramos que dada una sucesión de reales $\left(u_n\right)_{n=1}^{\infty}$ tales que $D\left(u_n\right)$ y $D'\left(u_n\right)$ se satisfacen para la sucesión estacionaria $\left(X_n\right)_{n=1}^{\infty}$, entonces para $0 \leq \tau < \infty$,

$$P\left\{M_n \leq u_n\right\} \rightarrow e^{-\tau}, n \rightarrow \infty$$

si y sólo si

$$n(1 - F(u_n)) \to \tau, n \to \infty$$

resultado que se conoce como Aproximación de Poisson (Teorema 23). Ahora enunciamos la extensión de este resultado para el caso no estacionario pero pospondremos la demostración al final de algunos lemas que utilizaremos para tal efecto.

Teorema 53 *(Aproximación de Poisson caso no estacionario) Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. que satisface las Condiciones A, $D(\{u_{ni}\})$ y $D'(\{u_{ni}\})$ con respecto a la sucesión $(u_{ni})_{i=1}^{n}$, $n \geq 1$. Entonces se satisface (2.3) y además, para $0 \leq \tau < \infty$*

$$F_n^* \to \tau, n \to \infty, \tag{2.7}$$

si y sólo si

$$P_{n,\{u_{ni}\}} \to e^{-\tau}, n \to \infty. \tag{2.8}$$

Primero necesitamos establecer algunos puntos importantes sobre notación para posteriormente establecer los resultados que nos permitirán probar el Teorema 53.

Dividamos el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ en r intervalos I_l, $l = 1, \ldots, r$ tal que $I_1 = \{1, \ldots, i_l\}$

$$F_{n,1} = \sum_{i=1}^{i_1} \overline{F}_i(u_{ni}) \leq \frac{F_n^*}{r}$$

y

$$F_{n,1} + \overline{F}_{i_1+1}(u_{n,i_1+1}) > \frac{F_n^*}{r}$$

(es decir, tomamos i_1 tan grande como sea posible) para r y n naturales fijos. Sea $I_2 = \{i_1 + 1, \ldots, i_2\}$ tal que

$$F_{n,2} = \sum_{i=i_1+1}^{i_2} \overline{F}_i(u_{ni}) \leq \frac{F_n^*}{r}$$

con i_2 tan grande como sea posible. Repitiendo este proceso r veces, construimos los intervalos $I_l = \{i_{l-1}+1, \ldots, i_l\}$ con $i_r \leq n$,

$$F_{n,l} = \sum_{i=i_{l-1}+1}^{i_l} \overline{F}_i(u_{ni}) \leq \frac{F_n^*}{r},$$

$$F_{n,l} + \overline{F}_{i_l+1}(u_{n,i_l+1}) > \frac{F_n^*}{r} \text{ } (i_l \text{ es lo más grande posible})$$

y así

$$\sum_{l=1}^{r} F_{n,l} = \sum_{i=1}^{i_r} \overline{F}_i(u_{ni}) \leq F_n^*.$$

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Dividamos cada intervalo I_l en dos subintervalos $I_{l,1}$ e $I_{l,2}$ donde $I_{l,2} = \{i_l - m_l + 1, \ldots, i_l\}$ contiene los últimos m_l índices de I_l y por suparte $I_{l,1}$ los restantes, tal que

$$\sum_{i \in I_{l,2}} \overline{F}_i(u_{ni}) \leq \varepsilon \frac{F_n^*}{r}$$

y de nuevo m_l es lo más grande posible.

Naturalmente tenemos que $m_l \geq 1$, para n suficientemente grande, pues sucede que $\overline{F}(u_{ni}) \leq \overline{F}_{n,\max} \to 0, n \to \infty$. Pero como m_l es elegido lo más grande posible tal que

$$\sum_{i \in I_{l,2}} \overline{F}_i(u_{ni}) + \overline{F}_i(u_{n,i_l-m_l}) > \varepsilon \frac{F_n^*}{r},$$

y como

$$\sum_{i \in I_{l,2}} \overline{F}_i(u_{ni}) \leq m_l \overline{F}_{n,\max},$$

tenemos que

$$m_l \overline{F}_{n,\max} + \overline{F}_{n,\max} > \varepsilon \frac{F_n^*}{r},$$

es decir,

$$m_l + 1 \geq \frac{\varepsilon F_n^*}{r \overline{F}_{n,\max}} \tag{2.9}$$

Ahora enunciamos y probamos varios lemas.

Lema 54 *Si* $\varepsilon = \varepsilon(n)$ *con*

$$\varepsilon(n) F_n^* \to 0, n \to \infty,$$

entonces para cualquier natural r

$$P\left\{X_i \le u_{ni}, i \in \bigcup_{l=1}^{r} I_{l,1}\right\} - P_{n,\{u_{ni}\}} \to 0, n \to \infty.$$

Demostración.

Dado que

$$\begin{aligned} P_{n,\{u_{ni}\}} &= P\{X_i \le u_{ni}, 1 \le i \le n\} = 1 - P\{X_i > u_{ni} \text{ p.a. } i\} \ge 1 - \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i(u_{ni}) \\ &= 1 - \left(\sum_{l=1}^{r}\sum_{i\in I_{l,1}} \overline{F}_i(u_{ni}) + \sum_{l=1}^{r}\sum_{i\in I_{l,2}} \overline{F}_i(u_{ni}) + \sum_{i=i_r+1}^{n} \overline{F}_i(u_{ni})\right) \\ &\ge P\left\{X_i \le u_{ni}, i \in \bigcup_{l=1}^{r} I_{l,1}\right\} - \sum_{l=1}^{r}\sum_{i\in I_{l,2}} \overline{F}_i(u_{ni}) - \sum_{i=i_r+1}^{n} \overline{F}_i(u_{ni}) \end{aligned}$$

de manera directa tenemos que

$$0 \le P\left\{X_i \le u_{ni}, i \in \bigcup_{l=1}^{r} I_{l,1}\right\} - P_{n,\{u_{ni}\}} \le \sum_{l=1}^{r}\sum_{i\in I_{l,2}} \overline{F}_i(u_{ni}) + \sum_{i=i_r+1}^{n} \overline{F}_i(u_{ni})$$

$$\le \sum_{l=1}^{r} \varepsilon \frac{F_n^*}{r} + \sum_{i=i_r+1}^{n} \overline{F}_i(u_{ni}) = \varepsilon(n) F_n^* + \sum_{i=i_r+1}^{n} \overline{F}_i(u_{ni}).$$

Por hipótesis $\varepsilon(n) F_n^* \to 0, n \to \infty$, y como por construcción de los intervalos I_l (i_l es lo más grande posible)

$$\frac{F_n^*}{r} - F_{n,l} \le \overline{F}_{i_l+1}(u_{n,i_l+1}) \le \overline{F}_{n,\max},$$

y así también

$$\sum_{i=i_r+1}^{n} \overline{F}_i(u_{ni}) = F_n - \sum_{i=1}^{r} F_{n,l} \le r\overline{F}_{n,\max} \to 0, n \to \infty$$

Entonces para n suficientemente grande el lado derecho de la desigualdad tiende a cero y así el resultado queda demostrado. ■

Observación 55 *Como no pedimos ninguna restricción sobre la dependencia de* X_i*, el Lema 54 se satisface para la sucesión independiente asociada* $\left(\widetilde{X}_i\right)_{i=1}^{\infty}$.

Lema 56 (i) *Si* $P_{n,\{u_{ni}\}} \to e^{-\tau}, n \to \infty$ *entonces* $\liminf_{n\to\infty} F_n^* > 0$

(ii) *Supongamos que se satisface la Condición* $D(\{u_{ni}\})$ *y sea* r *fija. Sea* $\varepsilon(n) = (m_n^* + 1)\overline{F}_{n,\max} r \frac{1}{F_n^*}$*, donde* m_n^* *está dado en la definición de la Condición* $D(\{u_{ni}\})$*, entonces* $\varepsilon(n) \to 0, n \to \infty$ *y* $\varepsilon(n) F_n^* \to 0, n \to \infty$.

Demostración.

(i) Como $P_{n,\{u_{ni}\}} = 1 - P\{X_i > u_{ni} \text{ para alguna } i\} \geq 1 - F_n^*$, tenemos que $F_n^* \geq 1 - P_n$ y por tanto

$$\liminf_{n\to\infty} F_n^* \geq 1 - \lim_{n\to\infty} P_{n,\{u_{ni}\}} = 1 - e^{-\tau} > 0$$

(ii) Como se satisface la Condición $D(\{u_{ni}\})$, entonces $m_n^* \overline{F}_{\max} \to 0, n \to \infty$ y así

$$\varepsilon(n) F_n^* = r m_n^* \overline{F}_{n,\max} + r\overline{F}_{n,\max} \to 0, n \to \infty.$$

Por (i) y de nuevo bajo $D(\{u_{ni}\})$, es claro que $\varepsilon(n) \to 0, n \to \infty$. ■

Finalmente, un resultado para verificar un último paso en la demostración pendiente del Teorema 53.

Lema 57 *Supongamos que se satisfacen las Condiciones* A *y* $D'(\{u_{ni}\})$*, entonces*

$$\lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left| \prod_{l=1}^{r} P(B(I_{l,1})) - \prod_{l=1}^{r} \prod_{i \in I_{l,1}} F_i(u_{ni}) \right| = 0.$$

Demostración.

Por la construcción de I_l tenemos que para cada l

$$1 - P(B(I_{l,1})) = P\{X_i > u_{ni} \text{ p.a. } i\} \leq \sum_{i \in I_{l,1}} \overline{F}_i(u_{ni}) \leq \frac{F_n^*}{r}. \tag{2.10}$$

Así que por la Condición $D'(\{u_{ni}\})$ sabemos que para cada l existe un subconjunto $I_{l,1}^{*} \subset I_{l,1}$ tal que

$$\frac{g(r)}{r} \geq \sum_{i \in I_{l,1} - I_{l,1}^{*}} \overline{F}_i(u_{ni}) = \sum_{i \in I_{l,1}} \overline{F}_i(u_{ni}) - \sum_{i \in I_{l,1}^{*}} \overline{F}_i(u_{ni})$$

y

$$\sum\sum_{i<j \in I_{l,1}^{*}} P\{X_i > u_{ni}, X_j > u_{nj}\} \leq \alpha_{n,r}^{*}$$

para $n \geq n_0(r)$. Donde $\lim_{r\to\infty} g(r) = 0 = \lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} r\alpha_{n,r}^{*}$.

Por lo que, por la desigualdad de Bonferroni (ver Proposición 69 y desigualdad (2.17)), para cada $1 \leq l \leq r$

$$\begin{aligned} 1 - P\left(B\left(I_{l,1}^{*}\right)\right) &= \sum_{i \in I_l^{*}} \overline{F}_i(u_{ni}) \geq \sum_{i \in I_l^{*}} \overline{F}_i(u_{ni}) - \sum\sum_{i<j \in I_{l,1}^{*}} P\{X_i > u_{ni}, X_j > u_{nj}\} \\ &\geq \sum_{i \in I_{l,1}} \overline{F}_i(u_{ni}) - \frac{g(r)}{r} - \alpha_{n,r}^{*}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{l=1}^{r} (1 - P(B(I_{l,1}))) \leq \sum_{l=1}^{r} \sum_{i \in I_{l,1}} \overline{F}_i(u_{ni}) \equiv S_{n,r}$$

y

$$\sum_{l=1}^{r} (1 - P(B(I_{l,1}))) \geq \sum_{l=1}^{r} \left(1 - P\left(B\left(I_{l,1}^{*}\right)\right)\right) \geq S_{n,r} - g(r) - r\alpha_{n,r}^{*}.$$

Entonces

$$e^{-(1+d_r)S_{n,r}} \leq \prod_{l=1}^{r} P(B(I_{l,1})) \leq e^{-S_{n,r} + g(r) + r\alpha_{n,r}^{*}}$$

donde $d_r = O\left(\frac{1}{r}\right) \to 0, r \to \infty$ por (2.10).

De manera similar obtenemos que para todo n y r

$$e^{-(1+c_n)S_{n,r}} \leq \prod_{l=1}^{r} \prod_{i \in I_{l,1}} F(u_{ni}) \leq e^{-S_{n,r}}$$

donde $c_n = O\left(\overline{F}_{n,\max}\right) \to 0, n \to \infty$.

Dado que $\lim_{r\to\infty} g(r) = \lim_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty} r\alpha^*_{n,r} = \lim_{r\to\infty} d_r = 0 = \lim_{n\to\infty} c_n$ y además, $\limsup_{n\to\infty} S_{n,r} < \limsup_{n\to\infty} F^*_n < \infty$ por satisfacerse también la Condición A, tenemos el resultado deseado. ∎

Si suponemos la expresión (2.8) en vez de la Condición A tenemos el siguiente resultado.

Lema 58 *Supongamos que se satisfacen las Condiciones $D(\{u_{ni}\})$ y $D'(\{u_{ni}\})$ y que además $P_{n,\{u_{ni}\}} \to e^{-\tau}, n \to \infty$, entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} F^*_n < \infty.$$

Ahora estamos en condiciones de probar la Aproximación de Poisson en el caso no estacionario

Demostración. (Del Teorema 53)

Tomamos $\varepsilon = \varepsilon(n) = (m^*_n + 1)\overline{F}_{n,\max} r \frac{1}{F^*_n}$, donde m^*_n es dado por $D(\{u_{ni}\})$, entonces por el Lema 56 (ii) tenemos que $\varepsilon(n) \to 0, n \to \infty$ para cada r y $\varepsilon(n) F^*_n \to 0, n \to \infty$.

Por (2.9) tenemos que para toda l

$$m_l \geq \frac{\varepsilon F^*_n}{r\overline{F}_{n,\max}} - 1 = m^*_n,$$

es decir, los intervalos $I_{l,1}$ y $I_{l',1}$ están separados por al menos m^*_n para todo $l \neq l'$. Entonces por el Lema 51

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| P_{n,\{u_{ni}\}} - \prod_{l=1}^{r} P(B_{l,1}) \right| \\ &\leq \left| P\left(\bigcap_{l=1}^{r} B(J_l)\right) - \prod_{l=1}^{r} P(B_{l,1}) \right| + \left| P_{n,\{u_{ni}\}} - P\left(\bigcap_{l=1}^{r} B(J_l)\right) \right| \\ &\leq (r-1)\,\alpha_{n,m} + \left| P_{n,\{u_{ni}\}} - P\left(\bigcap_{l=1}^{r} B(J_l)\right) \right|. \end{aligned}$$

A medida que $n \to \infty$, por la Condición $D(\{u_{ni}\})$ el primer término tiende a cero y el segundo por el Lema 54 también. Así que tenemos que para toda r

$$\lim_{n\to\infty} \left| P_{n,\{u_{ni}\}} - \prod_{l=1}^{r} P(B_{l,1}) \right| = 0.$$

Con esto, y dado que se cumplen las condiciones A y $D'(\{u_{ni}\})$, el Lema 57 nos lleva a que

$$\lim_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\left|P_{n,\{u_{ni}\}}-\prod_{l=1}^{r}\prod_{i\in I_{l,1}}F_i(u_{ni})\right|=0.$$

Pero el Lema 54 (que en particular vale bajo independencia según la Observación 55) nos dice que para cualquier r

$$\prod_{l=1}^{r}\prod_{i\in I_{l,1}}F_i(u_{ni})-\prod_{i=1}^{n}F_i(u_{ni})\to 0, n\to\infty,$$

y por lo tanto

$$\left|P_{n,\{u_{ni}\}}-\prod_{i=1}^{n}F_i(u_{ni})\right|\to 0, n\to\infty.$$

Finalmente, verifiquemos la equivalencia entre (2.7) y (2.8).

Si suponemos que se cumple (2.7) para $0<\tau<\infty$ entonces por la Observación 49 tenemos que $\prod_{i=1}^{n}F_i(u_{ni})\to e^{-\tau}, n\to\infty$ y entonces por la propiedad triangular $P_{n,\{u_{ni}\}}\to e^{-\tau}, n\to\infty$.

Ahora supongamos que se cumple (2.8), entonces por la parte (i) del Lema 56 y el Lema 58 tenemos que $0<\liminf_{n\to\infty}F_n^{*}\leq\limsup_{n\to\infty}F_n^{*}<\infty$ y por tanto $(F_n^{*})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada con límite superior e inferior positivos, así que si suponemos que (2.8) no se satisface, tenemos que existe una subsucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $F_{n_k}^{*}\to\eta$ con $0<\eta\neq\tau$ y por lo tanto, tenemos $P_{n_k,\{u_{n_k i}\}}\to e^{-\eta}\neq e^{-\tau}$, cuando $k\to\infty$, que es una contradicción a (2.8). ■

En la siguiente sección usaremos un resultado que se da como consecuencia inmediata de combinar los Lemas 51 y 54.

Lema 59 *Supongamos que se cumplen las Condiciones A y $D(\{u_{ni}\})$, y consideremos los intervalos I_l definidos como antes, entonces para cualquier natural r*

$$\limsup_{n\to\infty}\left|P_n-\prod_{l=1}^{r}P(B(I_l))\right|=0$$

Demostración.

Observando que

$$\left| P_n - \prod_{l=1}^{r} P\left(B\left(I_l\right)\right) \right| \leq \left| P_n - P\left(\bigcap_{l=1}^{r} B\left(I_l\right) \right) \right| + \left| P\left(\bigcap_{l=1}^{r} B\left(I_l\right) \right) - \prod_{l=1}^{r} P\left(B\left(I_l\right)\right) \right|,$$

el Lema 54 nos dice que el segundo sumando tiende a cero y para el primer sumando usamos el Lema 51. ■

El siguiente resultado caracteriza el comportamiento de los extremos de subintervalos.

Corolario 60 *Si $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias que satisface las condiciones A, $D\left(\{u_{ni}\}\right)$ y $D'\left(\{u_{ni}\}\right)$ con respecto a la sucesión $(u_{ni})_{i=1}^{n}$, $n \geq 1$ y si además existe una sucesión $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ de subintervalos $I_n \subset \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$ tal que*

$$\sum_{i \in I_n} \overline{F}_i\left(u_{ni}\right) \to \tau', n \to \infty \text{ con } \tau' \leq \tau \tag{2.11}$$

entonces

$$P_n\left(I_n\right) = P\left\{X_i \leq u_{ni}, i \in I_n\right\} \to e^{-\tau'}, n \to \infty$$

Demostración.

En virtud del Teorema 53 basta probar que las condiciones $D\left(\{u_{ni}\}\right)$ y $D'\left(\{u_{ni}\}\right)$ se cumplen respecto a la sucesión

$$\widetilde{u}_{ni} = \begin{cases} u_{ni}, & \text{si } i \in I_n \\ x_{0,i}, & \text{si } i \notin I_n \end{cases}.$$

Entonces $\widetilde{B}\left(I\right) = \left\{X_i \leq \widetilde{u}_{ni}, i \in I\right\} = B\left(I \cap I_n\right)$ para todo $I \subset \{1, \ldots, n\}$ y $\overline{F}_{n,\max}\left(\{\widetilde{u}_{ni}\}\right) = \max\left\{\overline{F}_i\left(\widetilde{u}_{in}\right), i \leq n\right\} \leq \max\left\{\overline{F}_i\left(u_{in}\right), i \leq n\right\} = \overline{F}_{n,\max}\left(\{u_{ni}\}\right)$, por lo que automáticamente se cumple la Condición $D\left(\{\widetilde{u}_{ni}\}\right)$.

Sea I un subintervalo de $\{1,\ldots,n\}$ tal que $\sum_{i\in I}\overline{F}_i(\widetilde{u}_{ni}) \leq \frac{1}{r}\sum_{i\in I_n}\overline{F}_i(\widetilde{u}_{ni})$. Entonces $\sum_{i\in I}\overline{F}_i(\widetilde{u}_{ni}) \leq \frac{1}{r}F_n^*$ y como se cumple $D'(\{u_{ni}\})$ tenemos por tanto que existe $I^* \subset I$ tal que

$$\sum\sum_{i<j\in I^*} P\{X_i > u_{ni}, X_j > u_{nj}\} \leq \alpha_{n,r}^*$$

pero

$$\begin{aligned}\sum\sum_{i<j\in I^*} P\{X_i > \widetilde{u}_{ni}, X_j > \widetilde{u}_{nj}\} &= \sum\sum_{i<j\in I^*\cap I_n} P\{X_i > u_{ni}, X_j > u_{nj}\} \\ &\leq \sum\sum_{i<j\in I^*} P\{X_i > u_{ni}, X_j > u_{nj}\}\end{aligned}$$

Y como además

$$\sum_{i\in I-I^*}\overline{F}_i(\widetilde{u}_{ni}) \leq \sum_{i\in I-I^*}\overline{F}_i(u_{ni}),$$

tenemos que la Condición $D(\{\widetilde{u}_{ni}\})$ se cumple con los mismos valores $\alpha_{n,r}^*$ y $g(r)$. ■

2.2 Resultados bajo la Condición $D(\{u_{ni}\})$

Con las construcciones y resultados de la sección anterior discutiremos el comportamiento asintótico de $P_{n,\{u_{ni}\}}$ sin suponer que se cumple la Condición $D'(\{u_{ni}\})$. La TVE para el caso estacionario nos dice que si $u_n(\tau)$ es tal que cumple la expresión (2.7) y la Condición $D(\{u_n(\tau_0)\})$ se satisface para cierto $\tau_0 > 0$, entonces existen constantes $\theta, \theta', 0 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$ tales que

$$\limsup_{n\to\infty} P\{X_i \leq u_n(\tau), i \leq n\} = e^{-\theta\tau} \tag{2.12}$$

$$\liminf_{n\to\infty} P\{X_i \leq u_n(\tau), i \leq n\} = e^{-\theta'\tau} \tag{2.13}$$

para todo $0 < \tau \leq \tau_0$ (ver Teorema 29).

La notación $u_n(\tau) = u_n$ indica el valor de τ en (2.7). Observemos que si (2.7) se cumple para $u_n(\tau_0)$, $\tau_0 > 0$, entonces también se cumple para cualquier

$\tau > 0$ con $u_n(\tau) = u_{[n\tau/\tau_0]}(\tau_0)$, como verificamos en la Observación 31. Además, si el límite en (2.12) existe para alguna $\tau^* > 0$, entonces $\theta = \theta'$ se llama el índice extremo de la sucesión estacionaria y además $\lim_{n\to\infty} P\{X_i \le u_n(\tau), i \le n\} = e^{-\theta\tau}$ para toda $\tau > 0$ (ver Teorema 29).

Para el caso no estacionario también definimos el concepto de índice extremo.

Definición 61 *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias y para cada $n \ge 1$ sea $(u_{ni}(\tau_0))_{i=1}^{n}$ una sucesión de relaes, para $\tau_0 > 0$, definimos el índice extremo de $(X_i)_{i=1}^{\infty}$, siempre que exista el límite, como*

$$\theta = -\frac{1}{\tau_0}\ln\left(\lim_{n\to\infty} P\{X_i \le u_{ni}(\tau_0), i \le n\}\right). \tag{2.14}$$

Sabemos que en el caso estacionario el índice extremo θ no depende de τ_0 y la sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es de constantes. En virtud de que estamos suponiendo que $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ no es estacionaria es de esperar que la sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ dependa de τ_0 y que el comportamiento de θ tenga variantes respecto del caso estacionario, como lo veremos con un ejemplo.

Ejemplo 62 *Sea $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con función de distribución marginal F continua y definamos $u_n(\tau) = \overline{F}^{-1}\left(\frac{\tau}{n}\right)$, para $\tau > 0$. Sea*

$$X_i = Y_{[(i+1)/2]}, i \ge 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} P\{X_i \le u_n(\tau), i \le n\} &= P\left\{Y_j \le \overline{F}^{-1}\left(\frac{\tau}{n}\right), 1 \le j = [(i+1)/2] \le [(n+1)/2]\right\} \\ &= F^{[(n+1)/2]}\left(\overline{F}^{-1}\left(\frac{\tau}{n}\right)\right) = \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^{[(n+1)/2]} \to e^{-\frac{1}{2}\tau}, n \to \infty \end{aligned}$$

Así que para $u_n(\tau) = \overline{F}^{-1}\left(\frac{\tau}{n}\right), \tau > 0$ tenemos que $\theta = \frac{1}{2}$.

Si ahora tomamos $u_{ni}(\tau) = \begin{cases} u_n(2\tau) & \text{para } i \text{ impar} \\ x_0 & \text{para } i \text{ par} \end{cases}$*, donde x_0 es el punto final de F. En este caso*

$$P\{X_i \le u_{ni}(\tau), i \le n\} = P\{Y_j \le u_n(2\tau), 1 \le j \le [(n+1)/2]\} \to e^{-\tau}, n \to \infty,$$

con lo que para esta u_{ni} particular $\theta = 1$. Si definimos otras sucesiones $u_{ni}^{*}(\tau)$ de la misma manera, iguales a $u_n(\tau)$ para algunas i's e iguales a x_0 para las restantes i's, tendremos diferentes valores de $\theta < 1$. Así que el índice extremo depende de la forma que tenga $u_{ni}(\tau)$.

Otro problema que tiene el índice extremo en el caso no estacionario es su dependencia con τ. Como hemos comentado antes, sabemos que en el caso estacionario cuando se cumple la Condición $D(u_n)$ tenemos que $\theta(u_n(\tau)) = \theta$ para cualquier familia $\{u_n(\tau), \tau \leq \tau_0\}$, por lo que en este caso θ no depende de τ ni de la construcción de la sucesión $(u_n(\tau))_{n=1}^{\infty}$ (ver Capítulo 1). En el caso no estacionario el índice extremo es en general dependiente del valor de τ, para ello veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 63 *Continuando con el Ejemplo 62, para $\tau_0 > 0$ definamos*

$$u_{ni}(\tau_0) = \begin{cases} u_n(2\tau_0) & \text{para } i \text{ impar, } i \leq \frac{1}{2}n \\ x_0 & \text{para } i \text{ par, } i \leq \frac{1}{2}n \\ u_n(\tau_0) & \text{para } \frac{1}{2}n < i \leq n. \end{cases}$$

Definimos la familia de sucesiones

$$u_{ni}(\tau) = \begin{cases} u_{ni}(\tau_0) & \text{para } i \leq s \\ x_0 & \text{para } s < i \leq n \end{cases}, \tau \leq \tau_0$$

donde s es tomado en su valor máximo tal que $\sum_{i \leq s} \overline{F}_i(u_{ni}(\tau)) \leq \frac{1}{\tau_0} F_n^{*} \tau$. Claramente, dado que $u_n(\tau) = \overline{F}^{-1}\left(\frac{\tau}{n}\right)$, tenemos que se cumple (2.7) para cualquier $u_{ni}(\tau)$ y

$$P\{X_i \leq u_n(\tau_0), i \leq n\} =$$

$$= P\left\{Y_j \le u_n(2\tau_0), j \le \frac{\frac{n}{2}+1}{2}\right\} P\left\{Y_j \le u_n(\tau_0), \frac{\frac{n}{2}+1}{2} < j \le \frac{n+1}{2}\right\}$$
$$= \left(1-\frac{2\tau}{n}\right)^{[n/4+1/2]}\left(1-\frac{\tau}{n}\right)^{[n/4]} \to e^{-\frac{1}{2}\tau}e^{-\frac{1}{4}\tau} = e^{-\frac{3}{4}\tau}, n\to\infty.$$

Análogamente,

$$P\{X_i \le u_n(\tau), i \le n\} \to e^{-\tau}, n \to \infty, \text{ para } \tau < \frac{1}{2}\tau_0.$$

Entonces tenemos que $\theta(u_{ni}(\tau_0)) = \frac{3}{4}$ *pero* $\theta(u_{ni}(\tau)) = 1$ *para* $\tau < \frac{1}{2}\tau_0$. *Es decir, el índice extremo tiene una clara dependencia con* τ.

Las características caóticas del índice extremo no son exclusivas de los ejemplos anteriores, para el índice extremo particular $\theta(u_n(\tau))$, sino que existen muchos ejemplos más. No obstante, como veremos en los Ejemplos 83, 84 y 85, el índice extremo puede no depender ni de τ ni de $u_{ni}(\tau)$, y por lo tanto se le puede interpretar como en el caso estacionario en algunos casos.

Ahora discutiremos algunas propiedades generales del índice extremo para sucesiones no estacionarias. El primer resultado nos dice que el índice extremo no puede ser superior a 1, justo como en el caso estacionario.

Lema 64 *Sea* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias que satisface la Condición* $D(\{u_{ni}\})$ *para la sucesión* $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \ge 1$ *tal que* (2.7) *se satisface para algún* $\tau > 0$, *entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} P\{X_i \le u_{ni}, i \le n\} \ge e^{-\tau}.$$

Demostración.

Por el Lema 59 tenemos que para los intervalos I_l

$$P\{X_i \le u_{ni}, i \le n\} - \prod_{l=1}^{r} P(B(I_l)) \to 0, n \to \infty.$$

Pero por la construcción de los intervalos I_l tenemos que para cada $1 \leq l \leq r$

$$P(B(I_l)) = P\{X_i \leq u_{ni}, i \in I_l\} \geq 1 - \sum_{i \in I_l} \overline{F}_i(u_{ni}) \geq 1 - \frac{1}{r} F_n^*,$$

por lo que

$$\prod_{l=1}^{r} P(B(I_l)) \geq \left(1 - \frac{1}{r} F_n^*\right)^r \to \left(1 - \frac{\tau}{r}\right)^r, n \to \infty.$$

Dado que esto ocurre para cualquier r arbitraria, tenemos lo que buscamos ya que

$$\left(1 - \frac{\tau}{r}\right)^r \to e^{-\tau}, r \to \infty.$$

■

Observación 65 *Por la definición de índice extremo,*

$$e^{-\theta\tau} \geq \liminf_{n \to \infty} P\{X_i \leq u_{ni}, i \leq n\} \geq e^{-\tau}, \tau > 0,$$

lo cual implica que $\theta \leq 1$.

Lema 66 *Sean* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *y* $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$ *como en el Lema 64 con* $\tau > 0$. *Sea* $(u_{ni}^*)_{i=1}^{n}, n \geq 1$ *otra sucesión que también satisface* (2.7) *con el mismo valor* τ. *Si para cada* n

$$u_{ni} \leq u_{ni}^*, \textit{para toda } i \leq n \qquad o \qquad u_{ni} \geq u_{ni}^*, \textit{para toda } i \leq n,$$

entonces

(*i*) *La Condición* $D(\{u_{ni}^*\})$ *también se satisface.*

(*ii*) *Si* $\theta = \theta(u_{ni})$ *existe, entonces* $\theta(u_{ni}^*) = \theta$.

Demostración.

(*i*) Sean $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $B^*(I) = \{X_i \leq u_{ni}^*, i \in I\}$. Entonces si $u_{ni} \leq u_{ni}^*$

$$0 \leq P(B^*(I)) - P(B(I)) \leq \sum_{i \in I} \left(\overline{F}_i(u_{ni}) - \overline{F}_i(u_{ni}^*)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{F}_i(u_{ni}) - \overline{F}_i(u_{ni}^*)\right)$$

que tiende a cero porque se satisface (2.7), y entonces tenemos que también $D(\{u^*_{ni}\})$ se satisface. El caso $u_{ni} \geq u^*_{ni}$ es similar.

(ii) Por la parte (i) tenemos que si $I = \{1, \ldots, n\}$ entonces

$$|P\{X_i \leq u^*_{ni}, i \leq n\} - P\{X_i \leq u_{ni}, i \leq n\}| \to 0, n \to \infty.$$

■

Para cada $n \geq 1$sean $(u_{ni})_{i=1}^n$ y $(u^*_{ni})_{i=1}^n$ sucesiones de reales. Definamos $I_n = \{i \leq n \mid u_{ni} \leq u^*_{ni}\}$ y establezcamos la condición

$$\sum_{i \in I_n} \overline{F}_i(u_{ni}) \to 0, n \to \infty \quad \text{o} \quad \sum_{i \notin I_n} \overline{F}_i(u^*_{ni}) \to 0, n \to \infty. \tag{2.15}$$

Teorema 67 *Sea $(X_i)_{i=1}^\infty$ una sucesión de variables aleatorias y para cada $n \geq 1$ la sucesión $(u_{ni})_{i=1}^n$ que cumple (2.7) para $\tau > 0$. Sea $(u^*_{ni})_{i=1}^n, n \geq 1$ que satisface (2.7) y (2.15) para el mismo valor de τ.*

(i) Si la Condición $D(\{u_{ni}\})$ se satisface, entonces también $D(\{u^*_{ni}\})$.

(ii) Si $\theta = \theta(u_{ni})$ existe, entonces $\theta(u^*_{ni}) = \theta$.

Demostración.

Para el caso $\sum_{i \notin I_n} \overline{F}_i(u^*_{ni}) = o(1)$ definamos

$$\widetilde{u}_{ni} = \begin{cases} u^*_{ni} & \text{para } i \in I_n \\ x_{0,i} & \text{para } i \notin I_n \end{cases}.$$

Dado que se cumple (2.15) tenemos que

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \overline{F}_i(u^*_{ni}) - \sum_{i=1}^n \overline{F}_i(\widetilde{u}_{ni}) = \sum_{i \notin I_n} \overline{F}_i(u^*_{ni}) = o(1).$$

Entonces $(\widetilde{u}_{ni})_{i=1}^n, n \geq 1$ satisface (2.7) con el mismo valor τ. Por el Lema 66, la Condición $D(\{\widetilde{u}_{ni}\})$ se satisface y $\theta(\widetilde{u}_{ni}) = \theta$ porque $\widetilde{u}_{ni} \geq u^*_{ni}$ para toda $i \leq n$.

Pero también $\widetilde{u}_{ni} \geq u_{ni}$ para toda $i \leq n$, así que de nuevo por el mismo lema se cumplen los dos resultados buscados.

Para el caso $\sum_{i \notin I_n} \overline{F}_i(u_{ni}) = o(1)$, en (2.15) definimos

$$\widetilde{u}_{ni} = \begin{cases} u^*_{ni} & \text{para } i \notin I_n \\ x_{0,i} & \text{para } i \in I_n \end{cases}.$$

y procedemos de manera análoga. ■

Este Teorema nos lleva a un Corolario para el caso de sucesiones de variables aleatorias estacionarias. Para ello, supongamos que existe el índice extremo $\theta = \theta(u_n(\tau_0))$ para la sucesión estacionaria $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ y la sucesión de reales $(u_n(\tau_0))_{n=1}^{\infty}$, y definamos la clase

$$\beta(u_n(\tau_0)) = \left\{ \begin{array}{r} (u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1 \text{ tal que (2.7) y (2.15) para alguna } \tau, \\ 0 < \tau < \tau_0 \text{ donde } u^*_{ni} = u_n(\tau) = u_{[n\tau/\tau_0]}(\tau_0) \end{array} \right\}.$$

Corolario 68 *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ sucesión estacionaria tal que $\theta = \theta(u_n(\tau_0))$ existe y (2.7) se satisface con $u_n(\tau_0)$ donde $\tau_0 > 0$. Entonces para cualquier sucesión $(u_{ni})_{i=1}^{n} \in \beta(u_n(\tau_0))$ tenemos que $\theta(u_{ni}) = \theta$ y la Condición $D(\{u_{ni}\})$ se satisface si $D(u_n(\tau_0))$ se cumple.*

Este resultado, consecuencia directa del teorema anterior, nos dice que θ no sólo describe el comportamiento extremo con respecto a una sucesión (u_{ni}) de constantes (que no dependiente de τ), sino también para ciertas sucesiones no constantes. Además, el ejemplo discutido muestra que si $(u_{ni})_{i=1}^{n} \notin \beta(u_n(\tau_0))$, entonces el índice extremo $\theta(u_{ni})$ puede ser diferente de $\theta(u_n(\tau_0))$. En el Teorema siguiente estableceremos una condición suficiente para la existencia del índice extremo. Para ello, primero definiremos cierta notación y condiciones adicionales.

Para $k \geq 1$, sea

$$S_n^{(k)}(I) = \sum\sum\cdots\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k\in I} P\{X_{i_1} > u_{ni_1}, \cdots, X_{i_k} > u_{ni_k}\}.$$

Supongamos que para un valor de θ, $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\beta_r = \limsup_{n\to\infty}\left\{\max_I\left\{\min_{I^*\in I}\left|rS_n^{(2)}(I^*) - \tau_0(1-\theta)\right|\right\}\right\} \to 0, r\to\infty \qquad (2.16)$$

y si $\theta < 1$

$$\gamma_r = \limsup_{n\to\infty}\left\{\max_I\left\{\min_{I^*\in I} rS_n^{(3)}(I^*)\right\}\right\} \to 0, r\to\infty,$$

donde I e I^* están definidos como en la Condición $D'(\{u_{ni}\})$ y además sucede que $S_n^{(1)}(I) \to \frac{\tau_0}{r}, n\to\infty$. Es obvio que (2.16) generaliza a la Condición $D'(\{u_{ni}\})$.

Recordemos de la sección 2.1 que la Condición $D(\{u_{ni}\})$ involucra trabajar con los conjuntos $B(I) = \{X_i \leq u_{ni}, i \in I\}$ donde I es algún un conjunto de índices $i_1 < \cdots < i_p$. Para poder acotar probabilidades sobre estos conjuntos, y que a la vez involucremos términos $S_n^{(k)}(I)$, es de utilidad el siguiente resultado elemental.

Proposición 69 *(Desigualdad de Bonferroni) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad (ver Apéndice) y $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{F}$ eventos. Entonces*

$$\sum_{i=1}^n P\{A_i\} - \sum_{i<j} P\{A_i \cap A_j\} \leq P\{\cup_{i=1}^n A_i\}$$

$$\leq \sum_{i=1}^n P\{A_i\} - \sum_{i<j} P\{A_i\cap A_j\} + \sum_{i<j<k} P\{A_i\cap A_j\cap A_k\}.$$

Observación 70 *Si para cada $I = \{i_1 < \cdots < i_n\}$ tomamos $A_{i_r} = \{X_{i_r} > u_{ni_r}\}$ entonces $B(I) = \cap_{r=1}^n A_{i_r}^c = (\cup_{r=1}^n A_{i_r})^c$ y entonces la desigualdad de Bonferroni nos dice que*

$$S_n^{(1)}(I) - S_n^{(2)}(I) \leq 1 - P\{B(I)\} \leq S_n^{(1)}(I) - S_n^{(2)}(I) + S_n^{(3)}(I). \qquad (2.17)$$

Teorema 71 *Sean $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias y $(u_{ni})_{i=1}^{n}$. $n \geq 1$ sucesión de reales que satisfacen las Condiciones $D(\{u_{ni}\})$, (2.7) y (2.16) para cierto θ y $\tau_0 > 0$. Entonces $\theta(u_{ni}(\tau)) = \theta$ para toda $0 < \tau \leq \tau_0$, donde*

$$u_{ni}(\tau) = \begin{cases} u_{ni}(\tau_0) & \text{para } i \leq s \\ x_0 & \text{para } s < i \leq n \end{cases}$$

con s tomado en su valor máximo tal que $\sum_{i \leq s} \overline{F}_i(u_{ni}(\tau)) \leq \frac{1}{\tau_0} F_n^* \tau$.

Demostración.

(i) Usando la misma construcción de intervalos de la Sección 2.1, sabemos que para cada l existe I_l^* tal que

$$0 \leq P(B(I_l^*)) - P(B(I_l)) \leq S_n^{(1)}(I_l - I_l^*) \leq \frac{1}{r} g(r)$$

para todo $n \geq n_0(r)$ y

$$1 - S_n^{(1)}(I_l^*) + S_n^{(2)}(I_l^*) - S_n^{(3)}(I_l^*) \leq P(B(I_l^*)) \leq 1 - S_n^{(1)}(I_l^*) + S_n^{(2)}(I_l^*).$$

por (2.17).

Así que por (2.16) tenemos que para cada l

$$1 - \frac{\tau_0\theta}{r} - \frac{\beta_r}{r} - \frac{\gamma_r}{r} - \frac{g(r)}{r} \leq \liminf_{n\to\infty} P(B(I_l)) \leq \limsup_{n\to\infty} P(B(I_l)) \leq 1 - \frac{\tau_0\theta}{r} + \frac{\beta_r}{r} + \frac{g(r)}{r}.$$

Si tomamos el producto de $P(B(I_l))$ sobre $1 \leq l \leq r$ y luego hacemos $r \to \infty$

$$e^{-\theta\tau_0} \leq \liminf_{n\to\infty} \prod_{l=1}^{\infty} P(B(I_l)) \leq \limsup_{n\to\infty} \prod_{l=1}^{\infty} P(B(I_l)) \leq e^{-\theta\tau_0}.$$

y aplicando el Lema 59 tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{l=1}^{r} P(B(I_l)) = e^{-\theta\tau_0}, r \to \infty.$$

(ii) Sean los intervalos I_l como en (i) que dependen de τ_0 y denotemos $r' = [r\tau/\tau_0]$. Entonces por la definición de s como su máximo valor posible, tenemos

$$J' = \bigcup_{l=1}^{r'} I_l \subset \{1, \ldots, s\} = J \subset \bigcup_{l=1}^{r'+1} I_l.$$

Pero

$$0 \leq P(B(J')) - P(B(J)) \leq S_n^{(1)}(I_{r'+1}) \leq \frac{1}{r} F_n^* \to 0, r \to \infty.$$

Entonces repitiendo la parte (i) con r' obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P(B(J')) = e^{-\theta\tau},$$

lo cual implica que $\theta(u_{ni}(\tau)) = \theta$. ■

2.3 Distribuciones límite para el máximo

En esta sección consideraremos la convergencia de la distribución del máximo $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ donde $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión general de variables aleatorias. Para el caso de variables aleatorias independientes (ver [7]), y como vimos en el Capítulo 1, aún para el caso estacionario (ver [18]), tal convergencia está perfectamente caracterizada. Supondremos de nuevo que la expresión (2.2) se satisface, una restricción sobre la uniformidad de las distribuciones marginales F_j.

El siguiente resultado clásico de la TVE (Teorema 3.10.2 de [7]) generaliza al de Fisher-Tippet para el caso de sucesiones $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ de variables aleatorias independientes con distribuciones marginales $F_i(x) = P\{X_i \leq x\}$ y caracteriza la distribución límite de M_n, sin darnos la forma explícita de ésta.

Teorema 72 *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. independientes y supongamos que existen sucesiones normalizadoras $(a_n > 0)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que para todo*

$0 < t < 1,$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{[nt]} \overline{F}_i (a_n x + b_n) = w(t, x) \quad y \ \overline{F}_{n,\max} \to 0, n \to \infty. \tag{2.18}$$

Entonces

$$P\{(M_n - b_n)/a_n \le x\} = \prod_{i=1}^{n} F_i (a_n x + b_n) \xrightarrow{d} H(x) = e^{-w(1,x)}, n \to \infty \tag{2.19}$$

y ocurre alguna de las tres situaciones siguientes

$$(i)\ \ln H(x) \text{ es cóncava o} \tag{2.20}$$

$$(ii)\ x_0(H) < \infty \ y \ \ln H\left(x_0(H) - e^{-x}\right) \text{ es cóncava para } x > 0, \text{ o}$$

$$(iii)\ x_1(H) < \infty \ y \ \ln H\left(x_1(H) + e^{x}\right) \text{ es cóncava para } x > 0,$$

donde $x_0(H) = \sup\{x \mid H(x) < 1\}$ *y* $x_1(H) = \inf\{x \mid H(x) > 0\}$.

Antes de dar un ejemplo para verificar el teorema anterior, revisaremos un resultado útil.

Lema 73 *Sea $P(x)$ una función positiva, no decreciente y diferente de la función constante. Supongamos que existen sucesiones de reales $(a_n > 0)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F_i(a_n x + b_n) = P(x)$, y para x fija y cada $\varepsilon > 0$, existe N tal que $F_i(a_n x + b_n) < \varepsilon$ para $n > N$ y toda $k \le n$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \overline{F}_i (a_n x + b_n) = e^{-P(x)}.$$

Demostración.

Por expansión de Taylor de la función $h(x) = -\ln(1-x)$ alrededor de cero tenemos que

$$-\ln(1-x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} x^p,\ 0 < x < 1.$$

Sea $0 < \varepsilon < 1$, sabemos por hipótesis que existe N tal que $F_i(a_n x + b_n) < \varepsilon$ para $n > N$ y toda $k \leq n$, así que

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 - F_i(a_n x + b_n)\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}\left[F_i(a_n x + b_n)\right]^p \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{\infty}\left[F_i(a_n x + b_n)\right]^p \\ &< \sum_{i=1}^{n}\left[F_i(a_n x + b_n)\right]\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon^{p-1} = \frac{1}{1-\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\left[F_i(a_n x + b_n)\right]. \end{aligned}$$

Entonces para toda $0 < \varepsilon < 1$

$$0 \leq -\sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 - F_i(a_n x + b_n)\right) - \sum_{i=1}^{\infty}\left[F_i(a_n x + b_n)\right] < \left(\frac{1}{1-\varepsilon} - 1\right)\sum_{i=1}^{\infty}\left[F_i(a_n x + b_n)\right],$$

y por lo tanto, haciendo $\varepsilon \to 0$,

$$\ln \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - F_i(a_n x + b_n)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 - F_i(a_n x + b_n)\right) = -\sum_{i=1}^{\infty} F_i(a_n x + b_n) = -P(x).$$

■

Ejemplo 74 *Sea G una función de distribución tal que $G(0) = 0$ y para $x > 0$ satisface $G(x) > 0$ y $\lim_{t\to 0^+} \frac{G(tx)}{G(t)} = x^r$ para alguna $r > 0$. Sea $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de reales positivos tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r = \infty$ y $\lambda_n = O\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r\right)$. Definamos la sucesión independiente $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ donde $F_i(y) = 1 - G(-\lambda_i y)$ es la función de distribución de X_i para cada $i \geq 1$. Entonces la cola de F_i satisface para cada $y < 0$ la propiedad*

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\overline{F}_i(ty)}{\overline{F}_i(t)} = y^r. \tag{2.21}$$

Nos preguntamos por la distribución de $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ cuando $n \to \infty$, (con las constantes normalizadoras adecuadas).

Para cada $n \geq 1$, sea $a_n = \inf\left\{x \mid \frac{1}{G(x+)} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \leq \frac{1}{G(x-)}\right\}$. Como sucede que $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r = \infty$, tenemos $a_n \to 0, n \to \infty$. Entonces tenemos que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} G(\lambda_i a_n x)}{G(a_n+)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r} \leq \sum_{i=1}^{n} G(\lambda_i a_n x) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} G(\lambda_i a_n x)}{G(a_n-)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r},$$

y por como definimos G y a_n tenemos

$$\begin{aligned} x^r &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^r} \sum_{i=1}^n \frac{G(a_n\lambda_i x)}{G(a_n+)} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n G(\lambda_i a_n x) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^r} \sum_{i=1}^n \frac{G(a_n\lambda_i x)}{G(a_n-)} = x^r, \end{aligned}$$

y por lo tanto para cada $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n G(\lambda_i a_n x) = x^r.$$

Por hipótesis, $\max_{i\leq n} \lambda_i = o\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^r\right)$*, y haciendo* $\phi_n \sum_{i=1}^n \lambda_i^r = \max_{i\leq n} \lambda_i$*, tenemos* $\phi_n = o(1)$ *y así para cada* $i \leq n$

$$G(\lambda_i a_n x) \leq G(\phi_n x) = o(1),$$

es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que $G(\lambda_i a_n x) < \varepsilon$ para $n > N$ y toda $i \leq n$. Entonces por el Lema 73 tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^n \overline{G}(\lambda_i a_n x) = e^{-x^r}.$$

Esto significa que para la sucesión independiente $(X_i)_{i=1}^\infty$ y cada $y < 0$

$$w(1, y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \overline{F}_i(a_n y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n G(\lambda_i a_n(-y)) = (-y)^r$$

y

$$P\{M_n \leq a_n y\} = \prod_{i=1}^n F_i(a_n x) = \prod_{i=1}^n \overline{G}(\lambda_i a_n(-y)) \to e^{-(-y)^r}, n \to \infty,$$

que concuerda concuerda con el Teorema 72.

Como caso particular, consideremos que r es un entero positivo y $G^{(p)}(0) = 0$ para $p = 0, 1, \ldots, r-1$, y $G^{(r)}(x) > 0$ y continua para $0 < x < \alpha$. Entonces aplicando la regla de L´Hopital r veces, cada F_i satisface (2.21), pues

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\overline{F}_i(ty)}{\overline{F}_i(t)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{G(-\lambda_i ty)}{G(-\lambda_i t)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{(\lambda_i y)^r G^{(r)}(-\lambda_i ty)}{(\lambda_i)^r G^{(r)}(-\lambda_i t)} = y^r, \; y < 0.$$

Cabe mencionar que la propiedad 2.21 la satisfacen varias funciones de distribución, como por ejemplo, la Weibull, Uniforme, Beta y en general, todas las que pertenezcan al dominio de atracción del máximo $D(\Psi_\alpha(x))$ (ver Teorema 1.6.2 de [18] y notar que en nuestro ejemplo $x_F = 0$)

Con los resultados de la Sección 2.1 y el Teorema anterior obtenemos trivialmente el siguiente corolario para una sucesión general no estacionaria.

Corolario 75 *(Fisher-Tippet caso no estacionario) Si la sucesión de variables aleatorias $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ satisface las condiciones $D(\{u_n\})$, $D'(\{u_n\})$ y la expresión* (2.18) *con respecto a $u_n(x) = a_n x + b_n$, para toda x, entonces*

$$P\{(M_n - b_n)/a_n \leq x\} \xrightarrow{d} H(x) = e^{-w(1,x)}, n \to \infty,$$

donde $H(x)$ satisface (2.20).

Observación 76 *El Corolario anterior nos dice que la distribución de M_n converge a la misma a la que converge $\widetilde{M}_n = \max\left\{\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n\right\}$ donde $\left(\widetilde{X}_i\right)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con $P\left\{\widetilde{X}_i \leq x\right\} = F_i(x)$. Si suponemos que $P\{X_i \leq x\} = F(x)$ para toda i, entonces*

$$H(x) = H_\xi(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}} & si\ \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-x}} & si\ \xi = 0 \end{cases},$$

osea, H coincide con la Distribución de Valores Extremos Generalizada H_ξ (ver Definición 10) y tenemos por tanto la extensión del Teorema de Fisher-Tippet para el caso no estacionario pero idénticamente distribuido.

En general no existe un criterio con el cual podamos decidir si para una sucesión cualquiera $(F_j)_{j=1}^{\infty}$ de funciones de distribución, el máximo M_n (debidamente normalizado) converge a alguna función de distribución límite. Por ejemplo, consideremos para cada natural $k \geq 1$, $F_k(x) = V\left(k^k x\right)$, donde $V(x)$ es cualquier función de distribución tal que $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ para $x > 0$, y, a medida que $x \to 0$, $V(x) = o(x^r)$. donde $r > 0$. Es claro que para que H sea no degenerada necesitamos que $a_n = O(n^{-n})$ y $b_n = 0$. De hecho, cualquier distribución G puede ser el límite en la expresión (2.19), por ejemplo, tomando para cada $i \geq 1$ la distribución $F_i = G^{\alpha_i}$ con $\alpha_i > 0$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$.

Observación 77 *En el Ejemplo 74 la distribución límite de M_n resultó ser del tipo Weibull $\Psi_\alpha(x)$ con $\alpha = r > 0$, es decir una de Valores Extremos. Pero en general no podemos asegurar que H sea del tipo H_ξ (la Observación 76 nos lo asegura sólo en el caso no estacionario idénticamente distribuido y bajo ciertas condiciones). Los siguientes dos Teoremas (ver [15]) nos muestran que la familia a la que la función H del Teorema 72 pertenece es una familia mucho más grande que la de las distribuciones de Valores Extremos.*

Teorema 78 *Sea $P(x)$ absolutamente continua, no decreciente, y positiva para $x > 0$, con $P(0+) = 0$, y supongamos que $xP'(x)$ es no decreciente y crece a 1 para $x > 0$. Entonces existen una sucesión de distribuciones $(F_i)_{i=1}^{\infty}$, una sucesión de reales $(a_n > 0)_{n=1}^{\infty}$, y un número N tal que $F_i(a_n x) < \varepsilon$ para $n > N$ y toda $i \leq n$,*

y tal que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(a_n x)] = e^{-P(x)},\ x > 0. \tag{2.22}$$

Demostración.

Para $x > 0$ sea $F_i(x) = xP'(ix)$. $i = 1, 2, \ldots$ Sea $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(a_n x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{n} P'\left(\frac{ix}{n}\right) \sim \int_0^1 xP'(xy)\,dy = P(x)$$

y además $F_i(a_n x) \leq \frac{x}{n}\left(\max_{0<s\leq 1} P'(sx)\right) = o(1)$ para toda i, y así para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $F_i(a_n x) < \varepsilon$ para $n > N$ y toda $i \leq n$. Entonces aplicando el Lema 73 tenemos (2.22). ■

Observemos que si $xP'(x) > 1$ para $x \geq x_0$, el Teorema sigue siendo válido y para ello definimos

$$F_i(x) = \begin{cases} xP'(ix), & 0 \leq ix < x_0 \\ \frac{1}{i} + \frac{ix+x_0}{1+ix+x_0}, & x_0 \leq ix \end{cases},$$

y de nuevo $a_n = \frac{1}{n}$.

Como un caso especial podemos tomar $P(x)$ positiva, convexa para $x > 0$ y $P(0+) = 0$.

Teorema 79 *Si $P(x)$ es convexa y monótona creciente de 0 a ∞ sobre todos los reales, entonces existen una sucesión de distribuciones $(F_i)_{i=1}^{\infty}$, una sucesión de reales $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, y un número N tal que $F_i(a_n x) < \varepsilon$ para $n > N$ y toda $i \leq n$,*

y tal que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(a_n x)] = e^{-P(x)}. \tag{2.23}$$

Demostración.

Sea $F_i(x) \inf_x \{x \mid P(x + \ln(i+1)) - P(x + \ln i),\ 1\}$, $i = 1, 2, \ldots$, y tomemos $b_n = -\ln(i+1)$, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_i(x + b_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left[P\left(x - \ln\frac{n+1}{i+1}\right) - P\left(x - \ln\frac{n+1}{i}\right)\right] \\ &= P(x) - P(x - \ln(n+1)) = P(x) + o(1). \end{aligned}$$

Para cada $i \leq n$ tenemos que

$$\begin{aligned} F_i(x + b_n) &\leq \max_{i\leq n} \left[P\left(x - \ln\frac{n+1}{i+1}\right) - P\left(x - \ln\frac{n+1}{i}\right)\right] \\ &= P(x) - P\left(x - \ln\frac{n+1}{n}\right) = o(1). \end{aligned}$$

Entonces aplicando de nuevo el Lema 73 tenemos que (2.23) se satisface. ∎

Observación 80 *Para cada $P(x)$ dada como en los dos teoremas anteriores definimos la sucesión $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ de v.a. independientes donde la distribución de cada X_i sea $V_i(y) = 1 - F_i(-y)$, con la sucesión $(F_i)_{i=1}^{\infty}$ de distribuciones definidas en cada caso, en dichos teoremas. Entonces el límite en la expresión* (2.19) *resulta ser $e^{-P(-y)}$ y por lo tanto puede ser diferente de H_ξ (ver Definición 10) para toda todo real ξ.*

Regresemos al caso no estacionario tomando una sucesión de v.a. no estacionarias $(X_i)_{i=1}^{\infty}$. Consideremos el caso en el que la Condición $D'(\{u_n\})$ no se satisface. Esto nos sugiere inmediatamente aplicar los resultados de la Sección 2.2 al caso particular de sucesiones de constantes que satisfagan (2.18). A pesar de esto, daremos otro tratamiento considerando sucesiones $(X_i^*)_{i=1}^{\infty}$ que satisfagan que para toda $t \in [0,1]$ y $\Delta > 0$,

$$P\left\{M_{(nt,n(t+\Delta)]} \leq u_n\right\} - P\left\{M_{n\Delta} \leq u_n\right\} \to 0, n \to \infty, \tag{2.24}$$

donde $M_{(k,m]} = \max\{X_i, k < i \leq m\}$ y $u_n = u_n(x) = a_n + b_n x$.

Ahora estamos en condiciones de establecer una extensión más a los resultados clásicos de la TVE, en este caso generalizamos el Teorema 29, para mostrar el papel tan importante que puede desempeñar el índice extremo en el caso general no estacionario cuando no depende ni de τ ni de $u_{ni}(\tau)$.

Teorema 81 *Sea la sucesión de variables aleatorias $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ que satisfacen la Condición $D(\{u_n\})$,* (2.18) *y* (2.24) *para toda x. Si*

$$w(t,x) = tw(1,x) \text{ para toda } x \text{ y } w(1,x) \text{ continua,} \tag{2.25}$$

entonces existen θ, θ' con $0 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$ tales que

$$\limsup_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq u_n(x)\right\} = e^{-\theta w(1,x)} = H^\theta(x) \tag{2.26}$$

y

$$\liminf_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq u_n(x)\right\} = e^{-\theta' w(1,x)} = H^{\theta'}(x) \tag{2.27}$$

para toda x. Así que si $P\left\{M_n \leq u_n(x)\right\}$ converge, entonces $\theta = \theta'$ y

$$P\left\{M_n \leq u_n(x)\right\} \xrightarrow{d} H^{\theta}(x), n \to \infty.$$

Demostración.

Para r fija definamos los intervalos $I_l = (nt_{l-1}, nt_l]$, en donde $t_l = \frac{l}{r}$ para $1 \leq l \leq r$.

Dado que $F_n^* \to w(1,x), n \to \infty$ sucede que por (2.25) tenemos que

$$\sum_{i \in I_l} \overline{F}_i(u_n(x)) \to \frac{1}{r} w(1,x), n \to \infty.$$

Si usamos los Lemas 51 y 54 obtenemos que también

$$P_n = P\left(B\left(\bigcup_{l=1}^{r} I_l\right)\right) = \prod_{l=1}^{r} P(B(I_l)) + o(1), n \to \infty.$$

Si ahora usamos (2.24) tenemos que para toda l

$$P(B(I_l)) - P(B(I_1)) \to 0, n \to \infty.$$

Definamos $\psi(\tau) = \limsup_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq u_n(x)\right\}$ donde $\tau = w(1,x)$, en realidad $\psi(\tau)$ depende de x solamente a través del valor de τ según el Lema 66. Entonces

$$\limsup_{n\to\infty} P\left\{M_{n/r} \leq u_n(x)\right\} = \limsup_{n\to\infty} P(B(I_1)) = \psi^{1/r}(\tau),$$

y por la continuidad de $w(1,x)$ sabemos que existe x_r tal que se satisface que $w(1,x_r) = \frac{1}{r} w(1,x)$.

Si procedemos de la misma manera que en la demostración del Lema 66 obtenemos que

$$P\left\{M_{n/r} \leq u_n(x)\right\} - P\left\{M_{n/r} \leq u_{n/r}(x)\right\} \to 0, n \to \infty,$$

lo cual implica que

$$\psi\left(\frac{\tau}{r}\right) = \limsup_{n\to\infty} P\left\{M_n \le u_n\left(x_r\right)\right\} = \psi^{1/r}\left(\tau\right).$$

Esta última ecuación funcional tiene como solución

$$\psi\left(\tau\right) = e^{-\theta\tau}, 0 \le \theta \le 1,$$

y con esto probamos (2.26). De la misma manera podemos demostrar (2.27) y utilizando el Lema 64 tenemos que $\theta' \le 1$. ■

Observación 82 *Entre otras cosas, el resultado anterior nos dice que para el caso de sucesiones de v.a. idénticamente distribuidas* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *(pero no estacionarias) podemos asegurar que bajo ciertas condiciones la distribución límite de* M_n *es* H_ξ *para algún real* ξ *(ya que como vimos en el Capítulo 1,* H^θ *resulta ser del mismo tipo que* H *ya que ésta última es una distribución de Valores Extremos y por tanto max-estable), es decir, que si* F *es la distribución de cada* X_i*, entonces* $F \in D\left(H_\xi\right)$ *y por tanto es aplicable el Teorema de GBPdH (38), con lo que la implementación de los métodos de la TVE para estimar las medidas de riesgo* VaR_q *y* ES_q *usando conjuntos de datos no estacionarios puede ser adecuada como en el caso estacionario (ver [5]).*

Este teorema queda perfectamente ilustrado en el siguiente ejemplo mediante una sucesión 2-dependiente (ver Definición 11) no estacionaria.

Ejemplo 83 *Sea* $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de v.a.i.i.d. con distribución exponencial con parámetro* $\lambda = 1$*. Consideremos la sucesión* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *definida para cada* $i \ge 1$ *como* $X_{2i-1} = Y_i$ *y* $X_{2i} = X_{2i-1} + a$ *con* $a > 0$*. Tenemos que*

$$F_1\left(y\right) = P\left\{X_{2i-1} \le y\right\} = \int_0^y e^{-x} dx = 1 - e^{-y}, y \ge 0$$

y

$$F_2\left(y\right) = P\left\{X_{2i} \le y\right\} = P\left\{X_{2i-1} + a \le y\right\} = 1 - e^{-y+a}, y \ge a.$$

Si tomamos $u_n(x) = \ln n + x$, *entonces*

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{[nt]} \overline{F}_i(u_n(x)) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{nt}{2}\right] \left(\overline{F}_1(u_n(x)) + \overline{F}_2(u_n(x))\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{nt}{2}\right] \left(e^{-\ln n - x} + e^{-\ln n - x + a}\right) = \frac{t}{2} e^{-x}(1+e^a), \end{aligned}$$

que claramente satisface (2.18) *y* (2.25). *Además, por como se construyó* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *tenemos que es 2-dependiente y por ende cumple la Condición* $D(\{u_n\})$ *(ver Ejemplo 14) y podemos verificar que también* (2.24) *se satisface. Encontramos fácilmente que*

$$\begin{aligned} P\{M_n \le u_n(x)\} &\approx (P\{X_1 \le u_n(x), X_2 \le u_n(x)\})^{n/2} = (F_2(u_n(x)))^{n/2} \\ &= \left(1 - e^{-\ln n - x + a}\right)^{n/2} = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-x+a}\right)^{n/2} \to e^{-\frac{1}{2}e^{-x+a}}, n \to \infty. \end{aligned}$$

Entonces

$$e^{-\frac{1}{2}e^{-x+a}} = e^{-\theta w(1,x)} = e^{-\theta \frac{1}{2} e^{-x}(1+e^a)}$$

implica que

$$\theta e^{-x}(1+e^a) = e^{-x+a}.$$

Así que el índice extremo resulta ser

$$\theta = \theta(a) = \frac{1}{1+e^{-a}},$$

que es independiente de x *y* $\frac{1}{2} = \theta(0) \le \theta(a) \le 1$.

Otro ejemplo interesante para este resultado es uno de la clase de sucesiones de cadenas-dependientes.

Ejemplo 84 *(DENZEL y O'BRIEN [4])Sea* $(J_i)_{i=0}^{\infty}$ *una cadena de Markov homogénea con los enteros positivos como el espacio de estados, matriz de transición* $P = (P_{ij})$ *y distribución estacionaria única* $\pi = (\pi_i)_{i=0}^{\infty}$. *Sea* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *una* *sucesión de variables aleatorias definida sobre el mismo espacio de probabilidad y relacionada con la cadena como sigue:*

$$\begin{aligned} P\{J_n = j, X_n \le x \mid X_1, \ldots, X_{n-1}, J_0, \ldots, J_{n-1} = i\} &= P\{J_n = j, X_n \le x \mid J_{n-1} = i\} \\ &= P_{ij} H_i(x) \ \ \textit{para cada } n \ge 1, \end{aligned}$$

donde H_i es una función de distribución continua por la derecha para cada i.

A la sucesión $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ se le conoce como cadena-dependiente debido a que los valores que toma son condicionalmente independientes dados los valores de la cadena $(J_i)_{i=0}^{\infty}$. En efecto,

$$P\{X_i \le x_i, i = 1, 2, \ldots, n \mid J_0.J_1, \ldots, J_{n-1}\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \le x_i \mid J_{i-1}\}.$$

También se le conoce como sucesión de variables aleatorias definida sobre una cadena de Markov.

Sea $\pi = \left(1 - 2^{-1/2}, 2^{-1/2} - 3^{-1/2}, \ldots, i^{-1/2} - (i+1)^{-1/2}, \ldots\right)$. Sea y_i tal que $y_0 = \infty$, $H(y_n) = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n = 1 - (n+1)^{-1/2}$. Definamos la matriz B tal que tenga las mismas raíces que π, y $P = kB + (1-k) I$. donde I es la matriz identidad y $k \in (0, 1]$. Entonces $\pi P = \pi$. Esta cadena de Markov satisface la Condición de Doeblin (para alguna r y s y $\varepsilon > 0$, $\sum_{j=1}^{s} P_{ij}^{r} > \varepsilon$ para toda i), pues $\|P_{i.}^{n} - \pi\| \le (1-k)^n$. Si definimos

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \textit{para } x \le y_{n-1} \\ \pi_n^{-1}(H(x) - H(y_{n-1})) & \textit{para } y_{n-1} < x \le y_n \\ 1 & \textit{para } x > y_n \end{cases},$$

entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i H_i(x) = H(x)$ para toda x, donde H es cualquier distribución continua.

Observamos que $\sum_j P_{ij} \overline{H}(x) = k\overline{H}(x) + (1-k)\overline{H}_i(x)$. que para $k < 1$ no converge a cero si $x \to x_0$. De hecho,

$$P\{X_2 > c \mid X_1 > c\} = k\overline{H}(c) + (1-k) \sum_j \pi_j \left(\overline{H}_j(c)\right)^2 \left(\overline{H}(c)\right)^{-1},$$

que para $c = y_n$ *tiene el valor* $k\overline{H}(c) + (1-k)$, *por lo que para* $k < 1$ *no converge a cero si* $x \to x_0$.

Para demostrar la convergencia de $P\{M_n \leq u_n(\tau)\}$, *sea* $\tau > 0$ *y definamos* $j(n) = [n^2/\tau^2]$ *y* $v_n(\tau) = y_{j(n)}$. *Entonces*

$$H(v_n(\tau)) = 1 - (1 + j(n))^{-\frac{1}{2}} \geq 1 - \frac{\tau}{n} = H(u_n(\tau)),$$

y así $u_n(\tau) \leq v_n(\tau)$. *Pero*

$$P\{J_n \leq l \mid J_{n-1}\} = k(\pi_1 + \cdots + \pi_l) + (1-k) = 1 - k(1+l)^{-\frac{1}{2}}, \text{ si } J_{n-1} \leq l.$$

por lo que

$$\begin{aligned} P\{M_n \leq v_n(\tau)\} &= P\{\max(J_0, \ldots, J_{n-1}) \leq j(n)\} \\ &= \left[1 - k(1 + j(n))^{-\frac{1}{2}}\right]^{n-1} \left[1 - (1 + j(n))^{-\frac{1}{2}}\right]. \end{aligned}$$

Entonces $\limsup_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n(\tau)\} = e^{-k\tau}$ *ya que*

$$P\{M_n \leq u_n(\tau)\} \leq P\{M_n \leq v_n(\tau)\} \to e^{-k\tau}, n \to \infty.$$

Si ahora consideramos $v_n(\tau) = y_{j(n)-1}$, *y procedemos de la misma forma,*

$$\liminf_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n(\tau)\} = e^{-k\tau}.$$

Observamos que si H *es tal que* $H^n(a_n + b_n x) \to \Phi(x)$ *entonces*

$$P\{M_n \leq a_n + b_n x\} \to \Phi^k(x),$$

para $k \in (0, 1]$.

En este caso hemos encontrado que el índice extremo es $\theta = k$, *que no depende del valor de* τ *y puede tomar cualquier valor* $0 < \theta \leq 1$.

Continuando con el ejemplo anterior podemos encontrar un caso interesante en el que el índice extremo toma el valor cero, que aunque en la práctica no tenga mucho sentido, sí lo tiene desde el punto de vista teórico.

Ejemplo 85 *Construyamos una sucesión de cadena-dependiente con la propiedad de que* $P\{M_n \leq u_n(\tau)\} \to 1, n \to \infty$, *es decir, cuando* $\theta = 0$. *Consideremos la matriz de transición* P *tal que* $P_{i,i+1} = p_{i+1} > 0$ *y* $P_{i0} = 1 - p_{i+1}$, *para cada* $i \geq 0$. *Sean* $\beta_0 = 1$ *y* $\beta_i = \prod_{k=1}^{i} p_k$. *Se puede demostrar que si* $s = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i < \infty$, *entonces* $\pi_i = \frac{1}{s}\beta_i$. *Si tomamos* $p_k = k(k+2)^{-1}$ *tenemos que* $\pi_k = (k+1)^{-1} - (k+2)^{-1} = (k+1)^{-1}(k+2)^{-1}$, *y* $\sum_{i=k}^{\infty} \pi_i = (k+1)^{-1}$.

Para simplificar los cálculos consideremos

$$H_i(x) = \begin{cases} 1, & x \geq i \\ 0, & x < i \end{cases},$$

y entonces $\overline{H}(x) = \sum_i \pi_i \overline{H}_i(x) = \sum_{i=[x]+1} \pi_i = ([x]+2)^{-1}$. *Aquí tenemos que* $u_n(\tau) = \left[\frac{n}{\tau} - 2\right]$. *Por conveniencia restringimos nuestra atención en* $\tau = 1$, *y veremos que* $P\{M_n \leq u_n(1)\} \to 1, n \to \infty$.

Sea $P\{J_0 = 0\} = 1$ *y definamos* $T_1 = \min\{i \mid J_i = 0\}$, *y* $Y_1 = J_{T_1-1}$. *Entonces* $P\{Y_1 \geq k\} = \beta_k$. *Análogamente, denotaremos* $T_{n+1} = \min\{i \mid i > T_n$ *y* $J_i =$ *y* $Y_{n+1} = J_{T_{n+1}-1}$. *Finalmente, definimos* $N_j = \max\{i \mid T_i \leq j\}$. *Entonces*

$$P\{M_n \leq n-2 \mid N_n\} = \left(1 - \beta_{n-1}\right)^{N_n} = \left(1 - 2\pi_{n-1}\right)^{N_n}$$

y por tanto

$$P\{M_n \leq n-2\} = E\left(P\{M_n \leq n-2 \mid N_n\}\right) = E\left[\left(1 - 2\pi_{n-1}\right)^{N_n}\right].$$

Pero por la Ley Fuerte de los Grandes Números (LFGN)

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \pi_0 = \frac{1}{2}, n \to \infty,$$

y $\pi_{n-1} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, *por lo que* $P\{M_n \leq u_n(1)\} \to 1, n \to \infty$, *y entonces* $\theta = 0$.

2.4 Proceso puntual de los excedentes

Haber probado el Teorema 53, que es una generalización del Teorema 1, nos lleva a pensar que también podemos extender al caso no estacionario resultados sobre la convergencia débil del proceso puntual definido por los excedentes de $X_1, \ldots, X_n$ sobre los reales $u_{n1}, \ldots, u_{nn}$ (ver Apéndice) que está dado por

$$N_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{i}{n}}(\cdot)\, 1_{\{X_i > u_{ni}\}}, n = 1, 2, \ldots, \tag{2.28}$$

donde δ es la medida de Dirac, a saber, $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A \\ 0, & si\ x \notin A \end{cases}$, $A \in \mathcal{B}((0,1])$.

Así para cada $B \in \mathcal{B}((0,1])$ y $n \geq 1$,

$$N_n(B) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{i}{n}}(B)\, 1_{\{X_i > u_{ni}\}} = \sum_{\frac{i}{n} \in B} 1_{\{X_i > u_{ni}\}} = \sum_{i \in nB} 1_{\{X_i > u_{ni}\}}.$$

De nuevo, la relación de N_n con la TVE radica en el hecho de que

$$\{N_n(0,1] = 0\} = \left\{X_i \leq u_{ni}, \frac{i}{n} \in (0,1]\right\} = \{X_i \leq u_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$$

y entonces $P\{N_n(0,1] = 0\} = P_{n,\{u_{ni}\}}$, que son las probabilidades cuyo comportamiento asintótico son nuestro principal interés en este documento, como los destacamos al inicio de este capítulo.

De nuevo supondremos que se satisface la expresión (2.2) y que $\sum_{i=1}^{n}(1 - F_i(u_{ni}))$ es acotada para todo $n \geq 1$, como al principio del capítulo. Es decir,

$$\overline{F}_{n,\max} = \sup_{i \leq n}(1 - F_i(u_{ni})) \to 0, n \to \infty \tag{2.29}$$

y

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(1 - F_i(u_{ni})) < \infty. \tag{2.30}$$

En la Sección 1.6 vimos que N_n converge en distribución a un proceso Poisson homogéneo, tanto para el caso de v.a.i.i.d. como el estacionario, para lo cual las Condiciones $D(u_n)$ y $D'(u_n)$ fueron indispensables. En el caso general en que $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ no es necesariamente estacionaria, es de suponerse que $D(\{u_{ni}\})$ y $D'(\{u_{ni}\})$ serán necesarias para establecer resultados análogos.

Al inicio de este capítulo, definimos que se satisface la Condición $D(\{u_{ni}\})$ si para cualesquiera naturales $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots i_p < j_1 < \cdots j_q \leq n$, $j_1 - i_p \geq m$,

$$\left| \begin{array}{l} P\{X_{i_h} \leq u_{ni_h}, h \leq p, X_{j_l} \leq u_{nj_l}, l \leq q\} \\ \qquad - P\{X_{i_h} \leq u_{ni_h}, h \leq p\} P\{X_{j_l} \leq u_{nj_l}, l \leq q\} \end{array} \right| \leq \alpha_{n,m},$$

y existe $(m_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que si $n \to \infty$,

$$\alpha_{n,m_n} \to 0 \qquad \text{y} \qquad m_n \overline{F}_{n,\max} \to 0. \tag{2.31}$$

De aqui en adelante usaremos una sucesión de reales $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$k_n \alpha_{n,m_n} \to 0 \qquad \text{y} \qquad k_n m_n \overline{F}_{n,\max} \to 0. \tag{2.32}$$

En vez de la Condición $D'(\{u_{ni}\})$ usaremos otra, que es análoga, llamada $D^*(\{u_{ni}\})$ y que ahora definimos.

Definición 86 *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. y $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$ de números reales. Supongamos que existe una sucesión de reales $(\alpha_n^*)_{n=1}^{\infty}$ tal que para toda n fija*

$$\sum_{i<j\in I} P\{X_i > u_{ni}, X_j \leq u_{ni}, X_{j+1} > u_{n,j+1}\} \leq \alpha_n^* \tag{2.33}$$

para cualquier intervalo $I = \{i \in \mathbb{N} \mid i_1 \leq i \leq i_2 \leq n\}$ con

$$\sum_{i \in I} P\{X_i > u_{ni}\} \leq \frac{1}{k_n} \sum_{i \leq n} P\{X_i > u_{ni}\}. \tag{2.34}$$

Decimos que $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ satisface la Condición $D^*(\{u_{ni}\})$ respecto a $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$ si

$$k_n \alpha_n^* \to 0, n \to \infty,$$

donde k_n satisface (2.32).

Esta nueva condición restringe la oscilación rápida de los excedentes, aunque puede en cierta forma puede ser debilitada usando la definición de $D'(\{u_{ni}\})$, pero las demostraciones son menos técnicas si usamos (2.33) con (2.34).

Lema 87 *Supongamos que se cumplen* $D(\{u_{ni}\})$ *y* (2.32), *y sean* $B_j = B_{j,n}$, $j \leq k_n$ *subintervalos de* $(0,1]$ *ajenos entre sí. Entonces*

$$\left| P\left\{ X_i \leq u_{ni}, i \in \bigcup_{j \leq k_n} nB_j \right\} - \prod_{j \leq k_n} P\{X_i \leq u_{ni}, i \in nB_j\} \right| \leq k_n \alpha_{n,m_n} \to 0, n \to \infty$$

Demostración.

Caso 1.

Si los B_j están separados uno de otro por al menos $\frac{m_n}{n}$, entonces por ser ajenos

$$P\left\{ X_i \leq u_{ni}, i \in \bigcup_{j \leq k_n} nB_j \right\} - \prod_{j \leq k_n} P\{X_i \leq u_{ni}, i \in nB_j\}$$

$$= \sum_{l \leq k_n - 1} \left[\begin{array}{l} P\left\{X_i \leq u_{ni}, i \in \bigcup_{l \leq j \leq k_n} nB_j\right\} \prod_{j \leq l-1} P\{X_i \leq u_{ni}, i \in nB_j\} \\ -P\left\{X_i \leq u_{ni}, i \in \bigcup_{l+1 \leq j \leq k_n} nB_j\right\} \prod_{j \leq l} P\{X_i \leq u_{ni}, i \in nB_j\} \end{array} \right]$$

(considerando $\prod_{l \leq 0} a_l = 1$). Por la Condición $D(\{u_{ni}\})$, el valor absoluto de cada término de la suma está acotado por α_{n,m_n}. Entonces el resultado es consecuencia de (2.32).

Caso 2.

Si alguna de las B_j no están separadas por al menos $\frac{m_n}{n}$, entonces definimos $B_j^* = B_j - (d_j - \frac{m_n}{n}, d_j]$ para $B_j = (c_j, d_j]$. Así que por el *Caso* 1

$$\left| P\left\{ X_i \leq u_{ni}, i \in \overset{*}{\bigcup_{j \leq k_n}} nB_j^* \right\} - \overset{*}{\prod_{j \leq k_n}} P\{X_i \leq u_{ni}, i \in nB_j^*\} \right| \leq k_n \alpha_{n,m_n},$$

donde $\bigcup^*$ y $\prod^*$ denotan la unión y el producto, respectivamente, de las B_j^* tales que $B_j^* \neq \emptyset$. Si $B_j^* = \emptyset$, entonces $P\{X_i \leq u_{ni}, i \in nB_j\} \leq m_n \overline{F}_{n,\max} = o(k_n^{-1})$.

Finalmente, tenemos el resultado deseado observando que

$$0 \leq P\left\{X_i \leq u_{ni}, i \in \overset{*}{\bigcup_{j\leq k_n}} nB_j^*\right\} - P\left\{X_i \leq u_{ni}, i \in \bigcup_{j\leq k_n} nB_j\right\} \leq k_n m_n \overline{F}_{n,\max} \to 0$$

y análogamente,

$$0 \leq \overset{*}{\prod_{j\leq k_n}} P\{X_i \leq u_{ni}, i \in nB_j^*\} - \prod_{j\leq k_n} P\{X_i \leq u_{ni}, i \in nB_j\} \leq k_n m_n \overline{F}_{n,\max} \to 0,$$

usando la desigualdad $|\prod_i x_i - \prod_i y_i| \leq \sum_i |x_i - y_i|$, que es válida para todo $x_i, y_i \in (0,1]$. ∎

Ahora analizaremos la convergencia de $P\{X_i \leq u_{ni}, i \in nB_j\}$ suponiendo además, la Condición $D^*(\{u_{ni}\})$. Para ello presentamos el siguiente lema.

Lema 88 *Supongamos que las Condiciones $D(\{u_{ni}\})$ y $D^*(\{u_{ni}\})$ se satisfacen, entonces para toda $0 < t \leq 1$*

$$P\{X_i \leq u_{ni}, i \leq nt\} \to e^{-\mu(t)}. \tag{2.35}$$

si y sólo si,

$$\sum_{i\leq nt} P\{X_i \leq u_{ni}, X_{i+1} > u_{n,i+1}\} \to \mu(t), \tag{2.36}$$

donde $\mu(1) < \infty$, y obviamente, μ es una función no decreciente y no negativa.

Demostración.

Sea $0 < t \leq 1$. Dividamos $(0,t] = B$ en k_n subintervalos $B_j = B_j(n)$ tales que

$$\sum_{i\in B_j} (1 - F_i(u_{ni})) \leq \frac{1}{k_n} \sum_{i<nt} (1 - F_i(u_{ni})), \tag{2.37}$$

que puede hacerse definiendo $nB_1 = \{1, \ldots, i_1\}$ tal que (2.37) se satisface y el índice i_1 es tomado en su valor máximo, es decir, tal que

$$\sum_{i\in nB_1} (1 - F_i(u_{ni})) + (1 - F_{i_1+1}(u_{n,i_1+1})) \geq \frac{1}{k_n} \sum_{i<nt} (1 - F_i(u_{ni})), \tag{2.38}$$

entonces $nB_2 = \{i_1+1,\ldots,i_2\}$ con i_2 elegido en su valor máximo como i_1, y seguimos este proceso sucesivamente (como lo hicimos en la primera sección de este capítulo). Notemos que $n\left(B - \bigcup_{j\le k_n} B_j\right) = \{i_{k_n}+1,\ldots,[nt]\} = B_0$ posiblemente es no vacío. Pero por la manera en que elegimos $i_1,\ldots i_{k_n}$, tenemos que por (2.38) y (2.32),

$$\sum_{i\in nB_0}(1-F_i(u_{ni})) \le \sum_{i<nt}(1-F_i(u_{ni})) - \sum_{j\le k_n}\sum_{i\in nB_j}(1-F_i(u_{ni})) \quad (2.39)$$
$$\le k_n\overline{F}_{n,\max} \to 0, n\to\infty.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que se satisface (2.36). Entonces para cada $j \le k_n$

$$\begin{aligned}1-P\{X_i\le u_{ni}, i\in nB_j\} &\le \overline{F}_{n,\max} + \sum_{i\in nB_j} P\{X_i\le u_{ni}, X_{i+1}>u_{n,i+1}\}\\ &\le \frac{1}{k_n}\sum_{i<nt}(1-F_i(u_{ni})) \quad (2.40)\end{aligned}$$

por la expresión (2.37), y

$$1-P\{X_i\le u_{ni}, i\in nB_j\}$$

$$\begin{aligned}&\ge \sum_{i\in nB_j} P\{X_i\le u_{ni}, X_{i+1}>u_{n,i+1}\}\\ &\quad - \sum_{i<l\in nB_j} P\{X_i\le u_{ni}, X_{i+1}>u_{n,i+1}, X_l\le u_{nl}, X_{l+1}>u_{n,l+1}\}. \quad (2.41)\end{aligned}$$

Por la construcción de los subintervalos B_j, las probabilidades de excedentes en B_j están uniformemente acotadas por (2.37), y entonces para toda $\varepsilon>0$ existe N tal que $1-P\{X_i\le u_{ni}, i\in nB_j\}<\varepsilon$ para $n\ge N$ y toda $j\le k_n$, por ende, podemos usar el mismo argumento que en la demostración del Lema 73, aplicado a $1-P\{X_i\le u_{ni}. i\in nB_j\}$ en vez de $F_i(a_nx+b_n)$, y escribir

$$\prod_{j\le k_n} P\{X_i\le u_{ni}, i\in nB_j\} = e^{-(1+o(1))\sum_{j\le k_n}[1-P\{X_i\le u_{ni}, i\in nB_j\}]}$$

$$= e^{-(1+o(1))\sum_{j\le k_n}\sum_{i\in nB_j} P\{X_i\le u_{ni}, X_{i+1}>u_{n,i+1}\}+O\left(k_n\overline{F}_{n,\max}\right)+O(k_n\alpha_n^*)}$$
$$= e^{(-1+o(1))\sum_{i\le nt} P\{X_i\le u_{ni}, X_{i+1}>u_{n,i+1}\}+o(1)} \to e^{-\mu(t)}.$$

Tenemos entonces que por el Lema 87, se cumple (2.35).

($\Rightarrow$) Supongamos que se satisface (2.35), entonces el Lema 87 y (2.37) implican, de igual manera que para los B_j de la parte ($\Leftarrow$), que

$$\prod_{j\le k_n} P\left\{X_i \le u_{ni}, i\in nB_j\right\} = e^{-(1+o(1))\sum_{j\le k_n}[1-P\{X_i\le u_{ni}, i\in nB_j\}]} \to e^{-\mu(t)}.$$

Si usamos las desigualdades (2.40) y (2.41), tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j\le k_n}\sum_{i\in nB_j} P\left\{X_i\le u_{ni}, X_{i+1}>u_{n,i+1}\right\} &\ge \sum_{j\le k_n}\left[1-P\left\{X_i\le u_{ni}, i\in nB_j\right\}\right]-k_n\overline{F}_{n,\max}\\ &\to \mu(t).\end{aligned}$$

Análogamente, con la Condición $D^*(\{u_{ni}\})$, la cota superior converge también a $\mu(t)$. Finalmente, por la construcción de los B_j, observamos que

$$\sum_{i\le nt} P\left\{X_i\le u_{ni}, X_{i+1}>u_{n,i+1}\right\}-\sum_{j\le k_n}\sum_{i\in nB_j} P\left\{X_i\le u_{ni}, X_{i+1}>u_{n,i+1}\right\}\le k_n\overline{F}_{n,\max},$$

así que como el lado derecho converge a cero, tenemos que se cumple la expresión (2.36). ■

Observación 89 *El conjunto* $B_0 = \{i_{k_n}+1,\ldots,[nt]\}$ *tiende a* $\emptyset$ *a medida que* $n\to\infty$*, esto por* (2.39)*. Este hecho lo usaremos más adelante.*

Con la misma técnica de la demostración anterior, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 90 *Sea* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias y* $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n\ge 1$ *sucesión de reales tal que las Condiciones* $D(\{u_{ni}\})$ *y* $D^*(\{u_{ni}\})$ *se satisfacen. Entonces*

$$P\left\{X_i\le u_{ni}, i\le n\right\}\to e^{-\mu(1)}>0, n\to\infty,$$

si y sólo si,

$$\sum_{i\leq n} P\left\{X_i \leq u_{ni}, X_{i+1} > u_{n,i+1}\right\} \to \mu\left(1\right), n \to \infty.$$

No obstante, estos mismos resultados implican también una afirmación más fuerte sobre el proceso puntual de excedentes $\widetilde{N}_n$ definido por

$$\widetilde{N}_n\left(\cdot\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{i}{n}}\left(\cdot\right) 1_{\{X_{i-1}\leq u_{n,i-1}, X_i > u_{ni}\}}, n = 1, 2, \ldots. \tag{2.42}$$

Es decir, para cada $B \in \mathcal{B}\left((0,1]\right)$ y $n \geq 1$,

$$\widetilde{N}_n\left(B\right) = \sum_{i\in nB} 1_{\{X_{i-1}\leq u_{n,i-1}, X_i > u_{ni}\}}.$$

Para que el tratamiento sea más sencillo y facilite las aplicaciones, supondremos que μ es una función continua.

Teorema 91 *Sea* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias tal que las Condiciones* $D\left(\{u_{ni}\}\right)$ *y* $D^*\left(\{u_{ni}\}\right)$ *se satisfacen para los reales* $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$. *Sea* $\left(\widetilde{N}_i\right)_{i=1}^{\infty}$ *la sucesión de procesos de excedentes definidos por* (2.42)*. Entonces la expesión* (2.36) *es equivalente a*

$$\widetilde{N}_n \xrightarrow{d} \widetilde{N}, \tag{2.43}$$

donde $\widetilde{N}$ *es un proceso Poisson sobre* $E = (0,1]$ *con medida de intensidad la función continua* $\mu\left(\cdot\right)$ *y* $\mu\left(1\right) < \infty$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que (2.36) se satisface. De nuevo, haremos uso del Teorema 143, como en la Sección 1.6, ya que en este caso por ser μ continua se satisface la condición (.2) del Apéndice y entonces $\widetilde{N}$ es simple, por lo tanto, para probar (2.43) debemos verificar las expresiones (.6) y (.7) del Apéndice.

Para cualquier $A = (a, b] \subset (0, 1]$

$$E\left[\widetilde{N}_n(A)\right] = \sum_{i \in nA} P\{X_{i-1} \leq u_{n,i-1}, X_i > u_{ni}\}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{[na]+1 \leq i \leq [nb]} P\{X_{i-1} \leq u_{n,i-1}, X_i > u_{ni}\} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq [nb]} P\{X_{i-1} \leq u_{n,i-1}, X_i > u_{ni}\} - \sum_{1 \leq i \leq [na]} P\{X_{i-1} \leq u_{n,i-1}. X_i > u_{ni}\} \\ &\rightarrow \mu(b) - \mu(a) = E\left[\widetilde{N}((0, b])\right] - E\left[\widetilde{N}((0, a])\right] = E\left[\widetilde{N}(A)\right], \end{aligned}$$

quedando así probada la condición (.6) del Apéndice.

Los Lemas 87 y 88 implican que también para todo $B = \bigcup_{j=1}^{k}(c_j. d_j]$ con $a < c_1 < d_1 < \cdots < c_k < d_k \leq b$ y cada $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} P\left\{\widetilde{N}_n(B) = 0\right\} &= \prod_{j=1}^{k} P\{X_i \leq u_{ni}, i \in (c_j, d_j]\} + o(1) \\ &\rightarrow e^{-\sum_{j=1}^{k}[\mu(d_j) - \mu(c_j)]} = e^{-E[\widetilde{N}(B)]} = P\left\{\widetilde{N}(B) = 0\right\}, \end{aligned}$$

y con esto se satisface la condición (.7) del Apéndice.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que se satisface (2.43). Sea $B = (0, t]$, para $0 < t \leq 1$. Entonces

$$P\left\{\widetilde{N}_n(B) = 0\right\} = P\{X_i \leq u_{ni}, i \leq nt\} \rightarrow P\left\{\widetilde{N}(B) = 0\right\} = e^{-\mu(t)}, n \rightarrow \infty.$$

Entonces, por el Lema 88, se satisface (2.36). ∎

Bajo una condición extra el proceso puntual de excedentes N_n es asintóticamente idéntico a $\widetilde{N}_n$. Denotaremos

$$\left\|N_n - \widetilde{N}_n\right\| = \sup_{\{A_k\}} \sum_k \left|\left(N_n(A_k) - \widetilde{N}_n(A_k)\right) - \left(N_n(A_{k-1}) - \widetilde{N}_n(A_{k-1})\right)\right|.$$

donde el supremo es tomado sobre todas las particiones finitas de la forma $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = (0, 1]$ con $A_k \in B((0, 1])$. Así que $\left\|N_n - \widetilde{N}_n\right\|$

representa la variación total entre N_n y $\widetilde{N}_n$, por analogía con el concepto de variación total para una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sobre $[a, b]$ que sabemos se define como $\|F\|_a^b = \sup_{\{t_k\}} \sum_k |F(t_k) - F(t_{k-1})|$, donde el sup se toma sobre todas las particiones finitas $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Así para dos procesos puntuales N y M tales que $N(A) \geq M(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}((0,1])$, tendremos que

$$\|N - M\| = N((0,1]) - M((0,1]).$$

Teorema 92 *Para cada $n \geq 1$ sea $(u_{ni})_{i=1}^{n}$ sucesión de reales y $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias que satisface las Condiciones $D(\{u_{ni}\})$ y $D^*(\{u_{ni}\})$. Supongamos (2.36), con μ continua, y que para toda $0 < t \leq 1$*

$$\sum_{i \leq nt} P\{X_i > u_{ni}\} \to \lambda(t), n \to \infty, \lambda(1) < \infty. \tag{2.44}$$

Entonces $E\left[\left\|N_n - \widetilde{N}_n\right\|\right] \to 0, n \to \infty$ es equivalente a $\mu(1) = \lambda(1)$. Esto implica que

$$\mu(t) = \lambda(t) \ \textit{para toda}\ 0 < t \leq 1$$

y

$$N_n \xrightarrow{d} N,$$

donde N es un proceso Poisson sobre $E = (0,1]$ con medida de intensidad definida por la función $\lambda(\cdot)$.

Demostración.

Para cualquier $B \subset (0,1]$, por las definiciones de ambos procesos, es claro que $N_n(B) \geq \widetilde{N}_n(B)$. Entonces

$$E\left[\left\|N_n - \widetilde{N}_n\right\|\right] = E\left[N_n((0,1]) - \widetilde{N}_n((0,1])\right] \to \lambda(1) - \mu(1) = 0, n \to \infty,$$

según las hipótesis.

Recíprocamente,

$$E\left[\left\|N_n - \widetilde{N}_n\right\|\right] = E\left[N_n((0,1]) - \widetilde{N}_n((0,1])\right] \to 0, n \to \infty,$$

implica, por (2.36) y (2.44), que $\lambda(1) = \mu(1)$.

Dado que para cada $i \leq n$, con n fijo,

$$0 \leq P\{X_i > u_{ni}\} - P\{X_{i-1} \leq u_{n,i-1}, X_i > u_{ni}\},$$

tenemos que

$$\sum_{i \leq nt} P\{X_i > u_{ni}\} - \sum_{i \leq nt} P\{X_{i-1} \leq u_{n,i-1}, X_i > u_{ni}\}$$

es una función no negativa y no decreciente en t. Así que por (2.36) y (2.44),

$$0 \leq \lambda(t) - \mu(t) \leq \lambda(1) - \mu(1) = 0$$

implica que $\lambda(t) = \mu(t)$ para toda $0 < t \leq 1$. Entonces el Teorema 91 nos dice que $N_n \xrightarrow{d} N$ donde N es un proceso Poisson sobre $E = (0, 1]$ con medida de intensidad $\mu(\cdot) = \lambda(\cdot)$. ∎

Observación 93 *Según el Teorema anterior, para probar que se satisface que* $E\left[\left\|N_n - \widetilde{N}_n\right\|\right] \to 0, n \to \infty$, *es suficiente verificar que las expresiones* (2.36) *y* (2.44) *se satisfacen para* $t = 1$.

La Condición $D^*(\{u_{ni}\})$ hace que, asintóticamente, en intervalos pequeños haya a lo más un excedente. Como no hay estacionariedad, las acumulaciones de excedentes están definidas con respecto a los subintervalos B_j que construimos en la demostración del Lema 88 (con $t = 1$). Entonces definimos el proceso puntual de acumulación de excedentes N_n^* como

$$N_n^*(B) = \sum_{j \leq k_n} 1_{\{N_n(B_j \cap B) \neq 0\}}, \ B \in \mathcal{B}((0, 1])$$

Demostraremos que este proceso puntual en $(0, 1]$ converge también al proceso Poisson $\widetilde{N}$ del Teorema 91. Observamos que los excedentes que se dan en B_0 están excluidos en N_n^*. Pudimos haberlos incluido, pero no lo hicimos en vista de la Observación 89, ya que obtendríamos la misma convergencia a $\widetilde{N}$ si los incluyéramos.

Teorema 94 *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias que satisface las Condiciones $D(\{u_{ni}\})$ y $D^*(\{u_{ni}\})$ respecto a $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$. Entonces (2.36), con μ continua, es equivalente a que $N_n^* \xrightarrow{d} \widetilde{N}$, donde $\widetilde{N}$ es un proceso Poisson sobre $E = (0,1]$ con medida de intensidad definida por μ. Además, para $n \to \infty$, ocurre que $E\left\|N_n^* - \widetilde{N}_n\right\| \to 0$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que se satisface (2.36). Otra vez, con la misma justificación que en la demostración del Teorema 91, para demostrar la convergencia débil de $(N_i^*)_{i=1}^{\infty}$ a $\widetilde{N}$, es necesario demostrar las expresiones (.6) y (.7) del Apéndice, según el Teorema 143. Para cualquier $B = (c,d] \subset (0,1]$, por (2.37), tenemos que

$$\begin{aligned} E[N_n^*(B)] &= \sum_{j \leq k_n} P\{N_n(B_j \cap B) \neq 0\} = \sum_{j \leq k_n, B_j \cap B \neq \varnothing} P\{N_n(B_j) \neq 0\} + o(1) \\ &= \sum_{j \leq k_n, B_j \cap B \neq \varnothing} \sum_{i \in n B_j} P\{X_i \leq u_{ni}, X_{i+1} > u_{n,i+1}\} + o(1), \end{aligned}$$

usando también (2.40) y (2.41). La suma del lado derecho converge a $\mu(d) - \mu(c)$ ya que $P\{N_n(B_j) \neq 0\} \to 0, n \to \infty$ para cada $j \leq k_n$ y porque hemos supuesto (2.36). Entonces

$$E[N_n^*(B)] \to \mu(d) - \mu(c) = E\left[\widetilde{N}(B)\right],$$

quedando probada la expresión (.6) del Apéndice.

Ahora bien, usando el Lema 88 tenemos que para cualquier B que sea unión finita de intervalos $(c_l, d_l] \subset (0,1]$,

$$P\{N_n^*(B) = 0\} = P\{N_n(B) = 0\} + o(1) \to e^{-\sum_l [\mu(d_l) - \mu(c_l)]} = P\left\{\widetilde{N}_n(B) = 0\right\},$$

y con esto hemos probado la expresión (.7) del Apéndice.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que $N_n^* \xrightarrow{d} \widetilde{N}$. Sucede que para cualquier $B = (0,t]$

$$P\{N_n^*(B) = 0\} = P\{N_n(B) = 0\} + o(1) \to e^{-\mu(t)},$$

entonces por el Lema 88 se satisface (2.36).

Finalmente para probar la propiedad de la variación total, definamos un proceso puntual $\widehat{N}_n$ mediante

$$\widehat{N}_n(B) = \sum_{j \leq k_n, B_j \cap B \neq \varnothing} \widetilde{N}_n(B_j) + \sum_{0 \leq l \leq k_n - 1} 1_{\{X_{i_l+1} > u_{n,i_l+1}\}},$$

donde para cada $l \leq k_n$, $i_l + 1$ es el primer punto de B_l, y tomamos $i_0 = 0$. Así $\widehat{N}_n(B) \geq \widetilde{N}_n(B)$ para cualquier $B \subset (0,1]$ y por lo tanto

$$E\left[\left\|\widehat{N}_n - \widetilde{N}_n\right\|\right] = E\left[\widehat{N}_n((0,1]) - \widetilde{N}_n((0,1])\right] \to 0, n \to \infty,$$

pues $E\left[\widetilde{N}_n((0,1])\right] \to \mu(1)$, según el Teorema 91, y

$$E\left[\widehat{N}_n((0,1])\right] = \sum_{j \leq k_n} E\left[\widetilde{N}_n(B_j)\right] + O\left(k_n \overline{F}_{n,\max}\right) = E\left[\widetilde{N}_n((0,1])\right] + o(1) \to \mu(1).$$

Como también $\widehat{N}_n(B) \geq N_n^*(B)$ para cualquier $B \subset (0,1]$, entonces de nuevo, $E\left[\left\|\widehat{N}_n - N_n^*\right\|\right] = E\left[\widehat{N}_n((0,1]) - N_n^*((0,1])\right]$, pero por la parte ($\Rightarrow$) tenemos que también $E(N_n^*((0,1])) \to \mu(1)$, por lo tanto debe suceder

$$E\left[\left\|N_n^* - \widetilde{N}_n\right\|\right] \to 0, n \to \infty.$$

■

Ahora trataremos de establecer los resultados anteriores para casos más particulares, en los que la no estacionariedad de la sucesión $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ con respecto a los excedentes no sea tan fuerte. Para ello, en vez de usar los bloques B_j con longitudes que varían dependiendo de $\overline{F}_i(u_{ni})$, y debido a que $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$ no es constante, los B_j pueden ser definidos por una longitud fija $\frac{1}{k_n}$. Hacer esto es razonable para sucesiones estacionarias o casi estacionarias. En vez de $k_n \alpha_n^*$ en la definición de la Condición $D^*(\{u_{ni}\})$, definimos

$$\widetilde{\alpha}_n = \sum_{l \leq n - r_n} \sum_{j \leq r_n - 1} P\{X_l > u_{nl}, X_{l+j} \leq u_{n,l+j}, X_{l+j+1} > u_{n,l+j+1}\}$$

donde $r_n = \left[\frac{n}{k_n}\right]$. Entonces diremos que se satisface la Condición $\widetilde{D}(\{u_{ni}\})$ si $\widetilde{\alpha}_n \to 0, n \to \infty$. Verificar esta condición es más fácil, ya que los B_j utilizados son más simples, aunque los términos considerados en $\widetilde{D}(\{u_{ni}\})$ son más que en $D^*(\{u_{ni}\})$. No obstante, estos números son asintóticamente del mismo orden $O\left(\frac{n^2}{k_n}\right)$.

De manera similar al Lema 88, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 95 *Supongamos que se satisfacen las Condiciones* $D(\{u_{ni}\})$ *y* $D^*(\{u_{ni}\})$. *Entonces para toda* $0 < t \leq 1$,

$$P\{X_i \leq u_{ni}, i \in n(0,t]\} \to e^{-\mu(t)} \text{ con } \mu(1) < \infty$$

es equivalente a la expresión (2.36), *donde* $\mu(\cdot)$ *es una función continua.*

Observación 96 *La cota de la expresión* (2.37) *en el Lema 88 resulta ser en este caso* $1 - P\left\{X_i \leq u_{ni}, i \in (\frac{j-1}{k_n}, \frac{j}{k_n}]\right\}$ *y es* $o(1)$, *uniformemente en* $j \leq k_n$, *ya que* μ *es continua.*

Entonces también podemos derivar las mismas conclusiones sobre los procesos puntuales estudiados, las cuales se siguen por el Lema anterior, y establecemos en el siguiente Teorema.

Teorema 97 *Sea* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias tal que se satisfacen las Condiciones* $D(\{u_{ni}\})$ *y* $\widetilde{D}(\{u_{ni}\})$ *con respecto a* $(u_{ni})_{i=1}^{\infty}, n \geq 1$. *Sea* μ *una función continua y* $\mu(1) < \infty$.

(i) La expresión (2.36) *es equivalente a* $\widetilde{N}_n \xrightarrow{d} \widetilde{N}$, *donde* $\widetilde{N}$ *es un proceso Poisson sobre* $E = (0,1]$ *con medida de intensidad definida por* $\mu(\cdot)$.

(ii) Si (2.36) *y* (2.44) *se satisfacen, entonces* $E\left[\left\|N_n - \widetilde{N}_n\right\|\right] \to 0, n \to \infty$ *es quivalente a que* $\lambda(1) = \mu(1)$, *y entonces* $N_n \xrightarrow{d} \widetilde{N}$, *con* $\widetilde{N}$ *un proceso Poisson como en* (i).

(iii) Para el proceso de acumulaciones de excesos N_n^* definido por

$$N_n^*(B) = \sum_{j \leq k_n} 1_{\left\{N_n\left(B \cap \left(\frac{j-1}{k_n}, \frac{j}{k_n}\right]\right) \neq 0\right\}},$$

tenemos que (2.36) es equivalente a $N_n^* \xrightarrow{d} \widetilde{N}$, donde $\widetilde{N}$ es un proceso Poisson como en (i), y se sigue

$$E\left[\left\|N_n - \widetilde{N}_n\right\|\right] \to 0, n \to \infty.$$

Para concluir esta sección, revisaremos un ejemplo en el que mostraremos como la Condición $\widetilde{D}(\{u_{ni}\})$ es más fácil de verificar que la Condición $D^*(\{u_{ni}\})$.

Ejemplo 98 *Sea $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes donde Y_i tiene distribución $\exp(\gamma_i)$ tal que $\gamma_i \to \gamma > 0, i \to \infty$. Además supongamos que $|\gamma_i - \gamma| = o\left(\frac{1}{\ln i}\right)$. Entonces definimos la sucesión $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ definida para cada $i \geq 1$ como $X_{2i-1} = Y_i$ y $X_{2i} = X_{2i-1} + a_i$ con $a_i > 0$ tal que $a_i \to a > 0, i \to \infty$. Un caso particular de esta sucesión es el Ejemplo 83. Obviamente, $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión 2-dependiente (ver Definición 11), por tanto se satisface $D(\{u_{ni}\})$ automáticamente, y además es no estacionaria. Para verificar la Condición $\widetilde{D}(\{u_{ni}\})$ notemos que para cualquier $k_n \to \infty$ con $u_n(x) = \frac{1}{\gamma}\ln n + x$ sucede que*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_n &\leq 2\sum_{l}\sum_{j \leq r_n/2} P\left\{Y_{[l/2]} > u_n(x) - a_{[l/2]}, Y_{[l/2]+j} > u_n(x) - a_{[l/2]+j}\right\} \\
&= O\left(\frac{r_n}{n}\sum_{n^\delta \leq i \leq n/2} P\{Y_i > u_n(x) - a_i\}\right) + o(1) = O\left(\frac{r_n}{n}\right) + o(1) \\
&= O\left(\frac{1}{k_n}\right) + o(1) = o(1)
\end{aligned}$$

porque $P\{Y_i > u_n(x) - a_i\} \leq \frac{C}{n}$ para toda $i \geq n^\delta$, con alguna constante positiva C y $\delta > 0$, suficientemente pequeña, usando las hipótesis.

Observamos que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\leq nt} P\left\{X_i \leq u_n(x), X_{i+1} > u_n(x)\right\} \\
&= \sum_{n^\delta < i \leq nt/2} \left[P\left\{u_n(x) - a_i < Y_i \leq u_n(x)\right\} + P\left\{Y_i \leq u_n(x) - a_i, Y_{i+1} > u_n(x)\right\}\right] \\
&= \sum_{n^\delta < i \leq nt/2} \left[\left(1 - e^{-\gamma_i u_n(x)}\right) - \left(1 - e^{-\gamma_i(u_n(x)-a_i)}\right) + \left(1 - e^{-\gamma_i(u_n(x)-a_i)}\right) e^{-\gamma_i u_n(x)}\right] \\
&= \sum_{n^\delta < i \leq nt/2} \left(\frac{e^{-x}}{n^{\frac{1}{\gamma_i}}} + 1\right) e^{-\gamma_i(u_n(x)-a_i)} = \sum_{n^\delta < i \leq nt/2} e^{-\gamma_i(u_n(x)-a_i)} + o(1) \\
&= \frac{t}{2} e^{-\gamma x + \gamma a} + o(1),
\end{aligned}
$$

ya que $\gamma_i \to \gamma > 0$ *y* $a_i \to a > 0$. *Entonces*

$$
\mu(t) = \frac{t}{2} e^{-\gamma x + \gamma a},
$$

que es una función continua en t. *Así que por el Teorema 97 tenemos que los procesos puntuales* $\widetilde{N}_n$ *y* N_n^* *convergen al proceso Poisson* $\widetilde{N}$. *Podemos ver que* $\lambda(1) \neq \mu(1)$, *ya que por cálculos similares*

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sum_{i\leq nt} P\left\{X_{i+1} > u_n(x)\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=2i-1\leq nt} e^{-\gamma_j\left(\frac{1}{\gamma_j}\ln n + x\right)} + \sum_{j=2i\leq nt} e^{-\gamma_j\left(\frac{1}{\gamma_j}\ln n + x - a_j\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{nt}{2}\right] \left(e^{-\gamma\left(\frac{1}{\gamma}\ln n + x\right)} + e^{-\gamma\left(\frac{1}{\gamma}\ln n + x - a\right)}\right) = \frac{t}{2} e^{-\gamma x}\left(1 + e^{a\gamma}\right) = \lambda(t)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P\left\{M_n \leq u_n(x)\right\} &= \lim_{n\to\infty} \prod_{2i\leq nt} P\left\{X_{2i-1} \leq u_n(x), X_{2i} \leq u_n(x)\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{j=2i\leq nt} \left[1 - e^{-\gamma_j\left(\frac{1}{\gamma_j}\ln n + x - a_j\right)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n} e^{-\gamma(x-a)}\right)^{n/2} = e^{-\frac{1}{2}e^{-\gamma(x-a)}},
\end{aligned}
$$

como en el Ejemplo 83, en el que $\gamma_i = \gamma = 1$ *y* $a_i = a$ *para toda* i.

El índice extremo resulta ser

$$\theta = \frac{\mu(t)}{\lambda(t)} = \frac{1}{1+e^{-\gamma a}},$$

que no depende ni de t *ni de* x.

El tamaño de la acumulación es 1 *con probabilidad* $1 - e^{-\gamma a}$, *y es igual a dos con probabilidad* $e^{\gamma a}$, *asíntóticamente. En este sentido tenemos que el tamaño promedio de la acumulación es* $1 + e^{-\gamma a} = \frac{1}{\theta}$.

Observación 99 *Este ejemplo nos muestra que aún en el caso no estacionario el índice extremo puede proporcionarnos información del tamaño promedio de acumulación o "cluster" sobre umbrales altos como en el caso estacionario, en el que se demuestra que el índice extremo es el recíproco del tamaño medio de "cluster" (ver la interpretación de la ecuación 8.3 de [6]). En general, esta afirmación es válida cuando el índice extremo no depende ni de* t *ni de* x.

Capítulo 3

Algunos casos no estacionarios

El propósito de este capítulo es ejemplificar la teoría desarrollada para sucesiones no estacionarias en el capítulo anterior analizando tres casos muy particulares de sucesiones de v.a. no estacionarias. En la primera sección consideraremos las sucesiones generales no estacionarias max-autorregresivas $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ definidas por $X_i = Z_i \max\{X_{i-1}, Y_i\}$ donde $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ es sucesión de v.a.i.i.d. y $(Z_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. independientes $0 \leq Z_i \leq 1$, independiente de $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$, para estudiar el comportamiento asintótico de $M_n = \max\{X_i, i \leq n\}$ y evaluar el índice extremo para el caso en el que la distribución marginal de Y_i es de variación regular en ∞ (decimos que una función positiva L, Lebesque mebible sobre $(0, \infty)$, es de variación regular en ∞ con índice $\alpha \in \mathbb{R}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = t^{\alpha}$, $t > 0$).

Para la segunda sección examinamos el comportamiento extremo de sucesiones gaussianas no estacionarias, y como era de esperarse, de nuevo, como en el caso estacionario, las restricciones se hacen sobre la sucesión de covarianzas.

En la última sección estudiamos una clase de distribuciones multivariadas conocidas como Farlie-Gumbel-Morgenstern para discutir las propiedades extremas de sucesiones de v.a. con dicha dsitribución. Veremos que el comportamiento extremo de esta sucesión es como el que tendría si no existiera dependencia entre sus componentes. Con esto tenemos que en general encontrar que el índice extremo de una sucesión es igual a 1 no nos garantiza que las v.a. de la sucesión sean independientes entre si.

Para este capítulo utilizamos las referencias [2], [18] y [10], para cada sección, respectivamente.

3.1 Sucesiones max-AR(1) no estacionarias

Sean $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(Z_i)_{i=1}^{\infty}$ dos sucesiones independientes de variables aleatorias independientes, donde las Y_i son idénticamente distribuidas con función de distribución común $G(\cdot)$ y cada Z_i tiene distribución F_i. Supondremos que para toda $i \geq 1$, $P\{0 \leq Z_i \leq 1\} = 1$. Definimos la sucesión max-AR(1) mediante

$$X_i = \begin{cases} X_0 & \text{si } i = 0, \\ \\ Z_i \max\{X_{i-1}, Y_i\} & \text{si } i \geq 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

con X_0 cualquier variable aleatoria. Denotemos por $H_i(\cdot)$ a la distribución marginal de X_i.

De aquí en adelante supondremos que para alguna $\alpha > 0$,

$$G^n(a_n x) \rightarrow \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \\ e^{-x^{-\alpha}}, & x > 0 \end{cases}, n \rightarrow \infty,$$

para alguna sucesión normalizadora de constantes $(a_n > 0)_{n=1}^{\infty}$. Es decir, G pertenece al dominio de atracción de la distribución de Valores Extremos Fréchet (ver Definición 3), y lo denotamos

$$G \in D(\Phi_\alpha). \tag{3.2}$$

También supondremos que

$$\sup_{i \geq 1} E\left(Z_i^{\beta}\right) < 1 \text{ para alguna } \beta < \alpha, \tag{3.3}$$

lo que implica que

$$\sup_{i\geq 1} E\left(Z_i^{\alpha}\right) = s < 1.$$

Aunque los resultados que obtengamos para sucesiones max-AR(1) no estacionarias parten de suponer (3.2), también se aplican para los casos en que G pertence al dominio de atraccción del máximo Weibull y Gumbel, como vemos en los dos modelos siguientes:

(I) Sea $G \in D(\Psi_\alpha)$ para alguna $\alpha > 0$, donde $\Psi_\alpha(x) = e^{-(-x)^\alpha}$, $x \leq 0$ (Weibull), con $x_0 = \sup\{x \mid G(x) < 1\} = 0$ y $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ como en (3.1). Definimos $Y_i^* = -\frac{1}{Y_i}$, $Z_i^* = \frac{1}{Z_i}$ donde ahora $P\{Z_i \geq 1\} = 1$ y $\sup_{i\geq 1} E\left(Z_i^{\alpha}\right) < 1$ para alguna $\beta > \alpha$ y toda i, y $X_0^* = -\frac{1}{X_0}$. Entonces $X_i^* = \frac{1}{X_i}$ resulta estar definida como en (3.1) con $G^* \in D(\Phi_\alpha)$ y G^* es la función de distribución de Y_i^* para cada i.

(II) Sea $G \in D(\Lambda)$, donde $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}$ (Gumbel), con $x_0 = \infty$ y tomando $X_i = Z_i + \max(X_{i-1}, Y_i)$. Supongamos que $G^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} \Lambda(x)$ donde tomamos $a_n = \frac{1}{\alpha}$ y alguna b_n. Entonces definimos $Y_i^* = e^{Y_i}$, $Z_i^* = e^{Z_i}$ y $X_i^* = e^{X_i}$, donde $P\{Z_i \leq 0\} = 1$. Con esto, transformamos la sucesión $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ en la sucesión $(X_i^*)_{i=1}^{\infty}$ que satisface (3.1) para Y_i^* con función de ditribución $G^* \in D(\Phi_\alpha)$ para toda.i.

3.1.1 Distribución Límite del máximo y cálculo del índice extremo

Discutiremos el comportamiento límite del máximo $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Usaremos la misma normalización a_n de la sucesión $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$, para demostrar que $\frac{1}{a_n} M_n$ tiene también distribución asintótica Fréchet.

Lema 100 *Supongamos que la condición* (3.2) *se satisface, entonces para cualquier* $x > 0$ *y* $j \geq 0$

$$nP\{Z_i \ldots Z_{i-j} Y_{i-j} > a_n x\} \rightarrow x^{-\alpha} E\left(Z_i^{\alpha}\right) \cdots E\left(Z_{i-j}^{\alpha}\right), n \rightarrow \infty,$$

uniformemente en i.

Demostración.

Como $G \in D(\Phi_\alpha)$, tenemos que la distribución G es de variación regular con exponente $-\alpha$ (ver [8]), así que

$$n\left[1 - G(a_n y)\right] \to y^{-\alpha}, n \to \infty,$$

uniformemente para toda $y \geq y_0 > 0$. Entonces para toda $x > 0$ y $0 \leq v \leq 1$, tenemos obviamente $x/v \geq x$ y así

$$n\left[1 - G\left(a_n \frac{x}{v}\right)\right] \to x^{-\alpha} v^{\alpha}, n \to \infty$$

uniformemente para toda v. Para toda $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$\begin{aligned}
&\left|nP\{Z_i \cdots Z_{i-j} Y_{i-j} > a_n x\} - x^{-\alpha} E(Z_i^{\alpha}) \cdots E(Z_{i-j}^{\alpha})\right| \\
\leq &\int \cdots \int \left| n\left[1 - G\left(a_n \frac{x}{z_i \cdots z_{i-j}}\right)\right] - x^{-\alpha} z_i^{\alpha} \cdots z_{i-j}^{\alpha} \right| dF_i(z_i) \cdots dF_{i-j}(z_{i-j}) \\
\leq &\int \cdots \int \varepsilon dF_i(z_i) \cdots dF_{i-j}(z_{i-j}) = \varepsilon \text{ para toda } n \geq n_0,
\end{aligned}$$

usando la cota uniforme para $v = z_i \cdots z_{i-j} \in [0,1]$. ■

De aquí en adelante supondremos que para alguna $j \geq 0$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n} E(Z_i^{\alpha}) \cdots E(Z_{i-j}^{\alpha}) \to c_j, n \to \infty. \tag{3.4}$$

Teorema 101 *Supongamos que se satisfacen* (3.2) *y* (3.4) *para* $j = 0$. *Entonces*

$$P\{M_n \leq a_n x\} \to e^{-c_0 x^{-\alpha}}, n \to \infty$$

para toda $x > 0$, *donde* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es la sucesión normalizadora en* (3.2).

Demostración.

Dado que $Z_i \in [0,1]$

$$M_n = \max\{X_0, X_1, \ldots, X_n\} = \max\{X_0, Z_1 Y_1, \ldots Z_n Y_n\}$$

y consecuentemente

$$P\{M_n \leq a_n x\} = P\{X_0 \leq a_n x\} \prod_{i=1}^{n} P\{Z_i Y_i \leq a_n x\}.$$

Por el Lema 100 tenemos que para cada $i \geq 1$ podemos aproximar uniformemente a $P\{Z_i Y_i > a_n x\}$ mediante $\frac{1}{n} x^{-\alpha} E(Z_i^{\alpha})$, y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P\{Z_i Y_i > a_n x\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x^{-\alpha} E(Z_i^{\alpha}) = x^{-\alpha} c_0$$

por (3.4). Esto es equivalente, según el Teorema 72, a que

$$P\{M_n \leq a_n x\} \to e^{-x^{-\alpha} c_0}, n \to \infty.$$

■

Sabemos que si para una sucesión estacionaria existe $(u_n(\tau))_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales tal que

$$n(1 - F(u_n(\tau))) \to \tau, n \to \infty,$$

y si además las Condiciones $D(u_n(\tau))$ y $D'(u_n(\tau))$ se satisfacen, entonces

$$P\{M_n \leq u_n(\tau)\} \to e^{-\theta\tau}, n \to \infty,$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ es una constante que no depende de τ, como observamos en el Teorema 29, y ya habiamos comentado en el Capítulo 2. Si $\theta = 1$ entonces los excedentes no forman acumulaciones o "clusters", es decir, el tamaño promedio de "cluster" es asintóticamente igual a 1 con probabilidad 1. Para la sucesión max-AR(1) este sería el caso si $G \in D(\Lambda)$ (Gumbel) o $G \in D(\Psi_\alpha)$ (Weibull). Es por eso que estos casos del dominio de atracción del máximo de G son menos interesantes para nuestros propósitos de tratar sucesiones no estacionarias.

Como vimos en el Capítulo 2, para sucesiones estacionarias $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ el índice extremo se define de una manera similar, reescribiendo la expresión (2.14) junto con la igualdad (2.7),

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln P\{M_n \leq u_n(\tau)\}}{\sum_{i\leq n}[1 - H_i u_n(\tau)]},$$

donde H_i es la distribución marginal de X_i. Aquí θ puede depender de τ como vimos en varios ejemplos del Capítulo 2. Sin embargo, para muchas sucesiones no estacionarias θ no depende de τ y entonces podemos utilizar la misma interpretación que se tiene para el índice extremo en el caso estacionario. Demostraremos que el índice extremo existe para la sucesión de max-AR(1) y que además su valor no depende, en ninguna forma, ni de τ ni de $u_n(\tau)$.

Usaremos el siguiente resultado para la función de variación regular G.

Lema 102 *Supongamos que se cumple la condición* (3.2). *Entonces para cualquier* $x > 0$ *y* $\varepsilon > 0$ *fijos, existe* n_0 *tal que para toda* $n \geq n_0$ *y toda* $0 \leq z \leq 1$

$$(1-\varepsilon)\, z^{\alpha+\varepsilon} x^{-\alpha} \leq n\left[1 - G\left(a_n \frac{x}{z}\right)\right] \leq (1+\varepsilon)\, z^{\alpha-\varepsilon} x^{-\alpha}.$$

Este resultado es consecuencia de la representación de funciones de variación regular (ver [8]). Usando este lema probaremos el resultado necesario para obtener el resultado principal de esta sección.

Lema 103 *Sea* $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ *una sucesión max-AR*(1) *definida en* (3.1). *Supongamos que* (3.2), (3.3) *y* (3.4) *se satisfacen para toda* $j \geq 0$, *entonces para toda* $x > 0$

(*i*)

$$\left|\sum_{i \leq n} [1 - H_i(a_n x)] - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} P\{Z_i \cdots Z_{i-j} Y_{i-j} > a_n x\}\right| \to 0, n \to \infty$$

(*ii*)

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} P\{Z_i \cdots Z_{i-j} Y_{i-j} > a_n x\} \to x^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} c_j < \infty, n \to \infty$$

y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i \leq n} [1 - H_i(a_n x)] = x^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} c_j.$$

Demostración.

(i) Por la definición de la sucesión $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ tenemos

$$X_i = \max\left\{Z_i \cdots Z_1 X_0, Z_i \cdots Z_1 Y_1, Z_i \cdots Z_2 Y_2, \ldots, Z_i Y_i\right\}.$$

Sea $Z^*_{i,j} = \prod_{k=i}^{j} Z_k$. Entonces

$$1 - H_i(a_n x) = P\left(\bigcup_{j=0}^{i-1}\left\{Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x\right\}\right)(1 + o(1))$$

uniformemente en i, y utilizando la desigualdad deBonferroni (Proposición 69), tenemos

$$\sum_{j=0}^{i-1} P\left\{Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x\right\} - \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1} P\left\{Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x, Z^*_{i-k,i} Y_{i-k} > a_n x\right\}$$
$$\leq 1 - H_i(a_n x) \leq \sum_{j=0}^{i-1} P\left\{Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x\right\}.$$

De la misma manera que en la demostración del Lema 100, si usamos el Lema 102 y hacemos $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$, encontramos que para toda $1 \leq j \leq i-1$ y $0 \leq k \leq j-1$,

$$P\left\{Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x, Z^*_{i-k,i} Y_{i-k} > a_n x\right\}$$
$$\leq x^{-2\alpha} n^{-2} (1+\varepsilon)^2 E\left(Z_i^{2\beta}\right) \cdots E\left(Z_{i-k}^{2\beta}\right) E\left(Z_{i-k-1}^{2\beta}\right) \cdots E\left(Z_{i-j}^{2\beta}\right).$$

Por (3.3) escribimos $\widetilde{s} = \sup_{i\geq 1} E\left(Z_i^{\beta}\right) < 1$. Entonces también $E\left(Z_i^{2\beta}\right) \leq \widetilde{s}$ y

$$\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1} P\left\{Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x, Z^*_{i-k,i} Y_{i-k} > a_n x\right\} \leq x^{-2\alpha} n^{-2} (1+\varepsilon)^2 \sum_{j=1}^{i-1} j \widetilde{s}^{j+1}.$$

Si tomamos la suma sobre $1 \leq i \leq n$, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1} P\left\{Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x, Z^*_{i-k,i} Y_{i-k} > a_n x\right\} &\leq x^{-2\alpha} n^{-2} (1+\varepsilon)^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} j \widetilde{s}^{j+1} \\ &= x^{-2\alpha} n^{-2} (1+\varepsilon)^2 O(n).\end{aligned}$$

Entonces para $n \to \infty$

$$\left| \sum_{i \leq n} [1 - H_i(a_n x)] - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} P\{Z_i \cdots Z_{i-j} Y_{i-j} > a_n x\} \right| \to 0$$

tomando de nuevo la sumatoria sobre toda i.

(ii) Observemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} P\left\{Z_{i-j,i}^{*} Y_{i-j} > a_n x\right\} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n} nP\left\{Z_{i-j,i}^{*} Y_{i-j} > a_n x\right\}.$$

Por el Lema 100 cada término $nP\left\{Z_{i-j,i}^{*} Y_{i-j} > a_n x\right\}$ converge uniformemente en i a $x^{-\alpha} E(Z_i^{\alpha}) \cdots E\left(Z_{i-j}^{\alpha}\right)$, así que con (3.4) tenemos que para $j \geq 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n} nP\left\{Z_{i-j,i}^{*} Y_{i-j} > a_n x\right\} \\ = & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n} x^{-\alpha} E(Z_i^{\alpha}) \cdots E\left(Z_{i-j}^{\alpha}\right) = x^{-\alpha} c_j. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dado que $s^{j+1} < \widetilde{s}^{j+1}$, tenemos que por cumplirse (3.3) entonces $\sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty$. Por tanto, para cualquier $\delta > 0$ existe j_0 tal que

$$\frac{\widetilde{s}^{j_0}}{1 - \widetilde{s}} < x^{\alpha} \delta.$$

Así

$$x^{-\alpha} \sum_{j=j_0}^{\infty} c_j \leq x^{-\alpha} \sum_{j=j_0}^{\infty} \widetilde{s}^{j} < \delta. \tag{3.6}$$

De nuevo por el Lema 102, existe n_0 tal que para toda $n \geq n_0$, cualesquiera $0 \leq z_i, \ldots, z_{i-j} \leq 1$, y todo $j \geq 0$ y $\varepsilon \leq \min(\alpha - \beta, 1)$,

$$n \left[1 - G\left(a_n \frac{x}{z_i \cdots z_{i-j}}\right)\right] \leq (1+\varepsilon) z^{\alpha-\varepsilon} x^{-\alpha} \leq (1+\varepsilon) (z_i \cdots z_{i-j})^{\beta} x^{-\alpha}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} nP\left\{Z_{i-j,i}^{*} Y_{i-j} > a_n x\right\} & \leq (1+\varepsilon) E\left(Z_i^{\beta}\right) \cdots E\left(Z_{i-j}^{\beta}\right) x^{-\alpha} \\ & \leq (1+\varepsilon) E\left(Z_i^{\beta}\right) \widetilde{s}^{j+1} x^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Para j_0 tal que se cumple (3.6), podemos elejir por (3.5) una $n_1 \geq n_0$ tal que para toda $j < j_0$ y $n \geq n_1$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n} nP\left\{ Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x \right\} - x^{-\alpha} c_j \right| < \frac{\delta}{j_0}.$$

Entonces tenemos que para toda $n \geq n_1$

$$\left| \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n} nP\left\{ Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x \right\} - x^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} c_j \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \sum_{j=0}^{j_0-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n} nP\left\{ Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x \right\} - x^{-\alpha} c_j \right) \right| \\ &\quad + x^{-\alpha} \sum_{j=j_0}^{n} c_j + \sum_{j=j_0}^{n} \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n} nP\left\{ Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x \right\} \end{aligned}$$

Entonces $\left| \sum_{j=0}^{j_0-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n} nP\left\{ Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x \right\} - x^{-\alpha} c_j \right) \right| < \delta$ y además sucede que $x^{-\alpha} \sum_{j=j_0}^{n} c_j < \delta$ por la elección de j_0 y (3.6). Finalmente, por la expresión (3.7), tenemos para $n \geq n_1$

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_0}^{n} \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n} nP\left\{ Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x \right\} &\leq \sum_{j=j_0}^{n} \frac{x^{-\alpha}}{n} \sum_{i=j+1}^{n} (1+\varepsilon) E\left(Z_i^{\beta} \right) \cdots E\left(Z_{i-j}^{\beta} \right) \\ &\leq (1+\varepsilon) x^{-\alpha} \sum_{j=j_0}^{n} \frac{n-j}{n} \widetilde{s}^{j} \\ &\leq (1+\varepsilon) x^{-\alpha} \frac{\widetilde{s}^{j_0}}{1-\widetilde{s}} \leq 2\delta, \end{aligned}$$

usando también (3.6).

Entonces para todo $\delta > 0$

$$\left| \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{n} nP\left\{ Z^*_{i-j,i} Y_{i-j} > a_n x \right\} - x^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} c_j \right| \leq 4\delta,$$

y por lo tanto, si $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} P\left\{Z_i \cdots Z_{i-j}Y_{i-j} > a_n x\right\} &= \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n}\sum_{i=j+1}^{n} nP\left\{Z^*_{i-j,i}Y_{i-j} > a_n x\right\} \\ &\to x^{-\alpha}\sum_{j=0}^{n} c_j < \infty.\end{aligned}$$

■

Observación 104 *En la demostración del lema anterior podemos observar que* $n\left[1 - H_i\left(a_n x\right)\right] = O\left(x^{-\alpha}\right)$, *uniformemente en* i.

Si combinamos el Lema con los resultados del Teorema 101 y la parte (ii) del Lema 103 y lo visto en la Sección 2.2 tenemos inmediatamente el siguiente resultado.

Teorema 105 *Sea la sucesión* $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ *max-AR*(1), *definida por la expresión* (3.1), *que cumple* (3.2), (3.3) *y* (3.4) *para cada* $j \geq 0$. *Entonces* $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ *tiene índice extremo*

$$\theta = \frac{c_0}{\sum_{j=0}^{\infty} c_j}.$$

Observación 106 *El índice extremo de* $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ *lo obtenemos a partir de su definición:*

$$\theta = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} -\ln P\left\{M_n \leq u_n(\tau)\right\}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i\leq n}\left[1 - H_i u_n(\tau)\right]} = \frac{-\ln e^{-c_0 x^{-\alpha}}}{x^{-\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} c_j} = \frac{c_0}{\sum_{j=0}^{\infty} c_j}.$$

Y como observamos, no depende de x. *en particular, si* $Z_i = C$ *con probabilidad 1, para toda* i, *entonces* $E\left(Z_i^{\alpha}\right) = C^{\alpha} = c_0$ *y* $c_j = C^{\alpha(j+1)}$. *Esto implica que*

$$\theta = \frac{C^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{\infty} C^{\alpha j}} = 1 - C^{\alpha},$$

valor que coincide con el que obtendríamos si hubieramos supuesto que $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ *es estacionaria. Tal resultado se mantiene si solamente pedimos* $E\left(Z_i^{\alpha}\right) = C^{\alpha}$ *para toda* $i \geq 1$.

Es posible derivar un resultado que corrobora al Teorema 92, y cuya demostración se puede ver en [2].

Teorema 107 *Supongamos que la sucesión max-$AR(1)$ $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ definida en* (3.1) *cumple* (3.2), (3.3) *y* (3.4) *para cada $j \geq 0$, y que además $E\left(Z_i^{\alpha}\right) \to c, i \to \infty$, entonces*

$$N_n \xrightarrow{d} N, n \to \infty$$

donde N es una Proceso Poisson con medida de intensidad $\lambda(t) = ct^{-\alpha}$ y un tamaño de cluster con distribución geométrica $\pi(k) = 1 - c^k, k \geq 1$.

3.2 Sucesiones Gaussianas no estacionarias

Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión normal (en general no estacionaria) con medias y varianzas arbitrarias, y correlaciones $r_{ij} = Corr(X_i, X_j)$. Dada la sucesión de reales $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$ nos preguntamos por la distribución asíntótica de $P\{X_i \leq u_{ni}, i \leq n\}$ a medida que $n \to \infty$.

Podemos estandarizar la sucesión $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ utilizando $v_{ni} = \frac{u_{ni} - E(X_i)}{\sqrt{Var(X_i)}}$, así que supondremos que cada X_i tiene media 0, varianza 1 y la misma estructura de correlación. Entonces para cada $i \geq 1$ tenemos $P\{X_i \leq x\} = \Phi(x)$, donde Φ es la función de distribución normal estándar.

En todo este apartado trabajaremos con restricciones sobre las correlaciones r_{ij} tal que satisfagan $|r_{ij}| < \rho_{|i-j|}$ cuando $i \neq j$, para alguna sucesión $(\rho_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $\rho_n < 1$ para $n \geq 1$ y $\rho_n \log n \to 0, n \to \infty$, que es una generalización obvia de la condición $r_n \log n \to 0, n \to \infty$ utilizada para sucesiones normales en el caso estacionario (ver [18]).

Primero estableceremos las condiciones bajo las cuales se cumple el Teorema 53 para el caso particular de sucesiones gaussianas no estacionarias.

Lema 108 *Sea la sucesión de constantes $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$ tales que para $n \to \infty$, sucede que $\lambda_n = \min_{1\leq i\leq n} u_{ni} \to \infty$. Entonces, para $0 \leq \tau \leq \infty$,*

$$\prod_{i=1}^{n} \Phi(u_{ni}) \to e^{-\tau}, n \to \infty,$$

si y sólo si,

$$\sum_{i=1}^{n} (1 - \Phi(u_{ni})) \to \tau, n \to \infty.$$

Demostración.

Si usamos el hecho de que $\ln(1-x) = -x + \psi(x)$ donde, para $x > 0$ pequeña, $|\psi(x)| < Ax^2$ para alguna $A > 0$, fácilmente observamos que

$$\sum_{i=1}^{n} \ln[1 - (1 - \Phi(u_{ni}))] = -\sum_{i=1}^{n} (1 - \Phi(u_{ni})) + \sum_{i=1}^{n} \psi(1 - \Phi(u_{ni})),$$

donde

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \psi(1 - \Phi(u_{ni}))\right| \leq A\sum_{i=1}^{n} (1 - \Phi(u_{ni}))^2 \leq A(1 - \Phi(\lambda_n)) \sum_{i=1}^{n} (1 - \Phi(u_{ni})),$$

y por lo tanto,

$$\ln \prod_{i=1}^{n} \Phi(u_{ni}) = \left[-\sum_{i=1}^{n} (1 - \Phi(u_{ni}))\right][1 + o(1)],$$

para que entonces la equivalencia sea obvia. ■

Ahora probaremos un lema que nos permitirá probar un resultado importante al final de esta sección.

Lema 109 *Sea la sucesión $(u_{ni})_{i=1}^{\infty}, n \geq 1$ tal que $\sum_{i=1}^{n} (1 - \Phi(u_{ni}))$ es acotada, y $\lambda_n = \min_{1\leq i\leq n} u_{ni} \to \infty, n \to \infty$. Supongamos que las correlaciones r_{ij} satisfacen $|r_{ij}| \leq \delta$ para $i \neq j$, donde $\delta < 1$ es una constante. Entonces*

$$S_n^{(1)} = \sum_{\substack{1\leq i<j\leq n \\ |i-j|\leq \gamma_n}} |r_{ij}| e^{-\frac{u_{ni}^2 + u_{nj}^2}{2(1+|r_{ij}|)}} \to 0, n \to \infty,$$

donde $\gamma_n = e^{\eta\lambda_n^2}$, para cualquier $\eta < \eta_0 = \frac{1}{2}\frac{1-\delta}{1+\delta}$.

Demostración.

Claramente

$$S_n^{(1)} \leq \delta \sum_{\substack{1\leq i<j\leq n \\ |i-j|\leq\gamma_n}} |r_{ij}|\, e^{-\frac{u_{ni}^2+u_{nj}^2}{2(1+\delta)}},$$

además

$$e^{-\frac{u_{ni}^2+u_{nj}^2}{2(1+\delta)}} \leq e^{-\frac{\min\left(u_{ni}^2,u_{nj}^2\right)}{1+\delta}} \leq e^{-\frac{u_{ni}^2}{1+\delta}} + e^{-\frac{u_{nj}^2}{1+\delta}},$$

por lo que, para cierta constante K,

$$S_n^{(1)} \leq 2\delta\gamma_n \sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{u_{ni}^2}{1+\delta}} = 2\delta\gamma_n \sum_{i=1}^{n} u_{ni}^{-1} e^{-\frac{u_{ni}^2}{2}} u_{ni} e^{-\eta_0 u_{ni}^2} \leq K\gamma_n\lambda_n e^{-\eta_0 u_{ni}^2} \sum_{i=1}^{n} (1-\Phi(u_{ni}$$

ya que $u_{ni} \geq \lambda_n \to \infty, n\to\infty$, implica que $\frac{u_{ni}^{-1}e^{-\frac{u_{ni}^2}{2}}}{1-\Phi(u_{ni})}$ es uniformemente acotado en i, y $xe^{-\eta_0 x^2}$ decrece para x suficientemente grande.

Pero como estamos suponiendo que $\sum_{i=1}^{n}(1-\Phi(u_{ni}))$ es acotada, entonces

$$S_n^{(1)} \leq Ke^{\eta\lambda_n^2}\lambda_n e^{-\eta_0 u_{ni}^2} = K\lambda_n e^{-(\eta_0-\eta)\lambda_n^2} \to 0, n\to\infty,$$

porque $\eta_0 - \eta > 0$ y $\lambda_n \to \infty, n \to \infty$. ■

Ahora podemos probar que para el caso de sucesiones gaussianas (en general no estacionarias) la Aproximación de Poisson (Teorema 1) sigue siendo válida.

Teorema 110 *Supongamos que las correlaciones* r_{ij} *de la sucesión normal* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *son tales que* $|r_{ij}| \leq \rho_{|i-j|}$ *para* $i \neq j$ *donde* $\rho_n < 1$ *para toda* $n \geq 1$ *y* $\rho_n \ln n \to 0, n \to \infty$. *Sea la sucesión de constantes* $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$ *tal que* $\sum_{i=1}^{n}(1-\Phi(u_{ni}))$ *es acotada y* $\lambda_n = \min\limits_{1\leq i\leq n} u_{ni} \geq c(\ln n)^{\frac{1}{2}}$ *para alguna* $c > 0$. *Entonces*

$$P\{X_i \leq u_{ni}, i \leq n\} - \prod_{i=1}^{n}\Phi(u_{ni}) \to 0, n\to\infty. \tag{3.8}$$

Si además, para alguna $\tau \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\Phi(u_{ni})) \to \tau, n\to\infty, \tag{3.9}$$

entonces

$$P\{X_i \le u_{ni}, i \le n\} \to e^{-\tau}. \tag{3.10}$$

Demostración.

Claramente, por el Lema 109 claramente $S_n^{(1)} \to 0, n \to \infty$. Escribimos

$$S_n^{(2)} = \sum_{\substack{1\le i<j\le n \\ |i-j|>\gamma_n}} |r_{ij}|\, e^{-\frac{u_{ni}^2+u_{nj}^2}{2\left(1+|r_{ij}|\right)}},$$

Pero $\gamma_n = e^{\eta\lambda_n^2} \ge e^{c^2\eta \ln n} = n^{c^2\eta}$, y denotando $\delta_x = \sup_{j\ge x}\rho_j$, tenemos que para $p = n^{c^2\eta}$

$$S_n^{(2)} \le \delta_p \sum_{\substack{1\le i<j\le n \\ |i-j|>n^{c^2\eta}}} e^{-\frac{u_{ni}^2+u_{nj}^2}{2(1+\delta_p)}} \le \delta_p \left(\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{u_{ni}^2}{2(1+\delta_p)}}\right)^2.$$

Si definimos u_n tal que $1-\Phi(u_n) = \frac{1}{n}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} S_n^{(2)} &\le \delta_p \left(\sum_{u_{ni}\ge u_n} e^{-\frac{u_{ni}^2}{2(1+\delta_p)}} + \sum_{u_{ni}<u_n} e^{-\frac{u_{ni}^2}{2(1+\delta_p)}}\right)^2 \le \delta_p \left(n e^{-\frac{u_n^2}{2(1+\delta_p)}} + \sum_{u_{ni}<u_n} e^{-\frac{u_{ni}^2}{2(1+\delta_p)}}\right)^2 \\ &\le \delta_p u_n^2 e^{u_n^2\delta_p} \left(\frac{n}{u_n} e^{-\frac{u_n^2}{2}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_{ni}} e^{-\frac{u_{ni}^2}{2}}\right)^2 \to 0, n\to\infty, \end{aligned}$$

ya que $\delta_p u_n^2 \sim 2\delta_p \ln n = \frac{2}{c^2\eta}\delta_p \ln p \to 0, n \to \infty$ pues también $p = n^{c^2\eta} \to \infty$, y además aplicando (4.34) de [18], una propiedad de la cola de la distribución Normal,

$$\frac{n}{u_n} e^{-\frac{u_n^2}{2}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_{ni}} e^{-\frac{u_{ni}^2}{2}} \le K\left[n\left(1-\Phi(u_n)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(1-\Phi(u_{ni})\right)\right] < \infty.$$

Hemos demostrado que $S_n^{(1)}, S_n^{(2)} \to 0, n \to \infty$, por lo que

$$\sum_{1\le i<j\le n} |r_{ij}|\, e^{-\frac{u_{ni}^2+u_{nj}^2}{2\left(1+|r_{ij}|\right)}} = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} \to 0, n\to\infty.$$

Si aplicamos el Lema de la Comparación Normal (Teorema 4.2.1 de [18]) tomando las Y_j como variables aleatorias normales estándar independientes tenemos que directamente (3.8) se cumple.

Finalmente, si además (3.9) se cumple para alguna $\tau \geq 0$, entonces por el Lema 108 que $\prod_{i=1}^{n} \Phi(u_{ni}) \to e^{-\tau}, n \to \infty$. Entonces como se cumple (3.8), tenemos que es inmediato (3.10) se cumple trivialmente. ■

3.2.1 Distribución asintótica del máximo

Los resultados anteriores pueden ser usados para obtener la distribución asintótica del máximo en muchos casos de interés. Nos preocuparemos por el comportamiento del máximo $M_n = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ de una sucesión normal $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por $Y_i = X_i + m_i$, donde $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión normal no estacionaria definida como antes ($E(X_i) = 0$, $Var(X_i) = 1$, $Cov(X_i, X_j) = r_{ij}$), y $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de reales que funciona como componente determinístico. Por supuesto, $E(Y_i) = m_i$, $Var(Y_i) = 1$, $Cov(Y_i, Y_j) = r_{ij}$. supondremos que las constantes m_i son tales que

$$\beta_n = \max_{1 \leq i \leq n} |m_i| = o\left((\log n)^{\frac{1}{2}}\right), n \to \infty. \tag{3.11}$$

Esta restricción es bastante útil en la práctica e incluye una amplia variedad de casos con tendencia acotada y no acotada de las $m_i's$. Por simplicidad en los cálculos es que convenimos en establecer (3.11) como cierta.

Demostraremos que la distribución límite del máximo que se tiene en el caso de v.a.i.i.d. sigue siendo válida en la convergencia M_n con las constante b_n reemplazada por $b_n + m_n^*$ donde m_n^* es tomada tal que $|m_n^*| \leq \beta_n$ y

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{a_n^*(m_i - m_n^*) - \frac{1}{2}(m_i - m_n^*)^2} \to 1, n \to \infty, \tag{3.12}$$

donde $a_n^* = a_n - \ln\left(\ln \frac{n}{2a_n}\right)$ (las constantes normalizadoras a_n y b_n son las del caso estacionario). La solución m_n^* de (3.12) puede ser un problema númerico difícil, aunque para n suficientemente grande una solución con $|m_n^*| \leq \beta_n$ claramente existe bajo (3.11), pues por ejemplo, $\psi(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} e^{a_n^*(m_i-x)\left(1-\frac{1}{2}a_n^{*-1}(m_i-x)\right)}$ satisface $\psi(\beta_n) \leq 1 \leq \psi(-\beta_n)$ cuando $\frac{\beta_n}{a_n^*} < 1$. En algunos casos es posible encontrar una forma explícita para m_i^*, por ejemplo cuando $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ es acotada. Con esta notación establecemos el siguiente resultado.

Teorema 111 *Sea $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ definida por $Y_i = X_i + m_i$ donde $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión normal con media 0, varianza 1 y correlaciones r_{ij} tales que $|r_{ij}| < \rho_{|i-1|}$ para $i \neq j$ con $\rho_n < 1$ y $\rho_n \log n \to 0, n \to \infty$. Sea $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de reales que satisface (3.11) y m_n^* definida por (3.12). Entonces el máximo $M_n = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ satisface*

$$P\{a_n(M_n - b_n - m_n^*) \leq x\} \to e^{-e^{-x}}, \tag{3.13}$$

donde $a_n = (2\ln n)^{\frac{1}{2}}$ y $b_n = (2\ln n)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2\ln n)^{-\frac{1}{2}}(\ln(\ln n) + 4\pi)$.

Demostración.

Sea $u_{ni} = u_n + m_n^* - m_i$ donde $u_n = \frac{x}{a_n} + b_n$. Entonces

$$P\{a_n(M_n - b_n - m_n^*) \leq x\} = P\{Y_i \leq u_n + m_n^*, i \leq n\} = P\{X_i \leq u_{ni}, i \leq n\}.$$

Como $|m_n^*| < \beta_n$ para n suficientemente grande, y $u_n \sim (2\ln n)^{\frac{1}{2}}$ (ecuación 2.13 de [5]), tenemos que $\min\limits_{1\leq i\leq n} u_{ni} = (2\ln n)^{\frac{1}{2}}(1 + o(1))$. Entonces, debido a que $\min\limits_{1\leq i\leq n} u_{ni} \to \infty, n \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{n}(1 - \Phi(u_{ni})) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-\frac{1}{2}u_{ni}^2}}{u_{ni}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{1}{2}u_n^2}}{u_n}\sum_{i=1}^{n} e^{u_n(m_i-m_n^*)-\frac{1}{2}(m_i-m_n^*)^2} \tag{3.14}$$

pues

$$\left|\frac{u_{ni}}{u_n} - 1\right| = \left|\frac{m_n^* - m_i}{u_n}\right| \leq \frac{K\beta_n}{(\ln n)^{\frac{1}{2}}} \to 0, n \to \infty$$

uniformemente en $i \leq n$.

Si usamos los valores $a_n = (2\ln n)^{\frac{1}{2}}$ y $b_n = (2\ln n)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2\ln n)^{-\frac{1}{2}}(\ln(\ln n) + 4\pi)$ en $u_n = \frac{x}{a_n} + b_n$ tenemos que

$$|u_n(m_i - m_n^*) - a_n^*(m_i - m_n^*)| = |(u_n - a_n^*)(m_i - m_n^*)| \leq \frac{2}{\beta_n}|u_n - a_n^*| \leq \frac{K\beta_n}{(\log n)^{\frac{1}{2}}}$$

Entonces por (3.11) y (3.14),

$$\sum_{i=1}^{n}(1 - \Phi(u_{ni})) \sim n(1 - \Phi(u_n))\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{a_n^*(m_i - m_n^*) - \frac{1}{2}(m_i - m_n^*)^2} \to \tau(1) = e^{-x},$$

usando (3.12) y el hecho de que $n(1 - \Phi(u_n)) \to \tau, n \to \infty$ por la definición de a_n y b_n del caso estacionario. Entonces tenemos que (3.9) se satisface para $\tau = e^{-x}$ y por el Teorema 110, se cumple (3.13). ∎

Podemos generalizar el Teorema 110 si la restricción $\min\limits_{1\leq i\leq n} u_{ni} > c(\ln n)^{\frac{1}{2}}$ la reemplazamos por $\min\limits_{1\leq i\leq n} u_{ni} \to \infty, n \to \infty$. Para tal efecto, a los números reales $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$ los debemos agrupar en ciertos conjuntos de la siguiente manera. Sean $c_1 = \lambda_n = \min\limits_{1\leq i\leq n} u_{ni}$ y dividamos $\{1, \ldots, n\}$ en los conjuntos $J_1, \ldots, J_L$ como sigue:

$$J_1 = \{i \mid c_1 \leq u_{ni} \leq 2c_1\}, \quad d_1 = \max_{i\in J_1}, \quad c_2 = \min\{u_{ni} \mid u_{ni} > d_1\},$$

$$J_2 = \{i \mid c_2 \leq u_{ni} \leq 2c_2\}, \quad d_2 = \max_{i\in J_2}, \quad c_3 = \min\{u_{ni} \mid u_{ni} > d_2\},$$

y así sucesivamente, hasta que J_L es obtenido con $\max\limits_{1\leq i\leq n} u_{ni} \in J_L$. Así J_k es un conjunto no vacío de enteros $\{1, \ldots, n\}$ tal que los valores mínimo y máximo de u_{ni} para $i \in J_k$ son c_k, d_k, respectivamente, donde $d_k \leq 2c_k$ y claramente $c_{k+1} > 2c_k$ para cad k. Finalmente por notación escribimos

$$P_k = \sum_{i\in J_k}(1 - \Phi(u_{ni})), k = 1, 2, \ldots, L.$$

El siguiente Lema demuestra que los conjuntos J_k, que hacen una pequeña contribución a $\sum(1 - \Phi(u_{ni}))$, pueden ser descartados.

Lema 112 *Con la notación anterior escribamos* $A = \left\{k \mid P_k \geq e^{-\frac{1}{4}c_k^2}, 1 \leq k \leq L\right\}$ *y supongamos que* $\lambda_n = \min_{1 \leq i \leq n} u_{ni} \to \infty, n \to \infty$ *y* $\sum_{i=1}^{n} (1 - \Phi(u_{ni}))$ *es acotada. Entonces*

$$0 \leq P\left\{X_i \leq u_{ni}, i \in \bigcup_{k \in A} J_k\right\} - P\{X_i \leq u_{ni}, i \leq n\} \to 0, n \to \infty, \tag{3.15}$$

y

$$0 \leq \prod_i \left\{\Phi(u_{ni}), i \in \bigcup_{k \in A} J_k\right\} - \prod_{i=1}^{n} \Phi(u_{ni}) \to 0, n \to \infty. \tag{3.16}$$

Demostración.

La diferencia de probabilidades en (3.15) claramente es no negativa y se encuentra dominada por

$$P\left(\bigcup_{k \notin A} \bigcup_{k \in J_k} \{X_i > u_{ni}\}\right) \leq \sum_{k \notin A} P_k. \tag{3.17}$$

Pero si $k \notin A$ y $k > 1$, como $c_k > 2c_{k-1}$,

$$P_k < e^{-\frac{1}{4}c_k^2} < e^{-c_{k-1}^2} = c_{k-1} e^{-\frac{1}{2}c_{k-1}^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}c_{k-1}^2}}{c_{k-1}} \leq K\lambda_n e^{-\frac{1}{2}\lambda_n^2} (1 - \Phi(c_{k-1})) \leq K\lambda_n e^{-\frac{1}{2}\lambda_n^2} P_{k-1}$$

porque $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ decrece para x grande, y $1 - \Phi(c_{k-1})$ es un término en la suma de P_{k-1}.Como $\sum_{k=1}^{L} P_k = \sum_{i=1}^{n} (1 - \Phi(u_{ni}))$ es acotada y $P_1 \leq e^{-\frac{1}{4}\lambda_n^2}$ si $1 \notin A$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq P\left\{X_i \leq u_{ni}, i \in \bigcup_{k \in A} J_k\right\} - P\{X_i \leq u_{ni}, i \leq n\} \\ &\leq \sum_{k \notin A} P_k \leq K\lambda_n e^{-\frac{1}{2}\lambda_n^2} \sum_{k=1}^{L} P_k + e^{-\frac{1}{4}\lambda_n^2} \to 0, n \to \infty, \end{aligned}$$

es decir, se cumple (3.15). La segunda conclusión (3.16) la tenemos como consecuencia inmediata de aplicar la expresión (3.15) a variables aleatorias normales independientes. ∎

En vista de este lema, para demostrar (3.8) sólo basta que probemos que

$$P\left\{X_i \le u_{ni}, i \in \bigcup_{k\in A} J_k\right\} - \prod_i \left\{\Phi\left(u_{ni}\right), i \in \bigcup_{k\in A} J_k\right\} \to 0, n \to \infty. \tag{3.18}$$

Esto es consecuencia directa de los dos siguientes lemas.

Lema 113 *Supongamos que las correlaciones r_{ij} satisfacen $|r_{ij}| \le \rho_{|i-j|}$ donde $\rho_n \to 0, n \to \infty$. Si además, $\lambda_n = \min_{1\le i\le n} u_{ni} \to \infty, n \to \infty$ y $\sum_{i=1}^n \left(1 - \Phi\left(u_{ni}\right)\right)$ es acotada. Entonces para $k, m \in A, k \le m$,*

$$S_{k,m} = \sum_{\substack{\gamma_n<|i-j|<\omega_{n,m}\\ i\in J_k, j\in J_m, i<j}} |r_{ij}|\, e^{-\frac{u_{ni}^2+u_{nj}^2}{2\left(1+|r_{ij}|\right)}} \le K e^{\frac{-1}{16}\lambda_n^2} P_k P_m,$$

donde $\gamma_n = e^{\eta\lambda_n^2}$ para η como en el Lema 109, y $\omega_{n,m} = e^{\frac{1}{8}c_m^2}$.

Demostración.

De nuevo denotamos $\delta_x = \sup_{j\ge x} \rho_j$ y tenemos

$$S_{k,m} \le \delta_{\gamma_n} \sum_{\substack{|i-j|<\omega_{n,m}\\ i\in J_k, j\in J_m, i<j}} e^{-\frac{u_{ni}^2+u_{nj}^2}{2\left(1+\delta_{\gamma_n}\right)}}.$$

Pero

$$e^{-\frac{u_{ni}^2+u_{nj}^2}{2\left(1+\delta_{\gamma_n}\right)}} \le e^{-\frac{u_{ni}^2+u_{nj}^2}{2\left(1-\delta_{\gamma_n}\right)}} \le e^{-\frac{u_{ni}^2}{2}} e^{\frac{1}{2}d_k^2\delta_{\gamma_n} - \frac{1}{2}c_m^2\left(1-\delta_{\gamma_n}\right)} \le e^{-\frac{u_{ni}^2}{2}} e^{-c_m^2\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\delta_{\gamma_n}\right)}$$

porque $d_k \le 2c_k \le 2c_m$.

Si multiplicamos esta última cota por $\frac{d_k}{u_{ni}} \ge 1$ y sumamos sobre el rango indicado de i y j obtenemos

$$S_{k,m} \le \delta_{\gamma_n} \sum_{\substack{|i-j|<\omega_{n,m}\\ i\in J_k, j\in J_m, i<j}} \frac{d_k}{u_{ni}} e^{-\frac{u_{ni}^2}{2}} e^{-c_m^2\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\delta_{\gamma_n}\right)} \le K\omega_{n,m} d_k P_k e^{-c_m^2\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\delta_{\gamma_n}\right)},$$

pero como $P_m \ge e^{-\frac{1}{4}c_m^2}$ y $\omega_{n,m} = e^{\frac{1}{8}c_m^2}$, $d_k \le 2c_k \le 2c_m$, entonces

$$S_{k,m} \le K c_m P_k P_m e^{-c_m^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{5}{2}\delta_{\gamma_n}\right)} \le K e^{\frac{-1}{16}\lambda_n^2} P_k P_m,$$

para alguna constante K, porque $c_m \ge \lambda_n$ y $\delta_{\gamma_n} \to 0, n \to \infty$. ■

Lema 114 *Supongamos que* $|r_{ij}| \leq \rho_{|i-j|}$ *donde* $\rho_n \ln n \to 0, n \to \infty$, *y además* $\lambda_n = \min\limits_{1\leq i\leq n} u_{ni} \to \infty, n \to \infty$ *y* $\sum_{i=1}^{n}(1-\Phi(u_{ni}))$ *es acotada. Entonces, para* $k \leq m$,

$$S_{k,m}^1 = \sum_{\substack{\omega_{n,m}<|i-j|\leq n \\ i\in J_k, j\in J_m}} |r_{ij}|\, e^{-\frac{u_{ni}^2+u_{nj}^2}{2(1+|r_{ij}|)}} \leq \beta_n P_k P_m,$$

donde $\omega_{n,m} = e^{\frac{1}{8}c_m^2}$ *y* $\beta_n \to 0, n \to \infty$,*con* β_n *que sólo depende de* n.

Demostración.

De nuevo denotando $\delta_x = \sup\limits_{j\geq x}\rho_j$, y por argumentos similares a los de la demostración del lema anterior

$$\begin{aligned} S_{n,m}^1 &\leq \delta_{\omega_{n,m}} \left(\sum_{i\in J_k} e^{-\frac{1}{2}u_{ni}^2\left(1-\delta_{\omega_{n,m}}\right)}\right)\left(\sum_{j\in J_m} e^{-\frac{1}{2}u_{nj}^2\left(1-\delta_{\omega_{n,m}}\right)}\right) \\ &\leq K\delta_{\omega_{n,m}} d_k d_m P_k P_m e^{-\frac{1}{2}\left(d_k^2+d_m^2\right)\delta_{\omega_{n,m}}} \leq K\delta_{\omega_{n,m}} d_m^2 e^{-d_m^2\delta_{\omega_{n,m}}} P_k P_m. \end{aligned}$$

Pero

$$\delta_{\omega_{n,m}} d_m^2 \leq 4\delta_{\omega_{n,m}} c_m^2 = 4\delta_{\omega_{n,m}}\left(8\ln\omega_{n,m}\right) = 32\delta_{\omega_n}\ln\omega_n$$

donde $\omega_n = \omega_{n,m} = e^{\frac{1}{8}c_m^2} \geq e^{\frac{1}{8}\lambda_n^2} \to \infty, n \to \infty$, por lo tanto, para la sucesión $\beta_n = 32K\delta_{\omega_n} e^{32\delta_{\omega_n}} \frac{1}{\omega_n}\ln\omega_n$, que depende sólo de n y tiende a cero si $n \to \infty$,

$$S_{k,m}^1 \leq \beta_n P_k P_m.$$

■

Utilizando estos lemas podemos demostrar que el Teorema 110 sigue siendo válido si la condición de que $\lambda_n = \min\limits_{1\leq i\leq n} u_{ni}$ esté acotado por debajo por $c(\ln n)^{\frac{1}{2}}$ se reemplaza por una más simple, $\lambda_n \to \infty, n \to \infty$.

Teorema 115 *Supongamos que* (r_{ij}) *las correlaciones de la sucesión normal* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *satisfacen* $|r_{ij}| \leq \rho_{|i-j|}$ *para* $i \neq j$ *donde* $\rho_n < 1$ *para toda* $n \geq 1$ *y* $\rho_n \ln n \to 0, n \to \infty$. *Sea la sucesión de constantes* $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$ *tales que*

$\sum_{i=1}^{n}(1-\Phi(u_{ni}))$ *es acotada y* $\lambda_n = \min_{1\leq i\leq n} u_{ni} \to \infty, n \to \infty$. *Entonces* (3.8) *se cumple. Si además,* (3.9) *se satisface para alguna* $\tau > 0$, *entonces también* (3.10).

Demostración.

Sea A definida como en el Lema 112, entonces tenemos que por los Lemas 113, y 114 que

$$\sum_{\substack{1\leq i<j\leq n \\ i,j\in\bigcup_{k\in A} J_k}} |r_{ij}|\, e^{-\frac{u_{ni}^2+u_{nj}^2}{2(1+|r_{ij}|)}} \leq \epsilon_n \sum_{k,m\in A} P_k P_m + o(1),$$

donde $\epsilon_n \to 0, n \to \infty$. Pero $\sum_{k,m\in A} P_k P_m \leq \left[\sum_{i=1}^{n}(1-\Phi(u_{ni}))\right]^2 < \infty$ por hipótesis, así que $\epsilon_n \sum_{k,m\in A} P_k P_m + o(1) \to 0, n \to \infty$. Entonces de nuevo utilizando el Lema de la Comparación Normal tenemos que se cumple (3.18) y así por el Lema 112 se satisface (3.8).

Finalmente, si además (3.9) se satisface entonces también (3.10) por el Lema 108. ∎

3.3 Sucesiones Farlie-Gumbel-Morgenstern

Definición 116 *Una distribución Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) en* $\mathbb{R}^n$, *para* $n \geq 1$, *se define respecto a las funciones de distribución univariadas* F_i. $i \leq n$, *por*

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \left(1 + \sum_{1\leq i<k\leq n} a(j,k)\, \overline{F}_j(x_j)\, \overline{F}_k(x_k)\right) \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$$

para todos los vectores $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ *donde los* $n(n-1)/2$ *términos* $a(j,k)$ *son ciertos números reales tales que* H *es una función de distribución.*

Con esta definición, las distribuciones marginales univariadas de H resultan ser las F_j dadas. Las contantes $a(j,k)$ son admisibles si las 2^n desigualdades

$$1+\sum_{1\leq i<k\leq n}\varepsilon_j\varepsilon_k a(j,k)\geq 0$$

se satisfacen para toda ε_j con valor $-M_j$ o $1-m_j$, donde M_j y m_j son, respectivamente, el supremo y el ínfimo del conjunto

$$\{F_j(x), -\infty<x<\infty\}\setminus\{0,1\}.$$

Si F_j es absolutamente continua, entonces $M_j=1$ y $m_j=0$, así que $\varepsilon_j=\pm 1$. Estas desigualdades indican que los coeficientes están acotados,

$$|a(j,k)|\leq\frac{1}{\left(\min\{M_k,M_j,(1-m_j),(1-m_k)\}\right)^2}.$$

Definición 117 *Sea una sucesión de v.a.* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$, *donde para cada* i *la distribución marginal de* X_i *es* F_i, *diremos que es una sucesión FGM si para cada* $n\geq 1$, *la distribución conjunta de* $X_{i_1},\ldots X_{i_n}$ *está dada por la distribución FGM*

$$H_{i_1,\ldots i_n}(x_1,\ldots,x_n)=\left(1+\sum_{1\leq i<k\leq n}a(i_j,i_k)\overline{F}_{i_j}(x_j)\overline{F}_{i_k}(x_k)\right)\prod_{h=1}^{n}F_{i_h}(x_i).$$

donde $a(j,k)=a(k,j)$.

La función $a(\cdot)$ tal que para cada $n\geq 1$ y $\{i_1,\ldots,i_n\}$ las desigualdades

$$1+\sum_{1\leq i<k\leq n}\varepsilon_{i_j}\varepsilon_{i_k}a(i_j,i_k)\geq 0$$

se satisfagan para toda ε_j.

La sucesión FGM es estacionaria si y sólo si las distribuciones marginales son todas iguales,

$$F_i(\cdot)=F(\cdot),\ i\geq 1$$

y la función $a(j,k)$ depende solamente de j,k a través de su diferencia:

$$a(j,k) = a(j-k) \text{ para toda } j \neq k.$$

En general, consideraremos sucesiones FGM $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ no estacionarias y con las X_i no idénticamente distribuidas. Sea la sucesión de reales $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$, supondremos que se cumple la condición (2.2), es decir,

$$\overline{F}_{\max} = \sup\left\{\overline{F}_i(u_{in}), i \leq n\right\} \to 0, n \to \infty$$

En el siguiente Lema demostraremos que la Condición $D(\{u_{ni}\})$ se satisface si se cumple la simple condición

$$\sup_{j-k>n} |a(j,k)| \to 0, n \to \infty \tag{3.19}$$

En general no se sabe si esta condición se cumple para todas la sucesiones FGM. Sin embargo, veremos que bajo esta condición la distribución límite de M_n se deriva del comportamiento límite de $\prod_{i=1}^{n} F_i(u_n(x))$.

Lema 118 *Supongamos que la sucesión FGM $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ satisface las condiciones* (2.2) *y* (3.19). *Entonces la Condición $D(\{u_{ni}\})$ sa satisface para cualquier sucesión de reales $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$ tales que*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i(u_{ni}) < \infty. \tag{3.20}$$

Demostración.

Tenemos que para cualquier $I \subset \{1,\ldots,n\}$,

$$P\{X_l \leq u_{nl}, l \in I\} = \left(1 + \sum_{l<l' \in I} a(l,l')\,\overline{F}_l(u_{nl})\,\overline{F}_{l'}(u_{nl'})\right) \prod_{l\in I} F_l(u_{nl}).$$

Como se cumple (3.19) podemos asegurar que

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{l<l'\in I} a(l,l')\overline{F}_l(u_{nl})\overline{F}_{l'}(u_{nl'})\right| \\
&\leq \sum_{l<l'\in I, l'-l\leq l_0} |a(l,l')|\overline{F}_l(u_{nl})\overline{F}_{\max} + \sum_{l<l'\in I, l'-l>l_0} \varepsilon\overline{F}_l(u_{nl})\overline{F}_{l'}(u_{nl'}) \\
&= O\left(l_0\overline{F}_{\max}\sum_{l=1}^{n}\overline{F}_l(u_{nl})\right) + O\left(\varepsilon\left(\sum_{l=1}^{n}\overline{F}_l(u_{nl})\right)^2\right)
\end{aligned}$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ y l_0 tal que $|a(l,l')| < \varepsilon$ para $l' - l > l_0$. Si ahora usamos la desigualdad (3.20), sucede que la última suma converge a 0 si $n \to \infty$. Esto de manera uniforme para cualquier $I \subset \{1,\ldots,n\}$. Además esto implica que

$$\begin{aligned}
&|P\{X_l \leq u_{nl}, l \in I\cup J\} - P\{X_l \leq u_{nl}, l\in I\} P\{X_l \leq u_{nl}, l \in J\}| \\
&\qquad\qquad \leq \left(1+o(1)-(1+o(1))^2\right)\prod_{l\in I\cup J} F_l(u_{nl}),
\end{aligned}$$

uniformemente para todo $I = \{i_1 < \ldots < i_p\}$ y $J = \{j_1,\ldots,j_q\}$ y cualquier m tal que $j_1 - i_p \geq m$. Es decir, se cumple la Condición $D(\{u_{ni}\})$. ■

En este sentido, podemos formular una proposición general que se satisface cualquier sucesión FGM no estacionaria que satisface (3.19).

Proposición 119 *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión FGM que satisface las expresiones (2.2), (3.19) y (3.20) con respecto al alguna sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces*

$$P\{M_n \leq u_n(x)\} - \prod_{i=1}^{n} F_i(u_n(x)) \to 0, n\to\infty. \tag{3.21}$$

Si además, $\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n} F_i(u_n(x)) = G(x)$, entonces

$$P\{M_n \leq u_n(x)\} \xrightarrow{d} G(x), n\to\infty.$$

Demostración.

Por la estructura de la sucesión FGM tenemos

$$\begin{aligned}
P\{M_n \leq u_n(x)\} &= \left(1 + \sum_{1\leq i<k\leq n} a(j,k)\,\overline{F}_j(u_n(x))\,\overline{F}_k(u_n(x))\right)\prod_{i=1}^{n} F_i(u_n(x)) \\
&= (1+o(1))\prod_{i=1}^{n} F_i(u_n(x))
\end{aligned}$$

si y sólo si

$$\sum_{1\leq i<k\leq n} a(j,k)\,\overline{F}_j(u_n(x))\,\overline{F}_k(u_n(x)) = o(1), \tag{3.22}$$

que es cierto por el Lema 118. ■

Entonces tenemos que el comportamiento extremo de la sucesión FGM es idéntico al que tendría la misma sucesión pero con v.a. independientes. Debemos observar que G no necesariamente resulta ser una distribución de Valores Extremos aún bajo normalizaciones adecuadas (ver Observación 77).

Ejemplo 120 *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. donde la función de distribución de X_i es $F_i(x) = 1 - e^{-x}, x \geq 0$ si i es impar y $F_i(x) = 1 - e^{-x+a}, x \geq a$ si i es par, con $a > 0$. Entonces para $u_n(x) = \ln n + x$ tenemos que*

$$\begin{aligned}
G(x) &= \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n} F_i(u_n(x)) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-e^{-u_n(x)}\right)\left(1-e^{-u_n(x)+a}\right)\right]^{\frac{n}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-e^{-\ln n - x}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-e^{-\ln n - x + a}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}e^{-x}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{n}e^{-x+a}\right. \\
&= e^{-\frac{1}{2}e^{-x}}e^{-\frac{1}{2}e^{-x+a}} = e^{-\frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{a})}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 121 *Si ahora para cada i tenemos que $F_i(x) = e^{\lambda_i x}, x \leq 0$ es la función de distribución de X_i, donde $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de reales positivos, tenemos que para $u_n(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}x$*

$$\begin{aligned}
G(x) &= \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n} F_i(u_n(x)) = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_n(x)} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}x\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = e^{x}, x \leq 0.
\end{aligned}$$

La demostración de la proposición anterior también nos dice que (3.21) implica a (3.22). En el caso estacionario la expresión (3.22) nos diría que $\sum_{j<k\leq n} a(j,k) = o(n^2)$, porque por (3.20) tenemos que $\limsup_{n\to\infty} n\overline{F}(u_n(x)) < \infty$, y con esto sucede que $\overline{F}(u_n(x)) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Observación 122 *Se cree que en la mayoría de los casos* (3.22) *implica a la Condición* $D(\{u_{ni}\})$*, aunque no se ha encontrado un contraejemplo al respecto. Sin embargo, con un poco de detalle, veremos que en el caso estacionario* (3.22) *siempre se satisface. Sabemos que las constantes* $a(j,k)$ *deben cumplir*

$$1 + \sum_{1\leq i<k\leq n} \varepsilon_j \varepsilon_k a(j,k) \geq 0 \tag{3.23}$$

para cualquier ε_j *con valores* $-M_j$ *o* $1-m_j$. *Como estamos suponiendo que* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *es estacionaria tenemos que* $M_j = M$ *y* $m_j = m$ *para toda* $j \geq 1$. *Para cualquier elección de* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n$*, definimos los conjuntos*

$$\begin{aligned} J^{-} &= \{(j,k) \mid \varepsilon_j < 0, \varepsilon_k < 0\}, \\ J^{+-} &= \{(j,k) \mid \varepsilon_j > 0, \varepsilon_k < 0\}, \\ J^{-+} &= \{(j,k) \mid \varepsilon_j < 0, \varepsilon_k > 0\}, \\ J^{++} &= \{(j,k) \mid \varepsilon_j > 0, \varepsilon_k > 0\}. \end{aligned}$$

Entonces (3.23) *se puede escribir como*

$$\sum_{j<k,(j,k)\in J^{-+}\cup J^{+-}} M(1-m)\,a(j,k)$$

$$- \sum_{j<k,(j,k)\in J^{++}} (1-m)^2 a(j,k) - \sum_{j<k,(j,k)\in J^{--}} M^2 a(j,k) \leq 1.$$

Ahora sumemos sobre todas esas ecuaciones cuando $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ *tal que satisface que* $card\{j \mid \varepsilon_j < 0\} = n^*$. *Algunas pueden coincidir, pero eso no importa. Así obtenemos*

$$S = S_1 - S_2 - S_3 \leq \binom{n}{n^*}.$$

El elemento $a(j,k)$ con $1 \le j < k \le n$ aparece $2\binom{n-2}{n^*-1}$ veces en la primera suma S_1, $\binom{n-2}{n^*}$ veces en S_2, y $\binom{n-2}{n^*-2}$ en S_3. Entonces tenemos para la suma S sobre las $\binom{n}{n^*}$ elecciones de ε

$$\sum_{1\le j<k\le n} a(j,k)\, c \le \binom{n}{n^*},$$

donde

$$c = 2M(1-m)\binom{n-2}{n^*-1} - \left(1-m^2\right)\binom{n-2}{n^*} - M^2\binom{n-2}{n^*-2}.$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} c &= \frac{2M(1-m)(n-2)!}{(n^*-1)!\,(n-n^*-1)!} - \frac{(1-m)^2(n-2)!}{n^*!\,(n-n^*-2)!} - \frac{M^2(n-2)!}{(n-2)!\,(n-n^*)!} \\ &= \binom{n-2}{n^*-1}\frac{2M(1-m)\,n^*(n-n^*) - (1-m)^2(n-n^*-1)(n-n^*) - M^2 n^*(n^*-1)}{n^*(n-n^*)} \\ &= \binom{n-2}{n^*-1}\frac{M^2 n^* + (1-m)^2(n-n^*) - \left((1-m)(n-n^*) - Mn^*\right)^2}{n^*(n-n^*)}. \end{aligned}$$

Si tomamos $n^* = \left[\frac{n(1-m)}{(1-m+M)}\right] \sim \lambda n$, con $0 < \lambda < 1$, la constante c es positiva, porque

$$\left((1-m)(n-n^*) - Mn^*\right)^2 \le 4$$

y así

$$\begin{aligned} c &\ge \binom{n-2}{n^*-1}\frac{M^2 n^* + (1-m)^2(n-n^*) - 4}{n^*(n-n^*)} \\ &= \binom{n}{n^*}\frac{M^2 n^* + (1-m)^2(n-n^*) - 4}{n^*(n-1)} > 0 \end{aligned}$$

para valores grandes de n. Entonces tenemos que

$$\sum_{1\le j<k\le n} a(j,k) \le \frac{n^*(n-1)}{M^2 n^* + (1-m)^2(n-n^*) - 4} = O(n).$$

Si $\varepsilon_j = 1 - m$, *tenemos una cota superior para* (3.23),

$$-(1-m)^{-2} \leq \sum_{1\leq j<k\leq n} a(j,k).$$

Entonces se sigue (3.22).

Observación 123 *Finalmente, probaremos que una condición más débil implica a la Condición* $D(\{u_{ni}\})$, *a saber*

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} |a(j,k)|\, \overline{F}_j(u_n(x))\, \overline{F}_k(u_n(x)) = o(1), n \to \infty. \tag{3.24}$$

Denotemos $u_n = u_n(x)$ *para cualquier* x *fija. Definamos* $A = \{X_i \leq u_n, i \in I\}$ *y* $B = \{X_j \leq u_n, j \in J\}$ *donde* I *y* J *son subconjuntos ajenos de* $\{1,\ldots,n\}$, *separados por* m *usada en la Condición* $D(\{u_n\})$.

Sea $S(I) = \sum_{j<k\in I} |a(j,k)|\, \overline{F}_j(u_n(x))\, \overline{F}_k(u_n(x)) = o(1)$ *para cualquier* $I \subset \{1,\ldots,n\}$. *Entonces por* (3.20)

$$\left| P\{A \cap B\} - \prod_{i\in I\cup J} F_i(u_n) \right| \leq S(I \cup J)$$

y

$$\left| P\{A\} P\{B\} - \prod_{i\in I\cup J} F_i(u_n) \right| \leq S(I) + S(J) + S(I)\, S(J),$$

las cuales son $o(1)$. *Como esto se mantiene para todo* I, J, *se satisface* $D(\{u_n\})$. *Aquí la separación de* I *y* J *no fue utilizada, lo que nos muestra la diferente naturaleza de las condiciones* (3.22) *y* (3.24).

Como en el Lema 118, podemos demostrar que (3.19) *y* (3.20) *implican* (3.24).

En este trabajo escrito presentamos tres ejemplos de sucesiones de v.a. no estacionarias, pero existen otros ejemplos para procesos estocásticos. Un caso interesante es el que trata Niu (ver [20]) para un tipo de serie de tiempo no estacionaria. Él considera una clase de series de tiempo de la forma $Y_t = \mu_t + \xi_t$, donde (ξ_t) es una sucesión de promedios móviles infinitos de v.a. independientes con probabilidades de cola de variación regular. En ese artículo, estudia la TVE de (Y_t), y bajo ciertas condiciones prueba resultados del proceso puntual de excedentes sobre los promedios móviles. Aplica sus resultados en el análisis de datos de concentraciones de ozono en la troposfera.

3.4 Conclusiones

Cuando tenemos una sucesión de variables aleatorias estacionaria que presenta leve dependencia (que precisamos con la condición de independencia asintótica $D(u_n)$) y no muestra tendencia a formar agrupamientos de valores grandes (más precisamente la condición de antiagrupamientos $D'(u_n)$) sabemos que el comportamiento del máximo de la sucesión estacionaria es el mismo que tendría dicha sucesión si las variables aleatorias fueran independientes, el cual se encuentra perfectamente caracterizado por los resultados centrales de la Teoría de Valores Extremos (TVE) para el caso de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.). En la práctica, es posible tener la condición de leve dependencia, pero en cambio es muy difícil que la condición de antiagrupamientos se satisfaga (como podemos ver, por ejemplo, en las series de datos financieros), y entonces debemos ser cuidadosos con el problema de agrupamientos ("clusters") de valores grandes. No obstante, sabemos que aún en tales condiciones podemos decir mucho sobre el comportamiento asintótico del máximo si conocemos el índice extremo de la sucesión estacionaria en cuestión (de hecho, en este caso la distribución límite no degenerada del máximo debidamente normalizado resulta ser la que se tendría para v.a.i.i.d. pero elevada a la potencia el valor del índice extremo), razón por la cual este es un concepto importantísimo cuando trabajamos con sucesiones estacionarias.

Como enfatizamos en la parte introductoria de este trabajo, estamos interesados en el caso de sucesiones aleatorias en general no estacionarias (entonces no necesariamente las variables aleatorias en cuestión serán idénticamente distribuidas o independientes entre sí), con el objetivo de estudiar el comportamiento asintótico del máximo de variables aletorias en el contexto más general posible. Ante la búsqueda de tal nivel de generalización era razonable esperar que algunos resultados no pudieran extenderse intactos, tanto en las hipótesis requeridas como en sus implicaciones y conclusiones, perdiendo tal vez un poco de precisión respecto a los resultados que se tiene para el caso estacionario.

Precisaremos las principales conclusiones a las que llegamos una vez culminada la realización de este trabajo, pero antes convenimos retomar el contexto en el que venimos trabajando. Dada una sucesión de variables aleatorias $(X_i)_{i=1}^{\infty}$, donde F_i es la distribución marginal de X_i, y números reales $(u_{ni})_{i=1}^{n}, n \geq 1$, fue nuestro interés principal estudiar las propiedades asintóticas de probabilidades $P_{n,\{u_{ni}\}} \equiv P\{X_i \leq u_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$, a medida que n crece, en comparación con $\widetilde{P}_{n,\{u_{ni}\}} \equiv \prod_{i=1}^{n} F_i(u_{ni})$; notando que para el caso particular en el que $u_{ni} = u_n$ para toda i, $P_{n,\{u_{ni}\}}$ se convierte en $P\{M_n \leq u_n\}$, donde $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Denotamos por $\left(\widetilde{X}_i\right)_{i=1}^{\infty}$ a la sucesión de variables aleatorias independientes donde $\widetilde{X}_i$ también tiene distribución marginal F_i, que llamamos sucesión independiente asociada a $(X_i)_{i=1}^{\infty}$, y por $\widetilde{M}_n$ al correspondiente máximo.

Resultó que para asegurar el mismo comportamiento asintótico distribucional entre M_n y $\widetilde{M}_n$ (el máximo de la sucesión en cuestión y el de la sucesión independiente asociada) fueron necesarias una condición de leve dependencia y otra de antiagrupamientos análogas a las que se requieren en el caso estacionario, llamadas Condición $D\{u_{ni}\}$ y Condición $D'\{u_{ni}\}$, respectivamente. La primera nos garantizó que para índices suficientemente separados las variables aleatorias correspondientes fueran asintóticamente independientes y la segunda por su parte, nos asegura que las contribuciones significativas a $P_{n,\{u_{ni}\}}$ provienen solamente de aquellos términos cuyos índices difieren en una cantidad suficientemente grande (pocos clusters de valores grandes). Para garantizar que la distribución límite de M_n fuera no degenerada fue necesario un requerimiento adicional conocido como la Condición A. Es importante enfatizar que la distribución límite de M_n no necesariamente es una de Valores Extremos, ya que verificamos que ni siquiera la distribución límite de $\widetilde{M}_n$ lo cumple en general, y pertenece a una familia más grande de distribuciones. No obstante, si se cumplen todas las condiciones mencionadas anteriormente, pudimos obtener la extensión del Teorema de

Fisher-Tippet al caso de variables aleatorias no estacionarias pero idénticamente distribuidas, y pudiendo asegurar que en este caso caso la distribución límite de M_n si fuera una de Valores Extremos.

Surge la pregunta de por qué tuvimos que pedir la Condición $D'\{u_{ni}\}$ para tener la extensión del Teorema de Fisher-Tippet, cuando en el caso estacionario sólo fue necesaria la condición de leve dependencia. La razón de esta desventaja es que en el contexto general no estacionario el índice extremo, que surge cuando no se satisface la condición de antiagrupamientos, suele depender tanto de los umbrales $(u_{ni}(\tau))_{i=1}^{n}, n \geq 1$ como del valor τ donde se estabiliza el número promedio de excesos a tales umbrales. Al respecto revisamos ejemplos en los que el índice extremo presenta un comportamiento caótico, pero no obstante, también vimos ejemplos en los que el índice extremo se comporta tan bien como en el caso estacionario al no depender ni de la sucesión de umbrales ni de τ, y nos da información importantísima para conocer la distribución límite del máximo. Cabe mencionar que establecimos condiciones suficientes para la existencia del índice extremo y su buen comportamiento, y en tal caso en que no depende ni de τ ni de $u_n(\tau)$ poder derivar el mismo papel que desempeña en el caso estacionario. Entonces bajo tales condiciones, aunque no se satisfaga la condición de antiagrupamientos, y en el caso en que las variables aleatorias sean idénticamente distribuidas la distribución límite de M_n resulta ser del mismo tipo de alguna de Valores Extremos y por ende el Teorema de Gnedenko-Balkema-Pickands-de Haan resulta ser aplicable y entonces la implementación de los métodos de la TVE para estimar las medidas de riesgo VaR_q y ES_q usando conjuntos de datos no estacionarios puede ser adecuada como lo es en el caso estacionario (ver [5]).

La convergencia distribucional del proceso puntual del número de excesos a umbrales pudo caracterizarse pero difiere del caso estacionario en el hecho de que se da la convergencia a un proceso Poisson no homogéneo, siendo que para el caso estacionario éste es homogéneo. La medida de intensidad $\lambda(t)$ del proceso de Poisson resulta ser la función a la que converge el número promedio de excedentes tomando bloques con nt observaciones para $0 < t \leq 1$, observando que $\lambda(t) = \lambda$ (el caso del proceso Poisson homogéneo) cuando la sucesión es estacionaria.

Los ejemplos estudiados en el último capítulo, a diferencia de los revisados cuando concluíamos los resultados buscados, muestran como verificar las condiciones necesarias para nuestras extensiones de la TVE del caso estacionario al no estacionario requiere muchas veces de poner restricciones sobre las sucesiones, dependiendo del caso particular con que trabajemos, y nos lleva a dedicar esfuerzos mayores para analizar casos específicos.

Falta página

N° 140

Apéndice: Proceso Poisson

.1 Conceptos básicos sobre procesos Puntuales y el Proceso Poisson

Empezaremos este apartado mencionando conceptos básicos de probabilidad, necesarios para abordar un poco sobre procesos puntuales, en particular el proceso Poisson, y luego concentrarnos en aspectos de convergencia débil de este último.

Definición 124 *Dado un conjunto X, una colección no vacía $\mathcal{A} \subset 2^X$ se llama σ-álgebra de subconjuntos de X, si y sólo si,*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $X \backslash A \in \mathcal{A}$ *para todo* $A \in \mathcal{A}$

(iii) Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *entonces* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

A la pareja $(X, \mathcal{A})$ se le llama espacio medible. Si $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{D})$ son espacios de medida, decimos que una función $f : X \rightarrow Y$ es medible, si y sólo si, para todo $A \in \mathcal{A}$ sucede que $f^{-1}(A) \in \mathcal{D}$.

Para cualquier colección $\mathcal{C} \subset 2^X$, la σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$, que denotamos $\sigma(\mathcal{C})$, se define como la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$. La intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{C}$ coincide con $\sigma(\mathcal{C})$. Si S es algún espacio métrico o topológico denotamos a su σ-álgebra de Borel por $\mathcal{B}(S)$ y se define como el σ-álgebra generado por los abiertos de S (su topología).

Definición 125 *Dado un conjunto X y una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, decimos que una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es una medida, si y sólo si,*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cualesquiera $i \neq j$, entonces $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

A la tercia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se le llama espacio de medida.

Definición 126 *Una medida de probabilidad definida sobre un σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω es una función $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ que satisface*

(i) $P(\emptyset) = 0$ y $P(\Omega) = 1$

(ii) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ para cualesquiera $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

En este apartado nuestro principal objetivo es revisar la convergencia débil (o en distribución) para procesos puntuales, que es un poco diferente al concepto de convergencia débil para medidas de probabilidad (y así de la convergencia en distribución para v.a.) que conocemos y recordamos a continuación.

Definición 127 *Dadas $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}^d$ decimos que $(\mu_i)_{i=1}^{\infty}$ converge débilmente a μ, que denotamos $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$, si y sólo si,*

$$\int f(x)\, \mu_n(dx) \to \int f(x)\, \mu(dx), n \to \infty,$$

para toda función f de valores reales continua y acotada en $\mathbb{R}^d$.

Definición 128 *Sean $X, X_1, X_2, \ldots$ v.a. con valores en $\mathbb{R}^d$. Decimos que $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ converge en distribución a X, que denotamos como $X_n \xrightarrow{d} X$, si y sólo si,*

$$P_{X_n} \xrightarrow{d} P_X,$$

donde $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$, $P_{X_n}(A) = P(X_n^{-1}(A))$ *para todo* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, *son las medidas de probabilidad inducidas por las respectivas v.a.*

Consideremos una sucesión de vectores aleatorios $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ en el conjunto E llamado espacio de estados y definamos para cada $A \subset E$

$$N(A) = card\{i \mid X_i \in A\},$$

es decir, $N(A)$ cuenta el número de $X_i's$ que caen en A. Podemos observar que $N(A) = N(A, \omega)$ es aleatorio para cada conjunto A dado y, bajo condiciones generales, $N(., \omega)$ define una medida aleatoria de contar con átomos X_n sobre algún σ-álgebra $\mathcal{A}$. Esta es la idea intuitiva del significado del proceso puntual N.

Para nuestros propósitos, el espacio de estados E es un subconjunto de algún espacio Euclidiano finito-dimensional que puede incluir puntos con alguna coordenada infinita, y E cuenta con su σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(E)$. Es conveniente escribir un proceso puntual usando la medida de Dirac δ_x para $x \in E$ definida como

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A \\ 0, & si\ x \notin A \end{cases} \quad A \in \mathcal{B}(E). \tag{.1}$$

Dada una sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ en E,

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(A) = \sum_{i \mid x_i \in A} 1 = card\{i \mid x_i \in A\}, \; A \in \mathcal{B}(E),$$

define una medida de contar sobre $\mathcal{B}(E)$ la cual es llamada medida puntual si $m(K) < \infty$ para todo compacto $K \in E$. Sea $M_p(E)$ el espacio de todas las medidas puntuales sobre E con una σ-álgebra apropiada $\mathcal{M}_p(E)$.

Definición 129 *Un proceso puntual sobre* E *es un mapeo medible*

$$N : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (M_p(E), \mathcal{M}_p(E)).$$

Observación 130 1) *La σ-álgebra $\mathcal{M}_p(E)$ contiene todos los conjuntos de la forma $\{m \in M_p(E) \mid m(A) \in B\}$ para $A \in \mathcal{B}(E)$ y cualquier conjunto de Borel $B \subset [0,\infty]$, es decir, es la σ-álgebra más chica que hace medible al mapeo dado por $\pi_A : m \to m(A)$ para toda $A \in \mathcal{B}(E)$.*

2) *De la definición anterior tenemos que un proceso puntual es función aleatoria tiene medidas puntuales como valores. Es conveniente pensar un proceso puntual como una colección $(N(A))_{A\in\mathcal{B}(E)}$ de las v.a. $N(A)$. Los procesos puntuales son medidas aleatorias especiales (ver [16]).*

3) *Los procesos puntuales en los que estamos interesados pueden escribirse en la forma*

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i}$$

para una sucesión $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ de v.a. Entonces para cada $\omega \in \Omega$,

$$N(A,\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i(\omega)}(A), \ A \in \mathcal{B}(E),$$

define una medida puntual sobre $\mathcal{B}(E)$.

4) *Supongamos que $m = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}$ es una medida puntual sobre E. Sea $(x_{i_k})_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ que contiene todos los valores distintos que no se repiten. Definimos la multiplicidad de x_{i_k} como*

$$n_i = card\{k \mid k \geq 1, \, x_i = x_{i_k}\},$$

y entonces $m = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{x_{i_k}}$.

Si $n_k = 1$ para toda k, entonces m se llama medida puntual simple, y en cualquier otro caso, múltiple. Análogamente, si las realizaciones del proceso puntual N son medidas puntuales simples, entonces N es un proceso puntual simple, y múltiple en cualquier otro caso. Se puede demostrar que un proceso puntual N es simple si

$$P\{N(\{x\}) \leq 1, \, x \in E\} = 1. \tag{.2}$$

Ejemplo 131 *(Proceso puntual de excedentes) Sean un número real u y $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. Entonces*

$$N_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{i}{n}}(\cdot)\, 1_{\{X_i > u\}},\ n = 1, 2, \ldots,$$

con espacio de estados $E = (0, 1]$, cuenta el número de excedentes del umbral u por las v.a. $X_1, \ldots, X_n$. A este proceso puntual se le conoce como proceso puntual de excedentes. Observamos que

$$N_n(0,1] = card\left\{ i \mid 0 < \frac{i}{n} \leq 1 \text{ y } X_i > u \right\} = card\left\{ i \leq n \mid X_i > u \right\}.$$

La relación con la TVE es inmediata pues

$$\begin{aligned} \{N_n(0,1] = 0\} &= \{card\{i \leq n \mid X_i > u\} = 0\} \\ &= \{Ninguna\ X_i,\ i \leq n,\ excede\ a\ u\} = \{M_n \leq u\}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \{N_n(0,1] < k\} &= \{card\{i \leq n \mid X_i > u\} < k\} \\ &= \{Menos\ de\ k\ de\ las\ X_i,\ i \leq n,\ excede\ a\ u\} = \{X_{k,n} \leq u\}, \end{aligned}$$

donde $M_n = \max\{X_1, \ldots X_n\}$ y $X_{k,n}$ es la k-ésima estadística de orden más grande de la muestra $X_1, \ldots X_n$.

Ejemplo 132 *Sea $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a.i.i.d. positivas y tomemos la suma $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$. Definamos*

$$N(t) = card\{i \mid T_i < t\},\ t > 0. \tag{.3}$$

A este proceso le podemos relacionar el proceso puntual

$$N(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{T_i}(A),\ \ A \in \mathcal{B}([0,\infty)), \tag{.4}$$

ya que casi seguramente,

$$N[0,t] = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{T_i}([0,t]) = \sum_{i|T_i \in [0,t]} 1 = card\{i \mid T_i \in [0,t]\} = N(t), \, t \geq 0.$$

En este sentido, cada proceso (.3) *corresponde a un proceso puntual. El proceso puntual* (.4) *es simple ya que* $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ *con probabilidad 1.*

Hemos visto que las realizaciones de un proceso puntual N son medidas puntuales. Por lo tanto, la distribución de N está definida sobre subconjuntos de medidas puntuales, es decir,

$$P_N(A) = P\{N \in A\}, \, A \in \mathcal{M}_p(E).$$

Aunque esta distribución no es fácil de visualizar, la distribución de N se encuentra determinada de manera única por la familia de las distribuciones de los vectores finito-dimensionales

$$(N(A_1), \ldots, N(A_m)) \tag{.5}$$

para cualquier elección de $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{B}(E)$ (ver Lema 12.1 de [17]). La colección de tales distribuciones se llama distribuciones finito-dimensionales del proceso puntual y es más fácil de imaginar que la distribución de P_N. Observemos que (.5) es un vector de v.a. de valores enteros y queda completamente determinado por las probabilidades

$$P\{N(A_1) = k_1, \ldots, N(A_m) = k_m\}, \, k_i \geq 0, \, i = 1, \ldots, m,$$

y para su caracterización es conveniente usar un concepto análogo a la transformada de Laplace, en el caso de v.a., que sea aplicable a procesos puntuales.

Definición 133 *Sea una función* $g \geq 0$ *medible sobre* E, *la funcional de Laplace del proceso puntual* N *se define como*

$$\Psi_N(g) = E\left[e^{-\int_E g dN}\right] = \int_{M_p(E)} e^{-\int_E g(x) dm(x)} dP_N(m).$$

Cabe mencionar que la integral $\int_E gdN$ está bien definida como una integral Lebesgue-Stieltjes. Escribiendo $N = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i}$ para vectores aleatorios con valores en E, tenemos

$$\int_E gdN = \sum_{i=1}^{\infty} g(X_i),$$

y en particular $\int_A dN = \int_E 1_A dN = N(A)$.

Observación 134 *Si consideramos el caso especial $g = t1_A$, $t \geq 0$ y $A \in \mathcal{B}(E)$, tenemos que*

$$\Psi_N(g) = E\left[e^{-\int_E t1_A dN}\right] = E\left[e^{-t\int_E 1_A dN}\right] = E\left[e^{-tN(A)}\right],$$

que es la transformada de Laplace de la v.a. $N(A)$. Si ahora suponemos que $A_1, \ldots A_m \in \mathcal{B}(E)$ y tomamos las funciones $g = \sum_{i=1}^{m} z_i 1_{A_i}$, $z_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, m$, obtenemos la transformada de Laplace conjunta de las distribuciones finito-dimensionales de los vectores (.5). Entonces tenemos que las distribuciones finito-dimensionales determinan la distribución de N, recíprocamente, las distribuciones finito-dimensionales son determinadas de manera única por sus transformadas de Laplace, y por lo tanto, la funcional de Laplace determina de manera unica la distribución de N.

Ahora estamos en posibilidades de definir adecuadamente el Proceso Poisson.

Definición 135 *Un proceso puntual N se llama proceso Poisson con medida de intensidad μ (que escribimos PPM(μ)) si se satisfacen*

(i) Para cada $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$P\{N(A) = k\} = \begin{cases} e^{-\mu(A)} \frac{(\mu(A))^k}{k!}, & si\ \mu(A) < \infty \\ 0, & si\ \mu(A) = \infty \end{cases}, \ k \geq 0.$$

(ii) Para cualquier $m \geq 1$, si $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{B}(E)$ son tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces $N(A_1), \ldots, N(A_m)$ son v.a. independientes.

El nombre de medida de intensidad se debe a que $E[N(A)] = \mu(A)$ (para A fijo $N(A)$ tiene distribución Poisson con parámetro $\mu(A)$ y por consiguiente un proceso PPM(μ) queda determinado por su medida de intensidad μ).

Ejemplo 136 *(PPM Homogéneo) Sabemos que un proceso Poisson homogéneo $(N(t))_{t\geq 0}$ es un proceso con incrementos independientes y estacionarios tal que $N(t)$ tiene distribución Poisson(λt). Entonces*

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ k = 0, 1, \ldots.$$

Como $(N(t))_{t\geq 0}$ es un proceso no decreciente y si además definimos la medida $N(s,t] = N(t) - N(s)$ para todo $0 \leq s < t < \infty$, sabemos que podemos extenderla, por el Teorema de extensión de Carathéodory (ver [17]), y definir así un proceso puntual N sobre $\mathcal{B}([0,\infty))$. Así que para toda $m \geq 1$ y cualesquiera $A_1, \ldots, A_m$ subconjuntos de $[0,\infty)$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, tenemos que

$$P\{N(A_1) = k_1, \ldots, N(A_m) = k_m\} = e^{-\lambda|A_1|}\frac{(\lambda|A_1|)^k}{k_1!}\cdots e^{-\lambda|A_m|}\frac{(\lambda|A_m|)^k}{k_m!},$$

con $k_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, dado que cada A_i lo podemos aproximar por intervalos de la forma $(a,b]$, $0 \leq a < b < \infty$, y $(N(t))_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes y estacionarios. Aquí $|\cdot|$ denota la medida de Lebesque en $[0,\infty)$.

Usando el Ejemplo 132, tenemos que un proceso Poisson homogéneo con intensidad λ se puede definir como un proceso puntual simple $N = \sum_{i=1}^{\infty}\delta_{T_i}$, donde $T_i = Y_1 + \cdots + Y_i$ y las $Y_i's$ son v.a.i.i.d. de una distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$. Observamos que N tiene medida de intensidad

$$\mu(A) = \lambda|A| = \lambda\int_A dx,\ A \in \mathcal{B}([0,\infty)).$$

Ahora supongamos que N es PPM($\lambda|\cdot|$) con espacio de estados $E \subset [-\infty,\infty]^d$, donde $\lambda > 0$ y $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue sobre E. Como una forma de generalizar al proceso Poisson homogéneo en $[0,\infty)$, llamamos a PPM($\lambda|\cdot|$) un proceso Poisson homogéneo con intensidad λ. Más aún, si la medida de intensidad μ de un PPM es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, existe una función $f \geq 0$ tal que

$$\mu(A) = \int_A f(x)\, dx, \; A \in \mathcal{B}(E),$$

entonces se dice que f es la tasa o intensidad del PPM.

Alternativamente, podemos definir un PPM(μ) por su funcional de Laplace, ya que resulta ser

$$\Psi_N(g) = e^{-\int_E \left(1-e^{-g(x)}\right) d\mu(x)}$$

para toda función $g \geq 0$ medible (usando el Lema 5.1.12 de [6]).

.2 Convergencia débil de procesos Puntuales

Una vez revisados los conceptos básicos de procesos puntuales y en particular del Proceso Poisson, estudiaremos un poco sobre convergencia débil de procesos puntuales, que es una herramienta básica para trabajar con la teoría asintótica de valores extremos.

Primero tratemos de precisar el concepto de convergencia débil de procesos puntuales. Sean una sucesión de procesos puntuales $N, N_1, N_2, \ldots$ definidos sobre el mismo espacio de estados $E \subset [-\infty, \infty]^d$. Por la sección anterior, sabemos que la distribución de estos procesos puntuales en $M_p(E)$, el espacio de todas las medidas puntuales sobre E, está determinada por sus distribuciones finito-dimensionales. Es razonable pensar que para que haya convergencia débil de $(N_i)_{i=1}^{\infty}$ a N, debería suceder que para cualquier elección de conjuntos de Borel $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{B}(E)$ y cualquier entero $m \geq 1$,

$$P\{N_n(A_1), \ldots N_n(A_m)\} \to P\{N(A_1), \ldots N(A_m)\}, \; n \to \infty.$$

Pero sucede que la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales en general no es suficiente para la convergencia débil. Por eso conviene ver primero una definición de convergencia débil en espacios métricos generales, a diferencia de la convergencia débil para sucesiones de v.a. ordinarias que conocemos.

Definición 137 *Sea K un espacio con métrica ρ y que cuenta con la σ-álgebra generada por los subconjuntos abiertos con respecto a ρ. Además, sean $A, A_1, A_2, \ldots$ elementos aleatorios que toman valores en K. La sucesión $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ converge débilmente a A, que denotamos $A_n \xrightarrow{d} A$, si para cada función acotada, continua y de valores reales sobre K se satisface*

$$E[f(A_n)] \to E[f(A)], n \to \infty.$$

Entonces si a $M_p(E)$ le damos una métrica apropiada de manera que sea un espacio métrico completo, podemos definir convergencia débil en $M_p(E)$ en el sentido de la definición anterior.

Definición 138 *(Convergencia vaga) Sean $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ cualesquiera medidas en $M_p(E)$. Decimos que la sucesión de dedidas $(\mu_i)_{i=1}^{\infty}$ converge vagamente a la medida μ, que denotamos $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, si*

$$\int_E g(x)\,\mu_n(dx) \to \int_E g(x)\,\mu(dx), n \to \infty,$$

para toda función $g \geq 0$ continua con soporte compacto.

Decimos que una función g de valores reales tiene soporte compacto si existe un compacto $K \subset E$ tal que $g(x) = 0$ para toda $x \in K^c$, el complemento de K.

Este tipo de convergencia es muy similar a la noción de convergencia de medidas de probabilidad sobre espacios métricos. Sin embargo, si $(\mu_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de medidas sobre $\mathcal{B}(E)$ y $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, entonces μ no necesariamente es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(E)$ o puede suceder que no se de la convergencia débil de medidas de probabilidad, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 139 *Supongamos que* $E = (-\infty, \infty)$, $\mu_n = \delta_n$, $n \geq 1$ *(la medida de Dirac concentrada en* n *y definida por* (.1)) *y* $\mu = 0$, *la medida nula. Tenemos que* $(\mu_i)_{i=1}^{\infty}$ *no converge débilmente, pero en cambio*

$$\int_E g(x)\,\mu_n(dx) = g(n) \to 0 = \int_E g(x)\,\mu(dx)\,, n \to \infty,$$

es decir, $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

Para nuestros propositos el siguiente criterio es muy útil (ver Proposición 3.12 de [21]). Recordemos que en un conjunto en un espacio métrico es relativamente compacto si su cerradura es un compacto.

Proposición 140 *(Criterio de convergencia vaga) Son equivalentes:*

(*i*) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu, n \to \infty$.

(*ii*) *Para cada conjunto relativamente compacto* $B \in \mathcal{B}(E)$ *tal que* $\mu(\partial B) = 0$ *(*∂B *es la cerradura de* B*) se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)\,.$$

Observación 141 *Con la proposición anterior, si* $E \subset (-\infty, \infty)$ *entonces para demostrar* $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ *es suficiente demostrar que* $\mu_n(a, b] \to \mu(a, b], n \to \infty$ *para todos los intervalos* $(a, b]$ *donde* a *y* b *no son átomos de* μ.

Existe una métrica $d_v(\mu, \nu)$ que metriza la convergencia vaga en $M_p(E)$ y que hace a $\mathcal{M}_p(E)$ un espacio métrico separable y completo. No daremos dicha métrica pues no es nuestro propósito profundizar en este aspecto.

Ahora podemos definir convergencia débil para procesos puntuales en el sentido de la Definición 137, la cual no resulta muy clara. En el caso de procesos puntuales esta definición de convergencia débil es equivalente a la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales (ver [16], [17] y [21]) y es por eso que manejaremos la siguiente definición.

Definición 142 *(Convergencia débil de procesos puntuales) Sean $N, N_1, N_2, \ldots$ procesos puntuales sobre el espacio de estados $E \subset [-\infty, \infty]^d$ con la σ-álgebra $\mathcal{B}(E)$. Decimos que $(N_i)_{i=1}^{\infty}$ converge débilmente a N en $M_P(E)$, que denotamos $N_n \xrightarrow{d} N$, si*

$$P\{N_n(A_1), \ldots N_n(A_m)\} \to P\{N(A_1), \ldots N(A_m)\}, n \to \infty$$

para cualesquiera conjuntos $A_i \in \mathcal{B}(E)$ que satisfagan $P\{N(\partial A_i) = 0\} = 1$, $i = 1, \ldots, m$, $m \geq 1$.

Si suponemos $E = (a, b]$, la convergencia de las distribuciones finito-dimensiona puede verficarse sorprendentemente usando solamente el siguiente resultado, que es un caso especial de un teorema debido a Kallenberg (Teorema 4.7 de [16]), que establecemos para intervalos semicerrados.

Teorema 143 *(Convergencia débil a un proceso puntual simple sobre un intervalo) Sean $N, N_1, N_2, \ldots$ procesos puntuales sobre $E = (a, b] \subset (-\infty, \infty)$ donde N es simple. Supongamos que se satisfacen*

(i) Para todos los intervalos $A = (c, d]$ con $a < c < d \leq b$,

$$E[N_n(A)] \to E[N(A)], n \to \infty, \tag{.6}$$

(ii) Para todas las uniones $B = \bigcup_{i=1}^{k}(c_i, d_i]$ de intervalos $(c_i, d_i]$ disjuntos tales que $a < c_1 < d_1 < \cdots < c_k < d_k \leq b$ y cada $k \geq 1$,

$$P\{N_n(B) = 0\} \to P\{N(B) = 0\}, n \to \infty. \tag{.7}$$

Entonces $N_n \xrightarrow{d} N$ en $M_p(E)$.

Observación 144 *El punto (i) nos asegura que para cada sucesión de naturales existe una subsucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que N_{n_k} tiene como límite algún proceso puntual simple, así que el Teorema 12.8 de [17] y (ii) implican que N tiene la misma distribución que dicho límite.*

Bibliografía

[1] ADKE, S. R., y CHANDRAN, C. (1994), Asymptotic distributions of extremes of extremal markov sequences, J. Appl. Prob. 31, 256-261.

[2] ALPUIM, M. T., CATKAN, N. A. y HÜSLER, J. (1995), Extremes and clustering of nonstationary max-AR(1) sequences, Stochastic Process. Appl. 56, 171-184.

[3] CHERNICK, M. R. (1981), A limit theorem for the maximum of autorregressive processes with uniform marginal distributions, Ann. Probab. 9, 145-149.

[4] DENZEL, G. E. y O'BRIEN, G. L. (1975), Limit theorems for extreme values of chain-dependent processes, Ann. Probab. 3, 773-779.

[5] DÍAZ, A., "Teoría de Valores Extremos para sucesiones de variables aleatorias dependientes", Tesis de licenciatura, UNAM, 2003.

[6] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C. y MIKOSCH, T. (1997), Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer Verlag, Berlin.

[7] GALAMBOS, J. (1978), The Asympotic Theory of Extreme Order Statistics, Wiley, New York.

[8] HAAN, L. DE (1970), On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes, Amsterdam Math. Centre Tracts 32, 1-124.

[9] HALL, A. O. (1996), Maximum term of a particular autorregressive sequence with discrete margins, Comm. Statist. 25, 721-736.

[10] HASHORVA, E. y HÜSLER, J. (1999), Extreme values in FGM random sequences, J. Multivariate Anal. 68, 212-225.

[11] HÜSLER, J. (1983), Asympotic approximation of crossing probabilities of random sequences, Z. Wahrscheinlichkeitsth. 63, 257-270.

[12] HÜSLER, J. (1986), Extreme Values of non-stationary random sequences, J. Appl. Prob. 23, 937-950.

[13] HÜSLER, J. (1989), Limit properties for multivariate extremes in sequences of independent, non-identically distributed random vectors, Stochastic Process. Appl. 31, 105-116.

[14] HÜSLER, J. (1993), A note on exceedances and rare events of non-stationary sequences, J. Appl. Prob. 30, 877-888.

[15] JUNCOSA, M. L. (1949), On the distribution of the minimum in a sequence of mutually independent random variables, Duke Math J. 16, 609-618.

[16] KALLENBERG, O. (1983), Random Measures, 3rd edition, Akademie-Verlag, Berlin.

[17] KALLENBERG, O. (2002), Foundations of Modern Probability, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin.

[18] LEADBETTER, M., LINDGREN, G. y ROOTZÉN, H. (1983), Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes, Springer-Verlag New York Inc.

[19] McCORMICK, W. P. y PARK, Y. S. (1992), Asympotic analysis of extremes from autorregressive negative binomial processes, J. Appl. Prob. 29, 904-920.

[20] NIU, X-F. (1997), Extreme value theory for a class of nonstationary time series with applications, Ann. Appl. Probab. 7, 508-522.

[21] RESNICK, S.I. (1992) Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes, Springer, New York.

[22] WEISSMAN, I., y COHEN, U. (1995), The extremal index and clustering of high values for derived stationary sequences, J. Appl. Prob. 32, 972-981.