UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"GRADO E ÍNDICE DE PUNTO FIJO EQUIVARIANTES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

OSCAR BERSABEE VALDERRAMA LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO

2004

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Grado e índice de punto fijo equivariantes"

realizado por Oscar Bersabee Valderrama López

con número de cuenta 9757792-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Carlos Prieto de Castro	
Propietario	Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora	M. Clapp
Propietario	Dr. Jesús González Espino Barros	
Suplente	Dra. Laura Ortiz Bobadilla	Laura Ortiz B.
Suplente	Dr. Ernesto Rosales González	Ernesto Rosales González

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Grado e Índice de punto fijo Equivariantes.

Oscar Bersabee Valderrama López

Agradecimientos.

Al que por mí murió, y su vida puso por mí; al que no le importó dejar su trono y su poder. Al que pagó mi deuda y es todo para mí. Al Señor Jesús, el merece todas las gracias.
Más aún, quiero agradecer a todas las personas que en gran manera me apoyaron en este enorme trabajo.

A mi *mamá*, que sin duda, de todas las personas aquí abajo mencionadas, es la que me dió mucho más. No sólo en este trabajo, sino en todo momento.

A mi *hermana*, que estuvo en los momentos exactos para presionarme, y que con su ejemplo y su amor me permitió dedicar más tiempo a esta labor.

A *Antonio Paniagua*, porque su ejemplo me anima constantemente.

A *Gerardo Tejada*, porque su consejo fue preciso: "Termina la carrera de matemáticas".

A mis *hermanos de AMAN*, porque con ellos viví momentos difíciles; y en medio de todo eso, me brindaron mucho tiempo para terminar este trabajo.

A los *amancitos*, porque me ayudaron a reprobar muchas materias, me rompieron un libro, etc... pero me permitieron servirles, amarles, compartir planes y paseos e hicieron que esta tesis me supiera a triunfo.

A *Charly*, por llevarme en sus pensamientos.

A la *bandera*, por desanimarme tanto en este trabajo.

A mis *amigos y hermanos.*

Al *Dr. Carlos Prieto*, por la gran paciencia que me tuvo.

Al *Dr. Jesús González*, por su apoyo desde que lo conocí.

A los *sinodales*, que revisaron este trabajo con sumo cuidado.

A la *UNAM*, por las multiples oportunidades que me dió, para poder ser un profesionista.

Al *CINVESTAV*, por todas esas impresiones y horas de trabajo, sin lo cual no hubiese logrado esto.

A mi *papá*, por darme la vida.

Índice general

Introducción.

El presente trabajo tiene por objetivo desarrollar las ideas expuestas en el artículo *"The unstable equivariant fixed point index and the equivariant degree"*, presentado por los autores Wacław Marzanto-wicz y Carlos Prieto, que está por aparecer en J. London Math. Soc. 2004.

En el capítulo 1 de la tesis se recuerda la noción de grupo topológico, que a su vez servirá para introducir el concepto de G-acción, que es fundamental para la comprensión de las definiciones de grado e índice de punto fijo equivariantes.

En el capítulo 2 se estudia el grado equivariante definido por Ize, Massabó y Vignoli y se demuestran algunas de las propiedades que éste tiene.

El tercer capítulo se centra en la definición del índice de punto fijo equivariante, auxiliándose del concepto de una RO-homología y la construcción de Grothendieck. Esta construcción permite asociarle a un semigrupo un grupo de una forma universal. Después se exponen propiedades que tiene este índice.

Por último se comparan ambos conceptos: el de grado con el de índice de punto fijo equivariantes.

Capítulo 1

Conceptos preliminares.

1.1. Símbolos Básicos

A lo largo del texto se usarán los siguientes símbolos y términos. El término ***espacio*** significa espacio topológico, el término ***aplicación*** significa una función continua entre espacios. El símbolo $\approx$ entre dos espacios significa que ellos son homeomorfos, $\simeq$ entre aplicaciones o entre espacios significa que ellas son homotópicas o homotópicamente equivalentes, y $\cong$ entre grupos (abelianos o no abelianos), anillos, algebras, espacios vectoriales, campos, etc..., significa que son isomorfos. El símbolo $\circ$ denota composición de funciones.

1.2. Grupos topológicos

Considérese conjuntos dotados de una estructura algebraica y de una estructura topológica. Para que estas dos estructuras definidas sobre un mismo conjunto den origen a un nuevo tipo de estructura (algebraica-topológica) deben estar relacionadas, es decir, deben verificarse ciertas condiciones de compatibilidad. En esta sección se introducen los conceptos básicos para el estudio de estos conjuntos.

DEFINICIÓN 1.2.1 *Se llama **grupo topológico** a una terna (G, m, τ) donde G es un conjunto, $m : G \times G \longrightarrow G$ es una operación y τ una familia de subconjuntos de G, tales que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. (G, m) *es un grupo.*

2. (G, τ) *es un espacio topológico de Hausdorff.*

3. *Si en* $G \times G$ *se considera la topología del producto, las funciones*

$$m : G \times G \longrightarrow G \quad \textit{definida por} \quad m(g_1, g_2) = g_1 g_2$$

y

$$\iota : G \longrightarrow G \quad \textit{definida por} \quad \iota(g) = g^{-1}$$

son continuas, es decir, se exige que las operaciones del grupo (multiplicar y tomar inversos) sean aplicaciones continuas.

En general se denotará simplemente con G *el grupo topológico* (G, m, τ)*, el elemento* e *denotará el neutro de* G*.*

Observación 1.2.2

1. *La continuidad de* m *en la Definición 1.2.1 puede enunciarse así:*

   - *Si* g_1 *y* g_2 *son dos elementos del conjunto* G*, para toda vecindad* $\mathcal{W}$ *del elemento* $g_1 g_2$ *existen vecindades* $\mathcal{U}$ *y* $\mathcal{V}$ *de los elementos* g_1 *y* g_2 *respectivamente tales que* $\mathcal{U}\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$*, donde* $\mathcal{U}\mathcal{V} = \{uv \mid u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}$*.*

   Y la continuidad de ι *puede enunciarse así:*

   - *Si* g *es un elemento del conjunto* G*, para toda vecindad* $\mathcal{U}$ *del elemento* g^{-1} *existe una vecindad* $\mathcal{W}$ *del elemento* g *tal que* $\mathcal{U}^{-1} \subset \mathcal{W}$ *donde* $\mathcal{U}^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in \mathcal{U}\}$*.*

2. *En la Definición 1.2.1(3), la continuidad de* ι *y* m *es equivalente a la continuidad de la función*

$$\mu : G \times G \longrightarrow G \quad \textit{definida por} \quad \mu(g_1, g_2) = g_1 g_2^{-1}.$$

   - *Si* g_1 *y* g_2 *son dos elementos del conjunto* G*, para toda vecindad* $\mathcal{W}$ *del elemento* $g_1 g_2^{-1}$ *existen vecindades* $\mathcal{U}$ *y* $\mathcal{V}$ *de los elementos* g_1 *y* g_2 *respectivamente tales que* $\mathcal{U}\mathcal{V}^{-1} \subset \mathcal{W}$*.*

NOTACIÓN 1.2.3

1. *$\mathbb{R}$ denota al campo de los* ***números reales.***

2. *$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ tal que $i^2 = -1$, denota el campo de los* ***números complejos****, nótese que $\mathbb{C}$ es isomorfo como espacio vectorial real a $\mathbb{R}^2$ por el isomorfismo $a + bi \longmapsto (a, b)$; en general $\mathbb{C}^n$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ por el isomorfismo*

$$(a_1 + b_1 i, ..., a_n + b_n i) \longmapsto (a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n), \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

3. *Al conjunto $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ sujeto a las identidades*

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

se le llaman los ***cuaterniones****. $\mathbb{H}$ es una álgebra sobre los reales que como espacio vectorial real es isomorfo a $\mathbb{R}^4$ por el isomorfismo*

$$(a + bi + cj + dk) \longmapsto (a, b, c, d), \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

4. *$\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ (donde $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$) denota al espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ de las matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{F}$, y que es isomorfo a $\mathbb{F}^{n^2}$ vía el isomorfismo*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}).$$

5. *$GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F}) \mid \det A \neq 0\} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ denota al conjunto de matrices invertibles, el cual es un grupo bajo la multiplicación de matrices que se le conoce como* ***grupo general lineal*** *(en principio esta construcción sólo es válida para los campos conmutativos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, en donde el determinante está bien definido).*

6. *$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ denota la n-esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Se dan a continuación algunos ejemplos importantes de grupos topológicos.

EJEMPLOS 1.2.4

1. *$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ son grupos topológicos abelianos con respecto a la suma y la topología euclidiana.*

2. *Cualquier grupo abstracto es un grupo topológico con respecto a la topología discreta, al cual se le llama* ***grupo discreto****.*

3. *Los conjuntos $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ y $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0\}$ son grupos topológicos con respecto a la multiplicación y la topología euclidiana.*

4. *Si G es cualquier grupo topológico y H es un subgrupo (algebraico), entonces H es un grupo topológico con respecto a la topología de subespacio. En particular $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ subgrupo de $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ subgrupo de $\mathbb{C}^*$ y $\mathbb{S}^3 = \{h \in \mathbb{H} \mid |h| = 1\}$ subgrupo de $\mathbb{H}^*$ son grupos topológicos.*

5. *$GL_n(\mathbb{R})$ tiene la topología inducida por la inclusión en $\mathbb{R}^{n^2}$ y así $GL_n(\mathbb{R})$ es un grupo topológico pues la multiplicación de matrices está dada por las operaciones elementales. Análogamente $GL_n(\mathbb{C})$ tiene la topología inducida por la inclusión en $\mathbb{C}^{n^2}$ ($\mathbb{C}^{n^2} \approx \mathbb{R}^{2n^2}$) y así $GL_n(\mathbb{C})$ es un grupo topológico (la continuidad del producto es evidente, mientras que la continuidad de la inversa se sigue de la continuidad del determinante y de la adjunta clásica).*

Sea G un grupo topológico y sea g_0 un elemento fijo de G. La aplicación constante $g \longmapsto g_0$ y la aplicación identidad $g \longmapsto g$ son aplicaciones de G a G, éstas inducen una aplicación $g \longmapsto (g_0, g)$ de G a $G \times G$. Componiendo esta última con la multiplicación continua $m : G \times G \longrightarrow G$, se obtiene la aplicación $I_{g_0} : G \longrightarrow G$, definida por $I_{g_0}(g) = g_0 g$, llamada **aplicación de traslación izquierda**. Similarmente se construye la **aplicación de traslación derecha** $D_{g_0} : G \longrightarrow G$ definida por $D_{g_0}(g) = g g_0$. Éstas tienen la siguiente propiedad importante.

Proposición 1.2.5 *Las aplicaciones de traslación son homeomorfismos.*

Demostración:
Para toda $g \in G$ se tiene

$$(I_{g_0} \circ I_{g_0^{-1}})(g) = I_{g_0}(I_{g_0^{-1}}(g)) = I_{g_0}(g_0^{-1} g) = g_0(g_0^{-1} g) = g$$

y

$$(I_{g_0^{-1}} \circ I_{g_0})(g) = I_{g_0^{-1}}(I_{g_0}(g)) = I_{g_0^{-1}}(g_0 g) = g_0^{-1}(g_0 g) = g$$

por lo tanto $I_{g_0} \circ I_{g_0^{-1}} = 1_G$ y $I_{g_0^{-1}} \circ I_{g_0} = 1_G$, es decir, la aplicación I_{g_0} es biyectiva. Ahora $I_{g_0^{-1}}$ es continua pues es también composición de aplicaciones. Así I_{g_0} es un homeomorfismo de G en G. Similarmente se demuestra que D_{g_0} es un homeomorfismo de G en G, donde $D_{g_0^{-1}}$ es su inversa. Obsérvese que ni I_{g_0} ni D_{g_0} son isomorfismos de grupos. ■

Como consecuencia de esta Proposición cualquier grupo topológico G es un *espacio homogéneo*, esto es, dados $a, b \in G$ existe un homeomorfismo $G \longrightarrow G$ que manda a en b ($I_{ba^{-1}}$ o bien $D_{a^{-1}b}$). Por ello se usa la traslación para trasladar la información topológica de un punto a otro en cualquier grupo topológico, es decir, las propiedades topológicas de G son las mismas alrededor de cualquiera de sus puntos, entonces basta con enunciar y demostrar sus propiedades locales para un elemento solamente, por ejemplo el elemento e.

NOTACIÓN 1.2.6 *Si $A, B \subseteq G$ y $g \in G$ donde G es un grupo topológico, sean*

1. $Ag = \{ag \mid a \in A\}$ *y* $gA = \{ga \mid a \in A\}$.
2. $AB = \bigcup_{b\in B} Ab = \bigcup_{a\in A} aB$.
3. $A^n = \{a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in A$ *con* $i \in \{1, \ldots, n\}\}$.
4. $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$.

Lema 1.2.7 *Sea G un grupo topológico, $A, B \subseteq G$ y $g \in G$. Se cumplen:*

1. *Si A es abierto, entonces Ag y gA son abiertos.*
2. *Si A es cerrado, entonces Ag y gA son cerrados.*
3. *Si A es abierto, entonces AB y BA son abiertos.*
4. *Si A es abierto, entonces A^{-1} es abierto.*

Demostración:

(1) Sea $A \subseteq G$ un abierto y como $I_g : G \longrightarrow G$ es un homeomorfismo entonces I_g es abierta y así $I_g(A) = gA$ es abierto. Análogamente $D_g(A) = Ag$ es abierto ya que D_g es abierta.

(2) La prueba es similar, tómese A un cerrado en G, $I_g, D_g : G \longrightarrow G$ son aplicaciones cerradas por que son homeomorfismos y así $I_g(A) = gA$ y $D_g(A) = Ag$ son cerrados.

(3) Ahora $AB = \bigcup_{b\in B} Ab$ como A es abierto entonces Ab es abierto para todo $b \in B$ y así AB es abierto, ya que es unión arbitraria de abiertos, análogamente $BA = \bigcup_{b\in B} bA$ es abierto ya que es unión arbitraria de abiertos.
(4) La aplicación $\iota : G \longrightarrow G$ definida por $\iota(g) = g^{-1}$ de hecho es un homeomorfismo con inversa ella misma, de aquí que si A es abierto entonces $\iota(A) = A^{-1}$ es abierto. ■

Proposición 1.2.8 *Sea G un grupo topológico, H un subgrupo de G y $e \in \overset{\circ}{H}$, donde $\overset{\circ}{H}$ denota el interior topológico de H. Entonces H es abierto y cerrado en G.*

Demostración:
Primero se demuestra que H es abierto, es decir, $H = \overset{\circ}{H}$. Tómese $h \in H$ y ya que por hipótesis tenemos $e \in \overset{\circ}{H}$, existe un abierto U de G tal que $e \in U \subseteq H$, por otro lado la aplicación de traslación izquierda es un homeomorfismo y por lo tanto es abierta; en consecuencia, como U es abierto en G, se tiene que $I_h(U) = hU$ es abierto y nótese además que $h \in hU$ pues $e \in U$. Por lo tanto, para todo $h \in H$ existe un abierto hU tal que $h \in hU \subseteq H$ es decir, $h \in \overset{\circ}{H}$, por lo tanto H es abierto. Ahora si H es abierto entonces gH es abierto para toda $g \in G$ y por lo tanto $\bigcup_{gH\neq eH} gH$ es un abierto, pues es una unión arbitraria de abiertos, pero $G - eH = \bigcup_{gH\neq eH} gH$, por lo tanto $eH = H$ es cerrado. ■

DEFINICIÓN 1.2.9 *Un **homomorfismo entre grupos topológicos** $f : G \longrightarrow G'$ es una aplicación continua que a la vez es un homomorfismo de grupos. La función f es un **isomorfismo de grupos topológicos** si f es un isomorfismo de grupos y tanto f como f^{-1} son aplicaciones.*

Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G, defínase $G/H = \{Hg \mid g \in G\}$ el conjunto de las clases laterales derechas de H y la función $q : G \longrightarrow G/H$ definida por $g \longmapsto Hg$ que se llama **proyección canónica**. Dótese a G/H con la topología cociente bajo q, a continuación se verá bajo qué condiciones G/H es un grupo topológico.

Proposición 1.2.10 *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G.*

1. *Si H es normal en G, entonces el cociente G/H es un grupo topológico y $q : G \longrightarrow G/H$ es un homomorfismo de grupos topológicos.*

2. *La proyección canónica $q : G \longrightarrow G/H$ es una aplicación abierta.*

Demostración:
Se verá primeramente que $q : G \longrightarrow G/H$ es abierta (lo cual resulta ser independiente de la normalidad de H). En efecto, basta ver que para $U \subseteq G$ abierto, el conjunto $q^{-1}(q(U))$ también es abierto, lo cual es consecuencia de la siguiente serie de igualdades:

$$\begin{aligned} q^{-1}(q(U)) &= \{g \in G \mid q(g) = q(u) \text{ para algún } u \in U\} \\ &= \bigcup\nolimits_{u \in U} \{g \in G \mid q(g) = q(u)\} \\ &= \bigcup\nolimits_{u \in U} \{g \in G \mid Hg = Hu\} \\ &= \bigcup\nolimits_{u \in U} Hu = HU = \bigcup\nolimits_{h \in H} hU. \end{aligned}$$

Ahora, suponiendo que H es normal, para ver que la inversa $G/H \xrightarrow{\bar{\iota}} G/H$ es continua obsérvese que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "q"'] & G \arrow[d, "q"] \\ G/H \arrow[r, "\bar{\iota}"] & G/H \end{tikzcd}$$

Así que dado que q es una identificación, la continuidad de $q \circ \iota$ implica la de $\bar{\iota}$. Similarmente, en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "q \times q"'] & G \arrow[d, "q"] \\ G/H \times G/H \arrow[r, "\overline{m}"] & G/H \end{tikzcd}$$

tenemos que $q \times q$ es abierta (al ser producto de funciones abiertas) y por lo tanto es una identificación. De este modo, al igual que en el caso anterior, la continuidad de $\overline{m}$ se sigue de la continuidad de $q \circ m$. Solo falta ver que G/H es de Hausdorff. Se demostrará primero que G/H es T_1; en efecto, como D_g es un homeomorfismo entonces D_g es una función cerrada, puesto que H es un

cerrado en G, en consecuencia $D_g(H) = Hg = q^{-1}(q(g))$ es cerrado, así todo punto $q(g)$ de G/H es cerrado. Por ello se concluye que G/H es T_1. De hecho con las hipótesis dadas G/H resulta ser regular.
Denótese por $e_{G/H}$ al elemento $He = H$ en G/H y sea F un cerrado en G/H tal que $e_{G/H} \notin F$. Se demostrará que existen abiertos ajenos que separan a $e_{G/H}$ y F (ésto concluirá la demostración en vista de la homogeneidad de G/H, es decir, en vista de que las propias traslaciones derechas $D_g : G \to G$ pasan al cociente para definir homeomorfismos $\overline{D}_g : G/H \to G/H$).
Puesto que F es cerrado en G/H entonces $q^{-1}(F)$ es cerrado en G pues q es continua y nótese que $e \notin q^{-1}(F)$, de lo contrario $e_{G/H} = q(e) \in F$ que es una contradicción debido a la construcción. En consecuencia existe U abierto en G tal que

$$e \in U \quad \text{y} \quad U \cap q^{-1}(F) = \phi \tag{1.1}$$

por la Observación 1.2.2 existe un abierto W de G tal que

$$e \in W \subseteq U \quad \text{y} \quad WW^{-1} \subseteq U.$$

Considérense los conjuntos $A = HW$ y $B = q^{-1}(F)W$, enseguida se verá que $q(A)$ y $q(B)$ son los abiertos ajenos que separan a $e_{G/H}$ y a F. Tal demostración se realiza en seis partes.

1. Los conjuntos A y B son abiertos (en vista del Lema 1.2.7(3)).

2. El conjunto $q^{-1}(q(A)) = A$ y el conjunto $q^{-1}(q(B)) = B$, es decir son saturados.

   Si $g \in q^{-1}(q(A)) \Rightarrow q(g) = q(a)$ para algún $a \in A = HW$

   $\Rightarrow Hg = Ha$ donde $a = hw$ para algún $h \in H$ y $w \in W$

   $\Rightarrow Hg = H(hw) = Hw$ y nótese que $g \in Hg$

   $\Rightarrow g \in Hw \subseteq HW$

   por lo tanto $q^{-1}(q(A)) \subseteq A$ y como siempre se tiene que $A \subseteq q^{-1}(q(A))$ por ello se tiene la igualdad.

   Si $g \in q^{-1}(q(B)) \Rightarrow q(g) = q(b)$ para algún $b \in B = q^{-1}(F)W$

   $\Rightarrow Hg = Hb$ donde $b = yw$ para $q(y) \in F$ y $w \in W$

$$\Rightarrow \quad Hg = Hyw \quad \text{nótese que} \quad g \in Hg \text{ por lo que}$$

$g \in Hyw$,

$$\Rightarrow \; gw^{-1} = hy \text{ para algún } h \in H$$

$$\Rightarrow \; q(gw^{-1}) = q(hy) = H(hy) = Hy = q(y) \in F$$

$$\Rightarrow \; gw^{-1} \in q^{-1}(F) \quad \text{es decir} \quad g \in q^{-1}(F)W = B$$

entonces $q^{-1}(q(B)) \subseteq B$ y siempre se da que $B \subseteq q^{-1}(q(B))$ por lo tanto se tiene la igualdad.

3. Los conjuntos $q(A)$ y $q(B)$ son abiertos (en vista de la parte (1) anterior y la Proposición 1.2.10(2)).

4. El elemento $e_{G/H} \in q(A)$.

   Ya que $e \in H \cap W$ entonces $e \in HW = A$ y así $q(e) = e_{G/H} \in q(A)$.

5. El conjunto F esta contenido en $q(B)$.

   Como $e \in W$ entonces $q^{-1}(F) \subseteq q^{-1}(F)W = B$ y así $F = q(q^{-1}(F)) \subseteq q(B)$ (nótese que la última igualdad se da puesto que q es suprayectiva).

6. Se tiene la igualdad $q(A) \cap q(B) = \phi$.

   Supóngase que existe un $x \in q(A) \cap q(B)$; entonces $x = q(a) = Ha$ para algún $a \in A = HW$, es decir, $a = hw$ para algún $h \in H$ y algún $w \in W$, por otro lado también se tiene que $x = q(b) = Hb$ para algún $b \in B = q^{-1}(F)W$, es decir, $b = yw_1$ para algún $y \in q^{-1}(F)$ y algún $w_1 \in W$; así $H(hw) = x = H(yw_1)$ que equivale a tener $Hw = Hyw_1$ entonces $yw_1 = h_1 w$ para algún $h_1 \in H$; entonces $h_1^{-1}y = ww_1^{-1} \in WW^{-1} \subseteq U$ y ciertamente $h_1^{-1}y \in Hq^{-1}(F)$, pero $Hq^{-1}(F)$ es la saturación de $q^{-1}(F)$ misma que coincide con $q^{-1}(F)$ en vista de la parte (2) arriba, por lo tanto $h_1^{-1}y \in U$ y $h_1^{-1}y \in q^{-1}(F)$ es decir $U \cap q^{-1}(F) \neq \phi$ que es una contradicción por (1.1). ■

1.3. Variedades

En esta sección se analiza el concepto general de variedad topológica y se indicará el significado de variedad con estructura diferencial.

DEFINICIÓN 1.3.1 *Un espacio topológico de Hausdorff, 2-numerable X es una* ***variedad sin frontera de dimensión*** *n, o una* ***n-variedad,*** *si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad V homeomorfa a un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.*

Sea X una n-variedad. La variedad X se puede cubrir con una colección de abiertos V_λ tales que hay un homeomorfismo $\varphi_\lambda : V_\lambda \longrightarrow U_\lambda \subset \mathbb{R}^n$. A cada pareja $(V_\lambda, \varphi_\lambda)$ se le llama carta de la variedad X. El homeomorfismo φ_λ permite darles coordenadas a los puntos de V_λ, a saber, si $p_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es la proyección en la k-ésima coordenada y $\varphi_\lambda^k = p_k \circ \varphi_\lambda$, entonces para cada punto $x \in V_\lambda$, la n-tupla $(\varphi_\lambda^1(x), \ldots, \varphi_\lambda^n(x))$ asigna coordenadas al punto x. A éstas se les llama **coordenadas locales** de x respecto de la carta $(V_\lambda, \varphi_\lambda)$.
A una colección de cartas $\{(V_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ tales que $\{V_\lambda\}$ es una cubierta de X se le llama **atlas** de la variedad X.
Sea $\mathcal{A}$ un atlas en la variedad X y sean $(V_\lambda, \varphi_\lambda)$ y (V_μ, φ_μ) dos cartas en $\mathcal{A}$; al homeomorfismo

$$\gamma_\mu^\lambda = \varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(V_\mu \cap V_\lambda) \longrightarrow \varphi_\mu(V_\mu \cap V_\lambda)$$

se le llama **cambio de coordenadas.** Estos cambios de coordenadas son homeomorfismos entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ que pueden satisfacer condiciones adicionales.

DEFINICIÓN 1.3.2 *Sea $\mathcal{A}$ un atlas para la variedad X. Si los homeomorfismos γ_μ^λ son diferenciables de clase $\mathcal{C}^r$ ($\mathcal{C}^\infty$, analíticos, holomorfos, etc,), se dice que $\mathcal{A}$ es una* ***estructura*** *$\mathcal{C}^r$ ($\mathcal{C}^\infty$,* ***analítica, holomorfa,*** *etc.) y de la variedad se dice que es de clase $\mathcal{C}^r$ ($\mathcal{C}^\infty$, analítica, holomorfa, etc.). A una variedad de clase $\mathcal{C}^\infty$ también se le llama* ***variedad lisa.***

NOTA 1.3.3 *En el caso de una variedad holomorfa, por ejemplo, se requiere que n sea par, es decir, $n = 2m$ y tómese un homeomorfismo fijo $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{C}^m$, de modo que los cambios de coordenadas son homeomorfismos entre abiertos de $\mathbb{C}^m$ y tiene sentido exigir que sean funciones holomorfas. Si éste es el caso, se dice que X es una* ***m-variedad holomorfa.***

EJEMPLOS 1.3.4

1. *El espacio topológico $\mathbb{R}^n$ es una n-variedad. Si se elige como un atlas de $\mathbb{R}^n$ al que tiene como cartas la colección de todos los abiertos, junto con la identidad de cada uno de ellos, éste determina una estructura analítica*

en $\mathbb{R}^n$ (por lo tanto, de clase C^r, $r \leq \infty$). Más generalmente, cualquier abierto en $\mathbb{R}^n$ es una variedad con cualquiera de las estructuras.

2. *El espacio topológico $\mathbb{C}^m$ es una m-variedad. Si se elige como un atlas al que tiene como cartas a la colección de todos los abiertos, junto con la identidad de cada uno de ellos, entonces $\mathbb{C}^m$ es una m-variedad holomorfa.*

3. *Recuérdese la proyección estereográfica*

$$p : \mathbb{S}^n - N \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

donde $N = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tal que, si $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n - N$,

$$p(\vec{x}) = (\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}),$$

que es un homeomorfismo con inverso dado por

$$p(\vec{y}) = (\frac{2y_1}{|\vec{y}|^2 + 1}, \ldots, \frac{2y_n}{|\vec{y}|^2 + 1}, \frac{|\vec{y}|^2 - 1}{|\vec{y}|^2 + 1})$$

si

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

La esfera $\mathbb{S}^n$ es una variedad. Se puede cubrir con dos cartas, a saber $V_1 = \mathbb{S}^n - N$ y $V_2 = \mathbb{S}^n - S$, donde $N = (0, 0, \ldots, 1)$ es el polo norte y $S = (0, 0, \ldots, -1)$ es el polo sur. El homeomorfismo $\varphi_1 : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la proyección estereográfica p definida arriba, y $\varphi_2 = \varphi_1 \circ a$, donde $a : V_2 \longrightarrow V_1$ es la aplicación antípoda tal que $a(x) = -x$. De hecho, con este atlas, $\mathbb{S}^n$ es una variedad lisa.

Considérese el espacio $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ (resp.$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$). En 1.2.3 se notó que se tienen los siguientes homeomorfismos

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}, \qquad \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^{n^2} \approx \mathbb{R}^{2n^2}.$$

Las funciones determinante

$$\det_{\mathbb{R}} : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \det_{\mathbb{C}} : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

son continuas, por lo que los subconjuntos

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R} - 0), \qquad GL_n(\mathbb{C}) = \det_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbb{C} - 0)$$

son abiertos y, por lo tanto, subvariedades de $\mathbb{R}^{n^2}$ y de $\mathbb{R}^{2n^2}$ de dimensiones n^2 y $2n^2$, respectivamente.

Dada una matriz real A (resp. compleja) de $n \times n$, se puede interpretar a sus columnas como vectores $A^i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$. Los vectores $A^1 \ldots A^n$ son linealmente independientes si y sólo si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $A \in GL_n(\mathbb{C})$). Supóngase un poco más; a saber, que estos vectores forman una base ortonormal, es decir, satisfacen las $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaciones $\langle A^i, A^j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, donde $\langle -, - \rangle$ representa el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$ (resp. el producto hermitiano usual en $\mathbb{C}^n$). Ordenándolas adecuadamente, estas ecuaciones (de las cuales, en el caso complejo, n de ellas tienen valores reales, y $\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$, valores complejos) producen aplicaciones

$$\varphi_{\mathbb{R}} : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}, \qquad (\text{resp. } \varphi_{\mathbb{C}} : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2})$$

dadas por $A \longmapsto (\langle A^i, A^j \rangle)$, que de hecho son lisas, y se puede probar que tienen a $\delta \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (resp. $\delta' \in \mathbb{R}^{n^2}$) que es el punto dado por la delta de Kronecker δ_{ij}, $i \leq j = 1, \ldots, n$, como valor regular. Así, $\varphi_{\mathbb{R}}^{-1}(\delta) = O_n$ (resp. $\varphi_{\mathbb{C}}^{-1}(\delta') = U_n$) es una subvariedad de $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. de $GL_n(\mathbb{C})$) de codimensión $\frac{n(n+1)}{2}$ (resp. n^2). Así, dim $O_n = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^2-n^2-n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (resp. dim $U_n = 2n^2 - n^2 = n^2$).

El subconjunto $O_n \subset GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $U_n \subset GL_n(\mathbb{C})$) es, de hecho un subgrupo. Está caracterizado de la siguiente forma: Una matriz $A \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $A \in GL_n(\mathbb{C})$) es tal que $A \in O_n$ (resp. $A \in U_n$) si y sólo si $AA^* = I$, donde A^* es la matriz transpuesta (resp. transpuesta conjugada) de A, e I representa la matriz identidad.

DEFINICIÓN 1.3.5 *El grupo $O_n = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$ se llama* ***grupo de matrices ortogonales*** *de $n \times n$ o n-**grupo ortogonal** y el grupo $U_n = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = I\}$ se llama* ***grupo de matrices unitarias*** *de $n \times n$ o n-**grupo unitario**. El primero es una variedad de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$ y el segundo es una variedad de dimensión n^2).*

DEFINICIÓN 1.3.6 *Un **grupo de Lie** es un grupo topológico G que es variedad,* *tal que la aplicación*

$$\mu : G \times G \longrightarrow G$$

dada por

$$\mu(x, y) \longmapsto xy^{-1},$$

es diferenciable. Se sigue entonces que las traslaciones por la izquierda $I_{g_0} : G \longrightarrow G$, $I_{g_0}(g) = g_0 g$; *y las traslaciones por la derecha* $D_{g_0} : G \longrightarrow G$, $D_{g_0}(g) = g g_0$ *son difeomorfismos.*

Observación 1.3.7 *Los grupos* $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, O_n *y* U_n *son grupos de Lie.*

Demostración:
Por lo anterior, y siguiendo una demostración similar en el caso complejo, se tiene que los grupos arriba mencionados son variedades. Ahora, dado que las multiplicaciones y los determinantes están dadas por suma de productos de elementos en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, según el caso, la correspondiente aplicación μ es lisa. ■

1.4. G-Acciones

Los grupos de transformaciones describen simetrías (continuas) de objetos geométricos. En esta sección se introducen las nociones y notaciones básicas que serán usadas a lo largo del texto.

DEFINICIÓN 1.4.1 *Dado G un grupo topológico y X un espacio topológico. Una acción izquierda de G en X (también, una operación izquierda de G en X) es una aplicación*

$$\rho : G \times X \longrightarrow X$$

tal que

1. $\rho(g, \rho(h, x)) = \rho(gh, x)$ $\forall g, h \in G$, $x \in X$.
2. $\rho(e, x) = x$ $\forall x \in X$, $e \in G$ *la unidad.*

*Un G-**espacio izquierdo** es una pareja* (X, ρ) *que consiste de un espacio X junto con una acción izquierda* ρ *de G en X. Usualmente se denota al G-espacio* (X, ρ) *sólo por X. Es conveniente denotar* $\rho(g, x)$ *por* gx. *Las reglas 1 y 2 de la definición anterior toman la forma* $g(hx) = (gh)x$ *y* $ex = x$.

La traslación izquierda $L_g : X \longrightarrow X$, $x \longmapsto gx$ por g es un homeomorfismo de X con inversa $L_{g^{-1}}$. Esto sigue de las reglas $L_g L_h = L_{gh}$, $L_e = id_X$, las cuales son sólo reformulaciones de 1.4.1.
Considérese la función

$$\eta : G \longrightarrow \text{Homeo}(X)$$
$$g \longmapsto L_g$$

(donde Homeo(X) es el grupo de los homeomorfismos de X en sí mismo) ésta es un homomorfismo de grupos.
La acción es llamada **efectiva** si el núcleo de η es $\{e\}$. Ésta es llamada **trivial** si el núcleo es G. Una acción es llamada **libre** si $gx = x$ siempre implica que $g = e$.
Dado un G-espacio X, $R = \{(x, gx) \mid x \in X, g \in G\}$ es una relación de equivalencia en X. El conjunto de clases de equivalencia $X mod R$ se denota por X/G. La función cociente $q : X \longrightarrow X/G$ es usada para proveer a X/G con la topología cociente. Este espacio es llamado el **espacio de órbitas** del G-espacio X.
La clase de equivalencia de $x \in X$ es llamada la **órbita** Gx alrededor de x. Una acción de G en X es llamada **transitiva** si X consiste de una sola órbita, es decir, si dados $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

Proposición 1.4.2 *Para cada $x \in X$, el conjunto $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ es un subgrupo cerrado de G. Este subgrupo es llamado el* ***grupo de isotropía*** *de x o del G-espacio X en x.*

Demostración:
El elemento $e \in G_x$ ya que $ex = x$. Sean $g, h \in G_x$, $(gh)x = g(hx) = gx = x$, por lo que $gh \in G_x$. Por último, si $gx = x$, multiplicando por g^{-1} del lado izquierdo se tiene $x = g^{-1}gx = g^{-1}x$ por lo que $g^{-1} \in G_x$. Que G_x es cerrado en G es consecuencia de lo siguiente. Sea $h \in G - G_x$, por lo tanto $hx = y \neq x$. Como G es de Hausdorff, existen abiertos U y V de G tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$; como $\mu : G \times G \longrightarrow G$ es continua, existen abiertos A y W de G tales que $h \in A$, $x \in W$ y $AW \subset V$. Sea $g \in A$, $gx \in AW \subset V$, si $gx = x \in U$ entonces $U \cap V \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, por lo que $g \in G - G_x$ y así $h \in A \subset G - G_x$. Se concluye que G_x es cerrado en G. ■
Si H es un subgrupo de G entonces

$$X^H = \{x \in X \mid hx = x \ \forall h \in H\}$$

es llamado el **espacio de puntos fijos** de X bajo H. Los puntos en X^G son llamados **puntos estacionarios** del G-espacio, o **puntos fijos** de la acción de G.

DEFINICIÓN 1.4.3 *Si X es un G-espacio y $Y \subset X$ es un subespacio, Y es **G-invariante** o **G-subespacio** si para toda $g \in G$ y $y \in Y$ la relación $gy \in Y$ vale.*

Proposición 1.4.4 *Sea X un G-espacio y sea $Y \subset X$ G-invariante. Entonces la cerradura topológica $\overline{Y}$ de Y, es G-invariante.*

Demostración:
Como $L_g : X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo se cumple que: $g\overline{Y} = L_g(\overline{Y}) = \overline{L_g(Y)} = \overline{gY} = \overline{Y}$. ■

EJEMPLOS 1.4.5

1. *El grupo aditivo $\mathbb{R}$ actúa sobre el espacio topológico $\mathbb{R}$ a través de $(g, x) \mapsto g + x$; esta acción es libre.*

2. *Sea $G = \mathbb{Z}_2$ el grupo con dos elementos $\{-1, 1\}$ y sea $X = \mathbb{S}^n$. Entonces se tiene una acción de grupo*

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$$

   *tal que $(-1)x = -x$. A esta acción se le llama **acción antípoda** en la n-esfera.*
   *Bajo esta acción, las órbitas de $\mathbb{S}^n$ son las parejas de puntos $\{x, -x\}$ y el cociente $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{RP}^n$, es el **espacio proyectivo real**.*

3. *El grupo $\mathbb{S}^1$ actúa en*

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \mid \sum \|z_i\|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

   *por $(\zeta, (z_0, \dots, z_n)) \mapsto (\zeta z_0, \dots, \zeta z_n)$. Esta acción es libre y el espacio de órbitas es el **espacio proyectivo complejo** $\mathbb{CP}^n$.*

4. *Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión m y sea $G_k(V) = \{W \subset V \mid W$ subespacio lineal y $\dim W = k\}$, donde $\dim W$ es la dimensión compleja de W. Si $\mathrm{Mon}(\mathbb{C}^k, V)$ es el subconjunto de $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k, V)$ de los*

monomorfismos con la topología relativa, $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k, V)$ *tiene la topología de* $\mathbb{C}^{km}$*) se tiene una aplicación suprayectiva*

$$q : \mathrm{Mon}(\mathbb{C}^k, V) \longrightarrow G_k(V)$$

dada por $\alpha \mapsto \alpha(\mathbb{C}^k)$*. Dése a* $G_k(V)$ *la topología cociente. A* $G_k(V)$ *se le llama* ***variedad de Grassmann compleja*** *de k-planos en V. Será de especial interés la variedad de Grassmann de k-planos en* $\mathbb{C}^n$, $G_k(\mathbb{C}^n)$.

Dado $\gamma \in GL_k(\mathbb{C})$*, se tiene que, si* $\alpha \in \mathrm{Mon}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n)$*, entonces* $q(\alpha) = q(\alpha \circ \gamma)$*. Más aún, si* $q(\alpha) = q(\beta)$*, entonces, dada una base* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *de* $\alpha(\mathbb{C}^k) = \beta(\mathbb{C}^k)$*, se define* $\gamma \in GL_k(\mathbb{C})$ *tal que* $\gamma(\beta^{-1}v_i) = \alpha^{-1}v_i$*, por tanto,* $\beta = \alpha \circ \gamma$*. Así, se tiene que la aplicación*

$$\mathrm{Mon}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n) \times GL_k(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Mon}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n)$$

dada por $(\alpha, \gamma) \longmapsto (\alpha \circ \gamma)$ *es una acción de grupo, y el espacio de órbitas*

$$\mathrm{Mon}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n)/GL_k(\mathbb{C}),$$

obtenido de identificar α *con* $\alpha \circ \gamma$*, para* $\alpha \in \mathrm{Mon}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n)$ *y* $\gamma \in GL_k(\mathbb{C})$*, es homeomorfo a* $G_k(\mathbb{C}^n)$.

5. ***Una representación real (compleja)*** *del grupo topológico G en el espacio vectorial real (complejo) V de dimensión finita, es una acción continua* $\varrho : G \times V \longrightarrow V$ *tal que, para cada* $g \in G$*, la traslación izquierda* $L_g : V \longrightarrow V$ *es un operador lineal continuo. También se llama a V o a* (V, ϱ) *un* ***espacio de representación.***
Si $V = \mathbb{R}^n$*, entonces una representación es un homomorfismo continuo* $g \mapsto L_g$ *de G en* $GL_n(\mathbb{R})$*. En particular, se tiene la representación canónica*

$$GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (A, x) \mapsto Ax$$

y similarmente para $GL_n(\mathbb{C})$ *y subgrupos de* $GL_n(\mathbb{R})$ *y* $GL_n(\mathbb{C})$.
El conjunto de puntos fijos V^H *de una representación V es un subespacio lineal porque*

$$V^H = \bigcap_{h \in H} \ker(L_h - id).$$

Si un grupo G actúa en un espacio de representación V por aplicaciones ortogonales (o aplicaciones unitarias) L_g,entonces la esfera unitaria $S(V) = \{v \in V : \langle v, v\rangle = 1\}$ de V es G-invariante y se tiene una acción inducida de G en $S(V)$.

6. *Una representación compleja de $\mathbb{Z}_m$ en $\mathbb{C}^n$ esta dada por*

$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad (k, (z_1, \dots, z_n)) \mapsto (\xi_1^k z_1, \dots, \xi_n^k z_n)$$

donde $\xi_1, \dots, \xi_n$ son m-ésimas raíces de la unidad. Si las ξ_j son m-ésimas raíces primitivas de la unidad, es decir $\xi_j = \exp(2\pi i a_j/m)$ con a_j primo a m, entonces la acción en la esfera unitaria es libre. En este caso, el espacio de órbitas es denotado por

$$L^{2n-1}(m; a_1, \dots, a_n)$$

y es llamado **espacio lente.**

7. *Si un grupo de Lie compacto G actúa en $\mathbb{R}^m$ por aplicaciones ortonormales L_g, y $\|L_g(x)\| = \|x\|$; entonces se denota por M a la pareja $(G, \mathbb{R}^m)$ y se dice que M es un* **G-módulo de dimensión m**. *Obsérvese que para un G-módulo M el homomorfismo continuo $g \mapsto L_g$ de G en $GL_m(\mathbb{R})$, realmente lo es de G en O_m y el conjunto $S(\mathbb{R}^m)$ es G-invariante.*

8. *Sea G un grupo de Lie compacto, y sea M un G-módulo de dimensión m. Se denota por $\mathbb{S}^M$ la* **m-esfera** *obtenida como la compactación por un punto de $M = \mathbb{R}^m$ con la G-acción, extendida al punto al infinito que queda fijo. Es decir*

$$\mu : G \times \mathbb{S}^M \longrightarrow \mathbb{S}^M$$

está dada por

$$\mu(g, x) = \begin{cases} gx, & si\ x \in \mathbb{R}^m, \\ \infty, & si\ x = \infty. \end{cases}$$

Dado un G-espacio X y un punto $x_0 \in X$, el cual es punto fijo, a la pareja (X, x_0) se le llama **G-espacio punteado** y al punto x_0 se le llama **punto base** del G-espacio punteado. Nótese que para un G-módulo M, $(\mathbb{S}^M, \infty)$ es un G-espacio punteado.

DEFINICIÓN 1.4.6 *La **M-suspensión** de un G-espacio punteado (X, x_0) es definida por $\mathbb{S}^M \wedge X$ donde*

$$\mathbb{S}^M \wedge X = \mathbb{S}^M \times X/(\mathbb{S}^M \times \{x_0\} \cup \{\infty\} \times X)$$

con la acción de G en $\mathbb{S}^M \wedge X$ inducida por la acción diagonal en $\mathbb{S}^M \times X$. Denotamos por $\zeta \wedge x$ a la imagen de $(\zeta, x) \in \mathbb{S}^M \times X$ en $\mathbb{S}^M \wedge X$.

NOTACIÓN 1.4.7 $\Sigma_G^M X = \Sigma^M X = \mathbb{S}^M \wedge X$

EJEMPLO 1.4.8 $\Sigma^M \mathbb{S}^N \approx \mathbb{S}^{M \oplus N}$

Demostración:
Considérese la aplicación $f : \mathbb{S}^M \times \mathbb{S}^N \longrightarrow \mathbb{S}^{M \oplus N}$ dada por

$$f(\zeta, \xi) = \begin{cases} (\zeta, \xi), & \text{si } (\zeta, \xi) \in M \oplus N, \\ \infty, & \text{si } \zeta = \infty \\ \infty, & \text{si } \xi = \infty. \end{cases}$$

Tal aplicación es suprayectiva, además como $\mathbb{S}^M \times \mathbb{S}^N$ es compacto y $\mathbb{S}^{M \oplus N}$ es de Hausdorff (porque $M \oplus N$ es localmente compacto), se tiene que f es identificación. Aún más, como $f(\zeta, \infty) = f(\infty, \xi)$, define un homeomorfismo $\widehat{f} : \Sigma^M \mathbb{S}^N \longrightarrow \mathbb{S}^{M \oplus N}$. ■

DEFINICIÓN 1.4.9 *Un G-módulo M es **irreducible** si cada vez que se cumple $M \cong M_1 \oplus M_2$ entonces $M_1 = 0$ ó $M_2 = 0$ equivalentemente $M_1 \cong M$ ó $M_2 \cong M$.*

1.5. Aplicaciones G-equivariantes

DEFINICIÓN 1.5.1 *Supóngase que X y Y son G-espacios. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es llamada **aplicación G-equivariante** o **G-aplicación** si para toda $g \in G$ y $x \in X$ la relación $f(gx) = gf(x)$ vale, y es llamada **G-invariante** si para toda $g \in G$ y $x \in X$ la relación $f(gx) = f(x)$ vale.*

Una G-aplicación $f : X \longrightarrow Y$ induce una aplicación

$$f/G : X/G \longrightarrow Y/G, \quad Gx \mapsto Gf(x).$$

Si $f : X \longrightarrow Y$ es equivariante, entonces, $\forall x \in X$, $G_x \subset G_{f(x)}$. Si la igualdad vale $\forall x \in X$, f es llamada **isovariante**.
Supóngase que $\{X_j \mid j \in J\}$ es una familia de G-espacios. Se define una G-acción en el producto topológico $\prod_{j \in J} X_j$ por

$$(g, (x_j : j \in J)) \mapsto (gx_j : j \in J),$$

la cual es llamada la **acción diagonal**.

DEFINICIÓN 1.5.2 *Dos G-aplicaciones $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ son llamadas **G-homotópicas** si existe una **G-homotopía**, de f_0 a f_1, es decir, una aplicación equivariante*

$$F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

tal que $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$, donde $[0,1]$ tiene la G-acción trivial y $X \times [0,1]$ la acción diagonal. Cada aplicación $f_t : x \mapsto F(x,t)$ es entonces una G-aplicación. Como es usual, se puede mostrar que la relación de ser G-homotópicas es de equivalencia. Se usa el símbolo $[X,Y]^G$ para el conjunto de clases de G-homotopía de G-aplicaciones $X \longrightarrow Y$. Se escribe $f_0 \simeq_G f_1$ si f_0 y f_1 son G-homotópicas. Se denota por $[f]^G \in [X,Y]^G$ a la clase $\{g \mid f \simeq_G g : X \longrightarrow Y\}$.

Análogamente se tiene la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.5.3 *Sea X un G espacio y $A \subset X$ un espacio G-invariante, se dice que (X,A) es una **pareja de G-espacios**. Para (X,A) y (Y,B) parejas de G-espacios, una **G-aplicación de parejas**, denotada por $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ es una G-aplicación $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(A) \subset B$.*

DEFINICIÓN 1.5.4 *Dos G-aplicaciones de parejas $f_0, f_1 : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ son llamadas **G-homotópicas** si existe una **G-homotopía de parejas**, de f_0 a f_1, es decir, una aplicación equivariante*

$$F : (X,A) \times [0,1] \longrightarrow (Y,B)$$

tal que $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$, $F(a,t) \in B$ para todos $a \in A$, $t \in [0,1]$ donde $[0,1]$ tiene la G-acción trivial y $X \times [0,1]$ la acción diagonal. Cada aplicación $f_t : x \mapsto F(x,t)$ es entonces una G-aplicación de parejas. Se usa el símbolo $[X,A;Y,B]^G$ para el conjunto de clases de G-homotopía de G-aplicaciones de parejas $(X,A) \longrightarrow (Y,B)$. Se escribe $f_0 \simeq_G f_1$ si f_0 y f_1 son G-homotópicas.

DEFINICIÓN 1.5.5 *A una G-aplicación de parejas $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, es decir, tal que $f(x_0) = y_0$, se le llama **G-aplicación punteada**; así como a una G-homotopía de parejas $F : (X, x_0) \times [0,1] \longrightarrow (Y, y_0)$, es decir, tal que $F(x_0, t) = y_0$, $t \in [0,1]$ se le llama **G-homotopía punteada**. Se usa el símbolo $[X, Y]_*^G$ para el conjunto de clases de G-homotopía de G-aplicaciones punteadas $(X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$. Se escribe $f_0 \simeq_G f_1$ si f_0 y f_1 son G-homotópicas. Se denota por $[f]^G \in [X, Y]_*^G$ a la clase $\{g \mid f \simeq_G g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)\}$.*

DEFINICIÓN 1.5.6 *Se dice que un G-espacio topológico X es **G-contraíble** si la aplicación identidad $id_X : X \longrightarrow X$ es G-homotópica a la aplicación constante $c_{x_0} : X \longrightarrow X$ tal que $c_{x_0}(x) = x_0 \in X$. Aquí, x_0 debe ser un punto fijo de la acción.*

DEFINICIÓN 1.5.7 *Dos G-espacios X y Y son **G-homotópicamente equivalentes** (o del **mismo tipo de G-homotopía**), en símbolos $X \simeq_G Y$, si existen G-aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ tales que*

$$g \circ f \simeq_G id_X \quad y \quad f \circ g \simeq_G id_Y.$$

*A cada una de tales G-aplicacines f y g se le llama **equivalencia homotópica** y se puede escribir $f : X \simeq_G Y$ o $g : Y \simeq_G X$; cada una de ellas es **G-inverso homotópico** de la otra.*

EJEMPLO 1.5.8 *Si X es un G-espacio contraíble, entonces es G-homotópicamente equivalente a un G-espacio singular (un punto), es decir $X \simeq_G *$, ya que si $id_X \simeq_G c_{x_0}$, entonces las aplicaciones equivariantes $f : X \longrightarrow *$ y $g : * \longrightarrow X$ tales que $g(*) = x_0$ son inversos homotópicos, pues $g \circ f = c_{x_0} \simeq_G id_X$ y $f \circ g = id_*$.*

DEFINICIÓN 1.5.9 *Sea $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ una G-aplicación punteada. Se define*

$$\Sigma^M f : \Sigma^M X \longrightarrow \Sigma^M Y$$

dada por

$$\Sigma^M f(\zeta \wedge x) = id_{\mathbb{S}^M}(\zeta) \wedge f(x).$$

Sea G un grupo topológico y $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real. Para $g_0 \in G$ se definen las funciones $R_{g_0}f$ y $L_{g_0}f$ por $(R_{g_0}f)(g) = f(gg_0)$ y $(L_{g_0}f)(g) = f(g_0^{-1}g)$. Se tiene el siguiente teorema del que se omite la demostración. Ésta puede consultarse en el libro de Pontriagin [7].

Teorema 1.5.10 *Sea G un grupo topológico compacto. Entonces existe una única función real I (llamada la* **integral de Haar***) definida en funciones reales continuas f en G, tal que*

1. $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$.
2. $I(cf) = cI(f)$, *donde* $c \in \mathbb{R}$.
3. *Si* $f(g) \geq 0$ *para todo* $g \in G$, *entonces* $I(f) \geq 0$.
4. $I(1) = 1$.
5. $I(R_{g_0}f) = I(f) = I(L_{g_0}f)$ *para toda* $g_0 \in G$. *Se denota* $I(f) = \int_G f(g)dg$ *o por* $\int f(g)dg$. ■

El siguiente teorema es una versión equivariante del lema de extensión de Tietze, frecuentemente conocido como teorema de extensión de Tietze-Gleason.

Teorema 1.5.11 *Sea G un grupo de Lie compacto que actúa en un espacio normal X y sea $A \subseteq X$ un subespacio cerrado invariante. Sea $\varrho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ una representación de G y sea $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ equivariante; esto es $\varphi(g(a)) = \varrho(g) \cdot \varphi(a)$. Entonces existe una extensión equivariante $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de φ.*

Demostración:
Por el Teorema de extensión de Tietze φ se extiende a una función $\varphi' : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Para producir una extensión equivariante simplemente se define para cada x

$$\psi(x) = \int \varrho(g^{-1})\varphi'(gx)dg$$

donde la integral es la integral de Haar en G aplicada componente a componente. Entonces para $h \in G$ se calcula

$$\begin{aligned}\psi(hx) &= \textstyle\int \varrho(g^{-1})\varphi'(g(hx))dg \\ &= \textstyle\int \varrho(h(gh)^{-1})\varphi'(gh(x))dg \\ &= \textstyle\int \varrho(h)\varrho((gh)^{-1})\varphi'(gh(x))dg\end{aligned}$$

$= \varrho(h)\psi(x)$

por la linealidad y la invariancia de la integral bajo traslaciones derechas (por h). Entonces ψ es equivariante. Más aún, para $a \in A$ se tiene que

$\psi(a) = \int \varrho(g^{-1})\varphi'(g(a))dg$
$= \int \varrho(g^{-1})\varphi(g(a))dg$
$= \int \varphi(a)dg = \varphi(a)\int dg$
$= \varphi(a)$

por la equivariancia de φ y la normalización de la integral. Entonces ψ extiende a φ. Finalmente ψ es continua por 1.5.10. ■

Lema 1.5.12 *Sea X un espacio normal y sea G un grupo de Lie compacto que actúa en X. Sean A y B subespacios cerrados G-invariantes de X tales que $A \cap B = \emptyset$.*
Entonces existe una aplicación de Urysohn G-invariante $\varphi : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $\varphi(x) = 0$ si $x \in A$ y $\varphi(x) = 1$ si $x \in B$.

Demostración:
Sea $\bar{\varphi} : X \longrightarrow [0,1]$ cualquier aplicación de Urysohn relativa a A y B; entonces la aplicación de Urysohn G-invariante requerida esta dada por

$$\varphi(x) = \int \bar{\varphi}(gx)dg$$

donde la integral es la integral de Haar en G. ■
La siguiente proposición es muy útil porque permite construir vecindades G-invariantes.

Proposición 1.5.13 *Sean X y G como en la proposición 1.5.12 y sean $A \subset X$ un conjunto cerrado G-invariante y $U \subset X$ abierto G-invariante tales que $A \subset U$. Entonces existe un subconjunto abierto V G-invariante tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Demostración:
En efecto, sea $\varphi : X \longrightarrow [0,1]$ una aplicación de Urysohn G-invariante tal que $\varphi(x) = 0$ si $x \in A$ y $\varphi(x) = 1$ si $x \in X - U$. Ahora, considérese el conjunto $V = \varphi^{-1}([0, \frac{1}{2}])$. El cual cumple $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Sea $v \in V$ $\therefore$ $\exists x \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $\varphi(v) = x$. Se quiere que $gv \in V$ $\forall g \in G$, pero $\varphi(gv) = \varphi(v) = x$ por ser φ G-invariante; así $gv \in \varphi^{-1}(x) \subset \varphi^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ entonces V es G-invariante. ■

Por último, considérese la siguiente proposición que es de gran utilidad para los capítulos restantes.

Proposición 1.5.14 *Existe un homeomorfismo equivariante canónico entre* $\mathbb{S}^M$ *y* $S(M \oplus \mathbb{R})$ *que envía el punto* $\infty \in \mathbb{S}^M$ *a* $(\vec{0}, 1) \in M \times \mathbb{R}$ *donde* $\mathbb{R}$ *tiene la* G*-acción trivial.*

Demostración:
Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ y considérese la (inversa de la) proyección estereográfica

$$\Pi : \mathbb{S}^M \longrightarrow S(M \oplus \mathbb{R})$$

definida por

$$\vec{x} \longmapsto \Pi(\vec{x}) = \left(\frac{2\vec{x}}{\|\vec{x}\| + 1}, \frac{\|\vec{x}\| - 1}{\|\vec{x}\| + 1} \right), \qquad \infty \longmapsto (0, 1)$$

con inversa

$$\Theta : S(M \oplus \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{S}^M$$

definida por

$$\vec{y} \longmapsto \Theta(\vec{y}) = \left(\frac{y_1}{1 - y_{n+1}}, \ldots, \frac{y_n}{1 - y_{n+1}} \right), \qquad (0, 1) \longmapsto \infty$$

para $\vec{y} \in M \oplus \mathbb{R}$ con $\|\vec{y}\| = 1$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_{n+1})$. Se tiene así que Π es un homeomorfismo, y ya que $\|g\vec{y}\| = \|\vec{y}\|$ para toda $g \in G$ se tiene que Π es G-invariante. ■

Capítulo 2

El grado equivariante.

2.1. Construcción del grado equivariante

En esta sección, se da la definición del grado equivariante, como está dado en [5].
Sea G un grupo de Lie compacto, y sean M y N G-módulos con acciones ortonormales de G, de dimensiones m y n, respectivamente. Para una aplicación equivariante $f : V \longrightarrow M$, donde donde $V \subset N$ es un abierto G-invariante y el conjunto $Z = f^{-1}(0)$ es compacto, las siguientes condiciones valen:

1. Reduciendo V si es necesario, se puede suponer que V es acotado, que f está definida en $\overline{V}$ y que el **conjunto nulo** de f, $Z = f^{-1}(0)$ está contenido en V.

2. Tomando R suficientemente grande tal que $\overline{V} \subset B_R$, donde B_R denota la bola abierta centrada alrededor del origen con radio R en N. (Nótese que B_R es G-invariante ya que G actúa ortonormalmente).

3. Usando el teorema de extensión de Tietze-Gleason 1.5.11, se extiende f a una aplicación $\hat{f} : \overline{B_R} \longrightarrow M$. Denótese por $\widehat{Z}$ el conjunto nulo de $\hat{f}$, $\hat{f}^{-1}(0) = \widehat{Z} = Z \cup Z'$, donde $Z' \subset \overline{B_R} - \overline{V}$.

4. Después, tomando un conjunto abierto V' tal que $\overline{V} \subset V' \subset \overline{V'} \subset B_R$, $\overline{V'} \cap \widehat{Z} = Z$, y usando el lema 1.5.12 se construye una aplicación G-invariante

$\varphi : \overline{B_R} \longrightarrow [0,1]$ tal que $\varphi|_{\overline{B_R}-V'} = 1$ y $\varphi|_{\overline{V}} = 0$.

5. Se define $F : [0,1] \times \overline{B_R} \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ por

$$F(t,x) = (2t + 2\varphi(x) - 1, \widehat{f}(x)).$$

6. Como $F(t,x) = 0$ si y sólo si $t = \frac{1}{2}$ y $x \in Z$, entonces F no tiene ceros en la frontera $\partial([0,1] \times \overline{B_R}) \approx \mathbb{S}^N$ y entonces F determina, por restricción, una aplicación

$$F' : \mathbb{S}^N \longrightarrow (\mathbb{R} \times M) - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^M,$$

donde la segunda aplicación es la retracción usual sobre la esfera unitaria de $\mathbb{R} \times M$, que por la observación 1.5.14 coincide equivariantemente con $\mathbb{S}^M$.

DEFINICIÓN 2.1.1 *La clase de homotopía (**no estable**)* $\deg_G(f) = [F']^G \in [\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^M]^G_*$ *es el **grado equivariante** de f. Donde $[\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^M]^G_*$ denota el conjunto de clases de G-homotopía de G-aplicaciones punteadas de $\mathbb{S}^N$ a $\mathbb{S}^M$, donde cada una de estas esferas tiene a ∞ como punto básico.*

NOTA 2.1.2 *La propiedad de escisión del grado dada en 2.2 (más adelante) garantiza que la definición dada es independiente de la reducción mencionada en 1.*

La figura 2.1 ilustra la construcción.
Obsérvese que a cualquier aplicación f definida como en 2.1.1 le corresponde un elemento $[F']^G \in [\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^M]^G_*$. Lo siguiente es mostrar que esta correspondencia es independiente de las elecciones hechas en la construcción anterior.

Proposición 2.1.3 *La clase de homotopía no depende de:*

1. *la aplicación G-invariante φ,*
2. *la elección de la vecindad G-invariante V' de $\overline{V}$,*
3. *la extensión G-equivariante $\hat{f}$ de f,*
4. *la elección de la bola abierta B_R que contiene a $\overline{V}$.*

Figura 2.1: Construcción

Demostración:
(*1*) Dadas $\varphi_0, \varphi_1 : \overline{B_R} \longrightarrow [0,1]$ dos aplicaciones de Urysohn G-invariantes tales que $\varphi_0|_{\overline{B_R - V'}} = 1$, $\varphi_0|_{\overline{V}} = 0$, $\varphi_1|_{\overline{B_R - V'}} = 1$ y $\varphi_1|_{\overline{V}} = 0$, considérese la aplicación $\varphi_\tau : \overline{B_R} \longrightarrow [0,1]$, $\tau \in [0,1]$ definida por

$$\varphi_\tau(x) = \tau\varphi_1(x) + (1-\tau)\varphi_0(x).$$

Sea $F_\tau : [0,1] \times \overline{B_R} \longrightarrow \mathbb{R} \times M$, $\tau \in [0,1]$, definida por

$$F_\tau(t,x) = (2t + 2\varphi_\tau(x) - 1, \hat{f}(x)).$$

Claramente, $F_\tau(t,x) = 0$ si y sólo si $t = \frac{1}{2}$ y $x \in Z$. Por consiguiente, F_τ no tiene ceros en la frontera.
Más aún,

$$F_\tau(0,x) = \begin{cases} (1, \hat{f}(x)), & \text{si } x \in (\overline{B_R} - \overline{V'}), \\ \neq 0, & \text{si } x \in V' \cap (\overline{B_R} - \overline{V}), \\ (-1, \hat{f}(x)), & \text{si } x \in \overline{V}, \end{cases}$$

$$F_\tau(1,x) = \begin{cases} (3, \hat{f}(x)), & \text{si } x \in (\overline{B_R} - \overline{V'}), \\ \neq 0, & \text{si } x \in V' \cap (\overline{B_R} - \overline{V}), \\ (1, \hat{f}(x)), & \text{si } x \in \overline{V}, \end{cases}$$

para cualquier $\tau \in [0,1]$; de aquí que $H : ([0,1] \times \overline{B_R}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ dada por $H((t,x),\tau) = F_\tau(t,x)$ es una G-homotopía entre F_0 y F_1. Entonces $[F_0]^G = [F_1]^G$; esto es, la clase de G-homotopía de F no depende de la elección de la aplicación de Urysohn.

(*2*) Supóngase primero que existen dos vecindades abiertas invariantes V_0', V_1' de $\overline{V}$ tal que $V_0' \subset V_1' \subset B_R$.

Dadas φ_0, φ_1 las aplicaciones G-invariantes asociadas a V_0', V_1' respectivamente, es decir $\varphi_0|_{\overline{B_R}-V_0'} = 1$, $\varphi_0|_{\overline{V}} = 0$, $\varphi_1|_{\overline{B_R}-V_1'} = 1$ y $\varphi_1|_{\overline{V}} = 0$, considérese la aplicación $\varphi_\tau(x) = \tau\varphi_1(x) + (1-\tau)\varphi_0(x)$, para $x \in \overline{B_R}$, $\tau \in [0,1]$ y la G-homotopía $H : ([0,1] \times \overline{B_R}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ entre F_0 y F_1 dada por

$$H((t,x),\tau) = F_\tau(t,x) = (2t + 2\varphi_\tau(x) - 1, \hat{f}(x)).$$

Esto da inmediatamente que $[F_0]^G = [F_1]^G$. Véase la figura 2.2

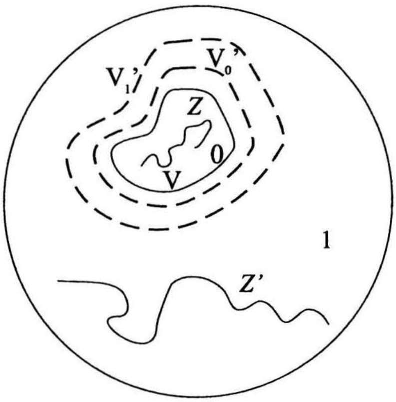

Figura 2.2:

En el caso cuando V_0', V_1' son arbitrarias, se usa el argumento anterior aplicado a $V_0' \cap V_1'$ y a cada V_0' y V_1'.

(*3*) Dadas dos extensiones G-equivariantes $\hat{f}_0$, $\hat{f}_1$ de f se puede elegir una vecindad abierta G-invariante V' de $\overline{V}$ tal que $\overline{V'} \cap \widehat{Z_\tau} = Z$ $\forall \tau \in [0,1]$. Donde $\widehat{Z_\tau} = \hat{f}_\tau^{-1}(0)$ y la aplicación G-equivariante $\hat{f}_\tau$ esta dada por $\hat{f}_\tau(x) = \tau\hat{f}_1(x) +$

$(1-\tau)\hat{f}_0(x)$. Esta vecindad V' existe porque la compacidad de $\bigcup_{\tau\in[0,1]} Z'_\tau$ y la cerradura de V aseguran una distancia positiva; véase la figura 2.3.

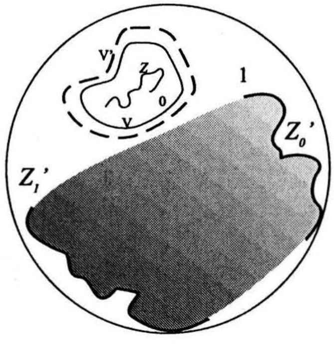

Figura 2.3:

La aplicación $\hat{f}_\tau(x)$ induce una G-homotopía $H((t,x),\tau) = F_\tau(t,x) = (2t + 2\varphi(x)-1, \hat{f}_\tau(x))$ entre F_0 y F_1, ya que no se anula en la frontera ($H((0,x),\tau) = F_\tau(0,x) = (2\varphi(x)-1, \hat{f}_\tau(x))$, $H((1,x),\tau) = F_\tau(1,x) = (1+2\varphi(x), \hat{f}_\tau(x))$), y la afirmación se sigue.

(*4*) Dada $B_{R_0} \subset B_R$, $0 \leq R_0 \leq R$, tal que $V \subset B_{R_0}$. Sean $\hat{f}_0$ y $\hat{f}$ dos extensiones de f a $\overline{B_{R_0}}$ y $\overline{B_R}$ respectivamente. Por (*2*) y por (*3*) se puede suponer que existe una vecindad abierta G-invariante V' de $\overline{V}$ tal que $\overline{V'} \cap \widehat{Z_0} = Z = \overline{V'} \cap \widehat{Z}$ donde $\widehat{Z}_0 = \hat{f}_0^{-1}(0)$ y $\widehat{Z} = \hat{f}^{-1}(0)$, y tal que $\hat{f}|_{\overline{B_{R_0}}} = \hat{f}_0$. Dada $\epsilon > 0$ tal que si $x \in V'$ entonces $\|x\| \leq R_0 - \epsilon$, considérese la G-aplicación $\widehat{h}_\tau : \overline{B_{R_0}} \longrightarrow M$ dada por $\widehat{h}_\tau(x) = \frac{\widehat{f}(\alpha(\tau,x)x)}{\alpha(\tau,x)}$, para cualquier $\tau \in [0,1]$, donde

$$\alpha(\tau,x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \|x\| \leq R_0 - \epsilon, \\ 1 + \tau\frac{(R-R_0)(\|x\|-R_0+\epsilon)}{\epsilon R_0}, & \text{si } R_0 - \epsilon \leq \|x\| \leq R_0. \end{cases}$$

Para cualquier $\tau \in [0,1]$, la aplicación $S_\tau(x) = \alpha(\tau,x)x$ es un homeomorfismo G-equivariante de $\overline{B_{R_0}}$ en $\overline{B_R}$ que deja fijo a $\overline{B_{R_0-\epsilon}}$ y $S_1(\overline{B_{R_0}}) = \overline{B_R}$. De aquí que, $\widehat{h}_\tau$ es una extensión G-equivariante de f a $\overline{B_{R_0}}$ para cualquier $\tau \in [0,1]$. Entonces, por (*3*), como $\widehat{h}_0 = \widehat{f}|_{\overline{B_{R_0}}} = \widehat{f}_0$, la clase de G-homotopía $[F_0]^G$ de F_0 inducida por $\widehat{f}_0$ coincide con la clase $[F_1]^G$, donde F_1 es inducida por $\widehat{h}_1$. Más aún, si se extiende $\widehat{h}_1$ como una constante fuera de $\overline{B_{R_0}}$, se obtiene una extensión G-equivariante $\widehat{h}_1$ de f a $\overline{B_R}$. Entonces, aplicando *(3)* una vez más se tiene que $[F_1]^G = [F]^G$, donde F_1, F son las aplicaciones inducidas por $\widehat{h}_1$ y $\widehat{f}$ respectivamente. (Aquí se identifican, por medio de S_τ, los dos grupos de clases de aplicaciones G-homotópicas definidas en los cilindros $[0,1] \times \overline{B_{R_0}}$ y $[0,1] \times \overline{B_R}$). ■

2.2. Propiedades del grado equivariante

En lo que sigue, para cualquier G-módulo $M = (G, \mathbb{R}^m)$, $\mathbb{S}^{M+1}$ denota la compactación por un punto del G-módulo $M \oplus \mathbb{R}$.

Observación 2.2.1 $\mathbb{S}^M \wedge \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{S}^{M+1}$.■

La siguiente es una lista de las propiedades principales de este grado equivariante:

1. **Propiedad de existencia de ceros**. Si $\deg_G(f) \neq 0$, entonces existe $x \in V$ tal que $f(x) = 0$.
   Demostración:
   Supóngase que $\forall x \in V$ $f(x) \neq 0$, luego el conjunto nulo de f, $Z = f^{-1}(0)$ es vacío; entonces la extensión $\widehat{f}$ de f se anula solamente en $Z' \subseteq B_R - \overline{V}$. Por lo que $F(t,x) = 0 \Leftrightarrow x \in Z'$ y $t = -\frac{1}{2}$. Se concluye que F no se anula en $[0,1] \times \overline{B_R}$ y F' se puede extender a $B^{n+1} \approx [0,1] \times \overline{B_R}$. Así, $\deg_G(f) = [F']^G = 0$. ■

2. **Propiedad de invariancia G-homotópica**. Sea $\{f_\tau : \overline{V} \longrightarrow M\}_{0 \leq \tau \leq 1}$, una familia de aplicaciones G-equivariantes parametrizadas continuamente que cumplen $f_\tau^{-1}(0) \subset V$ para toda $\tau \in [0,1]$. Entonces el grado $\deg_G(f_\tau)$ no depende de $\tau \in [0,1]$. A una tal homotopía f_τ se le llama **homotopía admisible**.
   Demostración:
   Para cada $\tau \in [0,1]$ sea $F_\tau : [0,1] \times \overline{B_R} \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ la extensión de f_τ definida por $F_\tau(t,x) = (2t + 2\varphi_\tau(x) - 1, \widehat{f}_\tau(x))$. Sea $H : ([0,1] \times \overline{B_R}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ dada por $H((t,x),\tau) = F_\tau(t,x)$, la cual es una G-homotopía entre F_0 y F_1. Entonces $[F_0]^G = [F_\tau]^G = [F_1]^G$ $\forall \tau \in [0,1]$.■

3. **Propiedad de escisión**. Sea $f : \overline{V} \longrightarrow M$ equivariante tal que $f(x) \neq 0$ en $\overline{V} - V_0$, donde $V_0 \subset V$ es abierto y G-invariante. Entonces

$$\deg_G(f) = \deg_G(f|_{\overline{V}_0}).$$

Véase la figura 2.4. *Demostración:*

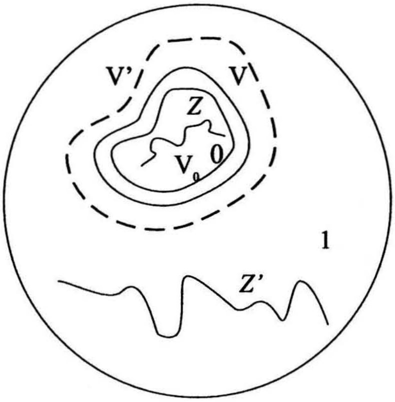

Figura 2.4:

Sea $\widehat{f} : \overline{B_R} \longrightarrow M$ la extensión G-equivariante de f a $\overline{B_R}$, sea V' abierto tal que $\overline{V} \subset V' \subset \overline{V'} \subset B_R$ y $\overline{V'} \cap \widehat{Z} = Z$, y sea $\varphi : \overline{B_R} \longrightarrow [0,1]$ aplicación G-invariante tal que $\varphi|_{\overline{B_R} - V'} = 1$ y $\varphi|_{\overline{V}} = 0$. Entonces $\deg_G(f) = [F']^G$, donde F' está definida como en 2.1.1. Obsérvese que la aplicación $\widehat{f}$ es también una extensión de la restricción $f|_{\overline{V_0}}$, V' cumple con $\overline{V_0} \subset V' \subset \overline{V'} \subset B_R$, y φ es también una aplicación asociada a $f|_{\overline{V_0}}$ tal que $\varphi|_{\overline{B_R} - V'} = 1$ y $\varphi|_{\overline{V_0}} = 0$. Entonces, como $\deg_G(f|_{\overline{V_0}})$ es independiente de la elección de V' y φ, se sigue que $[F']^G = \deg_G(f|_{\overline{V_0}})$. ■

4. **Propiedad de Suspensión**. Sea $f : \overline{B_R} \longrightarrow M$ G-equivariante tal que $f^{-1}(0) \subset B_R$. Entonces

$$\deg_G(f) = \Sigma[f]^G,$$

donde $\Sigma : [\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^M]^G_* \longrightarrow [\mathbb{S}^{N+1}, \mathbb{S}^{M+1}]^G_*$ es el homomorfismo de suspensión dado por $[f]^G \longmapsto [id_{\mathbb{S}^1} \wedge f]^G$.

Demostración:
Para $f : \overline{B_R} \longrightarrow M$, la G-aplicación $\varphi = 0$; por lo que $F(t,x) = (2t-1, f(x))$. Se observa que ésta no se anula en la frontera $\partial([0,1] \times \overline{B_R})$. Entonces $\deg_G(f) = [F|_{\mathbb{S}^N}]^G = [2t-1, f]^G = [id|_{\mathbb{S}^1} \wedge f]^G = \Sigma[f]^G$. ∎

Observación 2.2.2 *Sea $f : \overline{V} \longrightarrow M$ una aplicación G-equivariante tal que $f^{-1}(0) \subset V$ y supóngase que existe una extensión G-equivariante $\widehat{f} : \overline{B_R} \longrightarrow M$ de f a $\overline{B_R} \supset V$ tal que $\widehat{f}^{-1}(0) \subset V$. Entonces considérese la clase de G-homotopía $[\widehat{f}]^G \in [\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^M]^G_*$. En este caso, usando las propiedades de suspensión y escisión se obtiene*

$$\deg_G(f) = \deg_G(\widehat{f}|_{\overline{V}}) = \deg_G(\widehat{f}) = \Sigma[\widehat{f}]^G. \blacksquare$$

Corolario 2.2.3 *Sea $f : \overline{V} \longrightarrow M$ una aplicación G-equivariante tal que $f^{-1}(0) \subset V$, sean $\widehat{f_i} : \overline{B_R} \longrightarrow M$ $V \subset B_R \subset N$ extensiones G-equivariantes de f a $\overline{B_R}$ y sean $g_i : [0,1] \times \overline{B_R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 0,1$ aplicaciones G-invariantes. Supóngase además que las aplicaciones $F_i : [0,1] \times \overline{B_R} \longrightarrow \mathbb{R} \times M$, $i = 0,1$ definidas por $F_i(t,x) = (g_i(t,x), \widehat{f_i}(x))$, $i = 0,1$ son G-homotópicas en $[0,1] \times \overline{V}$ y tal que $F_i(t,x) \neq 0$ para toda $(t,x) \in [0,1] \times (\overline{B_R} - V)$. Entonces $\Sigma[F_0]^G = \Sigma[F_1]^G$.*

Demostración:
Sea $W = (0,1) \times V$. Como $\deg_G(F_0|_{\overline{W}}) = \deg_G(F_1|_{\overline{W}})$ entonces aplicando la observación 2.2.2 a W, F_0 y F_1 respectivamente, tenemos

$$\deg_G(F_i|_{\overline{W}}) = \deg_G(F_i) = \Sigma[F_i]^G,$$

ya que $F_i(t,x) \neq 0$ para toda $(t,x) \in ([0,1] \times \overline{B_R}) - W$. ∎

5. **Propiedad de aditividad**. Sea $f : \overline{V} \longrightarrow M$ G-equivariante tal que $f^{-1}(0) \subset V = V_1 \cup V_2$, donde $V_1, V_2 \subset V$ son abiertos G-invariantes tal que $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \emptyset$. Entonces

$$\Sigma[F]^G = \Sigma[F_1]^G + \Sigma[F_2]^G,$$

donde $[F]^G$, $[F_1]^G$ y $[F_2]^G$ son las clases de homotopía G-equivariantes inducidas por f, $f|_{\overline{V}_1}$, y $f|_{\overline{V}_2}$ respectivamente.

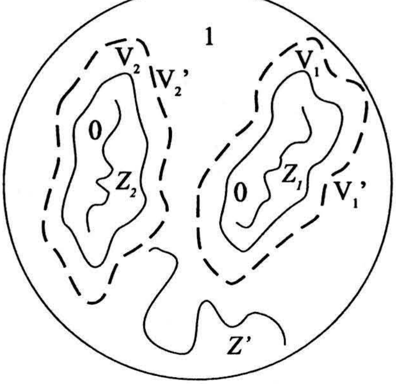

Figura 2.5:

Véase la figura 2.5. *Demostración:*
Sea $[F]^G$ la clase de homotopía G-equivariante inducida por la aplicación $F : [0,1] \times \overline{B_R} \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ definida por $F(t,x) = (2t + 2\varphi(x) - 1, \widehat{f}(x))$. Donde φ es una aplicación G-invariante asociada a V' abierto, acotado G-invariante tal que $\overline{V} \subset V'$ y $V' = V_1' \cup V_2'$ con $\overline{V_1'} \cap \overline{V_2'} = \emptyset$, donde V_1' y V_2' son las correspondienes vecindades G-invariantes de V_1 y V_2 respectivamente. Considérese la siguiente G-homotopía, $\tau \in [0,1]$

$$H'_\tau(t,x) = \begin{cases} (2t + (1 - 2t\tau)(2\varphi(x) - 1), \hat{f}(x)), & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ ((1-\tau)(2t + 2\varphi(x) - 1) + \tau, \hat{f}(x)), & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Obsérvese que en $\tau = 0$ se tiene

$$H'_0(t,x) = \begin{cases} (2t + 2\varphi(x) - 1, \hat{f}(x)) = F(t,x), & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ (2t + 2\varphi(x) - 1, \hat{f}(x)) = F(t,x), & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

En $\tau = 1$, se obtiene que $[F]^G$ es inducida por la aplicación

$$H'_1(t,x) = \begin{cases} (2t + (1 - 2t)(2\varphi(x) - 1), \hat{f}(x)), & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ (1, \hat{f}(x)), & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Nótese que si se cambia la variable t por $1-t$ en la aplicación de arriba, la nueva aplicación que se obtiene induce la clase $-[F]^G$ (la inversa de $[F]^G$). Considérese la aplicación

$$\phi(t,x) = \begin{cases} (2t + (1-2t)(2\varphi(x)-1), \hat{f}(x)), & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ (2(1-t) + (2t-1)(2\varphi_1(x)-1), \hat{f}(x)), & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Esta aplicación induce la clase de homotopía $[F]^G - [F_1]^G$. Ahora considérese la G-homotopía $H_\tau : [0,1] \times \overline{B_R} \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ definida por

$$H_\tau(t,x) = (1, \hat{f}(x)), \text{si } t \in [0,1],\ x \in \overline{B_R} - \overline{V'} \text{ y } \tau \in [0,1],$$

Para $x \in \overline{V_1'}$

$$H_\tau(t,x) = \begin{cases} (2t + (1-2t)(2\varphi_1(x)-1), \hat{f}(x)), & \text{si } 0 \le 2t \le \tau, \\ (\tau + (1-\tau)(2\varphi_1(x)-1), \hat{f}(x)), & \text{si } \tau \le 2t \le 2-\tau, \\ (2(1-t) + (2t-1) + (2\varphi_1(x)-1), \hat{f}(x)), & \text{si } 2-\tau \le 2t \le 2. \end{cases}$$

Para $x \in \overline{V_2'}$

$$H_\tau(t,x) = \begin{cases} (2t + (1-2t)(2\varphi_2(x)-1), \hat{f}(x)), & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ (1, \hat{f}(x)), & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Es fácil verificar que H_τ está bien definida ($\varphi|_{\overline{V_i}} = \varphi_i$) y es continua. Nótese que H_1 coincide con la aplicación definida por 2.1

$$H_1(t,x) = (1, \hat{f}(x)), \text{si } t \in [0,1],\ x \in B_R - \overline{V'},$$

Para $x \in \overline{V_1'}$:

$$H_1(t,x) = \begin{cases} (2t + (1-2t)(2\varphi_1(x)-1), \hat{f}(x)), & \text{si } 0 \le 2t \le 1, \\ (2(1-t) + (2t-1)(2\varphi_1(x)-1), \hat{f}(x)), & \text{si } 1 \le 2t \le 2. \end{cases}$$

Para $x \in \overline{V_2'}$,

$$H_1(t,x) = \begin{cases} (2t + (1-2t)(2\varphi_2(x)-1), \hat{f}(x)), & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ (1, \hat{f}(x)), & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Obsérvese que la restricción de H_0 a $[0,1] \times \overline{V_2'}$ induce la clase $[F_2]^G$.

$$H_0(t,x) = \begin{cases} (1, \hat{f}(x)) & \text{si } t \in [0,1],\ x \in B_R - \overline{V'}, \\ (2\varphi_1(x) - 1, \hat{f}(x)), & \text{si } 0 \le 2t \le 2 \text{ y } x \in \overline{V_1'}. \end{cases}$$

$$H_0(t,x) = \begin{cases} (2t + (1-2t)(2\varphi_1(x) - 1), \hat{f}(x)), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ y } x \in \overline{V_2'}, \\ (1, \hat{f}(x)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{ y } x \in \overline{V_2'}. \end{cases}$$

Entonces la aplicación H_0 puede ser vista como una extensión de F_2, la cual no se anula en $[0,1] \times \overline{B_R} - \overline{V'}$. Por el corolario 2.2.3 se obtiene que $\Sigma([F]^G - [F_1]^G) = \Sigma[F_2]^G$; como Σ es un homomorfismo de grupos, se tiene la afirmación.■

Capítulo 3

El índice de punto fijo equivariante.

3.1. Construcción de Grothendieck

En esta sección se describe una construcción básica, conocida como la construcción de Grothendieck. Ésta asigna un grupo a un semigrupo en una forma universal, y generaliza en algún sentido la construcción de los enteros a partir de los números naturales así como la construcción de los racionales a partir de los enteros.
Se entiende por un **semigrupo** una terna $(A, *, e)$, donde $* : A \times A \longrightarrow A$ es una operación asociativa y e es neutro para $*$.

Proposición 3.1.1 *Si A es cualquier semigrupo abeliano, se le puede asociar un grupo abeliano A', único salvo isomorfismo, y un homomorfismo de semigrupos $\alpha : A \longrightarrow A'$ tal que se tienen las siguientes propiedades universales:*
Si G es cualquier grupo abeliano y $\gamma : A \longrightarrow G$ es cualquier homomorfismo de semigrupos, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\gamma' : A' \longrightarrow G$ este diagrama de semigrupos conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \\ A' \arrow[ur, dashed, "\gamma'"'] & \end{tikzcd}$$

El par (A', α) es llamado la ***construcción de Grothendieck*** *asociada al semigrupo A.*

Demostración:
Se define una relación de equivalencia en $A \times A$ por $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ si existe $c \in A$ tal que $a_1 + b_2 + c = a_2 + b_1 + c$. Entonces sea $A' = A \times A/ \sim$. Si se denota la clase de equivalencia de (a, b) por $\langle a, b\rangle$, entonces la suma en A' esta definda por $\langle a, b\rangle + \langle a', b'\rangle = \langle a + a', b + b'\rangle$, el negativo de $\langle a, b\rangle$ es $\langle b, a\rangle$. Como A es abeliano, claramente A' es un grupo abeliano. Se define $\alpha : A \longrightarrow A'$ por $\alpha(a) = \langle a, 0\rangle$.
Sea $(G, +)$ un grupo abeliano y $\gamma : A \longrightarrow G$ cualquier homomorfismo de semigrupos. Defínase $\gamma' : A' \longrightarrow G$ por: $\langle a, b\rangle \longmapsto \gamma(a) - \gamma(b)$.
Obsérvese que γ' está bien definida. Si $\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle$ entonces existe $c \in A$ tal que $a + b' + c = a' + b + c$, y por lo tanto $\gamma(a + b' + c) = \gamma(a' + b + c)$, que por ser γ homomorfismo de semigrupos se tiene que $\gamma(a) + \gamma(b') + \gamma(c) = \gamma(a') + \gamma(b) + \gamma(c)$; como G es grupo abeliano, (se puede restar) y la igualdad $\gamma(a) - \gamma(b) = \gamma(a') - \gamma(b')$ que por definición es $\gamma'\langle a, b\rangle = \gamma'\langle a', b'\rangle$, por lo que γ' está bien definida.
A continuación se demuestra que γ' es homomorfismo de grupos abelianos. Sean $\langle a, b\rangle, \langle a', b'\rangle \in A'$, entonces

$$\gamma'(\langle a, b\rangle + \langle a', b'\rangle) = \gamma'(\langle a + a', b + b'\rangle) = \gamma(a + a') - \gamma(b + b')$$

que por ser G grupo abeliano y γ homomorfismo de semigrupos las siguientes igualdades valen:

$$\begin{aligned} \gamma(a + a') - \gamma(b + b') &= \gamma(a) + \gamma(a') - \gamma(b) - \gamma(b') \\ &= \gamma(a) - \gamma(b) + \gamma(a') - \gamma(b') \end{aligned}$$

$$= \gamma'(\langle a, b\rangle) + \gamma'(\langle a', b'\rangle).$$

Obsérvese ahora que γ' es único. Supóngase que existe $\gamma'' : A' \longrightarrow G$ homomorfismo de grupos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \\ A' \arrow[ur, "\gamma'"'] & \end{tikzcd}$$

De la conmutatividad de los diagramas tenemos las siguientes igualdades

$$\gamma' \circ \alpha(a) = \gamma'(\langle a, 0\rangle) = \gamma(a) = \gamma''(\langle a, 0\rangle) = \gamma'' \circ \alpha(a).$$

Recordando que el inverso de $\langle 0, b\rangle$ es $\langle b, 0\rangle$, y como γ' y γ'' son homomorfismos de grupos, se tiene que:

$$\begin{aligned} \gamma'(\langle a, b\rangle) &= \gamma'(\langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle) \\ &= \gamma'(\langle a, 0\rangle) + \gamma'(\langle 0, b\rangle) = \gamma'(\langle a, 0\rangle) - \gamma'(\langle b, 0\rangle) \\ &= \gamma''(\langle a, 0\rangle) - \gamma''(\langle b, 0\rangle) = \gamma''(\langle a, 0\rangle) + \gamma''(\langle 0, b\rangle) \\ &= \gamma''(\langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle) = \gamma''(\langle a, b\rangle). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\gamma' = \gamma''$. ■

Abusando de la notación, para cualquier $a \in A$ se usa también a para denotar su imagen $\alpha(a) \in A'$. Claramente se tiene que $\langle a, b\rangle = a - b \in A'$.

Observación 3.1.2 *$a_1 = a_2 \in A'$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $a_1 + a = a_2 + a \in A$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Supóngase que $a_1 = a_2 \in A'$, esto es $\langle a_1, 0\rangle = \langle a_2, 0\rangle$, por lo que existe $a \in A$ tal que $a_1 + 0 + a = a_2 + 0 + a \in A$.

($\Leftarrow$) Supóngase que existe $a \in A$ tal que $a_1 + a = a_2 + a \in A$, por lo tanto $\langle a_1, 0\rangle = \langle a_2, 0\rangle$, es decir $a_1 = a_2 \in A'$. ■

Proposición 3.1.3 *$\alpha : A \longrightarrow A'$ es inyectiva si y sólo si la ley de cancelación vale en A.*

Demostración:

($\Leftarrow$) Supóngase $\alpha : A \longrightarrow A'$ inyectiva. Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 + a = a_2 + a \in A$, por la observación anterior se tiene que $a_1 = a_2 \in A'$, como α es inyectiva, entonces $a_1 = a_2 \in A$. Es decir vale la ley de cancelación en A.

($\Rightarrow$) Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $\alpha(a_1) = \alpha(a_2)$. Por la observación anterior existe $a \in A$ tal que $a_1 + a = a_2 + a \in A$. Como la ley de cancelación vale en A se tiene que $a_1 = a_2$, por lo que α es inyectiva. ■

Considérese ahora el conjunto $\mathcal{M} = \{[M] \mid M \text{ es G-módulo}\}$. Donde $[M]$ es la clase de G-isomorfismo de un G-módulo M. Sean M y N dos G-módulos de dimensiones m y n respectivamente. La suma directa de dos G-módulos $M \oplus N$ es un G-módulo con la acción diagonal y de dimensión $m + n$. Es claro que $\mathcal{M}$ junto con la suma $[M] + [N] = [M \oplus N]$ como operación, es un semigrupo con neutro el espacio 0.

Aplíquese la construcción de Grothendieck al semigrupo $\mathcal{M}$. La relación de equivalencia en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ esta dada por $([M], [N]) \sim ([M'], [N'])$ si existe $[L] \in \mathcal{M}$ tal que $[M] + [N'] + [L] = [M \oplus N' \oplus L] = [M' \oplus N \oplus L] = [M'] + [N] + [L]$. Entonces sea RO($G$)=$\mathcal{M} \times \mathcal{M}/\sim$. Siguiendo la notación de la clase de equivalencia de $([M], [N])$ por $\langle M, N\rangle$, entonces la suma en RO(G) esta definida por $\langle M, N\rangle + \langle M', N'\rangle = \langle M \oplus M', N \oplus N'\rangle$, y el negativo de $\langle M, N\rangle$ es $\langle N, M\rangle$. El homomorfismo de semigrupos $\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow$RO($G$) manda la clase de un G-módulo M en $\langle M, 0\rangle$, entonces $\langle M, N\rangle = \langle M, 0\rangle - \langle N, 0\rangle$. Denótese a $\langle M, 0\rangle = \langle M\rangle$, se tiene que $\langle M, N\rangle = \langle M\rangle - \langle N\rangle \in$RO($G$).

NOTACIÓN 3.1.4 *Para $\rho \in RO(G)$, denotamos por $\rho + 1$ a $\langle M, N\rangle + \langle \mathbb{R}, 0\rangle$, y por $\rho - 1$ a $\langle M, N\rangle + \langle 0, \mathbb{R}\rangle$.*

3.2. RO-Homología

DEFINICIÓN 3.2.1 *Dado un grupo de Lie compacto G, sea $G - \mathcal{T}op_2$ la categoría de parejas (X, A) de G-espacios topológicos y G-aplicaciones de parejas $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$. Más aún, sea $\mathcal{A}$ la categoría de grupos abelianos y homomorfismos. Una* RO(G) *teoría de G-homología graduada es una colección de funtores covariantes*

$$h_\rho^G = h_\rho : G - \mathcal{T}op_2 \longrightarrow \mathcal{A}$$

y transformaciones naturales

$$\partial_\rho : h_{\rho+1} \longrightarrow h_\rho \circ T$$

para $\rho \in$ RO(G), donde $T : G - \mathcal{T}op_2 \longrightarrow G - \mathcal{T}op_2$ es el funtor que envía la pareja (X, A) a la pareja $(A, \emptyset)$ y la G-aplicación de parejas $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ a $f|_A$, tal que satisface los siguientes axiomas:

1. ***Homotopía.*** *Si* $f_0 \simeq_G f_1 : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ *(una G-homotopía de parejas), entonces*
$$f_{0*} = f_{1*} : h_\rho(X,A) \longrightarrow h_\rho(Y,B)$$
para toda $\rho \in \mathrm{RO}(G)$.

2. ***Escisión.*** *Para cualquier par de G-espacios* (X,A) *y un subconjunto* $U \subset A$ *G-invariante que satisface* $\overline{U} \subset A^\circ$ *y* $(X-U, A-U) \in G-\mathcal{T}op_2$, *la inclusión* $j : (X-U, A-U) \longrightarrow (X,A)$ *induce un isomorfismo*
$$h_\rho(X-U, A-U) \cong h_\rho(X,A)$$
para toda $\rho \in \mathrm{RO}(G)$.

3. ***Exactitud.*** *Para cualquier par de G-espacios* (X,A) *se tiene una sucesión exacta larga*
$$\xrightarrow{j_*} h_{\rho+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_\rho} h_\rho(A) \xrightarrow{i_*} h_\rho(X) \xrightarrow{j_*} h_\rho(X,A) \xrightarrow{\partial_{\rho-1}}$$
donde $i : (A,\emptyset) \hookrightarrow (X,\emptyset)$ *y* $j : (X,\emptyset) \hookrightarrow (X,A)$ *son las inclusiones, y se escribe* $h_\rho(X)$ *en vez de* $h_\rho(X,\emptyset)$.

4. ***Suspensión.*** *Para cualquier G-módulo M irreducible y cualquier G-espacio punteado X existe un isomorfismo natural*
$$\sigma^M : \widetilde{h}_{\rho+\langle M\rangle}(\Sigma^M X) \longrightarrow \widetilde{h}_\rho(X)$$
para cualquier representación M de G y $\widetilde{h}_\rho(X) = h_\rho(X,x_0)$. *Equivalentemente existe un isomorfismo natural*
$$\sigma^M : h_{\rho+\langle M\rangle}((M, M-0) \times (X,A)) \longrightarrow h_\rho(X,A).$$

Proposición 3.2.2 *Sea X un G-espacio entonces* $h_\rho(X,X) = 0$

Demostración:
Como $i = id_X : (X,\emptyset) \longrightarrow (X,\emptyset)$ entonces $i_* = 1_{h_\rho(X)}$ es un isomorfismo y de la sucesión exacta larga se obtiene el resultado. ■

3.3. El Índice de punto fijo equivariante

En esta sección se define el índice de punto fijo equivariante estable, $I^G(\varphi)$, el cual es un elemento del $(N-M)$-grupo de homología $h^G_{N-M}(*)$ donde h^G es alguna RO(G) teoría de homología graduada y $N-M \in \mathrm{RO}(G)$ es el elemento $\langle N\rangle - \langle M\rangle = \langle N, M\rangle \in \mathrm{RO}(G)$ representado por la diferencia virtual de N y M. Sea G un grupo de Lie compacto. Tómese una aplicación equivariante $\varphi : V \longrightarrow K \oplus M'$, donde K, M' y N' son G-módulos, y $V \subset K \oplus N'$ un conjunto abierto G-invariante tal que el conjunto de puntos fijos F =Fix$(\varphi) = \{(\kappa, n) \in V \subset K \oplus N' \mid \varphi(\kappa, n) = (\kappa, 0) \in K \oplus M'\} \subset V$ es compacto. Por lo tanto existe $R > 0$ tal que $F \subset B_R$; sea $C = N - V$, como F es cerrado y V es abierto en N se tiene que $C = \overline{C} \subset A^{\circ} = A = N - F$, por lo cual, la inclusión $(N-C, A-C) \hookrightarrow (N, A)$ es una escisión. Aún más, $(N-C, A-C) = (V, V-F)$. Considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(N, N-B_R) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "(2)"'] & (N, N-F) & (V, V-F) \arrow[l, hook', "(1)"'] \arrow[d, "j-\varphi"] \\
(N, N-0) \arrow[rr, dashed, "i_\varphi"'] & & (M, M-0)
\end{tikzcd}$$

donde $j : V \longrightarrow M$ es tal que $j(\kappa, n) = (\kappa, 0) \in K \oplus M'$, $(\kappa, n) \in V \subset K \oplus N'$. Por lo que $(j-\varphi)(\kappa, n) = (\kappa, 0) - \varphi(\kappa, n) = (0, 0) \in M \iff (\kappa, n) \in F$, es decir $j - \varphi : (V, V-F) \longrightarrow (M, M-0)$ esta bien definida. Análogamente la inclusión $N - B_R \hookrightarrow N - F$ define una inclusión de parejas $\iota(N, N-B_R) \hookrightarrow (N, N-F)$. La inclusión (2) es una equivalencia G-homotópica en el segundo témino de la pareja con inversa G-homotópica $\eta : N - 0 \longrightarrow N - B_R$, dada por

$$\eta(\kappa, n) = \begin{cases} (\kappa, n) & \text{si } \mid (\kappa, n) \mid > R, \\ R\frac{(\kappa, n)}{\mid(\kappa, n)\mid}, & \text{si } \mid (\kappa, n) \mid \leq R. \end{cases}$$

De los axiomas de homotopía y escisión en la definición 3.2.1, se observa que las inclusiones (1) y (2) inducen isomorfismos en homología. Entonces la flecha punteada i_φ induce en homología un homomorfismo

$$(i_\varphi)_* : h^G_{\rho+\langle N\rangle}(N, N-0) \longrightarrow h^G_{\rho+\langle N\rangle}(M, M-0),$$

donde $\rho \in \mathrm{RO}(G)$, el cual, después de desuspender por N y M con los isomorfismos

$$\sigma^N : h^G_{\rho+\langle N\rangle}(N, N-0) \longrightarrow h^G_\rho(*)$$

y

$$\sigma^M : h^G_{\rho+\langle N\rangle}(M, M-0) \longrightarrow h^G_{\rho+\langle N\rangle-\langle M\rangle}(*),$$

determina un homomorfismo $I^G_\varphi : h^G_\rho(*) \longrightarrow h^G_{\rho+\langle N\rangle-\langle M\rangle}(*)$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} h^G_{\rho+\langle N\rangle}(N, N-0) \arrow[r, "(i_\varphi)_*"] \arrow[d, "\sigma^N"] & h^G_{\rho+\langle N\rangle}(M, M-0) \arrow[d, "\sigma^M"] \\ h^G_\rho(*) \arrow[r, "I^G_\varphi"] & h^G_{\rho+\langle N\rangle-\langle M\rangle}(*) \end{tikzcd}$$

y, tomando la imagen del elemento $1 \in h^G_0(*)$, también un elemento $I^G(\varphi) = I^G_\varphi(1) \in h^G_{\langle N\rangle-\langle M\rangle}(*)$.

DEFINICIÓN 3.3.1 *Al homomorfismo de grupos I^G_φ se le llama **homomorfismo índice** de φ y al elemento $I^G(\varphi)$ **índice (de punto fijo)** de φ.*

Particularmente interesante es el caso donde h^G_* es la homotopía estable equivariante π^G_{st}. Donde $\widetilde{\pi}^G_{st\langle N\rangle}(X) = \{\mathbb{S}^N, X\}^G = \mathrm{colim}_K[\mathbb{S}^{N\oplus K}, \Sigma^K X]^G$, y K varía sobre un conjunto cofinal de G-módulos. $\pi^G_{st\langle N\rangle}(X, A) = \widetilde{\pi}^G_{st\langle N\rangle}(X \cup CA)$, donde CA es el cono de A. Entonces el índice $I^G(\varphi)$ es un elemento **estable** en

$$\pi^G_{st\langle N\rangle-\langle M\rangle}(*) = \{\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^M\}^G = \mathrm{colim}_K[\mathbb{S}^{N\oplus K}, \mathbb{S}^{M\oplus K}]^G.$$

3.4. Propiedades del índice

La siguiente es una lista de las propiedades principales de este índice de punto fijo equivariante:

1. **Propiedad de existencia de puntos fijos**. Si $I^G(\varphi) \neq 0$, entonces existe $(\kappa, n) \in V \subset K \oplus N'$ tal que $\varphi(\kappa, n) = (\kappa, 0)$, es decir, $F = \mathrm{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$.
   Demostración:

Supóngase que $\forall(\kappa, n) \in V\ \varphi(\kappa, n) \neq (\kappa, 0) \in K \oplus M'$, luego el conjunto de puntos fijos de φ, $\mathrm{Fix}(\varphi)$ es vacío, así $N - F = N$ y considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(N,N) & & (V,V) \arrow[ll, hook'] \arrow[d, "j-\varphi"'] \\
(N,N-0) \arrow[u, hook] \arrow[rr, dashed, "i_\varphi"'] & & (M,M-0)
\end{tikzcd}$$

al pasarlo a homología se tiene

$$\begin{tikzcd}
0 = h_\rho(N,N) \arrow[rr, equal] & & h_\rho(V,V) = 0 \arrow[d, "0_*"'] \\
h_\rho(N,N-0) \arrow[u] \arrow[rr, "(i_\varphi)_*"] & & h_\rho(M,M-0)
\end{tikzcd}$$

es decir, el homomorfismo índice factoriza a través del grupo trivial, por lo que $(i_\varphi)_* = 0_*$, y como consecuencia I_φ^G es el homomorfismo cero, luego entonces $I^G(\varphi) = 0$.■

2. **Propiedad de escisión**. Sea $W \subset K \oplus N'$ abierto G-invariante tal que $\mathrm{Fix}(\varphi) \subset W \subset V$, entonces $I^G(\varphi) = I^G(\varphi|_W)$.
Demostración:
Considérese el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(V,V-F) \arrow[dr, "j-\varphi"] & \\
(W,W-F) \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \arrow[r, "(j-\varphi)|_W"] & (M,M-0) \\
(N,N-F) & \\
(N,N-B_R) \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] & \\
(N,N-0) \arrow[uuur, dashed, "i_\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Al pasarlo a homología se tiene

$$
\begin{tikzcd}
h_\rho(V,V-F) \arrow[dr, "(j-\varphi)_*"] & \\
h_\rho(W,W-F) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[r, "((j-\varphi)|_W)_*"] & h_\rho(M,M-0) \\
h_\rho(N,N-F) & \\
h_\rho(N,N-B_R) \arrow[u] \arrow[d, "\cong"'] & \\
h_\rho(N,N-0) \arrow[uuur, "(i_\varphi)_*=(i_{\varphi|_W})_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

donde el isomorfismo en la última flecha de arriba es por la propiedad de escisión de la teoría h, por lo que $I^G(\varphi) = I^G(\varphi|_W)$. ■

3. **Propiedad de aditividad.** Si $V = \cup_{i=1}^m V_i$ con V_i abierto G-invariante para toda i, F_i =Fix$(\varphi|_{V_i})$ es compacto para toda i, y $F_i \cap F_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces $I^G(\varphi) = \sum_{i=1}^m I^G(\varphi|_{V_i})$.
Demostración:
Sea W_j una vecindad abierta G-invariante de F_i tal que $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$ con $W_j \subset V_j$ (esta construcción es posible gracias a la propiedad de Hausdorff y la compacidad de F_i). Considérese el siguiente diagrama

conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\sqcup_{i=1}^{m}(W_i, W_i - F_i) \arrow[dr, "\sqcup(j-\varphi)|_{W_i}"] & \\
(\cup_{i=1}^{m} W_i, \cup_{i=1}^{m} W_i - F) \arrow[u, "id"] \arrow[r, "(j-\varphi)|_{\cup W_i}"] \arrow[d, hook] & (M, M-0) \\
(N, N-F) & \\
(N, N-B_R) \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] & \\
(N, N-0) \arrow[uuur, dashed, "i_{\varphi|_{\cup W_i}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Al pasar a homología

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{i=1}^{m} h_\rho(W_i, W_i - F_i) \arrow[dr, "\oplus((j-\varphi)|_{W_i})_*"] & \\
h_\rho(\cup_{i=1}^{m} W_i, (\cup_{i=1}^{m} W_i) - F) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "((j-\varphi)|_{\cup W_i})_*"] \arrow[d, "\cong"'] & h_\rho(M, M-0) \\
h_\rho(N, N-F) & \\
h_\rho(N, N-B_R) \arrow[u] \arrow[d, "\cong"'] & \\
h_\rho(N, N-0) \arrow[uuur, "(i_{\varphi|_{\cup W_i}})_* = (i_{\oplus\varphi|_{W_i}})_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad de escisión, se sabe que $I^G(\varphi) = I^G(\varphi|_{\cup W_i})$, del diagrama se tiene $I^G(\varphi|_{\cup W_i}) = \sum_{i=1}^{m} I^G(\varphi|_{W_i})$, y de nuevo por la propiedad de escisión se tiene $\sum_{i=1}^{m} I^G(\varphi|_{W_i}) = \sum_{i=1}^{m} I^G(\varphi|_{V_i})$; se tiene entonces la igualdad deseada. ■

4. **Propiedad de invariancia homotópica.** Sea $H : V \times [0,1] \longrightarrow M$, con $V \subset (K \oplus N') = N$ abierto G-invariante y $\mathrm{Fix}(H_t)$ compacto para toda $t \in [0,1]$, entonces $I^G(H_0) = I^G(H_1)$. A una tal homotopía se le denomina **admisible.**
   Demostración:
   Las hipótesis permiten hablar de $I^G(H_t)$ para toda $t \in [0,1]$. Se observa que por la propiedad de homotopía de h (3.2.1,1) $(j - H_t)_*$ no depende en realidad de t, pues $j - H_t \simeq j - H_{t'}$ para cualesquiera $t, t' \in [0,1]$. Se tiene así que $I^G(H_0) = I^G(H_1)$. ■

NOTA 3.4.1 *Se puede establecer en forma análoga una proposición de invariancia homotópica más general: Si $H : V \longrightarrow M$ es tal que $V \subset N \times [0,1]$ y $H_t = H|_{V \cap (N \times \{t\})}$ es tal que* $\mathrm{Fix}(H_t)$ *es compacto (homotopía admisible), entonces $I^G(H_0) = I^G(H_1)$.*

Para probarlo se observa que es posible encontrar $W \subset N$ tal que $V \subset W \times [0,1]$, extender H a $W \times [0,1]$ controlando los puntos fijos y aplicar la propiedad anterior de invariancia homotópica, así como la de escisión y aditividad.

Capítulo 4

Comparación del grado con el índice.

4.1. Funtor de homotopía reducida graduado

DEFINICIÓN 4.1.1 *Dado un grupo de Lie compacto G, considérese $G - \mathcal{T}op_2$. Un **funtor de G-homotopía reducida graduado** con una sucesión natural para parejas de espacios, es un funtor covariante*

$$k_\rho^G = k_\rho : G - \mathcal{T}op_2 \longrightarrow \mathcal{A}$$

que consta de transformaciones naturales

$$\partial_\rho : k_{\rho+1} \longrightarrow k_\rho \circ T$$

para $\rho \in R \subset \mathrm{RO}(G)$, R algún subsemigrupo de $\mathrm{RO}(G)$, $R = \{\langle N \rangle \mid N$ es $G-$módulo$\}$, donde $T : G - \mathcal{T}op_2 \longrightarrow G - \mathcal{T}op_2$ es el funtor que envía la pareja (X, A) a la pareja $(A, \emptyset)$ y la G-aplicación de parejas $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ a $f|_A$, tal que satisfacen los siguientes axiomas:

1. ***Homotopía**. Si $f_0 \simeq_G f_1 : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ (una G-homotopía de parejas), entonces*

   $$f_{0*} = f_{1*} : k_\rho(X, A) \longrightarrow k_\rho(Y, B)$$

   para toda $\rho \in R$.

2. ***Exactitud.*** *Para cualquier par de G-espacios (X, A) se tiene una sucesión exacta larga*

$$\xrightarrow{j_*} k_{\rho+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_\rho} k_\rho(A) \xrightarrow{i_*} k_\rho(X) \xrightarrow{j_*} k_\rho(X,A) \xrightarrow{\partial_{\rho-1}}$$

donde $i : (A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset)$ y $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ son las inclusiones, y se escribe $k_\rho(X)$ en vez de $k_\rho(X, \emptyset)$.

Los grupos de homotopía equivariante π_*^G, o cualquier homología reducida equivariante $\widetilde{h}_*^G$ son ejemplos de este tipo de funtores. Ver [1] (3.4.6) página 83.

Observación 4.1.2 *Si X es un G-espacio contraíble entonces $h_\rho(X) = 0$.*

4.2. Comparación del grado con el índice

Recuérdese la definición 2.1.1, donde G es un grupo de Lie compacto, M y N G-módulos con acciones lineales ortonormales de G, de dimensiones m y n, respectivamente, $f : V \longrightarrow M$ una aplicación equivariante, $V \subset N$ es un abierto G-invariante cuyo conjunto nulo $Z = f^{-1}(0)$ es compacto, se tiene el grado $\deg_G(f)$ como la clase de homotopía equivariante de una aplicación $F' : \mathbb{S}^N \longrightarrow \mathbb{S}^M$.

Siguiendo en orden la construcción del grado equivariante en esa definición hasta el punto *4*, considérese el homeomorfismo lineal $\mathbb{D}^1 = [-1, 1] \longrightarrow [0, 1]$, $t \mapsto \frac{t+1}{2}$, para cambiar la aplicación F del punto *5* a una aplicación $\Phi : \mathbb{D}^1 \times B_R \longrightarrow \mathbb{R} \times M$. Entonces

$$\Phi(t, x) = (t + 2\varphi(x), \widehat{f}(x)).$$

Obsérvese que $\Phi(t, x) = 0$ si y sólo si $t = 0$ y $x \in Z$. Se puede extender la aplicación Φ a una aplicación $\widetilde{F} : \mathbb{R} \times N \longrightarrow \mathbb{R} \times M$

$$\widetilde{F}(t,x) = \begin{cases} \Phi(t,x) & \text{si } | t | \leq 1 \text{ y } | x | \leq R \\ \Phi(\frac{t}{|t|}, x) & \text{si } | t | \geq 1 \text{ y } | x | \leq R \\ \Phi(t, R\frac{x}{|x|}) & \text{si } | t | \leq 1 \text{ y } | x | \geq R \\ \Phi(\frac{t}{|t|}, R\frac{x}{|x|}) & \text{si } | t | \geq 1 \text{ y } | x | \geq R \end{cases}$$

El conjunto $\widetilde{Z} = \widetilde{F}^{-1}(0) = \{0\} \times Z$. Por lo que se tiene una aplicación de parejas $\widetilde{F} : (\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \times (N, N - Z) \longrightarrow (\mathbb{R} \times M, (\mathbb{R} \times M) - 0)$. Nótese primero las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \times (N, N - B_R) &= (\mathbb{R} \times N, \mathbb{R} \times (N - B_R) \cup (\mathbb{R} - 0) \times N) \\
&= (\mathbb{R} \times N, \mathbb{R} \times N - (0 \times B_R)), \\
(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \times (N, N - Z) &= (\mathbb{R} \times N, \mathbb{R} \times (N - Z) \cup (\mathbb{R} - 0) \times N) \\
&= (\mathbb{R} \times N, \mathbb{R} \times N - (0 \times Z)), \\
(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \times (M, M - 0) &= (\mathbb{R} \times M, \mathbb{R} \times (M - 0) \cup (\mathbb{R} - 0) \times M) \\
&= (\mathbb{R} \times M, (\mathbb{R} \times M) - 0).
\end{aligned}$$

Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \times (V, V - Z) \arrow[r, "id \times f"] \arrow[d, hook, "\simeq"'] & (\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \times (M, M - 0) \arrow[d, equal] \\
(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \times (N, N - Z) \arrow[r, "\widetilde{F}"] & (\mathbb{R} \times M, (\mathbb{R} \times M) - 0)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Si $(t, x) \in \mathbb{R} \times V$, entonces

$$\widetilde{F}(t, x) = \begin{cases} (t, f(x)) & \text{si } \mid t \mid \leq 1, \\ (\frac{t}{|t|}, f(x)) & \text{si } \mid t \mid \geq 1. \end{cases}$$

Se tiene la aplicación de parejas $d_f : (\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \times (N, N - B_R) \longrightarrow (\mathbb{R} \times M, (\mathbb{R} \times M) - 0)$ definida por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \times (N, N - Z) \arrow[r, "\widetilde{F}"] & (\mathbb{R} \times M, (\mathbb{R} \times M) - 0) \\
(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \times (N, N - B_R) \arrow[u, hook] \arrow[ur, dashed, "d_f"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposición 4.2.1 *La aplicación* $d_f : (\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \times (N, N - B_R) \longrightarrow (\mathbb{R} \times M, (\mathbb{R} \times M) - 0)$ *induce en clases de homotopía el elemento*

$$\deg_G(f) \in [(\mathbb{R} \times N, (\mathbb{R} \times N) - 0); (\mathbb{R} \times M, (\mathbb{R} \times M) - 0)]_G \cong [\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^M]_*^G.$$

Demostración:
Sea k_* cualquier funtor de homotopía reducida graduado con una sucesión exacta natural de parejas de espacios.
Considérese el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & k_\rho((\mathbb{R}\times N)-0) & k_\rho(\mathbb{S}^N) \arrow[l, "\cong"', "(2)"] \arrow[ddd, "d'_f"] \\
k_{\rho+1}(\mathbb{R}\times N, \mathbb{R}\times N-(0\times B_R)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & k_\rho(\mathbb{R}\times N-(0\times B_R)) \arrow[u, "\cong"', "(1)"] \arrow[d] & \\
k_{\rho+1}(\mathbb{R}\times N, \mathbb{R}\times N-(0\times Z)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\widetilde{F}_*"] & k_\rho(\mathbb{R}\times N-(0\times Z)) \arrow[d, "(\widetilde{F}|)_*"] & \\
k_{\rho+1}(\mathbb{R}\times M, (\mathbb{R}\times M)-0) \arrow[r, "\cong"] & k_\rho((\mathbb{R}\times M)-0) & k_\rho(\mathbb{S}^M) \arrow[l, "\cong"', "(3)"]
\end{tikzcd}
$$

donde las flechas horizontales en la parte izquierda están dadas por el morfismo de conexión ∂_ρ, son isomorfismos ya que $\mathbb{R}\times N$ y $\mathbb{R}\times M$ son contraíbles. La flecha (1) es un isomorfismo dado por la equivalencia homotópica canónica. Los isomorfismos (2) y (3) se siguen de las inclusiones de las esferas unitarias $S(N\oplus\mathbb{R})$ y $S(M\oplus\mathbb{R})$ en $(\mathbb{R}\times N)-0$ y $(\mathbb{R}\times M)-0$, respectivamente, que son equivalencias homotópicas equivariantes, y estas esferas son G-homeomorfas a $\mathbb{S}^N$ y $\mathbb{S}^M$, respectivamente, como se vio en la proposición 1.5.14.
En el caso especial de $k_\rho = \pi^G_{\langle N\rangle} = [\mathbb{S}^N, -]^G_*$, el homomorfismo d'_f corresponde a un homomorfismo

$$[\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^N]^G_* \longrightarrow [\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^M]^G_*,$$

que envía $[id_{\mathbb{S}^N}]$ a $\deg_G(f)$ ya que

$$d'_f[id_{\mathbb{S}^N}] = [d_f\circ(id_{\mathbb{S}^N})] = [\widetilde{F}|_{\mathbb{S}^N}] = [\Phi|_{\mathbb{S}^N}] = \deg_G(f). \quad \blacksquare$$

Dado cualquier elemento $[\alpha]\in[\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^M]^G_*$, éste induce un homomorfismo α_* : $\widetilde{h}^G_*(\mathbb{S}^N)\longrightarrow\widetilde{h}^G_*(\mathbb{S}^M)$.

Corolario 4.2.2 *Sean $M = K\oplus M'$ y $N = K\oplus N'$ G-módulos, y sean $f: V\longrightarrow M$, $V\subset N$ tal que $Z = f^{-1}(0)$ es compacto, y $j: V\longrightarrow M$ tal que $j(\kappa, n) = (\kappa, 0)$. Entonces, $1\in h^G_0(*)\cong\widetilde{h}^G_0(\mathbb{S}^0)\cong\widetilde{h}^G_{\langle N\rangle}(\mathbb{S}^N)$, $\deg_G(f)_*(1) =$*

$I^G(j-f) \in \widetilde{h}^G_{\langle N\rangle}(\mathbb{S}^M) \cong \widetilde{h}^G_{\langle N\rangle - \langle M\rangle}(\mathbb{S}^0) \cong h^G_{\langle N\rangle - \langle M\rangle}(*)$. *En particular, si* $\widetilde{h}^G_*$ *es la teoría de homotopía estable equivariante, entonces* $\deg_G(f)_*(1) \in \{\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^M\}_G$ *que es la estabilización de* $\deg_G(f) \in [\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^M]^G_*$, *el cual se le llama* ***grado estable****.*

Demostración:
Considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R},\mathbb{R}-0)\times(V,V-Z) \arrow[r, "id\times f"] \arrow[d, hook, "\simeq"'] & (\mathbb{R},\mathbb{R}-0)\times(M,M-0) \arrow[d, equal] \\
(\mathbb{R},\mathbb{R}-0)\times(N,N-Z) \arrow[r, "\widetilde{F}"] & (\mathbb{R}\times M,(\mathbb{R}\times M)-0) \\
(\mathbb{R},\mathbb{R}-0)\times(N,N-B_R) \arrow[u, hook] \arrow[ur, dashed, "d_f"']
\end{tikzcd}$$

Entonces, al pasar a homología, después de desuspender el producto con $(\mathbb{R},\mathbb{R}-0)$ en la izquierda y tomando $K=0$; se tiene que $j=0$ y $\varphi = j-f$. Se tiene entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
h_\rho(V,V-Z) \arrow[r, "(j-\varphi)_*=f_*"] \arrow[d, hook, "\cong"'] & h_\rho(M,M-0) \\
h_\rho(N,N-Z) & \\
h_\rho(N,N-B_R) \arrow[u, hook] \arrow[d, hook, "\cong"'] & \\
h_\rho(N,N-0) \arrow[uuur, "(i_{j-f})_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo que $F=Z$, es decir, $\mathrm{Fix}(\varphi) = f^{-1}(0)$.

$$\begin{tikzcd}
h^G_{\langle N\rangle}(N,N-0) \arrow[r, "(d_f)_*"] \arrow[d, "\sigma^N"] & h^G_{\langle N\rangle}(M,M-0) \arrow[d, "\sigma^M"] \\
h^G_0(*) \arrow[r, "I^G_{j-f}"] & h^G_{\langle N\rangle-\langle M\rangle}(*)
\end{tikzcd}$$

de aquí que $I^G_{j-f}(1) = I^G(j-f)$. Ahora tomando $k_\rho = \widetilde{h}^G_{\langle N\rangle}$, el homomorfismo d'_f en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & k_\rho((\mathbb{R}\times N)-0) & k_\rho(\mathbb{S}^N) \arrow[l, "\cong"', "(2)"] \arrow[ddd, "d'_f"] \\
k_{\rho+1}(\mathbb{R}\times N, \mathbb{R}\times N-(0\times B_R)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & k_\rho(\mathbb{R}\times N-(0\times B_R)) \arrow[u, "\cong", "(1)"'] \arrow[d] & \\
k_{\rho+1}(\mathbb{R}\times N, \mathbb{R}\times N-(0\times Z)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\widetilde{F}_*"] & k_\rho(\mathbb{R}\times N-(0\times Z)) \arrow[d, "(\widetilde{F}|)_*"] & \\
k_{\rho+1}(\mathbb{R}\times M, (\mathbb{R}\times M)-0) \arrow[r, "\cong"] & k_\rho((\mathbb{R}\times M)-0) & k_\rho(\mathbb{S}^M) \arrow[l, "\cong"', "(3)"]
\end{tikzcd}$$

envía 1 a $I^G(j-f) \in \widetilde{h}^G_{\langle N\rangle}(\mathbb{S}^M) \cong \widetilde{h}^G_{\langle N\rangle-\langle M\rangle}(\mathbb{S}^0) \cong h^G_{\langle N\rangle-\langle M\rangle}(*)$. ■
Tenemos así:

Teorema 4.2.3 *Sean $M = K\oplus M'$ y $N = K\oplus N'$ G-módulos. La estabilización del grado equivariante de una G-aplicación $f : V \longrightarrow M$, $V \subset N$, coincide con el índice de punto fijo equivariante de $j - f : V :\longrightarrow M$.* ■

Bibliografía

[1] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint,* Universitexts, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2002.

[2] G. E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups,* Academic Press, New York and London, 1972.

[3] T. tom Dieck, *Transformations Groups,* Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1987.

[4] A. Dold, *Fixed point index and fixed point theorem for euclidean neighborhood retracts,* Topology **4** (1965), 1-8.

[5] J. Ize, I. Massabó, A. Vignoli, *Degree theory for equivariant maps,* Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), 433-509.

[6] W. Marzantowicz, C. Prieto, *The unstable equivariant fixed point index and the equivariant degree,* por aparecer en J. London Math. Soc., abril 2004.

[7] L. Pontriagin, *Topological Groups,* Princeton Univ. Press, Princeton, New York, 1946.

[8] C. Prieto, *Topología Básica,* Fondo de Cultura Económica, México, 2003.