UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA CORRESPONDENCIA LOCAL DE GABRIEL EN CATEGORIAS DE MODULOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

CARLOS FEDERICO PREISSER MONTAÑO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE RIOS MONTES

2004

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"La correspondencia local de Gabriel en categorias de módulos"

realizado por Carlos Federico Preisser Montaño.

con número de cuenta 9624544-2, quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. José Ríos Montes.	José Ríos M.
Propietario	Dr. Emilio Lluis Riera.	
Propietario	Dr. Francisco Federico Raggi Cárdenas.	
Suplente	Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía.	Hugo G. Rincón M.
Suplente	Dr. Alejandro Alvarado García.	

Consejo Departamental de Matemáticas.

M. en C. José Antonio Gomez Ortega.

A Violeta

Agradecimientos:

A mi Mamá la persona mas maravillosa del mundo por la vida y sus ganas siempre de ser feliz, a mi Papá por su sabiduría y por enseñarme la fascinación por las matemáticas.
A Lili y Ale mis hermanos queridos por su compañía incondicional.
A Violeta por ser el amor de mi vida.
A Pepe por sus magnificas enseñanzas, consejos, tiempo y ratos agradables.
A mis amigos entrañables:Azael, Daniela, Belén, Selene, Abraham, Kenya, Carlos, Claudio, Milton, por nuestro tiempo juntos.
A mis compañeros Miguel, Daniel, Paulina, José, Esteban, Víctor, por su apoyo y compañía.
A Melina por su singular amistad.
A Cruz por estar siempre dispuesto a ayudarme, escucharme y por compartir el gusto por el Álgebra.
A mis sinodales Emilio Lluis por nuestras platicas y por su ayuda siempre oportuna; Francisco Raggi por sus comentarios y enseñanzas; Hugo Rincón por sus clases fascinantes; Alejandro Alvarado por sus valiosos comentarios.

La correspondencia local de Gabriel en categorías de módulos

Carlos Federico Preisser Montaño

Febrero de 2004

Contenido

Introducción

Un resultado clásico de la teoría de anillos conmutativos debido a Matlis [10] es que si R es un anillo neteriano conmutativo, entonces la correspondencia entre el conjunto de clases de isomorfismo de R-módulos inyectivos inescindibles y el conjunto de ideales primos de R que asigna a cada clase el único primo asociado a cualquiera de sus representantes, es una biyección. Esta asignación es conocida en la literatura como la correspondencia local de Gabriel.
Si se suprime la hipótesis de que R sea conmutativo, entonces el resultado deja de ser cierto en general.
En [7], Gabriel prueba que si R es neteriano izquierdo y R satisface la condición $''H''$, entonces la correspondencia es biyectiva.
Un resultado mas fuerte es debido a Krause [8] donde prueba que si R es neteriano izquierdo, entonces R tiene correspondencia local de Gabriel biyectiva si y sólo si R es completamente acotado izquierdo. Posteriormente Beachy [3], obtiene una caracterización de los anillos neterianos izquierdos completamente acotados en términos de teorías de torsión hereditarias.

Resultados muy recientes que caracterizan anillos no necesariamente neterianos ni conmutativos con correspondencia local de Gabriel biyectiva pueden verse en [1],[6].
El presente trabajo esta basado en el artículo "M-injective Modules and

Prime M-ideals"de John A. Beachy publicado en Comunications in Algebra Vol. 30, No. 10,pp. 4649-4676, 2002.

Nuestro marco de referencia será la categoría $\sigma[M]$ asociada a un módulo M en donde cierto tipo de submódulos de M jugaran el papel de ideales del anillo. estos submódulos los llamaremos M-ideales de M.

El teorema principal establece una correspondencia biyectiva entre los módulos inyectivos inescindibles de $\sigma[M]$ y los M-ideales primos para M un módulo neteriano que satisfaga:

(i) La condición H y

(ii) $Hom(M, X) \neq 0$ para todo módulo no cero X en $\sigma[M]$.

En el primer capítulo se define el concepto de anulador en M de una familia arbitraria de módulos $\mathcal{C}$, denotado por $An_M(\mathcal{C})$, para M un R-modulo izquierdo como la intersección de los núcleos de morfismos que van de M a los objetos de la familia. Haciendo una generalización del hecho de que los ideales de un anillo R corresponden a los anuladores en R de módulos izquierdos. se define un M-ideal de M como el anulador en M de una cierta familia de módulos y se probará que este submódulo de M es el anulador en M de una familia de R-módulos contenida en $\sigma[M]$. Se dará una caracterización de los M-ideales en términos de radicales resultando que un submódulo de M es un M-ideal si y sólo si existe un radical de R-Mod que aplicado a M sea el submódulo. Se extenderán propiedades básicas de los ideales como que la intersección de cualquier familia de M-ideales es un M-ideal y que un K-ideal de cualquier M-ideal K es también un M-ideal de M. Se definirá el producto $(N \cdot X)$ de un M-ideal N por cualquier R-módulo X como $An_X(\mathcal{C}_N)$ donde $\mathcal{C}_N$ es una cierta familia de R-módulos relacionada con N y probaremos algunas consecuencias esperadas como que un M-ideal N anula a un modulo X si y sólo si N esta contenido en el anulador en M de X y que el producto de dos M-ideales es un M-ideal contenido en la intersección, además de algunas propiedades técnicas que nos serán útiles en los capítulos siguientes.

El capítulo 2 esta centrado en el concepto de módulo M-primo que se define como un R-modulo X tal que:

(i) $Hom(M.X) \neq 0$ y

(ii) $An_M(X) = An_M(Y)$ para todo submódulo $Y \subseteq X$
tal que $Hom(M.Y) \neq 0$.

Esta es una generalización de los módulos primos (llamados aquí R-primos) estudiados en [5], usando el producto definido en el capítulo 1, caracterizaremos a los módulos M-primos como aquellos módulos X tales que toda vez que un M-ideal N anule a X, entonces esto implica que N anula a todo submódulo $Y \subseteq X$ tal que $M \cdot Y \neq 0$.
Usando este resultado probaremos que para un módulo X,
con $Hom(M, X) \neq 0$, son equivalentes:

(i) X es M-primo.

(ii) $tr^M(X)$ es M-primo.

(iii) $M \cdot X$ es M-primo.

En seguida estudiaremos el caso particular cuando M mismo es M-primo y probaremos que esto ocurre cuando $f(M)$ cogenera a M para todo
$0 \neq f \in End(M)$.

Siguiendo la analogía con la situación en los ideales del anillo, en el tercer capítulo llegamos al concepto de M-ideal primo definiéndolo, usando los conceptos de los capítulos 1 y 2, como el anulador en M de un modulo M-primo.

Probaremos la existencia de M-ideales primos asociados a un módulo X en el caso cuando M es neteriano, así mismo algunas propiedades que extienden las ya conocidas para ideales primos tales como que todo M-ideal máximo es primo o que todo M-ideal primitivo es primo.
Al final del capítulo probaremos que si M es un módulo artiniano finitamente generado y 0 es un M-ideal máximo, entonces M es un modulo semisimple homogéneo (suma directa de un solo tipo de modulo simple).

Ahora volvemos nuestra atención en el capítulo 4 a los módulos de longitud finita y al radical de Jacobson de M. El teorema central de este capítulo establece que que M es de longitud finita si y sólo si todo M-ideal N es finitamente generado y M/N es finitamente cogenerado.

En el capítulo 5 bajo la hipótesis de que M sea casi-proyectivo en $\sigma[M]$ se puede probar que los M-ideales son precisamente los submódulos totalmente invariantes de M, además que si N y K son M-ideales, entonces $N + K$ también.
Usando la hipótesis mas fuerte de que M sea proyectivo en $\sigma[M]$ resulta que el producto definido en el capítulo 1 es asociativo, también una caracterización de los M-ideales primos completamente análoga al caso de los ideales primos del anillo, es decir, un M-ideal P de M es primo si satisface las siguientes condiciones equivalentes:

(i) P es un M-ideal primo.

(ii) $N \cdot K \subseteq P$ implica que $N \subseteq P$ ó $K \subseteq P$ para N y K M-ideales con K M-generado.

(iii) M/P es un módulo M-primo.

Finalmente en el capítulo 6 probaremos que la correspondencia local Gabriel se tiene en $\sigma[M]$ cuando M es neteriano y satisface:

(i) La condición H

(ii) $Hom(M, X) \neq 0$ para todo $0 \neq X \in \sigma[M]$.

Para esto probaremos que cuando M cumple estas hipótesis entonces todo módulo uniforme distinto de cero en $\sigma[M]$ tiene un único M-ideal primo asociado, así que la correspondencia que a cada módulo M-inyectivo inescindible (por lo tanto uniforme) en $\sigma[M]$ le asocia su único M-ideal primo esta bien definida. Usando el teorema de Krull-Schmidt-Azumaya en R-Mod probaremos que la correspondencia es inyectiva. Por ultimo el teorema de Matlis garantiza que si M es neteriano, entonces todo módulo no cero de $\sigma[M]$ contiene un submódulo uniforme y esto nos da la suprayectividad de la correspondencia.

Por ultimo haremos algunas generalizaciones de las propiedades de los submódulos completamente invariantes de módulos neterianos que cumplan la condición H.

En el capítulo A (Apéndice), presentamos algunos resultados relevantes relativos a las categorías del tipo $\sigma[M]$ así como resultados de la teoría general de anillos y módulos empleados en este trabajo.

Capítulo 1

M-ideales

Los ideales bilaterales del anillo R corresponden a los anuladores de R-módulos izquierdos. Para establecer una analogía entre los ideales bilaterales de R y los "M-ideales" de M observamos que para todo $X \in R$-Mod:

$$An_R(X) = \{r \in R \mid rx = 0 \text{ para toda } x \in X\} = \bigcap_{f \in Hom(R,X)} Nuc(f)$$

Mas aun es posible observar lo siguiente:

Observación 1.0.1. Sea $\mathcal{C}$ una clase de R-módulos izquierdos. Entonces:

$$An_R(\mathcal{C}) = \{r \in R \mid rm = 0 \text{ para toda } m \in M \text{ y } M \in \mathcal{C}\} =$$

$$= \bigcap \{Nuc(f) \mid f \in Hom(R, M) \text{ y } M \in \mathcal{C}\}$$

Prueba. Si $r \in An_R(\mathcal{C})$ y $f \in Hom(R, M)$ se tiene que $f(r) = rf(1) = 0$ entonces, $r \in \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(R, M)$ y $M \in \mathcal{C}\}$.
Inversamente si $r \in \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in$ y $M \in \mathcal{C}\}$ y $m \in M$ con $M \in \mathcal{C}$ para el morfismo $f_m : R \longrightarrow M$ dado por $f_m(1) = m$ se tiene $0 = f_m(r) = rm$ por lo tanto $r \in An_R(\mathcal{C})$. $\square$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.0.2. Sean $M \in R$-Mod y $\mathcal{C} \subset R$-Mod cualquier familia de R-módulos izquierdos, definimos el anulador de $\mathcal{C}$ en M como:

$$An_M(\mathcal{C}) = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M, C) \ y \ C \in \mathcal{C}\}$$

$An_M(\mathcal{C})$ también se le conoce como rechazo de $\mathcal{C}$ en M.

Definición 1.0.3. Un submódulo N de M es llamado un M-ideal de M, si existe una clase $\mathcal{C}$ de módulos en $\sigma[M]$ tal que $N = An_M(\mathcal{C})$.

Observación 1.0.4. Un submódulo $N \subseteq M$ es un M-ideal si y sólo si $N = An_M(\mathcal{C})$ para alguna clase $\mathcal{C}$ en R-Mod.

Prueba. Si $N = An_M(\mathcal{C})$ con $\mathcal{C} \subseteq \sigma[M]$ entonces $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod. Inversamente supongamos que $N = An_M(\mathcal{C})$ para alguna clase $\mathcal{C}$ en R-Mod, consideremos $\mathcal{C}' = \{Im(f) \mid f \in Hom(M, C),\ C \in \mathcal{C}\}$, si $x \in An_M(\mathcal{C})$ y $f \in Hom(M, C')$ con C' en $\mathcal{C}'$ entonces $C' = Im(g)$ para alguna $g \in Hom(M, C)$ con C en $\mathcal{C}$

es decir $f : M \longrightarrow Im(g) \subseteq C$, como $x \in An_M(\mathcal{C})$ entonces $f(x) = 0$ por lo tanto $x \in An_M(\mathcal{C}')$. Ahora bien, si $x \in An_M(\mathcal{C}')$ y $f \in Hom(M, C)$ con C en $\mathcal{C}$ se tiene que $Im(f) \in \mathcal{C}'$ entonces $f \in Hom(M, Im(f))$ con $Im(f) \in \mathcal{C}'$ por lo tanto $f(x) = 0$ es decir $x \in An_M(\mathcal{C})$, se sigue entonces que N es un M-ideal ya que $N = An_M(\mathcal{C}) = An_M(\mathcal{C}')$ con $\mathcal{C}' \subseteq \sigma[M]$. □

Ejemplo 1.0.5. Sea $I \subseteq R$ un ideal izquierdo de R. Entonces IM es un M-ideal de M.

Consideremos $\mathcal{C} = \{C \in R - Mod \mid IC = 0\}$, afirmamos entonces que $IM = An_M(\mathcal{C})$. Sean $rm \in IM$ y $f : M \longrightarrow C$ con $C \in \mathcal{C}$. $f(rm) = rf(m) = 0$ ya que $r \in I$ y $f(m) \in C$ por lo tanto $rm \in An_M(\mathcal{C})$. Ahora si $m \in An_M(\mathcal{C})$, para $\pi : M \longrightarrow M/IM$ tenemos $\pi(m) = m + IM = 0$ ya que $M/IM \in \mathcal{C}$ por lo tanto $m \in IM$.

Observación 1.0.6. Sea $M \in R$-Mod, si $\rho \in R$-pr (La reticula de prerradicales asociada a R) es un radical entonces $\rho(M) = An_M(\mathcal{C})$ donde $\mathcal{C} = \mathbb{F}_\rho$.

Prueba. $An_M(\mathcal{C}) = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M, C) \text{ con } C \in \mathcal{C}\}$, sea $f \in Hom(M, C)$ con $C \in \mathcal{C}$, $f(\rho(M)) \subseteq \rho(C) = 0$ ya que $C \in \mathcal{C}$ por lo tanto $\rho(M) \subseteq Nuc(f)$ es decir $\rho(M) \subseteq An_M(\mathcal{C})$.
Por otro lado sea $\pi : M \longrightarrow M/\rho(M)$ la proyección canónica. Como ρ es un radical $M/\rho(M) \in \mathcal{C}$, además $\rho(M) = Nuc(\pi)$ entonces
$An_M(\mathcal{C}) \subseteq Nuc(\pi) = \rho(M)$. □

Como consecuencia, si ρ es un radical entonces
$\rho(M) = \bigcap\{N \subseteq M \mid M/N \in \mathbb{F}_\rho\}$ ya que si $M/N \in \mathbb{F}_\rho$ se sigue que $N = Nuc(\pi)$ con $\pi : M \longrightarrow M/N$ la proyección canónica. Por otro lado si $K = Nuc(f)$ con $f \in Hom(M, C)$ $C \in \mathcal{C}$ entonces $M/K \cong f(M) \subseteq \mathcal{C}$ de donde $\rho(M/K) = \rho(f(M)) \subseteq \rho(C) = 0$ por lo tanto $M/K \in \mathcal{C}$.

Para cada clase $\mathcal{C}$ de R-módulos, el $An_M(\mathcal{C})$ define un prerradical del cual se pueden extraer algunas propiedades que nos ayudaran a caracterizar a los M-ideales.

Definición 1.0.7. Sea $\mathcal{C}$ una clase de R-módulos izquierdos. Definimos el radical cogenerado por $\mathcal{C}$ como $rad_{\mathcal{C}}(M) = An_M(\mathcal{C})$ para todo módulo M si $\mathcal{C}$ consta de un solo elemento K usaremos la notación rad_K

En efecto $rad_{\mathcal{C}}(\_)$ es un radical.

(i) Para todo $M \in R$-Mod, $rad_{\mathcal{C}}(M) = An_M(\mathcal{C}) \subseteq M$.

(ii) Sea $f : M \longrightarrow M'$, basta mostrar que $rad_{\mathcal{C}}(M) \subseteq rad_{\mathcal{C}}(M')$. Si $m \in An_M(\mathcal{C}) = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M, C), C \in \mathcal{C}\}$ y $g : M' \longrightarrow C$ con $C \in \mathcal{C}$. $g(f(m)) = 0$ entonces $f(m) \in An_{M'}(\mathcal{C}) = rad_{\mathcal{C}}(M')$ por lo tanto $rad_{\mathcal{C}}(\_)$ es un prerradical.

(iii) Sea $M \in R$-Mod. $rad_{\mathcal{C}}(M/rad_{\mathcal{C}}(M) = An_{M/rad_{\mathcal{C}}(M)}(\mathcal{C}) = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M/rad_{\mathcal{C}}(M), C)$ con $C \in \mathcal{C}\}$ para $f : M \longrightarrow C$ definimos el morfismo $\bar{f} : M/rad_{\mathcal{C}}(M) \longrightarrow C$ como: $\bar{f}(x + rad_{\mathcal{C}}(M)) = f(x)$,

afirmamos que $\bar{f}$ esta bien definida. Si $x - x' \in rad_{\mathcal{C}}(M)$ entonces $\bar{f}(x - x' + rad_{\mathcal{C}}(M)) = f(x - x') = 0$ ya que $f \in Hom(M, C)$.
Sea $m+rad_{\mathcal{C}}(M) \in \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M/rad_{\mathcal{C}}(M), C)$, $0 = \bar{f}(m+ rad_{\mathcal{C}}(M)) = f(m)$ entonces $m \in Nuc(f)$ de donde $m + rad_{\mathcal{C}}(M) = 0$ por lo tanto $rad_{\mathcal{C}}(M/rad_{\mathcal{C}}(M)) = 0$ lo que prueba que $rad_{\mathcal{C}}$ (_) es un radical.

En términos de la notación de [10], cuando $\mathcal{C}$ consta de un solo elemento K entonces $rad_K($_ $)= w_0^K$.
En general , $rad_{\mathcal{C}}($_ $)= \wedge\{w_0^K \mid K \in \mathcal{C}\}$ La siguiente proposición da una caracterización de los M-ideales.

Proposición 1.0.8. *Sea $N \subseteq M$ un submódulo de M. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) N *es un* M*-ideal.*

(ii) Existe un radical ρ *tal que* $N = \rho(M)$.

(iii) $g(N) = 0$ *para toda* $g \in Hom(M, M/N)$.

(iv) $N = An_M(M/N)$.

Prueba. $(i) \Rightarrow (ii)$: Como N es un M-ideal. existe $\mathcal{C} \subseteq \sigma[M]$ tal que $N = An_M(\mathcal{C}) = rad_{\mathcal{C}}(M)$ con $rad_{\mathcal{C}}($ _ $)$ un radical.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sean $g \in Hom(M, M/N)$ y ρ el radical tal que $\rho(M) = N$. $g(N) = g(\rho(M)) \subseteq \rho(M/N) = \rho(M/\rho(M)) = 0$ ya que ρ es un radical, por lo tanto $g(N) = 0$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Si $f \in Hom(M, M/N)$, como $f(N) = 0$ entonces $N \subseteq Nuc(f)$ por lo tanto $N \subseteq An_M(M/N)$. Ahora bien consideremos $\pi : M \longrightarrow M/N$ la proyección canónica, ya que $N = Nuc(\pi)$ se tiene que $An_M(M/N) \subseteq N$ por lo tanto $An_M(M/N) = N$.
$(iv) \Rightarrow (i)$: Es claro ya que $M/N \in \sigma[M]$. □

Puesto que los M-ideales son imágenes de radicales tenemos:

Observación 1.0.9. La intersección de cualquier familia de M-ideales es un M-ideal.

Prueba. Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de M-ideales entonces, para toda $\alpha \in \Lambda$ existe ρ_α un radical tal que $\rho_\alpha(M) = M_\alpha$, como $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \rho_\alpha$ es un radical, se sigue que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(M_\alpha)$ es un M-ideal.

$\square$

Corolario 1.0.10. Sea $N \subseteq M$ un submódulo de M, son equivalentes:

(i) $g(N) = 0$ para toda $g \in Hom(M, M/N)$.

(ii) El morfismo canónico $\varphi : Hom(M, M/N) \longrightarrow Hom(N, M/N)$ es igual a cero.

Prueba. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sea $g \in Hom(M, M/N)$, como $\varphi(g) = g \circ i$ donde i es la inclusión de N en M, por (i) se tiene que $g \circ i(N) = g(N) = 0$ es decir $\varphi \equiv 0$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Sea $g \in Hom(M, M/N)$, $g(N) = \varphi(g)(N) = 0$. $\square$

Corolario 1.0.11. Un submódulo $N \subseteq M$ de M es un M-ideal si y sólo si el morfismo canónico $\psi : Hom(M/N, M/N) \longrightarrow Hom(M, M/N)$ es un isomorfismo.

Prueba. Aplicando el funtor $Hom(\_, M/N)$ a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

obtenemos

$$0 \longrightarrow Hom(M/N, M/N) \xrightarrow[\psi]{} Hom(M, M/N) \xrightarrow[\varphi]{} Hom(N, M/N)$$

exacta. Por lo tanto, por el corolario (1.0.10) y la proposición (1.0.8) tenemos que N es un M-ideal si y sólo si ψ es un isomorfismo. $\square$

Proposición 1.0.12. *Sea K un M-ideal y $N \subseteq K$ entonces:*

(i) K/N es un M/N-ideal en M/N.

(ii) Si N es un K-ideal en K entonces N es un M-ideal.

Prueba. (i) Consideremos el morfismo

$$\varphi : Hom(M/N, (M/N)/(K/N)) \longrightarrow Hom(K/N, (M/N)/(K/N))$$

que es equivalente al morfismo

$$\varphi : Hom(M/N, M/K) \longrightarrow Hom(K/N, M/K)$$

Sean $g \in Hom(M/N, M/K)$ y $\pi : M \longrightarrow M/N$ la proyección canónica. $\varphi(g) = g \circ i$ donde $i : K/N \longrightarrow M/N$ es la inclusión, como $g \circ i \circ \pi : M \longrightarrow M/K$ por la proposición (1.0.8) $g \circ i \circ \pi(K) = 0$ por lo tanto $\varphi(g) = g \circ i = 0$ se sigue de los corolarios anteriores que K/N es un M/N-ideal.

(ii) Basta mostrar que

$$\varphi : Hom(M, M/N) \longrightarrow Hom(N, M/N)$$

es igual a cero. Sea $g \in Hom(M, M/N)$, consideremos

$$\pi : M/N \longrightarrow (M/N)/(K/N) \cong M/K$$

la proyección canónica.

Como K es un M-ideal $\varphi : Hom(M, M/K) \longrightarrow Hom(K, M/K)$ es igual a cero de donde $\varphi(\pi \circ g) = \pi \circ g \circ i_K = 0$ como $\pi \circ g \circ i_K(N) \subseteq \pi \circ g \circ i_K(K) = 0$ entonces

$$\pi \circ g \circ i_K(K) = (g(K) + K/N)/K/N = \{0\}$$

es decir $g(K) \subseteq K/N$ por lo tanto la restricción $g\mid_K : K \longrightarrow K/N$.

Por otro lado como N es un K-ideal el morfismo $\zeta : Hom(K, K/N) \longrightarrow Hom(N, K/N)$ es idénticamente cero, entonces

$$g(N) = g\mid_K (N) = g\mid_K \circ i_N(N) = \zeta(g\mid_K)(N) = 0$$

es decir $0 = g(N) = g \circ i_N(N) = \varphi(g)(N)$ por lo tanto $\varphi(g) = 0$ lo que prueba que N es un M-ideal. □

Nuestro siguiente paso es definir un producto entre los M-ideales de M, basándonos en la siguiente observación:

Observación 1.0.13. Sea $I \subseteq R$ un ideal izquierdo de R. Para $M \in R$-Mod, $IM = An_M(\mathcal{C})$ donde $\mathcal{C} = \{W \in R\text{-Mod} \mid IW = 0\}$. En efecto, ya que si $g \in Hom(M, C)$, $g(IM) = Ig(M) = 0$ entonces $IM \subseteq An_M(\mathcal{C})$.
Por otro lado como $I(M/IM) = 0$, tenemos que $M/IM \in \mathcal{C}$ y como $IM = Nuc(\pi)$ donde $\pi : M \longrightarrow M/IM$ es la proyección canónica, entonces $An_M(\mathcal{C}) \subseteq IM$.

La condición $IW = 0$ puede reescribirse como $f(I) = 0$ para todo $f \in Hom(R, W)$, tomando esta idea definimos el producto de $N \subseteq M$ un submódulo de M y cualquier $X \in R$-Mod como sigue:

Definición 1.0.14. Sea $N \subseteq M$ un submódulo de M, para cada $X \in R$-Mod definimos $N \cdot X = An_X(\mathcal{C}_N)$ donde

$$\mathcal{C}_N = \{W \in R - Mod \mid f(N) = 0 \ para\ todo\ f \in Hom(M, W)\}$$

Proposición 1.0.15. *Sea $N \subseteq M$, $N \cdot X = 0$ si y sólo si $f(N) = 0$ para todo $f \in Hom(M, X)$.*

Prueba. $\Rightarrow$) Sean $f \in Hom(M, X)$ y $g \in Hom(X, C)$ con
$C \in \mathcal{C}_N$. $g \circ f(N) = 0$ ya que $C \in \mathcal{C}_N$ se tiene que

$$f(N) \subseteq \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M, X)\ con\ C \in \mathcal{C}_N\} = N \cdot X = 0$$

$\Leftarrow$) La condición $f(N) = 0$ para todo $f \in Hom(M, X)$ implica que $X \in \mathcal{C}_N$ es decir que $N \cdot X = An_X(\mathcal{C}_N) \subseteq Nuc(Id_x) = 0$ por lo tanto $N \cdot X = 0$. □

Observación 1.0.16. Ya que $f(N) = 0$ para todo $f \in Hom(M, C)$ con $C \in \mathcal{C}_N$ entonces $N \subseteq An_M(\mathcal{C}_N) = N \cdot M$.

Proposición 1.0.17. *La clase $\mathcal{C}_N = \{W \in R\text{-}Mod \mid f(N) = 0$ para todo $f \in Hom(M, W)\}$ es cerrada bajo productos directos y submódulos.*

Prueba. Submódulos: Sea $W' \subseteq W$ un submódulo de $W \in \mathcal{C}_N$. Si $f \in Hom(M, W')$ como $W \in \mathcal{C}_N$ entonces $f(N) = 0$ por lo tanto $W' \in \mathcal{C}_N$.
Productos directos: Sea $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de R-módulos en $\mathcal{C}_N$ y $f \in Hom(M, \prod_{\alpha\in\lambda} W_\alpha)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "f\circ\phi_\alpha"'] & \prod_\alpha W_\alpha \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & W_\alpha \end{tikzcd}$$

Para cada $\alpha \in \Lambda$, $\pi_\alpha \circ f(N) = 0$ ya que $W_\alpha \in \mathcal{C}_N$ pero esto implica que $f(N) = 0$. $\square$

Como consecuencia, $N \cdot X$ es el menor submódulo Y de X tal que $N \cdot (X/Y) = 0$, ya que si $Y \subseteq X$ es un submódulo de X tal que $N \cdot (X/Y) = 0$ entonces $f(N) = 0$ para todo $f \in Hom(M, X/Y)$ es decir que $X/Y \in \mathcal{C}_N$. Como $Y = Nuc(\pi)$ donde $\pi : X \longrightarrow X/Y$ es la proyección canónica, entonces $N \cdot X = An_X(\mathcal{C}_N) \subseteq Y$.

Observación 1.0.18. Puesto que $N \cdot (\_) = an_{(\_)}(\mathcal{C}_N) = rad_{\mathcal{C}_N}(\ \_\ )$ es un radical, entonces, $X_0 \subseteq X$ implica que $N \cdot X_0 \subseteq N \cdot X$ y si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo, entonces $f(N \cdot X) \subseteq N \cdot Y$.

Proposición 1.0.19. *Sea $N \subseteq M$ un submódulo de M. Entonces para todo $X \in R\text{-}Mod$ $N \cdot X = 0$ si y sólo si $N \subseteq An_M(X)$.*

Prueba. $N \cdot X = 0$ si y sólo si $f(N) = 0$ para todo $f \in Hom(M, X)$ si y solo si $N \subseteq An_M(X)$. $\square$

Corolario 1.0.20. Si $N \subseteq M$ es un submódulo de M. Entonces N es un M-ideal si y sólo si $N \cdot (M/N) = 0$.

Prueba. $\Rightarrow$) Si N es un M-ideal entonces $N = An_M(M/N)$ por lo tanto $N \cdot (M/N) = 0$.
$\Leftarrow$) $N \cdot (M/N) = 0$ implica que $N \subseteq An_M(M/N)$ y como siempre se tiene que $An_M(M/N) \subseteq Nuc(\pi) = N$ donde $\pi : M \longrightarrow M/N$ es la proyección canónica se tiene que $N = An_M(M/N)$ condición que equivale a que N sea un M-ideal. □

Denotamos como $\mathbb{T}_{\Xi(M)}$ a la clase de torsión de la teoría de torsión generada por M. La cual resulta ser la mínima clase de torsión que contiene a M.
Esta clase se construye haciendo $\mathbb{F}_{\Xi(M)} = \{W \in R\text{-Mod} \mid Hom(M, W) = 0\}$ y $\mathbb{T}_{\Xi(M)} = \{X \in R\text{-Mod} \mid Hom(X, W) = 0 \ \forall \ W \in \mathbb{F}_{\Xi(M)}\}$.
Usando el producto que hemos definido podemos obtener la siguiente descripción para $\mathbb{T}_{\Xi(M)}$.

Proposición 1.0.21. *Sea $M \in R$-Mod. Entonces*

$$\mathbb{T}_{\Xi(M)} = \{X \in R - Mod \mid M \cdot X = X\}$$

Prueba. Sea $X \in \mathbb{T}_{\Xi(M)}$. Siempre se tiene que $M \cdot X \subseteq X$, ahora sea $f \in Hom(X, C)$ con $C \in \mathcal{C}_M$ como $Hom(M, C) = 0$ entonces $C \in \mathbb{F}_{\Xi(M)}$ y se debe tener que $Hom(X, C) = 0$ por lo tanto $f(X) = 0$ lo cual implica que $X \subseteq An_X(\mathcal{C}_M) = M \cdot X$.
Inversamente si $X \in R$-Mod es tal que $M \cdot X = X$ y $f \in Hom(X, F)$ con $F \in \mathbb{F}_{\Xi(M)}$, se afirma que $F \in \mathcal{C}_M$ ya que $F \in \mathbb{F}_{\mathcal{C}_M}$ implica que $Hom(M, F) = 0$ es decir $g(M) = 0$ para todo $g \in Hom(M, F)$ por lo tanto $F \in \mathcal{C}_M$. Ahora como $X = M \cdot X$, se sigue que $f(X) = 0$ concluimos que $X \in \mathbb{T}_{\Xi(M)}$. □

Observación 1.0.22. Si ρ es un prerradical en R-Mod. Tenemos $\rho(R)X \subseteq \rho(X)$ para todo $X \in R$-Mod, ya que si se considera el morfismo $\varphi : R^{(X)} \longrightarrow X$ dado por $(r_x)_{x\in X} \longmapsto \sum_{x\in X} r_x x$ se tiene que $\varphi(\rho(R^{(X)})) = \varphi(\rho(R)^{(X)}) = \rho(R)X$ y como ρ es prerradical $\rho(R)X \subseteq \rho(X)$.

Para poder extender este resultado a $\sigma[M]$ tenemos:

Lema 1.0.23. *Sea $N \subseteq M$ si ρ es un radical tal que $N \subseteq \rho(M)$, entonces $N \cdot X \subseteq \rho(X)$ para todo $X \in R$-Mod.*

Prueba. Sea $f \in Hom(M, X/\rho(X))$ como ρ es un radical $f(N) \subseteq f(\rho(M)) \subseteq \rho(X/\rho(X)) = 0$. entonces $f(N) = 0$ para todo $f \in Hom(M, X/\rho(X))$ es decir $N \cdot (X/\rho(X)) = 0$ por lo tanto $N \cdot X \subseteq \rho(X)$ ya que $N \cdot X$ es el mínimo submódulo de X tal que $N \cdot (X/N \cdot X) = 0$. □

Como consecuencia el radical $N\cdot(\_)$ es el menor radical ρ de R-Mod para el cual $N \subseteq \rho(M)$ puesto que si ρ es tal que $N \subseteq \rho(M)$ entonces por el lema (1.0.23) y como $N \subseteq N \cdot M$, se sigue $N \subseteq N \cdot M \subseteq \rho(M)$.

Por lo tanto la propiedad del lema (1.0.23) reescrita para $\sigma[M]$ es que si N es un M-ideal y ρ es un radical tal que $N = \rho(M)$, entonces $N \cdot X \subseteq \rho(X)$ o que $\rho(M) \cdot X \subseteq \rho(X)$ para todo $X \in R$-Mod.

Ahora extenderemos algunos resultados conocidos para los ideales bilaterales del anillo a los M-ideales , en particular que el producto de dos M-ideales es un M-ideal contenido en la intersección.

Proposición 1.0.24. *Sean $N, K \subseteq M$ submódulos de M entonces:*

(i) Si $N \subseteq K$ entonces $N \cdot X \subseteq K \cdot X$ $\forall$ $X \in R$-Mod.

(ii) Si K es un M-ideal, también $N \cdot K$.

(iii) El submódulo $N \cdot M$ es el menor M-ideal que contiene a N.

(iv) Si N es un M-ideal, entonces $N \cdot K \subseteq N \cap K$.

Prueba. (i) Sea $N \subseteq K$ basta probar que $N \subseteq K \cdot M = An_M(\mathcal{C}_K)$ ya que por el lema (1.0.23) $N \cdot X \subseteq K \cdot X$ para todo $X \in R$-Mod. Sea $f \in Hom(M, C)$ con $C \in \mathcal{C}_K$. $f(N) \subseteq f(K) = 0$, por lo tanto $N \subseteq An_M(CM) = K \cdot M$.
(ii) Como K es un M-ideal existe ρ radical tal que $\rho(M) = K$. Consideremos $N \cdot \rho(\ \_\ )$ que es un radical ya que es composición de radicales además $N \cdot \rho(M) = N \cdot K$ por lo tanto de la proposición (1.0.8) $N \cdot K$ es un M-ideal.
(iii) $N \subseteq N \cdot M$ es claro, supongamos entonces que L es un M-ideal tal que $N \subseteq L$, por (i) $N \cdot (M/L) \subseteq L \cdot (M/L) = 0$ ya que L es un M-ideal, por lo tanto $N \cdot M \subseteq L$ ya que $N \cdot M$ es el menor submódulo de M tal que $N \cdot (M/Y) = 0$. (iv) Siempre se tiene $N \cdot K \subseteq K$ para mostrar la otra contención, como $K \subseteq M$ entonces $N \cdot K \subseteq N \cdot M$ ya que la multiplicación define un radical. N un M-ideal implica $N \cdot M \subseteq N$ pues $N \cdot M$ es el menor M-ideal que contiene a N por lo tanto $N \cdot K \subseteq N$, concluimos entonces que $N \cdot K \subseteq K \cap N$. □

Proposición 1.0.25. *Sea X un R-módulo, entonces:*

(i) $An_M(X) = An_M(tr^M(X)) = An_M(M \cdot X)$.

(ii) Si $N \subseteq M$ *sean* $T = \sum_{f \in Hom(M,X)} f(N)$ *y* $A = An_M(X)$, *entonces* $An_R(T) = An_R((N + A)/A)$.

(iii) $An_R(tr^M(X)) = An_R(M/An_M(X))$.

Prueba. (i) $f \in Hom(M, X)$ puede verse como un morfismo $f \in Hom(M, tr^M(X))$, además si $f \in Hom(M, tr^M(X))$ también puede verse como un morfismo $f \in Hom(M, X)$, por lo tanto

$$\bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M, X)\} = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M, tr^M(X)\}$$

Por otro lado $f \in Hom(M, X)$ podemos tomarlo como un morfismo $f \in Hom(M, M \cdot X)$ esto ya que $g \circ f(M) = 0$ para todo $g \in Hom(X, C)$ con $C \in \mathcal{C}_M$ implica que $f(M) \subseteq M \cdot X$ y también para $f \in Hom(M, M \cdot X)$ puede verse como un morfismo $f \in Hom(M.X)$ por lo tanto

$$\bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M, X)\} = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M, M \cdot X)\}$$

y esto prueba (i).

(ii) Sean $r \in An_R(T)$ y $(n + a) + A$ con $n \in N$ y $a \in A$.

$g(rn) = rg(n) = 0$ para toda $g \in Hom(M.X)$ es decir $rn \in A$ por lo tanto $r((n + a) + A) = (rn + ra) + A = A$. Se sigue entonces que $An_R(T) \subseteq An_R((N + A)/A)$. Por otro lado si $r \in An_R((N + A)/)A$ y $m \in T$. $m \in T$ implica $m = f_1(n_1) + f_2(n_2) + ... + f_k(n_k)$ con $f_i \in Hom(M, X)$ y $n_i \in N$, entonces $rm = f_1(rn_1) + ...f_k(rn_k)$ como $r \in An_R((N + A)/A)$ tenemos que $rn_i \in An_M(X)$ para toda i de donde $f_i(rn_i) = 0$ por lo tanto $rn_i \in An_R(T)$ concluimos entonces que $An_R(T) = An_R((N + A)/A)$.

(iii) Sean $r \in An_R(tr^M(X))$, $m + An_M(X)$ y $g \in Hom(M, X)$.

$g(rm) = rg(m) = 0$ es decir $rm \in An_M(X)$ entonces $r(m + An_M(X)) = An_M(X)$ por lo tanto $r \in An_R(M/An_M(X))$.

Inversamente si $r \in An_R(M/An_M(X))$ y $m \in tr^M(X)$ entonces $m = f_1(m_1) + f_2(m_2) + ... + f_n(m_n)$ con $f_i \in Hom(M, X)$ y $m_i \in M$. Como $r \in An_R(M/An_M($ se sigue que $rm_i \in An_M(X)$ entonces $f_i(rm_i) = 0$ para toda i de donde $rm = 0$ por lo tanto $r \in An_R(tr^M(X))$. Concluimos entonces que $An_R(tr^M(X)) = An_R(M/An_M(X))$. $\square$

Capítulo 2

Módulos M-primos

Un módulo X se dice que es un módulo primo si X es distinto de cero y $An_R(Y) = An_R(X)$ para todo submódulo $Y \subseteq X$. Para poder definir lo que se entiende por módulo M-primo observamos que la condición $X \neq 0$ con $X \in \sigma[M]$ no basta ya que no podemos garantizar que $Hom(M, X) \neq 0$, entonces tenemos la siguiente:

Definición 2.0.26. Un R-módulo X es un módulo M-primo si $Hom(M, X) \neq 0$ y $An_M(Y) = An_M(X)$ para todo submódulo $Y \subseteq X$ tal que $Hom(M, Y) \neq 0$.

En el caso $M = R$ se tiene que $Hom(M, X) = Hom(R, X) \neq 0$ para todo módulo distinto de cero X, por tanto el concepto de módulo R-primo se reduce a la definición de módulo primo en R-Mod.
El siguiente resultado da una caracterización de los módulos R-primos que posteriormente extenderemos a módulos M-primos.

Proposición 2.0.27. *Sea X un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) X es un módulo R-primo.

(ii) $IY = 0$ *implica que* $IX = 0$ *para todo* $I \subseteq R$ *ideal izquierdo de* R *y todo submódulo no cero* $Y \subseteq X$.

(iii) *Para toda* $a \in R - An_R(X)$ *y toda* $0 \neq x \in X$ *existe* $r \in R$ *con* $arx \neq 0$.

(iv) $IY = 0$ *implica que* $IX = 0$ *para todo* I *ideal bilateral de* R *y todo submódulo no cero* $Y \subseteq X$.

Prueba. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $I \subseteq R$ un ideal izquierdo de R y $0 \neq Y \subseteq X$ tal que $IY = 0$. De donde $I \subseteq An_R(Y) = An_R(X)$ por lo tanto $IX = 0$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea $a \in R - An_R(X)$ y $0 \neq x \in X$. Supongamos que para todo $r \in R$ $arx = 0$, se tendría que $a \in An_R(Rx)$ como $An_R(Rx)Rx = 0$ por (ii) $An_R(RX)X = 0$ de donde $a \in An_R(X)$ lo cual no puede ser. Por lo tanto existe $r \in R$ tal que $arx \neq 0$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sea $I \subseteq R$ ideal bilateral de R y $0 \neq Y \subseteq X$ tal que $IY = 0$, si $I \nsubseteq An_R(X)$ entonces existe $r \in I - An_R(X)$ tomemos $y \in Y$ $y \neq 0$ por (iii) existe $s \in R$ con $rsy \neq 0$. Como I es bilateral $rs \in I$ lo que implicaría $IY \neq 0$ lo cual es contrario a la suposición, por lo tanto $I \subseteq An_R(X)$ con lo cual se tiene que $IX = 0$.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Para todo $Y \subseteq X$, $Y \neq 0$ siempre se tiene $An_R(X) \subseteq An_R(Y)$. Por otro lado como $An_R(Y)$ es un ideal bilateral de R y $An_R(Y)Y = 0$ por (iv) $An_R(Y)X = 0$, lo que quiere decir que $An_R(Y) \subseteq An_R(X)$ se tiene entonces $An_R(Y) = An_R(X)$. Por lo tanto X es un módulo R-primo.

□

Extendemos ahora el resultado para módulos M-primos.

Proposición 2.0.28. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier* R*-módulo* X *tal que* $Hom(M, X) \neq 0$.

(i) X *es un módulo* M*-primo.*

(ii) $N \cdot Y = 0$ *implica que* $N \cdot X = 0$ *para todo* $N \subseteq M$ *y todo* $Y \subseteq X$ *con* $M \cdot Y \neq 0$.

(iii) Para todo $m \in M - An_M(X)$ *y todo* $0 \neq f \in Hom(M, X)$ *existe* $g \in Hom(M, f(M))$ *tal que* $g(m) \neq 0$.

(iv) $N \cdot Y = 0$ *implica que* $N \cdot X = 0$ *para todo* M*-ideal* $N \subseteq M$ *y todo* $0 \neq Y \subseteq X$ *con* Y M*-generado.*

Prueba. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sean $N \subseteq$ y $Y \subseteq X$ tal que $M \cdot Y \neq 0$ y $N \cdot Y = 0$. Como $M \cdot Y \neq 0$ se debe tener $Hom(M, Y) \neq 0$ entonces por (i) $An_M(Y) = An_M(X)$ además $N \cdot Y = 0$ implica que $N \subseteq An_M(Y)$ de donde $N \subseteq An_M(X)$ por lo tanto $N \cdot X = 0$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sean $m \in M - An_M(X)$ y $f \in Hom(M, X)$. Supongamos que $g(m) = 0$ para todo $g \in Hom(M, f(M))$ entonces $m \in An_M(f(M))$. Como $f(M) \neq 0$, entonces $M \cdot f(M) \neq 0$ por lo tanto por (ii) $An_M(f(M)) \cdot f(M) = 0$ implica que $An_M(f(M)) \cdot X = 0$ y de aquí $An_M(f(M)) \cdot X \subseteq An_M(X)$ lo cual no puede ser ya que $m \notin An_M(X)$. Por lo tanto existe $g \in Hom(M, f(M))$ tal que $g(m) \neq 0$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sea $N \subseteq M$ un M-ideal y $0 \neq Y \subseteq X$ un submódulo M-generado tal que $N \cdot Y = 0$. Supongamos que $N \nsubseteq An_M(X)$ tomemos entonces $m \in N - An_M(X)$. Como Y es M-generado tenemos un epimorfismo $\varphi : M^{(\beta)} \longrightarrow Y$ la condición $Y \neq 0$ implica que para alguna inclusión $i_\alpha : M \longrightarrow M^{(\beta)}$ se tiene $\varphi o i_\alpha \neq 0$ entonces por (iii) existe $g \in hom(M, \varphi o i_\alpha(M)$ tal que $g(m) \neq 0$, es decir, existe $g \in Hom(M, Y)$ tal que $g(N) \neq 0$ de donde $N \cdot Y \neq 0$ lo cual contradice la suposición, se debe tener entonces que $N \subseteq An_M(X)$ por lo tanto $N \cdot X = 0$.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Sea $Y \subseteq X$ con $Hom(M, Y) \neq 0$ para $f \in Hom(M, Y)$ $f(M) \neq 0$ se tiene $An_M(X) \cdot f(M) = 0$ por la condición (iv) como $An_M(Y)$ es un M-ideal y $f(M)$ es un módulo M-generado entonces $An_M(Y) \cdot X = 0$ por lo tanto $An_M(Y) = An_M(X)$ lo que prueba que X es un módulo M-primo. □

Corolario 2.0.29. Sea X un módulo M-primo. Un submódulo $Y \subseteq X$ es M-primo si y sólo si $Hom(M,Y) \neq 0$.

Prueba. Sea $Y \subseteq X$ tal que $Hom(M,Y) \neq 0$ y $Y' \subseteq Y$ con $N \cdot Y' = 0$ por (ii) del teorema anterior $N \cdot X = 0$ además $N \cdot Y \subseteq N \cdot X$. Por lo tanto $N \cdot Y = 0$.
En la otra dirección es claro. □

Corolario 2.0.30. Las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo X tal que $Hom(M,X) \neq 0$.

(i) X es un módulo M-primo.

(ii) $M \cdot X$ es un módulo M-primo.

(iii) $tr^M(X)$ es un módulo M-primo.

Prueba. $(i) \Rightarrow (ii)$ Como $M \cdot X \subseteq X$ basta probar que $Hom(M, M \cdot X) \neq 0$. Por hipótesis existe $f \in Hom(M,X)$ $f \neq 0$. Sea $g \in Hom(X,C)$ con $C \in \mathcal{C}_M$, entonces $g \circ f(M) = 0$ de donde $f(M) \subseteq M \cdot X$, por tanto $Hom(M, M \cdot X) \neq 0$ lo cual, por el corolario (2.0.29). implica que $M \cdot X$ es un módulo M-primo.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Como $g \circ f(M) = 0$ para todo $g \in Hom(X,C)$ con $C \in \mathcal{C}_M$ y todo $f \in Hom(M,X)$ se tiene que $tr^M(X) \subseteq M \cdot X$, entonces, como anteriormente, basta probar que $Hom(M, tr^M(X)) \neq 0$, pero esto es claro ya que por hipótesis $Hom(M,X) \neq 0$. Por lo tanto $tr^M(X)$ es un módulo M-primo.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea $Y \subseteq X$ M-generado y distinto de cero . Si N es un M-ideal tal que $N \cdot Y = 0$. Como Y es M-generado se tiene $Y \subseteq tr^M(X)$. Ahora $tr^M(X)$ M-primo implica que $N \cdot tr^M(X) = 0$ y esto si y sólo si $f(N) = 0$ para $f \in Hom(M, tr^M(X))$ es decir que $f(N) = 0$ para todo $f \in Hom(M,X)$, por lo tanto $N \cdot X = 0$. La condición (iv) de la proposición (2.0.28) implica que X es un módulo M-primo. □

Observación 2.0.31. Si X no contiene submódulos M-generados propios distintos de cero, por la condición (iv) de la proposición (2.0.28) sería suficiente mostrar que $N \cdot Y = 0$ implica que $N \cdot X = 0$ con N un M-ideal y Y un submódulo de X M-generado lo cual siempre se da, por lo tanto dichos módulos son M-primos.

Observación 2.0.32. Si R es un anillo simple entonces todo R-módulo distinto de cero es R-primo.
Ya que para $X \neq 0$ un R-módulo no se puede tener $RY = 0$ con $Y \subseteq X$ distinto de cero, como el otro ideal bilateral del anillo es 0 y $0Y = 0$ siempre implica $0X = 0$ de la condición (iv) de la proposición (2.0.27) se sigue que X es un módulo R-primo.

Análogamente:

Observación 2.0.33. Si M no contiene M-ideales propios distintos de cero, entonces todo módulo X con $Hom(M, X) \neq 0$ es M-primo.
Aquí no es posible que se de $An_M(Y) = M$ con $Y \subseteq X$ y $Hom(M, Y) \neq 0$ por tanto el único caso es $An_M(Y) = 0$ y $An_M(X) = 0$ lo que implica que X es un módulo M-primo.

En el siguiente ejemplo se muestra que un módulo M-primo no es necesariamente R-primo . También que un módulo R-primo no es necesariamente M-primo.

Ejemplo 2.0.34. Sea $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ en $\mathbb{Z}$-Mod. Para todo $0 \neq N \subsetneq M$ se tiene $M/N \cong M$, entonces $An_M(M/N) = An_M(M) = 0 \neq N$ por tanto N no puede ser un M-ideal, además como M es divisible, entonces todo módulo M-generado es divisible. Ahora los submódulos de M son de la forma $\mathbb{Z}_{p^k}$ que no son divisibles se sigue entonces de la observación (2.0.31) que M es M-primo.
Por otro lado M no es $\mathbb{Z}$-primo ya que M contiene elementos de orden p^k

para todo natural k entonces $An_{\mathbb{Z}}(M) = 0$, además $An_{\mathbb{Z}}(N) \neq 0$ para todo $N \subseteq M$, entonces M no puede ser $\mathbb{Z}$-primo.
Sean I, J dos ideales de $\mathbb{Z}$ con $J \neq 0$. Si se tiene $IJ = 0$, se sigue que $I = 0$. Entonces $I\mathbb{Z} = 0$ por lo tanto $\mathbb{Z}$ es un módulo $\mathbb{Z}$-primo, sin embargo $\mathbb{Z}$ no es M-primo ya que $Hom(M, \mathbb{Z}) = 0$ pues $\mathbb{Z}$ no contiene submódulos divisibles distintos de cero.

Observación 2.0.35. De hecho se tiene que $Hom(\mathbb{Z}_{p^\infty}, X) = 0$ para todo $\mathbb{Z}$-primo.

Prueba. Sea $f : \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow X$ con X $\mathbb{Z}$-primo. Como $Im(f) \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}/Nuc(f)$ si $Nuc(f)$ es un submódulo propio entonces $Im(f) \cong \mathbb{Z}_{p^\infty} \subseteq X$ como $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \neq 0$ y X es $\mathbb{Z}$-primo implicaría que $\mathbb{Z}$ es un módulo $\mathbb{Z}$-primo lo cual probamos en el ejemplo anterior no se da, por lo tanto $Nuc(f) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ de donde $f = 0$. □

Proposición 2.0.36. *Sea X un módulo M-primo. Si $Hom(M, Y) \neq 0$ para todo $0 \neq Y \subseteq X$, entonces $tr^M(X)$ es un módulo R-primo.*

Prueba. Sean $I \subseteq R$ un ideal, $Y \subseteq tr^M(X)$ con $Y \neq 0$ e $IY = 0$. Debemos mostrar que $Itr^M(X) = 0$. Sea $f \in Hom(M, Y)$, $f(IM) = If(M) \subseteq IY = 0$ es decir que $IM \subseteq An_M(Y) = An_M(tr^M(X))$, entonces si $g : M \longrightarrow tr^M(X)$ se tiene $g(IM) = 0 = Ig(M)$ como todo morfismo de M en X se puede ver como uno de M en $tr^M(X)$ se sigue que $Ih(M) = 0$ para todo $h \in Hom(M, X)$ de donde $Itr^M(X) = 0$ por lo tanto $tr^M(X)$ es R-primo. □

Bican define a M como módulo primo si $rad_N = rad_M$ para todo $0 \neq N \subseteq M$ y prueba que un módulo satisface la definición si y sólo si esta cogenerado por cada uno de sus submódulos distintos de cero.
La siguiente proposición establece una conexión con la definición dada aquí.

Proposición 2.0.37. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo $X \neq 0$.*

(i) Cada submódulo no cero de X cogenera a X.

(ii) X es M-primo para todo módulo M tal que $\sigma[M] = \sigma[X]$ y X es M-generado.

(iii) X es M-primo para cada módulo M tal que $Hom(M, X) \neq 0$.

Prueba. $(i) \Rightarrow (iii)$ Sea $Y \subseteq X$ $Y \neq 0$, si $r \in An_M(Y)$ y $g : M \longrightarrow X$, entonces para todo $f \in Hom(X, Y)$ se tiene $f \circ g(r) = 0$ es decir $g(r) \in An_X(Y) = 0$ ya que Y cogenera a X, pero esto es para todo $g \in Hom(M, X)$ por lo tanto $r \in An_M(X)$ se sigue que $An_M(X) \subseteq An_M(Y)$. Como siempre se da la otra contención, se tiene que M es M-primo pues por hipótesis $Hom(M, X) \neq 0$.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Es claro.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $Y \subseteq X$ consideremos el módulo $M = X \oplus Y$. Entonces X es M-generado y $\sigma[M] = \sigma[X]$ ya que $Y \in \sigma[X]$, Por hipótesis X es M-primo, por lo tanto $An_M(Y) = An_M(X) = 0$ esto implica que Y cogenera a X. □

Corolario 2.0.38. Sea $X \in R$-Mod tal que $Hom(M, X) \neq 0$ entonces X es M-primo si todo $0 \neq Y \subseteq X$ con Y M-generado cogenera a X.

Prueba. Sea $Y \subseteq X$ tal que $Hom(M, Y) \neq 0$ obsérvese que $An_M(Y) = An_M(tr^M(Y)))$. Si $r \in An_M(tr^M(Y)))$, $f \in Hom(M, X)$ y $g \in Hom(X, tr^M(Y)))$ entonces $g \circ f(r) = 0$ como $tr^M(Y)$ es M-generado por hipótesis $An_X(tr^M(Y))) = 0$ se tiene que $f(r) = 0$. Por tanto $r \in An_M(X)$ de donde $An_M(Y) = An_M(X)$ lo que prueba que X es M-primo. □

Definición 2.0.39. Un módulo $X \neq 0$ se dice que es semicompresible si para cada $0 \neq Y \subseteq X$ existe un monomorfismo $f : X \longrightarrow Y^n$ en una suma directa finita de copias de Y.

Observación 2.0.40. Cada módulo $X \neq 0$ semicompresible es R-primo.

Prueba. Sea $0 \neq Y \subseteq X$ y $I \subseteq R$ tal que $IY = 0$ por hipótesis existe $f : X \longrightarrow Y^n$ un monomorfismo para algún natural n entonces $IY = 0$ implica $IY^n = 0$ por tanto $IX = 0$ de donde X es R-primo. $\square$

Corolario 2.0.41. Si X es semicompresible o $X \cong R/P$ para P un ideal primo de R, entonces X es un módulo M-primo si y sólo si $Hom(M, X) \neq 0$.

Prueba. $\Rightarrow$) Es claro.
$\Leftarrow$) $Hom(M, X) \neq 0$ y X semicompresible se sigue que todo submódulo de X distinto de cero cogenera a X por lo tanto por la proposición (2.0.37) (iii) X es M-primo.
Ahora, si $X \cong R/P$ con P un ideal primo, sea $Y/P \subseteq R/P$ con $Y/P \neq 0$ consideremos $J/P = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(R/P, Y/P)\}$. Queremos mostrar que $J/P = 0$ para esto definimos $f_y : R \longrightarrow Y/P$ dada por $f_y(r+P) = ry+P$ para $0 \neq y \in Y$.
f esta bien definida ya que si $r - r' \in P$, entonces $(r - r')y \in P$ pues P es un ideal bilateral, de donde $ry + P = r'y + P$ para este morfismo tenemos $0 = f_y(J/P) = Jy + P$ es decir $Jy \in P$ para toda $y \in P$ por tanto $JY \subseteq P$. Como P es primo esto implica que $J \subseteq P$ o $Y \subseteq P$ pero suponiendo $Y/P \neq 0$ se deduce $J/P = 0$, por tanto Y/P cogenera a R/P y de (2.0.37) se sigue que $X = R/P$ es M-primo. $\square$

Proposición 2.0.42. *El módulo M es M-primo si y sólo si $f(M)$ cogenera a M para todo $f \neq 0$ con $f \in End_R(M)$.*

Prueba. $\Rightarrow$) Es claro pues todo submódulo cogenera a M.
$\Leftarrow$) Sea $r \in \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M, Y)\}$ y $g \in Hom(M, f(M))$ con $0 \neq f \in End_R(M)$ se sigue que $g(r) = 0$ por el corolario(2.0.38) se tiene que M es M-primo. $\square$

Definición 2.0.43. Un R-módulo X es llamado monoforme si cada homomorfismo no cero $f : Y \longrightarrow X$ con $Y \subseteq X$ es un monomorfismo.

Ejemplo claro de módulos monoformes son los módulos simples.

Corolario 2.0.44. Si M es un módulo monoforme entonces M es un módulo M-primo.

Prueba. Sea $0 \neq f \in End_R(M)$ como M es monoforme f debe ser un monomorfismo entonces $\bigcap\{Nuc(g) \mid g \in Hom(M, f(M))\} = 0$ por lo tanto $f(M)$ cogenera a M. Se sigue de la proposición (2.0.42) que M es M-primo.

$\square$

El siguiente teorema muestra que bajo ciertas condiciones las propiedades que estamos considerando se pueden traducir a propiedades del anillo de endomorfismos.

Teorema 2.0.45. *Si M es M-primo y casi-proyectivo, entonces $End_R(M)$ es un anillo primo. Inversamente , si $S = End_R(M)$ es un anillo primo y $Hom(M, K) \neq 0$ para todo submódulo distinto de cero $K \subseteq M$, entonces M es un módulo M-primo.*

Prueba. $\Rightarrow$) Sean $I, J \subseteq S$ ideales bilaterales tales que $IJ = 0$ y supongamos que $I \neq 0$ es decir que existe $g \in I$ $g \neq 0$ para $f \in J$ consideremos $\varphi : M \longrightarrow Im(g)$ y el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dotted, "\overline{\varphi}"'] & \\
M \arrow[r, "g"'] & Im(g) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis existe $\bar{\varphi} : M \longrightarrow M$ tal que $g \circ \bar{\varphi} = \varphi$ como $g \in I$ entonces $g \circ \bar{\varphi} = \varphi \in I$ por otro lado $f \in J$ implica que $\varphi \circ f = 0$ se sigue entonces que $f(M) \subseteq An_M(Im(g)) = An_M(M) = 0$ pues M es M-primo por lo que $f(M) = 0$ es decir $J = 0$ por lo tanto $S = End_R(M)$ es un anillo primo.

$\Leftarrow$) Sea $0 \neq K \subseteq M$ y $0 \neq f \in S$, por hipótesis $Hom(M, K) \neq 0$, tomemos

$0 \neq g \in Hom(M, K)$ como S es un anillo primo entonces $SfSg \neq 0$ por lo tanto existe $h \in End_R(M)$ talque $fhg \neq 0$.
Ahora si $i : K \hookrightarrow M$ es la inclusión, como $g(M) \in K$ se sigue que $fhg(K) \subseteq fhi(K)$ por lo tanto $fhi \neq 0$ y $fh : M \longrightarrow f(M)$, entonces $f(M)$ cogenera a M (ver apéndice). Por lo tanto M es M-primo. $\square$

Proposición 2.0.46. *Si P es un M-ideal entonces M/P es un módulo M-primo si y sólo si M/P es un módulo M/P-primo.*

Prueba. $\Rightarrow$) Sea $0 \neq N/P \subseteq M/P$ tal que $Hom(M/P, N/P) \neq 0$ observemos que

$$An_{M/P}(N/P) = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M/P, N/P) =$$

$$= \left(\bigcap\{K \subseteq M \mid K/P = Nuc(f),\ f \in Hom(M/P, N/P)\}\right)/P = K$$

para $f \in Hom(M, N/P)$ definimos $g : M/P \longrightarrow N/P$ como
$g(m + P) = f(m)$.
f esta bien definida pues si $m - m' \in P$ como $P = An_M(M/P) = An_M(N/P)$ por ser P un M-ideal y M/P un módulo M-primo entonces $f(m - m') = 0$, es decir $g(m + P) = f(m) = f(m') = g(m' + P)$. Sea ahora $k + P \in K$ entonces $f(k) = g(k + P) = 0$ de donde $k \in An_M(N/P) = P$, entonces $k \in P$ o bien que $K \subseteq P$ por lo tanto $An_{M/P}(N/P) = 0$ lo que implica que N/P cogenera a M/P probando que M/P es un módulo M/P-primo.
$\Leftarrow$) Sabemos que $P = An_M(M/P) \subseteq An_M(N/P)$. Sea $m \in An_M(N/P)$ y $g : M/P \longrightarrow N/P$ consideremos $\pi : M \longrightarrow M/P$ la proyección, entonces $g \circ \pi(m) = 0$ de donde $m + P \in An_{M/P}(N/P) = 0$ es decir $m \in P$ por lo tanto $An_M(M/P) = An_M(N/P)$. $\square$

Capítulo 3

M-ideales Primos

Definición 3.0.47. Un M-ideal P se dice que es un M-ideal primo si existe un módulo M-primo X tal que $P = An_M(X)$.

La siguiente proposición muestra que en la definición el módulo X es un elemento de $\sigma[M]$.

Proposición 3.0.48. *Si P es un M-ideal primo entonces $P = An_M(Y)$ con Y un módulo M-primo y M-generado.*

Prueba. Sea X un módulo M-primo tal que $P = An_M(X)$, como X es un módulo M-primo entonces $tr^M(X)$ es también M-primo y M-generado, además

$$P = An_M(X) = An_M(tr^M(X))$$

sea $Y = tr^M(X)$. □

A continuación consideramos M-ideales primos asociados a un módulo.

Definición 3.0.49. Sea P un M-ideal primo , decimos que P es un M-ideal primo asociado al módulo X si $P = An_M(Y)$ para un submódulo M-primo $Y \subseteq X$.

Proposición 3.0.50. *Sea M un R-módulo neteriano y X un R-módulo izquierdo, si $Hom(M,X) \neq 0$, entonces X tiene un M-ideal primo asociado.*

Prueba. Sólo basta mostrar que X contiene un submódulo M-primo. Sea

$$\mathcal{F} = \{Y \subseteq X \mid Hom(M,Y) \neq 0\}$$

observemos que $X \in \mathcal{F}$ formamos ahora

$$\mathcal{F}' = \{An_M(Y) \mid Y \in \mathcal{F}\} \subseteq Sub_R(M)$$

$X \in \mathcal{F}$ implica que $An_M(X) \in \mathcal{F}'$ como M es neteriano existe $Y_0 \in \mathcal{F}$ tal que $An_M(Y_0)$ es un máximo de $\mathcal{F}'$.
Afirmamos que Y_0 es un módulo M-primo , en efecto $Hom(M, Y_0) \neq 0$ pues $Y_0 \in \mathcal{F}$ y para $Y \subseteq Y_0$ con $Hom(M,Y) \neq 0$ si $An_M(Y_0) \subsetneq An_M(Y)$ como $An_M(Y) \in \mathcal{F}'$ entonces $An_M(Y_0)$ no sería máximo en $\mathcal{F}'$ lo cual no es posible por lo tanto $An_M(Y_0) = An_M(Y)$ lo que prueba que Y_0 es un módulo M-primo. Un M-ideal asociado a X es $An_M(Y_0)$. □

El radical de Jacobson del anillo R se define generalmente como la intersección de los ideales izquierdos máximos de R y se prueba que que es igual a la intersección de los ideales primitivos de R. La definición se extiende para módulos, definiendo el radical de Jacobson $J(M)$ de un módulo M como la intersección de los submódulos máximos de M o como M en caso de que M no contenga submódulos máximos.

Observación 3.0.51. Para toda $X \in R$-Mod. $J(X) = An_X(\mathcal{S})$ donde $\mathcal{S}$ es la clase de los R-módulos simples.

Prueba. Sea $Y \subseteq X$ un submódulo máximo de X entonces X/Y es un módulo simple. Además $Y = Nuc(\pi)$ la proyección canónica $\pi : X \longrightarrow X/Y$, entonces $An_X(\mathcal{S}) \subseteq Y$, por lo tanto $An_X(\mathcal{S}) \subseteq J(M)$.

Ahora, si $Y = Nuc(f)$ con $f \in Hom(X, S)$ y S un módulo simple, entonces Y es un submódulo máximo de X ó $Y = X$ por lo tanto $J(M) \subseteq Y$ de donde $J(M) \subseteq An_X(\mathcal{S})$. □

Usando el concepto de M-ideal podemos definir la idea de M-ideal primitivo de donde se sigue que $J(M)$ es igual a la intersección de los M-ideales primitivos.

Definición 3.0.52. Un M-ideal P es un M-ideal primitivo si $P = An_M(S)$ para un módulo simple S.

Proposición 3.0.53. *Sea $M \in R$-Mod. Entonces*

$$J(M) = \bigcap\{N \subseteq M \mid N \text{ es un } M-\text{ideal primitivo}\}$$

Prueba. Sea $N \subseteq M$ un M-ideal primitivo entonces existe un módulo simple S tal que $N = An_M(S)$. Si $0 \neq f \in Hom(M, S)$ como S es simple $S = f(M) \cong M/Nuc(f)$, donde $Nuc(f)$ es un submódulo máximo de M por lo cual $J(M) \subseteq Nuc(f)$ de donde $f(J(M)) = 0$ es decir $J(M) \subseteq An_M(S) = N$ por lo tanto

$$J(M) \subseteq \bigcap\{N \subseteq M \mid N \text{ es un } M-\text{ideal primitivo}\}$$

Inversamente, como $J(M) = An_M(\mathcal{S})$ con $\mathcal{S}$ la clase de módulos simples, si S es un simple, entonces para toda $f \in Hom(M, S)$ se tiene $J(M) \subseteq Nuc(f)$ por lo tanto $J(M) \subseteq An_M(S)$ que es un M-ideal primitivo entonces

$$J(M) = \bigcap\{N \subseteq M \mid N \text{ es un } M-\text{ideal primitivo}\}$$

□

Decimos que un M-ideal de M es máximo si es un elemento máximo entre los M-ideales de M. La siguiente proposición muestra que algunos resultados esperados se tienen.

Proposición 3.0.54. *Sea P un M-ideal propio de M.*

(i) Si P es un M-ideal máximo, entonces P es un M-ideal primo.

(ii) Si P es un M-ideal primitivo, entonces P es un M-ideal primo.

Prueba. (i) Como P es un M-ideal entonces $P = An_M(M/P)$. Sea $0 \neq N/P \subseteq M/P$ y tal que $Hom(M, N/P) \neq 0$. Se tiene $P = An_M(M/P) \subseteq An_M(N/P)$.
Por otro lado como $Hom(M, N/P) \neq 0$ entonces $An_M(N/P) \neq M$, pero P es M-ideal máximo, se debe tener entonces $An_M(M/P) = An_M(N/P)$ por lo tanto M/P es un módulo M-primo es decir P es un M-ideal primo.
(ii) Como P es un M-ideal primitivo, existe S simple tal que $P = An_M(S)$ pero S es un módulo M-primo pues no tiene submódulos distintos de cero propios por tanto P es un M-ideal primo. □

Un módulo semisimple M es homogéneo si es una suma directa de módulos simples isomorfos dos a dos.

Proposición 3.0.55. *Sea M un R-módulo artiniano y finitamente generado. Si 0 es un M-ideal máximo, entonces M es un módulo semisimple homogéneo.*

Prueba. M finitamente generado implica que existe $M_0 \subseteq M$ máximo, consideremos $S = M/M_0$ que es un módulo simple. Ahora $An_M(S) \neq M$ pues $Hom(M, S) \neq 0$, como 0 es un M-ideal máximo $0 = An_M(S) = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(M, S)\}$ por hipótesis M es artiniano entonces $0 = Nuc(f_1) \cap Nuc(f_2) \cap ... \cap Nuc(f_n)$ con $f_i \neq 0$ que es el núcleo del morfismo $\varphi : M \longrightarrow S^n$ inducido por los $\{f_i\}_{i=1}^n$ por lo tanto φ es un monomorfismo, mas aún φ es sobre pues $Im(f_i) = S$ para toda i, por lo tanto $M \cong S^n$ lo que prueba el resultado. □

Capítulo 4

Módulos de Longitud Finita

En este capítulo usando el concepto de M-ideal podemos obtener alguna información de los módulos de longitud finita.

$\mathcal{S}$ denotará a la clase de módulos simples en $\sigma[M]$ y J el radical cogenerado por $\mathcal{S}$. ($J(X) = An_X(\mathcal{S})$).

Observación 4.0.56. Para todo $X \in \sigma[M]$, $J(X)$ es la intersección de todos los submódulos máximos de X.

Prueba. En efecto

$$J(X) = An_X(\mathcal{S}) = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom(X, S) \ y \ S \in \mathcal{S}\}$$

para cada $f \in Hom(X, S)$ $f \neq 0$ como S es simple $S = f(X) \cong X/Nuc(f)$ por tanto $Nuc(f)$ es un submódulo máximo de X.
Inversamente si $Y \subseteq X$ es un submódulo máximo de X para $\pi : X \longrightarrow X/Y$ tenemos $Nuc(\pi) = Y$ además $X/Y \in \mathcal{S}$ por lo tanto

$$J(X) = \bigcap\{Y \subseteq X \mid Y \ es \ maximo \ de \ X\}$$

$\square$

La siguiente es una versión del Lema de Nakayama en $\sigma[M]$.

Proposición 4.0.57. *Si X es finitamente generado y $X \in \sigma[M]$ entonces $J(M) \cdot X = X$ implica que $X = 0$.*

Prueba. Sea $X \in \sigma[M]$ finitamente generado y tal que $J(M) \cdot X = X$.
X finitamente generado implica que existe $X_0 \subseteq X$ máximo, de donde X/X_0 es un módulo simple en $\sigma[M]$, pero por la forma en que está definido $J(X)$ se tiene que $J(X) \subsetneq X$ ahora, si suponemos que $X \neq 0$ como $J(M) \subseteq J(M)$ entonces por el lema (1.0.23) $J(M) \cdot X \subseteq J(X) \neq X$ lo cual no es posible ya que habíamos supuesto $J(M) \cdot X = X$ por lo tanto $X = 0$. □

Definición 4.0.58. Un submódulo $Y \subseteq X$ es superfluo si $Y + X' = X$ implica que $X = X'$ para todo $X' \subseteq X$.

Corolario 4.0.59. Sea N un M-ideal.

(i) Si $N \subseteq J(M)$ entonces $N \cdot X$ es un submódulo superfluo de X para todo módulo finitamente generado $X \in \sigma[M]$.

(ii) Inversamente si M es finitamente generado y $N \cdot X$ es un submódulo superfluo en X para todo módulo finitamente generado $X \in \sigma[M]$ entonces $N \subseteq J(M)$.

Prueba. (i) Sea $Y \subseteq X$ tal que $(N \cdot X) + Y = X$. Si $x + Y \in X/Y$ por hipótesis $x = x' + y$ con $x' \in N \cdot X$ y $y \in Y$ entonces $x + Y = x' + Y$.
Por otro lado si $f \in Hom(X/Y, C)$ con $C \in \mathcal{C}_N$ entonces para $\pi : X \longrightarrow X/Y$ la proyección se tiene $f \circ \pi(x') = f(x' + Y) = 0$ pues $x' \in N \cdot X$ pero entonces $x' \in Nuc(f)$ es decir $x' + Y \in An_{X/Y}(\mathcal{C}_N) = N \cdot (X/Y)$ de donde $X/Y \subseteq N \cdot (X/Y) \subseteq J(M) \cdot (X/Y) \subseteq X/Y$ por lo tanto $J(M) \cdot (X/Y) = X/Y$ como $X \in \sigma[M]$ y finitamente generado, también $X/Y \in \sigma[M]$ y es finitamente generado, entonces por el teorema anterior $X/Y = 0$ es decir $X = Y$ por lo tanto $N \cdot X$ es un submódulo superfluo de X.

(ii) Sea $M' \subseteq M$ máximo y supongamos que $N \cdot M \nsubseteq M'$ entonces $(N \cdot M) + M' = M$ como $M \in \sigma[M]$ y es finitamente generado por hipótesis $N \cdot M$ es superfluo en M entonces $M' = M$ lo cual no puede ser pues M' era máximo por lo tanto $N \cdot M \subseteq M'$ pero esto pasa para cualquier submódulo máximo M'. Se debe tener entonces que $N \cdot M \subseteq J(M)$ ahora como N es un M-ideal se sigue que $N = N \cdot M \subseteq J(M)$. □

Definición 4.0.60. Si N es un M-ideal las potencias sucesivas de N se definen como:
$N^2 = N \cdot N$ y por inducción para todo $k \geq 3$ definimos $N^k = N \cdot N^{k-1}$.
Un M-ideal N es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N^n = 0$.

Proposición 4.0.61. *Si $M \in R$-Mod es un modulo de longitud finita y $J(M)$ es el radical de Jacobson de M, entonces $J(M)$ es nilpotente.*

Prueba. Consideremos la cadena descendente de submódulos de M:

$$J(M) \supseteq J(M)^2 \supseteq J(M)^3 \supseteq ...$$

M artiniano implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$J(M)^n = J(M)^{n+1} = J(M)^{n+2} = ...$$

Por otro lado M neteriano implica que $J(M)^n$ es finitamente generado y pertenece a $\sigma[M]$, como $J(M) \cdot J(M)^n = J(M)^n$ por (4.0.56) se tiene $J(M)^n = 0$. □

Lema 4.0.62. *Sea $X \in R$-Mod, entonces $Soc(X) = \bigcap\{Y \subseteq X \mid Y$ esencial en $X\}$.*

Prueba. Sea $S \subseteq X$ simple y $T = \bigcap\{Y \subseteq X \mid Y \text{ esencial en } X\}$.
Para $E \subseteq X$ esencial, $E \cap S \neq 0$ entonces $E \cap S = S$ es decir $S \subseteq E$ por lo tanto $Soc(X) \subseteq T$.

Por otro lado sea $N \subseteq T$ consideremos un pseudo-complemento L para N en X, entonces $N \oplus L$ es un submódulo esencial de X de donde $T \subseteq N \oplus L$. Ahora $(T \cap L) \cap N = 0$ y si $t \in T$ entonces $t = n + l$ con $n \in N \subseteq T$ y $l \in L$ se sigue que $l \in T \cap L$ es decir $t \in (T \cap L) + N$ esto prueba que $T = (T \cap L) \oplus N$ por lo tanto N es sumando directo de T entonces T es un submódulo semisimple de X pero esto implica que $T \subseteq Soc(X)$ lo que prueba el resultado. □

Proposición 4.0.63. *Sea $X \in R$-Mod. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) X contiene un submódulo artiniano esencial.

(ii) Si una familia de submódulos de X tiene intersección igual a cero, entonces existe una subfamilia finita con intersección igual a cero.

(iii) $Soc(X)$ es un submódulo esencial de X y $Soc(X)$ es finitamente generado.

Prueba. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de X tal que $\bigcap_{i\in I} X_i = 0$ y $N \subseteq X$ un submódulo artiniano esencial.
Consideremos la familia $\{N \cap X_i\}_{i\in I}$ de submódulos de N, entonces

$$\bigcap_{i\in I}(N \cap X_i) = N \cap (\bigcap_{i\in I} X_i) = 0$$

Como N es artiniano, existe $I' \subseteq I$ con I' finito tal que $\bigcap_{i\in I'}(N \cap X_i) = 0$, entonces $0 = \bigcap_{i\in I'}(N \cap X_i) = N \cap (\bigcap_{i\in I'} X_i)$, ahora N esencial en M implica que $\bigcap_{i\in I'} X_i = 0$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea $f : X \longrightarrow \prod_{i\in I} E(S_i)$ un monomorfismo donde S_i es simple para toda $i \in I$, entonces

$$0 = Nuc(f) = \bigcap_{i\in I} Nuc(f_i)$$

donde $f_i = \pi_i f$ y $\pi_i : \prod_{i\in I} E(S_i) \longrightarrow E(S_i)$ las proyecciones.
Por hipótesis existen $i_1, .., i_k$ tales que

$$0 = Nuc(f_{i_1}) \cap ... \cap Nuc(f_{i_k})$$

por lo tanto el morfismo $f' : X \longrightarrow E(S_{i_1}) \oplus ... \oplus E(S_{i_k})$ inducido por $\{f_{i_1}, ..., f_{i_k}\}$ es un monomorfismo. Como $Soc(\_)$ es un prerradical exacto izquierdo entonces

$$Soc(X) = X \cap Soc(\bigoplus_{j=1}^{k} E(S_{i_j})) = X \cap (S_{i_1} \oplus ... \oplus S_{i_k}) \subseteq S_{i_1} \oplus ... \oplus S_{i_k}$$

Por lo tanto $Soc(X)$ es esencial en X y $Soc(X)$ es finitamente generado.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Si $Soc(X) \subseteq X$ es finitamente generado entonces

$$Soc(X) = S_1 \oplus S_2 \oplus ... \oplus S_k$$

con S_i simple entonces $Soc(X)$ es artiniano y por hipótesis es esencial. $\square$

Un módulo que satisfaga las condiciones de la proposición (4.0.63) se llama finitamente cogenerado.

Proposición 4.0.64. *Sea $M \in R$-Mod. Supongamos que todo M-ideal de M es finitamente generado y que M es un generador de $\sigma[M]$, entonces M es de longitud finita si y sólo si para cada M-ideal N el cociente M/N es finitamente cogenerado.*

Prueba. $\Rightarrow$) Como M es artiniano entonces M/N es finitamente cogenerado para todo $N \subseteq M$, en particular si N es un M-ideal.
$\Leftarrow$) Como $J(M)\cdot\_\_$ es un radical entonces $J(M) \cdot (J(M)^{k-1}/J(M)^k) = 0$ por lo tanto existe un monomorfismo $\varphi : J(M)^{k-1}/J(M)^k \longrightarrow \prod_\alpha W_\alpha$ con $W_\alpha \in \mathcal{C}_{J(M)}$. Afirmamos que si $W \in \mathcal{C}_{J(M)}$ entonces W es un módulo $M/J(M)$ *– generado.*
En efecto sea $W \in \mathcal{C}_{J(M)}$, para toda $x \in W$ existen $\{f_1, f_2, ..., f_n\} \subseteq Hom(M, W)$

y $\{m_1, m_2, ..., m_n\} \subseteq M$ tales que $x = f_1(m_1) + f_2(m_2) + ... + f_n(m_n)$.
Para cada i consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_i"'] & M/J(M) \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "\overline{f}_i"] & 0 \\ W & & \end{tikzcd}$$

como $f_i(J(M)) = 0$ existe $\overline{f}_i : M/J(M) \longrightarrow W$ tal que $\overline{f}_i \circ \pi = f_i$ por lo tanto $x = \overline{f}_1(\overline{m}_1) + ... + \overline{f}_n(\overline{m}_n)$ es decir que W es un módulo $M/J(M)$-generado.
Por otro lado $M/J(M)$ se puede sumergir en un producto directo de módulos simples pero por hipótesis $M/J(M)$ es finitamente cogenerado por lo tanto $M/J(M)$ se sumerge en una suma directa finita de módulos simples por lo tanto $M/J(M)$ es semisimple. Como consecuencia la subcategoría $\sigma[M/J(M)]$ consta de módulos semisimples.
Como se había probado, $W \in \mathcal{C}_{J(M)}$ implica que W es un módulo en $\sigma[M/J(M)]$ y por tanto semisimple, además $J(M)^{k-1}/J(M)^k \hookrightarrow \prod_\alpha W_\alpha$ pero por hipótesis $J(M)^{k-1}/J(M)^k$ es finitamente cogenerado por lo tanto se sumerge en una suma directa finita de módulos simples entonces $J(M)^{k-1}/J(M)^k$ es de longitud finita, por lo tanto M es de longitud finita. $\square$

Proposición 4.0.65. *Sea M de longitud finita y $Hom(M, N) \neq 0$ para todo $0 \neq N \subseteq M$ M-ideal. Si M es un módulo M-primo entonces M es semisimple homogéneo.*

Prueba. Por la proposición (4.0.60) $J(M)$ es nilpotente digamos $J(M)^n = 0$. Entonces $J(M) \cdot J(M)^{n-1} = J(M)^n = 0$ pero $J(M) \neq 0$ por hipótesis $Hom(M, J(M)) \neq 0$ y como M es M-primo se tiene que $An_M(J(M)) = 0$ además $J(M) \subseteq An_M(J(M))$ entonces $J(M) = 0$.
Definimos $\varphi : M \longrightarrow \bigoplus_{M_\alpha maximo} M/M_\alpha$ como $\varphi(m) = (m + M_\alpha)_\alpha$, $Nuc(\varphi) = J(M) = 0$ por tanto φ es un monomorfismo, además, para toda α, M/M_α es

un módulo simple, es decir que M es un submódulo de una suma directa de módulos simples por lo tanto semisimple. Como M es de longitud finita, M es una suma finita de simples.

Supongamos ahora que M contiene dos submódulos simples no isomorfos, sean S y T las correspondientes componentes homogéneas de M. Como T es un sumando directo de M, entonces $T = f(M)$ donde f es el endomorfismo de M dado por $f = i\pi$, entonces $Hom(M,T) \neq 0$.

Por la proposición (2.0.42) T cogenera a M pero entonces T cogenera a S es decir S es un submódulo de un producto directo finito de copias de T entonces los simples que generan a S y T deben ser isomorfos, por lo tanto M debe ser homogéneo. □

El siguiente ejemplo muestra un módulo M de longitud finita que es M-primo pero no semisimple.

Ejemplo 4.0.66. Sea F un campo y $R = \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & F \end{pmatrix}$ el anillo de matrices triangulares inferiores de 2x2 sobre F. Sea M el ideal izquierdo $\begin{pmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$ y N el submódulo $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$.

En efecto M, N son ideales izquierdos de R ya que:

$$RM = \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ F+F & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} = M$$

$$RN = \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} = N$$

Ahora consideremos el ideal M, la retícula de submódulos de M es $0 \subseteq N \subseteq M$ por lo tanto M no es semisimple. Además para los módulos simples N y M/N se tiene que $Hom(M/N, N) = 0$ y $Hom(N, M/N) = 0$ esto pues si

$\begin{pmatrix} r & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} \in M$ entonces

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

Si $f : M/N \longrightarrow N$ entonces f esta dada por

$$f \left[\begin{pmatrix} r & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} r & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} f \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} r & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $f = 0$, entonces N y M/N no pueden ser isomorfos.

De aquí concluimos que N no es un módulo M-generado pues si lo fuera existiría $\varphi : M^{(\alpha)} \longrightarrow N$ epimorfismo, es decir que para alguna inclusión $i_\alpha : M \longrightarrow M^{(\alpha)}$ se tendría $\varphi \circ i_\alpha \neq 0$ y N simple implicaría que $\varphi \circ i_\alpha$ es epimorfismo es decir que $N \cong M/Nuc(\varphi \circ i_\alpha)$ con $Nuc(\varphi \circ i_\alpha)$ máximo en M por lo tanto $Nuc(\varphi \circ i_\alpha) = N$ entonces M y M/N serían isomorfos lo cual no puede ser, por lo tanto M no tiene submódulos propios distintos de cero M-generados lo cual implica que M es M-primo. Adicionalmente M/N y N no son isomorfos de donde $Hom(N, M/N) = 0$. Por la proposición (1.0.8) tenemos que N es un M-ideal.

Capítulo 5

Módulos Proyectivos

En esta sección veremos que simplificaciones obtenemos en el caso de que M es un módulo proyectivo en $\sigma[M]$. Algunos resultados son válidos con la hipótesis mas débil de que M sea casi-proyectivo.

Proposición 5.0.67. *Si M es casi-proyectivo, entonces un submódulo $N \subseteq M$ es un M-ideal si y sólo si N es un submódulo totalmente invariante de M.*

Prueba. $\Rightarrow$) Si $N \subseteq M$ es un M-ideal, entonces $N = An_M(M/N) = rad_{M/N}(M)$ es decir N es la imagen de M bajo un radical y por tanto un submódulo totalmente invariante de M.
$\Leftarrow$) Sea N un submódulo totalmente invariante de M y $f \in Hom(M, M/N)$ considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\pi"'] & M/N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por hipótesis existe $\overline{f} \in End_R(M)$ tal que $f = \pi \circ \overline{f}$ entonces $f(N) = \pi \circ \overline{f}(N) \subseteq \pi(N) = 0$ ya que N es totalmente invariante por lo tanto $f(N) = 0$ es decir N es un M-ideal. □

El siguiente ejemplo muestra que en general no todos los submódulos totalmente invariantes de M son M-ideales.

Ejemplo 5.0.68. Sea $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ en la categoría $\mathbb{Z}$-Mod en el ejemplo (2.0.34) se probamos que ningún submódulo propio distinto de cero $N \subseteq M$ es un M-ideal.
Por otro lado si $f \in End_{\mathbb{Z}}(M)$ y $0 \neq N \subsetneq M$, entonces $N \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ para alguna $k \in \mathbb{N}$ por lo tanto $f(N) \subseteq N$ ya que los elementos de $f(N)$ tienen orden menor o igual que p^k, entonces N es un submódulo totalmente invariante de M que no es un M-ideal.

Ejemplo 5.0.69. Si $M = R/I$ donde I es un ideal de R entonces $\sigma[M] = \sigma[R/I] = R/I$-Mod. Como R/I es libre en R/I-Mod, por lo tanto proyectivo en particular casi-proyectivo en R-Mod, entonces los M-ideales de R/I coinciden con los ideales de R/I ya que son los submódulos totalmente invariantes de R/I.

Proposición 5.0.70. *Sean K y N submódulos de M. Si M es casi-proyectivo entonces:*

(i) Supongamos que $N \subseteq K$ y que N es un M-ideal. Si K/N es un (M/N)-ideal en M/N, entonces K es un M-ideal.

(ii) Si N y K son M-ideales, entonces $N + K$ es un M-ideal.

Prueba. (i) Sea $f \in End_R(M)$ como M es casi-proyectivo y N es totalmente invariante entonces M/N es casi-proyectivo (ver apéndice), f induce un epimorfismo $\overline{f} : M/N \longrightarrow M/N$ dado por
$\overline{f}(m + N) = f(m) + N$.
$\overline{f}$ está bien definida pues si $m - m' \in N$ con N totalmente invariante se tiene que $f(m - m') \in N$ por lo tanto $f(m) + N = f(m') + N$.
K/N es por hipótesis un M-ideal por lo tanto un submódulo totalmente

invariante de M/N es decir $\overline{f}(K/N) = (f(K) + N)/N \subseteq K/N$ de donde $f(K) + N \subseteq K$ por lo tanto $f(K) \subseteq K$, entonces K es un submódulo totalmente invariante de M y por lo tanto un M-ideal.
(ii) Si $f \in End_R(M)$ entonces $f(N+K) = f(N)+f(K) \subseteq N+K$ pues N y K son totalmente invariantes por lo tanto $N+K$ también, es decir, $N+K$ es un M-ideal. $\square$.

Observación 5.0.71. En la siguiente proposición la condición $Hom(M, N) \neq 0$ para submódulos totalmente invariantes N es necesaria pues para los módulos del ejemplo (4.0.66) se tiene que

Si $\begin{pmatrix} r & 0 \\ s & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ht & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $h = 0$ es decir

$An_R(N) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} = M$ además si

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ s & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rk & 0 \\ sk+ht & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $r = 0$ por lo tanto $An_R(M) \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & F \end{pmatrix}$

de donde $An_R(N) \neq An_R(M)$ por lo tanto M no es R-primo sin embargo M es casi-proyectivo y M-primo pero $Hom(M, N) = 0$.

Proposición 5.0.72. *Sea M un módulo M-primo, si M es casi-proyectivo y $Hom(M, N) \neq 0$ para todo $0 \neq N \subseteq M$ submódulo totalmente invariante, entonces M es un módulo R-primo.*

Prueba. Sea $I \subseteq R$ un ideal de R y $0 \neq N \subseteq M$ tales que $IN = 0$.

Consideremos $K = \{m \in M \mid Im = 0\}$ observemos que $N \subseteq K$ entonces $K \neq 0$ además si $f \in End_R(M)$ y $m \in K$ entonces $If(m) = f(Im) = 0$ de donde $f(m) \in K$ por lo tanto K es un submódulo totalmente invariante de M. Por hipótesis $Hom(M, K) \neq 0$ como M es un módulo M-primo entonces $An_M(K) = 0$ es decir K cogenera a M esto implica que existe $\varphi : M \longrightarrow K^{\alpha}$ monomorfismo para algún conjunto α.
Multiplicando por I se tiene que $IM \subseteq I(K^{\alpha}) = (IK)^{\alpha} = 0$ de donde se sigue que M es R-primo. □

El siguiente ejemplo muestra que el inverso de la proposición (5.0.72) no es válido. Es decir exhibe un módulo M que no es M-primo, sin embargo M es R-primo y casi-proyectivo además, $Hom(M, N) \neq 0$ para todo N submódulo de M.

Ejemplo 5.0.73. Sea R un anillo simple con dos módulos simples no isomorfos S_1 y S_2. (Ejemplos de anillos de este tipo pueden encontrarse en [9]). Sea $M = S_1 \oplus S_2$ es claro que $An_R(S_i) = 0 = An_R(M)$ por lo tanto M es R-primo.
Por otro lado $Hom(M, N) \neq 0$ para todo $0 \neq N \subseteq M$ además , M no es M-primo pues S_1 no cogenera a M, en tal caso cogeneraría también a S_2, lo cual no puede ser por lo tanto $An_M(S_1) \neq An_M(M) = 0$ es decir M no es M-primo.

Para los siguientes resultados se necesita la hipótesis de que M sea proyectivo en $\sigma[M]$.

Lema 5.0.74. *Supongamos que M es proyectivo en $\sigma[M]$ y sea $N \subseteq M$. Si $p : X \longrightarrow Y$ es un epimorfismo con $X \in \sigma[M]$ entonces p manda de manera suprayectiva a*
$\sum_{f \in Hom(M,X)} f(N)$ en $\sum_{f \in Hom(M,Y)} f(N)$.

Prueba. Sea $y = \sum_{i=1}^{n} f_i(m_i)$ con $f_i \in Hom(M,Y)$ y $m_i \in N \subseteq M$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "\overline{f}_i"'] \arrow[d, "f_i"] & \\ X \arrow[r, "p"'] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

como $X \in \sigma[M]$ y M es proyectivo en $\sigma[M]$, para cada i existe $\overline{f}_i : M \longrightarrow X$ tal que $p \circ \overline{f}_i = f_i$ por lo tanto $p(\sum_{i=1}^{n} \overline{f}_i(m_i)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(m_i) = y$ con $\overline{f}_i \in Hom(M,X)$ lo que prueba el resultado. $\square$

Proposición 5.0.75. *Supongamos que M es proyectivo en $\sigma[M]$ y sea N un submódulo de M. Las siguientes condiciones son validas para todo módulo $X \in \sigma[M]$ y todo submódulo $Y \subseteq X$.*

(i) $N \cdot X = \sum_{f \in Hom(M,X)} f(N)$.

(ii) $N \cdot (X/Y) = 0$ *si y sólo si* $N \cdot X \subseteq Y$.

(iii) Si $N = An_M(X/Y)$, *entonces* $An_M(X/(N \cdot X)) = N$.

Prueba. (i) Sean $f \in Hom(M,X)$ y $g \in Hom(X,C)$ con $C \in \mathcal{C}_N$ si $Y = \sum_{f \in Hom(M,X)} f(N)$ entonces $g \circ f : M \longrightarrow C$. Por lo tanto $g \circ f(N) = 0$ es decir $f(N) \subseteq An_X(\mathcal{C}_N) = N \cdot X$ entonces $Y \subseteq N \cdot X$.
Por otro lado consideremos $\pi : X \longrightarrow X/Y$. Por el lema (5.0.74)

$$0 = \pi\left(\sum_{f \in Hom(M,X)} f(N)\right) = \sum_{f \in Hom(M,X/Y)} f(N)$$

es decir $f(N) = 0$ para toda $f \in Hom(M, X/Y)$, entonces $N \cdot X \subseteq Y$ y por lo tanto $N \cdot X = Y$.
$(ii) \Rightarrow)$ Si $N \cdot (X/Y) = 0$, entonces, como $N \cdot X$ es el menor submódulo de M con esta propiedad, se sigue que $N \cdot X \subseteq Y$.

$\Leftarrow$) Si $N \cdot X \subseteq Y$ y $f \in Hom(M, X/Y)$, para $\pi : X \longrightarrow X/Y$ y $n \in N$ por el lema (5.0.74) se tiene $f(n) = \pi(\sum_{i=1}^{m} f_i(n_i))$ con $f_i \in Hom(M, X)$ y $n_i \in N$ entonces por (i) $f(n) \in \pi(N \cdot X) \subseteq \pi(Y) = 0$ por lo tanto $f(N) = 0$ es decir $N \cdot (X/Y) = 0$.
(iii) Sea $N = An_M(X/Y)$ y $A = An_M(X/(N \cdot X))$ como M es proyectivo en $\sigma[M]$ por (ii) $N \cdot (X/(N \cdot X)) = 0$ lo que implica que $N \subseteq A$.
Inversamente como $A \cdot (X/(N \cdot X)) = 0$ se tiene que $A \cdot X \subseteq N \cdot X$ por otro lado $N \cdot (X/Y) = 0$ implica que $N \cdot X \subseteq Y$ entonces $A \cdot X \subseteq Y$ de donde $A \cdot (X/Y) = 0$ es decir $A \subseteq An_M(X/Y) = N$. □

Observación 5.0.76. Si M es proyectivo en $\sigma[M]$ y $N \cdot X = 0$ entonces $N \cdot (X/Y) = 0$ para todo $Y \subseteq X$ en particular $N \cdot f(X) = 0$ para todo $f \in Hom(X, K)$ con $K \in R$-Mod.

Observación 5.0.77. Si N es un M-ideal y $X = (M/N)^{(\alpha)}$ para algún conjunto α, entonces $N \cdot X = N \cdot [(M/N)^{(\alpha)}] = [N \cdot (M/N)]^{(\alpha)} = 0$ ya que $N \cdot \_\_$ es un radical.

Observación 5.0.78. En particular si $X \in \sigma[M/N]$, entonces $X \subseteq K$ con K un módulo M-generado por lo tanto $N \cdot X \subseteq N \cdot K = N \cdot ((M/N)^{(\alpha)}/K) = 0$ pues por la proposición (5.0.75) (ii), $N \cdot (M/N)^{(\alpha)} = 0 \subseteq K$ es decir $N \cdot X = 0$.

Corolario 5.0.79. Si M es proyectivo en $\sigma[M]$ y $N \subseteq M$, entonces $An_M(M/N)$ es el mayor M-ideal contenido en N.

Prueba. Si $K \subseteq M$ es un M-ideal tal que $K \subseteq N$ como K es un M-ideal $K \cdot M = K \subseteq N$ por la proposición (5.0.75) (ii) se tiene que $K \cdot (M/N) = 0$ es decir $K \subseteq An_M(M/N)$. □

A continuación mostraremos que la multiplicación definida en el capítulo 2 es asociativa cuando M es proyectivo en $\sigma[M]$.

Proposición 5.0.80. *Supongamos que M es proyectivo en $\sigma[M]$ y sean $K, N \subseteq M$ submódulos de M entonces.*

$$(K \cdot N) \cdot X = K \cdot (N \cdot X)$$

para todo $X \in \sigma[M]$.

Prueba. Para mostrar que $(K \cdot N) \cdot X \subseteq K \cdot (N \cdot X)$ sea $x \in (K \cdot N) \cdot X$ entonces por la proposición (5.0.75) (i)
$x = \sum_{i=1}^{n} f_i(m_i)$ con $f_i \in Hom(M, X)$ y $m_i \in K \cdot N$.
Para cada i $m_i = \sum_{j=1}^{n_j} g_{ij}(k_{ij})$ con $g_{ij} \in Hom(M, N)$ y $k_{ij} \in K$ entonces $x = \sum_{i=1}^{n} f_i(\sum_{j=1}^{n_j} g_{ij}(k_{ij})) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_j} f_i \circ g_{ij}(k_{ij})$
basta probar que $f_i \circ g_{ij} \in Hom(M, N \cdot X)$.
Como $g_{ij}(k_{ij}) \in N$ y $f_i \in Hom(M, X)$ entonces $f_i \circ g_{ij}(k_{ij}) \in \sum_{h \in Hom(M,X)} h(N) = N \cdot X$ por lo tanto $x \in K \cdot (N \cdot X)$.
Para la otra contención sea $x \in K \cdot (N \cdot X)$ entonces $x = \sum_{i=1}^{n} f_i(m_i)$ con $f_i \in Hom(M, N \cdot X)$ y $m_i \in K$.
Consideremos primero el caso de un solo elemento $m \in K$ y un solo morfismo $f \in Hom(M, N \cdot X)$.
Sea $h : M^{(Hom(M,X))} \longrightarrow X$ dada por $h((m_f)_{f \in (Hom(M,X))}) = \sum_{f \in Hom(M,X)} f(m_f)$.
Si g es la restricción de h a $N^{(Hom(M,X))}$ por la proposición (5.0.75) (i) la imagen de g es $N \cdot X$.
Como M es proyectivo en $\sigma[M]$ para f se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ N^{(Hom(M,X))} \arrow[r, "g"'] & N \cdot X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Entonces existe $\overline{f} : M \longrightarrow N^{(Hom(M,X))}$ tal que $g \circ \overline{f} = f$ tenemos entonces $\overline{f}(m) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \circ \pi_j \overline{f}(m)$ para algún conjunto finito de proyecciones $\pi_j : M^{(Hom(M,X))} \longrightarrow N$ e inclusiones $\lambda_j : M \longrightarrow M^{(Hom(M,X))}$.

Observemos que $\pi_j \circ \overline{f} : M \longrightarrow M$ y para cada j $\pi_j \circ \overline{f}(M) \subseteq N$.
Como $m \in K$ entonces podemos considerar $\pi \circ \overline{f}(m)$ como elemento de $K \cdot N = \sum_{d \in Hom(M,N)} d(K)$.
Por otro lado $h \circ \lambda_j : M \longrightarrow X$ y entonces $h \circ \lambda_j \circ \pi_j \circ \overline{f}(m) \in h \circ \lambda_j(K \cdot N)$ lo que implica que $h \circ \lambda_j \circ \pi_j \circ \overline{f}(m) \in (K \cdot N) \cdot X$ finalmente $f(m) = h \circ \overline{f}(m) = \sum_{j=1}^{n} h \circ \lambda_j \circ \pi_j \circ \overline{f}(m)$ y por lo tanto $f(m) \in (K \cdot N) \cdot X$.
Ahora para el elemento $x \in K \cdot (N \cdot X)$ con $x = \sum_{i=1}^{n} f_i(m_i)$ y para morfismos $f_i : M \longrightarrow N \cdot X$ lo anterior muestra que $x \in (K \cdot N) \cdot X$ lo que completa la prueba. □

Teorema 5.0.81. *Sea $P \subseteq M$ un M-ideal y supongamos que M es proyectivo en $\sigma[M]$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) P es un M-ideal primo.

(ii) $N \cdot K \subseteq P$ implica que $N \subseteq P$ o $K \subseteq P$ para cualesquiera M-ideales N y K con K un módulo M-generado.

(iii) M/P es un módulo M-primo.

Prueba. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sean N y K dos M-ideales de M con K M-generado tales que $N \cdot K \subseteq P$. Por hipótesis existe un módulo M-primo X tal que $P = An_M(X)$.
Supongamos que $K \nsubseteq P$ es decir que existe $f \in Hom(M, X)$ talque $f(K) \neq 0$. f induce un morfismo $\overline{f} : M/P \longrightarrow X$ dado por $\overline{f}(m + P) = f(m)$.
$\overline{f}$ está bien definida ya que si $m - m' \in P$ entonces $f(m - m') = 0$ por lo tanto $f(m) = f(m')$ como $N \cdot K \subseteq P$ por la proposición (5.0.75) (ii) $N \cdot (K/P) = 0$ ahora por la observación (5.0.76) $N \cdot \overline{f}(K/P) = 0$.
Por otro lado como K es un módulo M-generado, entonces K/P también lo es por lo tanto $\overline{f}(K/P)$ es un módulo M-generado.
Como $f(K) \neq 0$ entonces $\overline{f}(K/P) = f(K) \neq 0$ se sigue entonces de la proposición (2.0.28) (iv) que $N \cdot X = 0$ es decir $N \subseteq An_M(X) = P$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea $P \subseteq K \subseteq M$ y supongamos que K/P es un módulo M-generado de M/P distinto de cero tal que $N \cdot (K/P) = 0$ con N un M-ideal. Como K/P es un módulo M-generado existe $\varphi : M^{(\alpha)} \longrightarrow K/P$ epimorfismo. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & M^{(\alpha)} \arrow[dl, dotted, "\overline{\varphi}"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ K \arrow[r, "\pi"'] & K/P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como M es proyectivo en $\sigma[M]$ entonces $M^{(\alpha)}$ también, por lo tanto existe $\overline{\varphi} : M^{(\alpha)} \longrightarrow K/P$ tal que $\pi \circ \overline{\varphi} = \varphi$ donde π es la proyección canónica. Se tiene entonces $K/P = \pi \circ \overline{\varphi}(M^{(\alpha)}) = \overline{\varphi}(M^{(\alpha)}) + P/P$ con $\overline{\varphi}(M^{(\alpha)}) = L$ un submódulo de M que es M-generado.
Por otro lado como $K/P \neq 0$ entonces $L \nsubseteq P$ en vista de que $N \cdot (K/P) = 0$ entonces $N \cdot ((L + P)/P) = 0$ lo que implica que $N \cdot L \subseteq N \cdot (L + P) \subseteq P$. Consideremos ahora el submódulo $L \cdot M$ el cual es el menor M-ideal que contiene a L. Ya que M es proyectivo en $\sigma[M]$ y L es M-generado se sigue de la proposición (5.0.75) (i) que $L \cdot M$ es M-generado.
Mas aún, de la proposición (5.0.80) se sigue que $N \cdot (L \cdot M) = (N \cdot L) \cdot M$, como $N \cdot L \subseteq P$ y $P \cdot M = M$ ya que P es un M-ideal, entonces

$$N \cdot (L \cdot M) = (N \cdot L) \cdot M \subseteq P \cdot M = P$$

Por lo tanto $L \cdot M$ es un M-ideal M-generado tal que $N \cdot (L \cdot M) \subseteq P$, pero $L \cdot M \nsubseteq P$. Por la hipótesis se tiene entonces que $N \subseteq P$ de donde $N \cdot (M/P) = 0$ finalmente de la proposición (2.028) (iv) se sigue que M/P es un módulo M-primo.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Como M/P es un módulo M-primo y P es un M-ideal entonces $P = An_M(M/P)$ por lo tanto P es un M-ideal primo. $\square$

Proposición 5.0.82. *Sea N un submódulo de M y sea I un ideal izquierdo de R entonces.*

(i) *El ideal izquierdo $N \cdot R$ es un ideal bilateral de R, además si N es un M-ideal entonces $(N \cdot R)M \subseteq N$.*

(ii) *El submódulo IM es un M-ideal, además si I es un ideal bilateral de R entonces $(IM) \cdot R \subseteq I$.*

(iii) *Si M es proyectivo en $\sigma[M]$ entonces $(IN) \cdot X = I(N \cdot X)$ para todo $X \in \sigma[M]$.*

Prueba. (i) Como $N \cdot \_\_$ define un radical en R-Mod. entonces $N \cdot R$ es un ideal bilateral de R.

Si N es un M-ideal, por la observación (1.0.22) aplicada al radical $N \cdot \_\_$ tenemos que $(N \cdot R)M \subseteq N \cdot M = N$.

(ii) Por el ejemplo (1.0.5) IM es un M-ideal como $IM \subseteq IM$ e $I(\_\_)$ es un radical entonces por el lema (1.0.23) se tiene que $(IM) \cdot R \subseteq IR = I$.

(iii) Por la proposición (5.0.75) (i) se tiene que

$$(IN) \cdot X = \sum_{f \in Hom(M,X)} f(IN) = I \sum_{f \in Hom(M,X)} = I(N \cdot X)$$

.

$\square$

Capítulo 6

La correspondencia local de Gabriel

En este capítulo probaremos que la correspondencia local de Gabriel se tiene para módulos neterianos que cumplan:

(i) La condición H.

(ii) $Hom(M, X) \neq 0$ para todo $X \in \sigma[M]$.

Antes extenderemos algunos resultados conocidos de los anillos neterianos.

6.1 Módulos Neterianos

Proposición 6.1.1. *Sea M un módulo neteriano y X un cociente de una suma directa finita de copias de M entonces existe una cadena de submódulos*

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq X_{n+1} = X$$

tal que para cada $1 \leqslant i \leqslant n+1$ el cociente X_i/X_{i-1} es un módulo M-primo.

Prueba. Como X es M-generado, entonces existe $\varphi : M^n \longrightarrow X$ un epimorfismo entonces para alguna inclusión $i : M \longrightarrow M^n$ se debe tener $\varphi \circ i \neq 0$ por lo tanto $Hom(M, X) \neq 0$ entonces, por la proposición (3.0.50) X contiene un submódulo M-primo X_1.
Por otro lado como M es finitamente generado por ser neteriano, entonces X es finitamente generado, además M neteriano implica que X es neteriano y por lo tanto X/X_1 también es neteriano mas aún X/X_1 es M-generado (cociente de X) se sigue de la proposición (3.0.50) que X/X_1 contiene un submódulo M-primo X_2/X_1. Por inducción obtenemos una cadena

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq ...$$

Como X es neteriano entonces existe $X_n \subseteq X$ tal que $X_n = X_{n+k}$ para toda $1 \leqslant k$ por lo tanto

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq ... \subseteq X_n = X$$

es la cadena buscada con X_i/X_{i_1} un módulo M-primo. □

Definición 6.1.2. Se define el radical primo de un módulo, denotado como $P(M)$, como la intersección de todos los M-ideales primos de M.

Observación 6.1.3. Existe otra definición del radical primo de M como la intersección de todos los submódulos R-primos de M.
Estas dos definiciones difieren como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.1.4. Consideremos R, M y N como en el ejemplo (4.0.66) por la observación (5.0.71) sabemos que M no es un submódulo R-primo de M como tampoco los submódulos N y 0 por lo tanto la intersección de los submódulos primos de M es igual a M.
Por otro lado en el ejemplo (4.0.66) probamos que N es un M-ideal además N es máximo, entonces por la proposición (3.0.54) (i) se tiene que N es un

M-ideal primo. Como M es un módulo M-primo entonces $0 = An_M(M)$ es un M-ideal primo. Podemos concluir entonces que $P(M) = 0 \neq M$ lo que muestra que, en efecto, las dos definiciones son distintas.

Observación 6.1.5. Sea $\mathcal{C}$ la clase de todos los módulos M-primos entonces $P(M) = rad_{\mathcal{C}}(M)$.

Prueba. Sea P un M-ideal primo. Entonces existe X un módulo M-primo tal que $P = An_M(X)$ pero es claro que $rad_{\mathcal{C}}(M) = An_M(\mathcal{C}) \subseteq An_M(X) = P$ de donde $rad_{\mathcal{C}}(M) \subseteq P(M)$.
Por otro lado si $f : M \longrightarrow C$ con $C \in \mathcal{C}$ entonces $f(P(M)) \subseteq f(An_M(C)) = 0$ por lo tanto $P(M) \subseteq rad_{\mathcal{C}}(M)$ lo que prueba el resultado. □

Observación 6.1.6. Sea $X \in R$-Mod. Si $Y \subseteq X$ es tal que X/Y es un módulo M-primo entonces $rad_{\mathcal{C}}(X) \subseteq Y$. Además $P(M) \cdot X \subseteq Y$.

Prueba. Consideremos la proyección $\pi : X \longrightarrow X/Y$, como $X/Y \in \mathcal{C}$ entonces $rad_{\mathcal{C}}(X) \subseteq An_X(X/Y) \subseteq Nuc(\pi) = Y$.
Como $P(M) = rad_{\mathcal{C}}(M)$ por el lema (1.0.23) se tiene que $P(M) \cdot X \subseteq rad_{\mathcal{C}}(X) \subseteq Y$. □

Proposición 6.1.7. *Si M es un módulo neteriano entonces el radical primo $P(M)$ es un M-ideal nilpotente.*

Prueba. Por la proposición (6.1.1) es posible construir una sucesión de submódulos

$$0 = M_n \subseteq M_{n-1} \subseteq ... \subseteq M_1 \subseteq M_0 = M$$

tal que cada uno de los cocientes sea un módulo M-primo. Probaremos por inducción que $P(M)^i \subseteq M_i$ Para $i = 1$ $P(M) \subseteq M_1$ ya que M/M_1 es un módulo M-primo y entonces $P(M) \subseteq An_M(M_1) \subseteq Nuc(\pi) = M_1$. Si suponemos que $P(M)^i \subseteq M_i$ entonces

$$P(M)^{i+1} = P(M) \cdot P(M)^i \subseteq P(M) \cdot M_i \subseteq M_{i+1}$$

Por lo tanto $P(M)^n \subseteq M_n = 0$ es decir $P(M)^n = 0$. $\square$

6.2 La correspondencia de Gabriel

Definición 6.2.1. Un módulo $X \in \sigma[M]$ se dice que es finitamente M-generado si existe un epimorfismo $f : M^n \longrightarrow X$ para algún natural n.
Se dice que es finitamente M-anulado si existe un monomorfismo
$g : M/An_M(X) \longrightarrow X^m$ para algún natural m.

Definición 6.2.2. Un módulo M se dice que satisface la condición H si todo módulo finitamente M-generado es finitamente M-anulado.

Notemos que si $M = R$ y R es un anillo totalmente acotado (ver [5]) y neteriano entonces R satisface la condición H. Lo mismo es valido si M es un módulo artiniano ya que en este caso M/K es finitamente cogenerado.

En los siguientes resultados sobre la correspondencia de Gabriel además de la condición H supondremos que $Hom(M, X) \neq 0$ para todo módulo $X \in \sigma[M]$.
El siguiente ejemplo muestra que esta hipótesis es mas débil que suponer que M es un generador en $\sigma[M]$.

Ejemplo 6.2.3. Sea F un campo y R el anillo de matrices triangulares inferiores de 3x3 con entradas en F, denotemos como J al radical de Jacobson. de R. Sean

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos

$$Re_1 = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix}, Re_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & F & 0 \end{pmatrix}, Re_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

y el siguiente monomorfismo $i : Re_2 \longrightarrow Re_1$ dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq Re_1.$$

Observemos entonces que $R = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3$ es isomorfo a un submódulo se $Re_1 \oplus Re_1 \oplus Re_3$

Sea $M = Re_1 \oplus (Re_2/Je_2) \oplus Re_3$, entonces

$R \subseteq Re_1 \oplus Re_1 \oplus (Re_2/Je_2) \oplus (Re_2/Je_2) \oplus Re_3 \oplus Re_3 = M^2$

De aquí que $\sigma[M] = R$-Mod. Afirmamos que todo módulo simple de R-Mod es un cociente de M.

En efecto, notemos que los ideales máximos de R son:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & F & 0 \\ F & F & F \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ F & F & 0 \\ F & F & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ F & F & F \end{pmatrix}$$

El radical de Jacobson de R es

$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ F & F & 0 \end{pmatrix}$. Consideremos es submódulo de Re_1, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo tanto los módulos simples de R-Mod son:

$$R/I_2 \cong M/(Re_1 \oplus Re_3)\ ,\ R/I_3 \cong M/[Re_1 \oplus (Re_2/Je_2)]\ ,\ R/I_1 \cong M/[K \oplus (Re_2/Je_2) \oplus Re_3]$$

Por otro lado M es artiniano puesto que Re_2/Je_2 y Re_3 son submódulos simples y la retícula de módulos de Re_1 es

$$0 \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq Re_1$$

Por lo tanto M es artiniano esto implica que M^2 y por tanto $R \subseteq M^2$ también son artinianos. Por lo tanto todo $0 \neq X \in R-$Mod. X contiene un módulo simple y por lo tanto $Hom(M, X) \neq 0$.

Por otro lado M no es un generador de R-Mod. Esto se sigue del hecho de que $Hom(Re_1, Re_2) = 0$. Para probar esto notemos que

$$An_R(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & F & F \end{pmatrix} \text{ y que si } x \in Re_2, \text{ entonces } x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces $An_R(x) = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ F & 0 & F \end{pmatrix}$,

si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces $An_R(x) = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ F & F & 0 \\ F & F & 0 \end{pmatrix}$ finalmente

si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, tenemos que $An_R(x) = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en cualquier

caso tenemos que $An_R(e_1) \nsubseteq An_R(x)$ para todo $x \in Re_2$ por lo tanto

$Hom(Re_1, Re_2) = 0$ Además $Je_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \end{pmatrix}$ es el único submódulo

máximo de Re_2 entonces $(Re_2/Je_2) \oplus Re_3$ es un módulo semisimple y por tanto no puede generar a Re_2 ya que Re_2 no es semisimple puesto que

$$Soc(Re_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \end{pmatrix} \neq Re_2$$

por lo tanto M no es un generador de $\sigma[M]$.

Lema 6.2.4. *Supongamos que M es un módulo neteriano tal que $Hom(M, X) \neq 0$ para todo $0 \neq X \in \sigma[M]$. Entonces todo módulo uniforme distinto de cero en $\sigma[M]$ tiene un único M-ideal primo asociado.*

Prueba. Sea $X \neq 0$ un módulo uniforme en $\sigma[M]$, como $Hom(M, X) \neq 0$ entonces por la proposición (3.0.50) X contiene un submódulo M primo Y tal que $P = An_M(Y)$. Supongamos que existe $Q = An_M(Y')$ otro M-ideal primo asociado a X como X es uniforme entonces $(Y \cap Y') \neq 0$ y por lo tanto $Hom(M, Y \cap Y') \neq 0$. Ahora como Y y Y' son módulos M-primos se tiene que

$$P = An_M(Y) = An_M(Y \cap Y') = An_M(Y') = Q$$

Por lo tanto M tiene un único M-ideal primo asociado. □

Teorema 6.2.5. *Sea M un módulo neteriano. Si M satisface la condición H y $Hom(M, X) \neq 0$ para todo $X \in \sigma[M]$ entonces existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases de isomorfismo de módulos M-inyectivos inescindibles en $\sigma[M]$ y el conjunto de los M-ideales primos.*

Prueba. Sea U un módulo M-inyectivo inescindible en $\sigma[M]$. Entonces U es uniforme (ver Apéndice). Por el lema (6.2.4) U tiene un único M-ideal primo asociado por lo tanto la función que le asigna a U su M-ideal primo asociado esta bien definida. Por el corolario (2.0.29) podemos suponer sin perdida de generalidad que $P = An_M(U_1)$ donde U_1 es un submódulo M-primo que es cociente de M. Como M satisface la condición H y U_1 es finitamente M generado se sigue que U_1 es finitamente M-anulado por lo tanto existe un monomorfismo

$$0 \longrightarrow M/P \longrightarrow U_1^n \longrightarrow U^n$$

de M/P es una suma directa finita de copias de U. Considerando este morfismo en R-Mod. induce un morfismo

$$0 \longrightarrow E(M/P) \longrightarrow E(U)^n$$

entre las respectivas cápsulas inyectivas en R-Mod. Como U es uniforme, entonces $E(U)$ es un R-modulo inyectivo inescindible y por lo tanto, por el teorema de Krull-Schmidt-Azumaya (ver [2]) $E(M/P)$ es isomorfo a una suma directa de copias de $E(U)$. Si X es un módulo M-inyectivo inescindible en $\sigma[M]$ con P su M-ideal primo asociado obtenemos análogamente un monomorfismo

$$0 \longrightarrow M/P \longrightarrow X^m$$

para algún natural m. Como X es uniforme nuevamente por el teorema de Krull-Schmidt-Azumaya $E(M/P)$ es isomorfo a una suma directa de copias de $E(X)$ y por lo tanto $E(U) \cong E(X)$ de donde (ver A.2.8)

$$X = tr^M(E(X)) \cong tr^M(E(U)) = U$$

de aquí que la correspondencia es inyectiva. Para probar ahora que la correspondencia en sobre sea P un M-ideal primo entonces existe $X \in \sigma[M]$ tal que X es M-primo y $P = An_M(X)$. Por hipótesis $Hom(M, Y) \neq 0$ para $0 \neq Y \subseteq X$ por lo tanto Y es M-primo, además $An_M(X) = An_M(Y)$ para todo submódulo no cero Y de X esto implica que P es un M-ideal primo asociado a Y. Consideremos $\widehat{X}$ la cápsula inyectiva de X en $\sigma[M]$ por el Teorema de Matlis (A.3.8) $\widehat{X} = \bigoplus_{\alpha \in A} K_\alpha$ donde K_α es un módulo M-inyectivo inescindible en $\sigma[M]$. Como X es esencial en $\widehat{X}$ entonces para toda $\alpha \in A$ $0 \neq (X \cap K_\alpha) \subseteq X$ de donde $An_M(X \cap K_\alpha) = P$, además $X \cap K_\alpha \subseteq K_\alpha$ por lo tanto P es un M-ideal primo asociado a K_α un módulo M-inyectivo inescindible en $\sigma[M]$. Esto prueba que la correspondencia es biyectiva. □

La siguiente proposición muestra que bajo las hipótesis del teorema (6.2.5) los M-ideales primos pueden describirse mas detalladamente. La hipótesis $Hom(M, X) \neq 0$ es necesaria , esto lo muestra el módulo M del ejemplo (4.0.66). M satisface la condición H ya que es artiniano, 0 es un M-ideal primo pero M no es semicompresible ya que $Hom(M, N) = 0$.

Proposición 6.2.6. *Sea M un módulo neteriano que satisface la condición H y tal que $Hom(M, X) \neq 0$ para todo $X \in \sigma[M]$. Si P es un M-ideal primo entonces M/P es un módulo semicompresible.*

Prueba. Supongamos que P es un M-ideal primo con $P = An_M(X)$ para un módulo M-primo $X \in \sigma[M]$. Por hipótesis existe $0 \neq h \in Hom(M, X)$ y por el corolario (2.0.29) $h(M)$ es M-primo. Como $P = An_M(h(M))$ podemos suponer sin perdida de generalidad que X es finitamente M-generado. Entonces X es finitamente M-anulado ya que M satisface la condición H, por lo tanto existe un monomorfismo $f : M/P \longrightarrow X^m$ para algún natural m. Sea ahora $L \subseteq M/P$ distinto de cero, como M/P es neteriano, por el corolario (A.3.9) L contiene un submódulo uniforme K. Por hipótesis $Hom(M, K) \neq 0$

por lo tanto podemos suponer sin perdida de generalidad que K es un cociente de M. Consideremos $f_i : M/P \longrightarrow X$ las componentes del monomorfismo $f : M/P \longrightarrow X^m$ entonces $\bigcap_{i=1}^{m} Nuc(f_i) = 0$ como K es uniforme entonces $(K \cap Nuc(f_i)) = 0$ implica que para alguna i, $K \cap Nuc(f_i) = 0$ pero entonces $f_i \mid_K : K \longrightarrow X$ es un monomorfismo de donde K es isomorfo a un submódulo de X y como $Hom(M, K) \neq 0$ entonces $An_M(K) = P$, ya que X es M-primo. Finalmente como K es cociente de M entonces es finitamente M-generado. M cumple la condición H por lo tanto K es finitamente anulado, es decir existe un monomorfismo $g : M/P \longrightarrow K^n \subseteq L^n$ para algún natural n de aquí se sigue que M/P es semicompresible. $\square$

Lema 6.2.7. *Sea M un módulo neteriano casi-proyectivo que satisface la condición H. Si P es un submódulo totalmente invariante máximo de M entonces M/P es un módulo semisimple homogéneo.*

Prueba. Sea $P \subset M$ un submódulo totalmente invariante máximo de M. Como M es neteriano existe un submódulo máximo K de M tal que $P \subseteq K \subset M$. Consideremos $f : M \longrightarrow M/K$ un morfismo arbitrario y $\pi_1 : M \longrightarrow M/P$, $\pi_2 : M/P \longrightarrow M/K$ las proyecciones canónicas. Consideremos el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[d, "f"] \arrow[dll, dotted, "\overline{f}"'] & \\ M \arrow[r, "\pi_1"'] & M/P \arrow[r, "\pi_2"'] & M/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

como M es casi-proyectivo existe $\overline{f} \in End(M)$ tal que $\pi_2\pi_1\overline{f} = f$. Como P es totalmente invariante entonces $\pi_1\overline{f}(P) = 0$ de donde $f(P) = \pi_2\pi_1\overline{f}(P) = 0$ por lo tanto $P \subseteq An_M(M/K)$ pero como P es un M-ideal máximo (ver proposición 5.0.67) entonces $P = An_M(M/K)$. Por otro lado M/K es finitamente M-generado y por hipótesis M/K es finitamente anulado por lo tanto M/P es un submódulo de una suma directa finita de copias del módulo simple M/K por tanto M/P es semisimple homogéneo. $\square$

Las siguientes proposiciones generalizan propiedades de los anillos neterianos totalmente acotados a módulos neterianos casi-proyectivos que satisfacen la condición H.

Proposición 6.2.8. *Sea M un módulo neteriano casi-proyectivo que satisface la condición H. Si todo M-ideal primo es un submódulo totalmente invariante máximo , entonces M es de longitud finita.*

Prueba. Por la proposición (3.0.5) M contiene un submódulo M-primo M_1. Además por el corolario (2.0.29) podemos suponer sin perdida de generalidad que M_1 es un cociente de M. Consideremos el epimorfismo $f : M \longrightarrow M_1$ y sea $\overline{f} : M/P \longrightarrow M_1$ donde $P = An_M(M_1)$ el morfismo definido como $\overline{f}(m+P) = f(m)$ el cual esta bien definido y es un epimorfismo, es decir M_1 es un cociente de M/P. Por el lema (6.2.7) M/P es un módulo semisimple homogéneo y entonces M_1 es neteriano y semisimple por lo tanto de longitud finita. Análogamente a la prueba de la proposición (6.1.1) es posible construir una sucesión de submódulos

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ... \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

tal que cada cociente sea un módulo M-primo de longitud finita y por lo tanto M tiene longitud finita. □

Proposición 6.2.9. *Sea M un módulo casi-proyectivo que satisface la condición H. Si $N \subseteq M$ es un submódulo totalmente invariante de M, entonces M/N satisface la condición H.*

Prueba. Sea X un módulo finitamente M/N-generado, con un epimorfismo $f : (M/N)^k \longrightarrow X$, entonces X es finitamente M-generado y por lo tanto finitamente M-anulado ya que M satisface la condición H, por lo tanto existe un monomorfismo $f : M/An_M(X) \longrightarrow X^n$ para algún natural n.
Afirmamos que $N \subseteq An_M(X)$ y además $(M/N)/An_{M/N}(X) \cong M/An_M(X)$.

Como M es casi-proyectivo entonces es M^k-proyectivo (ver Apéndice). Para un morfismo $g \in Hom(M, X)$ consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[d, "g"] \arrow[dll, dotted, "\overline{g}"'] & \\ M^k \arrow[r, "\pi"'] & (M/N)^k \arrow[r, "f"'] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

entonces existe $\overline{g} : M \longrightarrow M^k$ tal que $f\pi\overline{g} = g$, como $N = An_M(M/N)$ por ser un M-ideal (ver proposición 5.0.67) se tiene que $\pi\overline{g}(N) = 0$ de donde $N \subseteq Nuc(g)$ por lo tanto $N \subseteq An_M(X)$.

Sea $\varphi : M/An_M(X) \longrightarrow (M/N)/An_{M/N}(X)$ el morfismo dado por $\varphi(m + An_M(X)) = (m + N) + An_{M/N}(X)$.

Si $m - m' \in An_M(X)$ entonces para todo morfismo $h \in Hom(M/N, X)$ se tiene que $h((m - m)' + N) = 0$ por lo tanto $(m - m') + N \in An_{M/N}(X)$, es decir que φ esta bien definida. Sea $m + An_M(X) \in Nuc(\phi)$ entonces $m + N \in An_{M/N}(X)$. Para todo morfismo $p \in Hom(M, X)$, como $N \subseteq An_M(X)$ se tiene que el morfismo $\overline{p} : M/N \longrightarrow X$ dado por $\overline{p}(x + N) = p(x)$ esta bien definido, como $0 = \overline{p}(m + N) = p(m)$ entonces $m \in An_M(X)$ es decir φ es un monomorfismo.

Claramente φ es un epimorfismo y por lo tanto $M/An_M(X) \cong (M/N)An_{M/N}(X)$
Se sigue de esto que M/N satisface la condición H. $\square$

Apéndice A

La Categoría $\sigma[M]$

A.1 Propiedades de $\sigma[M]$

Definición A.1.1. Sea M en R-Mod. Un módulo X se dice que esta generado por M o que M genera a X si existe un epimorfismo $\varphi : M^{(\beta)} \longrightarrow X$ para algún conjunto β. Un módulo Y se dice que esta subgenerado por M o que M subgenera a Y si Y es un submódulo de un módulo M-generado.

Observemos que los cocientes y las sumas directas de módulos M-generados son también M-generados.

A la subcategoría plena de R-Mod cuyos objetos son los módulos subgenerados por M la denotaremos como $\sigma[M]$. Las siguientes proposiciones resumen las propiedades mas importantes de $\sigma[M]$ que se usaron a lo largo de este trabajo.

Proposición A.1.2. *Sea M un R-módulo izquierdo, entonces:*

(i) Si $N \in \sigma[M]$ y N' es cualquier submódulo de N entonces $N' \in \sigma[M]$ y $N/N' \in \sigma[M]$.

(ii) Si $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de módulos en $\sigma[M]$ entonces $\bigoplus_{\alpha \in A} N_\alpha$ pertenece a $\sigma[M]$ y es igual al coproducto de la familia en $\sigma[M]$.

(iii) Los conjuntos

$$\mathcal{M}_e = \{U \subseteq M^{(\mathbb{N})} \mid U finitamente\ generado\} \ y\ \mathcal{M}_z = \{Rm \mid m \in M^{(\mathbb{N})}\}$$

son conjuntos de generadores en $\sigma[M]$.

(iv) Si $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de módulos en $\sigma[M]$, entonces el producto de la familia existe y esta dado por

$$\prod_A^M N_\alpha = tr(\mathcal{U}_e, \prod_A N_\alpha)$$

donde $\mathcal{U}_e = \bigoplus\{U \mid U \in \mathcal{M}_e\}$.

Prueba. (i) Sea $N' \subseteq N$ con $N \in \sigma[M]$. Como N es un módulo subgenerado por M entonces $N' \subseteq N \subseteq K$ con K un módulo M-generado se sigue de la definición que $N \in \sigma[M]$.
K M-generado implica que K/N' es también M-generado y como $N/N' \subseteq K/N'$ tenemos que $N/N' \in \sigma[M]$.
(ii) Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de módulos en $\sigma[M]$ y $N_\alpha \subseteq M_\alpha$ con M_α módulo M-generado , entonces $\bigoplus_A N_\alpha \subseteq \bigoplus_A M_\alpha$ y además $\bigoplus_A M_\alpha$ en un módulo M-generado por lo tanto $\bigoplus_A N_\alpha \in \sigma[M]$.
(iii) Es suficiente probar que para cada $N \in \sigma[M]$, todo submódulo cíclico $Rn \subseteq N$, $n \in N$, esta generado por $\mathcal{M}_z$ (y por lo tanto por $\mathcal{M}_e$): Por definición existe un módulo M-generado $\overline{N}$ con $N \subseteq \overline{N}$.
Sea $\varphi : M^{(\beta)} \longrightarrow \overline{N}$ un epimorfismo y sea $m \in M^{(\beta)}$ tal que $\varphi(m) = n \in N$. Entonces $m \in M^{(\mathbb{N})}$, es decir, $Rm \in \mathcal{M}_z$ y la restricción $\varphi\mid_{Rm}: Rm \longrightarrow Rn$ es un epimorfismo.
(iv) Sea $\{f_\alpha : X \longrightarrow N_\alpha\}$ una familia de morfismos en $\sigma[M]$ y $X \in \sigma[M]$. Por la propiedad del producto en R-Mod, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\prod_A N_\alpha \arrow[r, "\pi_\alpha"] & N_\alpha \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

donde f es el morfismo inducido por los $\{f_\alpha\}_A$. Como $X \in \sigma[M]$ entonces $f(X)$ también esta en $\sigma[M]$, es decir

$$f(X) \subseteq tr(\mathcal{M}_e, \prod_A N_\alpha) = tr(\mathcal{U}_e, \prod_A N_\alpha)$$

Por lo tanto $tr(\mathcal{U}_e, \prod_A N_\alpha)$ junto con las restricciones de las proyecciones canónicas π_α es el producto de $\{N_\alpha\}_A$ en $\sigma[M]$. $\square$

En $\sigma[M]$, el producto de cualquier familia de módulos no necesariamente coincide con el producto en R-Mod, por ejemplo, si $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{Z} \mid p\, es\, primo\}$ y $M = \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p$, entonces $\mathbb{Z}_p \in \sigma[M]$ y por lo tanto $\prod^M_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p \in \sigma[M]$. Ahora , usando el hecho de que cualquier suma directa de grupos de torsión es de torsión y que cocientes de un grupo de torsión, nuevamente es de torsión, concluimos que $\prod^M_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p \in \sigma[M]$ es un grupo de torsión (como grupo abeliano), por lo tanto $\prod^M_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p \in \sigma[M]$, no puede ser isomorfo a $\prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p \in$ $\mathbb{Z}$-Mod que no es de torsión.

A.2 Módulos Inyectivos en $\sigma[M]$

Un resultado importante para poder probar que la correspondencia de Gabriel es suprayectiva es el Teorema de Matlis que probaremos en la siguiente sección. Daremos aquí algunos resultados preliminares sobre módulos M-inyectivos.

Definición A.2.1. Sean M y E R-módulos. E es un módulo M-inyectivo si para todo submódulo $K \subseteq M$ y $g \in Hom(K, E)$,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dotted, "\overline{g}"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

existe un morfismo $\overline{g} : M \longrightarrow E$ tal que $\overline{g}i = g$.
Un módulo E es un modulo auto-inyectivo ó casi-inyectivo si E es E-inyectivo.

Un módulo $E \in \sigma[M]$ es inyectivo en $\sigma[M]$ si E es N-inyectivo para todo $N \in \sigma[M]$.

Observación A.2.2. Como sabemos el funtor $Hom(\ ,E)$ es exacto izquierdo. Entonces el módulo E es M-inyectivo si y solo si el funtor $Hom(\ ,E)$ es exacto con respecto a todas las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

Observación A.2.3. Se sigue de la definición que si E es un módulo inyectivo en $\sigma[M]$ entonces toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

en $\sigma[M]$ se escinde y por lo tanto E es sumando directo de cualquier módulo en $\sigma[M]$ que lo contenga.

La siguiente proposición muestra que los módulos M-inyectivos también son inyectivos respecto a submódulos y cocientes de M.

Proposición A.2.4. *(i) Sea E un módulo M-inyectivo y*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta en R-Mod, entonces E es un módulo M' y M''-inyectivo.

(ii) Sea $\{M_\lambda\}_\Lambda$ una familia de R-módulos, si E es un módulo M_λ-inyectivo para toda λ, entonces E es un módulo $\bigoplus_\Lambda M_\lambda$-inyectivo.

Prueba. (i) Sean M' como en las hipótesis, $K \subseteq M'$ y $g \in Hom(K,E)$ considera

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[dll, dotted, "\overline{g}"] \\ & E & & \end{tikzcd}$$

E M-inyectivo implica que existe $\overline{g} \in Hom(M,E)$ tal que $(\overline{g}f)i = g$ por lo tanto E es M'-inyectivo.

Sea $L \subseteq M''$ consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & L \arrow[d, "i"] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

formando el producto fibrado de los morfismos (i,g) obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

como E es M-inyectivo, aplicando el funtor exacto $Hom(\ ,E)$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom(M'',E) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{i}"'] & Hom(M,E) \arrow[r] \arrow[d] & Hom(M',E) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom(L,E) \arrow[r] & Hom(P,E) \arrow[r] \arrow[d] & Hom(M',E) & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

como el diagrama anterior es conmutativo y exacto entonces $\bar{i}$ es un epimorfismo por lo tanto E es un módulo M''-inyectivo.

(ii) Sean E M_λ-inyectivo para toda $\lambda \in \Lambda$, $M = \bigoplus_\Lambda M_\lambda$ y $K \subseteq M$. Para un morfismo $g : K \longrightarrow E$, consideremos el conjunto

$$\mathcal{F} = \{h : L \longrightarrow E \mid K \subseteq L \subseteq M \ y \ H\mid_K = g\}$$

definamos un orden en $\mathcal{F}$ como

$$(h_1 : L_1 \longrightarrow E) < (h_2 : L_2 \longrightarrow E) \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2 \ y \ h_2\mid_{L_1} = h_1$$

$\mathcal{F}$ es inductivo. En efecto sea

$$(h_1 : L_1 \longrightarrow E) < (h_2 : L_2 \longrightarrow E) < ... < (h_n : L_n \longrightarrow E) < ...$$

una cadena en $\mathcal{F}$. Sea $h : \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i \longrightarrow E$ dado por: para cada $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ $x \in L_j$ para alguna j entonces $h(x) = h_j(x) \in E$. Ya que para toda $k > j$ $h_k\mid_{L_j} = h_j$ el morfismo esta bien definido, entonces $h : \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i \longrightarrow E \in \mathcal{F}$ es una cota para la cadena por lo tanto el Lema de Zorn implica que existe $(h_0 : L_0 \longrightarrow E)$ máximo de $\mathcal{F}$.
Afirmamos que $M = L_0$.
Para cada $\lambda \in \Lambda$ se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_0 \cap M_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & M_\lambda \arrow[d, dotted, "h_\lambda"] \\
& L_0 \arrow[r, "h_0"'] & E
\end{tikzcd}$$

por hipótesis E es M_λ-inyectivo por lo tanto existe $h_\lambda : M_\lambda \longrightarrow E$ tal que el diagrama conmuta. Ahora consideremos $h^* : L_0 + M_\lambda \longrightarrow E$ dado por $h^*(l + m_\lambda) = h_0(l) + h_\lambda(m_\lambda)$, este morfismo esta bien definido ya que si $l - l' = m_\lambda - m'_\lambda \in L_0 \cap M_\lambda$ entonces $h_0(l - l') = h_\lambda(m_\lambda - m'_\lambda)$ por lo tanto $(h^* : M_\lambda \longrightarrow E) \in \mathcal{F}$ y es mayor que $(h_0 : L_0 \longrightarrow E)$, por ser este un máximo de $\mathcal{F}$ se debe tener $(h^* : L_0 + M_\lambda \longrightarrow E) = (h_0 : L_0 \longrightarrow E)$, en particular $L_0 + M_\lambda = L_0$ es decir $M_\lambda \subseteq L_0$ pero esto es cierto para toda λ por lo tanto $L_0 = M$ entonces h^* completa el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dotted, "h^*"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

lo cual implica que E es M-inyectivo. $\square$

Proposición A.2.5. *El producto de una familia de módulos M-inyectivos es M-inyectivo.*

Prueba. Sea $\{M_\alpha\}_A$ una familia de submódulos M-inyectivos en $\sigma[M]$ consideremos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[ddl, dotted, "f_\alpha"] \\
& \prod_A^M M_\alpha \arrow[d, "\pi_\alpha"'] & \\
& M_\alpha &
\end{tikzcd}$$

como M_α es M-inyectivo, entonces existe $f_\alpha : M \longrightarrow M_\alpha$ un morfismo tal que $f_\alpha i = \pi_\alpha f$ donde π_α son las proyecciones canónicas restringidas a $tr(\mathcal{U}_e, \prod_A M_\alpha) = \prod_\alpha^M M_\alpha$.
La familia $\{f_\alpha\}_A$ induce $\overline{f} : M \longrightarrow \prod_A^M M_\alpha$ con $\pi_\alpha \overline{f} = f_\alpha$, por lo tanto $\pi_\alpha \overline{f} i = f_\alpha i = \pi_\alpha f$ por lo tanto $f = \overline{f} i$, es decir $\prod_A^M M_\alpha$ es M-inyectivo. $\square$

Proposición A.2.6. *Sea $E \in \sigma[M]$, entonces E es un módulo inyectivo en $\sigma[M]$ si y solo si E es M-inyectivo.*

Prueba. $\Rightarrow$) es claro.
$\Leftarrow$) Sea $N \in \sigma[M]$, es decir, N es un submódulo de un cociente de una suma directa de copias de M por la proposición (A.2.4) E es N-inyectivo por lo tanto inyectivo en $\sigma[M]$. $\square$

Definición A.2.7. Sea $N \in \sigma[M]$, el módulo denotado $\widehat{N} \in \sigma[M]$ es la cápsula inyectiva de N en $\sigma[M]$ ó cápsula M-inyectiva, si $\widehat{N}$ es inyectivo en $\sigma[M]$ y $N \subseteq_e \widehat{N}$.

La siguiente proposición muestra que todo módulo $N \in \sigma[M]$ tiene cápsula M-inyectiva, en general la cápsula inyectiva en R-Mod de N no coincide con $\widehat{N}$.

Proposición A.2.8. *Todo módulo $N \in \sigma[M]$ tiene cápsula inyectiva $\widehat{N}$ en $\sigma[M]$ y esta es única salvo isomorfismo, mas aun si $E(N)$ es la cápsula inyectiva de N en R-Mod, entonces $\widehat{N} = tr^M(E(N))$.*

Prueba. Probaremos primero la unicidad, sean $\widehat{N}_1$ y $\widehat{N}_2$ dos cápsulas inyectivas de N en $\sigma[M]$ consideremos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & \widehat{N}_1 \arrow[dl, dotted, "\phi"] \\ & \widehat{N}_2 & \end{tikzcd}$$

como $\widehat{N}_2$ es inyectivo en $\sigma[M]$ existe $\phi : \widehat{N}_1 \longrightarrow \widehat{N}_2$ tal que $\phi i = j$, como $Nuc(\phi) \cap N = 0$ $N \subseteq_e \widehat{N}_1$ implica que $Nuc(\phi) = 0$ por lo tanto ϕ es mono. Por otro lado $N \subseteq_e \widehat{N}_1$ implica que $\phi(\widehat{N}_1) \cong \widehat{N}_1$ es esencial en $\widehat{N}_2$ además $\phi(\widehat{N}_1)$ es un sumando directo de $\widehat{N}_2$ por lo tanto $\phi(\widehat{N}_1) = \widehat{N}_2$ lo que prueba la unicidad.

Para probar la existencia sean $N \in \sigma[M]$ y $E(N)$ la cápsula inyectiva de N en R-Mod.

Afirmamos que $N \subseteq tr^M(E(N))$, En efecto: Como $N \in \sigma[M]$, entonces $N \subseteq X$ con X un modulo M-generado, consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i'"'] & X \arrow[dl, dotted, "f"] \\ & E(N) & \end{tikzcd}$$

Como $E(N)$ es inyectivo en R-Mod, existe $f : X \longrightarrow E(N)$ tal que hace el diagrama conmutativo.

Además como X es M-generado, entonces $f(X)$ es M-generado y de aquí que $N \subseteq f(X) \subseteq tr^M(E(N))$. Por una sencilla modificación de este argumento, obtenemos que $tr^M(E(N))$ es un módulo M-inyectivo. $\overline{f}(M) \subseteq tr^M(E(N))$ por lo tanto $tr^M(E(N))$ y por lo tanto una cápsula inyectiva para N en $\sigma[M]$.

Se sigue de la unicidad que $\widehat{N} \cong tr^M(E(N))$. □

Como consecuencia, si E es un módulo inyectivo y $E \in \sigma[M]$ entonces $\widehat{E} = E$.

A.3 El Teorema de Matlis

Un estudio mas amplio de $\sigma[M]$ se encuentra en [11] , solo mencionaremos algunas propiedades mas de los módulos inyectivos en $\sigma[M]$.

Proposición A.3.1. *Sea E un módulo inyectivo en $\sigma[M]$, entonces E es uniforme si y solo si E es inescindible.*

Definición A.3.2. Un módulo M es localmente neteriano si todo submódulo finitamente generado de M es neteriano.

Proposición A.3.3. *Sea M un módulo localmente neteriano. Entonces todo submódulo y todo cociente de M es localmente neteriano, además, cualquier suma directa finita de copias de M es localmente neteriano.*

Prueba. Sea M un módulo localmente neteriano y $N \subseteq M$. Entonces claramente todo submódulo finitamente generado de N es submódulo de M y por hipótesis neteriano, por lo tanto N es localmente neteriano.
Sea ahora $K/N \subseteq M/N$ un submódulo finitamente generado. Entonces existen $\{x_1 + N, ..., x_n + N\} \subseteq K/N$ tales que $\sum_{i=1}^{n}(Rx_i + N)/N = K/N$, por hipótesis, para toda i, Rx_i es neteriano por lo tanto $(Rx_i + N)/N$ y $\bigoplus_{i=1}^{n}(Rx_i + N)/N$ también son neterianos.
Como $\sum_{i=1}^{n}(Rx_i + N)/N = K/N$ es un cociente de $\bigoplus_{i=1}^{n}(Rx_i + N)/N$, entonces también es un modulo neteriano, por lo tanto K/N es localmente neteriano.
Sea M^n una suma directa finita de copias de M y $N \subseteq M^n$ finitamente generado. Entonces $N = \sum_{i=1}^{m} R\overline{x}_i$ con $\overline{x}_i = (x_{i1}, ...x_{in}) \in M^n$. Además $R\overline{x}_i \subseteq Rx_{i1}\oplus, ..., \oplus Rx_{in}$ que es un modulo neteriano, ya que por hipótesis

para toda i, Rx_{ij} es neteriano. De aquí concluimos que $N = \sum_{i=1}^{m} R\overline{x}_i$ que es un cociente de $\bigoplus_{i=1}^{m} R\overline{x}_i$ que es neteriano. Por lo tanto M^n es localmente neteriano. $\square$

Observación A.3.4. Todo R-módulo izquierdo neteriano es localmente neteriano. En la categoría de los grupos abelianos tenemos que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ son ejemplos de módulos localmente neterianos que no son neterianos.
En general, si R es un anillo neteriano izquierdo, entonces todo R-módulo izquierdo es localmente neteriano.

Lema A.3.5. *Sea $\{U_i\}_I$ una familia que genera a $\sigma[M]$. Un módulo $E \in \sigma[M]$ es M-inyectivo (inyectivo en $\sigma[M]$) si y solo si para todo submódulo $C \subseteq U_i$ y morfismo $f : C \longrightarrow E$, existe $\overline{f} : U_i \longrightarrow E$ tal que $\overline{f}i = f$.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & U_i \arrow[dl, dotted, "\overline{f}"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Prueba. $\Rightarrow$) Es claro.
$\Leftarrow$) Consideremos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & C \\ & E & \end{tikzcd}$$

con $C \in \sigma[M]$. Sea

$$\mathcal{C} = \{g : D \longrightarrow E \mid C' \subseteq D \subseteq C \ y \ gi = f\}$$

$\mathcal{C}$ es no vació ya que $(f : C \longrightarrow E) \in \mathcal{C}$, definimos un orden parcial en $\mathcal{C}$ como

$$(g_1 : D_1 \longrightarrow E) < (g_2 : D_2 \longrightarrow E) \ \ si \ \ D_1 \subseteq D_2 \ \ y \ \ g_2 \mid_{D_1} = g_1$$

Si

$$(g_1 : D_1 \longrightarrow E) < (g_2 : D_2 \longrightarrow E) < \ldots$$

es una cadena en $\mathcal{C}$, definimos $g : \bigcup_{\mathbb{N}} D_i \longrightarrow E$ como $g(d_i) = g_i(d_i)$ para $d_i \in D_i$. El morfismo g esta bien definido ya que $g_j |_{D_i} = g_i$ para todo $j > i$. Además $(g : \bigcup_{\mathbb{N}} D_i \longrightarrow E) \in \mathcal{C}$ por lo tanto la cadena tiene una cota superior, a saber g, aplicando el lema de Zorn obtenemos $(g_0 : D_0 \longrightarrow E)$ un máximo de $\mathcal{C}$.

Afirmamos que $D_0 = C$. Supongamos que $D_0 \neq C$, entonces probaremos que i es un isomorfismo. Supongamos que no, entonces si para todo $\gamma : U_i \longrightarrow C$ se tiene que $Im(\gamma) \subseteq C'$ como $\{U_i\}_I$ genera a $\sigma[M]$ se tendría que $C' = C$, es decir que i es un isomorfismo, lo cual no puede ser por lo tanto existe $\gamma : U_i \longrightarrow C$ tal que $Im(\gamma) \nsubseteq C'$. Construyendo el producto fibrado de (γ, j) obtenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & \gamma^{-1}(C') \arrow[r] \arrow[d] & Im(\gamma) \cap C' \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & U_i \arrow[r, "\gamma"'] & Im(\gamma) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $\gamma^{-1}(C')$ es un submódulo de U_i por hipótesis existe $\beta : U_i \longrightarrow E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \gamma^{-1}(C') \arrow[r] \arrow[d] & U_i \arrow[dd, dotted, "\beta"] \\
& Im(\gamma) \cap C' \arrow[d, "j"'] & \\
& C' \arrow[r, "f"'] & E
\end{tikzcd}$$

Como β restringida a K es cero, β se puede factorizar atraves de $Im(\gamma)$ por $\beta' : Im(\gamma) \longrightarrow E$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & U_i \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & Im(\gamma) \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "\beta'"] & 0 \\
& & E & &
\end{tikzcd}$$

Además como $h : \gamma^{-1}(C') \longrightarrow Im(\gamma) \cap C'$ es un epimorfismo, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Im(\gamma) \cap C' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "j"'] & C' \arrow[d, "f"] \\ Im(\gamma) \arrow[r, "\beta'"'] & E \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Im(\gamma) \cap C' \longrightarrow Im(\gamma) \oplus C' \longrightarrow Im(\gamma) + C' \longrightarrow 0$$

Usando la conmutatividad de el diagrama (A.1) se sigue que $(-\beta, f) : Im(\gamma) \oplus C' \longrightarrow E$ induce $\varphi : Im(\gamma) + C' \longrightarrow E$ tal que $\varphi i = f$ por lo tanto $(\varphi : Im(\gamma) + C' \longrightarrow E) > (g_0 : D_0 \longrightarrow E)$ lo cual no es posible ya que $(g_0 : D_0 \longrightarrow E)$ es máximo. Por lo tanto i es un isomorfismo, es decir $D_0 = C$ entonces E es inyectivo en $\sigma[M]$. □

El siguiente corolario nos sera de utilidad para probar el teorema de Matlis y se sigue del hecho de que

$$\mathcal{M}_e = \{U \subseteq M^{(\mathbb{N})} \mid U \ finitamente \ generado\}$$

es un conjunto que genera a $\sigma[M]$.
Observemos que si M es localmente neteriano, entonces por la proposición (A.3.3) todo elemento de $\mathcal{M}_e$ es neteriano.

Corolario A.3.6. Sea M un modulo localmente neteriano. Entonces la unión de una cadena de módulos M-inyectivos es M-inyectivo.

Prueba. Sea

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq ...$$

una cadena de módulos inyectivos y $M' = \bigcup_{\mathbb{N}} M_i$. Por el lema (A.3.4) basta probar que para todo $f : Y \longrightarrow M'$ existe $\overline{f} : X \longrightarrow M'$ tal que $\overline{f}i = f$ con

$Y \subseteq X$ y $X \in \mathcal{M}_e$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[dl, dotted, "\overline{f}"] \\ & M' & \end{tikzcd}$$

Como X es neteriano entonces Y es finitamente generado y por lo tanto $f(Y)$ es finitamente generado, se sigue entonces que $f(Y) \subseteq M_i$ para alguna i, como M_i es M-inyectivo entonces existe $\overline{f} : X \longrightarrow M_i \subseteq M'$ tal que $\overline{f}i = f$, por lo tanto M' es M-inyectivo. □

Definición A.3.7. Un anillo R es local si para todo $r \in R$ se tiene que r es invertible ó que $1 - r$ es invertible.

Teorema A.3.8 (Matlis). *Sea M un módulo localmente neteriano. entonces todo módulo inyectivo en $\sigma[M]$ es una suma directa de módulos inescindibles con anillo de endomorfismos local.*

Prueba. Sea E un módulo M-inyectivo en $\sigma[M]$.
(i) Afirmamos que E contiene un submódulo inescindible M-inyectivo, en efecto: Si E no es inescindible, entonces existe $L \neq E$ un sumando directo de E. Tomemos $e \in E - L$ y consideremos el siguiente conjunto

$$\mathcal{L}_e = \{L' \subseteq E \mid L' \; es \; M - inyectivo, \; e \notin L'\}$$

$\mathcal{L}_e$ es no vació ya que $L \in \mathcal{L}_e$. Este conjunto ordenado con la inclusión es inductivo ya que por el corolario (A.3.6) la unión de una cadena de submódulos M-inyectivos es M-inyectivo, por lo tanto por el Lema de Zorn existe un elemento máximo $L_0 \in \mathcal{L}_e$ M-inyectivo, entonces $E = L_0 \oplus F$ para algún $F \subseteq E$. F es inescindible ya que de lo contrario, si $F = F_1 \oplus F_2$ entonces $(L_0 + F_1) \cap (L_0 + F_2) = L_0$ por lo tanto $e \notin L_0 + F_1$ o $e \notin L_0 + F_2$, en cualquier caso si $e \notin L_0 + F_i$ entonces $L_0 + F_i \in \mathcal{L}_e$ para $i = 1$ *o* 2. Como L_0 es máximo concluimos que $F_1 = 0$ o $F_2 = 0$.

(ii) Finalmente, aplicando nuevamente el lema de Zorn, podemos encontrar una familia independiente máxima $\{H_\alpha\}_\lambda$ de submódulos inescindibles de E, sea $G = \bigoplus_\lambda H_\alpha$, por el corolario (A.3.6) G es M-inyectivo, es decir $E = G \oplus H$. También H es M-inyectivo, siguiendo un razonamiento análogo al de (i) H contiene un sumando directo inescindible, pero esto contradice el hecho de que G sea máximo. Por lo tanto $E = G$ es una suma directa de módulos M-inyectivos inescindibles.

Por otro lado cada sumando directo inescindible E' de E es uniforme. Para todo $f \in End(E')$ tenemos $Nuc(f) \cap Nuc(1-f) = 0$. Si $Nuc(f) = 0$ entonces $f(E')$ es M-inyectivo y por lo tanto sumando directo de E', pero E' es uniforme por lo tanto $f(E') = E'$, es decir f es un isomorfismo y por lo tanto invertible.

Si $Nuc(f) \neq 0$, entonces $Nuc(1-f) = 0$ y análogamente $1-f$ es un isomorfismo y por lo tanto invertible, de donde se sigue que $End(E')$ es un anillo local. $\square$

Corolario A.3.9. Si M es un módulo localmente neteriano entonces todo módulo distinto de cero en $\sigma[M]$ contiene un submódulo uniforme.

Prueba. Sea $N \in \sigma[M]$, consideremos $\widehat{N}$ la cápsula inyectiva de N en $\sigma[M]$. Por el Teorema de Matlis, $\widehat{N} = \bigoplus_\lambda N_\alpha$ donde N_α es un módulo M-inyectivo inescindible en $\sigma[M]$, por lo tanto uniforme. Por otro lado $N \subseteq_e \widehat{N}$ implica que $0 \neq (N \cap N_\alpha) \subseteq N$ es uniforme por lo tanto N contiene un submódulo uniforme. $\square$

Bibliografía

[1] Albu, T.; Krause, G.; Teply, M.; *Bijective relative Gabriel correspondence over rings whit torsion theoretic Krull dimension*; J. Algebra 243, 644-674, (2001).

[2] Anderson, Frank; Fuller, Kent; *Rings and categories of modules*; Springer-Verlag New York-Berlin, 2nd. Ed. 1991.

[3] Beachy, J.; *Sur les anneaux FBN a gauche*; Ann. Sci. Math. Quebec 1, 59-62, (1977).

[4] Beachy, J.; *M-injective Modules and Prime M-ideals*; Comunications in Algebra, 30(10), 4649-4676, (2002).

[5] Bican, L; Jambor,P.; Kepla, T.;Nemec, P.; *Prime and Coprime Modules*; Fund. Math., 107, 33-45, (1980).

[6] Castro, J.; Ríos, J.; Teply, M.; *Torsion theoretic dimensions and relative Gabriel correspondence*; Journal of Pure and Applied Algebra 178, 101-114, (2003).

[7] Gabriel, P.; *Des catégories abeliennes*; Bull. Soc. Math. France 90, 323-448, (1964).

[8] Krause, G.; *On fully left bounded left noetherian rings*; J. Algebra 23, 88-99, (1972).

[9] Lam, T. Y.; *A first course in nonconmutative rings*; Springer-Verlag 2nd. Ed., 2001.

[10] Matlis, E.; *Injective Modules over noetherian ring*; Pacific J.Math. 8,511-528, (1958).

[11] Raggi; Ríos; Rincón; Fernandez-Alonso; Signoret; *The Lattice structure of preradicals*; Comunications in Algebra, 30(3), 1533-1544, (2002).

[12] Stenström, Bo; *Rings of Quotients, An Introduction to Methods of Ring Theory*; Springer-Verlag New York-Berlin, 1975.

[13] Wisbauer, Robert; *Foundations of Module and Ring Theory, A Handbook for Study and Research*; Gordon and Breach, Paris, 1991.