

20485



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
"ACATLAN"

PROYECTO: MAESTRIA EN EDUCACION MATEMATICA

"ESTUDIO SOBRE EL USO DE UN MATERIAL PARA  
CORREGIR LAS CONFUSIONES DE LOS CONECTIVOS "Y",  
"O" EN LA PROBABILIDAD".

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN EDUCACION MATEMATICA**

P R E S E N T A :  
**FERNANDO DE LEON MONTES DE OCA**



DIRECTOR DE LA TESIS: M. EN C. JUAN BAUTISTA RECIO ZUBIETA

MEXICO, D. F.

CIUDAD UNIVERSITARIA 2004.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# ÍNDICE.

## INTRODUCCIÓN.

### 1. MARCO CONCEPTUAL.

1.1. Antecedentes.	4
1.1.1. La Educación.	4
1.1.2. La Enseñanza Técnica.	5
1.1.3. La Dirección General de Educación Tecnológica Industrial.	6
1.1.4. Citas de Expertos a Nivel Preuniversitario.	10
1.1.5. Citas de Estudios Anteriores.	13
1.2. Importancia del Problema.	14
1.2.1. Justificación del Problema.	15
1.2.2. Significado del Problema.	19
1.3. Planteamiento del Problema.	20
1.3.1. Explicación del Problema.	21
1.4. Alcances y Límites del Problema.	22
1.4.1. Consideraciones.	22
1.4.2. Restricciones.	23
1.4.3. Validez.	24
1.4.4. Afectación del Estudio.	26

### 2. MARCO TEÓRICO.

2.1. Teorías del Aprendizaje.	29
2.1.1. Definición de Aprendizaje.	29
2.2. Teoría Evolutiva de Jean Piaget.	32
2.3. Teoría de la Zona de Desarrollo Próximo de Vygotsky.	35
2.4. Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel.	39
2.4.1. Organizadores de Avance.	40
2.4.2. Pasos en una Lección Expositiva.	41
2.4.3. Realización de la mayor parte de la Enseñanza Expositiva.	42
2.4.4. Cómo es una Buena Enseñanza.	43
2.5. El Aprendizaje.	46

### 3. MARCO METODOLÓGICO.

3.1. Planteamiento de la Situación a Explorar.	48
3.2. Definición del tipo de Análisis por Realizar.	48
3.3. Definición Operativa de Variables.	50
3.3.1. Características Observables que definen a las Variables.	53
3.3.2. Tipos de Variables.	54
3.4. Ambiente o Entorno.	57
3.4.1. Descripción de las Condiciones a las que se sujeta el Estudio.	61
3.4.2. Naturaleza de los Documentos de Estudio.	62
3.4.3. Métodos empleados en la Elección de Documentos o Muestra.	63

3.5.	Instrumentos.	66
3.5.1.	Registros.	67
3.5.2.	Cuestionarios.	68
3.5.3.	Test.	69
3.6.	Datos.	71
3.6.1.	Recabación de Datos.	71
3.6.2.	Análisis de los Datos.	72
3.6.3.	Instrumentos Estadísticos.	74
3.6.4.	Condiciones de Uso.	75
3.6.5.	Significado de Resultados.	75
3.6.6.	Cálculos Estadísticos.	75
3.7.	Hipótesis Nula.	77
3.7.1.	Nivel de Significación.	78

#### 4. CONCLUSIONES.

4.1.	Conclusiones.	80
4.2.	Recomendaciones.	83

BIBLIOGRAFÍA.	85
---------------	----

#### ANEXOS.

1	PRE-TEST.	90
2	MATERIAL DIDÁCTICO.	97
3	POST-TEST.	131
4	ENCUESTA.	137
5	TABLAS DE RESULTADOS.	142
6	GRÁFICAS.	147
7	RESULTADOS 4° F, 4° G.	154

## INTRODUCCIÓN.

A través de los diversos cursos de Probabilidad y Estadística he observado que los alumnos confunden con frecuencia la probabilidad de la unión y la probabilidad condicional de eventos en donde interviene la intersección de eventos.

En el tratado de la Unión de eventos, los alumnos comprenden que equivale a la suma de las partes o resultados parciales y estas partes o resultados parciales pueden contener a su vez a uno o varios de ellos, la suma total puede mostrar como resultado un dato falso, ya que en ocasiones los elementos o eventos comunes, se pueden tomar en consideración en forma repetida en los resultados parciales, esto se debe a que confunden o desconocen el significado de los conectivos "o" e "y", creando un error.

Este error o confusión conceptual, provoca a su vez que se presenten errores algorítmicos, al sumar los resultados de los eventos que como mencionamos se repiten, en vez de considerarlos en una forma separada, es decir tomar en consideración a este resultado, solo en una ocasión.

La probabilidad condicional establece que al existir una condición, debe de calcularse la probabilidad de que ocurra el evento A, cuando se ha cumplido un evento B, con lo cual el espacio muestral se modifica o varía, esto provoca la creencia o confusión de

que el valor de la probabilidad aumenta en todos los casos, ya que ha ocurrido esa variación y con esto los alumnos consideran que sea más fácil de presentarse u obtener este resultado, en vez de analizar que este valor de probabilidad, es sólo una parte de la probabilidad ya encontrada con la primer condición y que pasa a ser por lo tanto, una fracción de otra fracción, (no consideran la operación de la multiplicación, ya que con esto tenemos por resultado a un valor más pequeño) y por lo tanto, es menos probable su obtención, es decir que presenta una mayor dificultad de aparición.

Las reflexiones y análisis anteriores deben mostrarse por medio de las relaciones entre los eventos, ejemplificando por medio de problemas los casos dados, con análisis en los puntos principales de la problemática a resolver, de tal forma que los estudiantes razonen y obtengan conclusiones, que les permitan elaborar o construir su conocimiento, a fin de que le den acomodo en su mente con lo ya existente, la idea es desarrollar un material didáctico, aplicado en la Probabilidad, para explicitar las diferencias entre unión, intersección y conjunción de eventos y de esta forma, evitar en lo posible la confusión de los términos.

## AGRADECIMIENTOS.

*A la Escuela Nacional de Estudios Profesionales Acatlán División de Posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México.*

Por proporcionarme la formación académica para lograr una superación académica..

*A la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial y al CETIS N° 9 "Puerto Rico".*

Por brindarme la oportunidad de desarrollarme profesionalmente como docente.

*Al Maestro Juan Bautista Recio Zubieta Coordinador de la Maestría en Educación Matemática de la División de Posgrado de la Escuela Nacional de Estudios Profesionales Acatlán de la Universidad Nacional Autónoma de México.*

Por todos sus conocimientos que me proporcionó, así como el ánimo y apoyo incondicional.

*A mis padres: Gracia y Fernando, porque todos los logros que obtenga durante mi vida se los deberé a ellos.*

*A mi esposa: Martha, por ser siempre el gran apoyo y amor de mi vida.*

*A mis hermanos: María Virginia, Olga, Irma, María Eugenia, Juan Manuel, Marcela, Elizabeth, Silvia, María del Carmen y Alfredo.*

*A mis amigos, familiares, compañeros y alumnos.*

Quienes con sus cualidades, participación e inquietudes motivaron mi deseo de superación y son parte esencial en este trabajo.

# **CAPÍTULO I**

## **MARCO CONCEPTUAL**

## 1.1. ANTECEDENTES.

### 1.1.1. LA EDUCACIÓN.

Considerar a la educación como fundamento del desarrollo socioeconómico y cultural de una nación, no ha sido comprendido por los dirigentes de países como México, quienes en su discurso oficial, ponderan a este aspecto y en el presupuesto se encuentra muy alejado, de lo que otros países como Japón, Alemania, Francia y el mismo EUA "invierten" en sus sistemas educativos y que es muy superior a lo que destina México.

Los problemas que afectan a la mayoría de los mexicanos son: el aumento de la población, el crecimiento del abuso de sustancias tóxicas, el incremento de enfermedades de cualquier índole y otros más, todas estas situaciones ven como probable alivio o solución a la educación.

Esta visión de la educación, supone que este proceso transmitirá la ideología de la cultura así como conocimientos y habilidades intelectuales para el desarrollo de la nación, pero la visión está más centrada en la estimulación del individuo para el desarrollo de las potencialidades humanas, en el ámbito cognoscitivo, el relativo a las metas y el ajuste de la personalidad.

La educación no es un proceso espontáneo y aleatorio, sino toda una ciencia aplicada que se ocupa de la realización de ciertos fines prácticos que tienen un valor social y es el punto de partida para mejorar las condiciones actuales de nuestro sistema educativo y de nuestra actuación como elementos que pretendemos propiciar en los alumnos un aprendizaje que sea verdaderamente significativo.

### 1.1.2. LA ENSEÑANZA TÉCNICA.

Uno de los esfuerzos de la Revolución Mexicana, fue la creación del Sistema de Enseñanza Técnica, que establecía el ceñirse a *“aquellas disciplinas científicas y artísticas que se utilizan para la realización de obras materiales, como fin para satisfacer diversas necesidades de los hombres del modo más económico y completo”*. (5).

Sus acciones se orientaron al estudio de las cosas útiles, de los métodos de producción y su perfeccionamiento. No vieron hacia el individuo, sino hacia la organización de la producción y del cambio. No estuvieron condicionadas por el aumento de población, sino por las transformaciones operadas en la estructura económica. No tuvieron un propósito homogeneizador, sino diversificador, se preocuparon por mejorar las formas de producción aumentando la capacidad y habilidad del individuo.

Lo anterior resume la filosofía del sistema de enseñanza técnica. Es posible afirmar que en su momento, cumplió la misión encomendada. Sin embargo, ha llegado el tiempo de revisar sus objetivos, reestructurarla adecuadamente, revalorar sus recursos e implementos, actualizar su organización y métodos, optimizando sus planes y programas, para reforzar la potencialidad de su docencia y así motivar la respuesta audaz y decidida de sus estudiantes.

### 1.1.3. LA DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN TECNOLÓGICA INDUSTRIAL.

La D.G.E.T.I. (Dirección General de Educación Tecnológica Industrial) es una institución educativa de nivel medio superior, en las áreas industrial y de servicios, que se encuentra adscrito a la Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológica (S.E.I.T.) de la Secretaría de Educación Pública (S.E.P.) y forma parte del Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica (C.O.S.N.E.T.).

La D.G.E.T.I. ofrece sus servicios educativos a través de sus planteles ubicados en todas las entidades de la República Mexicana y es la responsable de planear, programar, coordinar, supervisar y evaluar los servicios educativos que le son propios, es parte del Sistema Nacional de Educación Tecnológica y sus planteles ofrecen en el nivel medio superior, las siguientes modalidades educativas: Técnico

profesional (T.P.), Bachillerato Tecnológico (B.T.), y Sistema Abierto de Educación Tecnológica Industrial (S.A.E.T.I.) así como Educación Basada en Normas de Competencia (E.B.N.C.).

Los planteles adscritos a la D.G.E.T.I. son:

CETIS: Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios.

CBTIS: Centro de Bachillerato Tecnológicos Industrial y de Servicios.

CECyTE's: Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos de los Estados.

Uno de sus objetivos son formar técnicos profesionales mediante planes y programas de estudios que por su contenido satisfacen los requerimientos del sector productivo de bienes y servicios y de la función de mando intermedio que le es propia; lo que coloca a sus egresados, en posibilidad de encontrar soluciones adecuadas a los problemas que en su calidad de técnicos, han de resolver en el campo de su especialidad.

Puesto que formo parte del personal docente del CETIS No. 9 y que pertenezco a la academia de Matemáticas, a continuación muestro los contenidos de los diversos semestres de la asignatura de Matemáticas que se imparte en los CETIS y CBTIS pertenecientes a la DGETI, a nivel Terminal y Bachillerato:

CETIS	CBTIS
I.- Aritmética y Álgebra.	I.- Aritmética y Álgebra.
II.- Álgebra, Ecuaciones y Geometría	II.- Geometría y Trigonometría.
III.- Probabilidad y Estadística	III.- Geometría Analítica.
	IV.- Cálculo Diferencial.
	V.- Cálculo Integral o Probabilidad y Estadística *

- El curso V puede ser de Cálculo Integral cuando se imparte en escuelas en las que el área es de físico-matemáticas y cambia a Probabilidad y Estadística cuando el plantel pertenece al área administrativa.

Podemos observar que para todos temas de los cursos, aparece un orden de los contenidos es decir, tienen una secuencia y alcance que permite la consecución lógica de nuevos conocimientos, así por ejemplo: El ciclo escolar inicia con los temas de aritmética y álgebra que proporcionan las bases para enfrentar contenidos más profundos en los siguientes cursos que serán geometría o trigonometría y así sucesivamente.

Pero ¿qué sucede al llegar a la Probabilidad y Estadística? Aquí todo es aparentemente nuevo o se emplean algunos conocimientos o conceptos de teoría de los conjuntos, modelos matemáticos, espacio muestral, punto muestra, evento, unión de eventos, intersección de eventos y otros temas de los procesos de conteo como:

Notación Factorial, Permutación, Diagrama de árbol, Subconjuntos-Combinaciones, Triángulo de Pascal, etc.

Los alumnos de nuestro sistema, al igual que los alumnos de bachillerato de otras instituciones, por lo general no relacionan el lenguaje simbólico de las matemáticas con su realidad; algunos memorizan o mecanizan procesos en la resolución de problemas y no crean un razonamiento lógico, lo cual constituye un grave problema en su desarrollo cognoscitivo y profesional.

Muchos docentes también consideran que por trabajar con alumnos de nivel terminal o bachillerato, éstos no necesitan manipular, visualizar, analizar o aprender jugando y realizan sus clases en una forma monótona, tradicional o demasiado formal, lo que evita que el alumno rompa con el trauma de que las matemáticas son muy difíciles y que no se pueden aprender.

Por todo lo anterior la propuesta de material didáctico que se plantea en este trabajo encuadra con la finalidad de mejorar el aprendizaje de nuestros estudiantes y desarrollar sus estructuras cognoscitivas en unas más complejas, que reflejen un verdadero aprendizaje significativo.

Y esto me llevó a la pregunta: ¿PUEDE EL MATERIAL DIDÁCTICO MOSTRAR LA DIFERENCIA ENTRE PROBABILIDAD DE UNIÓN DE EVENTOS Y LA PROBABILIDAD CONDICIONAL DE EVENTOS A LOS ALUMNOS?

#### 1.1.4. CITAS DE LOS EXPERTOS A NIVEL PREUNIVERSITARIO.

La Asociación Americana para el Avance de la Ciencia en los EUA en 1974 incluyó algunos elementos de Probabilidad en proyectos curriculares preuniversitarios y preparó una partida de libretos, (21) para estudiantes de enseñanza superior y no se utilizaron en forma generalizada.

En los EUA la Probabilidad y Estadística constituyeron importantes tesis en publicaciones del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM), (29); (30). La Asociación Estadística Americana (ASA) y enfatizó el deseo de implantar el currículo en el que se incluyen actividades estadísticas a edades tempranas como los grados 1 a 3. *“Existe un creciente y vigoroso movimiento para introducir a la probabilidad y estadística en el currículo de las escuelas secundarias, incluso a nivel primaria, como parte del discurso básico de matemáticas que todo ciudadano del mundo actual debe poseer”.* (26); (31).

Proyectos como el de la Universidad de Chicago (1985) y el de Alfabetización Cuantitativa de ASA-NCTM, produjeron y experimentaron grupos de materias para estudiantes de grados 7 a 12, (12); (18); (19); (22). Aún con este desarrollo, en los informes del V Congreso Internacional de Educación Matemática (2) se manifestaron problemas en la enseñanza de probabilidad y estadística.

La mayoría de los trabajos en la enseñanza de la Probabilidad y Estadística en el nivel pre-universitario se estructuró en cuatro categorías:

1. La necesidad de la enseñanza en el nivel preuniversitario (23).
2. Sugerencias sobre la enseñanza en el nivel preuniversitario (7); (8); (32).
3. Descripciones de las dificultades que los estudiantes de secundaria tienen en la comprensión de conceptos (3); (15); (27).
4. La investigación sobre la comprensión de los estudiantes acerca de la probabilidad es más amplia, que la investigación sobre la estadística y se ha desarrollado como un área separada, su enfoque se centra en general en el azar.

Se crearon dos líneas distintas de investigación sobre la comprensión en probabilidad:

1. El centrado en el nivel escolar (10); (13); (25).
2. Para estudiantes universitarios y adultos (17); (33).

En cualesquiera de los niveles los estudiantes parecen tener dificultades en el desarrollo de intuiciones, al menos por las tres razones siguientes:

1. Los conceptos de número fraccionario y razonamiento proporcional, necesarios para el cálculo, expresión e interpretación de las probabilidades.

2. Las ideas probabilísticas con frecuencia entran en conflicto con las experiencias de los estudiantes y su visión de la realidad.
3. Muchos estudiantes han desarrollado una aversión a la probabilidad pues la han tenido que estudiar en forma abstracta y formal.

En el primer punto, los estudiantes fallan en el concepto de número racional y tienen dificultades con conceptos básicos como: fracciones, decimales y porcentajes según estudios (3); (4).

En el segundo punto se hace referencia a los estudios (16). Además de que pocos estudiantes obtienen respuestas correctas en ejercicios con conceptos complejos y habilidades, que requieren la comprensión de los principios matemáticos, además presentan dificultades en la traducción verbal de los datos del problema que afectan al azar y a los tópicos matemáticos según estudios (14).

En el tercer punto Freudenthal previno contra la enseñanza de cualquier técnica estadística matemática incluso al inicio de nivel universitario. (11).

Estos tres puntos nos revelan la importancia que tiene una instrucción adecuada sobre la probabilidad y estadística en los niveles medios, previos a la universidad y que deben estar de acuerdo a los conocimientos que ya poseen los alumnos y que serán la base para desarrollar el material didáctico que será el tema de esta tesis.

### 1.1.5. CITAS DE ESTUDIOS ANTERIORES.

Fischbein, Barbat y Minzat estudiaron las leyes de la suma y la multiplicación en problemas para jóvenes de 12 a 16 años. Las conclusiones alcanzadas fueron que una intuición básica existe para la suma pero no existe para la multiplicación. Los alumnos pueden ver que la regla para la suma es relevante y la aprenden para aplicarla apropiadamente. Los alumnos tienen grandes dificultades en la aplicación de las leyes de la multiplicación en situaciones nuevas. (9). Los alumnos a menudo ignoran la importancia de inventar todos los posibles casos, por ejemplo mostrando el espacio muestra.

Shepler . tuvo resultados más alentadores de sus 25 sujetos de 6° grado; 23 alcanzaron el suceso en 7 de las 8 pruebas para su objetivo de comportamiento. "La probabilidad de un evento compuesto" los porcentajes relevantes fueron un pre-test de 10.5% y un post-test de 95.5%. Un ejemplo de las preguntas de Shepler es:

¿Cuál es la probabilidad de obtener la suma de 2 con 3 cuando se tira un par de dados? Los resultados del pre-test fueron 0/25 y del post-test 25/25. (28), (p.388).

Un problema comparable de Fischbein, fue: ¿Cuál es la probabilidad de obtener el resultado 5, 6 al tirar un par de dados? (9).

La razón inicial del suceso fue  $1/20$  en el 6° grado y  $3/20$  para el 10° grado. Sin embargo con preguntas guiadas en la pregunta específica la razón del suceso se acercó al 100% para todos los niveles.

Los resultados anteriores nos alientan a realizar una instrucción guiada a proporcionar a los alumnos unas bases más sólidas en su formación, además de que serán convenientes los estudios posteriores para observar las habilidades de los sujetos y sus concepciones pasado un tiempo considerable, después de la instrucción dada.

## 1.2. IMPORTANCIA DEL PROBLEMA.

El problema es que los alumnos confunden la Probabilidad de la Unión de eventos y no comprenden la intersección de eventos con lo que posteriormente fallan en la Probabilidad Condicional de eventos, tienen errores en los elementos que los constituyen y no observan la diferencia entre ambas operaciones.

### 1.2.1. JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA.

La enseñanza de la probabilidad y estadística como disciplina científica, se enseña en un curso que se divide en tres áreas o capítulos:

Estadística Descriptiva, Técnicas de Conteo y Teoría de la Probabilidad. Los tópicos incluidos en cada área son los que se muestran en la Tabla 1.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA	Medidas de Tendencia Central (Media, Mediana, Moda). Medidas de Variabilidad (Rango, Varianza, Desviación Típica). Distribución de Frecuencias y Representaciones Gráficas. Estimación de Parámetros (Media, Varianza, Proporción, Coeficiente de Correlación).
TÉCNICAS DE CONTEO.	Notación Factorial Permutación Proceso de Contar. Combinaciones.
TEORÍA DE LA PROBABILIDAD.	Leyes (Adición, Multiplicación). Sucesos Independientes e Incompatibles (Mutuamente Exclusivos). Variables Aleatorias. Distribuciones de Probabilidad. Distribución Binomial. Distribución Normal.

Tabla 1.

En muchos de éstos procesos los estudiantes no alcanzan una comprensión adecuada de los conceptos básicos y son incapaces de resolver problemas de aplicación y la experiencia muestra, que la mayoría de los estudiantes no entienden muchos de los conceptos que estudian.

## ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA.

Aquí los estudiantes tienden a "triturar números" ocultando el significado de las cantidades mediante las fórmulas o procedimientos de cálculo sin formarse una representación interna del problema. Es posible que sean capaces de memorizar las fórmulas y los pasos a seguir en problemas familiares y bien definidos, pero que raramente parecen tener sentido en lo racional o en la aplicación de los conceptos a situaciones nuevas. En la fijación de conceptos, los detalles que han aprendido o memorizado o que tengan cualquier uso desaparecen rápidamente.

El fundamentar los cursos de estadística en la resolución de problemas o los cursos basados en la resolución de problemas usando datos reales en donde se introducen los conceptos conforme los necesitan, no parece mostrar una mejoría en la práctica.

Nociones supuestamente simples como: Distribución, Promedio, Muestra y Azar muestran dificultades conceptuales, algunos dicen ignorar lo que es la media, aunque saben obtener un promedio. Para muchos estudiantes la media es más un acto de cómputo que conceptual, cuando se pidió a estudiantes que combinaran en una media dos promedios de distintos grados en listas de diferentes números, fueron incapaces de resolverlo correctamente, por otro lado cuando se preguntó sobre la utilidad, recuerdan el promedio como el valor usual, por ejemplo: en la temperatura

media de una ciudad, muchos respondieron respecto a su utilidad, "*para indicar la ropa a utilizar en esa ciudad*". (36).

## TÉCNICAS DE CONTEO.

En este tema, las principales confusiones de los alumnos pertenecen a los procesos de contar, las definiciones y distinciones entre permutación y combinación, son aparentemente claras, pero al utilizar estos conceptos en situaciones nuevas, muestran errores.

## TEORÍA DE LA PROBABILIDAD.

Aquí las preguntas son: ¿Cómo entienden la probabilidad los alumnos?, ¿Qué conceptos tienen los alumnos de diversas edades?, ¿Cómo pueden modificarse estas concepciones?, ¿Hay técnicas óptimas de enseñanza y aprendizaje?

Cuando se les proporcionó a los estudiantes un test en el que debían transferir ideas intuitivas sobre probabilidad, el grupo de alumnos instruidos lo hizo peor en algunas partes que el grupo sin instrucción, la hipótesis es que durante la instrucción, por

enfatar algún punto de vista probabilístico o procedimiento, pudo haberse distraído o desviado el razonamiento proporcional de la probabilidad y así confundir al alumno.

En un estudio sobre las ideas probabilísticas de los niños que realizaban predicciones, se realizó un experimento de 12 lanzamientos de una moneda y 24 lanzamientos de un dado en donde los resultados mostraron una gran disparidad con las predicciones.

La mayoría de los alumnos dieron predicciones con sabor matemático, no obstante, cuando descubrieron que éstas no correspondían con los datos, lo justificaron con experiencias pasadas, corazonadas o lo ignoraron. Los alumnos estaban confusos, unos pusieron lo que creían que era una respuesta matemática correcta, a pesar de los resultados contrarios o bien, abandonaron la teoría tratando de justificar su respuesta en conjunto.

El diseño de una enseñanza óptima se complica por la posibilidad de una enseñanza con efectos secundarios inesperados que pueden interferir en su comprensión.

Todo lo anterior nos lleva a identificar que los problemas son: Los conceptos, su entendimiento y aplicación en situaciones nuevas, así como en el desarrollo de intuiciones para interpretar la probabilidad por lo que podemos suponer que tal vez un material apropiado pueda ayudarlo a comprender mejor.

### 1.2.2. SIGNIFICADO DEL PROBLEMA.

Es mayor la literatura que describe los planteamientos erróneos de los alumnos que la existente sobre soluciones prácticas para mejorarlo, es por esto que decidí elaborar un material que les sea de utilidad para aclarar conceptos y les ayude a visualizar la posible aplicación de éstos, en situaciones diversas y campos tan variados como: Ingeniería, Ciencias, Agricultura, Administración de Empresas, Medicina, Sociología y Psicología entre otras.

La Probabilidad comenzó en el siglo XVII con Fermat y Pascal para resolver preguntas relacionadas con los juegos de azar y es hasta el siglo XX, cuando se desarrolla la teoría matemática basada en axiomas, definiciones y teoremas. Con la Probabilidad se manifestó que la Estadística podría emplearse para la extracción de conclusiones válidas y la toma de decisiones razonables, sobre la base del análisis de los datos.

Esta teoría matemática es la que se proporciona a los alumnos casi siempre antes de entrar a la Universidad y son muy pocos los conocimientos básicos para los estudiantes en los niveles anteriores, es por esto que cuando se pretende impartir cursos para alumnos de secundaria o nivel medio superior, los alumnos se asustan ante tal cantidad de conceptos áridos y definiciones que son casi incomprendidas para ellos, pues lo único que se ha hecho es transcribir la teoría de los libros de los niveles superiores.

### 1.3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Las primeras investigaciones fueron realizadas por psicólogos como: Piaget e Inhelder sus estudios revelaron las dificultades que los estudiantes tienen con conceptos erróneos de probabilidad, pero sólo emplearon una aproximación clásica de la probabilidad y basaron sus experimentos en conceptos teóricos y razonamientos proporcionales, los cuales parecen tener poca conexión con las nociones del azar. (25).

Investigaciones posteriores han sido por parte de educadores como la denominada discernimiento en el seno de la incertidumbre libro editado por Kahneman, Slovic y Tversky, en la que aportan la representatividad relativa a variaciones de la idea de que una ocurrencia es probable (33), una combinación de éstas nociones erróneas es:

*La probabilidad de ser campesino y desempleado es más alta que la de ser campesino o ser desempleado.*

### 1.3.1. EXPLICACIÓN DEL PROBLEMA.

En la teoría de la probabilidad aparecen la unión de eventos, los sucesos independientes o excluyentes, como puede ser la probabilidad condicional en donde se muestra una serie de confusiones de conceptos que no permiten identificar correctamente a cada una de las probabilidades , ante este problema de confusiones en eventos independientes, unión de eventos y eventos excluyentes así como la repetición de eventos, planteamos la Hipótesis:

**MATERIAL DIDÁCTICO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO PUEDE AYUDAR A COMPRENDER LA DIFERENCIA ENTRE PROBABILIDAD DE UNIÓN DE EVENTOS Y LA PROBABILIDAD CONDICIONAL DE EVENTOS.**

En la aseveración: *"La probabilidad de ser campesino y desempleado es más alta que la de ser campesino o ser desempleado"*.

Este es el claro ejemplo de confusión entre la probabilidad de unión de eventos y la probabilidad condicional de eventos.

## 1.4. ALCANCES Y LÍMITES DEL PROBLEMA.

### 1.4.1. CONSIDERACIONES.

Dentro de los aspectos que podemos considerar, tenemos:

¿Cuáles pueden ser las causas probables en la confusión entre los conceptos de los conectivos que relacionan a las operaciones "o" e "y" ?

Dichas deficiencias conceptuales en los conectivos:

- ¿Son el posible origen de errores algorítmicos?
- ¿Son los mismos errores conceptuales que se observarán y registrarán en tablas y gráficas, durante el desarrollo o resolución de un problema?
- ¿Serán posteriormente analizadas?

Las preguntas anteriores serán respondidas durante el desarrollo del trabajo de investigación, en el que se deberá tener cuidado con varios puntos como:

1. La concepción errónea sobre la representatividad, ya que se considera más fiable en una muestra pequeña, por ejemplo:

La preferencia de la marca X antes que la marca Y en 4 de cada 5 personas, esto puede creerse indicativa de una preferencia general, aunque la

probabilidad de que dicha muestra extrema de 5 por casualidad sea de  $3/8$  (0.375 menos de la mitad).

2. La validez expresa una categorización que es probable desde el momento en que puede ser recordado y la suposición de la causa a partir de la correlación.
3. En la covariación y control se ha detectado que las personas no alteran una correlación a menos que tengan expectativas para ello (en este caso tienden a destacarla, incluso si no existe), por lo que el razonamiento inapropiado es:
  - Amplio y persistente.
  - Similar en todas las edades.
  - Se localiza en investigadores experimentados.
  - Bastante difícil de modificar.

#### 1.4.2. RESTRICCIONES.

Los datos obtenidos podrán ser objeto de análisis posteriores o temas para posibles trabajos de investigación pero de ninguna manera serán conclusiones generales para dar por terminado este tema.

### 1.4.3. VALIDEZ.

Para intentar dar validez al trabajo se programan una serie de actividades a desarrollar, para contar con elementos de análisis, a fin de comprobar hipótesis y concluir acerca de ellas: éstas son:

1. Realizar una evaluación previa de conceptos.
  
2. Realizar una encuesta con los alumnos sobre las dificultades encontradas durante la enseñanza y así establecer bajo que condiciones se obtuvieron los resultados erróneos o que pudo haber influido en ello.
  
3. Al detectar las dificultades que presentan los alumnos y que están relacionadas con el tema, éstas se clasificarán en:
  - a. Algorítmicas.
  - b. Conceptuales.
  - c. Forma en que los alumnos resuelven este tipo de problemas.
  
4. Una vez clasificados los datos anteriores, se planea la forma de superar dichas deficiencias en la instrucción, por medio del material didáctico, es decir, estamos en condición de sustentar una serie de hipótesis que nos ayuden a comprender los bloqueos del pensamiento del alumno.

5. Una vez realizada la instrucción, se tendrán las conclusiones respecto al desarrollo de ésta, en donde una de las preguntas a contestar será:

¿Son válidas las conclusiones obtenidas?

Recordemos que pueden existir variantes que tal vez inconscientemente las utilicemos para intentar dar confiabilidad a los resultados obtenidos

6. Finalmente pasaremos a realizar una revisión del material para mejorarlo en los temas que muestren fallas o falta de comprensión por parte de los estudiantes.

#### 1.4.4. AFECTACIÓN DEL ESTUDIO.

Se empleará un grupo de alumnos al cual se les proporcionará el material y durante aproximadamente 5 semanas, que es el período durante el cual se desarrolla el tema de Probabilidad en el curso, se llevarán a cabo los estudios con respecto a la instrucción de estos temas.

1. Se realizará un análisis de las formas de resolución empleadas por los alumnos, mostrando los diversos modos de pensamiento y las alternativas para dar solución a un problema.
2. Se establecen una variedad de habilidades que deben formar parte de su instrucción y otras que ya deberían poseer, en caso contrario se buscará que las desarrollen mediante ejercicios y tareas.
3. Para tener acceso a las formas de pensamiento y habilidades de los alumnos nos auxiliaremos de una serie de preguntas de investigación como son: ¿Qué pasa? , ¿Por qué se confunden? , ¿Dónde aparece? , ¿Cómo ocurre? , ¿Cuándo se observa?

Dichas preguntas se pueden realizar al estar registrando u observando las formas de resolución de los problemas y mediante tablas de registro se organizarán los resultados.

4. Al establecer el análisis, también se comprobará la concepción y entendimiento de las variables dependientes e independientes su relación y necesidad de secuencia para la solución de los problemas.

## **CAPÍTULO II**

### **MARCO TEÓRICO**

## 2.1. TEORIAS DEL APRENDIZAJE.

Muchas disciplinas comparten el estudio del aprendizaje como son: físicos, bioquímicos, sociólogos, padres, maestros, gerentes de empresas, en fin, todos aquellos que necesitan enfrentarse a los problemas prácticos del control del aprendizaje, tienen necesidad de comprender los procesos fundamentales y tratar de entenderlos, pero el estudio científico del aprendizaje los realizan, primordialmente los psicólogos.

Thorndike junto con otros, le concedieron a la psicología el derecho a éste campo. Los educadores profesionales han aceptado que la psicología de la educación es la ciencia fundamental sobre la cual han elaborado sus prácticas y los estudios del aprendizaje se han llevado a cabo, simultáneamente en salones de clase y en laboratorios de psicología general y de psicología de la educación, estableciéndose una interdependencia entre los campos puro y aplicado (38).

### 2.1.1. DEFINICION DE APRENDIZAJE.

Proceso mediante el cual un sujeto adquiere destrezas o habilidades prácticas, incorpora contenidos informativos, o adopta nuevas estrategias de conocimiento y / o acción. (Diccionario de las Ciencias de la Educación: 116: 1986).

Muchas actividades pueden representar ejemplos de aprendizaje: Adquirir un vocabulario, memorizar un poema, enseñarse a manejar una computadora; existen actividades que requieren de las relaciones sociales con otras personas, como la adquisición de prejuicios, preferencias, actitudes e ideales sociales; hay otras cuya adquisición no se califica de mejoramiento, como son los tics, amaneramientos y gestos autistas.

Es muy difícil redactar una definición de aprendizaje que sea satisfactoria, se intenta definir como un mejoramiento que acompaña a la práctica o como un sacar provecho de la experiencia, se sabe que cierto aprendizaje no es un mejoramiento, y que otros tienen consecuencias indeseables.

La falta de conocimiento de qué ocurre dentro del organismo cuando se efectúa el aprendizaje, impide incluir fenómenos nerviosos hipotéticos en la definición de tal proceso. No se pretende negar que el aprendizaje es una función del tejido nervioso, sino que no es necesario saber cómo sucede el aprendizaje, para asegurar que se produce.

Una vez que se ha aprendido, son muchas las cosas que uno es capaz de hacer. El que puede sumar y restar, puede resolver muchos problemas novedosos sin tener que aprender nada nuevo, está ejercitando o usando un fragmento aprendido de conducta, sin embargo, cuando hay mayor novedad o número de cosas que

relacionar, como cuando se razona o se inventa, el proceso es interesante por sí mismo y no se puede describir diciendo que es la repetición de antiguos hábitos.

Puede haber varias clases de aprendizaje, unas simples y otras más complejas, y no todas ajustadas a los mismos principios.

Una teoría completa del aprendizaje debe asentar algo acerca del razonamiento, de la imaginación creadora y de la inventiva, además implica el memorizar y retener o la adquisición de destrezas, veamos algunas de las que emplearemos.

## 2.2. TEORÍA EVOLUTIVA DE JEAN PIAGET.

Piaget se doctoró en ciencias naturales y posteriormente estudió psicología y filosofía, es reconocido como una autoridad mundial en el campo de la psicología infantil, explica el proceso del aprendizaje como una adquisición de conocimiento. Para lo cual, establece una diferencia entre la maduración y el aprendizaje, es decir, entre el desarrollo de las estructuras hereditarias y el proceso del aprendizaje por experiencia directa. (24)

Así todo proceso de adquisición de conocimientos en función de la experiencia y sin la intervención de factores innatos o hereditarios es explicado en términos de aprendizaje, sin embargo, el aprendizaje como una adquisición de conocimientos en función de la experiencia, se caracteriza por ser un proceso mediato, que se desarrolla en un tiempo dado. Incluye la adquisición de elementos cognoscitivos en una forma empírica.

Piaget sugiere la adquisición de mecanismos operativos tendientes a la formación de una estructura lógica, además dichos mecanismos generales deben combinarse con aquellos procesos de equilibración, que no son aprendidos por el sujeto, ya que forman parte de la adaptación biológica. Los procesos de asimilación y acomodación son factores imprescindibles de esta función.

Los procesos referidos a la asimilación y acomodación exigen a su vez, un proceso de equilibrio, lo que permite la existencia de una coherencia entre los esquemas con relación a otros esquemas previamente establecidos.

La diferenciación de esquemas implica una serie de reacciones perturbadoras, que gracias al proceso equilibrador y a la organización que los esquemas previos pueden tener, permitirán una variación, que facilitará la acomodación de los nuevos.

Piaget explica el aprendizaje en términos de un proceso de asimilación que requiere de la acomodación y sobre todo de un proceso equilibrador que inhibe las reacciones perturbadoras originadas por los esquemas anteriores de éstos, con respecto al objeto a aprender, para con ello propiciar la creación de un nuevo esquema.

A manera de conclusión, el aprendizaje en sentido amplio no puede darse, si antes no se da el aprendizaje en sentido estricto, recordando que este último es lo que se aprende a través de la experiencia mediata.

El aprendizaje no es una manifestación espontánea cuyas formas ya están dadas, sino una unidad indivisible, formada por los procesos de asimilación y acomodación y el equilibrio existente, permite en última instancia, la adaptación del individuo al medio cognoscente que lo rodea.

Esta unidad se presenta a su vez como una secuencia de estructuras íntegras y no como elementos y procesos superiores.

La experiencia mediata será que durante el curso los alumnos visualicen, operen y manipulen: dados, fichas, monedas, etc. a fin de que verifiquen que no existen marcas o fallas intencionales que puedan afectar a los posibles resultados.

Cuando los resultados esperados por ellos no se presenten en la secuencia esperada, es decir el resultado lógico esperado no se presenta y esto provoca un desequilibrio ya que la teoría no se cumple, (por ejemplo, al lanzar una moneda 10 veces).

El aprendizaje en sentido amplio se presentará una vez que se amplían los experimentos y podrá observar que en una gran cantidad de repeticiones el valor esperado en forma teórica tiende a presentarse, aunque tal vez no llegue a obtenerse (por ejemplo, al lanzar 1000 veces una moneda).

Estos conflictos entre las ideas probabilísticas y la visión de la realidad podrán subsanarse con experiencias como la anterior, llegando al proceso equilibrador en donde la asimilación y acomodación están presentes.

### 2.3. TEORIA DE LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO DE VYGOTSKY.

El aprendizaje debía equipararse al nivel evolutivo del niño. Así por ejemplo, la enseñanza de la lectura, escritura y aritmética debía iniciarse en una etapa determinada (34).

Recientemente se ha dirigido la atención al hecho de que no podemos limitarnos simplemente a determinar los niveles evolutivos, si queremos descubrir las relaciones reales del proceso evolutivo con las aptitudes. Tenemos que delimitar como mínimo dos niveles evolutivos.

**NIVEL EVOLUTIVO REAL.** Es el nivel de desarrollo de las funciones mentales de un niño, establecido como resultado de ciertos ciclos evolutivos llevados a cabo, esto es, se infiere que únicamente aquellas actividades que los pequeños pueden realizar por sí solos son indicativos de su capacidad mental, sin embargo, no se había considerado que los niños puedan resolver problemas por encima de ese nivel evolutivo real con la ayuda de los profesores en donde el docente inicie la solución y el niño complete el proceso o si el alumno apoyado en sus compañeros resuelva el problema.

Cuando el nivel evolutivo real es superado por estas "capacidades adyacentes" es lo que se denomina LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO, que es la distancia entre

el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero.

Para aclarar aún más el nivel de desarrollo del niño, define las funciones que ya han madurado, es decir, los productos finales de desarrollo. Si un niño es capaz de realizar esto o aquello de modo independiente, significa que las funciones para tales casos han madurado en él. Entonces las zonas de desarrollo próximo, definen aquellas funciones que todavía no han madurado pero que se hayan en proceso de maduración, funciones que en un mañana próximo alcanzarán su madurez y que ahora se encuentran en estado embrionario. Estas funciones podrían denominarse "capullos" o "flores" del desarrollo, en lugar de "frutos" del desarrollo.

El nivel de desarrollo real caracteriza el desarrollo mental retrospectivamente, mientras que la zona de desarrollo próximo caracteriza el desarrollo mental previo.

La ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO proporciona la comprensión del curso interno del desarrollo del niño. Utilizando éste método se deben de tomar en consideración no sólo los ciclos y procesos de maduración ya alcanzados, sino aquellos que se hayan en estado de formación, que están comenzado a madurar y a desarrollarse.

La zona de desarrollo próximo, nos permite trazar el futuro inmediato del niño, así como su estado evolutivo dinámico, no sólo lo que ya ha sido completado evolutivamente, sino también aquello que está en curso de maduración.

El estado de desarrollo mental de un niño puede determinarse si se lleva a cabo una clarificación de sus dos niveles: Del nivel real de desarrollo y de la zona de desarrollo próximo.

La zona de desarrollo próximo, puede convertirse en un concepto sumamente importante en lo que a la investigación evolutiva se refiere, un concepto susceptible de aumentar la efectividad y utilidad de la aplicación de diagnósticos del desarrollo mental en los problemas educacionales.

La comprensión total del concepto “zona de desarrollo próximo” debe desembocar en una nueva evaluación de la imitación en el aprendizaje. Tanto la imitación como el aprendizaje se consideran como procesos puramente mecánicos. Los psicólogos recientemente han demostrado que una persona puede imitar solamente aquello que está presente en el interior de su nivel evolutivo. La imitación es fundamental desde la perspectiva de la modificación de toda la concepción de la realización entre el desarrollo y el aprendizaje en los niños.

***“El buen aprendizaje es sólo aquel que precede al desarrollo.”***

La zona de desarrollo próximo despierta una serie de procesos evolutivos intensos, capaces de operar sólo cuando el niño está en interacción con las personas de su entorno y en cooperación con algún semejante.

Una vez que se han interiorizado éstos procesos, se convierten en parte de los logros evolutivos independientes del niño.

El nivel evolutivo real de los alumnos es de extrema importancia, dado que nosotros como profesores de educación media suponemos que los alumnos manejan adecuadamente las fracciones comunes y que no tendrán dificultades con los conceptos básicos de porcentajes, transformaciones de fracciones y el razonamiento proporcional, siendo que en la realidad, nuestros alumnos no se encuentran en la zona de desarrollo próximo, pues no han madurado como frutos al realizar las operaciones mencionadas, sólo han aprendido en el mejor de los casos la operatividad, pero no han razonado acerca de esas operaciones y por lo tanto debemos retroceder en ese aspecto, para poderlos preparar a la zona de desarrollo próximo que esperamos sea el que razonen sobre lo que están realizando.

## 2.4. TEORIA DE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE AUSUBEL.

De acuerdo con David Ausubel (1), las personas adquieren el conocimiento sobre todo por medio de la recepción en lugar del descubrimiento.

Los conceptos, principios e ideas se presentan y comprenden, no se descubren, cuanto más organizada y centrada sea la presentación, la persona aprenderá mejor. Ausubel hace énfasis en lo que se conoce como aprendizaje verbal significativo, la información verbal, las ideas y las relaciones entre las ideas se consideran en grupo.

El aprendizaje de memoria no se considera como aprendizaje significativo, ya que el material que se aprende de memoria no se relaciona con el conocimiento existente. Por desgracia, a pesar de la ineficacia del aprendizaje de memoria, muchas lecciones no parecen depender de nada más.

Ausubel propone su modelo de enseñanza por exposición para fomentar el aprendizaje significativo más que el aprendizaje de memoria por recepción. (Aquí, exposición significa explicación, o establecer las bases para los hechos e ideas). En éste planteamiento, los profesores presentan los materiales en forma organizada, secuencial y de algún modo terminada y así, los alumnos reciben el material más útil de la manera más efectiva.

Las personas aprenden a organizar la información nueva en jerarquías o sistemas de codificación. Ausubel llama el concepto general en la parte superior del sistema sub-incluido, por que todos los demás conceptos se incluyen debajo de éste.

Ausubel piensa que el aprendizaje debe progresar no de manera inductiva, sino deductiva: de lo general a lo específico o de la regla o principio a los ejemplos. El planteamiento del razonamiento deductivo en ocasiones se conoce como el método de regla-ejemplo (37).

Esta teoría es la que se empleará principalmente durante el curso, las de Piaget y Vygostky pueden ser auxiliares de ésta.

#### 2.4.1. ORGANIZADORES DE AVANCE.

Se trata de una afirmación de introducción de una relación o un concepto de alto nivel lo suficientemente amplia para comprender la información.

La función de los organizadores de avance es proporcionar fundamentos o apoyo para la información nueva. Se puede considerar el organizador de avance como una

especie de puente conceptual entre el material nuevo y el conocimiento actual de los alumnos (35). Los organizadores pueden cumplir con 3 propósitos:

- Dirigen su atención hacia lo que es importante en el material que se va a introducir.
- Destacan las relaciones entre las ideas que se van a presentar.
- Le recuerda la información relevante que ya recibió.

#### 2.4.2. PASOS EN UNA LECCIÓN EXPOSITIVA.

Presentado el organizador de avance, el siguiente paso es mostrar el contenido en términos de similitudes y diferencias básicas, con el uso de ejemplos específicos.

A fin de aprender cualquier material nuevo, los alumnos deben observar no sólo las similitudes entre el material que se presenta y lo que ya saben; también deben observar las diferencias de modo que se puede evitar la interferencia es decir la confusión del material antiguo con el nuevo.

Es útil pedir a los alumnos que mencionen las similitudes y diferencias, en una lección de matemáticas se puede preguntar ¿Cuáles son los teoremas que se utilizan

en la solución de triángulos rectángulos ? y ¿Cuáles son los teoremas que se usan en la solución de triángulos oblicuángulos?

### 2.4.3. REALIZACIÓN DE LA MAYOR PARTE DE LA ENSEÑANZA EXPOSITIVA.

La enseñanza expositiva funciona mejor en ciertas situaciones que en otras. Este planteamiento es más apropiado cuando se desea enseñar las relaciones entre varios conceptos:

1. Los alumnos deben tener algún conocimiento sobre los conceptos. ¿Que sucede en una clase de matemáticas si los alumnos nunca escucharon sobre triángulos oblicuángulos? como podrían comparar éste concepto específico para obtener una mejor comprensión de lo que caracteriza a los distintos teoremas que permiten solucionar problemas que involucren triángulos oblicuángulos. Podrían recurrir al aprendizaje de memoria de definiciones y listas.
2. Se debe considerar para la enseñanza expositiva la edad de los alumnos. Este planteamiento requiere que los estudiantes manipulen las ideas

mentalmente, incluso si éstas son sencillas y se basan en realidades físicas como la probabilidad de tomar el camión equivocado al no ver su número de ruta y no llegar a su destino. Esto significa que la enseñanza expositiva es más apropiada, en el aspecto del desarrollo para los alumnos no importando en que nivel y bajo que estándares educativos se encuentren.

#### 2.4.4. ¿CÓMO ES UNA BUENA ENSEÑANZA?

Se puede decir que la buena enseñanza no se limita a las aulas; ocurre en todo lugar y tiempo, en hogares, hospitales, museos y salas de conferencias cuando se cuenta con un tipo especial de personas.

Para identificar una buena enseñanza, analicemos lo que sucede en una aula rural, en la clase hay 35 estudiantes, la mayoría emigró de diversas zonas. A pesar de que los niños hablan poco español o no lo hablan cuando empieza el curso escolar, al finalizar, la maestra los ha ayudado a dominar el currículo correspondiente.

Logra esto al enseñar en su dialecto al principio, como una ayuda para la comprensión, y luego introduce gradualmente el idioma español conforme los estudiantes están siendo preparados.

La maestra los alienta a estar orgullosos de la herencia lingüística de su dialecto, en tanto que aprovecha todas las oportunidades disponibles para ayudarlos en su desarrollo del español.

Otro ejemplo es enseñar a los estudiantes el concepto de números y signos mediante un evento físico: Dar un paseo en un tren subterráneo.

Al seleccionar una estación del tren, los estudiantes relacionan las salidas y llegadas con los números positivos y negativos, o bien la cantidad de personas que suben y bajan del vagón.

Traducen su paseo en el tren subterráneo a un lenguaje matemático, al considerar tanto el número de estaciones como su dirección.

Al proporcionar estas experiencias a los estudiantes antes de introducir el lenguaje formal del álgebra, permite que vean a las matemáticas más divertidas.

¿Qué se observa? Que los profesores están comprometidos con sus alumnos y que deben trabajar con una amplia variedad de capacidades e impedimentos de los estudiantes como son: Diferentes lenguajes, distintas vidas familiares y diversas necesidades.

Los profesores deben conocer y comprender sus asignaturas así como el pensamiento de sus estudiantes para que puedan crear en forma espontánea nuevos ejemplos y explicaciones, cuando los estudiantes están confundidos. Deben desarrollar los conceptos más abstractos, como los números negativos, de modo que sean reales y comprensibles para sus alumnos.

Ante el desafío de las nuevas tecnologías y técnicas, deben utilizarlas en forma apropiada para alcanzar metas importantes, no sólo para entretenimiento de los alumnos.

Durante el tiempo que trabajan con el material académico, también tienen cuidado de las necesidades emocionales de sus estudiantes al fomentar en ellos una alta autoestima y un alto sentido de responsabilidad con una gran capacidad de trabajo. Estos profesores desde el primer día de clases, planean y enseñan en forma cuidadosa, los procedimientos básicos de la forma de comportarse y aprender en sus clases.

Pueden corregir y ordenar con eficiencia la tarea en casa, reagrupar a los estudiantes, darles instrucciones, distribuir materiales, etc. Todo esto para investigar el por qué de las fallas y/o los errores de algunos de sus alumnos. (36).

Este es el perfil del tipo especial de persona que proporciona una buena enseñanza.

## 2.5. EL APRENDIZAJE.

Consideramos el aprendizaje como un proceso mental activo que permite a nuestros alumnos adquirir, recordar, y utilizar el conocimiento.

Las personas de manera activa seleccionan, practican, ponen atención, ignoran y toman muchas decisiones diferentes conforme procuran sus metas. Las perspectivas más antiguas enfatizaban la adquisición del conocimiento, pero los planteamientos más recientes destacan su construcción (20).

Los teóricos cognoscitivos consideran el refuerzo como una fuente de retroalimentación con respecto de lo que es probable que suceda si se repiten las conductas.

El conocimiento es el resultado del aprendizaje. Cuando aprendemos un hecho sabemos algo nuevo. El conocimiento es más que el producto final del aprendizaje previo; también guía el nuevo aprendizaje.

Lo que ya sabemos determina en gran medida lo que podemos aprender, recordar y olvidar, la propuesta del trabajo, se basa en un aprendizaje que desarrolle estructuras cognoscitivas más complejas, que sea activo, constructivista y finalmente significativo.

## **CAPÍTULO III**

### **MARCO METODOLÓGICO**

### **3.1. PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN A EXPLORAR.**

Una HIPÓTESIS es la respuesta tentativa a un problema sujeta a comprobación, su función es probar empíricamente una relación entre fenómenos, esto implica que sus términos sean descritos con operatividad, fidedignidad y validez.

Las hipótesis se fundamentan en un cuerpo teórico, construyéndose sobre un grupo de teorías que puedan respaldarla.

La hipótesis de la situación que se desea explorar, en este caso es:

**EL MATERIAL DIDÁCTICO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO PUEDE AYUDAR A COMPRENDER LA DIFERENCIA ENTRE PROBABILIDAD DE UNIÓN DE EVENTOS Y LA PROBABILIDAD CONDICIONAL DE EVENTOS.**

### **3.2. DEFINICIÓN DEL TIPO DE ANÁLISIS POR REALIZAR.**

Los términos o elementos de la hipótesis son las variables y pueden dividirse en conceptuales (que se refiere a la teoría ) y operativas (que se refiere a la medición y definición de sus indicadores).

Así tendríamos que las variables conceptuales son:

1. Los métodos y materiales tradicionales de enseñanza.
2. El método, empleando los materiales desarrollados.

**PLANTEAMIENTO CONCEPTUAL.**- Es claro que existe una diferencia entre la unión de eventos y la intersección de eventos, la primera es únicamente la agrupación de los elementos de cada evento y en caso de que algunos se repitan, considerarlos sólo una sola vez, en la segunda se tiene que considerar únicamente a los elementos que son comunes en ambos eventos.

Se elaborará material para poder mostrar, explicar y comparar estos conceptos a fin de verificar si han sido captados, comprendidos y razonados por los alumnos, posteriormente se mostrarán problemas en donde se podrán analizar sus resultados.

### 3.3. DEFINICIÓN OPERATIVA DE VARIABLES.

Las variables operativas serán el pre-test y el post-test y los resultados obtenidos en ellos serán analizados para mostrar las comparaciones entre ellos y el posible hecho de haber logrado un avance en el aprendizaje deseado.

**PLANTEAMIENTO OPERATIVO.-** Se encarga de medir los resultados obtenidos en el grupo de alumnos antes de recibir la instrucción, posteriormente se le presenta el material y se comparan los resultados para medir su comprensión y captación.

**OPERACIONES Y PREDICCIONES.-** Se realizó un pre-test, a fin de mostrar los conocimientos previos de los alumnos, así como las posibles diferencias conceptuales que pueden afectar en los resultados, para los cual se establecieron sub-hipótesis a fin de:

1. Comprobar las conclusiones y sugerencias de los especialistas, con respecto a los problemas que enfrentan los alumnos que han sido objeto de investigación en sus países.
2. Corroborar la experiencia del investigador respecto a las dudas y problemas mostradas por los alumnos, y que se relacionan con el tema de investigación.

3. Una vez que se han comprobado ambas y que el fenómeno ha sido observado, se establecieron hipótesis específicas, a fin de aprobarlas o rechazarlas.

Primera Sub - hipótesis:

**LAS CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS PROPORCIONADAS POR DIVERSOS AUTORES SE PRESENTARÁN EN NUESTRO PAÍS CON LOS ALUMNOS DEL MISMO NIVEL ACADÉMICO.**

1. Los estudiantes fallan en el concepto de número racional y tienen dificultades con conceptos básicos como: fracciones, decimales y porcentajes (3), (4).
2. Se presentan dificultades en la traducción verbal de los datos del problema que afectan al azar y a los tópicos matemáticos. (14).
3. Muchos estudiantes han desarrollado una aversión a la probabilidad pues la han tenido que estudiar en forma abstracta y formal. (11).

Las conclusiones mencionadas en el punto 1, se cumplen según se verifican los resultados del PRE- TEST en los ejercicios de fracción común.

Para el punto 2, en los ejercicios de lenguaje, más de la mitad desconoce el significado de palabras básicas empleadas en el tema de probabilidad, por lo que es lógico que al tratar de traducir los datos de un problema no comprendan de qué se les está hablando en el mismo.

En el punto 3, muy pocos han tenido cursos anteriores, pero la aversión se presenta en todos los cursos de matemáticas si no han sido impartidos en forma amena e interesante.

Segunda Sub – hipótesis:

**LA EXPERIENCIA MUESTRA EN LOS ALUMNOS UN DESCONOCIMIENTO Y CONFUSIÓN DE LOS CONECTIVOS “Y”, “O”.**

Fischbein, Barbat y Minzat establecieron que los alumnos tienen dificultades en la aplicación de las leyes de la multiplicación e ignoran la importancia de mostrar el espacio muestra (9).

Esta se confirma en el punto 2 de la sub-hipótesis anterior, ya que los alumnos desconocen las palabras que se emplearán durante el curso de probabilidad.

El desconocimiento lleva a la confusión, pues su intuición los conduce a dar un significado conocido en lenguaje común que no es el correcto con la forma de

relacionar el significado de los conectivos, otorgándoles un mayor o menor valor de probabilidad al operar la unión de eventos así como el producto de probabilidades.

Lo anterior se observó en los resultados del PRE- TEST.

### **3.3.1. CARACTERÍSTICAS OBSERVABLES QUE DEFINEN LAS VARIABLES.**

La aceptación o comprobación de las sub-hipótesis anteriores nos permiten establecer las hipótesis:

**"EL MATERIAL DIDÁCTICO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO PUEDE AYUDAR A COMPRENDER LA DIFERENCIA ENTRE PROBABILIDAD DE UNIÓN DE EVENTOS Y LA PROBABILIDAD CONDICIONAL DE EVENTOS".**

Recordemos que tratamos con una respuesta tentativa a un problema y que está sujeta a comprobación, para los cuales debemos describir:

La variable independiente es la diferencia entre la probabilidad de unión de eventos y la probabilidad condicional de eventos y el efecto que tiene en los alumnos.

La variable dependiente es el material proporcionado en la instrucción.

Como variables de control podemos tener: Sexo, nivel de educación, clase socioeconómica, etc.

El conjunto de valores de la estadística de prueba puede dividirse en: **Región de rechazo** y **Región de aceptación**.

### 3.3.2. TIPOS DE VARIABLES.

Las variables de la hipótesis pueden clasificarse en:

1. **Variable independiente.**- Son todos los elementos o factores que explican un fenómeno o la conducta del mismo; al investigador sólo le interesa el efecto que tiene y no en lo que dicha variable afecta. Son los alumnos.

2. **Variable dependiente.**- Se refiere al fenómeno que se intenta explicar y que será objeto de estudio durante la investigación. Son las condiciones que cambian cuando se cambia a las variables independientes. El material proporcionado en la instrucción.
  
3. Cuando el investigador trata de cancelar los efectos entre la variable independiente y la dependiente se llaman **variables de control** y se debe decidir con qué tipo de variable trabajará, por ejemplo: sexo, inteligencia, nivel de educación, clase socioeconómica.
  
4. **Variables extrañas.**- Aquellos elementos que pueden influir en el resultado de la investigación, pero el investigador no puede controlar, son las que pueden tener alguna influencia sobre la variable dependiente. Es posible que aparezcan.

En la teoría estadística se usan coeficientes para medir el grado de relación entre variables y probar que sea significativa.

Existen diversos procedimientos para probar la hipótesis y de acuerdo con ésta adoptar una regla de decisión, si la hipótesis se rechaza o no.

*"El objetivo de una prueba estadística es probar una hipótesis acerca de uno o más parámetros de la población".*

En una prueba estadística se encuentran: **hipótesis alternativa** (que el investigador desea apoyar), **hipótesis nula** (contradicción de la hipótesis alternativa), **estadística de prueba** (valores muestrales que se usan para calcular el rango en el que se comprueba la hipótesis).

Si la estadística de prueba cae en la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula y la hipótesis alternativa o de investigación es aceptada.

Para probar la hipótesis se utilizan:

La Z para muestras grandes, La T de Student para muestras pequeñas, (menores de 30), la  $\chi^2$  para análisis de varianza.

Los métodos más usuales para la comprobación de la hipótesis son: Estadístico, simulación y experimentación.

### 3.4. AMBIENTE O ENTORNO.

La finalidad de un investigador es aportar algo significativo al avance de la práctica y de la teoría de la educación, obteniendo resultados que correspondan a un grupo numeroso de individuos, instituciones o sucesos.

Generalmente no es factible realizar la investigación con todo el grupo por limitaciones de tiempo, dinero y otros recursos, por lo que es necesario seleccionar una parte de la población y a esto se le llama muestra.

#### LOS SUJETOS Y EL MUESTREO.

La población considerada son alumnos del CETIS N°. 9 que se encuentran en el tercer semestre de carrera terminal y que han cursado Aritmética, Álgebra, Geometría y Teoría de Conjuntos, para corroborar la muestra, se realizaron encuestas para saber si han llevado principios de probabilidad o no, descubriendo que 2 alumnos ya conocen de la materia desde la secundaria.

La población con relación a la cual se desea generalizar resultados es la de los alumnos de las diversas escuelas del D.F. con distintas especialidades en sus carreras terminales y que en el Tercer Semestre cursan la materia de Probabilidad y Estadística.

Se consideran dos tipos de población:

1.- Población meta o universo.

2.- Población accesible.

**POBLACIÓN META.**- Conjunto de personas, cosas o sucesos con respecto al cual el investigador desea generalizar los resultados de su investigación, esta puede ser los alumnos de Enseñanza Media Terminal del Distrito Federal pertenecientes a los CETIS.

Si se trata de una población amplia, aumenta la validez externa y las posibilidades de generalizar los resultados con confianza. Si la población muestra es más restringida, es fácil sacar la muestra, pero serán menores las posibilidades de generalizar los resultados.

**POBLACIÓN ACCESIBLE.**- Pueden ser, los alumnos de Enseñanza Media Terminal del CETIS No. 9, en este caso la muestra pertenece a los alumnos de un grupo de tercer semestre. Se desea generalizar los resultados para realizar dos pasos importantes:

1. Generalizar de la muestra a la población accesible.
2. Generalizar de población accesible a la población meta.

El generalizar de la muestra a la población accesible es fácil, ya que se consideró un grupo al azar proporcionado por el Jefe de Servicios Docentes de la Institución al inicio del semestre, los alumnos en su mayoría son mujeres, ya que las especialidades terminales de la escuela son: Diseño Industrial de Patrones, Gerencia y Supervisión en la Industria del Vestido y Sastrería Industrial, este inmueble de estudios se encuentra situado en el centro de la ciudad y sus integrantes provienen de la clase media, tanto en forma social, como económica.

Podemos establecer que se trata de una muestra aleatoria ya que según las especialidades de las diversas escuelas, éstas motivarán que se trate con grupos en donde sea mayor el número de hombres o mujeres según sea el caso y que para fines de la investigación estamos hablando de alumnos en general, no importando el sexo al que pertenecen.

Para generalizar de población accesible a la población meta, estamos tratando con alumnos que pertenecen a escuelas ubicadas en el D. F. en donde los alumnos forman parte de diversas clases sociales y niveles económicos y que acuden a este tipo de escuelas en donde la diferencia de especialidades en las carreras terminales no es representativa, como tampoco la influencia externa como prensa, radio, televisión, etc. ya que en general tienen acceso a ello.

Los estudios indican que la muestra es muy parecida a la población de la escuela, por lo que no existirán sesgos que puedan tener posibles efectos sobre los resultados.

## TAMAÑO DE LA MUESTRA.

El grupo de estudio está constituido por 43 alumnos, 2 hombres y 41 mujeres cuyas edades varían entre 17 y 23 años, del mismo nivel educativo y estatus económico. Al finalizar el estudio se contó con sólo 36 alumnos ( siete de ellos causaron baja o no se presentaron al examen de la segunda unidad o post test y por este motivo no fueron considerados en estos resultados).

El cuadro de muestreo se proporciona con la lista de alumnos presentes al pre-test.

La proporción de la muestra inicial que participó en la investigación completa se proporciona al finalizar la investigación.

### 3.4.1. DESCRIPCIÓN DE LAS CONDICIONES A LAS QUE SE SUJETA EL ESTUDIO.

Las condiciones a las que está sujeta el estudio son el salón de clases, la asistencia de los alumnos y los apuntes desarrollados para impartir el tema de probabilidad, el material se programó para 5 sesiones de 2 horas:

- En la primer sesión se da un panorama histórico del desarrollo de la probabilidad, se ejemplifican los errores al intentar proporcionar definiciones y visualizan los diversos campos de aplicación de la probabilidad, además los alumnos resuelven ejercicios donde se aplica el lenguaje probabilístico.
- En la segunda sesión se menciona como se mide la probabilidad entre cero y uno, los alumnos asignan valores a la probabilidad de diversos eventos, resuelven ejercicios, establecen suposiciones, comparan sus resultados y los discuten a fin de concluir lo anterior.
- En la tercer sesión se analizan problemas, dan soluciones y se les muestran las diferencias entre los conectivos, se desarrollan temas como el espacio muestra y lo construyen para diversos ejercicios, se definen los eventos elemental, complementario, mutuamente exclusivos y se define la probabilidad axiomática.

- Durante la cuarta sesión se tratan ejemplos de eventos complementarios, unión de eventos, la conjunción y probabilidad condicional. Esta es la parte más importante del curso en donde se aplican en los ejercicios, los razonamientos lógicos y establecen preguntas y relaciones para tratar de que los alumnos aclaren las dudas con respecto a las confusiones de los conectivos, su aplicación, interpretación y significado en aplicaciones nuevas.
- En la quinta sesión se continúa resolviendo ejercicios y se trata el tema de eventos independientes, en donde se reforzarán los conceptos dados con anterioridad mediante una serie de análisis y preguntas.

### 3.4.2. NATURALEZA DE LOS DOCUMENTOS DE ESTUDIO.

Originalmente se había pensado en un material didáctico desarrollado para mostrar la diferenciación entre la probabilidad de unión de eventos y la probabilidad condicional de eventos que como hemos observado están presentes antes de la instrucción.

Al observar la amplia variedad de problemas ocasionadas por la falta de manejo adecuado del lenguaje probabilístico, se diseñaron cambios en el material para mostrar más ejercicios que contuvieran el lenguaje y conceptos probabilísticos, además se agregó el tema de CONECTIVOS que trata de explicar y aclarar el uso correcto que se da en probabilidad a las letras "o" e "y". El material que se desarrolló tuvo como base el mostrado en el libro "Azar y Probabilidad", (6).

Se pretende dar una secuencia de la relación de los conectivos con los ejercicios de los temas: Unión de Eventos, La Conjunción y Probabilidad Condicional, para demostrar a los alumnos la necesidad de manejar en forma apropiada el lenguaje que se utiliza en el tema de Probabilidad, ya que de no ser así, se tienen múltiples confusiones y errores conceptuales.

### 3.4.3. MÉTODOS EMPLEADOS EN LA ELECCIÓN DE DOCUMENTOS O MUESTRA.

Para la elección de los ejemplos y ejercicios se consideraron las condiciones de que fueran fácilmente entendidos por los alumnos y capaces de ser visualizados durante la clase por medio de objetos o dibujos, a continuación se menciona el por qué se escogieron esos ejercicios:

En el tema de Unión de Eventos:

- Ejemplo 5.- Se emplea un diagrama que muestra los resultados posibles de dos dados y pueden ser marcados por los alumnos.
- Ejercicio 20.- Mostrar el espacio muestra y encontrar el valor de probabilidad por medio de la fórmula.
- Tarea 5.- Aplicar la fórmula de la unión, para encontrar el valor de probabilidad.
- Ejercicio 21.- Resolver el problema mediante la elaboración de una tabla.

En el tema de Conjunción:

- Ejemplo 6.- Se proporcionan valores de probabilidad y se pide comparar valores empleando conectivo.
- Ejercicio 22.- Se compara el significado de las oraciones empleando el conectivo.
- Ejercicio 23.- Obtener valores de probabilidad y comparar valores y significado de cada conectivo.
- Ejercicio 24.- Se compara el valor de la probabilidad de las oraciones empleando el conectivo.
- Ejercicio 25.- Se compara el valor de la probabilidad de las oraciones empleando el conectivo.

- Ejercicio 26.- Se compara el valor de la probabilidad de las oraciones empleando el conectivo.

Durante el desarrollo del tema de la Intuición se menciona:

- Ejercicio 16.- Donde se pide establecer en qué máquina se jugará para tener más probabilidades de éxito, evento dependiente, independiente y condicional.

En el tema Probabilidad Condicional:

- Ejercicio 27.- Condición del espacio muestra.
- Ejercicio 28.- Delineación correcta del espacio muestra.
- Ejemplo 7.- Probabilidad condicional, desarrollo de la fórmula de la multiplicación.
- Ejemplo 8.- Condición del espacio muestra en el lanzamiento de dos dados y relación de los conectivos.
- Ejercicio 29.- Condición del espacio muestra.
- Tarea 7.- Ejercicio de urnas y canicas de colores para establecer probabilidad condicional.

### 3.5. INSTRUMENTOS.

Como instrumentos para proporcionar información y conceptos, se emplearon ejercicios donde manipulaban objetos o les eran conocidos y se consideraron apropiados pues son fácilmente identificados por la población, ya que pudieron haber jugado con ellos o son fácilmente manuales.

Se establece un diseño secuencial a fin de que los alumnos vayan comprobando la teoría con los ejercicios y tengan una base teórica con la cual sustenten las preguntas que se les hacen.

Los resultados del análisis estadístico mostrarán en forma clara si se ha logrado o no un cambio en la percepción de lo que antes desconocían y se pretende que después de la instrucción hayan aprendido o que estén en condiciones de establecer comparaciones entre la diferencia de probabilidad de unión de eventos y la probabilidad condicional de eventos, o que al menos den interpretación al significado de los conectivos.

Los instrumentos estadísticos empleados fueron la media y la desviación típica, para indicar la variabilidad, y al comparar las desviaciones en el Pre-Test y Post-Test, se observa que el grupo fue más homogéneo.

Las normas que manejan los instrumentos son adecuadas ya que no salen de lo común ni son especiales. A los instrumentos se les agregan pequeñas preguntas o cuestionarios que establecen una pregunta específica y que busca el razonamiento y comprensión adecuado a una situación.

Al verificarse la hipótesis: "EL MATERIAL DIDÁCTICO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO PUEDE AYUDAR A COMPRENDER LA DIFERENCIA ENTRE PROBABILIDAD DE UNIÓN DE EVENTOS Y LA PROBABILIDAD CONDICIONAL DE EVENTOS", se podrán desarrollar otros materiales que persigan los mismos fines de aprendizaje para los alumnos.

### 3.5.1. REGISTROS.

Se planearon y elaboraron hojas que muestran los resultados del Pre-test de aprovechamiento a partir de las cuales se obtuvieron las conclusiones que permitieron la planeación de los temas, el tratamiento y desarrollo secuencial de éstos y observar los puntos importantes sobre los cuales remarcar los conocimientos y principios que les causan más problemas a los alumnos (ver los Anexos).

También se planearon y elaboraron hojas que muestran los resultados del Test de aprovechamiento después de la instrucción, a partir de la cual se obtuvieron las tablas de éxitos y gráficas (Anexos 5 Y 6), que nos permiten mostrar las conclusiones y de esta forma obtener las soluciones para verificar o rechazar la prueba estadística, y que nos auxiliarán en el desarrollo de nuevas hipótesis cuando encontremos valores significativos que nos puedan proporcionar otros conocimientos y principios que sean fuente de otra investigación.

### 3.5.2. CUESTIONARIOS.

Al finalizar el curso se proporcionó un cuestionario a seis alumnos (dos alumnos destacados, dos regulares y dos de baja calificación) con la finalidad de recabar información respecto al material, actitudes, creencias, opiniones, procesos de solución, que nos orienta acerca de qué les pareció el curso, qué se les dificultó, qué se les facilitó y que den algunas sugerencias para mejorar el material (Anexo 4).

### 3.5.3. TEST.

Se proporciona en el Anexo 1 una copia del Pre-test y en el Anexo 3 una copia del Post-Test.

Una prueba o test es un instrumento para medir las diferencias entre individuos en una o más dimensiones, y deben tener:

1. **Confiabilidad.**- Un test es confiable si se obtienen los mismos resultados cada vez que se administra.
2. **Validez.**- Un test es válido si llega a medir lo que pretende medir, o sea cuando existe una relación directa entre una característica y su medición, por lo tanto un test válido será confiable, en cambio un test confiable no siempre será válido.
3. **Objetividad.**- Un test es objetivo si los sesgos de carácter humano no han entrado en su elaboración ni influyen en su administración. (un test de selección múltiple es objetivo).
4. **Economía.**- Se refiere al tiempo que se necesita para administrar y calificar un test.

5. Simplicidad de la administración.- Las personas que colaboran en la administración del test tiene que administrar, calificar e interpretar su resultado.
  
6. Interés.- Debemos cerciorarnos que no existan ítems confusos y que no sea pesado.

En la investigación se empleó el Test-Retest que consiste en administrar el mismo test al mismo grupo en dos ocasiones distintas, para medir su confiabilidad, se comparan por medio de la correlación. Las desventajas son la memoria, la práctica y experiencias que interviene en su administración y que pueden influir en los resultados.

## 3.6. DATOS.

### 3.6.1. RECABACIÓN DE LOS DATOS.

Los datos obtenidos tanto en el pre-test, post-test y del cuestionario se muestran en las gráficas correspondientes a los temas, Anexo 6:

- Lenguaje.
- Igualdad de Probabilidad
- Representatividad.
- Expresión como fracción común.
- Azar.
- Razonamiento.
- Significado "y" , "o".
- Probabilidad condicional.
- Unión de eventos.
- Intersección de eventos,
- Repetición de eventos.

### 3.6.2. ANÁLISIS DE LOS DATOS.

El análisis de los datos se realiza con las tablas y las gráficas de resultados. En el Pre-Test se obtuvieron los siguientes resultados promedio:

Total de Aciertos	Preguntas sin respuesta	Calificación	Porcentaje de preguntas sin respuesta
15.16	7.94	3.88	20.37

La desviación típica en este caso fue de 5.32 y comprende el 69.4 % de la muestra

En el Post-Test se obtuvieron los siguientes resultados promedio:

Total de Aciertos	Preguntas sin respuesta	Calificación	Porcentaje de preguntas sin respuesta
23.86	3.05	6.11	7.83

La desviación típica en este caso fue de 6.46 y comprende al 72.2 % de la muestra.

El número de aciertos pasó de 546 a 859 que representó un 8.7 de aumento en el promedio de los aciertos, esto muestra que entendieron mejor las preguntas o mejoraron en su conocimiento.

Las preguntas sin responder disminuyeron de 286 a 110 que representan el 4.89 en promedio, es decir adquirieron algún conocimiento o criterio que les permite ahora exponer una respuesta.

El promedio de preguntas sin respuesta en el Pre-Test fue de 7.94 y su desviación típica de 5.45 que comprende al 61.1 % de la muestra.

El promedio de preguntas sin respuesta en el Post-Test fue de 3.05 y su desviación típica de 3.02 que comprende al 77.7 % de la muestra.

La calificación pasó de 140 puntos a 220.25 total es decir que de un promedio de 3.88 reprobatoria ascendió a 6.11 en promedio aprobatoria, esto representa un aumento del 157.32 %, lo anterior muestra que adquirió conocimientos.

Finalmente el porcentaje de preguntas sin responder que en el Pre-Test fue de 20.37 % bajó a 7.83 % en el Post-Test

Método:	n	Media	s
Pre-Test	36	15.16	5.32
Post-Test	36	23.86	6.46

El Post-Test tiene un promedio de rendimiento mayor que el Pre-Test

Los instrumentos estadísticos elaborados así como los datos de los resultados obtenidos nos permiten considerar establecer una comparación entre los sucesos presentados que nos llevan a interpretar el significado de que se ha cumplido la hipótesis: "EL MATERIAL DIDÁCTICO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO PUEDE AYUDAR A COMPRENDER LA DIFERENCIA ENTRE PROBABILIDAD DE UNIÓN DE EVENTOS Y LA PROBABILIDAD CONDICIONAL DE EVENTOS", se podrán desarrollar otros materiales que persigan los mismos fines de aprendizaje para los alumnos.

### 3.6.3. INSTRUMENTOS ESTADÍSTICOS.

En el Pre-Test se obtuvieron los siguientes resultados promedio de aciertos: 15.16 con una desviación típica de 5.32 y comprendió el 69.4 % de la muestra

En el Post-Test se obtuvieron los siguientes resultados promedio de aciertos: 23.86 con una desviación típica de 6.46 y comprendió el 72.2 % de la muestra.

Con lo cual cada grupo fue más homogéneo.

#### 3.6.4. CONDICIONES DE USO.

La técnica que se empleó fue la de comparar los resultados del Pre-Test y el Post-Test a fin de establecer si se cumplían las mejoras en los resultados.

#### 3.6.5. EL SIGNIFICADO DE LOS RESULTADOS.

El valor de las medias fue muy significativo ya que en el Pre-Test nos muestra un resultado de 15.16 de aciertos con una calificación promedio de 3.88 y un porcentaje de aprobación de 13.8 %, mientras que en el Post-Test nos muestra un resultado de 23.86 de aciertos con una calificación promedio de 6.11 y un porcentaje de aprobación de 52.7 %.

#### 3.6.6. CÁLCULOS ESTADÍSTICOS.

La Estadística en la investigación y en la evaluación educativa nos permite una descripción muy exacta de los resultados obtenidos así como la realización de

procedimientos y pensamientos definidos y precisos que nos facilitan la presentación de resultados en forma conveniente y comprensible y nos ayudará a formular conclusiones y establecer posibles predicciones, facilitando el análisis de los factores y hechos que influyen en situaciones complicadas.

Por otro lado a fin de comparar que el método que emplea materiales permite un mejor rendimiento que el método tradicional, se repitieron los post test un semestre después en el grupo de control contra un grupo al que se impartió el curso sin el material, obteniéndose:

#### GRUPO SIN MATERIAL (4° F).

Promedio Aciertos:	Promedio Calificación	Preguntas Sin Respuesta	Porcentaje Preguntas Sin Respuesta
18.71	4.79	2.42	6.22

#### GRUPO CON MATERIAL (4° G).

Promedio Aciertos:	Promedio Calificación	Preguntas Sin Respuesta	Porcentaje Preguntas Sin Respuesta
21.28	5.45	2.92	7.50

Podemos observar que todos los puntos aumentaron en el grupo que contó con el material, tanto aciertos y calificación como preguntas sin responder y su

porcentaje, esto nos lleva a considerar el modificar el material para hacerlo más permanente en la mente del alumno.

### 3.7. HIPÓTESIS NULA.

Indica que no existe una diferencia significativa entre las variables y que la hipótesis nula es necesaria para el test, el ejemplo será: "No existe diferencia significativa entre el rendimiento de los alumnos a quienes se les aplica un examen sin enseñanza previa y entre los que se les enseña siguiendo un método con materiales concretos". (39).

El test muestra una diferencia significativa, por lo que se rechazará la hipótesis nula.

### 3.7.1. NIVEL DE SIGNIFICACIÓN.

Un test de significación proporciona ese nivel que puede usarse para decidir si se acepta o rechaza la hipótesis nula. Este nivel se expresa como una fracción decimal como .05 que indica que hay menos de 5 posibilidades entre 100 de que la diferencia sucederá si en realidad no existe una diferencia entre las poblaciones.

Considerando la diferencia entre las medias de 15.16 y 23.86, con muestras de 36 sujetos cuyas desviaciones son de 5.32 y 6.46, existen menos de 5 posibilidades entre 100 de que ocurra una diferencia tan grande si las medias de población son iguales y por lo tanto, concluimos que las medias de población son distintas.

## **CAPÍTULO IV**

## **CONCLUSIONES**

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

#### 4.1. CONCLUSIONES.

1.- El planteamiento de preguntas a los alumnos, les lleva a reflexionar sobre sus dudas y de esta forma pueden tomar conciencia y hacerse responsables de su aprendizaje, para lo cual debemos orientarlos a que busquen información.

2.- Se deben apoyar las discusiones en clase, para que aprendan a escuchar y exponer diversos puntos de vista y que no se encuentren con respuestas definitivas, lo anterior tiene como la finalidad el sembrar esa duda que les permita continuar buscando respuestas, para ampliar su visión y conocimiento.

3.- Es importante desarrollar el material que se va a emplear en la instrucción, ya que en la guía de clase se ubicará el tema de acuerdo al nivel del curso y esto nos permitirá una evaluación en la clase y al final de ésta, lo anterior proporcionará una serie de preguntas para establecer una crítica y corroborar si se cumplió o no con la guía de clase.

4.- Lo expuesto anteriormente, me proporcionó un desarrollo ya que al tratar de ordenar una serie de conocimientos implementando una Metodología Didáctica y el realizar cambios en las formas de evaluación, me permitió modificar acciones que establecieran una congruencia entre los temas que deseaba enseñar y la forma en que los iba a presentar.

5.- Al finalizar el curso se mostraron los siguientes resultados en la encuesta realizada:

¿Te gustan las matemáticas?	50% respondió SI.
Tema más sencillo	Unión de eventos y Espacio muestral.
Tema más difícil	Probabilidad condicional y Estrategias de solución.
¿Qué te gustó del tema?	Saber de cuántas formas se pueden obtener los resultados
¿Los ejemplos eran claros?	En su mayoría sí, otros no, eran confusos.
Los ejercicios y la teoría ¿se relacionaban?	Si.
¿Entendiste los procesos de solución?	Unos sí, otros no. Sólo por medio del razonamiento se podía llegar a la solución.
¿En dónde te quedaron dudas?	La aplicación de la fórmula de la probabilidad condicional.
Sugerencias para mejorar el tema de Probabilidad.	Poner más ejemplos, explicar más los temas, que los alumnos piensen para resolver los problemas.
Razones	50% lo recuerda.
Evento	25% lo recuerda.
Espacio muestra	50% lo recuerda.
Azar	75% lo recuerda.
Fracciones	50% lo recuerda.
Definición de Unión.	50% lo recuerda.
Definición de intersección.	25% lo recuerda.
Definición de Probabilidad condicional.	0% lo recuerda.
Aplicación de Unión.	50% lo recuerda.
Aplicación de Intersección.	50% lo recuerda.
Aplicación de Probabilidad.	25% lo recuerda.

Valor de Probabilidad "y" , "o"	75% correcto.
Comparar el valor de "y" , "o"	50% correcto.
Explicar el valor de "y" , "o"	25% correcto.
Valor invertido en "y" , "o"	50%
Sin contestación en "y" , "o"	25%

## 4.2. RECOMENDACIONES.

A quienes pretendan realizar estudios como el presentado, les sugiero realicen encuestas sobre algún tema de su interés y que efectúen una metodología conveniente que los lleve a obtener una respuesta a sus inquietudes.

En este trabajo se presentaron algunas dudas como:

1. ¿Por qué en el post-test existen, en algunos casos menos aciertos, que en el pre-test?
2. ¿Por qué al comparar los conectivos "o" e "y", el 75% sabe la definición correcta y conoce la diferencia entre sus valores, pero al aplicar esta diferenciación en los ejemplos, sólo el 50% compara sus valores correctamente, el 25% puede explicarlo correctamente, el 50% lo hace en forma invertida y el 25% no contesta?

Lo anterior puede estar sujeto al desarrollo de investigaciones posteriores e invito a todos los interesados a que las aborden, tal vez desde otro punto de vista, lo cual permitirá observar distintas formas de resolución a un mismo problema.

Recordemos que como profesores nos interesa la enseñanza que son las diversas etapas, formas y procedimientos de presentación de los conocimientos para que sean adquiridos por nuestros alumnos y como investigadores queremos identificar

a los obstáculos que afectan al aprendizaje, que son los diversos métodos de adquirir información o modificar conductas.

## BIBLIOGRAFÍA.

1. Ausubel David P. *Sicología Educativa Un Punto de Vista Cognoscitivo* Ed. Trillas. 1981, México.
2. Bell, A., Low, B., & Kilpatrick, J. *Theory, research y practice in mathematical education*. Nottingham (1985). U.K. Shell center for Mathematical Education.
3. Carpenter, T. P., Corbitt M.K. & Kepner, H.S. Jr. What are the chances of your students knowing probability? *Mathematics Teacher*, ( 74, pp. 342-345).1981.
4. Carpenter, T.P., Lindquist, M.M., Matthews W., & Silver, E. Results of the third NAEP Mathematics assessment: Secondary School. *Mathematics Teacher*, (76, pp. 652-659). 1983.
5. COSNET Programas maestros del Tronco Común del Bachillerato Tecnológico 1988 S.E.P. - S.E.I.T.
6. Diaz Godino Juan, Batanero Bernabéu Ma. del C. Cañizares Castellano Ma. de J. Azar y Probabilidad Fundamentos Didácticos y Propuestas Curriculares. Ed Síntesis. 1987, España.
7. Duncan D.R., & Litwiller, B.H. Randomnes, normality and hypothesis testing: experiences for statistics class. *Mathematics Teacher*, ( 74, pp. 368-374),1981.
8. Ernest, P. Introducing the concept of probability *Mathematics Teacher*, ( 77, pp. 524-525). 1984.
9. Fischbein, E. Barbat, I. & Minzat, I. Intuitions Primaires et intuitions secondaires dans l'initiation aux probabilités *Educ. Stud. Math*, 4, 262-280. 1971.
10. Fischbein, E. *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel. 1975.
11. Freudenthal, H. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel. 1973.
12. Gnanadesikan, M., Scheaffer, R.L., Swift, I., *The art and techniques of simulation*. Palo Alto CA: Dale Seymour. 1986.
13. Green, D.R. A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D.R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G.M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp 766-783). Sheffield, U.K: Teaching Statistics Trust. 1983.

14. Hansen, R.S., McCann, J., & Myers, J.L. Rote versus conceptual emphases in teaching elementary probability. *Journal for research in Mathematics Education*, 16, 364-374. 1985.
15. Hope, J.A., & Kelly, I.W. Common difficulties with probabilistic reasoning *Mathematics Teacher*, ( 76, pp. 565-570). 1983.
16. Kapadia, R. A brief survey of research on probabilistic notions. *Theory, research and practice in mathematical education* (pp. 261-265). Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education. 1985.
17. Konold, C.E. *Conceptions of probability: Reality between a rock and a hard place*. Doctoral Dissertation, University of Massachusetts, 1983.
18. Landwehr, J., Watkins, A.E., *Exploring data Palo Alto CA: Dale Seymour*. 1986.
19. Landwehr, J., Watkins, A.E., Swift, J. *Exploring surveys. Information for samples. Palo Alto CA: Dale Seymour*. 1987.
20. Meyer Paul L. *Introductory Probability and Statistical Applications Fondo Educativo Interamericano, 1970. México*.
21. Mosteller, F (Ed). *Statistics by example*. Reading M.A. Addison-Wesley. 1973.
22. Newman, C.M., Obremski, T.E., Scheaffer, R.L. *Exploring Probability Palo Alto CA: Dale Seymour*. 1986.
23. Pereira-Mendoza L. & Swift, T., *Why teach statistics and probability*. 1981 Yearbook of the NCTM, Reston, V.A.
24. Piaget J. *Desarrollo y Aprendizaje en el Niño U.P.N. Tredex Editores*, 1988. México.
25. Piaget, J. & Inhelder, B. *The origin of the idea of chance children*. London: Routledge & Kegan Paul. 1978.
26. Scheaffer, R. L. The role of statistics in revitalizing precollege mathematics and science education. In *proceedings of the section on Statistical Education* (pp 19-21). Washington D.C. A.S.A. 1984.
27. Shaughnessy, J.M. *Misconceptions of probability: From systematic errors to systematic experiments and decisions*. 1981 Yearbook of the NCTM, Reston, V.A. 1981.

28. Shepler, J.L. A Study of parts of the development of thinking in British Middle and Secondary School Children. 1969.
29. Shutelt, G. The agenda in action 1983 Yearbook of the NCTM, Reston, V.A.
30. Shulte, A. P. (Ed.) Teaching statistics and Probability 1981 Yearbook of the NCTM, Reston, V.A.
31. Swift, J. The first international conference on teaching Statistics. Statistics teacher Network, (pp. 1-2). 1982.
32. Swift, J. Challenges for enriching the curriculum statistics and probability. Mathematics teacher, ( 76, pp. 268-269). 1983.
33. Tversky, A., & Kahneman, D., Causal schemas in Judgments under uncertainty: Heuristics and biases (pp. 117-128). Cambridge, U.K; Cambridge University Press. 1982.
34. Vygostky L. El Desarrollo de los Procesos Mentales Mente y Sociedad, Cambridge. Los Procesos Sicológicos Superiores Ed. Paidos, México 1988.

#### ARTICULOS.

35. Díaz Barriga Angel, Fascículo 1 Cuaderno 14, 2° Congreso Nacional de Investigación Educativa, 1993, México.
36. Dificultades en el Aprendizaje de Conceptos Básicos de Probabilidad y Estadística, implicaciones para la Investigación. Joan Garfield, Andrew Ahlgren, Universidad de Minnesota, Traducción, Enrique Salazar, Universidad de Almería. 1995. España.
37. Inicios Del Movimiento Psicoinstruccional, Bruner Ausubel y Gagné Hernández Hernández Pedro, Sicolología de la Educación, Ed. Trillas 1991 México.
38. La Sicolología del Aprendizaje Thorndinke E, L. Helgar y Bauer, Teorías del Aprendizaje, Ed. Trillas 1973 México.
39. Introducción a la Investigación y Evaluación Educativa, Presentación y Análisis estadísticos de datos. Patrick Scott.

# **ANEXOS**

**ANEXO 1**

**PRE-TEST**

**PRE-TEST NOMBRE** \_\_\_\_\_

1.- INSTRUCCIONES.- Contesta las preguntas que se dan a continuación:

1.- ¿Cuándo dices que tienes certeza de algo?

---

2.- ¿Cuándo dices que algo es más probable que otra cosa?

---

3.- ¿Cuándo dices que dos cosas tienen igual oportunidad de algo?

---

4.- ¿Cuándo dices que algo es menos probable que otra cosa?

---

5.- ¿Cuándo dices que algo es improbable?

---

6.- ¿Cuál es la diferencia entre BAJA, MEDIANA Y ALTA PROBABILIDAD?

---

7.- El resultado de la probabilidad se indica por medio de: ( )

a) Esquemas      b) Tablas      c) Fracciones comunes      d) Gráficas

8.- La distribución al azar es aquella que se determina por: ( )

a) Simulación      b) Suerte      c) Aproximación      d) Organización

9.- Lo fortuito se relaciona con: ( )

a) Lo que pienso      b) La suerte      c) Lo que espero      d) Lo imprevisto

10.- Antónimo de Unión: ( )

a) Intersección      b) Dispersión      c) Fusión

11.- Antónimo de Posible: ( )

a) Puede suceder      b) Accidental      c) Imposible      d) Inesperado

12.- Carrera de coches.- Sobre la primer casilla, se colocan los coches de cada alumno y escogen entre par y non, lanzan alternadamente el dado y avanzan una casilla, dependiendo del tipo de número que muestre el dado, gana quien llegue primero a la meta.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Número
										Par
										Non

¿Piensas que alguno tiene ventaja en el juego? SI \_\_\_ NO \_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

13.- En el lanzamiento de una moneda ¿puedes decir con seguridad cuál será el resultado?  
SI \_\_\_\_\_ NO \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

14.- En una gran ciudad existen dos hospitales en uno grande nacen 45 niños cada día y en el pequeño 5 como sabes el 50% de los niños son hombres pero el porcentaje puede variar cada día, en un mes un hospital reportó que más del 60% de los nacidos fueron hombres. ¿En cuál de los hospitales crees que fue?

	Más del 60%
HOSPITAL GRANDE	
HOSPITAL PEQUEÑO	

15.- Tenemos dos discos uno azul y uno rojo ¿En cuál de los dos es más fácil obtener el número 3?



1. Obtener el 3 en el disco rojo. ( )
2. Obtener el 3 en el disco azul. ( )
3. Es igual en ambos. ( )

16.- Pablo y María introdujeron dos bolas en una bolsa (una roja y otra verde), extraen una de la bolsa y resultó ser roja, si la meten de nuevo a la bolsa y vuelven a sacar una,

¿De qué color crees que será? \_\_\_\_\_

¿Es más fácil obtener el rojo que el verde? \_\_\_\_\_

Supón que se repite el experimento 10 veces y se tuvieron los resultados 6 rojos, 4 verdes.

¿Cómo expresarías el resultado empleando fracciones?

---

17.- Nos describen a una mujer: "Brillante, soltera de 27 años con facilidad de palabra y cuenta con seguro social". ¿A que crees que se dedique?

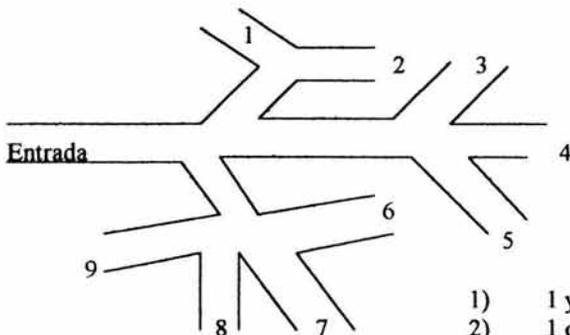
---

18.- En el siguiente par de oraciones, ¿consideras que significan lo mismo?

SI \_\_\_\_\_ NO \_\_\_\_\_ NO LO SE \_\_\_\_\_

- Tener un ataque al corazón y ser mayor de 55 años.
- Tener un ataque al corazón o ser mayor de 55 años.

19.- Una rata se coloca en un laberinto el cual comienza a explorar. Al final de cada ruta hay una trampa, ¿en cuál trampa o trampas es más probable que termine?



- 1) 1 y 2 es más probable.
- 2) 1 o 2 es más probable.
- 3) Todas son igualmente probables.
- 4) No sabría decir.

¿Por qué es la respuesta correcta? \_\_\_\_\_

20.- ¿Cuál de las siguientes preguntas tiene la mayor probabilidad?

- a) Tener un ataque al corazón y ser mayor de 55 años.
- b) Tener un ataque al corazón o ser mayor de 55 años.
- c) Tener un ataque al corazón.
- d) Tener más de 55 años.

¿Por qué?

---

21.- De las siguientes oraciones, una de ellas tiene la probabilidad más alta.

¿Cuál es?

( )

- a) Ser campesino
- b) Estar desempleado
- c) Ser campesino y estar desempleado
- d) Ser campesino o estar desempleado

¿Por qué?

---

22.- Te encuentras con una mujer atractiva y bien vestida

¿Que crees que sea menos probable?

( )

- a) Es una modelo famosa
- b) Es una vendedora de cosméticos
- c) Es una modelo o una vendedora
- d) Es una modelo y vendedora.

¿Por qué?

---

23.- Una bolsa contiene 10 fichas, 7 negras y 3 blancas. De las fichas negras 3 tienen una "x" marcada y de las blancas 1 tiene la "x". Sin ver, Eduardo tomó una ficha con "x", las probabilidades de que sea negra son:

( )

- |            |             |            |
|------------|-------------|------------|
| 1) 3 de 7. | 2) 7 de 10. | 3) 1 de 3. |
| 4) 3 de 4. | 5) 4 de 10. | 6) NO SE   |

24.- Se tienen 3 fichas rojas, 2 azules y 1 verde en una bolsa. Si se han sacado de ella 2 rojas y 1 azul y se extrae otra, ¿de que color es más probable que sea?

\_\_\_\_\_.

¿Por qué?

---

25.- Se tienen 5 fichas rojas, 2 azules y 2 verdes en una bolsa. Si se han sacado de ella 2 rojas y 1 azul y se extrae otra, ¿de qué color es más probable que sea? \_\_\_\_\_ ,

¿Por qué? \_\_\_\_\_

26.- Se tienen 4 fichas rojas, 4 azules y 2 verdes en una bolsa. Si se han sacado de ella 2 rojas y 1 azul y se extrae otra, ¿de qué color es más probable que sea? \_\_\_\_\_ ,

¿Por qué? \_\_\_\_\_

27.- Una caja con 100 tachuelas es vaciada en la mesa de un carpintero, algunas quedan con la punta hacia arriba (32) y otras hacia abajo (68). Si se repitiera el experimento ¿cuál de los siguientes resultados podrías obtener?

- |    |                                 |    |                                 |
|----|---------------------------------|----|---------------------------------|
| 1) | 20 hacia arriba 80 hacia abajo. | 2) | 36 hacia arriba 64 hacia abajo. |
| 3) | 63 hacia arriba 37 hacia abajo. | 4) | 51 hacia arriba 49 hacia abajo. |
| 5) | 84 hacia arriba 16 hacia abajo. |    |                                 |

¿Por qué? \_\_\_\_\_

## **ANEXO 2**

# **MATERIAL DIDÁCTICO**

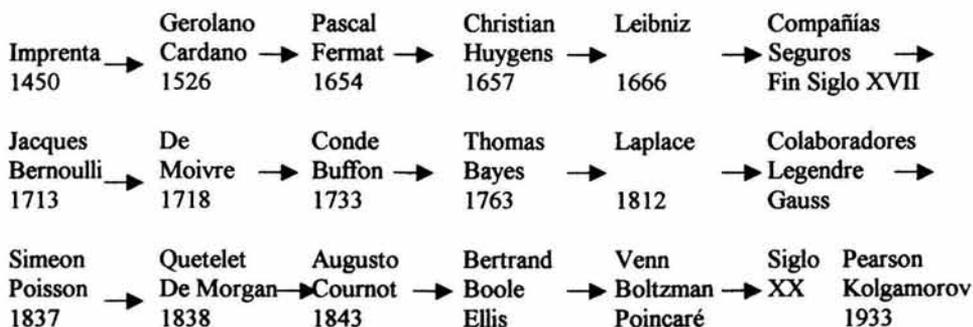
## 2.1. INICIOS DE LA PROBABILIDAD.

Los juegos de azar son casi tan antiguos como la humanidad ya que se tiene conocimiento de que desde hace 40,000 años se empleaban unos huesos llamados astrágalo (de cuatro caras imperfectas y con diferente peso) con los cuales se interpretaba la voluntad de los dioses, estos prevalecieron y se han encontrado en las culturas de Egipto, Grecia y Roma.

El dado cúbico más antiguo del que se tiene conocimiento es de cerámica y fue encontrado en Irak y es de 3,000 años a C. La palabra azar proviene del árabe *zahr* que significa flor y estaba pintada en la cara de un dado.

La probabilidad empieza a ser retomada para su estudio hasta el siglo XVI ya que por su origen de mostrar la voluntad divina, el querer intentar prever el resultado o sea pretender adivinar la acción de la deidad era considerado como un acto impío y podía traer mala suerte (todo suceso ocurre bajo la providencia divina).

### DESARROLLO DE LA PROBABILIDAD.



La probabilidad en el siglo XVII, se emplea para resolver preguntas relacionadas con los juegos de azar. Es hasta el siglo XX, cuando se desarrolla la teoría matemática basada en axiomas, definiciones y teoremas, encontrando su aplicación en Ingeniería, Ciencias, Agricultura, Administración de Empresas, Medicina y Sicología.

Con la probabilidad se manifestó que la estadística podría emplearse para la extracción de conclusiones válidas y la toma de decisiones razonables, sobre la base del análisis de los datos.

El mundo está lleno de incertidumbre y sus situaciones van desde los juegos de azar a las ciencias físicas, biológicas, políticas y sociales, los problemas en estos campos. implican la predicción de lo que sucederá en circunstancias donde se pueden encontrar elementos conocidos o mensurables y aleatorios o al azar.

El valor máximo de probabilidad es 1 y el mínimo es 0. Como el azar afecta tanto a la reunión, organización y análisis de datos, se debe considerar la probabilidad al realizar las suposiciones.

Las imprecisiones inevitables en la asignación de probabilidades iniciales, no tienen graves consecuencias en el cálculo de probabilidades.

Debemos vincular la lógica y la incertidumbre de la matemática de los fenómenos de masas, la teoría de decisión y la Estadística como la transformación de datos en información significativa.

### 2.1.1. DEFINICIONES O USOS INFORMALES DE LA PROBABILIDAD.

La probabilidad tiene muchos matices de significación pero principalmente se emplea para expresar tres circunstancias: Improbable, probable y seguro.

1. La *aproximación escolar tradicional* es teórica y a priori, se basa en la noción de sucesos equiprobables como:

*"Tirar un dado y obtener un 5 equivale a 1/6".*

Lanza un dado 6 veces y anota cuantas veces obtuviste un cinco. \_\_\_\_\_  
¿Qué piensas que pasó? \_\_\_\_\_

2. Las *teorías lógicas* dicen que la probabilidad traduce un grado de creencia racional (**tasa de confianza**) que conviene conceder a una proposición *p* dada la información de otra proposición *q*.

Aquí la probabilidad se trata como un tipo especial de relación entre dos enunciados:

P.- El día está nublado

Q.- Es casi seguro que llueva

¿Cómo se expresa la relación de ambos enunciados?  
\_\_\_\_\_

3. La *probabilidad frecuencial* se calcula a partir de las frecuencias relativas observadas en cada resultado en pruebas repetidas.

Esta teoría no puede evaluar una probabilidad con precisión pues el número de ensayos es limitado, por ejemplo: Lanza una moneda diez veces y anota cuantas águilas y soles obtuviste \_\_\_\_\_

¿Cuál será el valor de probabilidad? \_\_\_\_\_

4. *Probabilidad subjetiva* es una expresión de la creencia o percepción personal.

Este concepto no descansa en la repetición, por lo que es posible evaluar la probabilidad de un suceso una sola vez y diferentes personas asignarán probabilidades distintas para un mismo suceso, por ejemplo: La probabilidad de que Diana vaya al cine con Luis es 0.10

¿Puedes suponer por qué se le asigna este valor de probabilidad tan bajo?  
\_\_\_\_\_

---

5. La *Probabilidad Formal* se calcula usando las leyes de la teoría axiomática.

Los sucesos se representan por conjuntos y la probabilidad es una medida normada definida sobre éstos conjuntos. Este es el tipo de enseñanza formal empleado en la escuela, pero las dificultades conceptuales y de tipo matemático no permiten un tratamiento previo desde el punto de vista formal-axiomático.

Al comparar los enfoques que hemos visto, la interpretación frecuencial puede repetirse indefinidamente, la subjetiva solo se aplica a un suceso. La mayoría de los casos reales quedan entre dos extremos, en donde se tendrá cierta dosis de juicio personal. Los registros históricos no pueden considerarse como repeticiones sino experimentos aleatorios parecidos, pero no equivalentes, es decir se aplican juicios personales, basados en la información disponible.

La probabilidad proporciona un modo de medir la incertidumbre, entonces los modelos probabilísticos son la base de la mayor parte de la teoría estadística. Se da la impresión de que a cada pregunta existe una respuesta y que no hay nada intermedio entre falso y verdadero, es importante que aprendan a distinguir los grados de incertidumbre, comparar predicciones y extrapolaciones, es decir, ser dueños de su incertidumbre.

### 2.1.2. EL AZAR.

El azar se define como casualidad, caso fortuito, depende de la suerte, es una supuesta causa de sucesos no debidos a una necesidad natural ni intervención intencionada humana, ni divina. El uso de ejemplos del campo biológico, físico, de la sociedad y político permitirá a los alumnos un conocimiento más profundo del complejo mundo que los rodea.

1. En el campo **biológico** se pueden mencionar: Sexo, estatura, síndrome de Down, leucemia, diabetes, número de hijos, injertos en árboles frutales, plagas, cosechas, color de ojos, peso, tipo de sangre, alteraciones hormonales, pigmento de la piel, SIDA, etc.
2. Vivimos en un mundo **físico** variable como: la meteorología, intensidad y dirección del viento, lluvias, nieve, capa de ozono, tormentas, sequías, granizadas, materias primas como el carbón, petróleo cuyo precio está sujeto a variación, profundidad del mar, deformación de rieles de ferrocarril, fenómeno del niño, accidente automovilístico, etc.
3. El hombre vive en **sociedad** y aquí predomina la incertidumbre como: drogadicción, alcoholismo, número de reprobados, desempleo, tradiciones morales, religión, ingreso económico, planificación familiar, empleo al finalizar la escuela, delincuencia, prostitución, epidemias, enfermedades, aficiones, etc.
4. En el mundo **político** el gobierno toma decisiones como: censos, , índice de precios y cotizaciones al consumo, legalizar casinos, emigración-inmigración, comercio, aumento de sueldos, elecciones democráticas, promesas de campaña, retiro al financiamiento de partidos políticos, mujer para presidente, tendencia del PIB en el sexenio, etc.

EJERCICIO 1.- Formen equipos de 3 o 4 integrantes y nómbrenlo, redacten en una hoja de su cuaderno, 4 ejemplos en donde se emplee el azar de cada uno de los campos, usen 2 e inventen otros 2.

### 2.1.3. EL LENGUAJE.

Otra dificultad en la estimación probabilística se debe a la imprecisión del lenguaje ordinario, como ejemplo tenemos:

EJERCICIO 2.- En equipo discutan y relacionen a los sinónimos o antónimos de las palabras, colocando dentro del paréntesis la letra que los relaciona:

Eventual ( ) Sin querer ( )

Al azar ( ) Inesperado ( )

A ) Accidental, fortuito, impensado. D ) Sin idea, sin amor, sin intención.

B ) De chiripa, de suerte, de volado. E ) Irreflexivo, ocasional, incierto.

C ) Esperado, calculado, previsto.

EJERCICIO 3.- Formen equipos y preparen una previsión del tiempo para el 2 de Noviembre y para esto consideren la lista de expresiones para describir el pronóstico como:

1	2	3	4
Cierto.	Bastante probable.	Es posible.	Casi imposible.
Se espera que	Imposible	Seguro	Igual probabilidad
Alguna posibilidad	Puede ser	Incierto	Sin duda

Ya formados los equipos se numeran del 1 al 4, a continuación se mencionan algunos eventos que pueden suceder el 2 de Noviembre en la Ciudad de México, los equipos nones tomen la opción 1 y los pares tomen la opción 2.

#### OPCIÓN 1. (NONES)

llover

será un día cálido y soleado

la temperatura máxima será de 50 grados

el cielo estará despejado

#### OPCIÓN 2. (PARES)

la nieve alcanzará un metro de altura.

habrá un ligero viento

el cielo estará nublado

la temperatura estará entre 15 y 25 grados.



Sin intención.-  
Accidental.-  
Inesperado.-  
De chiripa.-  
Fortuito.-  
Inopinado.-  
De rebote.-  
Impensado.-  
Ocasional.-  
Sin querer.-  
Casual.-  
Intención.-

Dudoso.-  
Quizás.-  
Podría ser.-  
Casi seguro.-  
Posibilidad.-  
Se puede esperar que.-

Cierto.-  
Incierto.-  
Sin duda.-

### 2.3. ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN.

2.3.1. Se identifican dos estrategias erróneas que son la representatividad y la disponibilidad:

**Representatividad.-** Cuando el sujeto asigna la probabilidad a un suceso, basándose en la semejanza con la población de la cual se extrae.

**EJERCICIO 6.-** La probabilidad de que nazca un varón es de  $\frac{1}{2}$  ¿Cuál suceso es más probable que aparezca niña o niño en el nacimiento?

- a) Tienen la misma probabilidad de ocurrir. ( )
- b) VMMVMV
- c) VVVVMV
- d) Ninguna de las tres anteriores.

**Disponibilidad.-** Es la tendencia a hacer predicciones sobre un suceso basándose en la mayor o menor facilidad para recordar o construir ejemplos del suceso.

**EJERCICIO 7.-** A partir de un grupo de 10 personas, un individuo debe seleccionar comités (cada persona puede formar parte de más de un comité). ¿Qué será más fácil escoger?

- a) Comités formados por 2 personas. ( )
- b) Comités formados por 8 personas.
- c) Se tiene el mismo número de comités de 2 que de 8 personas.
- d) No lo se.

**EJERCICIO 8.-** En parejas y con una serie de fichas se pretende formar una torre, lanzar alternadamente una moneda si sale águila A toma una pieza, si es sol B la toma, ¿Puedes decir como irán después de 10 jugadas? Si o No \_\_\_\_\_

¿Piensas que alguien tiene ventaja en el juego? Si o No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

EJERCICIO 9.- Formen equipos de dos y anoten los resultados obtenidos luego de lanzar 10 veces la moneda:

Equipo	Águila	Sol	Ganan las águilas	Ganan los soles	EMPATE
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
Totales					

Con los resultados mostrados en la tabla ¿Qué puedes concluir al comparar las muestras pequeñas contra las muestras grandes?

---

Calcula el valor de la probabilidad empleando los totales de águila y sol.

---

¿Cuántas ganaron las águilas? \_\_\_\_\_ ¿Cuántas ganaron los soles? \_\_\_\_\_ Empates \_\_\_\_\_

EJERCICIO 10.- Pablo y María introdujeron dos canicas en una bolsa (una roja y otra verde), extraen una y resultó ser roja, si la meten de nuevo y vuelven a sacar

¿De que color crees que será? Roja \_\_\_\_\_ Verde \_\_\_\_\_

¿Es más fácil obtener el rojo que el verde? SI \_\_\_\_\_ NO \_\_\_\_\_

Repetimos el experimento 10 veces y anotamos los resultados. \_\_\_\_\_

¿Cómo expresarías el resultado empleando fracciones? \_\_\_\_\_

EJERCICIO 11.- Antes de realizar el experimento descrito anteriormente 20 veces:

- ¿Podrías decir aproximadamente cuántas verdes y rojas te van a salir?

Estimación de :                      Rojos =  $\frac{\quad}{20}$                       Verdes =  $\frac{\quad}{20}$

- Anota el resultado de cada extracción R o V y completa el cuadro siguiente:

Resultados de 20 extracciones

	Número de veces	Fracción
Rojo		
Verde		

Discute con tus compañeros de equipo lo siguiente:

- ¿Qué color fue más frecuente? \_\_\_\_\_ ¿Por qué?  
\_\_\_\_\_
- ¿Puedes adivinar el color de la siguiente extracción? \_\_\_\_\_ ¿Por qué?  
\_\_\_\_\_
- Compara los resultados obtenidos con la estimación hecha antes del experimento. ¿Qué sucedió?  
\_\_\_\_\_

TAREA 2.- Una caja con 100 tachuelas es vaciada en la mesa de un carpintero, algunas quedan con la punta hacia arriba (32) y otras hacia abajo (68). Si se repitiera el experimento ¿cuál resultado crees obtener?

- 1) 20 hacia arriba 80 hacia abajo.
- 2) 36 hacia arriba 64 hacia abajo.
- 3) 63 hacia arriba 37 hacia abajo.
- 4) 51 hacia arriba 49 hacia abajo.
- 5) 84 hacia arriba 16 hacia abajo.

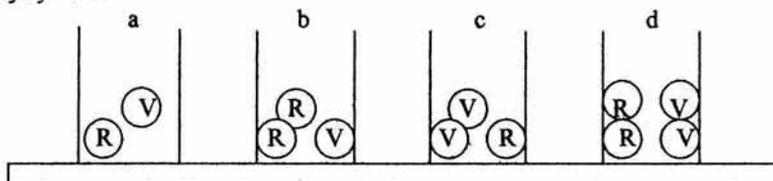
¿Qué consideraste para dar tu respuesta?

---

EJERCICIO 12.- Se tiene una caja con 3 discos, 1 rojo por ambos lados, 1 azul por ambos lados y 1 con rojo de un lado y azul del otro, se muestra un lado y se pide que adivinen el otro, anotando su predicción, después de 10 extracciones se comparan resultados y se pide que determinen una estrategia para obtener la mayor cantidad de aciertos.

1. Elige una estrategia de juego para obtener más aciertos.
2. ¿Adivinar es una estrategia?
3. ¿Cuál es su valor?
4. ¿Puedes idear o pensar otra?
5. Representa lo que será su espacio muestral.
6. ¿Por qué escogiste esa estrategia?
7. ¿Cuál es el valor de la estrategia?

EJERCICIO 13.- Observa la siguiente figura que representa 4 urnas conteniendo canicas de color rojo y verde:



Contesta Falso o Verdadero a las siguientes cuestiones:

¿Por qué?

	F	V
Es más fácil obtener R en a) que en b)		
Es más fácil obtener R en b) que en d)		
Es más fácil obtener V en a) que en d)		
Es más fácil obtener R en a) que en c)		
Es más fácil obtener V en b) que en c)		

---



---



---



---



---

Andrés escogió una urna y obtuvo el siguiente resultado con retorno de la canica:

R R V R R R V R

¿Qué urna crees que escogió?

---

¿Qué empleaste para dar tu conclusión?

---

¿Existe una regla para el orden de aparición de algún color determinado? SI \_\_\_ NO \_\_\_

¿Por qué?

---



---

Si un color aparece dos veces seguidas ¿Es más probable que la próxima no sea de ese color?

SI \_\_\_ NO \_\_\_ ¿Por qué? Explica tu respuesta:

---

¿Puedes decir como son las urnas a y d ? \_\_\_\_\_

¿Por qué?

---

¿Cómo puedo igualar la probabilidad de las cuatro urnas?

---

Si aumento en b una canica roja ¿qué tengo que hacer para que b y d sean iguales?

---

¿Cómo son las urnas b y c ?

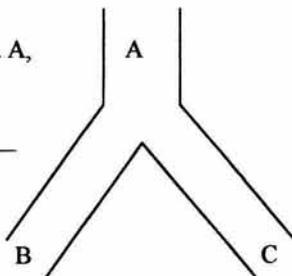
---

EJERCICIO 14.- Dejamos caer una canica por la abertura A, esta puede deslizarse y caer por B o por C.

¿En que canal es más probable que salga la canica el B \_\_\_ o el C \_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

---



Si me dicen que las aberturas A, B, C son iguales y que la unión de B y C se encuentra a la mitad de la abertura de A, ¿crees que saldrá por B con más frecuencia que por C?

SI \_\_\_ NO \_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

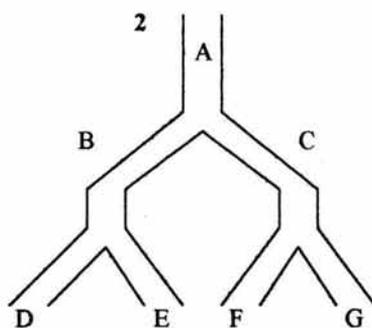
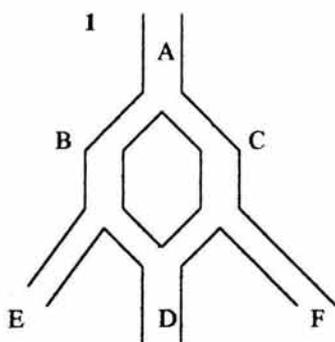
Si lanzamos 100 canicas por A, ¿Cuántas crees que pasarán por el orificio B \_\_\_\_\_ y por el orificio C \_\_\_\_\_

Calcula su valor de Probabilidad.

$P_B =$

$P_C =$

EJERCICIO 16.- Marco y Lucía encontraron en la feria 2 máquinas. Se gana un premio si la canica cae en la letra D. ¿En que máquina jugarías 1 o 2? Puedes calcular la probabilidad de D en cada caso sabiendo que la canica entre por A:



Para la máquina 1:

Si lanzamos una canica por A ¿Cuál es la probabilidad de que termine en F? \_\_\_\_\_

Si la canica cae en el canal B ¿Cuál es la probabilidad de que termine en F? \_\_\_\_\_

Si la canica cae en el canal C ¿Cuál es la probabilidad de que termine en F? \_\_\_\_\_

¿Cuáles son los Sucesos Dependientes? Su nombre lo dice son los que dependen de

\_\_\_\_\_

Para la máquina 2:

¿Cuál es la probabilidad de que la canica termine en D? \_\_\_\_\_

Si la canica cae en el canal C ¿Cuál es la probabilidad de que termine en D? \_\_\_\_\_

Si la canica cae en el canal B ¿Cuál es la probabilidad de que termine en F? \_\_\_\_\_

¿Cuáles son los sucesos independientes? Son aquellos en los que la ocurrencia de un evento

\_\_\_\_\_ afectará la probabilidad del otro, por lo que su valor debe de ser \_\_\_\_\_.

Para la máquina 1 si la canica pasa por B o C la probabilidad de que caiga en D es \_\_\_\_\_ y equivale a  $\frac{1}{4}$ .

## 2.4. CONECTIVOS.

En el lenguaje común empleamos palabras para construir oraciones que dan un significado o relación de ideas, veamos el caso de las letras “o” e “y”.

La letra “o” denota alternativa o diferencia de dos elementos independientes, por ejemplo: ¿Café o té? ¿ir o venir?; También puede dar una idea de equivalencia: o sea ...

La letra “y” enlaza dos palabras o dos oraciones por ejemplo: Piensas y hablas; también puede dar una idea de adición: Café y leche; de oposición: Abre y cierra; o de consecuencia: Camina y se cansa.

En la Teoría de los Conjuntos denominamos a las letras “o” e “y” como conectivos:

El conectivo “o” equivale a unir los elementos de los dos eventos y en el caso de la probabilidad, será la suma de sus probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Supongamos:

$$P(A) = \frac{1}{8}; \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

Entonces:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{6+8}{48} = \frac{14}{48} = \frac{7}{24}$$

$$\frac{7}{24} > \frac{1}{8}; \quad \frac{7}{24} > \frac{1}{6}$$

**CONCLUSIÓN:** *La probabilidad de la unión de dos eventos diferentes siempre es mayor que cada una de las probabilidades.*

El conectivo “y” equivale a multiplicar la probabilidad de dos eventos:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Suponiendo los mismos valores:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{48}$$

$$\frac{1}{48} < \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{48} < \frac{1}{6}$$

**CONCLUSIÓN:** *La probabilidad de intersección de dos eventos, son los elementos que les son comunes y se interpreta como la multiplicación de la probabilidad de los dos eventos, la cual siempre es menor a cada uno de sus factores o probabilidades.*

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos pertenecientes a  $E_1$ , o a  $E_2$ .

$$E_1 + E_2 \text{ o } E_1 \cup E_2.$$

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos comunes pertenecientes tanto a  $E_1$ , como a  $E_2$ .

$$E_1 \bullet E_2 \text{ o } E_1 \cap E_2.$$

Si los eventos  $E_1$  y  $E_2$  no tienen puntos en común, son mutuamente exclusivos y se tiene:

$$P\{E_1 + E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\}$$

Si los eventos  $E_1$  y  $E_2$ , tienen puntos en común y no son mutuamente exclusivos y se tiene:

$$P\{E_1 + E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\} - P\{E_1 \bullet E_2\}$$

**EJEMPLO.**- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un doble seis o el valor de tres puntos al lanzar dos dados?

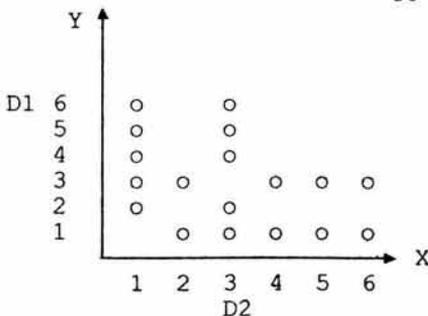
La probabilidad de obtener un doble seis es  $1/36$  y la de obtener un tres es  $2/36$ , como las probabilidades son mutuamente exclusivas se tiene:

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

**EJEMPLO.**- ¿Cuál es la probabilidad de obtener ya sea un solo uno o un solo tres al lanzar dos dados?

La probabilidad de obtener un solo uno es  $10/36$  y la de obtener un solo tres es similar  $10/36$ , sin embargo, estos eventos no son mutuamente exclusivos ya que el doble uno y el doble tres se pueden obtener de dos formas, se tiene:

$$\frac{10}{36} + \frac{10}{36} - \frac{2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$



## 2.5. ESPACIO MUESTRAL.

El "**Espacio Muestra o Muestral**" de un experimento, es el conjunto de resultados de un experimento, tal que cada uno corresponde a un elemento de ese conjunto, también se le conoce como espacio de eventos.

"**Punto Muestral**" es un elemento del espacio muestra, también se llama punto de eventos.

"**Evento**" es un subconjunto del espacio muestral.

Para el experimento de lanzar un dado se tiene el espacio muestral:

$$D = \{1,2,3,4,5,6\}$$

El conjunto formado por los resultados  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  no es un espacio muestral ya que falta el resultado 6.

Se pueden agrupar diversos resultados en el mismo espacio muestral, veamos el siguiente:

EJEMPLO 1.- "Obtener los puntos PAR e IMPAR con un dado".

Este conjunto de dos resultados posibles es un espacio muestral, ya que cada tirada del dado corresponde a un elemento del conjunto:

$$\text{PAR} = \{2, 4, 6\}$$

$$\text{IMPAR} = \{1, 3, 5\}$$

Entonces la probabilidad estará dada por:

$$P_P =$$

$$P_I =$$

EJEMPLO 2.- Número: "Divisible entre 3" y "No divisible entre 3", los resultados para un dado son:

$$\text{"Divisible entre 3"} = \{3, 6\} \quad ; \quad \text{"No divisible entre 3"} = \{1, 2, 4, 5\}$$

Ahora la probabilidad para cada evento será:

$$P_D =$$

$$P_{ND} =$$

Para obtener cada punto en un dado, su probabilidad es de  $1/6$ , pero cuando se trata de 2 dados se tiene:

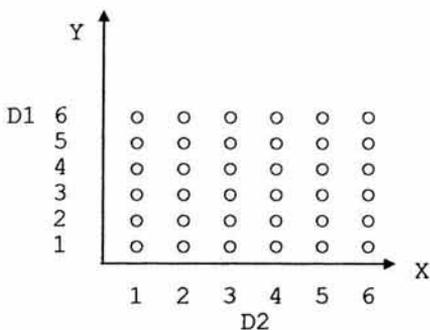
$$D_1 \times D_2 = 6(6) = 36 \text{ puntos muestrales.}$$

Es decir el espacio muestral de un dado se multiplica por el del otro, así para cada punto de 2 dados su probabilidad es de  $1/36$ .

Sí fueran 3 dados sería:  $(6)(6)(6) = 216$  puntos muestrales y su probabilidad para cada punto es de  $1/216$ .

Al lanzar un dado es fácil listar todos los resultados posibles del experimento, para varios dados esto puede complicarse, por lo que se emplean diagramas.

El siguiente diagrama es llamado "Punto y Espacio" y describe los resultados del experimento "Lanzar dos dados":



EJERCICIO 17.- Indica el evento "Obtener en total tres puntos al lanzar dos dados", por medio de una línea punteada.

Mediante una línea continua indica el evento: "Obtener en total de 7 puntos al lanzar dos dados".

Por medio de un círculo, indica el evento: "Al lanzar dos dados, obtener un cinco con cada dado".

Deben hacerse todas las distinciones posibles en la lista de los puntos muestrales, así se observa que el evento "Obtener un doble uno con dos dados", es diferente al de "Obtener un tres con dos dados", o al de "Obtener un siete con dos dados".

EJERCICIO 18.- Empleando el diagrama anterior, identifica si se lanzan 2 dados ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 7?

---

¿Por qué al lanzar una sola vez 2 dados, el resultado más probable de su suma es 7?

---

¿Cuál es la probabilidad de obtener 18 puntos con 3 dados?

---

Escribe los resultados de obtener un 5 con 3 dados y ¿Cuál será su valor de probabilidad?

---

EJERCICIO 19.- Si se tienen 3 monedas ¿Cuál es su espacio muestral? y ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 águilas y un sol? ( Sugerencia: Realiza un diagrama o una tabla).

TAREA 1.- Si se tienen 100 tarjetas de las cuales 35 son rojas, 30 negras, 20 blancas, 10 anaranjadas y 5 violetas. si se saca una al azar ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?, ¿Cuál de que sea negra?, ¿Cuál de que sea violeta?, ¿Cuál de que no sea violeta? y ¿Cuál de que sea blanca o negra?

TAREA 2.- Se entrenaron 20 ratas blancas para correr por un laberinto; 5 corren a la izquierda, 10 al frente y 5 a la derecha. Si sacamos 1 de la jaula, al azar ¿Cuál es la probabilidad de que corra?:

a.- Hacia la izquierda.

b.- Hacia la derecha.

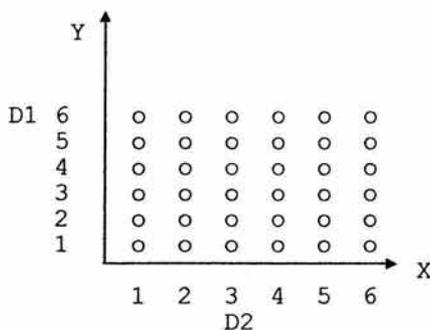
c.- Al frente.

### 2.5.1. Evento Elemental.

Es aquel que contiene un solo elemento como resultado, por ejemplo, Sea el evento A:

"El número 2 aparece en ambos dados".

A es un evento elemental pues su resultado (2,2), es el único elemento que forma parte del conjunto A.



Si B representa el evento "Al lanzar dos dados el número total de puntos es cuatro", entonces B NO es un EVENTO ELEMENTAL, pues tiene tres resultados que son: (1, 3), (2, 2), (3,1) y son parte del conjunto B.

Si definimos el evento E como: "Al sumar 4 puntos en total, un dado muestra al menos un punto", los resultados pueden ser:

(1, 3), (3,1)

Por lo que E tampoco puede ser un evento elemental.

Así los eventos "A" y "E" no pueden ocurrir simultáneamente, ya que sus resultados no tienen nada en común.

Menciona tres ejemplos en donde se tengan eventos elementales:

---

---

---

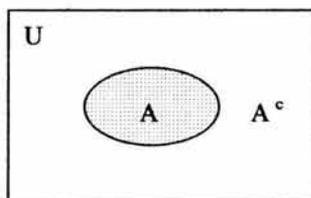
### 2.5.2. Evento Complementario.

En ocasiones es más fácil encontrar la probabilidad de que no ocurra un evento que encontrar que sí suceda, veamos un ejemplo:

Supongamos que numeramos papeles del 1 al 100 y el escoger el número 27 no será una sorpresa pues aunque tiene un valor de baja probabilidad de ser escogido 0.01 no es nada inusual ya que cada número tiene igual oportunidad.

El grado de sorpresa se relaciona con NO obtener el 27 pues aquí el valor de probabilidad es 0.99 que aunque no es imposible se asocia con un alto grado de ocurrencia de sorpresa, para esto se recurre al complemento del conjunto y esto se entiende como el conjunto de todos los elementos que no pertenecen al conjunto "A" y si pertenecen al conjunto universal "U", se simboliza:

$$A' = \bar{A} = \overset{C}{A} = \{x \mid x \notin A \text{ Y } x \in U\}$$



Dos eventos son complementarios, si son mutuamente exclusivos esto es, si su intersección equivale al conjunto vacío "Ø" y su unión es el espacio muestral "S".

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{Y} \quad A \cup B = S$$

Si  $B = A^c$ , entonces tenemos:

$$A \cap A^c = \emptyset$$

Ya que 2 eventos complementarios son mutuamente exclusivos, se tiene:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

Como  $S = A \cup A'$  entonces la probabilidad queda:

$$P(S) = P(A) + P(A')$$

Pero aplicando el axioma  $P(S) = 1$  se tiene:

$$1 = P(A) + P(A')$$

Y despejando se tiene:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Esto es, si al valor 1 se le resta la probabilidad de que ocurra el evento "A", se obtiene la probabilidad de su complemento y viceversa.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

EJERCICIO 20.- La probabilidad de que llueva es de 0.16 ¿Cuál será la probabilidad de que no llueva?

$$P(B) = 0.16$$

Entonces:  $P(B') = 1 - 0.16 = 0.84$

Por lo tanto es muy probable que no llueva.

TAREA 3.- Si tenemos 10 canicas de las cuales 6 son rojas y 4 son amarillas, ¿Cuál es la probabilidad de obtener una canica que no sea amarilla?

Menciona tres ejemplos en donde se tengan eventos complementarios:

---

---

---

### 2.5.3. *Eventos Mutuamente Exclusivos.*

Consideremos la relación entre 2 eventos al lanzar 2 dados:

Sea C el evento: "El número total de puntos es 5".

El evento C tiene como resultados: (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)

Y sea el evento D: "El número total de puntos es 6"

El evento D tiene como resultados: (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)

Se puede observar que ambos eventos no pueden ocurrir simultáneamente, ya que sus resultados no tienen ningún elemento en común.

Cuando 2 eventos no pueden ocurrir simultáneamente se dice que son "Mutuamente Exclusivos", esto es que su intersección equivale al conjunto vacío y su valor de probabilidad es cero.

$$C \cap D = \emptyset$$

Como un "Evento Elemental" contiene un solo elemento como resultado, se observa que 2 eventos elementales son "mutuamente exclusivos" o bien, se trata del mismo evento, veamos un ejemplo para entender esto:

EJEMPLO 3.- Sea M el evento "Obtener el doble 4" ; N es el evento "Obtener el doble 6" y Q es el evento "Sumar 12 puntos con 2 dados", luego los resultados de cada evento son:

$$M = (4,4), \quad N = (6,6), \quad Q = (6,6).$$

Los 3 son eventos elementales. Los eventos M con N y M con Q son mutuamente exclusivos pues su intersección equivale al conjunto vacío, pero al tratar con los eventos N y Q estamos hablando del mismo evento, ya que su resultado es igual o sea común (6,6) para cada uno de ellos.

Menciona tres ejemplos en donde se tengan eventos elementales comunes:

---

---

---

## 2.6. Probabilidad Axiomática.

**Axioma.**- Proposición evidente y sencilla que no requiere demostración, por ejemplo tenemos: "El todo es mayor que cualquiera de sus partes".

La probabilidad de un evento, es un número que se asigna al evento y depende del espacio muestra y del número de veces que se presenta el evento.

Un espacio finito de probabilidad se obtiene al asignar a cada punto del espacio muestra, un número que es igual o mayor que el cero y su suma total debe dar como máximo 1.

$$P(\emptyset) = 0 \qquad P(S) = 1$$

Sea S un espacio muestral y E cualquier evento en S, tal que se cumpla que la probabilidad de un evento cualquiera A, se determina cuando se conocen las probabilidades de sus eventos elementales (subconjuntos) y es igual a su unión:

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots + P(E_n)$$

$$P(A) = P(E_1) \cup P(E_2) \cup P(E_3) \cup \dots \cup P(E_n)$$

$$P(A) = P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n)$$

Podemos observar que en las representaciones anteriores el significado es el mismo es decir equivale a la suma de los eventos que satisfacen o cumplen la condición dada.

**EJEMPLO 4.**- Analicemos el evento A: "Obtener 4 puntos con 2 dados":

- $E_1$  = obtener 3 puntos con el primer dado y 1 punto con el segundo.
- $E_2$  = obtener 2 puntos con cada dado.
- $E_3$  = obtener 1 punto con el primer dado y 3 puntos con el segundo.

Así tenemos que el evento "Obtener 4 puntos con 2 dados" tiene tres resultados y su valor de probabilidad será:

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Podemos concluir que los diversos resultados que satisfacen a un evento, deben sumarse para encontrar el valor de la probabilidad de dicho evento.

**TAREA 4.**- Si se selecciona un número del uno al nueve, ¿Cuál es la probabilidad de que sea par o impar?

### 2.6.1. Unión de Eventos.

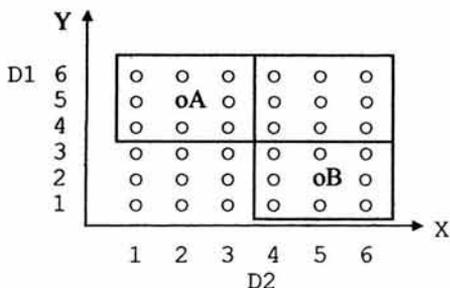
Anteriormente mencionamos que los diversos resultados que cumplen o satisfacen a un evento, deben sumarse para encontrar su valor de probabilidad:

EJEMPLO 5.- Al lanzar 2 dados ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos uno de ellos muestre un número mayor que 3?

La probabilidad para cada dado es  $1/2$ , si se empleara el proceso de adición, la probabilidad parecería ser:

$$1/2 + 1/2 = 1$$

Pero esto es falso, ya que al lanzar dos dados no siempre se tendrá como resultado dos números mayores que 3, es decir que hay una probabilidad mayor que cero de que ambos dados muestren números menores que 3, veamos esto en el diagrama:



En el diagrama, A es el conjunto de puntos para los cuales el primer dado muestra un número mayor que el 3.

B es el conjunto para el cual, el segundo dado muestra un número mayor que 3.

¿Qué observas?

---

Al sumar las probabilidades, habremos contado 2 veces los puntos contenidos en  $A \cap B$ , por lo que este valor se debe restar, obteniendo el resultado correcto. Esos 9 puntos sombréalos en el espacio muestral, para indicar que corresponden al valor de la intersección.

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Ahora procedemos a obtener el valor de la probabilidad de A unión con B:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Observamos que el resultado es correcto, ya corresponde al espacio muestra. Este razonamiento se emplea para cualquier unión de eventos y su fórmula queda expresada:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

De acuerdo a la fórmula, ¿Que concluyes que es la intersección de eventos?

---



---

EJERCICIO 21.- Si se lanzan 2 dados, ¿Cuál es la probabilidad de que por los menos uno de ellos muestre un 5?

TAREA 5.- La probabilidad de que el equipo A gane su primer juego es de  $1/2$  y de que gane su segundo juego es de  $1/3$ , ¿Cuál es la probabilidad de que gane por lo menos uno de los dos primeros, si la probabilidad de que gane ambos es de  $1/6$ ?

EJERCICIO 22.- En una escuela el 20% de los alumnos tienen vista defectuosa, el 8% oído defectuoso y el 4% ambos problemas, resuelva los siguientes incisos:

- ¿Cuál es la probabilidad de que un niño tenga vista defectuosa, si sabemos que tiene oído sano?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un niño tenga oído sano?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un niño tenga vista sana?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un niño tenga oído defectuoso y vista sana?

Las tablas son muy útiles para visualizar los resultados.

	O	O'	SUMA
V			
V'			
SUMA			

O' = OIDO DEFECTUOSO.  
V' = VISTA DEFECTUOSA.  
O = OIDO SANO.  
V = VISTA SANA.

Sugerencia: Resuelva por unión de eventos.

2.6.2. *La Conjunción.*

En probabilidad la oportunidad de que dos eventos distintos ocurran simultáneamente es menor que la de que uno de ellos ocurra separadamente, esto lo podemos ver en el ejemplo:

La probabilidad de que tenga 17 años y el cabello rojo es menor que la probabilidad de que tenga 17 años.

$$P(A \cap B) \leq P(A)$$

Normalmente esta propiedad se ignora cuando se realizan estimaciones para eventos al azar.

**EJEMPLO 6.-** Nos describen a una mujer y nos proporcionan los valores de probabilidad: "Brillante, soltera de 27 años con facilidad de palabra ( $P = 0.35$ ) y cuenta con seguro social ( $P = 0.23$ )".

- a. ¿Cómo será su valor de probabilidad? Mayor a 0.5 \_\_\_\_\_ Menor a 0.5 \_\_\_\_\_  
 b. ¿Cómo puedes obtener su valor? \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 23.-** En el siguiente par de oraciones, ¿Consideras que significan lo mismo?

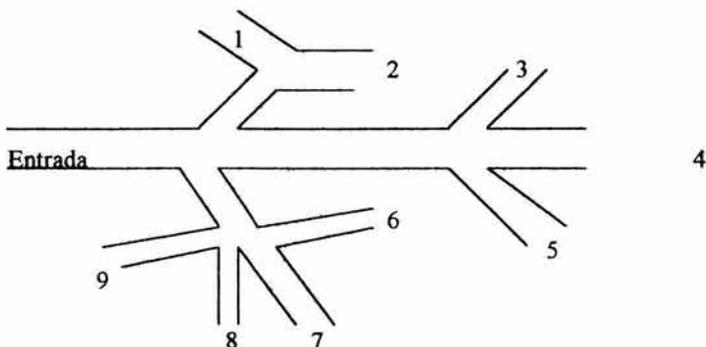
- Tener un ataque al corazón y ser mayor de 55 años.
- Tener un ataque al corazón o ser mayor de 55 años.

SI \_\_\_\_\_ NO \_\_\_\_\_ NO LO SE \_\_\_\_\_

¿Cuál es la diferencia? \_\_\_\_\_

Así la probabilidad conjuncional o sea la probabilidad de intersección de eventos puede confundirse con la probabilidad de unión de eventos.

**EJERCICIO 24.-** Una rata se coloca en un laberinto el cual comienza a explorar. Al final de cada ruta hay una trampa.



Lo primero que debemos preguntarnos es: ¿Qué ruta principal elegiría? \_\_\_\_\_

y ¿Por qué? \_\_\_\_\_

¿En cuál trampa o trampas es más probable que termine? ( )

- 1) 1 y 2 es más probable.
- 2) 1 o 2 es más probable.
- 3) Todas son igualmente probables.
- 4) No sabría decir.

¿Por qué elegiste esta respuesta? \_\_\_\_\_

EJERCICIO 25.- Al preguntar: ¿Cuál es la mayor probabilidad? ( )

- a) Tener un ataque al corazón y ser mayor de 55 años.
- b) Tener un ataque al corazón o ser mayor de 55 años.
- c) Tener un ataque al corazón.
- d) Tener más de 55 años.

¿Qué operación debes realizar? \_\_\_\_\_

EJERCICIO 26.- De las siguientes oraciones, una de ellas indica la probabilidad más baja.

¿Cuál es? ( )

- |                      |                                      |
|----------------------|--------------------------------------|
| a) Ser campesino     | c) Ser campesino y estar desempleado |
| b) Estar desempleado | d) Ser campesino o estar desempleado |

¿Por qué lo piensas?

---

EJERCICIO 27.- Te encuentras con una mujer atractiva y bien vestida

¿Que crees que sea mas probable? ( )

- |                                   |                                  |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) Es una modelo famosa           | c) Es una modelo o una vendedora |
| b) Es una vendedora de cosméticos | d) Es una modelo y vendedora.    |

¿Por qué lo piensas?

---

### 2.6.3. Probabilidad Condicional.

Si  $E_1$  y  $E_2$  son dos eventos, si éstos son independientes se tiene la probabilidad de que  $E_2$  ocurra si  $E_1$  ya ocurrió es:

$$P_r \{E_2 / E_1\} = P_r \{E_2\} \text{ ----- 1}$$

Si los eventos son dependientes se tiene:

$$P_r \{E_1 E_2\} = P_r \{E_1\} P_r \{E_2\}$$

En los eventos dependientes sustituimos la ecuación 1 y nos queda:

$$P_r \{E_1 E_2\} = P_r \{E_1\} P_r \{E_2 / E_1\} \text{ ----- 2}$$

EJEMPLO.- Una bolsa contiene dos bolas blancas y una negra ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca y después una bola negra de la bolsa?

1. Si la primera bola se regresa a la bolsa.
2. Si la primera bola no se regresa a la bolsa.

SOLUCIÓN 1: Si la primera bola se regresa, tenemos dos eventos independientes.

La probabilidad de sacar una bola blanca.  $P_r \{E_1\} = 2 / 3$

Y la probabilidad de sacar una bola negra.  $P_r \{E_2\} = 1 / 3$

$$P_r \{E_1 E_2\} = P_r \{E_1\} P_r \{E_2\} = (2 / 3)(1 / 3) = 2 / 9$$

SOLUCIÓN 2: Si la primera bola NO se regresa, tenemos dos eventos dependientes.

La probabilidad de sacar una bola blanca es también.  $P_r \{E_1\} = 2 / 3$

Pero cuando se ha sacado la bola blanca, en la bolsa solo quedan una bola blanca y una bola negra, entonces:

$$P_r \{E_2 / E_1\} = 1 / 2$$

Se ha modificado el espacio muestral:

$$P_r \{E_1 E_2\} = P_r \{E_1\} P_r \{E_2 / E_1\} = (2 / 3)(1 / 2) = 2 / 6 = 1 / 3$$

Recordemos el Ejercicio 16 de los laberintos, en la página 13.

Otros ejemplos:

a. ) Se tienen 3 fichas rojas, 2 azules y 1 verde en una bolsa. Si se han sacado de ella 2 rojas y 1 azul y se extrae otra, ¿de que color es más probable que sea? \_\_\_\_\_,

¿Por qué? \_\_\_\_\_

b. ) Se tienen 5 fichas rojas, 2 azules y 2 verdes en una bolsa. Si se han sacado de ella 2 rojas y 1 azul y se extrae otra, ¿de qué color es más probable que sea? \_\_\_\_\_ ,

¿Por qué? \_\_\_\_\_

c. ) Se tienen 4 fichas rojas, 4 azules y 2 verdes en una bolsa. Si se han sacado de ella 2 rojas y 1 azul y se extrae otra, ¿de qué color es más probable que sea? \_\_\_\_\_ ,

¿Por qué? \_\_\_\_\_

¿Qué sucedió en cada caso? \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 28.-** Una bolsa contiene 10 fichas, 7 negras y 3 blancas. De las fichas negras 3 tienen una "x" marcada y de las blancas, 1 tiene la "x". Sin ver, Eduardo tomó una ficha con "x", las probabilidades de que sea negra son:

- 1) 3 de 7.
- 2) 7 de 10.
- 3) 1 de 3.
- 4) 3 de 4.
- 5) 4 de 10.

¿Cuál es la correcta? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el proceso de solución? \_\_\_\_\_

#### FÓRMULA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL.

La fórmula de la probabilidad condicional es:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Se lee "la probabilidad de ocurra A, condicionado a que haya ocurrido B".

Veamos un ejemplo: Tenemos los números del uno al diez:  $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

y los eventos:  $A = \{2,3,4,10\}$  ,  $B = \{1,3,5,8\}$  ,  $C = \{1,3,5,7,10\}$

Veamos ¿cuál es el valor de la probabilidad de que ocurra el evento C, cuando ya ocurrió el evento A?

Observamos que los elementos (números 3 y 10), son comunes a los conjuntos A y C, es decir son los que se interceptan, por lo tanto 2 es el número de elementos de la intersección  $A \cap C$  y se coloca este valor en el numerador.

En el denominador se coloca 4 que es el resultado o número de elementos resultantes de lo ocurrido en el experimento o evento A.

$$P(C/A) = \frac{2}{4} = .5$$

Lo que describimos anteriormente se puede anotar como:

$$P(C/A) = \frac{\text{No. } (C \cap A)}{\text{No. } (A)} = \frac{\frac{\text{No. } (C \cap A)}{\text{No. } (S)}}{\frac{\text{No. } (A)}{\text{No. } (S)}} = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{2/10}{4/10}$$

Despejando  $P(A)$  se tiene la fórmula de la multiplicación:

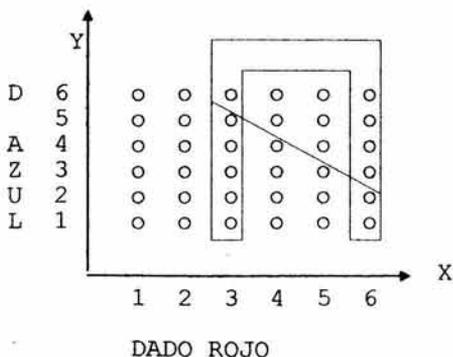
$$P(C \cap A) = P(A) P(C/A)$$

Compruebe que los valores obtenidos son los correctos.

**EJERCICIO 29.-** ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos 5, al lanzar 2 dados, si se sabe que al caer uno de ellos muestra un 5?

$$P(5/5) = \frac{1/36}{1/6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

**EJEMPLO 8.-** Si se lanzan 2 dados, un rojo y un azul, sabemos que el rojo muestra un número divisible por 3. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de puntos de ambos dados sea mayor que 8? Note que la condición de que el número mostrado por el primer dado sea divisible por 3, cambia el espacio muestral.



El nuevo espacio muestral sólo contiene a 12 puntos, es la figura que tiene forma de herradura y sólo 5 de ellos, satisfacen la condición de sumar más de 8 puntos, por lo que la probabilidad queda expresada como:

$$P = \frac{5}{12}$$

#### 2.6.4. *Eventos Independientes.*

La ocurrencia de un evento no afectará a la probabilidad del otro evento, por lo que el valor de probabilidad debe ser igual. Recordemos los ejercicios de los laberintos en la página 13 .

Recordemos que el Espacio Muestral de un experimento, es el conjunto de resultados del experimento.

Supongamos que se tienen los siguientes conjuntos:

$$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, A = \{2,3,4\}, B = \{3,5\}$$

Se pregunta si A y B son eventos independientes:

$$P(A) = \frac{3}{10} \quad P(B) = \frac{2}{10} \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/10}{2/10} = \frac{1}{2}$$

$$P(A/B) \neq P(A); \quad \frac{1}{2} \neq \frac{3}{10}$$

Se observa que los valores de probabilidad no son iguales por lo que no son independientes.

**EJEMPLO 8.-** Dar 2 eventos A y B que satisfagan la proporción K, si tenemos los siguientes conjuntos:

$$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, A = \{1,2,3,6,7,9\}, B = \{3,4,6,9,10\}$$

Empleando la formula tenemos:

$$P(A/B) = P(A); \quad \frac{\text{No. } (A \cap B)}{\text{No. } (B)} = \frac{\text{No. } (A)}{\text{No. } (S)} \quad \begin{array}{l} \text{Proporción K.} \\ \text{Este es un valor fijo.} \end{array}$$

$$P(A/B) = P(A); \quad \frac{A \cap B = \{3,6,9\}}{B = \{3,4,6,9,10\}} = \frac{A = \{1,2,3,6,7,9\}}{S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}}$$

La fórmula nos queda:  $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

Esto significa que cualquier evento de 6 elementos, con otro evento de 5 elementos y cuya intersección tenga 3 elementos, son independientes.

Entonces A y B son independientes si la ocurrencia de uno no afecta a la probabilidad del otro, esto es:

$$P(A/B) = P(A); \quad P(B/A) = P(B)$$

Como hemos observado la Probabilidad Condicional modifica el espacio muestra y esto varía el valor de la probabilidad, este cambio se refleja en el denominador y aparenta entonces ser un valor mayor (ya que el denominador disminuye), pero debemos recordar que el resultado de la probabilidad condicional, se debe despejar para encontrar la intersección de dos conjuntos y es aquí, donde se observa que en realidad, se deben multiplicar la probabilidad condicional del evento por la probabilidad de que ocurra el primer evento, es decir, al multiplicar dos fracciones se obtendrá una fracción siempre menor que las anteriores.

$$\frac{6}{7} \times \frac{7}{8} = \frac{3}{4}; \quad \frac{6}{7} > \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \frac{7}{8} > \frac{3}{4}$$

De lo anterior concluimos que el valor de probabilidad de una intersección de eventos es siempre menor que el valor de la probabilidad de una unión de eventos.

Relaciona lo anterior con el conectivo “y” (conjunción) así como con el conectivo “o” (unión).

TAREA 6.- En 3 urnas se colocan canicas rojas, blancas y azules en el siguiente orden por urna:

- 1a.- 5 rojas 3 blancas 2 azules.
- 2a.- 1 rojas 8 blancas 1 azules.
- 3a.- 3 rojas 1 blancas 6 azules.

Se selecciona una urna y se saca una canica al azar ¿Cuál es la probabilidad de que la urna haya sido la 3 si la canica es roja?

TAREA 7.- Existe una prueba que detecta el cáncer con probabilidad de 80% entre gente que lo padece y no detecta el 20% restante. Si una persona no lo padece, la prueba indicará este hecho en un 90% e indicará que lo tiene en un 10%. supongamos que el 5% de las gentes de la prueba padecen cáncer y la prueba de una persona seleccionada al azar indica que es positivo ¿Cuál es la probabilidad de que lo tenga?

EJERCICIO 30.-Una urna amarilla contiene 3 bolas negras y una blanca y una urna roja contiene 3 bolas negras y 2 blancas. Se lanza un dado con la condición de que si el número resultante es divisible entre 3, se elige la urna amarilla y si no es divisible se elige la roja. Se saca una bola negra al azar ¿Cuál es la probabilidad de que se haya sacado de la urna amarilla?

**ANEXO 3**

**POST-TEST**

## POST-TEST NOMBRE

---

1.- INSTRUCCIONES.- Contesta las preguntas que se dan a continuación:

1.- ¿Cuándo dices que tienes certeza de algo?

---

2.- ¿Cuándo dices que algo es más probable que otra cosa?

---

3.- ¿Cuándo dices que dos cosas tienen igual oportunidad de algo?

---

4.- ¿Cuándo dices que algo es menos probable que otra cosa?

---

5.- ¿Cuándo dices que algo es improbable?

---

6.- ¿Cuál es la diferencia entre BAJA, MEDIANA Y ALTA PROBABILIDAD?

---

7.- El resultado de la probabilidad se indica por medio de: ( )

a) Esquemas      b) Tablas      c) Fracciones comunes      d) Gráficas

8.- La distribución al azar es aquella que se determina por: ( )

a) Simulación      b) Suerte      c) Aproximación      d) Organización

9.- Lo fortuito se relaciona con: ( )

a) Lo que pienso      b) La suerte      c) Lo que espero      d) Lo imprevisto

10.- Antónimo de Unión: ( )

a) Intersección      b) Dispersión      c) Fusión

11.- Antónimo de Posible: ( )

a) Puede suceder      b) Accidental      c) Imposible      d) Inesperado

12.- Carrera de coches.- Sobre la primer casilla, se colocan los coches de cada alumno y escogen entre par y non, lanzan alternadamente el dado y avanzan una casilla, dependiendo del tipo de número que muestre el dado, gana quien llegue primero a la meta.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Número
										Par
										Non

¿Piensas que alguno tiene ventaja en el juego? SI \_\_\_ NO \_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

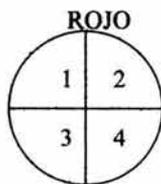
13.- En el lanzamiento de una moneda ¿puedes decir con seguridad cuál será el resultado?  
SI \_\_\_\_\_ NO \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

14.- En una gran ciudad existen dos hospitales en uno grande nacen 45 niños cada día y en el pequeño 5 como sabes el 50% de los niños son hombres pero el porcentaje puede variar cada día, en un mes un hospital reportó que más del 60% de los nacidos fueron hombres. ¿En cuál de los hospitales crees que fue?

	Más del 60%
HOSPITAL GRANDE	
HOSPITAL PEQUEÑO	

15.- Tenemos dos discos uno azul y uno rojo ¿En cuál de los dos es más fácil obtener el número 3?



1. Obtener el 3 en el disco rojo. ( )
2. Obtener el 3 en el disco azul. ( )
3. Es igual en ambos. ( )

16.- Pablo y María introdujeron dos bolas en una bolsa (una roja y otra verde), extraen una de la bolsa y resultó ser roja, si la meten de nuevo a la bolsa y vuelven a sacar una,

¿De que color crees que será? \_\_\_\_\_

¿Es más fácil obtener el rojo que el verde? \_\_\_\_\_

Supón que se repite el experimento 10 veces y se tuvieron los resultados 6 rojos, 4 verdes.

¿Cómo expresarías el resultado empleando fracciones?

---

17.- Nos describen a una mujer: "Brillante, soltera de 27 años con facilidad de palabra y cuenta con seguro social". ¿A que crees que se dedique?

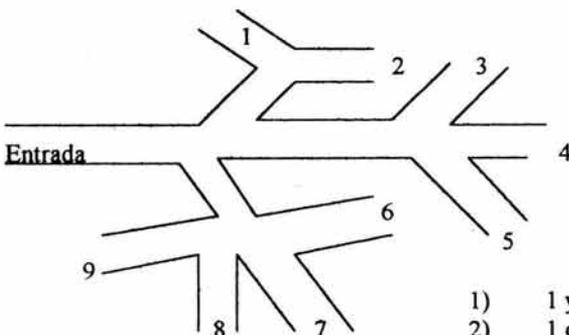
---

18.- En el siguiente par de oraciones, ¿consideras que significan lo mismo?

SI \_\_\_ NO \_\_\_ NO LO SE \_\_\_

- Tener un ataque al corazón y ser mayor de 55 años.
- Tener un ataque al corazón o ser mayor de 55 años.

19.- Una rata se coloca en un laberinto el cual comienza a explorar. Al final de cada ruta hay una trampa, ¿en cuál trampa o trampas es más probable que termine?



- 1) 1 y 2 es más probable.
- 2) 1 o 2 es más probable.
- 3) Todas son igualmente probables.
- 4) No sabría decir.

¿Por qué es la respuesta correcta? \_\_\_\_\_

20.- ¿Cuál de las siguientes preguntas tiene la mayor probabilidad?

- a) Tener un ataque al corazón y ser mayor de 55 años.
- b) Tener un ataque al corazón o ser mayor de 55 años.
- c) Tener un ataque al corazón.
- d) Tener más de 55 años.

¿Por qué?

---

21.- De las siguientes oraciones, una de ellas tiene la probabilidad más alta.

¿Cuál es?

( )

- a) Ser campesino
- b) Estar desempleado
- c) Ser campesino y estar desempleado
- d) Ser campesino o estar desempleado

¿Por qué?

---

22.- Te encuentras con una mujer atractiva y bien vestida

¿Que crees que sea menos probable?

( )

- a) Es una modelo famosa
- b) Es una vendedora de cosméticos
- c) Es una modelo o una vendedora
- d) Es una modelo y vendedora.

¿Por qué?

---

23.- Una bolsa contiene 10 fichas, 7 negras y 3 blancas. De las fichas negras 3 tienen una "x" marcada y de las blancas 1 tiene la "x". Sin ver, Eduardo tomó una ficha con "x", las probabilidades de que sea negra son:

( )

- 1) 3 de 7.
- 2) 7 de 10.
- 3) 1 de 3.
- 4) 3 de 4.
- 5) 4 de 10.
- 6) NO SE

24.- Se tienen 3 fichas rojas, 2 azules y 1 verde en una bolsa. Si se han sacado de ella 2 rojas y 1 azul y se extrae otra, ¿de que color es más probable que sea?

---

¿Por qué?

---

25.- Se tienen 5 fichas rojas, 2 azules y 2 verdes en una bolsa. Si se han sacado de ella 2 rojas y 1 azul y se extrae otra, ¿de que color es más probable que sea? \_\_\_\_\_ ,

¿Por qué? \_\_\_\_\_

26.- Se tienen 4 fichas rojas, 4 azules y 2 verdes en una bolsa. Si se han sacado de ella 2 rojas y 1 azul y se extrae otra, ¿de que color es más probable que sea? \_\_\_\_\_ ,

¿Por qué? \_\_\_\_\_

27.- Una caja con 100 tachuelas es vaciada en la mesa de un carpintero, algunas quedan con la punta hacia arriba (32) y otras hacia abajo (68). Si se repitiera el experimento ¿cuál de los siguientes resultados podrías obtener?

- |    |                                 |    |                                 |
|----|---------------------------------|----|---------------------------------|
| 1) | 20 hacia arriba 80 hacia abajo. | 2) | 36 hacia arriba 64 hacia abajo. |
| 3) | 63 hacia arriba 37 hacia abajo. | 4) | 51 hacia arriba 49 hacia abajo. |
| 5) | 84 hacia arriba 16 hacia abajo. |    |                                 |

¿Por qué? \_\_\_\_\_

**ANEXO 4**

**ENCUESTA**

ENCUESTA SOBRE EL CURSO DE PROBABILIDAD.

INSTRUCCIONES.- Se te pide contestar las preguntas que se dan a continuación:

1.- ¿Te gustan las matemáticas? Si\_\_ No \_\_ ¿Por qué?

---

---

2.- ¿Te gustó el tema de probabilidad? Si\_\_ No \_\_ ¿Por qué?

---

---

3.- En el tema de probabilidad, ¿Qué se te hizo más fácil?

---

---

4.- En el tema de probabilidad, ¿Qué se te hizo más difícil?

---

---

5.- ¿Los ejemplos eran claros? Si\_\_ No \_\_ ¿Por qué?

---

---

6.-¿Entendiste como se resolvieron los ejemplos?

---

---

7.- ¿Qué te quedó como DUDA del tema de probabilidad?

---

---

8.- ¿Qué sugieres para mejorar el tema de probabilidad?

---

---

9.- ¿Hay diferencia entre BAJA, MEDIANA Y ALTA PROBABILIDAD? Si \_\_\_ No \_\_\_  
Describe un ejemplo: \_\_\_\_\_

---

10.- ¿Empleas la fracciones en probabilidad? Si \_\_\_ ¿Para qué? No \_\_\_ ¿Por qué?

---

---

11.- ¿Qué es un evento probabilístico?

---

---

12.- ¿Qué es un espacio muestra?

---

---

13.- ¿Para qué nos puede servir el espacio muestra?

---

---

14.- ¿Qué es para ti el azar?

---

---

15.- En la unión de eventos las probabilidades individuales se \_\_\_\_\_ . ( )

- a) Suman.
- c) Multiplican.

- b) Restan.
- d) Dividen.



21.- Si sabemos que la probabilidad de ser ejecutivo es de 0.039 y la de ser banquero es 0.011 ¿Qué valor de probabilidad será mayor?:

( )

- a) Ser ejecutivo o banquero.
- b) Ser ejecutivo y banquero.
- c) Es lo mismo para los incisos a y b.

22.- Explica el por qué de tu respuesta anterior:

---

---

23.- ¿Qué operación emplearías para obtener el valor del inciso a? \_\_\_\_\_

24.- ¿Qué operación emplearías para obtener el valor del inciso b? \_\_\_\_\_

## **ANEXO 5**

### **TABLAS DE RESULTADOS**

TABLA 1.- RESULTADOS DEL PRE-TEST

N. Lista	N. Test																					Total									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27			
1		1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
2		1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
3		1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
4		1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5		1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6		1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
7		0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
8		1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9		0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
10		0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
11		0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
12		0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
13		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
14		1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
15		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
16		1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
17		0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
18		0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
19		0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
20		0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
21		0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
22		0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
23		0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
24		1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
25		1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
26		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
27		1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
28		1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
29		0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
30		0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
31		0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
32		0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
33		1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
34		1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
35		0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
36		0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

1 RESPUESTA CORRECTA  
0 RESPUESTA INCORRECTA  
RESPUESTA SIN CONTESTAR

Total	15	15	20	14	10	12	15	27	4	17	25	15	12	29	15	20	7	21	7	24	15	23	20	2	3	8	5	8	2	3	13	13	17	15	15	11	4	5
-------	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	---	---

TABLA 1A.- CONCENTRADO DE RESULTADOS DEL PRE-TEST

Número Lista	Total Aciertos	Total sin Respuesta	Calificación	% sin Respuesta	Pre-Test T. Aciertos	Pre-Test T. sin Respuesta
1	20	2	5.128205128	5.1282051	546	286
2	14	5	3.58974359	12.820513	Promedio	Promedio
3	25	3	6.41026641	7.6923077	15.1666667	7.944444444
4	7	11	1.794871795	28.205128		
5	16	6	4.102564103	15.384615		
6	25	2	6.41026641	5.1282051		
7	10	19	2.564102564	48.717949		
8	8	12	2.051282051	30.769231		
9	17	3	4.358974359	7.6923077		
10	13	14	3.333333333	35.897436		
11	15	10	3.846153846	25.641026		
12	14	13	3.58974359	33.3333333		
13	31	2	7.948717949	5.1282051		
14	12	2	3.076923077	5.1282051		
15	13	9	3.333333333	23.076923		
16	13	18	3.333333333	46.153846		
17	17	7	4.358974359	17.948718		
18	16	12	4.102564103	30.769231		
19	11	9	2.820512821	23.076923		
20	8	18	2.051282051	46.153846		
21	12	8	3.076923077	20.512821		
22	14	15	3.58974359	38.461538		
23	9	14	2.307692308	35.897436		
24	20	3	5.128205128	7.6923077		
25	15	4	3.846153846	10.25641		
26	29	2	7.438897436	5.1282051		
27	15	5	3.846153846	12.820513		
28	13	7	3.333333333	17.948718		
29	14	8	3.58974359	20.512821		
30	12	0	3.076923077	0		
31	8	17	2.051282051	43.589744		
32	8	10	2.051282051	25.641026		
33	20	1	5.128205128	2.5641026		
34	24	3	6.163846164	7.6923077		
35	14	7	3.58974359	17.948718		
36	14	5	3.58974359	12.820513		
<b>Totales</b>	<b>546</b>	<b>286</b>	<b>140</b>	<b>733.333333</b>	<b>3.88888889</b>	<b>20.37037037</b>

TABLA 2.- RESULTADOS DEL POST-TEST

N. Lista	N. Test																										Total Aciertos											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27											
1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0								
2	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0							
3	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0							
4	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0						
5	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
6	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
7	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
9	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
10	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
11	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
12	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
13	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
14	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
16	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
17	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
18	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
19	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
20	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
21	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
22	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
23	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
24	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
25	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
28	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
29	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
31	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
32	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
33	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
35	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
36	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1 RESPUESTA CORRECTA  
0 RESPUESTA INCORRECTA  
■ RESPUESTA SIN CONTESTAR

Total	24	24	30	26	18	11	27	34	15	14	26	23	21	34	35	19	23	18	32	17	26	32	20	19	22	14	17	19	17	10	12	22	22	27	26	22	22	21	16
-------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

838

TABLA 2A.- CONCENTRADO DE RESULTADOS DEL POST-TEST

Número Lista	Total Aciertos	Total sin Respuesta	Calificación	% sin Respuesta	Post-Test T. Aciertos	Post-Test T. sin Respuesta
1	21	2	5.384615385	5.1282051	859	110
2	22	0	5.641025641	0		
3	36	1	9.230769231	2.5641026	Promedio	Promedio
4	26	6	6.666666667	15.384615	23.9611111	3.055555556
5	24	0	6.183846154	0		
6	24	0	6.183846154	0		
7	25	5	6.41025641	12.820513		
8	18	8	4.615384615	20.512821	Post-Test Calificación	Post-Test % Sin Respuesta
9	26	0	6.666666667	0	220.25641	282.05128
10	25	8	6.41025641	20.512821		
11	24	0	6.183846154	0		
12	24	0	6.183846154	0		
13	29	2	7.435897436	5.1282051	Promedio	Promedio
14	24	0	6.183846154	0	6.11823362	7.834757835
15	31	0	7.948717949	0		
16	33	0	8.461538462	0		
17	27	0	6.923076923	0		
18	23	2	5.897435897	5.1282051		
19	33	0	8.461538462	0		
20	14	9	3.589743559	23.076923		
21	23	1	5.897435897	2.5641026		
22	20	10	5.128205128	25.641026		
23	9	7	2.307692308	17.948718		
24	21	1	5.384615385	2.5641026		
25	18	2	4.615384615	5.1282051		
26	36	0	9.230769231	0		
27	22	3	5.641025641	7.6923077		
28	16	9	4.102564103	23.076923		
29	14	8	3.589743559	20.512821		
30	22	0	5.641025641	0		
31	18	11	4.615384615	28.205128		
32	29	2	7.435897436	5.1282051		
33	21	6	5.384615385	15.384615		
34	35	0	8.974358974	0		
35	20	5	5.128205128	12.820513		
36	26	2	6.666666667	5.1282051		
<b>Totales</b>	<b>859</b>	<b>110</b>	<b>220.2564103</b>	<b>282.05128</b>		

COMPARACIÓN DE RESULTADOS

	Pre-Test	Post-Test	
Número Lista	Total Aciertos	Total Aciertos	Variación
1	20	21	1
2	14	22	8
3	25	36	11
4	7	26	19
5	16	24	8
6	25	24	
7	10	25	15
8	8	18	10
9	17	26	9
10	13	25	12
11	15	24	9
12	14	24	10
13	31	29	
14	12	24	12
15	13	31	18
16	13	33	20
17	17	27	10
18	16	23	7
19	11	33	22
20	8	14	6
21	12	23	11
22	14	20	6
23	9	9	0
24	20	21	1
25	15	18	3
26	29	36	7
27	15	22	7
28	13	16	3
29	14	14	0
30	12	22	10
31	8	18	10
32	8	29	21
33	20	21	1
34	24	35	11
35	14	20	6
36	14	26	12
Total	546	859	313

	Pre-Test	Post-Test	
Total sin Repuesta	Total sin Repuesta	Total sin Repuesta	Variación
2	2	0	
5	0	5	
3	1	2	
11	6	5	
6	0	6	
2	0	2	
19	5	14	
12	8	4	
3	0	3	
14	8	6	
10	0	10	
13	0	13	
2	2	0	
2	0	2	
9	0	9	
18	0	18	
7	0	7	
12	2	10	
9	0	9	
18	9	9	
8	1	7	
15	10	5	
14	7	7	
3	1	2	
4	2	2	
2	0	2	
5	3	2	
7	9		
8	8	0	
0	0	0	
17	11	6	
10	2	8	
1	6		
3	0	3	
7	5	2	
5	2	3	
286	110	176	

AUMENTO

Promedio	Promedio	Promedio
15.16667	23.86111	8.694444

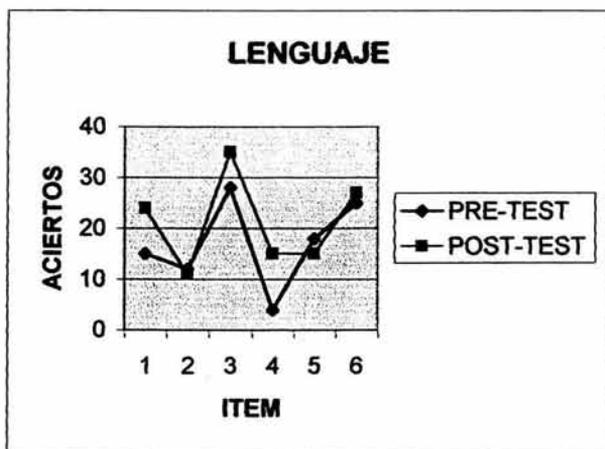
DISMINUYE

Promedio	Promedio	Promedio
7.94444	3.055556	4.88889

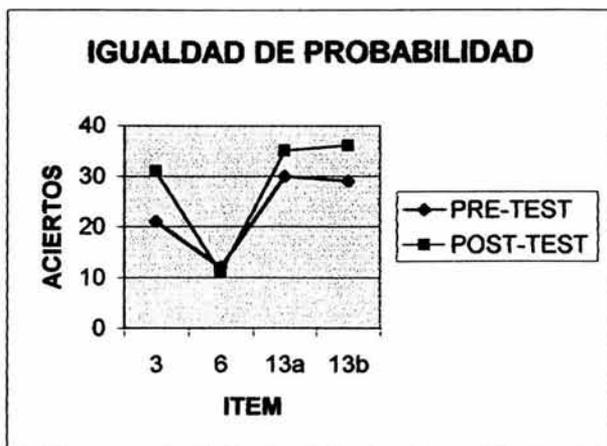
**ANEXO 6**

**GRÁFICAS**

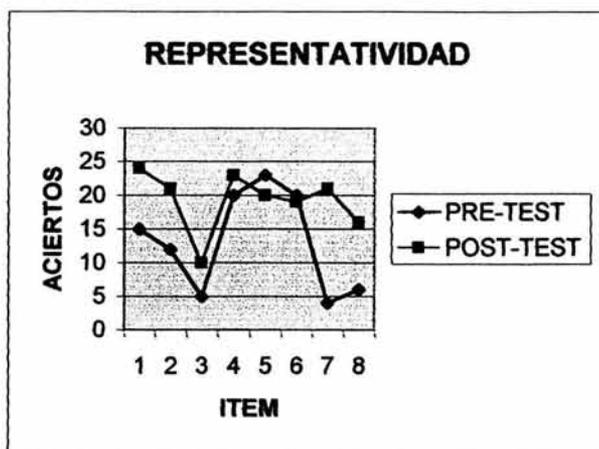
	LENGUAJE					
ITEM	1	2	3	4	5	6
PRE-TEST	15	12	28	4	18	25
POST-TEST	24	11	35	15	15	27



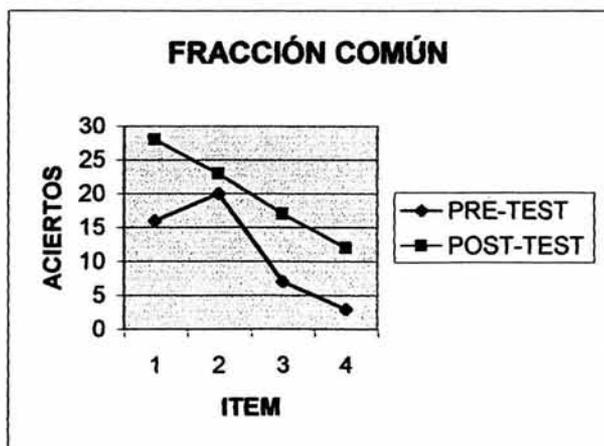
	IGUALDAD DE PROBABILIDAD			
ITEM	3	6	13a	13b
PRE-TEST	21	12	30	29
POST-TEST	31	11	35	36



	REPRESENTATIVIDAD							
ITEM	1	2	3	4	5	6	7	8
PRE-TEST	15	12	5	20	23	20	4	6
POST-TEST	24	21	10	23	20	19	21	16

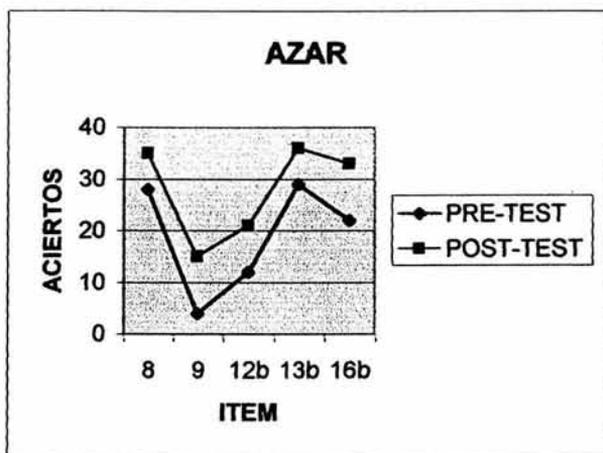


	EXPRESIÓN COMO FRACCIÓN COMÚN			
ITEM	1	2	3	4
PRE-TEST	16	20	7	3
POST-TEST	28	23	17	12



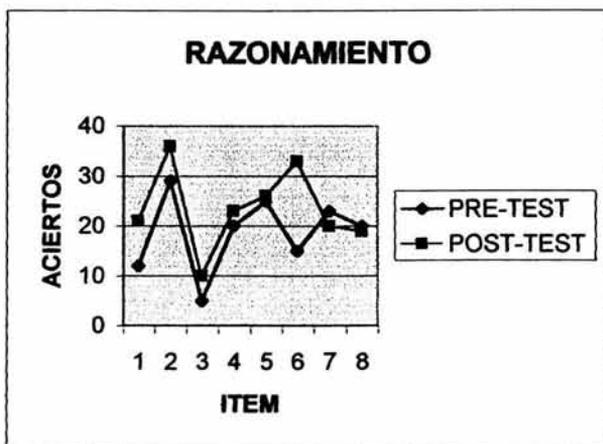
### AZAR

ITEM	8	9	12b	13b	16b
PRE-TEST	28	4	12	29	22
POST-TEST	35	15	21	36	33

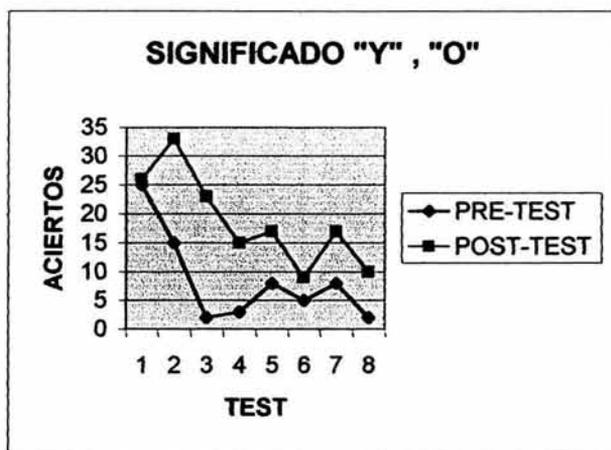


### RAZONAMIENTO

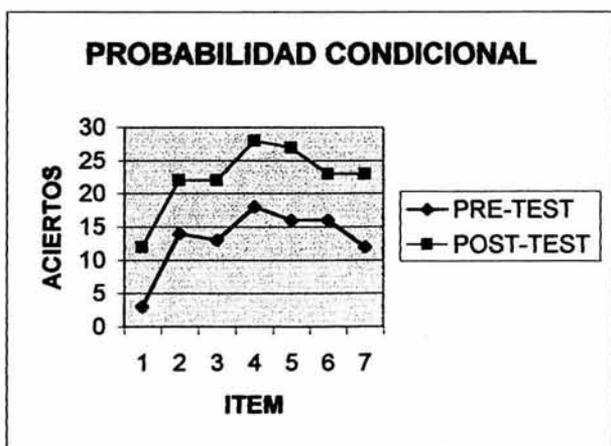
ITEM	1	2	3	4	5	6	7	8
	12b	13b	14	15	17	18	19a	19b
PRE-TEST	12	29	5	20	25	15	23	20
POST-TEST	21	36	10	23	26	33	20	19



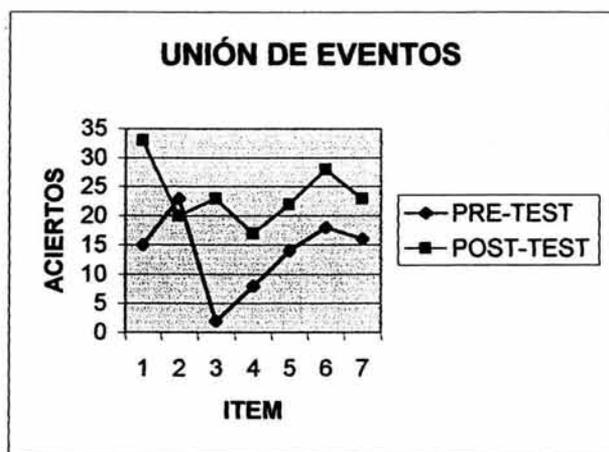
	SIGNIFICADO "Y" , "O"							
ITEM	1	2	3	4	5	6	7	8
PRE-TEST	25	18	20a	20b	21a	21b	22a	22b
POST-TEST	26	33	23	15	17	9	17	10



	PROBABILIDAD CONDICIONAL						
ITEM	1	2	3	4	5	6	7
PRE-TEST	3	14	13	18	16	16	12
POST-TEST	12	22	22	28	27	23	23



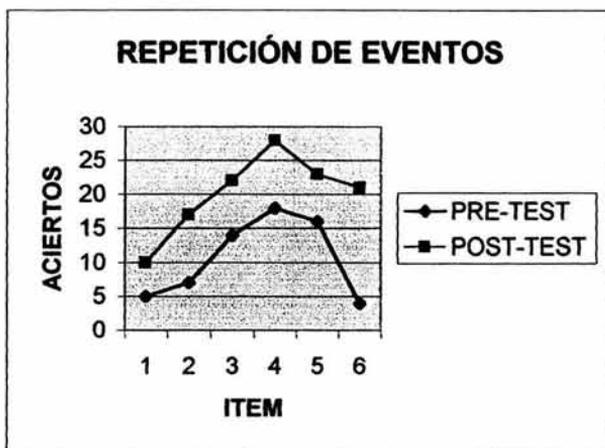
	UNIÓN DE EVENTOS						
ITEM	1	2	3	4	5	6	7
PRE-TEST	15	23	2	8	14	18	16
POST-TEST	33	20	23	17	22	28	23



	INTERSECCIÓN DE EVENTOS				
ITEM	1	2	3	4	5
PRE-TEST	25	15	8	2	3
POST-TEST	26	33	17	10	12



	REPETICIÓN DE EVENTOS					
ITEM	1	2	3	4	5	6
PRE-TEST	5	7	14	18	16	4
POST-TEST	10	17	22	28	23	21



## **ANEXO 7**

### **RESULTADOS 4° F , 4° G**



TABLA 4A.- CONCENTRADO DE RESULTADOS DEL TEST AL 4° F

Número Lista	Total Aciertos	Total sin Respuesta	Calificación	% sin Respuesta	Test T. Aciertos	Test T. sin Respuesta
1	17	3	4.358974359	7.6923077	524	68
2	18	0	4.615384615	0		
3	17	10	4.358974359	25.641026	Promedio	Promedio
4	28	11	7.179487179	28.205128	18.7142857	2.428571429
5	19	1	4.871794872	2.5641026		
6	21	0	5.384615385	0		
7	16	0	4.102564103	0		
8	20	2	5.128205128	5.1282051	Test	Test
9	15	0	3.846153846	0	Calificación	% Sin Respuesta
10	11	9	2.820512821	23.076923	134.358974	174.35897
11	10	10	2.564102564	25.641026		
12	15	1	3.846153846	2.5641026	Promedio	Promedio
13	23	1	5.897435897	2.5641026	4.7985348	6.227106227
14	21	1	5.384615385	2.5641026		
15	15	1	3.846153846	5.1282051		
16	8	2	2.051282051	0		
17	22	0	5.641025641	0		
18	22	1	5.641025641	2.5641026		
19	24	0	6.153846154	0		
20	10	2	2.564102564	5.1282051		
21	24	0	6.153846154	0		
22	19	0	4.871794872	0		
23	28	3	6.666666667	7.6923077		
24	24	1	6.153846154	2.5641026		
25	19	2	4.871794872	5.1282051		
26	23	2	5.897435897	5.1282051		
27	23	1	5.897435897	2.5641026		
28	14	4	3.589743589	10.25641		
<b>Totales</b>	<b>524</b>	<b>68</b>	<b>134.3589744</b>	<b>174.35897</b>		



TABLA TABLA 5A.- CONCENTRADO DE RESULTADOS DEL TEST AL 4° G

Número Lista	Total Aciertos	Total sin Respuesta	Calificación	% sin Respuesta	Test T. Aciertos	Test T. sin Respuesta
1	16	5	4.102564103	12.820513	298	41
2	18	8	4.615384615	20.512821	Promedio	Promedio
3	15	9	3.846153846	23.076923	21.2857143	2.928571429
4	13	7	3.333333333	17.948718	Test	Test
5	20	2	5.128205128	5.1282051	Calificación	% Sin Respuesta
6	28	0	7.179487179	0	76.4102564	105.12821
7	36	0	9.230769231	0	Promedio	Promedio
8	21	0	5.384615385	0	5.45787546	7.509157509
9	21	1	5.384615385	2.5641026		
10	20	3	5.128205128	7.6923077		
11	17	3	4.358974359	7.6923077		
12	27	2	6.923076923	5.1282051		
13	16	1	4.102564103	2.5641026		
14	30	0	7.692307692	0		
15			0	0		
16			0	0		
17			0	0		
18			0	0		
19			0	0		
20			0	0		
<b>Totales</b>	<b>298</b>	<b>41</b>	<b>76.41025641</b>	<b>105.12821</b>		