UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA ACTUARIAL DEL SEGURO DE PERSONAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ALBERTO MANUEL RAMIREZ DE JURADO FRIAS

DIRECTOR DE TESIS: M. en A.P. MARIA DEL PILAR ALONSO REYES

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

MEXICO, D. F. 2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a Usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Teoría Actuarial del Seguro de Personas"

realizado por Alberto Manuel Ramírez de Jurado Frías con número de cuenta 09633173-0

quién cubrió los créditos de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes	
Propietario	Act. Fernando Alonso Pérez Tejada	
Propietario	Act. Carlos Fernando Lozano Nathal	
Suplente	Act. Jaime Vázquez Alamilla	
Suplente	Dr. Luis Antonio Rincón Solís	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Flores Díaz

Teoría Actuarial del Seguro de Personas

Alberto M. Ramírez de Jurado Frías

"Prefacio"

Teoría Actuarial del Seguro de Personas, exhibe de manera didáctica y simple, las matemáticas utilizadas para; el diseño y valuación de los seguros de personas. Sin embargo, también se reviste el trabajo con aspectos técnicos de la implementación y administración del seguro.

Este ciclo actuarial, es el mismo que determina las intervenciones que hacen los especialistas, para que un seguro se guíe de forma redituable para la compañía de seguros y atractiva para el participante. Estas intervenciones, tienen que ver con cuestiones de; creatividad, técnica y toma de decisiones, de suerte, que el ciclo actuarial sea adecuado para ambas partes.

Dentro del diseño de coberturas, se tiene como primer elemento el contrato. Un contrato de seguro, es aquel, en el que una las partes adquiere el compromiso de brindar un beneficio bajo ciertas condiciones a un beneficiario, y la otra, de pagar una prima por el derecho de recibir tal beneficio. De esta forma, quien administra esta cobertura, es la compañía de seguros, y quien recibe el beneficio, es el beneficiario. Este último, puede ser el mismo contratante, o una tercera persona.

Por otra parte, uno de los paradigmas actuariales dentro del seguro de personas, consiste en cuantificar el riesgo asegurable. Es decir, si una persona desea hacer un contrato con una compañía de seguros, la compañía debe cuantificar el riesgo que implica brindar tal cobertura al participante. Este riesgo, es el riesgo asegurable. Por tanto, el participante está obligado a pagar una prima que le de el derecho de recibir a él, o su beneficiario, una suma asegurada pactada dentro del contrato de seguro, y la prima, es la cantidad mínima en unidades monetarias, que la compañía acepta para brindar tal protección. Así, para determinar; las suposiciones técnicas, el riesgo asegurable, las primas, la reserva, en fin, los elementos necesarios para; diseñar, valuar, implementar y administrar una cobertura, este texto ha sido dividido en cuatro partes.

La clasificación, se hace de acuerdo al proceso cognoscitivo que debe seguir el lector, de manera, que la primer parte constituye el prerrequisito para las partes siguientes. No obstante, las partes tres y cuatro pueden abordarse de forma aislada siempre y cuando se hayan estudiado los primeros seis capítulos.

De esta forma, la primer parte está destinada a explicar los elementos básicos de las matemáticas actuariales, la notación y los cálculos. Además, de las suposiciones; demográficas, sociales, económicas y financieras inmersas en una cobertura, en pocas palabras, las cuestiones relacionadas con el riesgo asegurable y el contrato de seguro. La segunda parte del texto, extiende el estudio de la primera en los aspectos relacionados con; primas, valuaciones, asset share y algunas cuestiones del actuar profesional. Las partes tres y cuatro, se enfocan en el seguro de vida múltiple y decremento múltiple. Donde, esta última, puede ser considerada como el preámbulo de las matemáticas de las pensiones y la previsión social. Además, al final del texto se presentan una serie de anexos de gran utilidad para calcular las expresiones estudiadas. Los anexos son; tablas de mortalidad, tasas de interés y métodos numéricos, estos, para dar una representación cuantitativa más apropiada de acuerdo a las herramientas vistas en las cuatro partes del texto.

Por último, el estudio actuarial no está acotado por los aspectos matemáticos de la teoría actuarial del seguro de personas que aquí se estudian. De manera que el especialista, debe ampliar su perspectiva a las: herramientas de software, programación, administración, contabilidad y leyes. Por lo tanto, la labor del especialista, consiste en hacer una sinapsis entre los aspectos técnicos y fundamentales, de forma que las consultorías que brinde sean; propias, apropiadas y acordes a una ética profesional estricta.

Alberto Manuel Ramírez de Jurado Frías

Miércoles 20 de diciembre del 2003, Ciudad de México

Índice

PARTE I

CAPÍTULO 1

"Elementos Actuariales de Vida Individual"

Introducción

En este primer capítulo, se da a conocer al lector algunas técnicas relacionadas con las matemáticas del seguro de vida. El objetivo, es encontrar y explicar el comportamiento de una población a través del tiempo. Para hacer esto, se construyen diversas funciones denominadas "*funciones biométricas*" que miden la supervivencia o mortandad de la población de estudio. Además, dicha población se supone cerrada, es decir, sólo se permiten salidas del grupo original. Por ejemplo, suponga que se tiene una población observada N al tiempo t, si la población es un grupo cerrado (no se permiten entradas por: nacimientos o nuevos individuos al grupo original). Así, N es el número máximo de individuos. Por tanto, si fallecen k individuos entre el inicio y final del primer año de observación (t y $t+1$), la población será de N-k personas vivas en el final del primer año (t+1). En suma, el presente capítulo, consiste en medir de forma cuantitativa las características de la población en términos de supervivencia y mortalidad.

Definiciones y conceptos básicos

De forma intuitiva, se sabe que una población tiene ciertas características como el número de personas vivas y el número de muertos. Además, la población a través del tiempo sufre cambios ocasionados por el fallecimiento de individuos, reduciendo así el número de vivos de la población. De esta manera, la notación para el número de personas con vida y el número de muertos a cierta edad, es:

l_x: El número de personas vivas a edad x. *def. 1.1*

${}_nd_x$: El número de personas muertas entre las edades x y $x+n$. *def. 1.2*

Ejemplo 1.1

Sean 1000 personas todas de una misma edad inicial de cero años, si se tiene por única causa de salida del grupo el evento muerte. Donde muertos a edad inicial cero fueron 50, ¿cuántas personas vivas habrá a la edad uno, es decir, encontrar l_1?

Sol.

Por la notación de las *def.'s 1.1 y 1.2*, entonces l_0=1000 y ${}_1d_0$=50, como l_0 es el número de vivos a edad cero y ${}_1d_0$ es el número de muertos entre las edades cero y uno, se tiene:

$$l_1=1000-50$$
$$=950$$

■

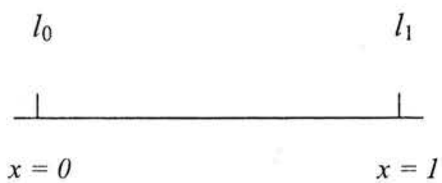


Figura. 1.1

De forma gráfica, se puede representar la fórmula anterior como una línea de tiempo. En éste caso desde la edad $x = 0$ con un número de vivos l_0, hasta $x = 1$ con l_1 vivos. Observe la *fig 1.1.*

$$l_1 = l_0 - {}_1d_0 \Rightarrow {}_1d_0 = l_0 - l_1 \qquad \textit{ec. 1.1}$$

La generalización de la *ec. 1.1* será:

$$\begin{aligned} l_{x+n} &= l_x - {}_nd_x \\ {}_nd_x &= l_x - l_{x+n} \end{aligned} \qquad \textit{ec. 1.2}$$

Observación 1.1

l_0: Es el número de personas a edad cero, también se le conoce como *radix* (raíz), generalmente es una potencia de 10 y representa el número de vivos a la edad inicio de seguimiento de la población, l_0, representa también el número de nacimientos.

l_w: Es el número de personas a edad w, siendo w la edad de extinción de la población, es decir, $l_w = 0$ donde:

$$w = mín\{x \mid l_x = 0\}$$

Observe que, l_x disminuye conforme la edad aumenta, entonces l_x es una función decreciente, es decir, la población se decrece si el tiempo transcurre.

Por otro lado, en la teoría la probabilidad clásica, existe un método que consiste en suponer la existencia de un evento E con resultados equiprobables en un espacio Ω, la forma de determinar la probabilidad de ocurrencia de dicho evento E, es contando el número de eventos causales que producen ese evento E denotado como Ω_E, y dividido entre todos los posibles resultados igualmente probables del espacio Ω. Así se tiene:

$$P(E) = \frac{\Omega_E}{\Omega} \qquad \textit{def. 1.3}$$

Definición 1.4

Sean E un experimento aleatorio cualquiera y Ω_E la familia de eventos pertenecientes a ese experimento, la función $P:\Omega_E \to \Re$ es una *función de probabilidad* si sólo si:

i) $P(\Omega_E) \geq 0 \; \forall \; E,$ *La probabilidad de ocurrencia de los eventos* Ω_E

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \textit{def. 1.4}$$

Definición 1.5

${}_np_x$: La probabilidad que una persona de edad x sobreviva n años, es decir a la edad $x + n$.

${}_nq_x$: La probabilidad que una persona de edad x sobreviva n años, es decir a la edad $x + n$.

def. 1.5

Con respecto a la forma de encontrar expresiones para las definiciones anteriores, en ocasiones, es muy ilustrativo dibujar un esquema o línea de tiempo como el de la *figura 1.1* para determinar gráficamente, el periodo de probabilidad de supervivencia o fallecimiento.

Observe que en la *def. 1.4*, ${}_np_x$ es una función de probabilidad, donde x denota la edad actual de la persona y n, el tiempo en años que la persona sobrevivirá. Es decir, la probabilidad que una persona de edad x alcance la edad $x + n$.

Si se conocen los valores de l_x y ${}_nd_x$ para toda $x \in [0, w]$ se tendrá que ${}_np_x$ está dada por:

$$ {}_n p_x = \frac{El\ número\ de\ vivos\ a\ edad\ x+n}{El\ número\ de\ vivos\ a\ la\ edad\ x} $$

$$ {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad \textit{ec. 1.3} $$

La ecuación anterior se puede expresar como:

$$ {}_n p_x = \prod_{t=0}^{n-1} {}_1 p_{x+t} $$

En efecto:

$$ {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\frac{l_{x+3}}{l_{x+2}}\cdots\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = ({}_1 p_x)({}_1 p_{x+1})({}_1 p_{x+2})\ldots({}_1 p_{x+n-1}) = \prod_{t=0}^{n-1} {}_1 p_{x+t} $$

Una igualdad muy útil, se tiene recordando que por definición, ${}_np_x$ es una función de probabilidad. Por tanto, ${}_np_x + {}_nq_x = 1$ (porque ${}_nq_x$ es el complemento de ${}_np_x$). Entonces:

$$ {}_n q_x = \frac{El\ número\ de\ muertos\ entre\ las\ edades\ x\ y\ x+n}{El\ número\ de\ vivos\ a\ la\ edad\ x} $$

$$ \begin{aligned} {}_n q_x &= 1 - {}_n p_x \\ &= 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \end{aligned} $$

Por la *ec. 1.2*, se tiene:

$$ {}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x} $$

$$\therefore\ {}_{n}q_{x} = \frac{{}_{n}d_{x}}{l_{x}} \qquad ec.\ 1.4$$

Ejemplo 1.2

Utilizando la información de la siguiente tabla. Encontrar ${}_{2}p_{25}$ y ${}_{1}q_{26}$

x	l_x	${}_{n}d_{x}$
25	85,000	2,000
26	83,000	4,000
27	79,000	-

$${}_{2}p_{25} = \frac{l_{25+2}}{l_{25}} = \frac{l_{27}}{l_{25}} = \frac{79{,}000}{85{,}000} = .929$$

$${}_{1}q_{26} = \frac{{}_{1}d_{26}}{l_{26}} = \frac{l_{26} - l_{27}}{l_{26}} = \frac{4{,}000}{83{,}000} = .048$$

Donde ${}_{2}p_{25}$=.929, representa la probabilidad de supervivencia de una persona de edad 25 hasta la edad 27, ${}_{1}q_{26}$=.048, es la probabilidad de fallecimiento de una persona entre las edades 26 y 27.

■

Observe que ${}_{n}q_{x}$, es la probabilidad de fallecimiento de una persona de edad x entre las edades x y $x + n$, pero dicha probabilidad, puede extenderse para determinar una expresión de la probabilidad de fallecimiento de una persona de edad x entre las edades $x + n$ y $x + m$ para $x < n < m$. Con la notación utilizada antes se tiene:

$${}_{n|m}q_{x} = \frac{{}_{m}d_{x+n}}{l_{x}} \qquad ec.\ 1.5$$

A parte de las funciones biométricas; l_x, d_x, ${}_{n}p_{x}$, ${}_{n}q_{x}$, existen otras funciones básicas de vida que brindan información de la población, particularmente, las utilizadas en el campo demográfico. Dichas funciones son diversas, dado que la demografía es un área muy extensa, por ello, el propósito de las siguientes definiciones, son con un fin enunciativo y no exhaustivo. Por tanto, a continuación se muestran las funciones biométricas más comunes y utilizadas en el área de la demografía, más aún, se definen aquellas útiles en el seguro de vida.

Definición 1.6

Sea L_x el valor medio de la función l_x, dada por la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} L_x &= \int_x^{x+1} l_t\,dt \\ &= \int_0^1 l_{x+t}\,dt \end{aligned} \qquad \textit{def. 1.6}$$

L_x puede ser entendida también, como el número de años que la población inicial l_x vive desde la edad x y hasta la edad $x + 1$.

Dado que la *def. 1.6* está escrita en términos de una integral, puede darse una expresión alternativa para ésta. En este sentido, se puede suponer que l_x tiene un comportamiento lineal dentro del intervalo (0,1), entonces:

$$\begin{aligned} L_x &\approx \frac{1}{2}\left(l_x + l_{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}l_x + \frac{1}{2}l_{x+1} + l_x - l_x \\ &= l_x - \frac{1}{2}\,{}_1d_x \end{aligned} \qquad \textit{ec. 1.6}$$

Derivando la *ec. 1.6* se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dL_x}{dx} &= \left(l_{x+t}\right)_{t=0}^{t=1} \\ &= l_{x+1\,x} - l_x \\ &= -{}_1d_x \end{aligned}$$

Observación 1.2

Debe tomarse muy en cuenta la diferencia entre las expresiones de L_x y l_x, ya que representan conceptos distintos, la primera el número de personas vivas a la mitad del periodo, en este caso a mitad del año uno (*ec.1.6*), y la segunda el número de personas vivas al año x o edad exacta x.

Definición 1.7

Sea T_x el número de años vividos por los miembros del grupo l_x es decir, el tiempo que en forma agregada vive la población.

$$T_x = \int_x^{\infty} l_t dt = \int_0^{\infty} l_{x+t} dt = \sum_{t=x}^{\infty} L_t = \sum_{t=0}^{\infty} L_{x+t} \qquad def.\ 1.7$$

Derivando la *def.1.7* se obtiene:

$$\frac{dT_x}{dx} = \left(l_{x+t}\right)_0^{\infty} = l_w - l_x = -l_x$$

A partir de la definición 1.6 y 1.7, se pueden construir nuevos conceptos, que proporcionan información del comportamiento de una población a través del tiempo.

Definición 1.8

Sea m_x la tasa central de mortalidad dada por el siguiente cociente:

$$m_x = \frac{{}_1d_x}{L_x} \qquad def.\ 1.8$$

La definición anterior, resulta clara si se recuerda la definición de L_x, que es el número de vivos a la edad $x + \frac{1}{2}$. En este sentido, en la *def 1.5*, ${}_nq_x$ es la probabilidad de fallecer entre las edades x y $x + n$, que era calculada como el número de defunciones entre las edades x y $x + n$, dividido entre el número de personas vivas a la edad inicial de observación x. Así, m_x representa la probabilidad o tasa central de mortalidad a la mitad del año, dado que el intervalo de observación es x y $x+1$. Es decir, m_x es la tasa central de mortalidad para una persona de edad $x + \frac{1}{2}$.

Sustituyendo la *ec. 1.6* en la *def. 1.8* se tiene:

$$m_x = \frac{{}_1d_x}{L_x} \approx \frac{{}_1d_x}{\frac{1}{2}\left(l_x + l_{x+1}\right)} \qquad ec.\ 1.7$$

De la ecuación anterior, se pueden determinar expresiones en términos de las probabilidades ${}_np_x$ y ${}_nq_x$. Por ejemplo, si se divide y multiplica la expresión anterior por l_x se tiene:

$$m_x \approx \frac{2(l_x - l_{x+1})}{l_x + l_{x+1}} \frac{l_x}{l_x} = \frac{2(1 - {}_1p_x)}{1 + {}_1p_x}$$

Como ${}_np_x = 1 - {}_nq_x$ entonces:

$$m_x \approx \frac{2(1 - {}_1p_x)}{1 + {}_1p_x} = \frac{2({}_1q_x)}{2 - {}_1q_x}$$

Despejando la expresión anterior:

$${}_1p_x \approx \frac{2 - m_x}{2 + m_x} \qquad \textit{ec. 1.8}$$

$${}_1q_x \approx \frac{2m_x}{2 + m_x} \qquad \textit{ec. 1.9}$$

Las *ec's* 1.8 y 1.9, son muy útiles utilidad cuando sólo se dispone de información sobre la tasa central de mortalidad, particularmente si se trata de decrementos múltiples. Por otra parte, en el seguimiento de una población resulta muy interesante conocer el tiempo esperado o esperanza de vida de un individuo de edad actual x. La cual, se puede construir de al menos dos formas; considerando sólo años enteros (caso discreto), el otro, con años fraccionados o completos (caso continuo). Para ambos casos, el principal indicador del número de vivos a edad x es "l_x". Considere las siguientes definiciones para la esperanza de vida.

Definición 1.9

Sea e_x la esperanza abreviada de vida para el caso discreto o edades enteras, tal que:

$$e_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tp_x \qquad \textit{def. 1.9}$$

Definición 1.10

Sea $\overset{o}{e}_x$ la esperanza completa de vida para el caso continuo o edades fraccionadas, tal que:

$$\overset{o}{e}_x = \frac{1}{l_x}\int_{t=0}^{\infty} l_{x+t}\,dt = \int_{t=0}^{\infty} {}_tp_x\,dt \qquad \textit{def. 1.10}$$

Observación 1.3

Si se recuerda la *def. 1.7* de T_x, la *def. 1.10* se transforma de la siguiente manera:

$$\overset{o}{e}_x = \frac{T_x}{l_x} \qquad \textit{ec. 1.10}$$

De la ecuación anterior, como T_x es el número de años vividos por los miembros del grupo l_x de forma agregada desde la edad x hasta su muerte, entonces, el conciente de T_x entre l_x, es el tiempo vivido por cada individuo.

Ahora, observe que las esperanzas de vida descritas, se refieren al tiempo de vida promedio para las personas de edad exacta o fracciona, es decir, se utiliza por definición desde la edad actual x hasta su muerte. ¿Existirán expresiones que permitan medir el tiempo promedio en años de un grupo de individuos de edad x en un intervalo de tiempo? En efecto, si se consideran los límites de integración para el caso continuo y en los de la suma para el caso discreto, se definen las siguientes expresiones las siguientes expresiones:

Esperanza Abreviada de vida (caso discreto)		Esperanza Completa de vida (caso continuo)	
${}_{n\|}e_x = \sum_{t=n+1}^{\infty} {}_tp_x$	Diferida n años	${}_{n\|}\overset{o}{e}_x = \int_{t=n+1}^{\infty} {}_tp_x\,dt$	Diferida n años
$e_{x:\overline{n}\|} = \sum_{t=1}^{n} {}_tp_x$	Temporal n años	$\overset{o}{e}_{x:\overline{n}\|} = \int_{t=0}^{n} {}_tp_x\,dt$	Temporal n años
${}_{n\|}e_{x:\overline{m}\|} = \sum_{t=n+1}^{m} {}_tp_x$	Diferida n años y temporal m años	${}_{n\|}\overset{o}{e}_{x:\overline{m}\|} = \int_{t=n++1}^{m} {}_tp_x\,dt$	Diferida n y temporal m años

Funciones de Supervivencia

Si se recuerda la definición de ${}_np_x$, es claro que $l_{x+n} = l_x\,{}_np_x$. Donde l_{x+n} siempre está en términos del número de personas de edad actual x, por la probabilidad que sobreviva n años, entonces, sí la edad actual del individuo es $x = 0$, se tiene:

$$l_{x+n} = (\,l_0)\,{}_np_0$$

Sea ${}_xp_0 = s(x)$, donde $s(x)$ es una función que determina la probabilidad de supervivencia de una persona de edad inicial cero hasta la edad x, con lo cual, se puede encontrar l_x, dado que ya es conocido el radix l_0 (número de personas vivas a edad 0). De la expresión anterior se obtiene:

$$l_x = l_0\,s(x) \qquad ec.1.11$$

Definición 1.11

Sea $s(x)$ una función $s:\ [0,w] \subset \Re \rightarrow \Re$ diferenciable en su dominio. Se dice que $s(x)$ es una función de supervivencia si sólo si:

i) $x \in [0,w]$

ii) $s(0) = 1$ y $s(w) = 0$

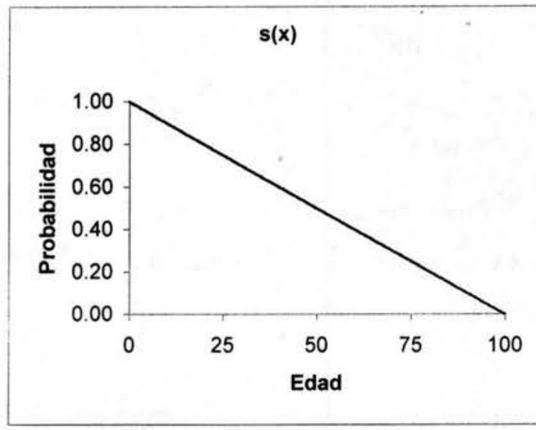
iii) $s'(x) < 0$, (es decir, $s(x)$ es una función decreciente).

Ejemplo 1.3

Un ejemplo muy simple de una función de supervivencia, es el caso cuando $s(x)$ tiene un comportamiento lineal. Entonces, si $s(x)$ es una función de supervivencia definida:

Sea $s(x) = \dfrac{100-x}{100}$ para $s:\ [0,100] \subset R \to R$ diferenciable en su dominio. Demostrar que $s(x)$ es una función de supervivencia.

Sol.



i) Por construcción,

ii) Observe que: $x \in [0,100]$

$s(0) = 1$ y $s(100) = 0$

iii) $s'(x) = -1/100$, por tanto, $s'(x) < 0$.

Por i), ii), iii) y la *def. 1.11* $s(x)$ es una función de supervivencia

Gráfica 1.1

■

Ejemplo 1.4

Por la *ec. 1.1* se sabe que $l_x = l_0\, s(x)$ con $s(x)$ función de supervivencia. Construir una tabla para los valores de l_x y graficar la función $s(x)$, donde:

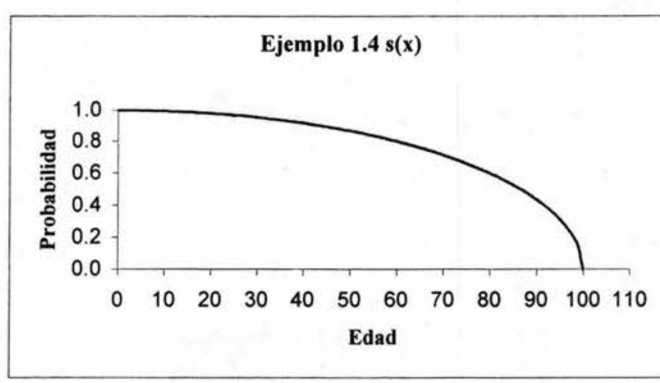
$$s(x) = \frac{\sqrt{10{,}000 - x^2}}{100} \quad para\ l_0 = 10{,}000$$

Sol.

Observe que $s(x)$ es una función de supervivencia, porque cumple con las propiedades de la *def. 1.11* para $w = 100$.

Edad x	l_x
1	$l_1 = l_0\, s(1) = 10{,}000$
2	$l_2 = l_0\, s(2) = 9{,}999.5$
3	$l_3 = l_0\, s(3) = 9{,}998.0$
.	.
.	.
.	.
98	$l_{98} = l_0\, s(98) = 1{,}989.97$
99	$l_{99} = l_0\, s(99) = 1{,}410.67$
100	$l_{100} = l_0\, s(100) = 0$

Tabla 1.1



Gráfica 1.2

La *gráfica 1.2*, muestra el comportamiento de la función $s(x)$ a través del tiempo, además, en la *Tabla 1.1* está la probabilidad que una persona recién nacida (edad exacta 0) sobreviva hasta la edad $x+n$. Por ejemplo, para determinar la probabilidad que una persona de edad actual $x=0$ sobreviva a la edad $x=25$, se tiene que calcular $s(25)$, es decir:

$$_{25}p_0 = s(25) = \frac{\sqrt{10{,}000-(25)^2}}{100} = .97$$

Suponiendo que se desea $_4p_{25}$, que es la probabilidad que una persona de edad actual 25 sobreviva hasta la edad 29, dicha probabilidad estaría dada como sigue:

$$_4P_{25} = \frac{s(29)}{s(25)} = \frac{\frac{\sqrt{10{,}000-(29)^2}}{100}}{\frac{\sqrt{10{,}000-(25)^2}}{100}} = .98$$

En general, $_np_x = \frac{s(x+n)}{s(x)}$.

Finalmente, observe que en la *tabla 1.1* se muestran el número de personas a la edad exacta x, para $x=0$ hasta la extinción de la población $x=w$. Con lo cual, se presenta al lector, una tablas construida con funciones biométricas, misma que es de gran ayuda cuando se quiere encontrar la probabilidad de supervivencia o fallecimiento.

■

Ejemplo 1.5

Supongamos que se desea construir una función de supervivencia $s(x)$, restringida a las siguientes hipótesis:

i) Sea $s(x)$ una función de supervivencia, tal que x es la edad exacta en años de un individuo de la población observada.
ii) Suponga que la mortalidad se comporta como una constante k.
iii) La población se extingue a la edad w.

Con los supuestos anteriores, construya una función de supervivencia $s(x)$.

Sol.

Si la probabilidad de supervivencia para radix de personas l_0, es inversamente proporcional al tiempo, es decir, conforme el tiempo transcurre, la población decrece de forma constante $-k$. Entonces, el modelo se puede representar como:

$$\frac{ds(x)}{dx} = -ks(x) \qquad \textit{ec. 1.12}$$

La ecuación anterior, es una diferencial separable[1]. Así, evaluando en los límites de integración de las condiciones iniciales se tiene:

$$\int_{s(0)}^{s(x)} \frac{ds}{s} = -\int_0^x kdx$$

Resolviendo se tiene,

$$[\ln(s)]_{s=s(0)}^{s=s(x)} = [-kt]_{t=0}^{t=x}$$

Así,

$$s(x) = s(0)e^{-kx}$$

Como $s(0) = 1$ y por la *def. 1.11*, entonces:

$$s(x) = e^{-kx}$$

Observe que la ecuación anterior definida así no es una función de supervivencia, porque:

$$s(w) \neq 0$$

[1] *Una práctica común en la elaboración de modelos logísticos, es el uso de ecuaciones diferenciales. Para este caso particular, resultó una ecuación diferencial de tipo separable.*

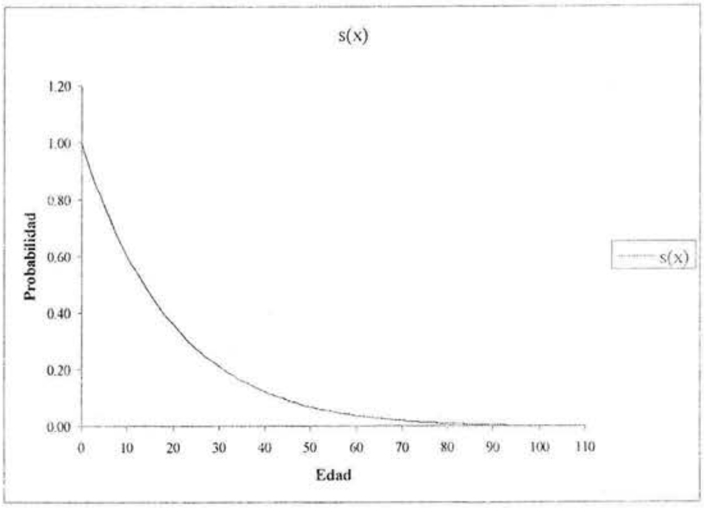
Para arreglar esta pequeña dificultad se puede multiplicar por un factor de corrección, considerando el siguiente:

$$\left(1-\frac{x}{w}\right) \quad \textit{donde } w \textit{ es la edad de extinción}$$

Entonces la función queda definida como:

$$s(x)=\left(1-\frac{x}{w}\right)e^{-kx}$$

Como k y w son parámetros, éstos se sujetan a una experiencia o datos empíricos de mortalidad. Si se hace $k = 1/25$ y $w = 100$, la gráfica de la función $s(x)$ está dada por:



Gráfica 1.3

La gráfica a la izquierda, muestra el comportamiento de una función de supervivencia asintótica, observe que en la variación del parámetro k depende de $s(x)$. Así, tomando:

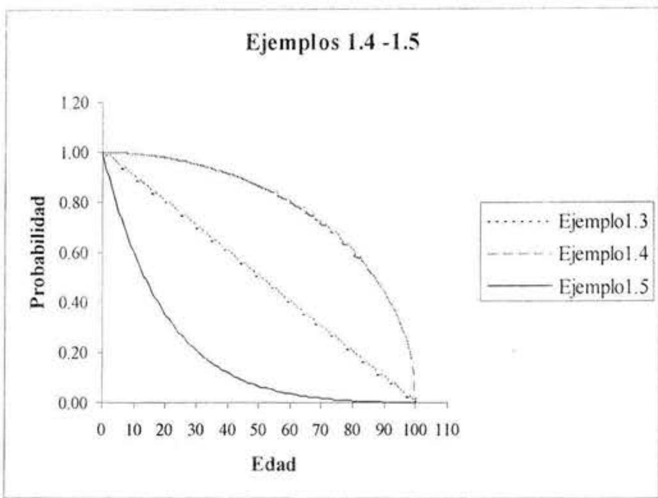
$$\lim_{k\to 0} s(x)=\left(1-\frac{x}{w}\right)$$

Cuando k tiende a cero, la función $s(x)$ converge a la función de supervivencia del *ejemplo 1.3*.

■

Se pueden comparar las funciones de supervivencia de los *ejemplos 1.4-1.5*. Observe que existe una diferencia significativa entre las probabilidades obtenidas, las cuales dependen de la función $s(x)$.

La *Gráfica 1.4* a la derecha, muestra el comportamiento de la función de supervivencia de los ejemplos mencionados.



Gráfica 1.4

Observe que $s(x)$, se puede ver como una función de distribución de probabilidad de supervivencia, es decir, existe $F(x)$ tal que F es la distribución acumulada de fallecimiento para un grupo de personas de edad x. Así:

$$s(x) = 1 - F(x)$$

Lo anterior, implica que existe una definición probabilística para la función de distribución de probabilidad de supervivencia $s(x)$.

Definición 1.12

Sea x la edad en años de una persona, X la variable aleatoria de la edad de fallecimiento de una persona de edad x y $F(x)$ la función de distribución acumulativa de fallecimiento, tal que:

$$F(x) = P(X \leq x) \qquad para \quad x \in [o, w] \qquad def.\ 1.12$$

En la definición anterior, $F(x)$ es la distribución acumulada de fallecer en el intervalo de edad desde el nacimiento hasta la edad x. Así, $1 - F(x)$ es la probabilidad de supervivencia de una persona de edad 0 hasta la edad x, que es justamente la definición de $s(x)$ vista con anterioridad. La siguiente ecuación, expresa la función de supervivencia en términos del complemento de la función de distribución acumulativa de fallecimiento, es decir:

$$s(x) = 1 - F(x) = P(X > x) \qquad para \quad x \in [o, w]$$

Donde X según la *def. 1.12*, es una variable aleatoria de la edad de fallecimiento de los participantes de edad actual x, y $F(x)$, es la distribución acumulativa de fallecimiento. Siguiendo este razonamiento, se puede expresar la probabilidad de que un recién nacido fallezca entre las edades x y $x + n$ como sigue:

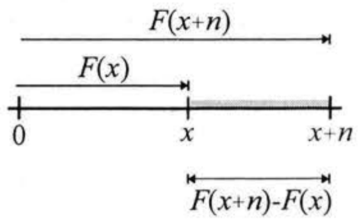


Figura 1.3

$$P(x < X \le x+n) = F(x+n) - F(x) = (1 - s(x+n)) - (1 - s(x)$$
$$= s(x) - s(x+n)$$

Observe que la *figura 1.3*, representa el cálculo de la probabilidad arriba descrita, como la diferencia de las funciones de distribución para las edades x y $x + n$.

Análogamente, la probabilidad de fallecimiento de una persona recién nacida (edad 0) fallezca entre las edades x y $x + n$ dado que ya sobrevivió la edad x es:

$$P(x < X \le x+n \mid X > x) = \frac{F(x+n) - F(x)}{1 - F(x)}$$
$$= \frac{(1 - s(x+n)) - (1 - s(x))}{s(x)}$$
$$= \frac{s(x) - s(x+n)}{s(x)}$$

La expresión anterior, es el cociente del número de muertos de las edades x y $x+n$, entre el número de vivos a edad x. Por la *def. 1.5*, se tiene:

$$\begin{aligned} {}_nq_x &= P(x < X \le x+n \mid X > x) \\ &= \frac{F(x+n) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{s(x) - s(x+n)}{s(x)} \end{aligned} \qquad \textit{ec. 1.13}$$

La ecuación anterior es la representación probabilística para ${}_nq_x$. Por otro lado, para ${}_np_x$ con la igualdad ${}_np_x + {}_nq_x = 1$, se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_np_x &= 1 - \frac{s(x) - s(x+n)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x+n)}{s(x)} \end{aligned} \qquad \textit{ec. 1.14}$$

La fórmula anterior, es la probabilidad que una persona de edad actual x llegue con vida a la edad $x+n$. Ver el *ejemplo 1.4*.

Es de gran importancia tener presentes las funciones de supervivencia, ya que juegan un papel fundamental en la construcción de modelos probabilísticos, sean de; mortalidad, logísticos poblacionales o de algún otro tipo. Para este fin, se pueden considerar los conceptos de las funciones $s(x)$ y $F(x)$. Para ilustrar lo anterior, considere el siguiente ejemplo para una función de distribución dada:

Ejemplo 1.6

Suponga que X se distribuye exponencial con parámetro λ. Encontrar la probabilidad que una persona de edad 40 fallezca entre las edades 40 y 45.

Sol.

Se sabe que la distribución exponencial está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 \;\; e.o.c. & \end{cases}$$

Entonces:

$$F(x) = \int_0^x f_X(y)dy = 1 - e^{-\lambda x}$$

Así, sustituyendo en la *ec. 1.13* se tiene:

$${}_5q_{45} = \frac{e^{-\lambda 40} - e^{-\lambda 45}}{e^{-\lambda 40}}$$

Reflexión. Para el ejemplo anterior, ¿cuál es la edad máxima de supervivencia w?

El parámetro λ, puede ser elegido de tal suerte que satisfaga una base empírica, y refleje el comportamiento de alguna población observada. Esta bases empírica, puede obtenerse a través de procesos estadísticos. O bien, puede darse un parámetro estimado tal que $s(x)$ sea una función de supervivencia. No obstante, se puede dar un parámetro construido de forma arbitraria, siempre y cuando satisfaga las hipótesis de $s(x)$. ■

Aspectos sobre la Mortalidad

Hasta ahora las expresiones relacionadas con la mortalidad han sido definidos para la mortalidad de un intervalo, de un año, o de medio año. Por ejemplo; el número de muertos entre la edad x y $x + n$ (${}_nd_x$), la probabilidad de fallecimiento entre la edad x y $x + n$ (${}_nq_x$), la probabilidad de fallecimiento a la mitad del año es decir a la edad $x + 1/2$ (m_x), etc. Todas estas expresiones, miden la mortalidad de un individuo de edad x, no obstante, lo hacen con un intervalo de a lo menos ½ año (para el caso de (m_x). Por tanto, ¿se podrá determinar una expresión para la mortalidad con un intervalo de medición menor a ½ año?

En este sentido, se puede definir una tasa instantánea de mortalidad, la cual, tiene un intervalo de medición tan pequeño como se desee, de hecho, un individuo de edad x está sujeto a la mortalidad a cada instante. De esta manera, la tasa instantánea de mortalidad representa el decremento de l_x cada instante.

Definición 1.12

Sea μ_x la fuerza o tasa instantánea de mortalidad tal que:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \lim_{h\to 0}\frac{{}_hq_x}{h}\\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{l_{x+h}-l_x}{hl_x}\\ &= -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}\end{aligned} \qquad \textit{def. 1.12}$$

Otras expresiones alternativas para la ecuación anterior están dadas como sigue:

$$\mu_x = -\frac{Dl_x}{l_x} \quad o \quad \mu_x = -D\ln(l_x) \qquad \textit{ec. 1.15}$$

Integrando la última expresión y tomando como límites de integración de la edad 0 hasta la edad x, se tiene:

$$\int_o^x \mu_s\, ds = -\int_o^x D\ \ln(l_s)\ ds$$

$$\mu_x = -[\ln(l_s)]_{s=0}^{s=x} = -(\ln(l_x) - \ln(l_0))$$

$$= -\ln\left(\frac{l_x}{l_0}\right)$$

Despejando l_x se tiene:

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu_s \, ds} \qquad ec.\ 1.16$$

Si en la *ec. 1.15* se toman como límites de integración la edad 0 hasta $x+n$ se obtiene:

$$l_{x+n} = l_0 e^{-\int_0^{x+n} \mu_s \, ds} \qquad ec.\ 1.17$$

Ejemplo 1.7

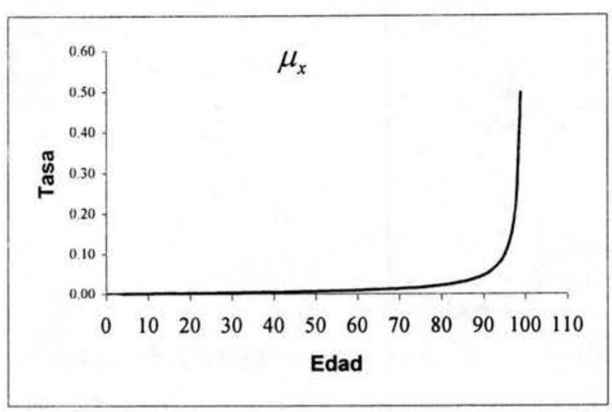
Suponga que $l_x = l_0\, s(x)$ tal que $l_0 = 10{,}000$. Si $s(x)$ es una función de supervivencia, encontrar la fuerza instantánea de mortalidad y graficarla sí, $s(x) = \frac{1}{100}\sqrt{10{,}000 - x^2}$.

Sol.

$$\mu_x = -\frac{Dl_x}{l_x} = -\frac{D(l_0 s(x))}{l_0 s(x)}$$

$$= -\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{-\frac{-2x}{2(100)}\left(10{,}000 - x^2\right)^{-1/2}}{\frac{1}{100}\left(10{,}000 - x^2\right)^{1/2}}$$

$$\therefore \mu_x = \frac{x}{10{,}000 - x^2}$$



Gráfica 1.5

■

En este ejemplo, se muestra otra forma de caracterizar la fuerza de mortalidad en términos de una función de supervivencia, en otras palabras:

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)}$$

Por otra parte, observe que de la *ec. 1.16 y 1.17* se puede dar una expresión alternativa para ${}_np_x$, en términos de la fuerza instantánea de mortalidad, así:

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_0 e^{-\int_0^{x+n} \mu_s\, ds}}{l_0 e^{-\int_0^{x} \mu_s\, ds}} = e^{-\int_0^{x+n} \mu_s\, ds + \int_0^{x} \mu_s\, ds}.$$

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = e^{-\int_x^{x+n} \mu_s\, ds} \qquad \textit{ec. 1.18}$$

$${}_nq_x = 1 - e^{-\int_x^{x+n} \mu_s\, ds} \qquad \textit{ec. 1.19}$$

Con la *ec.1.15* se puede obtiene otra expresión para ${}_nq_x$:

$$-Dl_x = l_x \mu_x$$

Integrando la expresión anterior, pero tomando como límites la edad x y $x+n$:

$$-\int_x^{x+n} Dl_s ds = \int_x^{x+n} l_s \mu_s ds$$

$$-l_s \Big|_{s=x}^{s=x+n} = \int_x^{x+n} l_s \mu_s ds$$

Evaluando en los límites y haciendo el cambio de variable, $s = x+ t$:

$$l_x - l_{x+n} = \int_0^{n} l_{x+t} \mu_{x+t} dt$$

Dividendo lo anterior por l_x para completar la definición de ${}_nq_x$, se tiene:

$$\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} \mu_{x+t} \, dt$$

Por las *ec's 1.3 y 1.4:*

$$_n q_x = \int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t} \, dt \qquad e.c.\ 1.20$$

En la ecuación anterior, el término $_t p_x$ dentro de la integral, es la probabilidad de supervivencia de una persona de edad x hasta la edad $x+t$. Donde el producto $_t p_x \mu_{x+t}$, es el fallecimiento instantáneo del individuo a la edad $x+t$. Es decir, la probabilidad de supervivencia termina de forma instantánea con la fuerza de mortalidad al momento $x+t$.

Leyes de Mortalidad

Las leyes de mortalidad, son aquellas que rigen el comportamiento de una población a través del tiempo, existen algunas leyes o modelos que bajo ciertos supuestos, permiten definir funciones en términos de; la fuerza de moralidad μ_x o del número de vivos a una edad x, l_x. Pero, si se conoce el comportamiento de esta última, se puede encontrar con la *ec. 1.15* la fuerza instantánea de mortalidad.

Por estas razones, una de las primeras leyes de mortalidad de las cuales se tiene conocimiento, es la del matemático francés Abraham de Moivre (1667-1754) desarrollada en el año de 1724. Que bajo las suposiciones de linealidad, afirmó que el número de muertes en cada año tiene un comportamiento constante k para una edad máxima de supervivencia w. Además, sugirió que su modelo debía ser utilizado para el intervalo de edad: 12 a 86 años.

Bajo las hipótesis anteriores, el modelo está dado por:

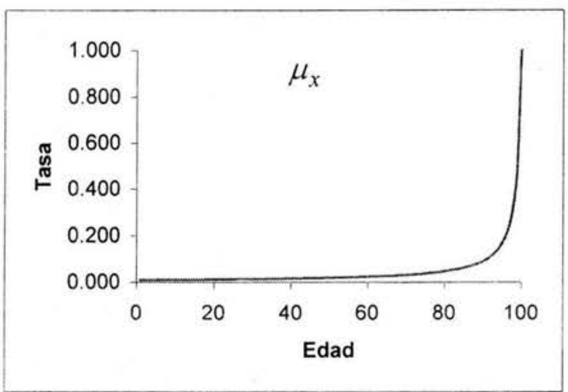
$$l_x = k(w - x)$$

Por la *ec. 1.15* se tiene:

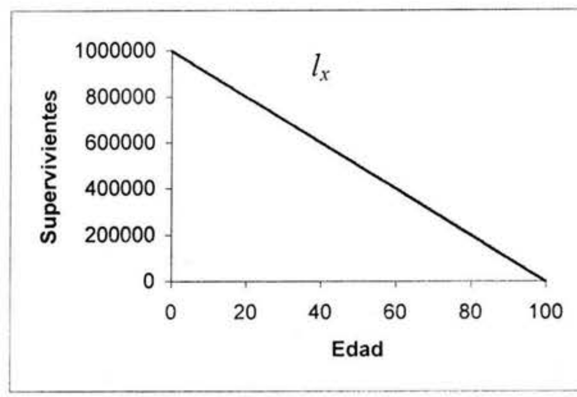
$$\mu_x = -\frac{Dl_x}{l_x} = -\frac{-k}{k(w-x)}$$

$$\therefore \mu_x = \frac{1}{w-x}$$

Tomando k=10,000 y $w=100$ (cada año se tienen 10,000 decesos o fallecimientos de forma constante hasta alcanzar los 100 años), gráficamente, la expresión anterior se comporta de la siguiente forma:



Gráfica 1.6



Gráfica 1.7

Un siglo después, Benjamín Gompertz en 1825 consideró a $\frac{1}{\mu_x}$ (el inverso de la fuerza de mortalidad), para medir la resistencia a la muerte.

Así, conforme la tasa instantánea de mortalidad tiende a cero (ocurriendo esto cuando la edad tiende a cero), la resistencia a la muerte es mayor. Sin embargo, cuando la edad se aproxima a la edad límite w, la resistencia a la muerte es menor. Resultan muy interesantes las aseveraciones de Gompertz, si se recuerda la naturaleza asintótica de la función $1/y$.

La idea de Benjamín Gompertz, se basaba en el hecho de que para intervalos de tiempo infinitesimalmente pequeños, la tasa de mortalidad se comporta como se describió en el párrafo anterior. Por lo cual, las hipótesis de Gompertz quedan representadas matemáticamente a continuación. Sí h, es una constante de proporcionalidad se tiene:

$$D\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -h\,\frac{1}{\mu_x}$$

Integrando

$$\int \mu_x D\left(\frac{1}{\mu_x}\right)\,dx = -\int h\,dx$$

$$\int \frac{1}{\frac{1}{\mu_x}} D\left(\frac{1}{\mu_x}\right)\,dx = -hx - \ln(B)$$

Donde $\ln(B)$ es la constante de integración. Se utiliza la función logaritmo natural para simplificar la fórmula.

Haciendo el cambio de variable $y = \dfrac{1}{\mu_x}$ se tiene:

$$\int \frac{1}{y} dy = -hx - \ln(B)$$

$$\ln(y) = -hx - \ln(B)$$

$$\ln\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -hx - \ln(B)$$

Aplicando *e* a la ecuación anterior y haciendo $c = e^h$, se obtiene:

$$\mu_x = BC^x$$

La expresión anterior de la fuerza de mortalidad μ_x, puede ser utilizada para encontrar una función l_x en términos de μ_x. Por tanto, si se integra desde la edad 0 hasta la edad x como se ha hecho antes, se tiene que:

$$\int_0^x \mu_t\,dt = \int_0^x BC^t\,dt$$

$$\int_0^x \mu_t dt = \int_0^x Be^{t\ln(c)} dt$$
$$= \left[\frac{B}{\ln(c)} e^{t\ln(c)} \right]_{t=0}^{t=x}$$
$$= \frac{B}{\ln(c)} \left(c^x - 1 \right)$$

Sea $-\ln(g) = \dfrac{B}{\ln(c)}$, por tanto:

$$\int_0^x \mu_t dt = -\ln(g)(c^x - 1)$$
$$= -\ln((g)^{c^x - 1}$$

Como $l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu_t dt}$ se tiene $l_x = l_0 e^{\ln(g)^{c^x - 1}}$, finalmente:

$$l_x = kg^{c^x} \qquad donde \qquad k = \frac{l_0}{g} \qquad ec.\ 1.21$$

Con una buena elección de los parámetros g y c del modelo de Gompertz, se puede tener una aproximación a la curva típica de l_x. Además, es importante señalar que al diseñarse este modelo, las aproximaciones obtenidas son más adecuadas cuando se restringen los rangos de edad para el intervalo de 15 a 60 años. Gompertz, afirmó que la mortalidad está sujeta generalmente a dos factores; el azar sin predisposición a la muerte y el deterioro biológico. El lector podrá apreciar, que la fórmula deducida por Gompertz sólo contempla el segundo factor. Sin embargo, es un acercamiento a la medición de la mortalidad, para la época, sofisticado.

Años más tarde, en 1860, Makeham reconsideró las hipótesis de Gompertz e hizo un modelo que incluía las dos causas. Agregando al modelo, el factor azar representado por la letra "*A*". Así, el modelo de Makeham se expresa:

$$\mu_x = A + BC^x$$

Nuevamente, para encontrar una expresión para l_x en términos de la fuerza de mortalidad como se hizo en el modelo de Gompertz, se tiene que integrar desde la edad *0* hasta la edad *x*. Así, para el modelo de Makeham se tiene:

$$\int_0^x \mu_s ds = \int_0^x \left(A + BC^s\right) ds$$

$$= Ax + \frac{BC^x}{\ln C} - \frac{B}{\ln C}$$

Haciendo: $\ln s = -A$ y $\ln g = -\frac{B}{\ln C}$

$$\int_0^x \mu_s ds = -\ln S^x - \ln g^{C^x - 1}$$

$$\begin{aligned} l_x &= l_0 e^{-\int_0^x \mu_s ds} \\ &= l_0 e^{-\ln S^x - \ln g^{C^x - 1}} \\ &= l_0 S^x g^{C^x - 1} \end{aligned}$$

$$\therefore \; l_x = kS^x g^{C^x - 1} \qquad donde \qquad k = \frac{l_0}{g} \qquad ec.\ 1.22$$

Como paréntesis, se menciona al lector que la elección de los parámetros; *k, S, g, c,* se puede hacer a través de métodos de estimación. Los cuales, se dejan como ejercicio al lector, en la sección de ejercicios del siguiente capítulo.

Por otro lado, las mejoras al modelo de Gompertz propuestas por Makeham, hacen que con los parámetros adecuados (*A, B, C*), se reproduzca el comportamiento de una curva típica de l_x para un rango de edad, desde la edad 20 hasta la muerte.

Ejemplo 1.8

Suponga que μ_x tiene un comportamiento según la ley de Makeham, donde los parámetros; A, B, C, están dados por: A = .0017, B = .000765, C = 1.097. Determinar los valores de μ_x para edades enteras y graficar la fuerza de mortalidad.

Sol.

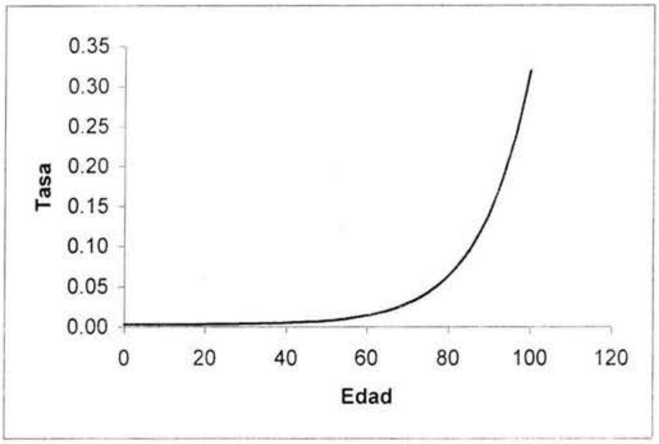
Por la ley de Makeham se sabe:

$$\mu_x = A + BC^x$$

Como los valores de los parámetros son dados, se tiene:

$$\mu_x = (.0017) + (.000765)(1.097)^x$$

Observe la *gráfica 1.8.*



Gráfica 1.8

Observe, que si se hacen pequeñas variaciones en los parámetros A, B, C, la función μ_x se comporta de una forma muy diferente.

■

Observación 1.4

Con las *ec. 1.21 y 1.22*, se pueden encontrar otras expresiones para la probabilidad de supervivencia ${}_np_x$, de acuerdo a los modelos de Gompertz y Makeham. De este modo.

Para la ley de Gompertz:

$$\begin{aligned} {}_np_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x} \\ &= g^{C^x(C^n-1)} \end{aligned} \qquad \textit{ec. 1.23}$$

Para la ley de Makeham:

$$\begin{aligned} {}_np_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x} \\ &= S^n g^{C^x(C^n-1)} \end{aligned} \qquad \textit{ec. 1.24}$$

Ejercicios del Capítulo 1

Definiciones y Conceptos Básicos.

1.- Escribir el significado de las siguientes expresiones: l_{65}, d_{50}, ${}_{10}P_{30}$, ${}_{10}q_{30}$, $s(60)$, m_{35}, T_{45}, L_{33}. Por ejemplo; l_{15}, es el número de personas vivas a edad 15.

2.- Encontrar una expresión de acuerdo a la notación de las funciones biométricas; l_x, d_x, ${}_np_x$, ${}_nq_x$, etc. para los siguientes enunciados.

i) La probabilidad que una persona de edad 18 no llegue con vida a la edad 23.
ii) El número de vivos a edad actual 33.
iii) El número de muertos entre las edades $x+n$ y $x+m$.
iv) La probabilidad que una persona de edad 31 sobreviva a la edad 65.
v) La probabilidad que una persona de edad x llegue con vida hasta la edad $x + 2$.
vi) La probabilidad que una persona de edad 47 fallezca entre las edades 50 y 70.

3.- Complete la información faltante en la siguiente tabla[(2)]. Utilice las definiciones o aproximaciones vistas en el presente capítulo sin olvidar las relaciones entre funciones biométricas; l_x, d_x, d_x, ${}_np_x$, ${}_nq_x$, etc.

Edad x	l_x	d_x	${}_np_x$	${}_nq_x$	L_x	m_x
40	96,396	241				
41						
42	95,899		.99716			
43						

4.- Utilizando las definiciones de m_x demostrar que:

$$ {}_1q_x \approx \frac{{}_1d_x}{2L_x + {}_1d_x} $$

[(2)] *Extracto de la tabla CNSF 2000 Tabla Individual México, documento de trabajo publicado el viernes 31 de diciembre de 1999.*

Según la fórmula anterior, de una expresión para ${}_tp_x$.

5.- Demostrar que, $\int_0^{w-x} l_{x+t}\mu_{x+t}dt = l_x$.

Observe que el resultado de la expresión anterior es evidente, porque la función μ_x representa la fuerza instantánea de mortalidad. Así, el producto $l_{x+t}\ \mu_{x+t}$ es el número de vivos a la edad $x + t$ que mueren de forma instantánea desde la edad cero hasta w-x.

6.- Demostrar que, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{T_x}{lx}\right) = \dfrac{\mu_x T_x}{l_x} - 1$.

7.- Demostrar que la tasa central de mortalidad m_x es constante si $l_x = ke^{-x}$. Utilice las expresiones relacionadas con m_x.

Funciones de Supervivencia.

8.- Sea $s(x)$ una función $s:[0,w]\subset\Re\rightarrow\Re$ diferenciable en su dominio, tal que:

$$s(x) = \frac{\sqrt[n]{w^n - x^n}}{w} \qquad \forall\ n = 1,2,3,...$$

i) Con la *def. 1.11*, demuestre que $s(x)$ es una función de supervivencia.

ii) ¿Cuál es la edad máxima de supervivencia?

iii) Graficar $s(x)$ para n y w fijos.

9.- Un grupo de especialistas en estudios demográficos, ha observado que una población se comporta de la siguiente manera:

i) Cada año fallece al menos el k % de la población.

ii) Toda la población se extingue a la edad $w = 85$.

Encuentre una función $s(x)$, que modele apropiadamente la población de acuerdo a las hipótesis anteriores, y demuestre que efectivamente se trata de una función de supervivencia. Utilice todos los medios necesarios para este fin, sin importar la complejidad o simplicidad de su función propuesta.

10.- Si $s(x)=\frac{\sqrt{10{,}000-x^2}}{100}$ *donde* $l_0=10{,}000$ es una función de supervivencia, encontrar un valor numérico para las funciones biométricas del ejercicio 1 y 2. Por ejemplo, $l_{15}=l_0 s(15)=9887$.

11.- Sea $\phi(x)=-\frac{d}{dx}s(x)$ con $s(x)$ función de supervivencia., demostrar que:

i) $\int_0^w \phi(y)dy=1$ (La probabilidad de fallecer entre la edad 0 y w, es un evento seguro)

ii) $\int_x^{x+n} \phi(y)dy={}_nq_x$ (La probabilidad de fallecer entre la edad x y $x+n$)

iii) $s(x)=1-\int_0^x \phi(y)dy$ (La probabilidad de supervivencia de la edad 0 hasta la edad x es igual al complemento de fallecer en dicho intervalo de edad)

Aspectos de la Mortalidad

12.- Suponga que se divide el intervalo de edad $(x, x+1)$ en t partes iguales, y considere que la probabilidad de fallecimiento en cualquier t-ésimo de dicho intervalo es ${}_{1/t}q_x$, así, una tasa de mortalidad anualizada bajo las hipótesis anteriores es:

$$q_x^{(t)}=(t)_{1/t}q_x$$

Utilizando la expresión e hipótesis anteriores, plantee y deduzca la *def. 1.12* de la tasa instantánea de mortalidad. Argumente todos los pasos.

Ayuda: Recuerde que μ_x es una tasa instantánea de mortalidad, por ser instantánea, se tiene que: $t \to 0$. Usando lo anterior y la definición de ${}_nq_x$ se resuelve de forma directa el ejercicio.

13.- Encuentre μ_x y $s(x)$ para el ejercicio 8.

14.- Suponiendo que las muertes tienen un comportamiento según la ley de Makeham. Encontrar los valores de μ_x, para los cuales se tiene el máximo y el mínimo de muertos denotados como:

$$máx(d_x) \qquad y \qquad mín(d_x)$$

Además, suponga que:

$$d_x = l_x \mu_x$$

Ayuda: Utilice la hipótesis que $d_x = l_x \mu_x$ para encontrar los puntos críticos, demostrando con ésto, que los puntos encontrados son en efecto el máximo y mínimo. Recuerde que la ley de Makeham está dada por:

$$\mu_x = A + B^{C^x}$$

Sol:

$$máx(d_x) \quad si \quad \mu_x = \ln C\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{4A}{\ln C}}}{2}\right) \quad ,y \quad mín(d_x) \quad si \quad \mu_x = \ln C\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{4A}{\ln C}}}{2}\right)$$

15.- Suponiendo que $\mu_x = A + Hx + B^{C^x}$ encontrar una expresión para calcular l_x. A esta caracterización de μ_x se le conoce como la segunda ley de Makeham.

CAPÍTULO 2

"Tablas de Mortalidad"

Introducción

En el capítulo anterior, se definieron algunas funciones llamadas "funciones biométricas", por ejemplo: l_x, d_x, ${}_np_x$, ${}_nq_x$, e_x, T_x, L_x, m_x, μ_x, *etc.* Estas funciones, permiten describir el comportamiento de una población en términos de mortalidad y supervivencia.

Así, se define una tabla de mortalidad como; el conjunto de funciones biométricas que explican la mortalidad y supervivencia de una población.

Las tablas de mortalidad, son una de las hipótesis actuariales más importantes, porque contienen supuestos en el comportamiento de: la mortalidad, tasas de interés técnico, el tipo de la población; masculina, femenina, asegurados, censos, etc. La tasa de interés técnico supuesta en una tabla de mortalidad, es la tasa a la cual, la compañía supone que podrá invertir sus activos por conceptos de primas, para así, cubrir sus obligaciones con los asegurados, es decir, la cobertura ofrecida al asegurado.

La tabla de mortalidad, es una herramienta importante en el cálculo de las coberturas de las compañías de seguros, pero, no la única si se aborda el cálculo actuarial bajo un enfoque probabilístico. No obstante, para la construcción de las tablas de mortalidad existen varios mecanismos técnicos, entre los cuales, se pueden mencionar los siguientes: métodos estadísticos, probabilísticos, empíricos, uso de leyes de mortalidad, etc.

Por tanto, en este capítulo, se hace una clasificación básica de los tipos de tablas de mortalidad y se exhiben algunos métodos para su construcción.

Construcción de Tablas de Mortalidad

Definición 2.1

Al conjunto T, denota una *tabla de mortalidad*, si sólo sí, es un conjunto de funciones biométricas, es decir, un conjunto de; l_x, d_x, ${}_np_x$, ${}_nq_x$, e_x, T_x, L_x, m_x, μ_x.

Por ejemplo, si se desea construir una tabla de mortalidad T, es necesario tomar en consideración la definición anterior y las siguientes cuestiones: ¿qué tipo de población se desea estudiar? ¿Para qué intervalos de edad es válida? ¿Cuál es el periodo de observación de la población?, ¿Qué hipótesis se utilizarán para su construcción? ¿Cuales funciones biométricas debe tener la tabla para que describa el comportamiento de la población? El lector, puede responder sin dificultad las preguntas anteriores. Por ejemplo, en la última pregunta se puede responder que; el número de personas vivas a dicha edad l_x, el número de muertes para cada edad d_x, etc. Observe, que con las funciones biométricas anteriores se pueden construir inferir las probabilidades de supervivencia y mortalidad, denotadas como: ${}_np_x$ y ${}_nq_x$ respectivamente.

En general, las tres primeras columnas de la tabla de mortalidad, suelen darse por las funciones biométricas: x, l_x, d_x. Con las cuales, se pueden construir tantas funciones biométrica como se necesite. Algunos puntos importantes en la elaboración de una tabla de mortalidad son:

i) Elegir un grupo o población de estudio.
ii) Definir el periodo de observación.
iii) Formular las hipótesis y determinar el método de construcción.
iv) Definir el uso, representación y tipo de tabla.

Observaciones:

Con respecto a cada punto anterior, el lector debe considerar lo siguiente:

i) El monto de individuos en el grupo de estudio seleccionado, debe ser lo suficientemente grande, para poder realizar aproximaciones (estimación) del comportamiento real (poblacional) de la población, para dicha muestra. Para ello, se usan mecanismos como: los conteos, censos y muestreos, para así, hacer estimaciones de la población de estudio.

ii) Las limitaciones del periodo al periodo observación son diversas, por ejemplo; es costoso tratar de seguir una población desde el nacimiento hasta la extinción. Por otro lado, si el periodo de observación no es lo suficientemente grande, la veracidad así como su aplicabilidad, es dudosa. Por lo tanto, el periodo de observación, debe ser tal, que evite estas dificultades. Es decir, se pueden usar técnicas de muestreo para maximizar el periodo de observación al mínimo costo.

iii) Se deben formalizar las hipótesis de construcción de la tabla de mortalidad, sean éstas: actuariales, financieras, demográficas, económicas, contables, etc.

iv) La tabla construida, debe reflejar el comportamiento del grupo seleccionado, por lo cual, es fundamental definir el uso que se le dará y el tipo de tabla.

Ejemplo 2.1

Suponga que se desea observar un grupo l_0 de personas desde su nacimiento hasta su extinción a la edad w. Además, las l_0 personas pertenecen a un grupo cerrado. Con tal radix, muestre una tabla de mortalidad T en su forma general u ordinaria[(3)], para las suposiciones descritas.

Sol.

Para dar una representación de una tabla de mortalidad T, en particular en su forma general u ordinaria, simplemente se construye una considera una matriz, donde los renglones son las edades x desde el nacimiento hasta la extinción, las columnas, el conjunto de funciones biométricas; l_x, d_x, ${}_np_x$, ${}_nq_x$.

[(3)] *La forma general u ordinaria de una tabla de moralidad, se define en la siguiente sección del presente capítulo.*

Tabla de Mortalidad

Edad x	l_x	${}_nd_x$	${}_np_x$	${}_nq_x$
0	l_0= Radix	${}_1d_0 = l_0 - l_1$	${}_1p_0$	${}_1q_0$
1	l_1	${}_1d_1 = l_1 - l_2$	${}_1p_1$	${}_1q_1$
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
x	l_x	${}_1d_x = l_x - l_{x+1}$	${}_1p_x$	${}_1q_x$
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
..	..	${}_1d_0 = l_{w-1}$	${}_1p_{w-1} = 0$	${}_1q_{w-1} = 1$
w	$l_w = 0$	———	———	———

Esta tabla de mortalidad, contiene algunas funciones biométricas; l_x, d_x, ${}_np_x$, ${}_nq_x$, las cuales, describen el comportamiento de una población con radix l_0 a través del tiempo en términos de mortalidad y supervivencia. Además, esta misma tabla, puede construirse si se tienen las columnas: edad x, y probabilidad de fallecimiento ${}_nq_x$. Una tabla de mortalidad con estas dos columnas, es la representación más compacta que se puede dar de la mortalidad o supervivencia de una población de estudio.

■

A continuación, se muestra un ejemplo numérico de la tabla de mortalidad del ejemplo anterior. Es un extracto de la tabla de mortalidad de Finlandia del año 2002, con un periodo de observación de seis años de la mortalidad de la población. Una razón para exhibir el comportamiento de la mortalidad de Finlandia, es para mostrar como se ve una tabla de mortalidad. Pero, también para considerar los siguientes puntos:

- La mortalidad es un decremento presente en toda población de estudio.
- Las tablas de mortalidad pueden variar según regiones geográficas.
- Las suposiciones de una tabla de mortalidad dependen de la población de estudio.

Ejemplo 2.2

Información de la tabla:

Nombre:
Tabla de mortalidad de Finlandia 2000.

Tipo:
General u ordinaria.

Uso:
Mortalidad de la población.

Fuente:
Población.

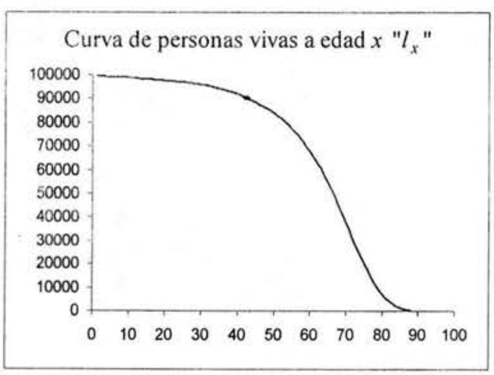
Volumen:
Todos los hombres en el periodo de observación.

Periodo de observación:
1984-2000.

Método de construcción:
Mortalidad observada.

Publicada en:
Anuario estadístico de Finlandia 2000.

Intervalo de edad:
Desde la "Edad 0" hasta "Edad 99".



Edad x	l_x	${}_nd_x$	${}_np_x$	${}_nq_x$
0	100000	424	0.99576	0.00424
1	99576	31	0.99969	0.00031
2	99545	17	0.99983	0.00017
3	99528	23	0.99977	0.00023
4	99505	13	0.99987	0.00013
5	99492	21	0.99979	0.00021
6	99471	9	0.99991	0.00009
7	99463	9	0.99991	0.00009
8	99454	3	0.99997	0.00003
9	99451	12	0.99988	0.00012
10	99439	12	0.99988	0.00012
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
60	85076	1080	0.98731	0.01269
61	83996	1031	0.98772	0.01228
62	82964	1201	0.98552	0.01448
63	81763	1422	0.98261	0.01739
64	80341	1326	0.9835	0.0165
65	79016	1516	0.98082	0.01918
66	77500	1683	0.97829	0.02171
67	75818	1669	0.97799	0.02201
68	74149	1892	0.97448	0.02552
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
95	2227	724	0.67487	0.32513
96	1503	489	0.67458	0.32542
97	1014	447	0.55866	0.44134
98	566	244	0.5689	0.4311
99	322	95	0.70528	0.29472

Las hipótesis anteriores, fueron utilizadas para determinar el cociente de la probabilidad de fallecimiento q_x. Es decir, con las hipótesis se construyó la columna q_x, con un radix fijo de l_0 = 100,000 individuos. Las funciones biométricas contenidas aquí, son las mismas que las del *Ejemplo 2.1*. ■

Tipos de Tablas de Mortalidad

Existen distintos tipos de tablas de mortalidad, según las hipótesis de construcción y su uso. Intuitivamente, se puede pensar en tablas de mortalidad separadas por; sexo (una para hombres y otra para mujeres), por raza (blanca, negra, etc.), por el marco de construcción (muestral o censal), por tipo de hipótesis (actuariales, financieras, demográficas, económicas, etcétera). Según su uso, las Tablas de Mortalidad se clasifican en: generales u ordinarias, selectas, últimas y agregadas.

Generales u Ordinarias:

Una tabla de mortalidad general u ordinaria, debe su nombre a su construcción, pues este tipo de tablas contiene los supuestos e información de la población de una forma muy general. Por ejemplo, si se busca describir la mortalidad masculina o femenina de un país, una tabla de mortalidad general, es aquella que concentra la población total de hombres y mujeres, considerando la reducción poblacional por la mortalidad observada cada año, como se hizo en los ejemplos *2.1 y 2.2.*

Otra forma de caracterizar las tablas de mortalidad generales, es con base a los supuestos de la selección ó elección de la población observada, ya que en este tipo de tablas, se debe reflejar el comportamiento ordinario de la mortalidad de la población de estudio, obtenida por estimaciones estadísticas; censo, muestreo, obtenidas por el decremento producido por la mortalidad.

Definición 2.2

Sea T_G, la tabla de mortalidad general si sólo sí, contiene las funciones biométricas (edad x, mortalidad ${}_nq_x$) basadas en la mortalidad observada.

def. 2.2

Selectas, Últimas y Agregadas.

Selectas:

El efecto de selección, proviene de una de las políticas de las compañías aseguradoras basada en el proceso de emisión de pólizas de seguros, las cuales establecen como requisito, la práctica de un examen médico al participante o asegurado, normalmente cuando se trata de un seguro de vida. En general, las compañías suelen practicar los exámenes, básicamente con el objeto de cuantificar y clasificar el riesgo que cubrirán al adoptar el compromiso de asegurar a un participante. Así, es como los participantes se clasifican en riesgos normales y subnormales, de suerte, que la mortalidad que experimentan los grupos clasificados como normales, sea distinta a las del grupo de participantes tomados al azar y no se les aplicó ningún examen. Dicho de otro modo, la selección permite calificar el riesgo que asumirá la compañía al asegurar un participante.

Definición 2.3

Se dice que T_S es una tabla *selecta* de mortalidad, si es tabla T_G y mide el efecto producido por la selección, a través de grupos de edades y años transcurridos a partir de la edad de entrada. Su construcción, no necesariamente es con la mortalidad observada.

Observación 2.1

Se utiliza el símbolo $[x]$, para denotar una persona de edad de entrada[4] x. Los corchetes [ ], son para hacer notar que se trata de un grupo selecto.

Ejemplo 2.3

Para ilustrar la observación anterior, escriba la notación del número de vivos y muertos para un grupo selecto a una edad de entrada x. Así:

---

[4] *Edad de entrada, es la edad a la cual el participante entró a la cobertura del seguro ofrecido por la compañía de seguros. O bien, la edad del participante cuando realizó el contrato de seguro.*

$l_{[x]}$: El número de personas vivas de edad de entrada $[x]$

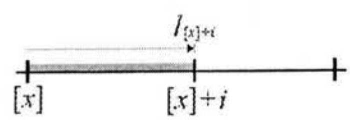
${}_{l}d_{[x]}$: El número de personas muertas entre la edad de entrada $[x]$ y la edad $[x]+1$

■

Reflexión. Con este tipo de notación, ¿cómo se puede distinguir entre una persona de edad de entrada $[x]$ y una persona de la misma edad, pero con i años transcurridos a partir de la misma edad de entrada? Para dar respuesta a esta pregunta, en los siguientes ejemplos, así como en los diagramas, se explica gráficamente este punto.

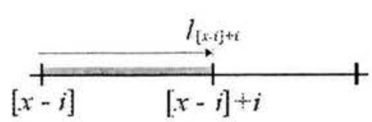
Ejemplo 2.4

$l_{[x]+i}$: El número de personas vivas a edad de entrada $[x]$, pero con i años transcurridos a partir de la edad de entrada.



$l_{[x+i]}$: El número de personas vivas a edad de entrada $[x+i]$.

$l_{[x-i]+i}$: El número de personas vivas a edad de entrada $[x-i]$, con i años transcurridos a partir de la edad de entrada $[x-i]$. Se tiene que tener especial cuidado con este tipo de notación, porque $[x-i]+i$ no es igual a x ó $[x]$.



Lo anterior, sugiere que una tabla selecta T_S debe contener tantos renglones como intervalos de edad se desee analizar y tantas columnas como periodo de selección. En el siguiente ejemplo, se presenta el fragmento de una tabla T_S donde cada entrada está la probabilidad de fallecimiento $q_{[x]}$. Observe, que la diagonal marcada con un cuadro punteado, contiene los individuos con igual edad pero distinta probabilidad de fallecimiento escrita con negritas $\boldsymbol{q}_{[x]+i}$. De hecho, existen tantas diagonales de individuos de igual edad como filas tiene la tabla. Además, lo que diferencia a un individuo de otro dentro de la diagonal, es la edad de entrada de los participantes y la probabilidad de fallecimiento.

Ejemplo 2.5

Una tabla selecta de mortalidad con periodo de selección igual a cinco se representa por:

Edad de Entrada $[x]$	Tiempo Transcurrido desde la edad de entrada $[x]$						Edad Alcanzada x +5
	0	1	2	3	4	5	
	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	$q_{[x]+4}$	$q_{[x]+5}$	
0	$q_{[0]}$	$q_{[0]+1}$	$q_{[0]+2}$	$q_{[0]+3}$	$\boldsymbol{q}_{[0]+4}$	$q_{[0]+5}$	*5*
1	$q_{[1]}$	$q_{[1]+1}$	$q_{[1]+2}$	$\boldsymbol{q}_{[1]+3}$	$q_{[1]+4}$	$q_{[1]+5}$	*6*
2	$q_{[2]}$	$q_{[2]+1}$	$\boldsymbol{q}_{[2]+2}$	$q_{[2]+3}$	$q_{[2]+4}$	$q_{[2]+5}$	*7*
3	$q_{[3]}$	$\boldsymbol{q}_{[3]+1}$	$q_{[3]+2}$	$q_{[3]+3}$	$q_{[3]+4}$	$q_{[3]+5}$	*8*
4	$\boldsymbol{q}_{[4]}$	$q_{[4]+1}$	$q_{[4]+2}$	$q_{[4]+3}$	$q_{[4]+4}$	$q_{[4]+5}$	*9*
...		...	...	...	...	...	...

■

Si se tiene una tabla selecta, entonces se cumple lo siguiente:

$$q_{[x]} \leq q_{[x-1]+1} \leq q_{[x-2]+2} \leq q_{[x-3]+3} \leq q_{[x-4]+4} \leq q_{[x-5]+5} \leq q_x \qquad \textit{ec. 2.1}$$

La desigualdad anterior, tiene como fundamento la selección de un individuo. Es decir, suponga que un fumador de 30 años con enfisema pulmonar es seleccionado, los resultados de los exámenes médicos efectuados al asegurado, determinaron que debe considerarse como un asegurado de edad de entrada [35]. Por la *ec. 2.1*, se tiene que; $q_{[35]} \leq q_{35}$. Lo cual tiene sentido, porque el riesgo o probabilidad de fallecimiento $q_{[35]}$ acaba de ser clasificada por los exámenes médicos para la persona de edad de entrada 30. Por otra parte, una persona de edad 35 con probabilidad de fallecimiento q_{35}, ha terminado el periodo de selección, por tanto, el riesgo asegurable de q_{35} es mayor que $q_{[35]}$.

La *ec. 2.1* es verdadera para toda tabla selecta de mortalidad. En el siguiente ejemplo numérico, se toma un fragmento de la tabla de mortalidad de la Sociedad de Actuarios de Estados Unidos para los años 1990-1995, con periodo de selección de 25 años.

Ejemplo 2.6

Edad de Entrada $[x]$	Tiempo Transcurrido desde la edad de entrada $[x]$													Edad Alcanzada $x+25$
	0	1	2	3	4	5	6	7	.	.	.	24	25	
	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	$q_{[x]+4}$	$q_{[x]+5}$	$q_{[x]+6}$	$q_{[x]+7}$	.	.	.	$q_{[x]+24}$	$q_{[x]+25}$	
20	0.00077	0.00072	0.00073	0.00072	0.00070	0.00072	**0.00074**	0.00079	.	.	.	0.00229	0.00242	45
21	0.00067	0.00064	0.00065	0.00066	0.00068	**0.00069**	0.00077	0.00083	.	.	.	0.00242	0.00258	46
22	0.00063	0.00060	0.00061	0.00061	**0.00065**	0.00073	0.00082	0.00083	.	.	.	0.00258	0.00275	47
23	0.00056	0.00053	0.00055	**0.00059**	0.00065	0.00075	0.00082	0.00077	.	.	.	0.00275	0.00289	48
24	0.00047	0.00049	**0.00050**	0.00059	0.00067	0.00081	**0.00072**	0.00073	.	.	.	0.00289	0.00306	49
25	0.00039	**0.00043**	0.00049	0.00060	0.00071	**0.00070**	0.00070	0.00086	.	.	.	0.00306	0.00332	50
26	**0.00036**	0.00042	0.00049	0.00063	0.00069	0.00069	0.00082	0.00085	.	.	.	0.00332	0.00366	51
27	0.00033	0.00041	0.00051	0.00060	0.00067	0.00073	0.00077	0.00085	.	.	.	0.00366	0.00408	52
28	0.00033	0.00045	0.00052	0.00062	0.00068	0.00075	0.00081	0.00088	.	.	.	0.00406	0.00459	53
29	0.00032	0.00045	0.00053	0.00062	0.00069	0.00077	0.00084	0.00091	.	.	.	0.00453	0.00518	54
30	0.00032	0.00044	0.00053	0.00062	0.00070	0.00079	0.00087	0.00094	.	.	.	0.00507	0.00587	55
...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	...
96	0.24839	0.27242	0.28031	0.28967	0.31284	0.33944	0.36998	0.40513	.	.	.	1.00000	0.00000	121
97	0.27242	0.28031	0.28967	0.31284	0.33944	0.36998	0.40513	0.44565	.	.	.	0.00000	0.00000	122
98	0.28031	0.28967	0.31284	0.33944	0.36998	0.40513	0.44565	0.49467	.	.	.	0.00000	0.00000	123
99	0.28967	0.31284	0.33944	0.36998	0.40513	0.44565	0.49467	0.55403	.	.	.	0.00000	0.00000	124

Información de la Tabla:

Nombre: 1990-1995 Estados Unidos Tabla Básica para hombres, Sociedad de Actuarios.

Tipo: Selecta.

Uso: Mortalidad de la Población Asegurada.

Fuente: Estudio de las emisiones estándar de Estados Unidos.

Volumen : Monto de la Población Asegurada.

Método de Construcción: Hubo dos graduaciones, la primera de 15 de selección para las edades 0-74, y la otra de 25 años de selección. La última con Whittaker-Henderson A. con a = 2, los 15 y 25 años fueron obtenidos con la resta de las muertes esperadas y la exposición entre la duración del periodo 16 y 25. La selección con periodo de 1-15 cada banda de edad con Whittaker-Henderson A. con varios valores de a: a = 0.5 debajo de los 15, 1.0 para 15-59, 2.0 para 60-64, 3.0 para 65-74. Para emisiones por arriba de los 72 utilizar las relaciones selecta/última y clasificando el periodo de selección hasta la edad 99 donde ninguna selección es supuesta. Además de hacer ajustes empíricos para incrementar el periodo de duración de q_x evitando la no selección o inconsistencias entre la información de fumadores y no fumadores. Fueron colocados en las edades intermedias por interpolación lineal y factores de selección tal cual se hizo en 1975-1980.

Publicada en: Reportes Eventuales TSA, actualmente en el sitio Web de la Sociedad de Actuarios EUA.

Periodo de selección: 25 años.

Intervalo de Edad: Desde la "Edad 0" hasta "Edad 99"

Si se observan por ejemplo, los individuos que tienen igual edad 26, cumplen con lo planteado en la *ec. 2.1*. De hecho, toda la tabla lo cumple para cualquier edad que se elija, desde la edad de entrada hasta el final del periodo de selección. En este caso, el periodo de selección termina 25 años después del momento de entrada a la cobertura.

■

En el siguiente ejemplo, se expresan algunas funciones biométricas, en caso de utilizar una tabla selecta de mortalidad.

Ejemplo 2.7

Encuentre una expresión actuarial para los siguientes enunciados:

i) La probabilidad que una persona de edad de entrada [23] sobreviva 2 años.

$$_{2}p_{[23]} = \frac{l_{[23]+2}}{l_{[23]}}$$

ii) La probabilidad que una persona de edad de entrada [20] fallezca en 5 años.

$$_{5}q_{[20]} = \frac{l_{[20]} - l_{[20]+5}}{l_{[20]}}$$

iii) El número de muertos entre la edad entrada [22] y [22]+2.

$$_{4}d_{[22]} = l_{[22]} - l_{[22]+2}$$

Estas expresiones, se pueden resolver si se conocen los valores de $l_{[x]}$, tarea sencilla, si se tienen las probabilidades de fallecimiento $q_{[x]}$. Procedimiento análogo al del *Ejemplo 2.6.*

■

Últimas:

Es de esperarse, que con el paso del tiempo el efecto de selección disminuya hasta volverse no significativo o nulo. Al terminar el periodo de selección, se tiene una tabla con un grupo de personas clasificadas únicamente por edades, así como se vio en la tabla general, pero con una población que proviene de una tabla selecta.

A las tablas de mortalidad donde el efecto selectivo ha terminado, se les conoce como tablas últimas.

Definición 2.4

La tabla T_U se llama tabla última de mortalidad, si es tabla T_S y el periodo de selección ha terminado.

Sea S es el número de años que dura la selección. En el *ejemplo 2.5 se tiene que* $S = 25$. Pero, ¿cómo se sabe cuando el periodo de selección ha terminado en una tabla de mortalidad?

Una forma práctica de saber si el periodo de selección ha terminado, es comparar las diagonales como la marcada en negritas en el *Ejemplo 2.6* para los individuos de edad 26.

Se dice que el efecto de selección ha terminado, si se cumple que:

$$q_{[x]+i} \approx q_{[x+1]+i-1} \qquad ec.\ 2.2$$

Para algún $i = 0,1,2,3,4,....n$

Lo cual quiere decir para efectos de la *ec. 2.1*, que el efecto de selección termina, cuando la probabilidad de fallecimiento de un individuo de edad de entrada $[x]+i$ es semejante a la de otro con edad de entrada $[x]+i-1$.

Utilizando el criterio de la *ec. 2.2* se puede decir para la tabla del *ejemplo 2.6*, que el efecto de selección ha terminado para los individuos de edad 30. Ya que, el periodo de selección es; $S= 6$, es decir.

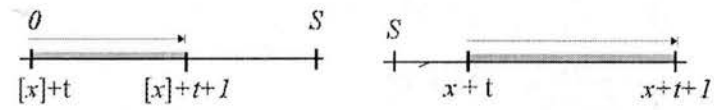
$$q_{[24]+6} \approx q_{[25]+7}$$
$$.00070 \approx .00072$$

En efecto, la ecuación anterior puede considerarse como una buena aproximación para decir que el efecto selectivo ha terminado. Donde, el efecto de selección termina a los 6 años a partir de la edad de entrada. No obstante, hay que considerar que lo anterior sólo fue realizado para ilustrar las ecuaciones vistas, porque para efectos de la tabla anterior, el efecto de selección es de 25 años.

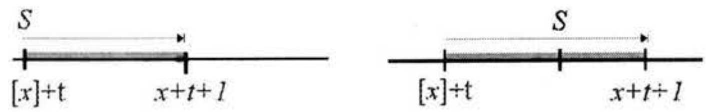
En general, el efecto de selección depende de la población de, sin embargo, para algunas compañías la duración del efecto es de entre tres y seis años aproximadamente.

Por otro lado, el lector puede apreciar que la construcción de las expresiones vistas en el capítulo 1 para vida individual, pueden ser extendidas de forma análoga para el caso de las tablas selectas o últimas, etc. A continuación, se exhiben unas cuantas con afán de mostrar la forma de hacerlo. Además, es importante tomar consideraciones especiales cuando el efecto de selección termina, porque el comportamiento de las funciones biométricas depende del momento en que termina el efecto selectivo.

Si S es el tiempo en años que dura el periodo de selección a partir de la edad de entrada $[x+t]$ para un tiempo t dado, entonces, las funciones biométricas que dependen del tiempo, se pueden construir de acuerdo al siguiente diagrama.



Si $S > t+1$ Si $S < t$



Si $S = t$ ó $t + 1 > S > t$

Así, para el número de muertos entre las edades de entrada $[x] + t$ y $[x] + t + 1$ se tiene:

$$d_{[x]+t} = \begin{cases} l_{[x]} - l_{[x]+t} & Si\ S \geq t+1 \\ l_{[x]} - l_{x+t} & Si\ S = t+1\ \ o\ \ S \in \left([x]+t, x+t+1\right) \\ l_x - l_{x+t} & Si\ S < t \end{cases}$$

La probabilidad de supervivencia de una persona de edad de entrada $[x] + t$ hasta la edad $[x] + t + 1$, se denota como:

$$p_{[x]+t} = \begin{cases} \dfrac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}} & Si\ s > t \\ \dfrac{l_{x+t}}{l_{[x]}} & Si\ s \leq t \end{cases}$$

La probabilidad de fallecimiento de una persona de edad de entrada entre las edades $[x] + t$ y $[x] + t + 1$. Es:

$$q_{[x]+t} = \begin{cases} \dfrac{l_{[x]} - l_{[x]+t}}{l_{[x]}} & Si\ S \geq t+1 \\ \dfrac{l_{[x]} - l_{x+t}}{l_{[x]}} & Si\ S = t+1\ \ ó\ \ S \in \left([x]+t, x+t+1\right) \\ \dfrac{l_x - l_{x+t}}{l_{[x]}} & Si\ S < t \end{cases}$$

Agregadas:

En las tablas selectas, aparecen los grupos de sobrevivientes clasificados por edad y por el tiempo que han estado asegurados, teniendo tantas columnas, como años de duración del efecto de selección. En algunos casos, se suele agregar una columna más al final de la tabla selecta, donde el efecto de selección ha terminado (tablas últimas), es decir, en una tabla agregada, aparecen *agregadas* las tablas selectas y últimas. A este tipo de tablas se les llama tablas agregadas.

Observe que, si la tabla de vida varía sólo con la edad alcanzada x, tiene la ventaja de ser de una sola entrada, mientras que una tabla selecta es de doble entrada. Esto es, para el cálculo de las tablas agregadas, es necesario considerar ambas tablas: selectas y últimas. Para ello, la probabilidad de muerte a una edad alcanzada x en una tabla agregada, es típicamente ponderada con el promedio de las probabilidades correspondientes de la tabla selecta y de la tabla última[(5)].

Definición 2.5

La tabla T_A se llama Tabla *Agregada* de Mortalidad si es una ponderación de T_S y T_U para cada edad alcanzada x.

[(5)] *Proposición de Hans U. Gerber 1997, (ver bibliografía).*

Ejercicios del Capítulo 2

Tablas Generales u Ordinarias.

Al suponer un modelo de Mortalidad (*Gompertz, Makeham,* etc.), se pueden determinar los parámetros del modelo tal como se hace a continuación:

Suponga que μ_x se comporta de acuerdo al modelo de *Gompertz* es decir, $\mu_x = BC^x$. Entonces, para estimar los parámetros B y c se necesita lo siguiente:

- Tener al menos tres grupos de edad empíricos con edades igualmente espaciadas, por ejemplo; l_{20}, l_{25}, l_{30} donde el espacio entre un grupo y otro es cinco años.
- Al disponer de dichos grupos, es fundamental que los mismos se encuentren dentro de los rangos del modelo de *Gompertz*, es decir, para no generar sesgos por usar edades fuera del intervalo de edad. Para este modelo en particular, el intervalo de las edades es (15-60) como se mencionó en el *capítulo 1*.

Sí μ_x se comporta según *Gompertz* $\Rightarrow l_x = kg^{c^x}$ (*ec. 1.21*). Así, se estiman los parámetros de μ_x de acuerdo a la siguiente tabla:

Edad x	l_x	$\ln l_x$	$\Delta \ln l_x$	$\Delta^2 \ln l_x$
x	$k_g{}^{c^x}$	$\ln k + c^x \ln g$	$c^x \ln g(1-c^h)$	$c^x \ln g(1-c^h)^2$
$x+h$	$k_g{}^{c^{x+h}}$	$\ln k + c^{x+h} \ln g$	$c^{x+h} \ln g(1-c^h)$	
$x+2h$	$k_g{}^{c^{x+2h}}$	$\ln k + c^{x+2h} \ln g$		

Donde Δ^i es el operador diferencia aplicado la *i*-ésima vez. Por ejemplo, si *i=2*, se tiene:

$$\Delta^2 \ln l_x = \Delta \ln l_x - \Delta \ln l_{x+h}$$

Con la tabla anterior, se pueden encontrar los parámetros *k, g, c,* si se considera:

$$\frac{\Delta \ln l_{x+h}}{\Delta \ln l_x} = \frac{c^{x+h} \ln g\left(1-c^n\right)}{c^x \ln g\left(1-c^n\right)} = c^h$$

Aplicando ln se tiene:

$$\Rightarrow h \ln c = \ln\left(\Delta \ln l_{x+h}\right) - \ln\left(\Delta \ln l_x\right)$$

$$\ln c = \frac{\ln\left(\Delta \ln l_{n+h}\right) - \ln\left(\Delta \ln l_x\right)}{h}$$

Se puede sustituir la expresión anterior en cualquiera de las expresiones de la tabla, en particular en la columna $\ln l_x$, así:

$$\ln l_x = \ln k + c^x \ln g$$

$$= \ln\left(\frac{l_0}{g}\right) + c^x \ln g = \ln\left(l_0\right) - \ln g + c^x \ln g$$

$$= \ln l_0 + \ln g\left(c^x - 1\right)$$

$$\Rightarrow \ln g = \frac{\ln l_x - \ln l_0}{c^x - 1}$$

Por tanto, se tienen al fin todos los parámetros del modelo de Gompertz; $l_x = kg^{c^x}$

1.- Utilizando la explicación anterior, determine de forma análoga la estimación de los parámetros del modelo de *Makeham* $\mu_x = A + BC^x$ donde $l_x = kS^x g^{C^x - 1}$ para $k = \frac{l_0}{g}$.

Haga la estimación, utilizando y completando la siguiente tabla:

Edad	l_x	$\ln l_x$	$\Delta \ln l_x$	$\Delta^2 \ln l_x$	$\Delta^3 \ln l_x$
x					
$x+h$					
$x+2h$					
$x+3h$					

Ayuda: Use la explicación anterior y recuerde que cada l_{x+ih} es empírica y conocida, donde $i = 0, 1, 2, 3$, para así encontrar los parámetros *k, S, g, C*.

2.- Una compañía aseguradora, pagó un estudio para determinar una tabla de mortalidad, con los grupos de edad conocidos: $l_{15}, l_{17}, l_{25}, l_{27}, l_{35}, l_{45}, l_{55}$. Con esta información, construya bajo al modelo de *Gompertz y Makeham* y los valores de l_x para los intervalos de edad definidos para cada modelo. Los valores de l_x son los siguientes:

Edad	l_x
15	99,872
17	99,769
25	99,172
27	98,958
35	97,708
45	94,701
55	88,686

Ayuda: Utilice el ejercicio 1, recuerde que para cada ley de mortalidad, es necesario tener grupos igualmente espaciados del número de personas a edad actual x, (l_x). Además, para el modelo de *Gompertz* se requieren tres grupos de edad para la estimación de los parámetros y cuatro grupos para el caso de *Makeham*.

3.- Al construir una tabla de mortalidad sea ésta bajo el modelo de; *Makeham* o *Gompertz*. Se define a E, como el error de la estimación tal que:

$$E = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\left| l_{x+ih} - \hat{l}_{x+ih} \right|}{n l_{x+ih}} \right) \qquad \text{para } i = 0,1,2,3$$

Donde $\hat{l}_{x+ih}$ es el número de vivos estimado y l_{x+ih} el número de vivos del grupo reales o empíricos. Observe que cuando se construye una tabla de mortalidad de acuerdo a una ley de mortalidad, las l_x estimadas siempre coinciden con los valores de las l_x empíricas o reales. Para la tabla del ejercicio 2, el error de $l_{15}, l_{17}, l_{25}, l_{27}, l_{35}, l_{45}, l_{55}$ empíricas es cero con respecto a las estimadas.

Por otro lado, observe que $n = 2$ sí se estima bajo Gorpertz y $n = 3$ bajo Makeham. Ya que, n es el número de grupos de edad igualmente espaciados.

- Encontrar $E_{Gompartz} = E_g$ y $E_{Makeham} = E_m$
- ¿Cómo es E_g con respecto E_m? ¿Será cierto que $E_g > E_m$?

4.- ¿Será cierto que $E_g \geq E_m$ para toda tabla general u ordinaria?

5.- Construir una tabla de mortalidad general u ordinaria para las leyes de mortalidad de *Gompertz* y *Makeham*, usando lo obtenido en el ejercicio 2. Teniendo como columnas:

$$\left(x,\ l_x,\ d_x,\ {}_np_x,\ {}_nq_x,\ L_x,\ T,\ m_x,\ e_x\right)$$

Tablas Selectas.

6.- Escribir en notación actuarial los siguientes enunciados.

i) El número de personas vivas de edad de entrada 31.

ii) El número de personas muertas entre la edad actual 27 con 2 años desde su entrada hasta la edad 31.

iii) El número de vivos con 5 años desde su entrada, si los individuos entraron a edad 22.

iv) La probabilidad de supervivencia de un año más a partir de la edad de entrada, para una persona de edad de entrada $x - j$.

v) La probabilidad de fallecimiento dentro de 6 años para una persona de edad x con 2 años a partir de la edad de entrada.

7.- Construya una tabla selecta de mortalidad que cumpla las siguientes características:

- l_x debe ser la misma que en el ejercicio 2 para toda x, (utilice la tabla construida por la ley de *Makeham*).
- Para encontrar $l_{[x]+i}$ donde x es la edad de entrada e i son los años a partir de la edad de entrada, considere la siguiente función:

$$l_{[x]+i} = l_x - \frac{1}{\left(x^3 - 100\right)^2}$$

Después de construir la tabla responda lo siguiente:

- ¿Cuándo termina el periodo la selección?
- ¿Por qué $l_{[x]} \leq l_{[x-1]+1} \leq l_{[x-2]+2} \leq \ldots \leq l_{[x-n]+n} \leq l_x$?. Argumente.
- Expresar la tabla en términos de $q_{[x]}$.

Tablas últimas.

8.- Con la tabla del ejercicio 7 construya una tabla de mortalidad última suponiendo que el periodo de selección termina cuando $\left|q_{[x]+i} - q_{[x+1]+i-1}\right| \leq 0.0001$.

9. Con el ejercicio anterior y el ejercicio 7, construya una tabla agregada.

CAPÍTULO 3

"Anualidades Contingentes"

Introducción

En los cursos de matemáticas financieras se estudiaron las anualidades ciertas, aquellas entendidas como una serie de pagos periódicos a través del tiempo. Dichas anualidades, permiten determinar el valor presente de una serie de pagos futuros para una tasa de interés i % conocida. Por ejemplo, si un individuo solicita un préstamo a un banco por un monto de k unidades monetarias (*u.m.*) a una tasa de interés i %, el cual debe ser pagado en un intervalo de tiempo con pagos periódicos. Así, una anualidad cierta para este caso, sirve para calcular el pago P que debe hacer el individuo de forma periódica a una tasa de interés del i % para pagar el préstamo de k *u.m.* La suposición que se hace implícitamente, es que el individuo realizará todos los pagos P, esto sucede si sólo si el individuo permanece con vida todo ese intervalo de tiempo. Por esa razón, se denominan anualidades ciertas.

En el presente capítulo se estudian otro tipo de anualidades, las cuales se conocen como anualidades contingentes. Estas anualidades, sin duda se parecen a las anualidades ciertas, sin embargo, contienen un factor adicional llamado factor actuarial que contempla la contingencia de vida. En el contexto del ejemplo anterior, la contingencia de vida es la no realización del pago. En otras palabras, que el individuo que solicitó el préstamo no lo pague. Ignorando el factor insolvencia, esto sucede si sólo si el individuo fallece.

Por lo tanto, las anualidades contingentes son una serie de pagos periódicos a través del tiempo que contienen un factor actuarial que mide la posibilidad de fallecimiento de un individuo. La primera clasificación de las anualidades contingentes es anualidades; vencidas y anticipadas. En resumen, en este capítulo se muestra al lector; la definición, uso y tipos de algunas anualidades contingentes.

Definición de Anualidad Contingente

Suponga que una compañía de seguros desea calcular el monto que debe pagar una persona de edad actual x, de suerte que el individuo tenga derecho a que la compañía le brinde un pago de k unidades monetarias (*u.m.*) diferido n años, siempre y cuando el participante llegue con vida a la edad $x+n$. En otras palabras, ¿cuál es el valor presente contingente de k *u.m.* para una persona de edad actual x? Observe la siguiente figura.

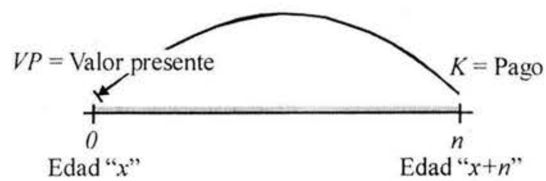


fig. 3.1

En un curso de matemáticas financieras, el lector acertadamente calcularía el valor presente del pago k desde el año n hasta el año cero de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} VP &= k\frac{1}{(1+i)^n} \\ &= kV^n \end{aligned} \qquad ec.\ 3.1$$

Donde:

VP = Valor Presente

i = Tasa de interés anual

Para la ecuación anterior sólo hace falta considerar el factor actuarial, es decir, la probabilidad que el individuo llegue con vida a la edad $x+n$, porque sólo entonces, la compañía pagará las k *u.m.* Así, la *ec. 3.1* puede expresarse como sigue.

$$VP = kV^n\,{}_np_x \qquad ec.\ 3.2$$

En la ecuación anterior, kV^n representa el valor presente del pago, ${}_np_x$ la probabilidad que la persona de edad actual x llegue con vida a la edad $x+n$, pero si la persona llega con vida, entonces la compañía le paga al participante k *u.m.* Entonces $kV^n{}_np_x$, también representa la probabilidad que la compañía de seguros pague la cantidad de k *u.m.* a una persona de edad $x+n$ dado que pago un valor presente VP cuando tenía x años.

Es decir, la compañía está ofreciendo un beneficio de *k u.m.* para una persona de edad actual x, pagadera si la persona llega con vida a la edad $x+n$. Así, a la *ec. 3.2* se le conoce como *dotal puro*[6].

Definición 3.1

Sea ${}_nE_x$ el dotal puro de una persona de edad x diferido n años escrito por

$$ {}_nE_x = V^n {}_nP_x \qquad \textit{def. 3.1} $$

La definición anterior es casi idéntica a la propuesta en la *ec. 3.2*, sólo que en la *def. 3.1* el pago que hará la compañía al momento n es de; $k = 1$ unidad monetaria. Por comodidad, se utiliza a lo largo del texto pagos unitarios. No obstante, es importante no olvidar que los pagos pueden ser de cualquier cantidad k. Rescribiendo la *def. 3.1* se tiene,

$$ \begin{aligned} {}_nE_x &= V^n \frac{l_{x+n}}{l_x} \\ &= \frac{V^x}{V^x} V^n \frac{l_{x+n}}{l_x} \\ &= \frac{V^{x+n}\, l_{x+n}}{V^x\, l_x} \end{aligned} $$

Sea [7] $D_x = V^x l_x \Rightarrow D_{x+n} = V^{x+n} l_{x+n}$, así:

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \qquad \textit{ec. 3.3} $$

[6] *El Dotal Puro, se refiere al valor presente de un pago contingente futuro. Es una protección que ofrece la compañía a participantes de edad actual x, pagadera si llegan con vida a un momento dado.*

[7] *A los cambios de variable realizados de esta forma, se les conoce como; valores conmutados. La intención de los estos, es facilitar los cálculos numéricos de algunas expresiones. Por ejemplo, se puede construir una tabla de mortalidad con una columna adicional para D_x, con la cual se calcula fácil y rápidamente un Dotal Puro. La definición de los valores conmutados se llevará a cabo en los siguientes capítulos y el lector debe tener muy presente su definición, para sí, considerarla en sus cálculos.*

La *ec. 3.3,* se utiliza para calcular y caracterizar un dotal puro. En el caso del dotal puro, el valor presente contingente es tomado como una *prima única* [8]. La cual, paga un participante para tener derecho a recibir un dotal puro por una cantidad de k unidades monetarias diferidas n años después del momento de pago de la prima única.

Ejemplo 3.1

Encuentre la *prima única* que debe pagar una persona de edad actual *60*, para un *dotal puro* de *1 u.m.* monetaria a *8* años, con una tasa de interés técnico del *6%* anual [9]. Utilice la tabla de mortalidad del *ejemplo 2.2* del capítulo anterior.

Sol.

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{V^{x+n}\, l_{x+n}}{V^x\, l_x} = \frac{\dfrac{1}{(1+i)^{x+n}}\, l_{x+n}}{\dfrac{1}{(1+i)^{x}}\, l_x} $$

$$ = \frac{\dfrac{1}{(1+.06)^{68}}\, l_{68}}{\dfrac{1}{(1+.06)^{60}}\, l_{60}} = \frac{(.01901)74149}{(.03031)85076} = \frac{1410.28362}{2579.02259} $$

$$ \therefore\ {}_nE_x = .5468 $$

Según el resultado anterior, una persona de 60 años de edad tiene que pagar una prima única de *.5468 u.m.*, para obtener el derecho de recibir una unidad monetaria a los 68 años, dada la tasa de interés técnico del 6% anual. También, la prima única (*P.U.*) de *.5468 u.m.* se puede ver como la cantidad que debe pagar el participante de edad 60, por cada unidad monetaria que desee recibir a la edad 68 años.

■

[8] *En el ámbito de los seguros se refiere al pago de un derecho, siendo éste relacionado con un beneficio de tipo monetario o de protección.*

[9] *La elección de la tasa de interés es una de las hipótesis actuariales más importantes, por ello es pertinente construir un Anexo especial dedicado a este tópico, Revisar Anexo 3.*

El dotal puro, es el pago de una cantidad monetaria diferida n años. Considérese ahora, la prima única ($P.U.$) que debe pagar una persona de edad x, para recibir una serie de pagos periódicos de 1 *u.m.* hasta su muerte. La siguiente figura, muestra el esquema de pagos en una línea de tiempo que recibirá el participante hasta su fallecimiento.

P.U.	1	1	1	1	...	...	...
0	1	2	3	4	...	n	...

fig 3.2

Como se observa en la *fig 3.2* el cálculo de la prima única (que es la cantidad que pagará una persona de edad x), consta del valor presente contingente de cada *u.m.* desde el año 1 hasta que la persona fallezca, entonces,

$$\begin{aligned} P.U. &= {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_tE_x + \ldots \\ &= \sum_{t=1}^{w-x-1} {}_tE_x \\ &= \sum_{t=1}^{w-x-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} \\ &= \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{w-x-1} D_{x+t} \end{aligned}$$

Sea $N_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} D_{x+t}$; donde w es la edad de extinción. Se toma el límite w-x-1 porque se sabe por definición de l_w que,

$$D_w = 0$$

Sustituyendo el valor de N_x en la ecuación anterior se obtiene

$$P.U. = \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad \textit{ec. 3.4}$$

Definición 3.2

Se representará con la letra "a", a toda anualidad entendida como una serie de pagos periódicos contingentes a través del tiempo.

Tipos de Anualidades

Definición 3.3

Sea a_x la prima única de una anualidad vencida[10] y vitalicia[11], de *1 u.m.* para una persona de edad x pagadera una vez por periodo, representada por

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad \textit{def. 3.3}$$

La definición anterior, es el resultado de la construcción de la anualidad vencida de la *ec. 3.4*. Además, el esquema de pagos es como se muestra en la *fig. 3.2*.

Ejemplo 3.2.

Una compañía de seguros, ofreció a sus clientes un producto que consiste en pagar una anualidad de 25,000 unidades monetarias de forma vitalicia y vencida. ¿Cuál es la prima única (*P.U.*) que debe pagar el participante para obtener ese derecho, si el participante tiene edad actual 65? Utilice la tabla del Anexo 1.

Sol.

El esquema de pagos de la anualidad ofrecida por la compañía, se representa en la siguiente figura.

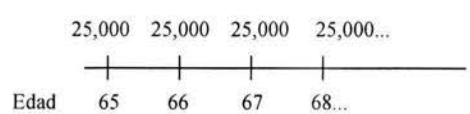


fig 3.3

Así

$$\begin{aligned} P.U. &= 25{,}000\, a_{65} \\ &= 25{,}000 \frac{N_{65+1}}{D_{65}} = 25{,}000 \frac{N_{66}}{D_{65}} \\ &= 25{,}000 \frac{33674.3}{3242} = 259{,}672\, u.m. \end{aligned}$$

[10] *Se dice vencido porque el primer pago se hace al final del primer año. Observe la fig 3.2 y 3.3.*

[11] *Vitalicia porque continúa pagando hasta el fallecimiento del participante de edad actual x.*

Los valores conmutados N_{66} y D_{65}, provienen de la tabla de mortalidad del Anexo 1. Por tanto, el participante de edad actual 65 años debe pagar $P.U.=$ 259,672 *u.m.* para obtener el derecho de recibir 25,000 *u.m* hasta su muerte. Observe en la *fig. 3.3.*

■

Una de las ventajas de utilizar valores conmutados se muestra en el ejemplo anterior, pues resulta simple calcular la *P.U.* si son conocidos los valores N_{x+1} y D_x. Entonces, es importante construir las columnas de los valores conmutados para

$$N_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} D_{x+t} \quad \text{donde} \quad D_{x+t} = V^{v+t} l_{x+t}$$

Por otro lado, con la *def. 3.3*, se pueden construir distintos tipos de anualidades. Como se muestra en la siguiente figura para el caso de una anualidad temporal.

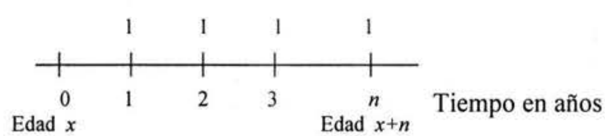


fig 3.4

De acuerdo a la figura anterior, se trata de una anualidad pagadera hasta el año n (temporal n años). Así, la *P.U.* está dada como sigue,

$$\begin{aligned} P.U. &= {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_nE_x \\ &= \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x \\ &= \frac{1}{D_x}\sum_{t=1}^{n} D_{x+t} \\ &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \end{aligned}$$

Definición 3.4

Sea $a_{x:\overline{n}|}$ la *P.U.* de una anualidad vencida temporal n años de *1 u.m.* para una persona de edad x, dada por

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \qquad \textit{def. 3.4}$$

Ejemplo 3.3

Una persona de edad 50, acude a una compañía de seguros porque está interesada en pagar una prima única que le otorgue el derecho de recibir 3,500 *u.m.* anuales durante 12 años. Si los pagos se realizan de forma vencida, ¿cuánto tiene que pagar de prima única el participante para recibir 3,500 anuales durante 12 años?

Sol.

La siguiente figura, muestra el esquema de pagos del enunciado anterior,

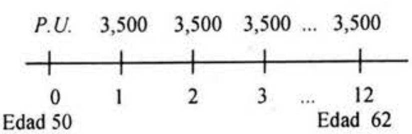


fig 3.5

Así:

$$\begin{aligned} P.U. &= 3{,}500\, a_{50:\overline{12}|} \\ &= 3{,}500 \frac{N_{51} - N_{63}}{D_{50}} \\ &= 3{,}500 \frac{111{,}775.2 - 44{,}090.9}{8{,}039.9} \end{aligned}$$

$$P.U. = 29{,}465 \ u.m.$$

Observación 3.1

Recuerde que la prima única, es una cantidad en unidades monetarias que se paga para poder obtener un derecho futuro. En este sentido, la compañía al ofrecer tal derecho, invierte la prima única en un fondo [12] para que la cantidad depositada (*P.U.*), obtenga rendimientos, de tal suerte, que se puedan pagar los derechos ofrecidos al participante. Los rendimientos obtenidos en dicho fondo, son de una tasa de interés técnico i %, con la cual, se calculan los valores conmutados. La tasa de interés técnico i %, es un supuesto actuarial para asegurar que los rendimientos del fondo serán de al menos esa tasa de interés.

[12] *Es entenderá por fondo, a todo mecanismo legalmente establecido que brinda rendimientos al depósito de una cantidad monetaria. Por ejemplo: fondos de inversión, fideicomisos, bancos, etc.*

Dado que la tasa de interés técnico i % es un parámetro en el cálculo de la prima única, entonces, los cambios en la tasa de interés seleccionada, repercuten de forma directa en la prima única, ¿cómo se pueden determinar dichos cambios con respecto a la *P.U.*? Es decir, si la tasa de interés aumenta o disminuye, ¿cómo se comporta la *P.U.*?

Para analizar las variaciones en la tasa de interés técnico i %, considere la prima única de una anualidad vencida escrita por a_x. Así,

$$\begin{aligned}
\frac{da_x}{di} &= \frac{d\left(\sum_{t=0}^{\infty} V^t{}_t p_x\right)}{di} \\
&= \frac{d}{dj}\left(\sum_{t=0}^{\infty}(1+i)^{-t}{}_t p_x\right) \\
&= -t\sum_{t=0}^{\infty}(1+i)^{-(t+1)}{}_t p_x \\
&= \sum_{t=0}^{\infty}(-t)(V^t)(V)_t p_x \\
&= -V\sum_{t=0}^{\infty}{}_t V^t{}_t p_x
\end{aligned}$$

Si la tasa de interés técnico i % aumenta, es equivalente a decir que $i \to \infty$. Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty}\left(\frac{da_x}{di}\right) &= \lim_{i\to\infty}\left(-V\sum_{t=0}^{\infty}V^t{}_t p_x\right) \\
&= -\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{(1+i)^t}\right)\sum_{t=0}^{\infty}V^t{}_t p_x \\
&= -\lim_{i\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{i}}{\left(\frac{1}{i}+i\right)^t}\right)\sum_{t=0}^{\infty}V^t{}_t p_x = 0
\end{aligned}$$

En conclusión, si la compañía aseguradora consigue invertir la *P.U.* en el fondo de inversión a la tasa de interés supuesta del i %, entonces, la prima única disminuye si la tasa de interés técnico i % aumenta. En otras palabras, el participante necesita pagar menos prima única para tener el derecho de recibir algún beneficio futuro. Esto sucede, porque la compañía invertirá la *P.U.* en un fondo de inversión, el cual, dará rendimientos más altos porque la tasa *i%* es alta. Por tanto, la cantidad que pague el asegurado por concepto de prima única es suficiente para que la compañía cumpla con sus obligaciones con el participante. Como ejercicio al lector, se deja el caso cuando *i %* decrece, ¿qué sucede?

Por otro lado, las anualidades definidas hasta ahora han sido básicamente dos; las vitalicias y las temporales. Siguiendo la construcción de las anualidades, considere un esquema de pagos con un diferimiento de *n* años, tal como se ilustra en la siguiente figura.

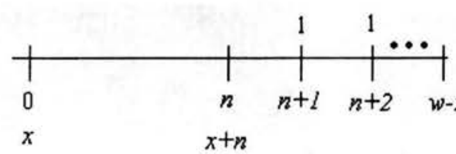


fig 3.6

Definición 3.5

Sea ${}_{n|}a_x$ la prima única de una anualidad vencida vitalicia diferida *n* años de *1 u.m.*, representada por,

$$ {}_{n|}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \qquad \textit{def. 3.5}$$

Observe que

$$\begin{aligned} {}_{n|}a_x &= \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+1} - N_{x+1} + N_{x+n+1}}{D_x} \\ &= a_x - a_{x:\overline{n|}} \end{aligned}$$

$$ {}_{n|}a_x = a_x - a_{x:\overline{n|}} \qquad \textit{ec. 3.5}$$

La ecuación anterior, significa que una anualidad diferida a *n* años para una persona de edad actual *x*, puede escribirse como la diferencia de una anualidad vitalicia para una persona de edad *x*, menos una anualidad temporal a *n* años para una persona de edad *x*. Esto hace sentido, si se recuerdan los esquemas de pagos de las anualidades vitalicias y temporales. Es decir, el esquema de pagos de la anualidad diferida se construye con una serie de pagos vitalicios para una persona de edad x (anualidad vitalicia), menos una serie de pagos temporales desde la edad x hasta la edad $x+n$ (anualidad temporal).

Además de la *def. 3.5* y la *ec.3.5*, una anualidad diferida a n años también puede construirse como; el dotal puro a n años para una persona de edad actual x de una anualidad vitalicia para una persona de edad $x+n$. Así,

$$\begin{aligned} P.U. &= {}_nE_x a_{x+n} \\ &= \frac{D_{x+n}}{D_x}\frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} \\ &= \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \end{aligned}$$

En efecto, la construcción anterior es una anualidad diferida escrita como,

$${}_{n|}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

Observe, que con la *def. 3.4* y *3.5*, se puede dar una definición para una anualidad más general. Es decir, que sea diferida n años y con temporalidad de m años, como se muestra en el periodo señalado con gris en la siguiente figura.

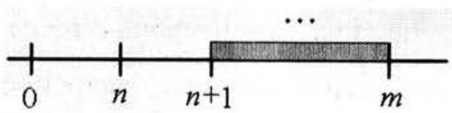


fig. 3.7

Definición 3. 6

Sea ${}_{n|m}a_x$ la prima única de una anualidad vencida de *1 u.m.*, diferida n años y temporal m años, es decir,

$${}_{n|m}a_x = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_{x+n}} \qquad \textit{def. 3.6}$$

Por otro lado, además de las anualidades vencidas, pueden construirse de manera análoga expresiones para anualidades conocidas como "anualidades anticipadas". En las cuales, el pago del; participante o compañía de seguros, se realiza al momento de la contratación.

Las anualidad anticipada a diferencia de las anualidad vencida, es, mientras que en las vencidas se tienen n pagos, en las anualidades anticipadas se tienen $n+1$, pagos dado que se realiza un pago al momento de la contratación. De esta forma, se construye la siguiente definición.

Definición 3.7

Sea $\ddot{a}_x$ la prima única de una anualidad vitalicia anticipada de *1 u.m.* para una persona de edad x, representada por,

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad \textit{def. 3.7}$$

El esquema de pagos para la definición es

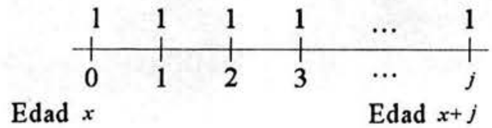


fig 3.8

Al igual que las anualidades vencidas, en las anualidades anticipadas se pueden definir las anualidades del tipo; temporal, diferida y temporal-diferida. De esta manera, se puede obtener lo siguiente de forma análoga a las anualidades anticipadas.

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$_{n|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

$$_{n|m}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}$$

Relaciones entre Anualidades

Como se ha mencionado antes, las anualidades anticipadas ($\ddot{a}_x$) tienen un pago más que las anualidades vencidas (a_x), porque su esquema de pagos es anticipado. Esta sutil diferencia, puede hacer pensar al lector que existen expresiones que relacionen las anualidades vencidas y anticipadas. Lo cual, en efecto sucede, considere las siguientes relaciones.

Se sabe que $\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$, rescribiendo en términos de valores conmutados se tiene

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= \frac{\sum_{t=0}^{w-x-1} D_{x+t}}{D_x} \\
&= \frac{D_x + \sum_{t=1}^{w+x-1} D_{x+t}}{D_x} \\
&= 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x}
\end{aligned}
$$

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x \qquad \textit{ec. 3.6}$$

La ecuación anterior, es la primera relación entre anualidades del tipo anticipadas y vencidas. La *ec. 3.6* significa que una anualidad anticipada vitalicia, puede expresarse como el valor presente de una anualidad vitalicia vencida más un pago, lo cual intuitivamente, se había afirmado antes. Análogamente a la *ec. 3.6*, se pueden obtener las siguientes relaciones entre las anualidades anticipadas y vencidas, es decir

i) $\ddot{a}_x = 1 + a_x$

ii) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$

iii) ${}_n\ddot{a}_x = {}_{n-1|}a_x$

iv) ${}_{n|m}\ddot{a}_x = {}_{n-1|\,m}a_x$

Anualidades pagaderas m veces por periodo

La prima única, es el pago que hace un participante para obtener un derecho, sea una serie de pagos periódicos anticipados o vencidos. Con respecto a la periodicidad de las expresiones definidas hasta ahora, se observa que el periodo de pago es anual. El siguiente paso, es responderse si es razonable pensar en anualidades con periodo mayor a 1, por ejemplo, anualidades; mensuales, quincenales, trimestrales, semanales, etcétera, y en general, de periodo tan grande que los pagos sean continuos. En efecto, se pueden definir anualidades pagaderas con frecuencia mayor a un año, es decir, pagaderas m veces por periodo. Este tipo de esquema de pagos tiene como ventaja, el permitir diseñar una cobertura más acorde a las necesidades del cliente.

Por ejemplo, ¿cuál es el valor presente de una anualidad de una persona de edad x para que pague o reciba *1 u.m.* de forma; quincenal, mensual, bimestral, trimestral, semestral, y en general m veces al año? El esquema de pagos de este tipo de anualidad, es como sigue.

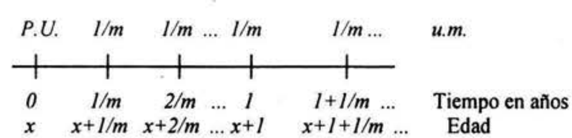


fig. 3.9

Con este esquema de pagos, considere la siguiente definición,

Definición 3.8

Sea $a_x^{(m)}$ la prima única de una anualidad vencida vitalicia de *1 u.m.* para una persona de edad x pagadera m veces por periodo, escrita,

$$
\begin{aligned}
a_x^{(m)} &= \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} {}_{\frac{t}{m}}E_x \\
&= \frac{1}{mD_x}\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+\frac{t}{m}}
\end{aligned}
$$

def. 3.8

En la definición anterior representada en la *fig. 3.9*, los pagos son de *1 u.m.* pagaderos m veces por periodo. Es decir, de $\frac{1}{m}$ *u.m.* a la edad $x+\frac{1}{m}$, $\frac{1}{m}$ *u.m.* a la edad $x+\frac{2}{m}$, así sucesivamente hasta el fallecimiento de la persona de edad actual x. Donde cada *m-ésimo*, se paga *1/m* de *u.m.*

En la *def. 3.8*, resulta evidente que el valor conmutado $D_{x+\frac{t}{m}}$ no está definido en las tablas de mortalidad. Esto es, porque el término $x+\frac{t}{m}$ es una edad fraccional. En este sentido, se puede representar la *def. 3.8* a través de una aproximación del valor conmutado $D_{x+\frac{t}{m}}$. Si se utiliza un método numérico conocido como la fórmula de Woolhouse(13), se puede lograr este fin de manera satisfactoria. No obstante, el método empleado aquí, no necesariamente es único, por lo tanto, se pueden dar otras aproximaciones para representar la *def. 3.8*, mismas que puede investigar el lector si desea profundizar en este tema. En este trabajo, se utiliza la fórmula de Woolhouse como una buena aproximación para anualidades pagaderas m veces por periodo. Usando la fórmula de Woolhouse en la *def. 3.8* se obtiene:

$$\frac{1}{mD_x}\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+\frac{t}{m}} = \frac{1}{D_x}\left[\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t} + \frac{m-1}{2m}D_x + \frac{m^2-1}{12m^2}\frac{dD_x}{dx} + \ldots\right] \qquad \text{ec. 3.7}$$

En la ecuación anterior, se desconoce $\frac{dD_x}{dx}$, entonces,

$$\begin{aligned}\frac{dD_x}{dx} &= \frac{dV^x l_x}{dx} \\ &= \frac{dV^x}{dx} l_x + V^x \frac{dl_x}{dx}\end{aligned}$$

Como $\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}$, entonces $\frac{dl_x}{dx} = -l_x \mu^x$

(13) *En el Anexo de Métodos Numéricos (Anexo 4), se exhibe más ampliamente la fórmula de Woolhouse.*

Por otra parte, $\frac{dV^x}{dx} = \frac{de^{x\ln V}}{dx} = e^{x\ln V} e^{\ln V} = V^x \ln V$. Además, se sabe que; $\ln V = -\delta$ (donde δ es la tasa instantánea de interés). Entonces,

$$\frac{dV^x}{dx} = -V^x \delta$$

Por lo anterior se tiene

$$\frac{dD_x}{dx} = \left(-V^x\delta\right)lx + V^x\left(-l_x\mu_x\right)$$

$$= -V^x l_x\left(\delta + \mu_x\right)$$

$$= -D_x\left(\mu_x - \delta\right) \qquad ec.\ 3.8$$

Sustituyendo la *ec. 3.8* en la *def. 3.8* la expresión $a_x^{(m)}$ se reduce a;

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\mu_x + \delta\right) - \ldots + \ldots \qquad ec.\ 3.9$$

Es muy usual en la fórmula de Woolhouse, considerar para el cálculo de las anualidades pagaderas m veces por periodo los primeros dos sumandos de la *ec 3.9*. Así,

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m} \qquad ec.\ 3.10$$

Ejemplo 3.4

¿Cuál es la expresión para la prima única de una anualidad vitalicia y vencida, pagadera mensualmente para una persona de edad x de *1 u.m.*?

Sol.

Observe que la periodicidad es $m = 12$, entonces.

$$a_x^{(12)} \approx a_x + \frac{12-1}{2(12)}$$

Así:

$$\therefore\ a_x^{(12)} \approx a_x + \frac{11}{24}$$

La ecuación anterior, representa una anualidad vitalicia y vencida, de *1 u.m.* pagadera de forma mensual. Recuerde que la anualidad $a_x^{(m)}$ tiene como esquema de pagos; $\frac{1}{m}$ *u.m.* en la edad $x+\frac{1}{m}$, $\frac{1}{m}$ a la edad $x+\frac{2}{m}$ y así sucesivamente, donde $a_x^{(m)}$ es una anualidad vitalicia pagadera m veces por año. Observe que, $ka_x^{(m)}$ es una anualidad vitalicia pagadera cada *m-ésimo* con $\frac{k}{m}$ *u.m.* a la edad $x+\frac{1}{m}$, $\frac{k}{m}$ a la edad $x+\frac{2}{m}$ y así sucesivamente, hasta el fallecimiento de la persona de edad x.

Con la aproximación de la *ec. 3.10*, se pueden encontrar expresiones para las anualidades; temporales y diferidas, ya sea anticipadas o vencidas.

Para la anualidad diferida pagadera m veces por periodo, se tiene

$$\begin{aligned} {}_{n|}a_x^{(m)} &= {}_nE_x a_x^{(m)} \\ &\approx {}_nE_x\left(a_x + \frac{m-1}{2m}\right) \\ &= {}_{n|}a_x + \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x \end{aligned} \qquad \textit{ec. 3.11}$$

Para la anualidad temporal

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n|}}^{(m)} &= a_x^{(m)} - {}_{n|}a_x^{(m)} \\ &\approx \left(a_x + \frac{m-1}{2m}\right) - \left({}_{n|}a_x + \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x\right) \\ &= a_{x:\overline{n|}} + \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x \end{aligned} \qquad \textit{ec 3.12}$$

Para definir las anualidades anticipadas pagaderas cada *m-ésimo* de año, se utilizan las relaciones entre las anualidades anticipadas ($\ddot{a}_x$) y vencidas (a_x) vistas anteriormente. De esta manera, se obtiene lo siguiente

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \qquad ec.\ 3.13$$

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} \approx {}_{n|}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x \qquad ec.\ 3.14$$

$$_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_nE_x\right) \qquad ec.\ 3.15$$

Anualidades Continuas

Supóngase ahora, que la periodicidad de pago es muy grande, es decir, $m \to \infty$. Por lo tanto, los pagos son realizados infinidad de veces por periodo y el esquema de pagos se vuelve continuo. Desde luego, el concepto de realizar pagos de forma continua es poco realista, dada la imposibilidad de realizar pagos cada instante. No obstante, teóricamente se puede definir las anualidades continuas así.

Definición 3.9

Sea $\bar{a}_x$ la prima única de una anualidad continua vitalicia de *1 u.m.* para una persona de edad *x*, escrita,

$$\bar{a}_x = \lim_{m\to\infty} a_x^{(m)} \qquad def.\ 3.9$$

Observe que

$$\bar{a}_x = \lim_{m\to\infty} a_x^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} {}_{t|m}E_x = \int_0^{\infty} {}_tE_x dt = \frac{1}{D_x}\int_0^{\infty} D_{x+t}dt$$

$$= \frac{1}{V^x l_x}\int_0^{\infty} V^{x+t} l_{x+t}dt = V^t \int_0^{\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x}dt = \int_0^{\infty} V^t{}_tp_x dt$$

Entonces,

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} V^t\,{}_t p_x dt \qquad ec\ 3.16$$

Es muy importante señalar que el cálculo de la *ec 3.16*, conlleva a la evaluación de la integral de (0, ∞), lo cual parece un tanto complejo. En este sentido, observe que una aproximación numérica de la expresión $\bar{a}_x$, resulta, si se evalúa el límite al infinito para $a_x^{(m)}$, de esta manera, escribiendo los tres primeros sumandos de la *ec. 3.9*, se tiene:

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta)$$

Tomando el límite para $m \to \infty$

$$\lim_{m\to\infty} a_x^{(m)} = \lim_{m\to\infty} a_x + \lim_{m\to\infty} \frac{m-1}{2m} - \lim_{m\to\infty} \frac{m^2-1}{12m^2}$$
$$= a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\mu_x + \delta)$$

Entonces, por la *def. 3.9*

$$\bar{a}_x \approx a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\mu_x + \delta) \qquad ec.\ 3.17$$

El procedimiento mostrado en la expresión anterior, es análogo para encontrar aproximaciones de anualidades continuas; diferidas y temporales. Otra observación importante, es con respecto a los valores conmutados continuos denotados por; $\bar{N}_x$, $\bar{D}_x$, etc. Los cuales, se construyen de forma análoga a los mostrados en las anualidades discretas, así, el lector puede hacer su construcción sin mayor dificultad.

Otros tipos de Anualidades

Los esquemas de pagos hasta ahora analizados, han sido de pagos constantes, es decir, de una cantidad fija de *k u.m.* cada periodo. No obstante, los esquemas de pagos de una anualidad (vitalicia, temporal o diferida), no necesariamente tienen por que ser fijos, por lo tanto, los pagos de una anualidad pueden ser variables. Por ejemplo, se pueden definir esquemas de pagos; crecientes, decrecientes y variables.

Suponga, que se tiene una serie de pagos vitalicios para una persona de edad x hasta su muerte. La persona recibirá: *1 u.m.* al año uno, *2 u.m.* al año dos, así sucesivamente hasta el año w donde se le darán w *u.m.* Observe la siguiente figura.

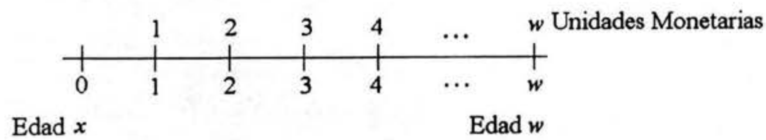


fig. 3.10

El esquema de pagos de la *fig. 3.10*, puede ser representado por

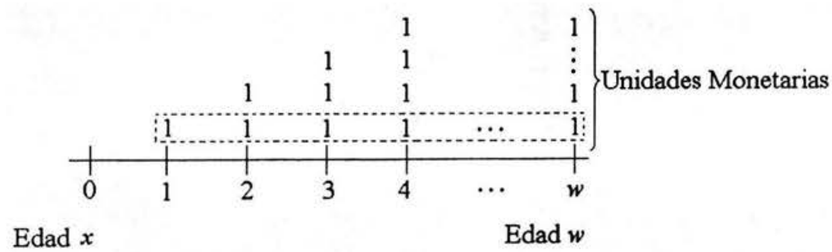


fig. 3.11

Así, la *P.U.* de la serie de pagos de la *fig. 3.10*, resulta simple calcularse si se observa que cada escalón formado en la *fig 3.11*, es una anualidad del tipo constante. Entonces,

$$P.U. = a_x + {}_{1|}a_x + {}_{2|}a_x + \dots + {}_{w-1|}a_x + \dots$$

Expresando la serie anterior como una suma, se obtiene,

$$P.U. = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t|}a_x$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_{x+t+1}}{D_x}$$

Considérese el siguiente valor conmutado

Sea $S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t} \Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t+1} = S_{x+1}$, así

$$P.U. = \frac{S_{x+1}}{D_x} \qquad \textit{ec. 3.18}$$

La ecuación anterior, es la prima única de una anualidad creciente vitalicia para una persona de edad actual x, con esquema de pagos de *1 u.m.* La razón de crecimiento es de *1 u.m.* cada año. Usando la *ec. 3.18* se puede dar la siguiente definición.

Definición 3.10

Sea $(Ia)_x$ una anualidad; creciente, vitalicia y vencida, para una persona de edad actual x de *1 u.m.* con incremento de *1 u.m.* por año, es decir,

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x} \qquad \textit{def. 3.10}$$

Análogo a la definición anterior, se pueden encontrar expresiones para las anualidades decrecientes. En la siguiente figura, los pagos periódicos son decrecientes y durante n años.

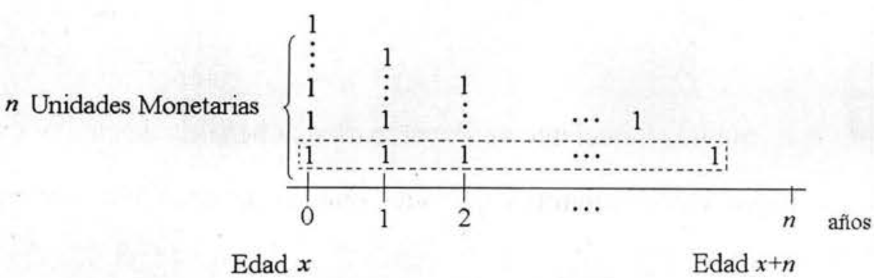


fig.3.12

La prima única del esquema de pagos de la *fig. 3.12*, se puede escribir como

$$\begin{aligned} P.U. &= a_{x:\overline{1}|} + a_{x:\overline{2}|} + \Lambda + a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n} a_{x:\overline{t}|} \\ &= \sum_{t=0}^{n} \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x} \\ &= \frac{\sum_{t=0}^{n} N_{x+1} - \sum_{t=0}^{n} N_{x+t+1}}{D_x} \\ &= \frac{nN_{x+1} - S_{x+1}}{D_x} \qquad \textit{ec. 3.19} \end{aligned}$$

Usando la *ec. 3.19*, se tiene la definición siguiente,

Definición 3.11

Sea $(D_a)_{x:\overline{n}|}$ la prima única de una anualidad decreciente vencida y temporal n años para una persona de edad x de *1 u.m.*, es decir,

$$(D_a)_{x:\overline{n}|} = \frac{nN_{x+1} - S_{x+1}}{D_x} \qquad def.\ 3.11$$

Observación 3.2

En las anualidades del tipo creciente y decreciente, la razón de crecimiento o decremento del pago en cada periodo, está explícita en la notación. Por ejemplo,

$(Ia)_x$ Es la *P.U.* de una anualidad creciente de *1 u.m.* para una persona de edad x. Lo cual significa, que los pagos incrementaron una unidad monetaria cada año. Así, para el año *i-ésimo* se tienen *i u.m.*

$k(Ia)_x$ Es la *P.U.* de una anualidad creciente de *k u.m.* para una persona de edad x Lo cual significa, que los pagos incrementaron k unidades monetarias cada año. Así, para el año *i-ésimo* se tienen $(k)(i)$ *u.m.*

Análogamente, sucede lo mismo para la interpretación de las anualidades decrecientes; $(D_a)_{x:\overline{n}|}$ y $k(D_a)_{x:\overline{n}|}$.

En general, para cualquier anualidad decreciente o creciente, la notación simboliza la razón de crecimiento o decremento de los pagos. Además, que las anualidades del tipo creciente o decreciente, suelen ser progresiones geométricas. No obstante, se pueden dar esquemas de pagos variables en función del tiempo.

Ejercicios del Capítulo 3

Definición de Anualidad Contingente

1.- Encontrar la *P.U.* de un dotal puro a cinco años *5,000 u.m.* para una persona de edad actual 25 años. Suponga que la tasa de interés técnico[14] es de *4.5%* anual y ${}_5p_{25} = .98$.

Sol.: 3932 u.m.

2.- Una compañía de seguros, desea conocer que cantidad monetaria debe depositar en un fondo de inversión cuyos rendimientos son del *10%* anual, de tal suerte que pueda ofrecer un beneficio de *18,000 u.m* al final del segundo año de entrada al plan de un participante de edad x y pagadera si sobrevive. Si cinco participantes entran al plan ofrecido por la compañía con edades; *40, 47, 52, 57* y *65*, responda lo siguiente;

i) ¿Cuál es la aportación acumulada que tienen que hacer los cinco participantes al momento de entrar al plan? Es decir, ¿qué cantidad de *P.U.* tiene la compañía para invertir en el fondo de inversión al *10%* anual para ofrecer un beneficio de *18,000 u.m*?

Suponga ${}_2p_{40} = .978$, ${}_2p_{47} = .961$, ${}_5p_{52} = .95$, ${}_2p_{57} = .945$, ${}_2p_{65} = .91$

Sol.: 70,571 u.m. deben ser invertidas en el fondo, para que la compañía pueda ofrecer un beneficio de 18,000 u.m.

ii) En promedio, ¿cuánto aportó cada participante al plan ofrecido por la compañía?

Sol.: En promedio, cada participante pagó 14,114 u.m. por concepto de prima única, para tener derecho a recibir 18,000 u.m. en caso de sobrevivir cinco años.

[14] *Se dice que i % es una tasa de interés técnico, si es utilizada en la valuación o cálculo de expresiones actuariales. Sean éstas; dotales, anualidades, seguros, etc. Además, la tasa de interés, es uno de los supuestos actuariales más importantes en el cálculo actuarial.*

3.- Dar una expresión para un dotal puro de k *u.m.* a n años, si durante los primeros n_1 *años* se tiene una tasa de interés técnico del $i_1\%$, de $i_2\%$ los siguientes n_2 años y de $i_3\%$ los restantes n_3 años. Donde n_1, n_2, n_3 son tales que, $n_1+ n_2+ n_3= n$. Represente en un diagrama o línea de tiempo, los cambios en las tasas de interés.

Tipos de Anualidades

4.- Dar una expresión para la *P.U.* de una serie de pagos periódicos de *6,500 u.m.* anuales y vitalicios para una persona de 32 años. Expresar en términos de valores conmutados.

5.- Demostrar que $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} = 1 - {}_nE_x$.

Anualidades Pagaderas m veces por Periodo

6.- Dar una expresión para la *P.U.* de una anualidad anticipada vitalicia de k *u.m.* mensuales. Recuerde que $a_x^{(12)}$ tiene un esquema de pagos de *1/12 u.m* mensuales. Expresar en anualidades simples para una persona de edad actual x.

7.- Dar una expresión para la *P.U.* de una serie de pagos periódicos de *1 u.m.* cada mes durante n años, y *2 u.m.* al final de año n durante m *años* más. De una expresión en términos de anualidades simples para una persona de edad actual x. Represente el esquema de pagos en una línea de tiempo.

8.- Exprese la *P.U.* en anualidades simples, para una serie de pagos anticipados que inician de forma diferida en el año n y temporales m años. La serie de pagos es pagadera de forma trimestral con k *u.m.* cada trimestre. Expresar la prima única, para una persona de edad *20* años en términos de valores conmutados. Represente los pagos en una línea de tiempo.

9.- De una expresión para la *P.U.* de una anualidad continua temporal, para una persona de edad x, de *1 u.m.* pagadera de durante m años.

Otros tipos de anualidades

10.- Encontrar la *P.U.* de una anualidad variable vencida, la cual es creciente durante los primeros n años y decreciente del año $n+1$ hasta m años después. La anualidad es pagadera de forma anual de *1 u.m.* para una persona de edad actual x.

CAPÍTULO 4

"Seguros de Vida"

Introducción

Uno de los principales productos financieros ofrecidos por las compañías de seguros, son los "seguros de vida". Los cuales, consisten en el pago de una compensación monetaria al fallecimiento del asegurado, tal compensación, es mejor conocida como suma asegurada.

Una operación de seguro de vida, se caracteriza por tener al menos dos partes; el contratante (que también puede ser el mismo asegurado) y el asegurador (compañía de seguros). El asegurado, paga el derecho (prima única) para que el beneficiario (el mismo, o una tercera persona), reciba una cantidad monetaria al fallecimiento del asegurado. La suma asegurada, es pagada por la compañía de seguros, con los recursos obtenidos por la prima única, la cual fue pagada por el contratante al momento de realizar el contrato de seguro.

El objetivo del presente capítulo, es presentar al lector el diseño de algunas coberturas sencillas, cuantificar la prima que paga el contratante o asegurado para obtener el derecho a una compensación o suma asegurada.

Definición de Seguro de Vida

La definición del seguro de vida así como los distintos tipos de seguros, están en función de los siguientes parámetros:

i) Características del participante.
ii) Periodo y tipo de cobertura.
iii) Tipo y momento de pago de la suma asegurada (S.A.).

Por ejemplo, una de las coberturas de seguros más simples, es aquella pagadera al final del año del fallecimiento de una persona de "edad x", con periodo de cobertura desde la contratación hasta el fallecimiento. Este tipo de cobertura es conocida como; seguro ordinario de vida o vitalicio, por tanto, si un participante de edad x paga una prima, ésta le da el derecho de tener una cobertura vitalicia hasta que fallezca. La suma asegurada (*S.A.*), es pagada al final del año de su muerte. Con lo anterior, el seguro ordinario de vida se define de la siguiente forma.

Definición 4.1

Sea A_x la prima única de un seguro ordinario de vida de *1 u.m* de *S.A*, pagadero al final del año del fallecimiento de una persona de edad x, escrita como

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\ {}_{t|}q_x \qquad \textit{def. 4.1}$$

Observación 4.1

La expresión anterior, se construye con el valor presente V^{t+1} de *1 u.m.* al tiempo $t+1$, desde la contratación hasta la muerte. De esta manera, el valor presente de cada *u.m.* multiplicado por la probabilidad de fallecimiento año con año de una persona de edad x dada por ${}_{t|}q_x$, representa la probabilidad que la compañía tenga que pagar la *S.A.* a una persona de edad x entre los años t y $t + 1$, desde la contratación ($t=0$) hasta la muerte ($t=\infty$) del asegurado. Por lo tanto, el seguro paga *1 u.m.* al final del año del fallecimiento de una persona de edad x.

Resulta de cierta dificultad, calcular una expresión como la presentada en la *def. 1.4*, porque no existe un valor en la tabla de mortalidad para encontrar el valor de A_x. Por lo tanto, el equivalente al seguro ordinario de vida en términos de valores conmutados, se da a continuación. (La definición de algunos valores conmutados para el caso de las anualidades, se hizo en el capítulo anterior).

Rescribiendo la *def. 4.1*, se tiene

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}{}_{t|}q_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} d_{x+t}$$
$$= \frac{1}{V^x l_x}\sum_{t=0}^{\infty} V^{x+t+1} d_{x+t}$$

Considérense los siguientes valores conmutados

$$C_x = V^{x+1} d_x$$
$$M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$$
$$D_x = V^{t+1} l_x$$

Con los valores conmutados definidos, la *def. 4.1* se puede expresar como

$$A_x = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$$

Finalmente,

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \qquad \textit{ec. 4.1}$$

Los valores conmutados propuestos para el cálculo de la *def. 4.1*, son de gran utilidad, porque con ellos se puede construir otra una nueva columna en la tabla de mortalidad denotada por M_x, para así, calcular cualquier tipo de prima única que dependa de un seguro ordinario de vida como se muestra en la *ec. 4.1*. El valor conmutado definido como D_x, es mismo utilizado en el cálculo de las anualidades del capítulo anterior.

Ejemplo 4.1

Encuentre la prima única (*P.U.*) para un seguro ordinario de vida con suma asegurada (*S.A.*) de *1,000,000* de unidades monetarias. Pagadero, al final del año del fallecimiento de una persona de 34 años de edad. Utilice la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Sol.

$$P.U. = 1{,}000{,}000 A_{34}$$
$$= 1{,}000{,}000 \frac{M_{34}}{D_{34}}$$
$$= 1{,}000{,}000 \frac{3{,}019.3}{18{,}637}$$
$$\therefore \; P.U. = 162{,}006 \; u.m.$$

Entonces, un participante de 34 años de edad, tiene que pagar *162,006 u.m.* al momento de la contratación, para que su beneficiario obtenga el derecho de recibir *1,000,000 u.m.* al final del año del fallecimiento del asegurado.

■

Ejemplo 4.2

Suponga que una compañía de seguros diseñó un producto, en el que ofrece al participante, una suma asegurada de *70,000 u.m.* pagaderos al beneficiario al final del año del fallecimiento del asegurado. Además, la cobertura del seguro es desde la contratación hasta el fallecimiento (ordinario de vida). Encuentre una expresión para la prima única.

Sol.

Suponiendo que el contratante tiene edad de entrada x, se tiene

$$P.U. = 70{,}000 A_x$$

■

En el ejemplo anterior, el asegurado paga la *P.U.* para que su beneficiario tenga el derecho de recibir *70,000 u.m.* al final del año del fallecimiento del asegurado. Por otro lado, la compañía de seguros recibe la *P.U.* al momento de la contratación del seguro por concepto de prima de riesgo, la cual invierte de forma apropiada, para que pueda pagar la *S.A.* al final del año del fallecimiento de la persona de edad x. Además, la tasa a la cual la compañía hace dicha inversión, es la tasa de interés técnico a la cual fueron construidos los valores conmutados de la tabla de mortalidad. La tabla de mortalidad del Anexo 1, fue construida al *5%* de interés técnico.

Tipos de Seguros

Los seguros de vida se clasifican según; el periodo de cobertura, la entrada en vigor del seguro, el momento de pago de la suma asegurada, etc. Así, una primera clasificación de los seguros de vida es en; discretos y continuos, donde ambos pueden ser temporales. Los seguros discretos, son pagaderos al final del año del fallecimiento del asegurado. Por su parte, los seguros continuos son pagaderos al momento del fallecimiento. Además, los seguros discretos y continuos pueden ser temporales, es decir, con periodo de cobertura temporal, por ejemplo; dotales, dotales puros y dotales mixtos.

Seguros Temporales

Un seguro temporal, es aquel que tiene un periodo de cobertura temporal. Si un participante ingresa a un plan con cobertura temporal, éste tiene un periodo de protección de acuerdo al tiempo que indique el contrato, por ejemplo; 1 año, 2 años, n años.

Antes de construir las definiciones de los seguros temporales, es de suponerse que existan diversos escenarios. Los cuales, dependen de la forma como la compañía paga la suma asegurada y del estado del asegurado, es decir, si el participante fallece o permanece con vida al final del periodo de cobertura temporal. Por tanto, suponga que la temporalidad de un seguro es n años y el participante tiene edad actual x. En una cobertura temporal, se pueden tener los siguientes escenarios:

i) El participante llega con vida a la edad $x + n$. Sobrevive hasta el final de la cobertura.
ii) El participante muere dentro del periodo de cobertura. Es decir, fallece entre las edades x y $x + n$.

Para cada uno de estos escenarios, se pueden diseñar seguros para que sea pagada la suma asegurada al beneficiario, consecuentemente, se necesitan construir definiciones que cubran estos casos. A continuación, se muestran las siguientes:

Definición 4.2

Sea $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ la prima única de un seguro de *1 u.m.* de *S.A.* temporal a *n* años (Seguro Dotal Puro) para una persona de edad *x*, pagadera únicamente si la persona de edad *x* llega con vida a la edad *x+n,* representada por

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = {}_nE_x \qquad \textit{def. 4.2}$$

Observación 4.2

En la definición anterior, ${}_nE_x$ es un dotal puro de *1 u.m.* pagadera al año *n*, si una persona de edad *x* sobrevive a la edad *x + n*, (ver la *def. 3.1* del capítulo anterior). En la notación de un seguro dotal puro, la presencia de un superíndice *"1"* arriba de la temporalidad del seguro a *n* años, significa que el seguro es pagadero únicamente si el tiempo termina antes que la persona de edad *x* fallezca. Por lo tanto, el seguro es pagadero únicamente si el participante de edad actual *x* llega con vida a la edad *x+n.*

Además, se sabe que la *def. 4.2* puede ser expresada en términos de valores conmutados según lo visto en la *ec. 3.3* del capítulo anterior, así

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \qquad \textit{ec. 4.2}$$

Definición 4.3

Sea $A^{1}_{x:\overline{n|}}$ la prima única de un seguro de *1 u.m.* de *S.A.* temporal *n* años (Seguro Dotal) para una persona de edad *x*, pagadera al final del año de fallecimiento del asegurado siempre y cuando fallezca entre las edades *x* y *x + n*, es decir

$$A^{1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{t+1}\,{}_{t|}q_x \qquad \textit{def. 4.3}$$

Observación 4.3

La definición anterior es análoga a la obtenida en la *def. 4.1*, a diferencia, que en la *def.4.3* se trata de una cobertura temporal a n años, determinada por los límites de la suma desde cero hasta n-*1*. Además, el superíndice *"1"* arriba de la x en la *def. 4.3*, indica que es pagadero si sólo si x fallece antes de llegados los n años, en otras palabras, que el asegurado fallezca en primer lugar antes que termine el periodo de cobertura de n años.

La *def. 4.3* puede ser expresada en términos de los valores conmutados (M_x, D_x), para ello, se utiliza un procedimiento análogo al de la *def. 4.1*, así

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \qquad ec.\ 4.3$$

Definición 4.4

Sea $A_{x:\overline{n|}}$ la prima única de un seguro de *1 u.m.* de *S.A.* temporal a n años (Seguro Dotal Mixto) para una persona de edad x, pagadera al final del año del fallecimiento del asegurado, si sólo si, fallece entre las edades x y $x + n$, o si el asegurado llega con vida a la edad $x+n$, entonces

$$A_{x:\overline{n|}} = A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \qquad def.\ 4.4$$

La ecuación anterior es una combinación de la *def. 4.2* y *4.3*, razón por la cual se llama seguro dotal mixto a la unión de los escenarios i) y ii) vistos atrás. Si se expresa la definición anterior en valores conmutados usando la *ec. 4.2 y 4.3*, se tiene

$$A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \qquad ec.4.4$$

Ejemplo 4.3

Una compañía de seguros, desea determinar la *P.U.* de un seguro temporal a 10 años, con *S.A.* de *50,000 u.m.* para una persona que actualmente tiene 29 años. Si la suma asegurada es pagadera si el asegurado fallece dentro del periodo de la cobertura o si llega con vida a los 29 años de edad. Utilice la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Sol.

Un seguro pagadero si el participante fallece, o si llega con vida al final del periodo de cobertura se conoce como, seguro dotal mixto según la *def. 4.4*, entonces

$$P.U. = 50{,}000 A_{29:\overline{10}|}$$

Por la *ec. 4.4*:

$$P.U. = 50{,}000 \frac{M_{29} - M_{39} + D_{39}}{D_{29}}$$

Buscando los valores conmutados (M_x, D_x) en la tabla de mortalidad del Anexo 1 se tiene,

$$P.U. = 50{,}000 \frac{3{,}187 - 2{,}830.5 + 14{,}430.6}{23{,}981.2}$$

$$P.U. = 30{,}831 \ \ u.m.$$

Entonces, si el asegurado de edad 29 paga la *P. U.,* tendrá el derecho de estar asegurado durante 10 años en caso de fallecimiento, además, si llega con vida al final del periodo de cobertura, recibirá la *S.A* de *50,000 u.m.* la cual es la misma suma asegurada que recibe el beneficiario si el asegurado de 29 años fallece dentro del periodo de cobertura.

■

Ejemplo 4.4

Determinar la *P. U.* de un seguro dotal de *120,000 u.m.* temporal a seis años para una persona de edad 60. Utilice la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Sol.

Por la *def. 4.3*, la prima única de un seguro dotal, está dada por

$$P.U. = 120{,}000 \, \mathrm{A}_{60:\overset{1}{\overline{6}|}}$$

Usando la *ec. 4.3* y la tabla de mortalidad del Anexo 1, se obtiene

$$P.U. = 120{,}000 \frac{M_{60} - M_{66}}{D_{60}}$$

$$= 120{,}000 \frac{1{,}786 - 1{,}422.4}{4{,}488.3}$$

Así,

$$P.U. = 9{,}721 \ u.m.$$

Por lo tanto, el participante debe pagar una prima única de *9,721 u.m.* para tener el derecho a una cobertura pagadera al beneficiario al final del año del fallecimiento del asegurado, si sólo si, fallece dentro del periodo de cobertura del seguro (seis años).

■

Seguros Continuos

Además de los seguros pagaderos al final del año del fallecimiento del asegurado (discretos), existen otro tipo de seguros, en los cuales, el pago de la suma asegurada se hace al momento de fallecimiento del asegurado. A este tipo de protecciones, se les conoce como seguros continuos o pagaderos al momento de la muerte del asegurado.

Definición 4.5

Sea $A_x^{(m)}$ la prima única de un seguro ordinario de vida de *1 u.m.* de *S. A.* pagadero al final del *m-ésimo* del fallecimiento de una persona de edad *x*, representada por

$$A_x^{(m)} = \frac{1}{l_x}\left(V^{\frac{1}{m}}\left(l_x - l_{x+1/m}\right) + V^{\frac{2}{m}}\left(l_{x+1/m} - l_{x+2/m}\right) + \ldots \right)$$

$$A_x^{(m)} = -\frac{1}{l_x}\sum_{t=1}^{\infty} V^{\frac{t}{m}} \Delta l_{x+\frac{t-1}{m}} \qquad \textit{def. 4.5}$$

Donde Δ es el operador diferencia, es decir, si $t=1$ entonces, $\Delta l_{x+\frac{t-1}{m}} = l_x - l_{x+1/m}$.

Definición 4.6

Sea $\overline{A_x}$ la *P.U.* de un seguro continuo de *1 u.m.* de *S.A.* pagadero al momento del fallecimiento de una persona de edad x, de esta manera

$$\overline{A_x} = \lim_{m \to \infty} A_x^{(m)} \qquad \textit{def. 4.6}$$

Utilizando la definición anterior y la *def. 4.5*, se puede construir una ecuación que permita calcular de forma más simple un seguro pagadero al momento del fallecimiento, es decir,

$$\overline{A_x} = \lim_{m \to \infty} A_x^{(m)} = -\frac{1}{l_x} \lim_{m \to \infty} \sum_{t=1}^{\infty} V^{\frac{t}{m}} \Delta l_{x+\frac{t-1}{m}} = -\frac{1}{l_x} \int_0^{\infty} V^t dl_{x+t} \qquad \textit{ec. 4.5}$$

Por otro lado, por la *ec. 1.15* del capítulo 1 se tiene

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx}$$

Entonces, para $x+t$

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{l_{x+t}} \frac{dl_{x+t}}{dt}$$

Despejando dl_{x+t} se tiene

$$dl_{x+t} = -l_{x+t} \mu_{x+t} dt \qquad \textit{ec. 4.6}$$

Así, sustituyendo la *ec. 4.6* en la *ec. 4.5*, se obtiene una ecuación alternativa para representar la *def. 4.6*,

$$\overline{A_x} = \frac{1}{l_x} \int_0^{\infty} V^t l_{x+t} \mu_{x+t} dt \qquad \textit{ec. 4.7}$$

Rescribiendo la *ec. 4.7*, finalmente se tiene otra representación para un seguro continuo pagadero al momento del fallecimiento del asegurado, es decir

$$\overline{A_x} = \int_0^{\infty} V^t \,{}_t p_x \mu_{x+t} dt \qquad ec.\ 4.8$$

Donde, el término ${}_t p_x \mu_{x+t}$ representa el fallecimiento instantáneo del asegurado, el cual, ha sobrevivido de la edad x hasta la edad $x+t$ "${}_t p_x$", falleciendo de forma instantánea al momento $x+t$ "${}_t \mu_x$ ". Finalmente, V^t es el valor presente de *1 u.m.* de *S.A.* pagadera al beneficiario en el momento del fallecimiento de x. Observe que los límites de integración, representan el periodo de cobertura del seguro. Como es un seguro ordinario de vida, van desde cero hasta infinito.

A partir de los seguros vitalicios pagaderos al momento del fallecimiento, se pueden definir las expresiones para los seguros dotales y dotales mixtos, como se hizo en el caso de los seguros discretos pagaderos al final del año del fallecimiento del asegurado, así

$$\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^{n} V^t \,{}_t p_x \mu_{x+t} dt \qquad ec.\ 4.9$$

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} + {}_n E_x \qquad ec.\ 4.10$$

Las *ec's. 4.9* y *4.10*, representan el seguro dotal y dotal mixto de un seguro pagadero al momento de la muerte de un participante de edad actual x. Ver *def. 4.3* y *4.4* del caso discreto. Por otro lado, los valores conmutados pueden ser definidos con *ec. 4.7*, es decir,

$$\overline{A_x} = \frac{1}{l_x} \int_0^{\infty} V^t l_{x+t} \mu_{x+t} dt$$

$$= \frac{1}{l_x V^x} \int_0^{\infty} V^{x+t} l_{x+t} \mu_{x+t} dt$$

Así, se sugieren las siguientes definiciones de valores conmutados:

$$\overline{C}_x = \int_0^{1} V^{x+t} l_{x+t} \mu_{x+t} dt = \int_0^{1} D_{x+t} \mu_{x+t} dt \qquad ec.\ 4.11$$

$$\overline{M}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{C}_{x+t} = \int_0^{\infty} D_{x+t} \mu_{x+t} dt \qquad ec.\ 4.12$$

Con las ecuaciones anteriores, se tienen definiciones alternativas para los seguros continuos en términos de valores conmutados.

Observación 4.4 [14]

Como los valores conmutados para seguros continuos pagaderos al momento del fallecimiento, están en función de una integral, en ocasiones se utilizan algunas aproximaciones para el valor de $\overline{C}_x$, como por ejemplo

$$\overline{C}_x \approx \frac{1}{\delta} C_x \qquad o \qquad \overline{C}_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} C_x \qquad o \qquad \overline{C}_x \approx \left(1+\frac{i}{2}\right) C_x$$

Donde i es la tasa de interés técnico.

Definición 4.7

Sea $\overline{A}_x$ la *P.U.* de un seguro continuo de *1 u.m.* de *S.A.* pagadero al momento del fallecimiento de una persona de edad x, por lo tanto

$$\overline{A}_x = \frac{\overline{M}_x}{D_x} \qquad \textit{def. 4.7}$$

Definición 4.8

Sea ${}_{n|}\overline{A}_x$ la *P.U.* de un seguro continuo *1 u.m.* de *S.A.* pagadero al momento del fallecimiento de una persona de edad x., si solo si, el asegurado fallece después de la edad $x + n$, es decir

$${}_{n|}\overline{A}_x = \frac{\overline{M}_{x+n}}{D_x} \qquad \textit{def. 4.8}$$

[14] *Chester Wallace Jordan Jr., "Life Contingencies", pág.72, ver bibiografía.*

Definición 4.9

Sea $\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{\,1}$ la *P.U.* de un seguro continuo (Dotal) de *1 u.m.* de *S.A.* pagadero al momento del fallecimiento de una persona de edad x, si sólo si, fallece entre las edades x y $x + n$, por lo tanto se escribe

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{\,1} = \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{D_x} \qquad \textit{def. 4.9}$$

Definición 4.10

Sea $\overline{A}_{x:\overline{n}|}$ la *P.U.* de un seguro continuo (Dotal Mixto) de *1 u.m.* de S.A. pagadero al momento del fallecimiento de una persona de edad x, si sólo si, fallece entre las edades x y $x + n$, o si sobrevive a la edad $x + n$, escrita

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \qquad \textit{def. 4.10}$$

Seguros Variables

Se le llama seguro variable, a aquella protección representada por una suma asegurada variable, sea; creciente o decreciente. Por ejemplo, suponga que un asegurado desea una protección que le brinde una suma asegurada a su beneficiario, al final del año de su fallecimiento del asegurado, de tal suerte, que la suma asegurada se incremente cada año a razón de k *u.m.* Con la idea anterior, considere la siguiente definición.

Definición 4.11

Sea $(IA)_x$ la prima única de un seguro variable creciente a razón de *1 u.m.* de *S.A.* por año, para una persona de edad x, pagadero al final del año del fallecimiento del asegurado, por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
(IA)_x &= 1Vq_x + 2V^2\,{}_{1|}q_x + 3V^3\,{}_{2|}q_x + 4V^4\,{}_{3|}q_x + \dots \\
&= \frac{1}{V^x l_x}\sum_{t=0}^{\infty}(t+1)V^{x+t+1}d_{x+t} \\
&= \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{\infty}(t+1)C_{x+t}
\end{aligned}
$$

Usando la *observación 4.1*, se obtiene un nuevo valor conmutado

$$R_x = \sum_{t=0}^{\infty} tM_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty}(t+1)C_{x+t}$$

Así:

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x} \qquad \textit{def. 4.11}$$

En contraparte, se pueden definir los seguros con suma asegurada decreciente, el lector observará que la demanda por este tipo de productos no es muy profunda. No obstante, aunque aparentemente no resulta interesante en la práctica el estudio de éstos, el hecho de que se pueda dar una definición matemática de los seguros crecientes y decrecientes, implica, que quizá posteriormente, se puedan reducir expresiones más complejas y dejarlas en términos de seguros variables.

Definición 4.12

Sea $(DA)^{1}_{x:\overline{n}|}$ la prima única de un seguro variable decreciente a razón de *1 u.m.* de *S.A.* por año para una persona de edad *x*, temporal *n* años, pagadero al final del año del fallecimiento del asegurado, se tiene

$$
\begin{aligned}
(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} &= nVq_x + (n-1)V^2\,{}_{1|}q_x + (n-2)V^3 q_x + \dots + V^n\,{}_{n|}q_x \\
&= \frac{1}{V^x l_x}\sum_{t=0}^{n-1}(n-t)V^{x+t+1}d_{x+t} \\
&= \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{\infty}(n-t)C_{x+t}
\end{aligned}
$$

Así:

$$(DA)^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = \frac{nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x} \qquad \textit{def. 4.12}$$

Ejemplo 4.5

Encuentre la prima única de un seguro ordinario de vida creciente de *1,000 u.m.*, pagadero al final del año del asegurado, para una persona de 40 años de edad. Utilice los valores conmutados de la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Sol.

Por ser una cobertura del tipo creciente de *1,000 u.m.* para una persona de 40 años de edad, por la *def. 4.11*, se tiene que:

$$\begin{aligned} P.U. &= 1{,}000(IA)_{40} \\ &= 1{,}000\frac{R_{40}}{D_{40}} \\ &= 1{,}000\frac{75{,}884.6}{13{,}703} \\ &= 5{,}538 \ \ u.m. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el asegurado tiene que pagar *5,538 u.m.* de prima única, para obtener el derecho de recibir un seguro creciente de *1,000 u.m.* Por ejemplo, si el asegurado fallece en el año t posterior a la fecha de contratación, el beneficiario recibirá $(1{,}000)(t)$ *u.m.* al final del año del fallecimiento del asegurado.

■

Ejemplo 4.6

Determine la prima única de un seguro decreciente temporal a once años, de *50,000 u.m.* para una persona de 55 años. Utilice los valores conmutados de la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Sol.

Una cobertura decreciente para una persona de 55 años de edad y temporal once años, según la *def. 4.12* puede escribirse como

$$
\begin{aligned}
P.U. &= 50{,}000(DA)^{\;1}_{55:\overline{11}|} \\
&= 50{,}000\,\frac{11M_{55}-(R_{56}-R_{67})}{D_{55}} \\
&= 50{,}000\,\frac{11(2{,}071)-(36{,}729.9-17{,}769.9)}{6{,}059.6} \\
&= 31{,}528\ u.m.
\end{aligned}
$$

La prima única que se debe pagar es de *31,528 u.m*, para que el beneficiario reciba la suma asegurada al final del año del fallecimiento del asegurado de 55 años. Por ejemplo, si el asegurado fallece en el año seis, el beneficiario recibirá *(6)(50,000) u.m.* al final del año de la muerte del asegurado.

■

Las expresiones de los seguros variables, en particular, los seguros crecientes y decrecientes, se pueden construir de forma análoga para los seguros pagaderos al momento del fallecimiento. En otras palabras, el lector puede rescribir las *def. 4.11* y *4.12* en términos de las definiciones de los seguros continuos.

Ejercicios del Capítulo 4

Definición de Seguro de Vida

1.- Encontrar la *P.U.* de un seguro ordinario de vida para una persona de edad 43, con suma asegurada de 620,000 *u.m.* pagadera al final del año de su fallecimiento.

2.- Demostrar que $A_x = V - da_x$ donde $d = iV$ (d es la tasa de descuento).

3.- ¿Será cierto que $A_x < A_y$ *para toda edad* $x < y$?

Argumente su respuesta. Demuestre la desigualdad en caso de ser afirmativa, o de un contraejemplo en caso contrario.

Tipos de Seguros

4.- Suponga que un participante de edad x desea contratar un seguro temporal a n años, pero está indeciso por determinar de cual tipo será. El participante tiene tres opciones; un seguro dotal, dotal mixto y dotal puro. ¿Cuál elegirá, si se sabe que tiene preferencia por comprar el menos costoso?

5.- Encontrar la *P.U.* de un seguro temporal a 20 años para una persona de edad actual 30, cuya suma asegurada es pagadera si el asegurado fallece antes de los 50 años, o si éste llega con vida a la edad 50 (seguro dotal mixto).

6.- Probar las siguientes afirmaciones

i) $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_x$

ii) $A^{\,1}_{x:\overline{n}|} = 1 - {}_nE_x - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

Seguros Contiːuos (Pagaderos al momento del fallecimiento)

7.- Demostrar:

i) $\overline{A}_x \approx \frac{1}{\delta} A_x \quad sí \ \overline{C}_x \approx \frac{1}{\delta} C_x$

ii) $\frac{d\overline{A}_x}{dx} = \mu_x(\overline{A}_x - 1) + \delta \overline{A}_x$

Seguros Variables

8.- Probar:

i) $R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) C_{x+t}$

ii) $(DA)^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \frac{nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x}$

iii) $M_x = VN_x - N_{x+1}$

iv) $(IA)_x = \ddot{a}_x - d(I\ddot{a})_x$

Ayuda: para probar ii) utilice i), y para probar iv) utilice iii).

9.- Suponga que una póliza de seguros de un seguro ordinario de vida, es emitida al inicio de este año. Si una persona de edad 20 contrata esta cobertura, pero, con un esquema de beneficios como el de la siguiente tabla, ¿cuál es la prima única para este plan? Exprese en términos de valores conmutados y calcule valor numérico. Utilice los valores conmutados de la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Edad	Beneficio al fallecimiento
20	10,000
21	20,000
22	30,000
23	40,000
24	50,000
25	60,000
26-40	500,000
40-50	1,000,000
50 y Más	750,000

Ayuda: La prima única de una cobertura variable, puede expresarse como la suma de coberturas constantes. Por ejemplo, la prima única de un seguro temporal a cinco años, donde la suma asegurada es de *10 u.m.* los primeros cinco años y *25 u.m.* los siguientes cinco, puede expresarse como; la suma de un seguro temporal a diez años con suma asegurada de *10 u.m*, más otro diferido cinco años y temporal a cinco años de *15 u.m.*

10.- Determinar la prima única para un seguro ordinario de vida creciente de *1,000,000 u.m.* para una persona de 65 años de edad, pagadero al beneficiario al final del año del fallecimiento del asegurado. Utilice la tabla del Anexo 1.

11.- Construya las definiciones de los seguros variables continuos, utilizando como referencia las *def. 4.11* y *4.12*.

CAPÍTULO 5 "Primas Netas"

Introducción

En los capítulos anteriores, se llama prima única ($P.U.$) al pago de un derecho al momento de la contratación, para obtener un beneficio futuro. En otras palabras, el pago de la prima puede ser visto como el costo de compra de un derecho, el cual puede ser: una anualidad diferida o seguro de vida. No obstante, en los planes de las compañías de seguros, es más común que la prima se pague de forma periódica, en lugar de realizar un pago único. Las primar que se pagan de forma periódica, pueden tener periodicidad; quincenal, mensual, semestral, anual, etcétera.

La idea que sigue al párrafo anterior, es diseñar el periodo de pago de primas y la periodicidad de pago. De forma que, se cambie la prima única por una prima periódica y con cierto periodo de pago. Generalmente, el periodo de pago de primas es menor igual al periodo de cobertura.

Así, en este capítulo, se explica la notación referente a este tipo de primas y se construyen primas periódicas para un periodo de pago definido. Además, se exhiben distintos tipos de primas periódicas y como calcularlas.

Definición de Prima

La prima neta, se entiende como la cantidad en $u.m.$ que se paga periódicamente y el periodo de pago de primas es anticipado. Es decir, el primer pago de prima es al momento de la contratación. Por lo tanto, la definición está dada por.

Definición 5.1

Sea P la prima neta, escrita

$$P\ddot{a} = A$$

$$P = \frac{A}{\ddot{a}} \qquad \textit{def. 5.1}$$

En la definición anterior, se hizo la distribución de la $P.U.$ en una serie de pagos anuales a través de una anualidad anticipada ($\ddot{a}$). Es decir, se está igualando el valor presente de la obligación de la compañía (A), con el valor presente de las primas anuales ($P\ddot{a}$). Por lo tanto, P representa la prima anticipada y pagadera de forma anual.

Observación 5.1

La notación que se utiliza para las primas netas, es

$${}_{\text{Periodo de Pago de Primas }(P.P.P.)}P^{\text{Periodicidad y Método de Cálculo}}_{\text{Tipo de Beneficio}}$$

Por ejemplo;

P_x Es la prima neta anual, para un seguro ordinario de vida pagadero al final del año del fallecimiento de una persona de edad x

$P_{({}_{n|}\ddot{a}_x)}$ Es la prima neta anual, para una anualidad vitalicia diferida n años y una para una persona de edad x, pagadera mientras esté con vida.

${}_tP_x^{(m)}$ Es la prima neta pagadera m veces, con un periodo de pago de t años, de un seguro ordinario de vida pagadero al final del año del fallecimiento de x.

Ejemplo 5.1

Sea P la prima anual que pagará una persona de edad actual x, para que ésta, tenga derecho a una protección de un seguro ordinario de vida con *S.A.* de *1 u.m.* ¿Cuál es el periodo de pago de primas (*P.P.P.*)? ¿Cuál es la prima P que pagará el asegurado de forma anual? ¿Cuál es el periodo de cobertura?

Sol.

Con la *def. 5.1* se tiene que la prima anual P esta dada por

$$P_x \ddot{a}_x = A_x$$

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} \qquad \textit{ec. 5.1}$$

Donde P_x en la ecuación anterior, representa la prima anual ($\ddot{a}_x$) que paga el asegurado, para que el beneficiario tenga derecho a recibir *1 u.m.* al final del año de la muerte del asegurado (A_x). Pero, ¿por qué el periodo de pago de primas es anual? La respuesta es clara, si se observa la forma en la que se encontró el valor presente de todas las primas, ésta fue, con una anualidad vitalicia anticipada ($\ddot{a}_x$), por lo tanto, el asegurado tiene que realizar pagos de primas de forma anual. Por otro lado, el periodo de cobertura y el periodo de pago de primas es vitalicio, ya que se trata de seguro ordinario de vida para la cobertura, y de una anualidad vitalicia para el periodo de pago de primas.

■

Observación 5.2

Generalmente, en los planes que ofrecen las compañías aseguradoras, el periodo de pago de primas debe (*P.P.P.*) ser fácil de pagar para el asegurado, y, antes o dentro del periodo de cobertura ofrecido por la compañía. Esto es, si se desea contratar un plan con una cobertura de n años, entonces, el *P.P.P.* es de a lo más de n años a partir del momento de la contratación. Si el *P.P.P.* fuera mayor a n años, ¿qué sentido tiene para el asegurado pagar una cobertura que ha terminado? En síntesis, en el diseño de las coberturas, el *P.P.P.* debe ser: anterior o dentro del periodo de cobertura.

Por la observación anterior, es claro que el tipo de prima está en función de la cobertura y del *P.P.P.* Por ejemplo; si la cobertura es temporal el *P.P.P.* es temporal, si la cobertura es diferida y temporal el *P.P.P.* es temporal y comienza antes que la cobertura. Así, el *P.P.P.* siempre es: anterior o dentro del periodo de cobertura.

Antes de dar cualquier intento para clasificar las primas o ejemplificar un grupo de éstas, resulta importante aclarar, que existe mucha flexibilidad en la forma como se expresan y se definen las primas netas, ya que, dependen del tipo de cobertura y del *P.P.P.*

El objetivo, es que el lector pueda; identificar, diseñar y calcular primas, de acuerdo a un criterio apropiado. Para ello, las primas se clasifican básicamente en dos tipos; las pagaderas de forma anual y las pagaderas más de una vez al año (pagaderas m veces por periodo).

Primas pagaderas de forma Anual

Definición 5.2

Sea ${}_nP_{x:\overline{n|}}$ la prima neta anual pagadera durante n años, para un seguro dotal mixto de *1 u.m*, pagadero al final del año del fallecimiento de una persona de edad x, escrita

$$
\begin{aligned}
{}_nP_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= A_{x:\overline{n|}} \\
{}_nP_{x:\overline{n|}} &= \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \qquad \textit{def. 5.2}
\end{aligned}
$$

Rescribiendo definición anterior en términos de valores conmutados,

$$
{}_nP_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \qquad \textit{ec. 5.2}
$$

Definición 5.3

Sea ${}_nP^{\ 1}_{x:\overline{n|}}$ la prima neta anual pagadera durante n años, para un dotal de *1 u.m*, pagadero al final del año del fallecimiento de una persona de edad x, representada por

$$
{}_nP^{\ 1}_{x:\overline{n|}} = \frac{A^{\ 1}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \qquad \textit{def. 5.3}
$$

En valores conmutados

$$ {}_{n}P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \qquad ec.\ 5.3 $$

Definición 5.4

Sea ${}_{n}P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ la prima neta anual pagadera durante n años, para un seguro dotal puro de *1 u.m*, pagadero al final del año del fallecimiento de una persona de edad x, es decir

$$ {}_{n}P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad def.\ 5.4 $$

En valores conmutados

$$ {}_{n}P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \qquad ec.\ 5.4 $$

Por las *def's. 5.2*, *5.3* y *5.4*, la *ec. 5.2* se expresa como,

$$ {}_{n}P_{x:\overline{n}|} = {}_{n}P^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_{n}P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} $$

Para las definiciones anteriores, el periodo de pago de primas es igual al periodo de cobertura. Si se considera, un periodo de pago de primas igual a t años y un periodo de cobertura igual a n, tal que $t < n$, se tiene en particular, una definición alternativa para la *ec. 5.2*.

Definición 5.5

Sea ${}_{t}P_{x:\overline{n}|}$ la prima neta anual pagadera durante t años, para un seguro dotal mixto de *1 u.m*, pagadero al final del año del fallecimiento de una persona de edad x, escrita por

$$ {}_{t}P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{t}|} = A_{x:\overline{n}|} $$

$$ {}_{t}P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \qquad def.\ 5.5 $$

En valores conmutados

$$ {}_{t}P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} \qquad ec.\ 5.5 $$

La diferencia entre la *def. 5.5* y *5.2* es el periodo de pago de primas, el cual, se denota en la temporalidad de la anualidad, pues ésta, expresa la duración del *P.P.P.* sea de n ó t años. Por tanto, si se utiliza un criterio análogo, se pueden escribir todas las definiciones con *P.P.P.* igual al periodo de coberturas, como primas con *P.P.P.* distinto al periodo de cobertura, como se hizo en la *def. 5.5*. En el siguiente ejemplo, se muestra el cálculo de una prima de un seguro dotal mixto con *P.P.P.* distinto al periodo de cobertura.

Ejemplo 5.2

Suponga que una persona de edad 45, contrata un seguro dotal mixto temporal a 15 años de *1 u.m.* de *S.A.*, pagadero a su beneficiario al final del año del fallecimiento del asegurado. La compañía que hizo dicho compromiso, decide que el asegurado debe pagar primas anuales durante los primeros ocho años para tener derecho a esa cobertura. ¿Cuál es la prima que debe pagar el asegurado? Utilice la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Sol.

El *P.P.P.* definido por la compañía es de ocho años. Además, el periodo de cobertura tiene una duración de quince años, para un seguro dotal mixto de *1 u.m.* Por lo tanto, con la *ec. 5.5* y la tabla de mortalidad del Anexo 1, se tiene

$$
\begin{aligned}
{}_8P_{45:\overline{15|}}\,\ddot{a}_{45:\overline{8|}} &= A_{45:\overline{15|}} \\
{}_8P_{45:\overline{15|}} &= \frac{A_{45:\overline{15|}}}{\ddot{a}_{45:\overline{8|}}} \\
&= \frac{M_{45}-M_{60}+D_{60}}{N_{45}-N_{53}} \\
&= \frac{2{,}548.8-1{,}760.6+4{,}488.3}{167{,}280.9-96{,}976.7} \\
&= 0.07505\ u.m.
\end{aligned}
$$

La prima anual que debe pagar el asegurado es de *.07 u.m* durante los primeros ocho años, para cada unidad monetaria que desee de suma asegurada. La *S.A.* se le pagará al final del año de su fallecimiento, donde el periodo de cobertura es de quince años.

■

A parte de las primas netas definidas hasta ahora, se pueden definir otras con coberturas diferentes. Por ejemplo, una cobertura con un beneficio diferido de n años, que le de al asegurado *1 u.m.* de forma vitalicia, mientras el asegurado continué con vida. Las primas de esta cobertura, deben ser pagadas por el participante durante los primeros n años, de lo contrario, el *P.P.P.* estaría dentro del periodo de beneficios ofrecidos por la compañía.

Definición 5.6

Sea ${}_tP\left({}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|}\right)$ la prima neta anual pagadera durante t años, para una persona de edad actual x, que recibirá *1 u.m.* anual y diferida n años durante m años, es decir

$${}_tP\left({}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|}\right)\ddot{a}_{x:\overline{t}|} = {}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$${}_tP\left({}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|}\right) = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \qquad donde \;\; t \le n \qquad def.\ 5.6$$

La definición anterior, es un claro ejemplo, para mostrar que las primas netas son muy flexibles en su diseño. Ya que el periodo de *P.P.P.* puede ser de cualquier tipo, al igual que el tipo de cobertura, dando una protección muy diferente al asegurado si se varían estos dos parámetros. En el siguiente ejemplo, contiene algunos de estos aspectos.

Ejemplo 5.3

Suponga que una compañía de seguros, ofrece una cobertura con ciertos beneficios de acuerdo a los siguientes puntos del contrato de seguro:

i) El asegurado, es un participante con edad actual x.

ii) El participante, tiene obligación de pagar durante t años y de forma anual, una prima P para obtener los derechos aquí explícitos. La forma de pago de la prima anual es; *2P u.m* durante los primeros t_1 años, y finalmente, *P u.m* durante los siguientes t_2 años.

iii) Si se cumple ii), el participante tiene derecho a recibir una protección de un seguro dotal de k_1 *u.m.* Cuya protección, inicia n años posteriores al momento de la contratación y termina, $n+m$ años después (diferido n y temporal m).

iv) Si se cumple ii) y no se cumple iii), es decir, si el participante sobrevive a la edad $x+m$, recibirá una anualidad anticipada vitalicia a la edad de $x+m$ de k_2 *u.m.* anuales, hasta la muerte del participante.

v) Para los puntos anteriores suponga que

$$t_1 + t_2 = t$$
$$t \leq n < m$$
$$k_1, k_1 > 0$$

¿Cuál es la prima P que debe pagar el asegurado? Deben cumplirse los supuestos i) al v) de la póliza.

Sol.

Para resolver este problema, considere los puntos i) al v) como obligaciones del asegurado y de la compañía. Si se representa cada punto como el valor presente de ambas partes, se tiene construye la siguiente ecuación. Donde; el valor presente de las obligaciones del asegurado está del lado izquierdo de la igualdad, y, las obligaciones de la compañía del lado derecho. Entonces,

$$2P\ddot{a}_{x:\overline{t_1}|} + P\,{}_{t_1|}\ddot{a}_{x:\overline{t_2}|} = k_1\,{}_{n|}A^{\;1}_{x:\overline{m}|} + k_2\,{}_{m|}\ddot{a}_x$$

$$P\left(2\ddot{a}_{x:\overline{t_1}|} + {}_{t_1|}\ddot{a}_{x:\overline{t_2}|}\right) = k_1\,{}_{n|}A^{\;1}_{x:\overline{m}|} + k_2\,{}_{m|}\ddot{a}_x$$

$$P = \frac{k_1\,{}_{n|}A^{\;1}_{x:\overline{m}|} + k_2\,{}_{m|}\ddot{a}_x}{2\ddot{a}_{x:\overline{t_1}|} + {}_{t_1|}\ddot{a}_{x:\overline{t_2}|}} \qquad \textit{ec. 5.6}$$

Finalmente, P es la prima anual, para un esquema de pagos donde el asegurado tiene que pagar $2P$ *u.m.* durante los primeros t_1 años y P *u.m.* los siguientes t_2 años para tener derecho a los beneficios de los puntos iii) y iv).

■

Primas pagaderas m veces por periodo (Fraccionadas)

Las primas netas anuales, pueden ser llamadas también primas pagaderas una vez por periodo, donde el periodo es igual a un año. Entonces, aquellas primas pagaderas más de una vez por periodo, se llamarán pagaderas *m* veces por periodo o primas fraccionadas. Por ejemplo, si se desea tener primas mensuales, la prima neta es pagadera doce veces por periodo. Lo mismo sucede para las primas; quincenales, trimestrales, cuatrimestrales, semestrales o de cualquier periodicidad.

Reflexión;

Con primas fraccionadas en *m-ésimos*, el participante paga *m* cuotas durante un año. En este sentido, ¿qué sucede si el asegurado fallece en algún momento de ese año, de forma que no cubra las cuotas restantes? En otras palabras, si el asegurado pago *k* primas, ¿qué pasa si no paga las *m-k* primas restantes?

Los métodos para calcular las primas de acuerdo a la reflexión anterior, dependen de la decisión que se tome con respecto a las *m-k* primas no pagadas. Luego entonces, se definen a continuación tres tipos de cálculo de primas; reales, plazos y prorrata (prorrateables).

Definición 5.7

Sea $P^{(m)}$ la prima <u>real</u> pagadera *m* veces por periodo. En la cual, el pago de primas termina al momento del fallecimiento del asegurado, sin que el asegurador tenga derecho a descontar de la *S.A*, las primas no pagadas del año en curso.

def. 5.7

Definición 5.8

Sea $P^{[m]}$ la prima <u>*a plazos*</u> pagadera *m* veces por periodo. En la cual, si el asegurado fallece en el transcurso del año y pagó *k* primas, las (*m-k*) serán descontadas de la suma asegurada. Es decir, la compañía se cobra las primas no cubiertas por el asegurado en el año de su fallecimiento.

def. 5.8

Definición 5.9

Sea $P^{\{m\}}$ la prima a <u>*prorrata*</u> pagadera *m* veces por periodo. En la cual, si el asegurado fallece en el transcurso del año, las *(m-k)* primas no pagadas, o no gastadas, son reembolsadas al asegurado en el momento del pago de la *S.A.*

def. 5.9

Primas Reales

Definición 5.10

Sea $P_x^{(m)}$ la prima real, pagadera *m* veces por periodo de forma vitalicia para un seguro ordinario de vida de *1 u.m.* de *S.A,* para una persona de edad *x,* expresada como

$$P_x^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} = A_x \qquad \textit{def. 5.10}$$

Despejando $P_x^{(m)}$ y utilizando la aproximación de la *ec. 3.11*

$$P_x^{(m)} \approx \frac{A_x}{\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}} \qquad \textit{ec. 5.7}$$

La *ec. 5.7* pude ser expresada en función de la prima del *ejemplo 5.1.* Es decir, si se divide ecuación anterior entre $\ddot{a}_x$, se obtiene

$$P_x^{(m)} \approx \frac{P_x}{1 - \frac{m-1}{2m}\frac{1}{\ddot{a}_x}} \qquad \textit{ec. 5.8}$$

Definición 5.11

Sea ${}_tP^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ la prima real, pagadera *m* veces por periodo durante *t* años, de un seguro dotal mixto temporal a *n* años de *1 u.m.* de *S.A*, para una persona de edad *x*, es decir,

$$ {}_tP^{(m)}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{t}|} = A_{x:\overline{n}|} \qquad \textit{def. 5.11} $$

Despejando ${}_tP^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ y usando la aproximación de la *ec. 3.13*;

$$ {}_tP^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|} - \frac{m-1}{2m}(1-{}_nE_x)} \qquad \textit{ec. 5.9} $$

Nuevamente, la ecuación anterior puede ser expresada en función de una prima temporal a *t* años, para una cobertura de un seguro dotal mixto temporal *n* años. Dividiendo entre $\ddot{a}_{x:\overline{t}|}$ se obtiene

$$ {}_tP^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx \frac{{}_tP_{x:\overline{n}|}}{1 - \frac{m-1}{2m}\frac{(1-{}_nE_x)}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}} \qquad \textit{ec. 5.10} $$

La razón de expresar las primar reales en función de primas simples como se hizo en la *ec's. 5.8* y *5.10*, es para mostrar que las primas reales fraccionadas (pagaderas *m* veces por periodo), dependen del cálculo de las primas anuales. Consecuentemente, el expresar de esta forma la *def. 5.11*, ayuda a determinar el cálculo de las primas fraccionadas. Lo anterior significa, que si los valores de las primas netas anuales son conocidos, entonces se pueden determinar los valores para las primas netas pagaderas *m* veces por periodo. Construyéndose, una columna en la tabla de mortalidad para el valor de la prima neta P_x.

Por otra parte, debe ser claro al lector, el método propuesto para el cálculo de las primas reales, de manera que pueda llegar a expresiones con; otro tipo de coberturas y distintos *P.P.P.* como es el caso de las *def's. 5.10* y *5.11.*

Primas a plazos

Por la *def 5.8* $P^{[m]}$ es la prima a plazos. Suponiendo que el asegurado ha cubierto k primas, implica que las $(m\text{-}k)$ primas no pagadas serán descontadas de la suma asegurada, pero, ¿cómo determinar cuántas son esas $(m\text{-}k)$ primas no pagadas?

Observación 5.3

Para encontrar respuesta a la reflexión anterior, suponga que el asegurado ha pagado de forma anticipada la primer prima. Por lo tanto, el participante no ha pagado $(m\text{-}1)$ primas, de esta forma, además, suponga que T es una variable aleatoria(15), que determina si una persona de edad "x" fallece o no, entre el inicio y el final del año. La función de densidad $f_T(t)$ de la variable aleatoria T, está dada por

$$f_T(t)=\begin{cases}1 & si \;\; t\in(0,1)\\ 0 & otro\ caso\end{cases}$$

Pero la función anterior, sólo explica si la persona de edad x falleció o no, entre el inicio y el final del año para algún año, ¿cuál será la esperanza(16) de esta variable aleatoria?

$$\begin{aligned}E[T]&=\int_0^1 tf_T(t)dt\\ &=\int_0^1 tdt\\ &=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(15) *Para un espacio de probabilidad* (Ω, A, P) *se dice que la función* $X:\Omega\to\Re$ *es una variable aleatoria real si el conjunto* A_r *definido por* $A_r=\{w : X(w)\le r\}$ *pertenece a A para todo número real r.*

(16) *Sea T una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad* f_x. *Se dice que T tiene esperanza finita, si la integral* $\int_{-\infty}^{\infty}|t|f_T(t)dt$ *es finita y en ese caso, se define la esperanza de T denotada por E[T] como* $E[T]=\int_{-\infty}^{\infty}tf_T(t)dt$.

Por lo tanto, a el participante se le descontarán $(m\text{-}1)E[T]$ primas no pagadas de la suma asegurada. Si la suma asegurada es de k unidades monetarias, el descuento por este concepto está expresado por:

$$Descuento = \left(k - \left(\frac{m-1}{2}\right)\frac{1}{m}P^{[m]}\right) \qquad ec\ 5.11$$

Utilizando la *ec. 5.11* se construye la siguiente definición

Definición 5.12

Sea $P_x^{[m]}$ la prima a plazos, pagadera m veces por periodo de un seguro ordinario de vida de *1 u.m.* de *S.A*, para una persona de edad x, escrita

$$P_x^{[m]}\ddot{a}_x^{(m)} = A_x\left(1 - \frac{m-1}{2m}P_x^{[m]}\right) \qquad def.\ 5.12$$

Con la aproximación de la *ec. 3.11* se tiene

$$P_x^{[m]}\left(\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\right) \approx A_x\left(1 - \frac{m-1}{2m}P_x^{[m]}\right)$$

Despejando $P_x^{[m]}$ de la ecuación anterior

$$P_x^{[m]} \approx \frac{A_x}{\ddot{a}_x + (A_x - 1)\dfrac{m-1}{2m}} \qquad ec\ 5.12$$

De forma análoga, se pueden definir primas a plazos, con distinta cobertura o periodo de pago de primas. En particular, se hace la siguiente para ilustrar que sólo es necesario considerar el descuento de la *ec. 5.11* para llegar a una definición satisfactoria de una prima a plazos.

Definición 5.13

Sea ${}_tP^{[m]}_{x:\overline{n}|}$ la prima a plazos, pagadera *m* veces por periodo durante *t* años, de un seguro dotal mixto temporal *n* años, con *1 u.m* de *S.A*, para una persona de edad *x,* dada por

$$ {}_tP^{[m]}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{t}|} = A_{x:\overline{n}|}\left(1-\frac{m-1}{2m}{}_tP^{[m]}_{x:\overline{n}|}\right) \qquad def.\ 5.13 $$

Despejando ${}_tP^{[m]}_{x:\overline{n}|}$ y usando la aproximación de la *ec. 3.13* se obtiene,

$$ {}_tP^{[m]}_{x:\overline{n}|} \approx \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|} + \left(A_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x - 1\right)\dfrac{m-1}{2m}} \qquad ec\ 5.12 $$

El lector puede observar, que el cálculo de la prima a plazos difiere al resto de las primas, por el descuento de la *ec 5.11* aplicable a la suma asegurada, el cual, se considera al momento de calcular la prima.

Primas a prorrata

Si se recuerda, la prima fraccionada es pagadera *m* veces por periodo, obsérvese que se realiza un pago de prima forma anticipada al comenzar cada *m-ésimo*. Además, cada pago de prima *P* cubre la contingencia de muerte de ese *m-ésimo*, es decir, si se tienen doce meses, al pagar la prima mensual, el asegurado está pagando su cobertura por dicho mes.

Suponga que el participante fallece en algún momento dentro de ese *m-ésimo*. En las primas a prorrata por la *def. 5.9*, se devuelve al asegurado conjuntamente con la suma asegurada la prima no gastada, como una compensación. La prima no gastada, es la proporción de prima no pagada antes de terminado el *m-ésimo* y posterior a la muerte del asegurado. Si el asegurado fallece en algún momento del *m-ésimo* del año, ¿cuál es la proporción de prima no gastada?

De forma análoga al procedimiento propuesto en las primas a plazos de la *observación 5.3*, suponga que la variable aleatoria T que indica si una persona de edad "x" fallece o no, entre el inicio y el final del *m-ésimo*. Así,

$$E[T] = \frac{1}{2}$$

Si la suma asegurada es de k unidades monetarias, la compensación que se le da al asegurado por concepto de prima no gastada, si el participante fallece en algún momento del *m-ésimo* del año, está escrita como

$$Compensación = \left(k + \frac{1}{2}\frac{P^{\{m\}}}{m} \right) \qquad ec.\ 5.13$$

Con la ecuación anterior y la *def. 5.9*, se puede construir la prima a prorrata (con compensación sobre suma asegurada).

Definición 5.14

Sea $P_x^{\{m\}}$ la prima a prorrata, pagadera m veces por periodo de un seguro ordinario de vida de *1 u.m.* de *S.A*, para una persona de edad x, representada por

$$P_x^{\{m\}}\ddot{a}_x^{(m)} = A_x\left(1 + \frac{1}{2m}P_x^{\{m\}}\right) \qquad def.\ 5.14$$

Usando la aproximación de la *ec. 3.11* y despejando $P_x^{\{m\}}$.

$$P_x^{\{m\}} \approx \frac{A_x}{\ddot{a}_x - \frac{1}{2m}(A_x + m - 1)} \qquad ec.\ 5.14$$

De forma análoga, se pueden definir primas a prorrata; temporales, con periodo de pago de prima distinto al periodo de cobertura, etc. Pero, en todos los casos, se debe considerar la *ec 5.13* para agregar la compensación por concepto de prima no gastada.

Primas Continuas

Si una prima pagadera m veces por periodo, se construye con el límite cuando m tiende a infinito, el periodicidad del pago de las primas se hace tan pequeño, que las primas se pagan de forma continua. Las primas continuas, son los pagos que hace el asegurado cada instante, a cambio de una cobertura o beneficio.

Definición 5.15

Sea $\overline{P}_x$ la prima continua, de un seguro ordinario de vida de *1 u.m.* de *S.A*, para una persona de edad x, expresada por

$$\overline{P}_x = \lim_{m\to\infty} P_x^{(m)}$$

Como la periodicidad de las primas depende del valor presente una anualidad, para una persona de edad x se obtiene

$$\overline{P}_x = \frac{A_x}{\overline{a}_x} \qquad \textit{def. 5.15}$$

Utilizando la aproximación de la *ec. 3.15*. La definición anterior se trasforma en

$$\overline{P}_x \approx \frac{A_x}{a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\mu_x + \delta)} \qquad \textit{ec. 5.15}$$

En la práctica, el tener un esquema de pagos continuo es poco realista, en el sentido que es imposible realizar pagos a una compañía cada instante. Por lo tanto, el estudio de las primas continuas en este trabajo, se acota únicamente a esta definición. Sin embargo, las herramientas mostradas son suficientes al lector, para profundiza tanto como lo desee en las primas pagaderas de forma continua.

Ejercicios del Capítulo 5

Definición de Prima

1.- Suponga que una compañía administra un plan, en el cual, se protege a una persona de edad x con un seguro ordinario de vida de *1 u.m.* de S.A. pagadera al final del año del fallecimiento. Para obtener este beneficio, el asegurado debe pagar una prima anual P hasta su muerte. Usando la tabla de mortalidad del Anexo 1, determinar:

i) El monto total de prima pagada por un grupo de personas l_x al momento de la contratación. Es decir, $P_x l_x$.

ii) Las reclamaciones (*S.A.* cobradas) observadas, entre el año x y $x + 1$.

2.- Una compañía aseguradora ofrece una suma asegurada de 300,000 *u.m.* para un seguro ordinario de vida. Si una persona de edad 22 está interesada en el plan. ¿Cuánto tendrá que pagar de prima anual? Utilice la tabla del Anexo 1.

Sol. 1,583 u.m.

Primas pagaderas de forma anual

3.- Suponga que se ofrecen los beneficios de la siguiente tabla a una persona de edad 37. Es decir, si la persona de edad 37 fallece en el segundo año, recibirá *20,000 u.m.*

Año de Vigencia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 en adelante
Beneficio en *u.m.*	10,000	15,000	20,000	20,000	20,000	20,000	30,000	35,000	40,000	50,000

i) ¿Cuál es la prima anual que tendrá que pagar el participante durante toda la cobertura? Utilice la tabla de mortalidad del Anexo 1.

ii) Si el periodo de pago de primas se reduce a cinco años, ¿Cuál será la prima anual que pagará el participante? Utilice la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Sol.

i) *403 u.m.*

ii) *1,529 u.m.*

Primas pagaderas m veces por periodo

4.- Demostrar lo siguiente:

i) $\lim_{m\to\infty} P_x^{\{m\}} = \lim_{m\to\infty} P_x^{[m]}$

ii) ¿Será cierto que $P_x^{[m]} \le P_x^{(m)} \le P_x^{\{m\}}$? Si es verdadera la desigualdad, demostrarla. En caso opuesto, dar un contraejemplo.

5.- Una persona de edad 30, desea obtener una anualidad mensual cuando cumpla 65 años de *1 u.m.* hasta su fallecimiento. ¿Cuánto deberá pagar el participante de prima mensual desde la edad actual hasta la edad 65 para obtener ese beneficio? Encontrar la prima en términos; reales, a plazos y prorrata. Observe que, el periodo de pago de primas es igual al periodo de cobertura. Utilice la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Sol. Prima Real = 0.2180, Prima a plazos = 0.1984, Prima a prorrata =.22031

6.- Obtener una expresión para la prima mensual; real, plazos y prorrata. Para una persona de edad x, cuyos beneficios son:

i) Durante los primeros n años, tiene una protección de un seguro dotal temporal por *1,000,000* de *u.m.*

ii) Si el asegurado llega con vida a la edad $x + n$ comenzará a recibir una mensualidad de *1,000 u.m.* de forma vitalicia, terminando el *P.P.P.*

iii) Si $x=34$ y $n=31$, dar un valor numérico utilizando la tabla de mortalidad el Anexo 1.

7.- Dar una expresión para la prima; real, a plazos y prorrata. Si se tiene una persona de edad x, con un seguro ordinario de vida pagadero al instante del fallecimiento.

8.- Suponga que una compañía ofrece un esquema de beneficios decrecientes, es decir, ofrece un seguro decreciente a razón de k *u.m.* por año, pagadero al final del año del fallecimiento de una persona de edad x y temporal a n años. Observe que la suma asegurada durante el primer año es kn *u.m*, la cual decrece, hasta llegado el año n cuya suma asegurada será de *1 u.m.* Si el periodo de pago de primas coincide con el periodo de cobertura del seguro, dar una expresión para:

i) La prima mensual; real, a plazos y prorrata.

ii) Observe que durante cierto tiempo la suma asegurada es mayor la prima pagada, ya que la prima mensual pagada es una línea constante o nivelada y la suma asegurada es una función decreciente. En este sentido, encontrar el punto donde la suma asegurada es igual a la prima pagada para un algún mes dentro del periodo de cobertura.

Primas Continuas

9.- Suponga que un periodo de pago de primas es t años, y, la cobertura ofrecida para dichas cuotas, es un seguro pagadero al momento del fallecimiento de k *u.m.* temporal a n años, tal que $t < n$. ¿Cuál es la prima continua que deberá pagar una persona de edad x? De la expresión en términos de anualidades simples (a_x).

10.- Dar una expresión para la prima continua de una persona de edad x, con una cobertura de un seguro creciente de k *u.m.* temporal a t años. Considere el periodo de pago de primas igual al periodo de cobertura del seguro. Exprese en términos de valores conmutados.

CAPÍTULO 6 "Reservas"

Introducción

Con respecto al funcionamiento de un contrato de seguro, la compañía adquiere un compromiso con el participante, el cual, consiste en pagar un determinado beneficio al asegurado si se cumplen las condiciones pactadas. El asegurado por otra parte, adquiere el compromiso de pagar una serie de primas para obtener un derecho, en este caso, el beneficio ofrecido y aceptado por la compañía. Pero, ¿cómo tiene la certeza la compañía de tener los activos(17) suficientes para pagar los beneficios?

En este sentido, la compañía tiene la obligación legal de pagar los beneficios al participante si se cumplen las condiciones pactadas en el contrato de seguro. De éste modo, se observa la necesidad de determinar el monto en unidades monetarias, que debe tener la compañía al tiempo t para que pueda cubrir los beneficios ofrecidos. Así, la cantidad reservada para pagar los beneficios en tal momento, depende de la diferencia entre el valor actual de las obligaciones de la compañía ($VAOC$) y el valor actual de las obligaciones del asegurado ($VAOA$). Así, $VAOC_t - VAOA_t$ al tiempo t, representa la cantidad que debe estar constituida y reservada de acuerdo a las disposiciones legales(18) en un fondo para pagar la reclamación los beneficios conocido como ***reserva***. Por lo tanto, en este capítulo se estudia; la naturaleza de la reserva, los tipos de reserva y algunos métodos para su cálculo.

---

(17) El activo desde el punto de vista contable, se define como todos los bienes y derechos que tiene la compañía. Por ejemplo: bancos, inversiones, fondos, deudores, cuentas por cobrar, etc.

(18) Existen mecanismos para regular, vigilar e instrumentar las funciones de las compañías aseguradoras, como; leyes e instituciones. En el caso mexicano algunas son: la Ley Federal de Instituciones de Fianzas, Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas, Ley sobre el Contrato de Seguro, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, SHCP, entre otras.

Definición de Reserva

Definición 6.1

Sea ${}_tV$ una cuenta de pasivo[19] llamada fondo de reserva, expresada como

$${}_tV = VAOC_t - VAOA_t$$

Donde, $VAOC_t$ es el valor actual de las obligaciones de la compañía al año t y $VAOA_t$ el valor actual de las obligaciones del asegurado al año t.

def. 6.1

Observación 6.1

Supóngase que ${}_tV = k$ *u.m.* para algún tiempo t definido dentro del periodo de cobertura de la compañía. Entonces, se tienen los siguientes escenarios:

i) Si $k = 0$, la compañía tiene cero *u.m.* en el fondo de reserva para hacer frente a las obligaciones futuras. Siempre se cumple que, ${}_tV = 0$ para $t = 0$.
ii) Si $k > 0$, la compañía debe aportar k *u.m.* al fondo de reserva en el momento t, para poder hacer frente a sus obligaciones futuras, o beneficios ofrecidos al asegurado.
iii) Si $k < 0$, entonces la compañía tiene cuentas por cobrar (derechos) en la reserva, relacionadas con primas; no pagadas, o no cobradas al asegurado de k *u.m.*

La notación de la reserva se representa como

$${}^{n}_{t}V^{m}_{f(x)}$$

t : representa el momento del cálculo de la reserva.
n : es el periodo de pago de primas.
m : es la periodicidad y método de cálculo de las primas (reales, plazos, prorrata).
$f(x)$: es el tipo de cobertura en función de la edad x del participante. Por ejemplo; seguro vitalicio, temporal, anualidad diferida, etc.

---

(19) El pasivo desde el punto de vista contable, se define como las deudas y obligaciones que tiene la compañía. Por ejemplo; deudas, cuentas por pagar, amortización, reserva, etc.

Ejemplo 6.1

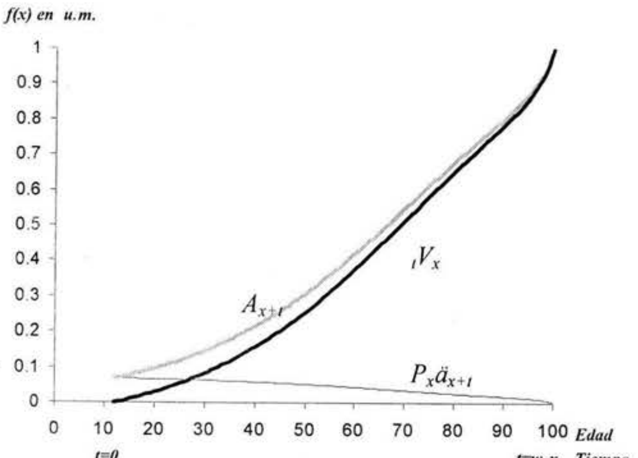
Suponga que se tiene un seguro ordinario de vida para una persona de edad x con suma asegurada de *1 u.m.* Las primas, son pagaderas cada año de forma anticipada y vitalicia. Dar una expresión para la reserva al año t y graficarla.

Sol.

Utilizando la *def. 6.1* la reserva al año t está dada por

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P_x\ddot{a}_{x+t} \qquad ec.\ 6.1$$

La expresión anterior, representa el monto constituido en el fondo de reserva al tiempo t para una persona de edad x, que paga primas anuales P_x. Si se grafica la función ${}_tV_x$, para $x=12$ y $t=0$ hasta $t=w-12$ usando la tabla de mortalidad del Anexo 1, se obtiene



Gráfica 6.1

La gráfica a la izquierda, muestra el beneficio ofrecido por la compañía aseguradora A_{x+t}, las obligaciones del asegurado $P_x\ddot{a}_{x+t}$ y la reserva al tiempo t dada por ${}_tV_x$.

En este caso, la reserva en el fondo es positiva para cualquier tiempo t distinto de cero, lo cual significa, que la compañía debe realizar aportaciones al tiempo t de ${}_tV_x$ *u.m.* por cada asegurado que participe en el contrato de seguro.

Por otra parte, observe que el monto de la reserva es creciente, de suerte que a la edad w donde la población se ha extinguido, en el fondo de la reserva existe una cantidad en unidades monetarias igual a la ofrecida en el beneficio, es decir, *1 u.m.*

■

La naturaleza de la reserva es tal, que para cualquier momento t se deben tener los recursos necesarios en el fondo para que éste, sea incrementado de forma gradual y oportuna, garantizando así, sean pagadas las obligaciones futuras de la compañía.

Cálculo de la Reserva

La *def. 6.1* de la reserva, sugiere por construirse como la diferencia entre el valor actual de las obligaciones de la compañía y del asegurado ($VAOC_t$-$VAOA_t$), la existencia de varios métodos para el cálculo de ese valor actual. De este modo, los métodos que se definen son: el método prospectivo, retrospectivo y recurrente.

Método Prospectivo

Definición 6.2

Se dice que una reserva es calculada por el método prospectivo, si se considera la diferencia del valor actual de las obligaciones *futuras* de la compañía (*VAOC*), con el valor actual de las obligaciones *futuras* del asegurado (*VAOA*). Calculada en el momento t, de dentro del periodo de cobertura del seguro.

def. 6.2

Observe que en el *ejemplo 6.1*, la reserva fue calculada por el método prospectivo, ya que se calculó la diferencia entre el valor actual de las obligaciones *futuras* de la compañía menos el valor actual de las obligaciones *futuras* del asegurado.

Ejemplo 6.2

A un participante de edad x se le ofrece un beneficio de un seguro dotal mixto temporal a n años de *1 u.m.* de *S.A*. Para tener derecho a este beneficio, el asegurado debe pagar una prima anticipada y anual durante los primeros m años, donde el *P.P.P.* es menor al periodo de cobertura, esto es $m < n$.

Encontrar una expresión para la reserva al año t por el método prospectivo, analice los casos cuando $t<m$ y $t>m$. Finalmente, grafique para $x=30$, $m=15$ y $n=35$.

Sol.

Para encontrar la reserva al año t, se tienen que determinar primero; la prima que pagará el asegurado, el valor actual de las obligaciones futuras de la compañía y asegurado, según el método prospectivo (*def.6.2*). Así, el *VAOC* es

$$VAOC = A_{x:\overline{n}|}$$

La prima que pagará el asegurado esta representada por

$${}_{m}P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = A_{x:\overline{n}|}$$

$${}_{m}P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

Así, el valor actual de las obligaciones futuras del asegurado es

$$VAOA = {}_{m}P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

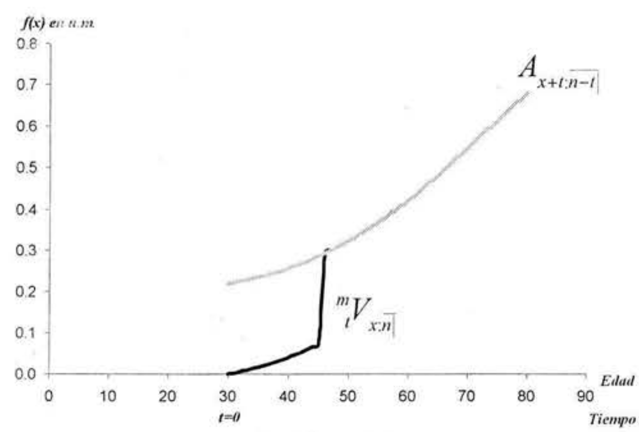
Finalmente, la reserva al año t está dada por

$$\begin{aligned} {}_{t}^{m}V_{x:\overline{n}|} &= VAOC_t - VAOA_t \\ &= A_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_{m}P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \end{aligned}$$

Esta última expresión, es una función del tiempo t, por lo tanto, depende del momento de valuación, es decir, si se calcula dentro o fuera del periodo de pago de primas, es decir,

$${}_{t}^{m}V_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_{m}P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} & si \quad t \le m \\ A_{x+t:\overline{n-t}|} & si \quad t > m \end{cases} \qquad ec.\ 6.2$$

La ecuación anterior, muestra que si $t > m$, el cálculo de la reserva se reduce a la prima única de un seguro temporal. La razón, es evidente, dado que para $t>m$ el periodo de pago de primas ha terminado, y el periodo de cobertura continúa $(m<n)$, por lo tanto, $VAOA_t=0$.



Gráfica 6.2

La gráfica a la izquierda, muestra el comportamiento de la reserva de la *ec. 6.2* para una persona de edad $x=30$, con un periodo de pago de primas $m=15$ y periodo de cobertura $n=35$.

Observe que el monto constituido en la reserva hasta la edad *45*, y, posterior a éste la reserva es igual al beneficio, cumpliéndose la *ec. 6.2*. ∎

Método Retrospectivo

Definición 6.3

Se dice que una reserva es calculada por el método *retrospectivo*, si se considera la diferencia entre el valor actual de las obligaciones *pasadas* del asegurado (*VAOA*) y el valor actual de las obligaciones *pasadas* de la compañía (*VAOC*). Calculada en el momento t, de dentro del periodo de cobertura del seguro.

def. 6.3

Ejemplo 6.3

Suponga que se tiene un seguro ordinario de vida para una persona de edad x, de *1 u.m*, de suma asegurada, cuyas primas son pagaderas cada año de forma vitalicia y anticipada. Dar una expresión para la reserva al año t por el método retrospectivo, observe que las hipótesis de este ejemplo, son las mismas que las del *ejemplo 6.1.*

Sol.

La reserva al año t, según la *def. 6.3*, se representa por la diferencia entre el valor actual de las obligaciones pasadas del asegurado y la compañía, es decir;

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= VAOA_t - VAOC_t \\ &= P_x \ddot{a}_{x:\overline{t|}} \frac{1}{{}_tE_x} - A^{1}_{x:\overline{t|}} \frac{1}{{}_tE_x} \end{aligned} \qquad ec.\ 6.3$$

El primer miembro de la ecuación anterior, representa el $VAOA_t$. El segundo el $VAOC_t$, para ambos casos, se multiplicó por el inverso del dotal puro, para determinar la valuación al momento t.

■

Observación 6.1

Suponga que para un seguro, se tienen las reservas ${}_tV$ y ${}_tV'$ para un mismo tiempo t, pero distinto método de cálculo; prospectivo, retrospectivo, respectivamente. Entonces, siempre se cumple que ${}_tV = {}_tV'$. Es decir, no importa si la reserva se calcula por el método prospectivo o retrospectivo, la reserva al año *t* de un mismo plan es la misma.

Ejemplo 6.4

Demostrar que la reserva al año *t* bajo el método prospectivo del *ejemplo 6.1* " ${}_tV$ " es la misma que la calculada bajo el método retrospectivo del *ejemplo 6.3* " ${}_tV_x'$ ".

Sol.

Lo que se tiene que demostrar es, ${}_tV_x = {}_tV_x'$. Donde ${}_tV_x$ es la reserva calculada por el método prospectivo del *ejemplo 6.1*, y ${}_tV_x'$ calculada por el retrospectivo del *ejemplo 6.3*.

Por el *ejemplo 6.1*, se sabe que la reserva por el método prospectivo es

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= A_{x+t} - P_x\ddot{a}_{x+t} \\ &= \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{P_xN_{x+t}}{D_{x+t}} \end{aligned}$$

Sumando y agregando $P_xN_x - M_x = 0$ a la ecuación anterior, se tiene

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= \frac{M_{x+t} - P_xN_{x+t} + P_xN_x - M_x}{D_{x+t}} \\ &= \frac{M_{x+t} - M_x + P_x(N_x - N_{x+t})}{D_{x+t}} \end{aligned}$$

Multiplicando por $\dfrac{D_x}{D_x}$ y agrupando

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= \frac{1}{{}_tE_x}\left(\frac{P_x(N_x - N_{x+t})}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}\right) \\ &= \frac{1}{{}_tE_x}\left(P_x\ddot{a}_{x:\overline{t|}} - A^{1}_{x:\overline{t|}}\right) \end{aligned}$$

La expresión anterior representa justamente la reserva ${}_tV_x'$ del *ejemplo 6.3*, de donde

$$ {}_tV_x = {}_tV_x' \qquad \textit{ec. 6.4}$$

Por lo tanto, la reserva del *ejemplo 6.1* es igual a la reserva del *ejemplo 6.3*. ¿Será cierto que, toda reserva por el método prospectivo es igual a la del método retrospectivo?

■

En efecto, la generalización de este ejemplo es verdadera, es decir, la reserva al año t calculada por el método prospectivo siempre es igual a la determinada bajo el método retrospectivo, según la *observación 6.1*. La demostración, se deja al lector en los ejercicios del capítulo.

Observación 6.2

La decisión de que método se debe utilizar para calcular una reserva al año t, sea por el método prospectivo o retrospectivo, depende del momento de la valuación. Por lo tanto, respecto a cual de los dos métodos produce una expresión más simple de la reserva al año t, debe considerarse lo siguiente:

i) El método prospectivo, es más adecuado cuando el periodo de pago de primas ha terminado, por ejemplo, para la *ec. 6.2* si se hace el cálculo de la reserva al momento $t>m$ la fórmula de la reserva se reduce significativamente. Así, este método, es más adecuado para los contratos de seguros en los cuales ha terminado el periodo de pago de primas.

ii) Análogamente, el método retrospectivo, es más conveniente cuando se tiene un contrato de seguro que ofrece beneficios diferidos y se desea encontrar la reserva al año t dentro del periodo de diferimiento.

iii) En general, el método de cálculo que debe utilizarse de manera que se reduzca la expresión de la reserva al año t, es aquel donde el valor actual de las obligaciones futuras o pasadas del asegurado sea cero. Es decir, el periodo de pago de primas ha terminado.

Método Recurrente

Este método, consiste en expresar la reserva al año siguiente, como función de la reserva del año anterior, de ahí, su nombre; recurrente. Para una definición de este tipo de reserva, es necesario observar los elementos que componen la reserva; el fondo de reserva, la tasa de interés del fondo, etc. Considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.5

Suponga que una persona de edad *40* adquirió un seguro dotal de *1 u.m.* temporal a *15* años. Si el periodo de pago de primas anuales es de *10* años. Se desea construir una tabla que contenga como columnas: el total de primas recibidas, total del fondo al principio del año, monto total de las reclamaciones, el fondo al final del año, el número de sobrevivientes al final del año y por último, la reserva al año *t*. Utilice la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Sol:

La prima que el asegurado debe pagar de forma anual durante los primeros *10* años, esta representada como

$$P = {}_{10}P_{40:\overline{15}|} = \frac{A_{40:\overline{15}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}}$$

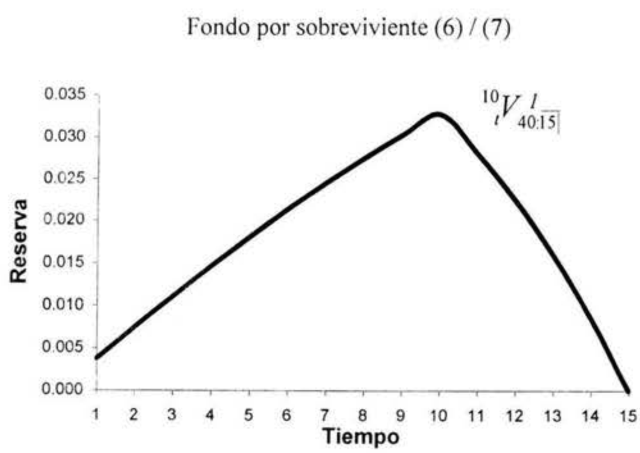
Con la tabla de mortalidad del Anexo 1 se tiene la siguiente tabla.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Año t	Total de primas recibidas $(l_{40+t-1})*P$	Monto total en el Fondo al inicio del año	Fondo con interés (1.05)*(3)	Reclamaciones por muerte d_{40+t-1}	Fondo al final del año t (4) - (5)	Número de sobrevivientes l_{40+t}	Fondo de reserva por sobreviviente (6) / (7)
1	634	634	666	305	361	96,164	0.00375
2	632	993	1,043	328	715	95,836	0.00746
3	630	1,345	1,412	352	1,060	95,484	0.01110
4	628	1,688	1,772	378	1,395	95,106	0.01467
5	625	2,020	2,121	405	1,716	94,701	0.01812
6	623	2,339	2,456	434	2,022	94,267	0.02145
7	620	2,642	2,774	465	2,308	93,802	0.02461
8	617	2,925	3,071	499	2,573	93,303	0.02757
9	614	3,186	3,345	534	2,811	92,769	0.03030
10	610	3,421	3,592	572	3,020	92,197	0.03276
11		3,020	3,171	612	2,560	91,585	0.02795
12		2,560	2,688	654	2,033	90,931	0.02236
13		2,033	2,135	700	1,435	90,231	0.01591
14		1,435	1,507	747	760	89,484	0.00849
15		760	798	798	0	88,686	0

Tabla 6.1

La *tabla 6.1*, muestra el comportamiento del fondo de reserva ${}^{10}_{t}V^{1}_{40:\overline{15}|}$ columna (8), a través del tiempo de cobertura del seguro dotal. Recuerde que el seguro dotal es pagadero únicamente, si el participante de edad x fallece dentro del periodo de cobertura, es decir si fallece entre el año $t= 1$ y el año $t =15$. Razón por la cual, la reserva al año $t =15$ es igual a cero, ya que la compañía ha terminado sus compromisos con el asegurado, y el monto constituido en la reserva al año $t =15$ (4) fue suficiente para cubrir las reclamaciones de ese mismo año (5).

Así, el monto constituido en la reserva (4), siempre es suficiente para cubrir las reclamaciones de ese mismo año (5).



Gráfica 6.3

La gráfica a la izquierda, representa la reserva al año t por sobreviviente, es decir, el cociente de las columnas (6)/(7)

■

Observación 6.3

La *Tabla 6.1*, representa la valuación de la reserva al año t para un seguro dotal. Se llama valuación, a los cálculos actuariales considerando toda la población en una cobertura. La columna (8) de la tabla, es la valuación de la reserva al año t.

Además, con columna (8) de la *Tabla 6.1*, se puede construir otra definición para el cálculo de la reserva. Este tipo de cálculo, es el *método recurrente*. De esta forma, considere la siguiente definición.

Definición 6.4

Sean ${}_tV$ la reserva al año t, $i\%$ la tasa de interés que actúa sobre el fondo de reserva, y, P la prima que tiene que pagar el asegurado para que el beneficiario reciba una suma asegurada *S.A.* cuando se cumplan las condiciones descritas en el contrato de seguro. Con las hipótesis anteriores, la reserva ${}_{t+1}V$ calculada por método recurrente se representa,

$$ {}_{t+1}V = \frac{l_{x+t}\left({}_tV + P\right)(1+i) - (S.A.)d_{x+t}}{l_{x+t+1}} \qquad ec.\ 6.5 $$

La reserva por el método recurrente, resulta muy interesante en varios sentidos. El primero, por su fácil cálculo e implementación en programas de cómputo. Pero, observe que para encontrar la reserva a un año $t+1$, se necesita la reserva al año t. Para la del año t, la del año $t-1$ y así sucesivamente. En este sentido, recuerde que ${}_tV=0$ si $t=0$. El lector puede comprobar lo anterior, introduciendo la *ec. 6.5* en una hoja de cálculo y utilizando la tabla de mortalidad el Anexo 1, para calcular V_{t+1} con valores conocidos de la prima P y la suma asegurada *S.A.*

La otra razón, es porque al hacer manipulaciones algebraicas muy simples a la *ec. 6.5*, se obtiene una ecuación de la prima pagada por el asegurado, en función de la *prima de riesgo* y la *prima de ahorro*. Para llegar a tal ecuación, se tiene que hacer lo siguiente.

Factorizando l_{x+t} y como $l_{x+t} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{l_{x+t}}}$. Entonces, la *ec. 6.5* se transforma en

$$ {}_{t+1}V = \frac{\left({}_tV + P\right)(1+i) - (S.A.)q_{x+t}}{p_{x+t}} \qquad ec\ 6.6 $$

Despejando P y utilizando que $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$ se obtiene

$$ P = \left(S.A. - {}_{t+1}V\right)\frac{q_{x+t}}{(1+i)} + \left(\frac{{}_{t+1}V}{(1+i)} - {}_tV\right) \qquad ec\ 6.7 $$

Los sumandos de la *ec. 6.7* representan:

$\left(S.A.-{}_{t+1}V\right)\dfrac{q_{x+t}}{(1+i)}$ Es la *prima de riesgo*, porque la diferencia entre $S.A.$ - ${}_{t+1}V$ es el desembolso complementario que tendrá que realizar la compañía aseguradora por concepto de cada una de las reclamaciones esperadas.

$\dfrac{{}_{t+1}V}{(1+i)}-{}_tV$ Es la *prima de ahorro*, porque ésta diferencia, es la cantidad necesaria para completar la reserva al año $t+1$.

Por otro lado, otro motivo de estudio del método recurrente es, que con la *ec. 6.5* se construye el *método de Fackler* para el cálculo de la reserva. Es decir.

Sea $U_{x+t}=\dfrac{(1+i)}{P_{x+t}}$ y $k_{x+t}=\dfrac{q_{x+t}}{P_{x+t}}$, si se sustituyen en la *ec. 6.6*, se obtiene la fórmula de Fackler. Esta formula, es un método alternativo para el cálculo de la reserva. De esta manera, se obtiene

$$ {}_{t+1}V=\left({}_tV+P\right)U_{x+t}-(S.A.)k_{x+t} \qquad ec.\ 6.7$$

Observe que U_{x+t} y k_{x+t} pueden expresarse en términos de valores conmutados si se multiplica por $\dfrac{V^x}{V^x}$, esto es,

$$U_{x+t}=\frac{D_x}{D_{x+t}} \quad y \quad k_{x+t}=\frac{C_{x+t}}{D_{x+t}} \qquad ec.\ 6.8$$

La *ec. 6.7* es utilizada comúnmente, porque los valores de U_{x+t} y k_{x+t} existen para todas las edades x de tabla de mortalidad dado que están en términos de valores conmutados conocidos. Además, se sabe que ${}_tV=0$ para $t=0$, por lo que construir una tabla para la reserva al año t como se hizo en el *ejemplo 6.5*, resulta de gran simplicidad si se conocen los valores de la prima P que paga el asegurado, y, la suma asegurada $S.A.$ que recibirá el beneficiario al cumplirse las condiciones del contrato o póliza de seguros.

Tipos de Reserva

En el capítulo anterior, se definieron distintos tipos de primas; continuas, pagaderas *m* veces por periodo; reales, a plazos y prorrata. En este sentido, los tipos de reserva, por ser una función que depende de las primas, se clasifican de la misma forma que las primas que paga el asegurado. Es decir, existen reservas; continuas, pagaderas *m* veces por periodo; reales, a plazos y prorrata.

Reservas Pagaderas m veces por periodo

Las reservas pagaderas *m* veces por periodo, están representadas por las primas fraccionadas de las *definiciones 5.7, 5.8 y 5.9*. De este modo, la notación para la reserva pagadera más de una vez por periodo, es:

${}^{n}_{t}V^{(m)}_{f(x)}$ Para la reserva al año *t*, de una persona de edad *x* con cobertura *f(x)* y primas reales (*def. 5.7*), pagaderas *m* veces por periodo con *P.P.P.* de *n* años.

${}^{n}_{t}V^{[m]}_{f(x)}$ Para la reserva al año *t*, de una persona de edad *x* con cobertura *f(x)* y primas a plazos (*def. 5.8*), pagaderas *m* veces por periodo con *P.P.P.* de *n* años.

${}^{n}_{t}V^{\{m\}}_{f(x)}$ Para la reserva al año *t*, de una persona de edad *x* con cobertura *f(x)* y primas a prorrata (*def. 5.9*), pagaderas *m* veces por periodo con *P.P.P.* de *n* años.

En la notación anterior, la función *f*(*x*) representa una cobertura para una persona de edad *x*. Por ejemplo, el seguro ordinario de vida, dotal, dotal puro, dotal mixto, las anualidad diferida, etc.

Los siguientes ejemplos, son para ilustrar los tres métodos de cálculo de reserva; prospectivo, retrospectivo y recurrente. La complejidad de su cálculo, radica esencialmente en encontrar una expresión para la prima que paga el asegurado.

Ejemplo 6.6

Suponga que se ofrece un beneficio a una persona de edad x de *1 u.m*, diferido n años, temporal m años y pagadero m_1*-veces* al año. Es decir, el asegurado comenzará a recibir $1/m_1$ de *u.m.* el primer m_1*-ésimo* posterior a alcanzar la edad $x+n$. Si las primas *reales* P son pagaderas cada m_2*-ésimo*, y el periodo de pago de primas (reales) es desde la edad x hasta la edad $x+n$, ¿cuál es la reserva al año t por el método prospectivo?

Sol.

Según el método retrospectivo, la reserva al año t se puede expresar como la diferencia $VAOC_t$-$VAOA_t$, *def. 6.2*. Así, el valor presente de las obligaciones de la compañía $VAOC$, se puede expresar como

$$VAOC={}_{n|m}a_x^{(m_1)} \qquad ec.\ 6.9$$

Por otro lado, las obligaciones del asegurado, están en función de las primas reales fraccionadas y pagaderas durante los primeros p años. Entonces la prima P es

$${}_nP^{(m_2)}_{\left({}_{n|m}a_x^{(m_1)}\right)}\ddot{a}^{(m_2)}_{x:\overline{n}|}={}_{n|m}a_x^{(m_1)}$$

Despejando P de la ecuación anterior y sustituyendo las *ec's. 3.10* y *3.12*, se obtiene

$${}_nP^{(m_2)}_{\left({}_{n|m}a_x^{(m_1)}\right)}=\frac{{}_{n|m}a_x+\dfrac{m_1-1}{2m_1}{}_nE_x}{\ddot{a}^{(m_2)}_{x:\overline{n}|}-\dfrac{m_2-1}{2m_2}\left(1-{}_nE_x\right)} \qquad ec.\ 6.10$$

Finalmente, la reserva al año t por el método prospectivo es

$${}^n_tV_x^{(m_2)}=\begin{cases}{}_{n|m}a_{x+t}^{(m_1)}-{}_nP^{(m_2)}_{\left({}_{n|m}a_x^{(m_1)}\right)}\ddot{a}^{(m_2)}_{x+t:\overline{n}|} & si\ t\le n\\[2ex] {}_{n|m}a_{x+t}^{(m_1)} & si\ t\ge n\end{cases} \qquad ec.\ 6.11$$

La ecuación anterior, representa la reserva al año t para una cobertura donde se le da al asegurado de edad x, $1/m_1$ de *u.m.* mensual si llega con vida a la edad $x+n$. Para obtener este derecho, el asegurado debe pagar una prima real ${}_nP^{(m_2)}_{\left({}_{n|m}a_x^{(m_1)}\right)}$ de *u.m.*

■

Ejemplo 6.7

Se tiene un seguro ordinario de vida de *1 u.m.* de suma asegurada, para una persona de edad *x*. Para tener derecho a este beneficio, el participante debe pagar una prima *a plazos* cada *m-ésimo* de año. ¿Cuál es la reserva al año *t* por el método retrospectivo?

Sol.

De manera análoga a la *ec. 5.12*, la prima a plazos está determinada por la siguiente fórmula,

$$P_x^{[m]} \approx \frac{A_x}{\ddot{a}_x + (A_x - 1)\frac{m-1}{2m}}$$

Por lo tanto, como la reserva al año *t* del método retrospectivo se define por la diferencia $VAOA_t$-$VAOC_t$ (ver *ejemplo 6.3*), se tiene

$$_tV_x^{[m]} = P_x^{[m]}\ddot{a}_{x:\overline{t}|}\frac{1}{_tE_x} - A_{x:\overline{t}|}^{1}\frac{1}{_tE_x} \qquad ec.\ 6.12$$

■

Ejemplo 6.8

Considerando las hipótesis del ejemplo anterior, construya la reserva al año *t* por el método recurrente y suponiendo primas *a prorrata*.

Sol.

La prima a prorrata *ec. 5.14*, es

$$P_x^{\{m\}} \approx \frac{A_x}{\ddot{a}_x - \frac{1}{2m}(A_x + m - 1)}$$

Por lo tanto, la reserva al año *t* usando la *ec. 6.6* se expresa como

$$_{t+1}V_x^{\{m\}} = \frac{\left(_tV_x^{\{m\}} + P_x^{\{m\}}\right)(1+i) - (S.A.)q_{x+t}}{P_{x+t}} \qquad ec.\ 6.13$$

Para calcular la ecuación anterior, siempre es útil recordar que la reserva al año cero siempre es cero. Es decir, $_tV$=0 para t=0.

■

Reservas Continuas

Este tipo de reserva, se da cuando se calculada con seguros continuos $\overline{A}_x$ y primas continuas $\overline{P}_x$. No obstante, se puede tener una cobertura continua y una prima discreta, o viceversa. Sin embargo, la notación para las reservas continuas es indistinta para estos tres escenarios. Por tanto, la reserva continua se simboliza como

$$ {}^{n}_{t}\overline{V}_{f(x)} $$

Donde t es el momento de cálculo, n el periodo de pago de primas, y, $f(x)$ una cobertura para una persona de edad.

Definición 6.5

Se dice que ${}^{n}_{t}\overline{V}_{f(x)}$ es la *reserva continua* al año t con periodo de pago de primas n años, si sólo sí las primas son pagaderas de forma continua o la función $f(x)$ es continua.

def. 6.5

Observe, que los métodos; prospectivo, retrospectivo y recurrente, pueden aplicarse también en las reservas continuas.

Observación 6.4

En general, el aspecto más complicado para el cálculo de la *reserva*, es encontrar la prima que debe pagar un participante para obtener un beneficio futuro. Una vez realizada esta tarea, se aplica la *definición 6.1*. Es decir, se usa un método de cálculo apropiado (prospectivo, retrospectivo, recurrente o la fórmula de Fackler). Finalmente, el tipo de reserva resultante; periódica o continua, depende del tipo de prima y cobertura del seguro.

Ejercicios del Capítulo 6

Cálculo de Reserva

1.- Suponga que una póliza de seguros, diseñada para una persona de edad x contiene los siguientes puntos:

i) Se llama *participante*, a la persona de edad actual x que decida participar en las siguientes obligaciones, para que él o su beneficiario, tengan derecho a un beneficio según las condiciones descritas en los siguientes puntos.

ii) Se denomina *compañía*, a la entidad que acepte otorgar los beneficios al participante. Siempre y cuando el participante acepte los siguientes puntos.

iii) El participante debe pagar una prima P de forma anual.

iv) El participante al realizar los pagos P, tiene derecho a un beneficio de k *u.m.* al término de la cobertura. En caso de fallecer, el beneficio puede ser cobrado por el (los) beneficiarios al final del año del fallecimiento del participante.

v) El periodo de cobertura del seguro, es desde el momento de contratación hasta n años después de la misma.

vi) El periodo de pago de primas del participante es durante los primeros m años.

vii) El periodo de pago de primas es menor al periodo de cobertura, es decir, $m \leq n$.

Determine lo siguiente:

- El valor presente del beneficio del participante o del asegurado.
- Una expresión para la prima anual P.
- Una expresión para la reserva al año t, para t en el periodo de cobertura utilizando los métodos; prospectivo, retrospectivo y recurrente.
- Si el cálculo de la reserva es al término del periodo de pago de primas, es decir, $t = m$. Entonces, ¿qué método de cálculo de reserva es el más conveniente?

- Con la expresión del método recurrente, dar una expresión para la reserva según la fórmula de Fackler.

2.- Según la *observación 6.3*, el método prospectivo es siempre igual al método retrospectivo. En este sentido, suponga que se tiene una póliza con ciertos beneficios y obligaciones. Sean ${}_tV$ y ${}_tV'$ la reserva al año t calculada por el método prospectivo y retrospectivo respectivamente, según la póliza descrita, para t dentro del periodo de cobertura, si ${}_tV$ y ${}_tV'$ se calcularon con igual tabla de mortalidad. Demostrar, que el método prospectivo siempre es igual al método retrospectivo, es decir

$${}_tV = {}_tV'$$

Ayuda: Utilice el supuesto de que el valor presente de las obligaciones del asegurado (participante) siempre es igual al valor presente de las obligaciones de la compañía. Haga esto, construyendo dos intervalos de tiempo usando como partición el año t. Si escribe correctamente el enunciado anterior, la demostración es inmediata.

3.- Suponga que una persona de edad x adquiere un seguro con suma asegurada decreciente, de suerte, que al inicio (año cero) la suma asegurada es de k *u.m*, y, al año k-*1* es de *1 u.m.* Si el seguro adquirido es pagadero al final del año del fallecimiento del asegurado, y la prima que debe pagar es de P *u.m.* anuales durante todo el periodo de cobertura.

Determinar:

- El valor presente de las obligaciones del asegurado y de la compañía.
- De una expresión para la prima P pagadera de forma anual.
- Determine una expresión para la reserva al año t. Utilice el método; prospectivo, retrospectivo y recurrente.
- ¿Qué comportamiento tiene la reserva durante los primeros años? Es decir, es: positiva, negativa o cero.

Tipos de Reserva

4.- Un participante de edad x, desea adquirir una protección para la contingencia de fallecer entre las edades x y $x+n$, con una suma asegurada de k_1 *u.m.* para su beneficiario. El participante pagará una prima P de periodicidad m_1 durante los primeros n_1 años, donde el periodo de pago de primas es menor al periodo de cobertura, es decir, $n_1<n$. Además, si el sobrevive a la edad $x+n$ recibirá una anualidad diferida k_2 *u.m.* con periodicidad m_2 hasta el fallecimiento del asegurado.

Encontrar expresiones para la reserva al año t por el método prospectivo, considerando primas; reales, plazos y a prorrata. Finalmente, de una expresión por los métodos retrospectivo y recurrente, comparando los resultados de las tres expresiones.

5.- Suponga que una compañía de seguros, ofrece a sus participantes de edad x una protección con las siguientes características:

i) El periodo de cobertura contra el fallecimiento del participante es de n años.

ii) Si el participante fallece en el intervalo de edad x y $x+t_1$ el beneficiario recibirá k_1 *u.m.* de suma asegurada al final del año del fallecimiento.

iii) Si el participante fallece en el intervalo de edad $x+t_1$ y $x+t_2$ el beneficiario recibirá k_2 *u.m.* de suma asegurada al final del año del fallecimiento.

iv) Si el participante fallece en el intervalo de edad $x+t_2$ y $x+t_3$ el beneficiario recibirá k_3 *u.m.* de suma asegurada al final del año del fallecimiento.

v) Observe que $t_1 < t_2 < t_3 < n$.

vi) Si el participante llega con vida a la edad $x+n$ recibirá k_4 *u.m.*

vii) Para tener derecho a los beneficios *ii)* al *vi)*, el participante debe pagar una prima con periodicidad m durante todo el periodo de cobertura.

Encontrar expresiones para la reserva al año t, suponiendo que las primas son: reales, plazos y a prorrata. Además, analice la reserva ${}_tV$ para los casos; $t<t_1$, $t_1<t<t_2$, $t_2<t<t_3$, $t_3<t<n$, $t>n$.

PARTE II

CAPÍTULO 7 "Prima de Tarifa"

Introducción

La compañía de seguros, cobra primas al asegurado a cambio de pagar una suma asegurada a él o su beneficiario. Esto, de acuerdo a lo estipulado en la póliza o contrato de seguro. En otras palabras, la compañía ofrece una cobertura al asegurado a cambio del pago de primas. Ahora bien, el que la compañía gane, pierda o quiebre por las obligaciones ofrecidas, depende de lo bien o lo mal adecuadas que estén las primas, en relación a la experiencia de lo que puede ocurrir con; la cobertura ofrecida y los gastos que ésta provoca. Es decir, las primas deben tener una carga adicional, no sólo para cubrir las obligaciones adquiridas por la compañía, si no también para cubrir los gastos y otros requisitos financieros de la aseguradora. Pues de hecho, el principal flujo de activos que tiene la compañía es justamente el cobro de primas.

A este tipo de prima cargada, se le conoce como prima de tarifa, que además de contener los dos factores básicos; mortalidad e interés, contiene otros factores adicionales como: gastos, comisiones. Muchos de los cuales, se abordan en este capítulo.

Es muy importante señalar que la mortalidad y las tasas de interés, varían según el tipo o método de construcción de la tabla de mortalidad. Así, las tablas de mortalidad que tienen suposiciones conservadoras en la tasa de interés (menores a 3%), es porque están diseñadas para seguros *participativos*, en los cuales, el asegurado recibe en forma de dividendos el excedente entre la tasa de interés supuesta y la tasa de interés real a la cual invirtió los activos la compañía. Por otra parte, las tablas de mortalidad con tasas de interés más reales o cercanas al porcentaje de inversión, son para seguros *no participativos.* Como la prima de tarifa está en función de la cobertura, si ésta cambia, la prima de tarifa cambia también.

En ocasiones, los seguros de vida que emite la compañía tienen periodos largos de cobertura, estas suposiciones suelen fluctuar de año a año, incluso, variaciones con periodicidad menor a un año. Lo anterior implica, que la carga de la prima, debe ser adecuada para mantener la salud de la compañía. Pero además, no puede ser muy grande, ya que la compañía puede perder contratos a causa de coberturas incosteables para el asegurado y fuera de mercado.

Definición de Prima de Tarifa

Se denota GP como la prima tarifa, escrita

$$GP = P + E \qquad \textit{def. 7.1}$$

Donde P es la prima neta que contiene los supuestos de mortalidad e interés. Y, E los gastos que incurre la compañía por la cobertura.

Para determinar la prima de tarifa, se necesitan seguir básicamente dos pasos. Primero, obtener la prima neta que como ya se sabe, es aquella que contiene las suposiciones de mortalidad e interés. En segundo lugar, determinar la *carga* relacionada con ese tipo de cobertura, para encontrar así la prima de tarifa. La carga, es relacionada con los gastos de la compañía, que también suele tener un margen adicional para la posibilidad de dividendos en el caso de seguros participativos, bajo seguros no participativos, la prima de tarifa es determinada directamente con los gastos.

Los aspectos que hay que cuidar en la determinación de la prima de tarifa, se separan en dos grupos. Primero, la prima de tarifa que ofrecen las otras compañías para un producto similar, pues posicionar a la compañía, depende en gran medida de las políticas relacionadas a la prima de tarifa. Y segundo, los supuestos inmersos en el cálculo de la prima neta. En Estados Unidos de Norteamérica por ejemplo, utilizan la tabla CSO Commissioners Standard Ordinary Mortality para seguros participativos, o tablas construidas por la propia compañía para seguros no participativos.

Tipos de Gastos

Definición 7.2

Sea E los gastos de la compañía de seguros, clasificados en los siguientes grupos:

i) En función del tamaño de la prima; comisiones e impuestos sobre prima.
ii) En función de la suma asegurada; exámenes médicos y reportes de inspección.
iii) En función de las pólizas emitidas o administradas: gastos de administración y generales.

def.7.2

Observación 7.1

Todos los gastos están en función de la mortalidad. Es decir, si el participante ha fallecido o no cumple con los requisitos de permanencia en el plan, los gastos terminan al momento del término o cancelación de la cobertura. Así, la cobertura termina si el asegurado fallece. Y se cancela, cuando el asegurado no cumple los requisitos de permanencia, para ambos casos, las obligaciones de la compañía terminan.

La prima de tarifa se representa gráficamente como

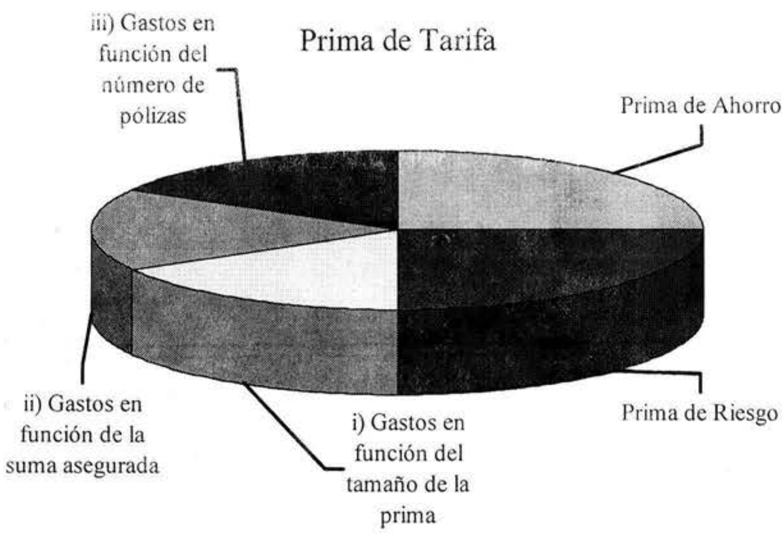


fig. 7.1

La figura a la izquierda, representa los elementos que conforman la prima de tarifa. Observe, que la suma entre la prima de ahorro y la de riesgo, es la prima neta. La cual, contiene los supuestos de mortalidad e interés. El resto de la prima de tarifa, es la carga relacionada con los gastos de la compañía de la *def 7.2*.

Otro aspecto del cálculo de las primas tarifa, es también la forma en la que la compañía distribuye sus gastos entre todas las pólizas. Por ejemplo, una distribución inapropiada podría desfavorecer a aquellas pólizas emitidas para sumas aseguradas altas y/o participantes de edad avanzada. Por otro lado, los participantes jóvenes podrían tener unas primas de tarifa pequeñas. El punto es, no perder el sector maduro de los participantes distribuyendo quizá, cierta proporción de sus gastos entre los participantes jóvenes, buscando así un equilibrio en la distribución de los gastos entre distintos grupos de participantes.

Observación 7.2

Además, para que se cumpla la *definición 7.1*, es necesario que los gastos y la prima neta coincidan para que pueda sumarse la prima y los gastos, $P+E$. Es decir, si la prima neta es anual entonces los gastos tendrán que ser anuales, por lo tanto, se tiene una prima de tarifa anual.

Sin embargo, en caso de ser distintas se pueden encontrar expresiones equivalentes, para hacer que la periodicidad de los gastos y prima neta sean iguales entre sí. Para ilustrar esto, considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo 7.1

Suponga que un participante de edad x paga una prima de tarifa anual, para tener derecho a un seguro ordinario de vida de k *u.m.* de suma asegurada. Si la prima neta es anual, y los gastos son: C por concepto de comisión al momento de emisión, y un gasto g anual a partir del momento de la contratación. ¿Cuál es la prima de tarifa?

Sol.

Como el participante tiene edad actual x. Para una cobertura de un seguro ordinario de vida y primas pagaderas anuales, la prima neta está dada por

$$P_x = \frac{kA_x}{\ddot{a}_x}$$

Haciendo gastos E anualizados, se tiene

$$E = \frac{C + g\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}$$

Sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en la *definición 7.1* la prima de tarifa es

$$\begin{aligned} GP &= P + E \\ &= P_x + \frac{C + g\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} \end{aligned} \qquad ec.\ 7.1$$

Ejemplo 7.2 ■

Suponga que en una póliza, se estipula que el asegurado debe pagar una *prima de tarifa* con periodicidad anual, con la cual, todo participante de edad actual x puede asegurarse de forma vitalicia por una suma asegurada de k *u.m.* Los gastos de la compañía para este tipo de cobertura, son los siguientes: una comisión de C *u.m.* al agente de seguros por la *emisión* de la póliza, un porcentaje de impuesto I anual aplicable a la prima de tarifa, un gasto g_1 por concepto de exámenes médicos que se llevan a cabo cada dos años incluyendo el año de ingreso al plan y finalmente, un gasto g_2 por concepto de gastos de administración y otros gastos que se realizan de forma quincenal. Dar una expresión para la prima de tarifa anual.
Sol.
El primer paso, es determinar la prima neta, es decir:

$$P_x = \frac{kA_x}{\ddot{a}_x}$$

Los gastos deben ser considerados haciendo gastos E anualizados, para cumplir con lo propuesto en la *observación 7.1 y 7.2*. Entonces,

$$E\ddot{a}_x = C + P_x I\ddot{a}_x + g_1 \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(w-x-1)} {}_{2n}E_x + g_2\ddot{a}_x^{(24)}$$

$$E = \frac{C + P_x I\ddot{a}_x + g_1 \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(w-x-1)} {}_{2n}E_x + g_2\ddot{a}_x^{(24)}}{\ddot{a}_x} \qquad ec.\ 7.2$$

La ecuación anterior, transforma los gastos variables, en gastos E uniformes y anualizados de periodicidad igual a la prima neta. Entonces, con la *definición 7.1* se obtiene fácilmente la fórmula para la prima de tarifa, es decir

$$GP = P_x + E$$

Esta última expresión, representa la prima cargada que el asegurado paga de forma anual para obtener los beneficios ofrecidos por la compañía.

■

Los ejemplos anteriores, ilustran la táctica que se sigue para cargar la prima neta, observe, que sin pérdida de generalidad, el mismo proceso puede seguirse para planes de vida múltiple y decremento múltiple.

Por otra parte, el *ejemplo 7.1* tiene los mismos beneficios que el *7.2*, la diferencia entre ambos, es una variación en el comportamiento de los gastos, la cual conduce a una fórmula de prima de tarifa aparentemente más compleja. Por lo tanto, la complejidad de la prima de tarifa está en función de los flujos y periodicidad de los gastos a través del tiempo.

No obstante, la determinación de la carga es un proceso generalmente complejo, ya que involucra muchos factores y suposiciones. Pero finalmente, se pueden reducir a los tipos de gastos vistos. Es por esto, que las suposiciones básicas (mortalidad, interés y gastos), son fundamentales para la simplificación de los gastos en relación a la carga de la prima.

Observación 7.3

Las fórmulas de la prima de tarifa para seguros participativos, se dan de forma más aproximada, ya que las posibles inadecuaciones se ajustan a través de los dividendos. Por otro lado, para el caso de los seguros no participativos, las suposiciones deben más realistas y más cercanas a la posibilidad de futuros gastos, u otras contingencias que pueda tener la empresa, pues este tipo de coberturas es más complejo hacer reajustes.

Ejemplo 7.3

Suponga que para una póliza de seguro vitalicio, la prima P es pagadera cada *m-ésimo* de año, y se desea determinar la prima de tarifa cargada con los siguientes gastos:

i) Un porcentaje C de comisión al agente de seguros, sobre la prima de tarifa al momento de emisión.

ii) Un porcentaje de impuesto I, aplicable sobre la prima P cada *m-ésimo.*

iii) Gastos de administración de g_1 *u.m.* periódicos cada ½ *m-ésimos.*

iv) Gastos por exámenes médicos de g_2 *u.m.* cada tres años, desde la entrada del participante hasta su salida.

v) Gastos adicionales variables $f(t)$ para el año t.

vi) Un gasto trimestral y constante de $kS.A.$ Donde k es un porcentaje y $S.A.$ es la suma asegurada.

Sol.

Para encontrar la prima de tarifa GP, es necesario determinar los gastos periódicos E. Así,

$$E\ddot{a}^{(m)} = (C)GP + I\frac{P}{m}\ddot{a}^{(m)} + g_1\ddot{a}^{(2m)} + g_2\sum_{n=0}^{\infty}{}_{2n+1}E + \sum_{t=0}^{\infty}f(t)_tE + kS.A.\ddot{a}^{(4)}$$

$$E = \frac{(C)GP + I\frac{P}{m}\ddot{a}^{(m)} + g_1\ddot{a}^{(2m)} + g_2\sum_{n=0}^{\infty}{}_{2n+1}E + \sum_{t=0}^{\infty}f(t)_tE + kS.A.\ddot{a}^{(4)}}{\ddot{a}^{(m)}} \qquad ec.7.3$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la *definición 7.1*

$$GP = \frac{P}{m} + \frac{(C)GP + I\frac{P}{m}\ddot{a}^{(m)} + g_1\ddot{a}^{(2m)} + g_2\sum_{n=0}^{\infty}{}_{2n+1}E + \sum_{t=0}^{\infty}f(t)_tE + kS.A.\ddot{a}^{(4)}}{\ddot{a}^{(m)}}$$

Despejando la prima de tarifa, finalmente se tiene:

$$GP = \frac{\frac{P}{m}\ddot{a}^{(m)} + I\frac{P}{m}\ddot{a}^{(m)} + g_1\ddot{a}^{(2m)} + g_2\sum_{n=0}^{\infty}{}_{2n+1}E + \sum_{t=0}^{\infty}f(t)_tE + kS.A.\ddot{a}^{(4)}}{\ddot{a}^{(m)} - C} \qquad ec.7.4$$

La *ecuación 7.4*, representa la prima de tarifa para una póliza con primas pagaderas cada *m-ésimo* de año. Además, las anualidades "$\ddot{a}$" y los dotales puros "${}_tE$" no tienen definida la edad de entrada del participante. Es decir, este ejemplo afirma que los gastos dependen del periodo de pago de primas y las primas mismas.

■

Generalización de los gastos

En la *definición 7.2*, se habla de tres categorías distintas de gastos E. El primero, como un porcentaje de la prima de tarifa representado por E^1, otro gasto, en función de la suma asegurada E^2. Y finalmente, un gasto E^3 en función del total de pólizas administradas por la compañía. Donde E^i es un vector columna con elementos e_j para $j=1,..,n$ y el tipo de gasto $i=1, 2, 3$. Suponiendo que los gastos tienen la misma periodicidad, se representan al tiempo t como:

$$E_{Total} = (GP)E_t^1 + (S.A)E_t^2 + (l_t)E_t^3$$
$$= (GP)\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix} + (S.A.)\begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ . \\ . \\ e'_n \end{bmatrix} + (l_t)\begin{bmatrix} e''_1 \\ e''_2 \\ . \\ . \\ e''_n \end{bmatrix} \qquad ec.\ 7.5$$

Así, los gastos anualizados que tiene la compañía para una cobertura ofrecida a una persona de edad x es:

$$E = \frac{(E_{Total})\sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x}{\ddot{a}_x} \qquad ec.\ 7.6$$

La ecuación anterior, representa los gastos anualizados para una cobertura de una persona de edad actual x. No obstante, puede extenderse para el caso de un grupo de vida múltiple.

Ejercicios del Capítulo 7

Definición de Prima de Tarifa

1.- ¿Qué hipótesis deben de cumplir la prima P y los gastos E, para que se pueda decir que la suma de la prima y los gastos, es igual a la prima de tarifa, $GP=P+E$?

2.- Suponga que se tienen dos primas de tarifa GP_1 y GP_2, ambas para la misma cobertura, tal que $GP_1>GP_2$. Si GP_1 fue obtenida por una compañía de seguros y GP_2 es el costo de asegurarse con otra. ¿Por qué razones puede ser una prima mayor a la otra?

Ayuda: para sus afirmaciones, tome en consideración la *def. 7.1* y las suposiciones técnicas de mortalidad, interés, gastos, etc.

Tipos de Gastos

3.- Suponga que una compañía de seguros, tiene tres tipos de gastos E^i con periodicidad m_i para $i=1, 2, 3$. Encuentre la carga total E_{Total} para que se cumpla

$$GP = P^{(m)} + E$$

4.- Si $P^{(m)}$ es la prima neta pagadera m veces por periodo de un seguro ordinario de vida, para C el porcentaje de comisión sobre prima de tarifa que se paga al agente de ventas al momento de emisión de la póliza y E el gasto de periodicidad $2m$. Encontrar la prima de tarifa GP de periodicidad m.

5.- Suponga que los gastos de una compañía, tienen una distribución uniforme continua en el año de emisión de póliza. Es decir, E~U(0,1). ¿Cuál es el valor esperado que deberá pagar la compañía por concepto de esos gastos?

6.- Una compañía, al emitir una póliza de un seguro ordinario de vida con primas pagaderas cada *m-ésimo* de año, se tienen los siguientes gastos:

i) Un porcentaje C, aplicable a la prima de tarifa al momento de emisión de la póliza, por concepto de comisión al agente de ventas.

ii) Un gasto g_1 en *u.m*, por concepto de exámenes médicos, mismos que se realizan de forma anticipada y cada n años.

iii) Un gasto g_2 de periodicidad $3m$, como porcentaje de la suma asegurada $S.A$, por concepto de administración del seguro vitalicio.

Encontrar la prima de tarifa pagadera m veces por periodo, de acuerdo a la hipótesis anteriores.

Generalización de los gastos

7.- Demostrar que $E'X = XE$. donde E un vector columna de gastos con entradas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ y E' el vector renglón (transpuesta del vector E).

8.- Suponga que E_t^i es un vector (renglón o columna según corresponda) de gastos i al tiempo t, con entradas ${}_te^i{}_1$, ${}_te^i{}_2 \ldots {}_te^i{}_n$ para i = 1, 2, 3. Además, los gastos E_t^i tienen periodicidad $i(m)$, los gastos $i=1$ son porcentajes sobre la prima de tarifa, $i=2$ son un porcentaje sobre suma asegurada $S.A.$ Y finalmente, $i=3$ son los gastos en unidades monetarias *u.m.* por pólizas emitidas. Si se emitieron l_t pólizas, y la prima neta es $P^{(m)}$, ¿cuál es la prima de tarifa GP?

CAPÍTULO 8 "Valuaciones"

Introducción

En general, las compañías de seguros administran una gama o cartera amplia de productos. Por ello, se utilizan métodos cuantitativos y software especializado para responder y explicar la siguiente pregunta: ¿cuánto es el monto constituido en el fondo de reserva para el conjunto de las pólizas que la compañía ha emitido? Así, al proceso de calcular la reserva para todo el conjunto de pólizas, se le conoce como *valuación*.

Es claro para el lector, que dentro de la compañía existen distintos productos, que, evidentemente diseñados para poblaciones con diversas características, por ejemplo; la edad, el tipo de póliza, nivel socioeconómico, etc. Por lo tanto, la forma como se agrupan esas pólizas para su valuación depende básicamente de los siguientes dos puntos; la edad de entrada del participante y el año de emisión de la póliza. De este modo, las pólizas que cumplen estas características pueden ser consideradas de forma conjunta para efectos de calcular la reserva para dicho grupo. Este proceso, se hace tantas veces, como conjuntos de poblaciones con esta característica se tengan, para así, obtener la valuación de la reserva para un momento de cálculo dado, que es denominado como el momento t.

No obstante, el proceso de valuación no sólo es para la reserva, las valuaciones también se hacen, para determinar otras características de la población de estudio, por ejemplo; valuar el monto total de primas pagadas, el número de asegurados en un plan, el total de comisiones pagadas, el monto total de suma asegurada ofrecida, etc. Factores, que generalmente constituyen el *Asset Share*.

Así, el presente capítulo aporta los elementos básicos para el cálculo de una valuación al momento t para diferentes métodos de cálculo.

Momento de Cálculo de la Reserva

En la *definición 6.1*, se dice que la reserva es una cuenta de *pasivo*. Ahora bien, como tal, tiene un manejo contable y fiscal de acuerdo a su naturaleza de pasivo. En este sentido, existen estados financieros [(20)], que por disposición fiscal debe presentar la compañía aseguradora. Las cuales reflejan los pasivos y activos de la compañía, donde, la periodicidad [(21)] con la que se realizan dichos estados, es usualmente; mensual, trimestral y una que se realiza cada año.

De este modo, es una necesidad de la compañía, el poder determinar el monto en el fondo de reserva para cumplir con los requisitos arriba mencionados. Aunado, con el problema de la emisión de primas en distintos momentos. Así, existen reservas: al inicio del año, terminales (final del año), medias o de la periodicidad que se requiera. Para así, cumplir con la obligación y en algunos casos, con la publicación de los estados financieros en los periodos establecidos por ley.

Suponga que se desea saber la reserva al año $t+h$, denotada por ${}_{t+h}V$ donde h es un número entre cero y uno. Para resolver el problema de encontrar una estimación para la reserva al año $t+h$, se puede hacer una aproximación dado que son conocidas las reservas al inicio y final del año. La aproximación, depende del método numérico preferido por el lector, sin embargo, para fines ilustrativos, se supondrá linealidad entre la reserva al inicio del año y al final del mismo, de tal suerte que se pueda hacer una aproximación lineal o polinomial de grado uno, para encontrar ${}_{t+h}V$.

[(20)] *Los estados financieros, son la imagen de la buena o mala política administrativa seguida por una compañía. Por ejemplo, el balance general es un estado financiero, que por ley debe presentarse en las declaraciones de impuestos. El balance, contiene información sobre las cuentas de activos y pasivos.*

[(21)] *La periodicidad con la cual la compañía aseguradora presenta los estados financieros, depende de las disposiciones fiscales aplicables. Por ejemplo, en México, se aplican según los reglamentos y leyes de la SHCP (Secretaría de Haciendo y Crédito Público). Así, se presentan declaraciones de impuestos de forma: mensual, trimestral y anual.*

El supuesto de linealidad significa que,

$$f(x)=a_0+a_1x \qquad \textit{para } a_i \textit{ constantes reales y } f \textit{ una función real} \qquad ec.\ 8.1$$

Adecuando la proposición anterior para la reserva al año $t+h$, se tiene

$$_{t+h}V=a_0+a_1(t+h) \qquad ec.\ 8.2$$

Para interpolar de forma lineal, se puede utilizar la ecuación anterior ya que se conoce la reserva al inicio y al final del año t.

Sea $_tI$ la reserva al inicio del año t representada por

$$_tI=\begin{cases} _{t-1}V+P & \textit{Si continúa el periodo de pago de primas } P \\ _{t-1}V & \textit{Si ha acabado el periodo de pago de primas } P \end{cases}$$

Finalmente, sea $_{t+1}V$ la reserva al final del año t. Por la *ecuación 8.1* se obtiene

$$\begin{aligned} _{t+1}I &= a_0+a_1t \\ _{t+1}V &= a_0+a_1(t+1) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} a_0 &= {}_{t+1}I-({}_{t+1}V-{}_{t+1}I)t \\ a_1 &= {}_{t+1}V-{}_{t+1}I \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores a_0 y a_1 en la *ecuación 8.2* se obtiene la fórmula

$$_{t+h}V=(1-h)_{t+1}I+t_{t+1}V \qquad ec.\ 8.3$$

El resultado anterior, sirve para estimar de forma aproximada la reserva en cualquier momento entre el inicio y final del año. Por ejemplo, $h=1/2$, representa la reserva media, es decir, a mitad del año).

Observación 8.1

Se pueden utilizar otro tipo de interpolaciones, por ejemplo, que la la *ecuación 8.1* se comporta como un polinomio de grado n. Sin embargo, los puntos (reservas) requeridos para poder determinar las constantes a_i serían $n+1$.

Método de valuación

Definición 8.1

La *valuación* es el cálculo de forma agregada[(22)] y bajo las suposiciones técnicas[(23)], del monto constituido en el fondo de reserva a un tiempo t.

def. 8.1

Para cumplir con la definición anterior, se agrupan las pólizas, es decir, se consideran de forma conjunta las pólizas emitidas para un mismo producto a un mismo año de emisión, realizando este proceso, hasta agrupar todas las pólizas que ha emitido la compañía. El siguiente paso, consiste en usar un método de cálculo para la reserva al tiempo t a través del método; prospectivo, retrospectivo, recurrente o bien por la fórmula de Fackler, (ver *Capitulo 6*).

[(22)] *Por forma agregada, se entiende al conjunto de todas las pólizas vigentes de la compañía, agrupando por fecha de emisión y tipo de póliza.*

[(23)] *Existen dos aspectos de gran importancia en los cálculos que efectúan las compañías de seguro de vida; el primero, es con respecto a las suposiciones técnicas que se hacen al momento de hacer un plan, tal como la mortalidad y la tasa de interés, el segundo, es relacionado con la experiencia de la compañía, es decir, lo que está ocurriendo de forma real. Así, es de esperarse que bajo este contexto, las suposiciones técnicas y lo que esta ocurriendo de forma real con el comportamiento de las tasa de interés técnica, la mortalidad y los gastos, tenga variación mínima. Para con esto, no incurrir en el error de subestimar o sobreestimar dichas suposiciones con respecto a su comportamiento real. Para el lector debe quedar muy clara tal distinción, de suerte, que pueda diferenciar entre un cálculo con las suposiciones técnicas y otro elaborado de forma real.*

Definición 8.2

Se denota a cp_{ijk}, como el conjunto de pólizas vigentes de un plan i, emitidas al año j para una persona (s) de edad (es) de entrada k. De esta forma,

$$\sum_{i,j,k} cp_{ijk} = Total\ de\ pólizas\ vigentes\ emitidas \qquad def.\ 8.2$$

Observe, que entre dos conjuntos de pólizas cp_{ijk} y $cp_{i'j'k'}$ con al menos una de las siguientes condiciones $i \neq i'$, $j \neq j'$ o $k \neq k'$, existen diferencias entre el periodo cobertura, las obligaciones del asegurado y las de la compañía. Consecuentemente, la reserva al tiempo t se debe calcular con un método adecuado a estas características. En este sentido, uno de los métodos más utilizados para hacer valuaciones es el *retrospectivo*, sin embargo, nada impide encontrar la reserva al año t a través de otro método, en particular, por el método prospectivo que es equivalente al retrospectivo según el *ejercicio 2 del Capitulo 6.*

Recuerde, que el *VAOA* depende de las contribuciones o primas que realiza el asegurado y por otra parte, *VAOC* esta relacionada con la suma asegurada u obligaciones de la compañía

Definición 8.3

Sean $\sum_h P_h$ el total de primas pagadas de forma agregada, $\sum_h S.A._h$ la suma asegurada de forma agregada, y $\sum_h {}_tV_h$, la reserva agregada al tiempo t, donde $h \in cp_{ijk}$.

def. 8.3

Por el método retrospectivo de la *definición 6.3*, se sabe que ${}_tV = VAOA_t - VAOC_t$. Así, con las *definiciones 8.1, 8.2 y 8.3* se generaliza la valuación para ${}_tV$ por el méodo retrospectivo, es decir,

$$\sum_h {}_tV_h = \sum_h P_h \ddot{a}_{k:\overline{t(j)}|} \frac{1}{{}_{t(j)}E_k} - \sum_h S.A._h A_{k:\overline{t(j)}|} \frac{1}{{}_{t(j)}E_k} \qquad ec.\ 8.4$$

Para toda $h \in cp_{ijk}$

Además, k es la edad(es) de entrada y $t(j)$ es el tiempo en función del año de emisión j

Ejemplo 8.1

Una compañía de seguros, administra un seguro ordinario de vida con suma asegurada de *1 u.m.* para personas de edad actual x. Además, el asegurado tiene que pagar primas P_x anuales desde su entrada al plan hasta su muerte. Si la compañía emitió cinco pólizas en el tiempo $t_1 = 0$, ocho pólizas al año t_2 y finalmente cuatro pólizas al año t_3 donde $t_1 < t_2 < t_3$. ¿Cuál es la valuación de la reserva al año t para $t < t_3$?

Sol.

Como la compañía un seguro ordinario de vida para participantes de edad actual x, se tiene que la prima P_x que paga cada asegurado se escribe como,

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Como la valuación se hace a partir de la primera emisión de póliza al tiempo $t=t_1$, se tiene que las obligaciones de la compañía y el asegurado al año t_1 son las cinco pólizas emitidas en dicho año. Bajo el método retrospectivo se obtiene

$$P_{11} = 5P_x\ddot{a}_{x:\overline{t-t_1}|}\frac{1}{{}_{t-t_1}E_x}$$

$$A_{11} = 5A^{\;1}_{x:\overline{t-t_1}|}\frac{1}{{}_{t-t_1}E_x} \qquad ec.\ 8.5$$

Para el año t_2:

$$P_{12} = 8P_x\ddot{a}_{x:\overline{t-t_2}|}\frac{1}{{}_{t-t_2}E_x}$$

$$A_{12} = 8A^{\;1}_{x:\overline{t-t_2}|}\frac{1}{{}_{t-t_2}E_x} \qquad ec.\ 8.6$$

Para el año t_3:

$$P_{13} = 4P_x\ddot{a}_{x:\overline{t-t_3}|}\frac{1}{{}_{t-t_3}E_x}$$

$$A_{13} = 4A^{\;1}_{x:\overline{t-t_3}|}\frac{1}{{}_{t-t_3}E_x} \qquad ec.\ 8.7$$

Observe que P_{ij} y A_{ij} son el *VAOA* y *VAOC* respectivamente para el tipo de plan de seguro i al año de emisión j. Así, la valuación al tiempo t es

$$\sum_{j=1}^{3} {}_tV_{1j} = \sum_{j=1}^{3} P_{1j} - \sum_{j=1}^{3} A_{1j} \qquad ec.\ 8.8$$

Donde $\sum_{j=1}^{3} {}_tV_{1j}$, representa la valuación al tiempo t para un seguro ordinario de vida con tres años distintos de emisión de pólizas.

■

Ejemplo 8.2

Una compañía de seguros, administra dos productos:

i) Un seguro dotal mixto temporal a n años con suma asegurada (*S.A.*) de k_1 *u.m,* para el(los) participante(s) de edad(es) actual(es) v_{ijk}. Para tener derecho a este beneficio, el asegurado debe pagar una prima anual $P_{v_{ijk}}$, que depende de la edad(es) del(los) participante(s) y la cobertura.

ii) Un seguro ordinario de vida con suma asegurada de k_2 *u.m.* para el(los) participante(s) de edad(es) actual(es) v_{ijk}. El(los) participante(s) debe(n) contribuir con una prima $P_{v_{ijk}}$ los primeros n-2 años, que depende de la(s) edad(es) del(los) participante(s) y la cobertura.

Para el primer plan, se tienen m_1 asegurados o grupos de asegurados con edad(es) v_k para $k=1, ..., m_1$. De los cuales, m_1' pólizas fueron emitidas el año $t_1=0$, y las restantes m_1-m_1' en el año t_2 donde $t_1 < t_2$ y $m_1' < m_1$.

Para el segundo plan, hay m_2 asegurados o grupos de asegurados con edad(es) v_k para $k=m_1+1,\ m_1+2, ...,\ m=m_1+m_2$. El año t_3 se emitieron m_2' pólizas, el año t_4 se emitieron m_2''-m_2' y en el año t_5 se emitieron m_2-m_2' pólizas, donde $t_2<t_3<t_4<t_5$ y $m_2'<m_2''<m_2$.

Observe que la compañía tiene m participantes o grupos de participantes en su cartera de clientes, tal que $m= m_1+m_2$. ¿Cuál es la valuación para la reserva al año $t=n$-5, posterior al año t_1?

Sol.

La compañía de seguros, administra dos tipos de planes, y dentro de cada plan existen ciertos participantes con sus respectivas características. Para simplificar el proceso de valuación, primero se determinan las obligaciones de ambas partes (asegurado y compañía de seguros) dentro de cada plan para aquellos grupos que tengan mismo año de emisión de póliza. El segundo pasó, es considerar la unión de todas esas reservas calculadas, cuya resultante, es la valuación al año *n-5*.

De esta forma, sea P_{ij} el valor actual de las obligaciones del asegurado (*VAOA*), y A_{ij} el valor actual de las obligaciones de la compañía (*VAOC*). Donde, i es el tipo de plan y j es el año de emisión.

Entonces, para el primer plan se tiene que el valor actual de las obligaciones de la compañía y el asegurado de las pólizas emitidas al año t_1, para el(los) m_1' participante(s) evaluando al tiempo *n-5* es

$$P_{11} = \sum_{k=1}^{m_1'} P_{v_{11k}} \ddot{a}_{v_{11k}:\overline{n-5-t_1}|} \frac{1}{{}_{n-5-t_1}E_{v_{11k}}}$$

$$A_{11} = \sum_{k=1}^{m_1'} k_1 A^{\ 1}_{v_{11k}:\overline{n-5-t_1}|} \frac{1}{{}_{n-5-t_1}E_{v_{11k}}} \qquad ec.\ 8.9$$

Usando un procedimiento análogo para las pólizas emitidas al año t_2, de los $m_1 - m_1'$ participantes y evaluando al año *n-5*, se tiene:

$$P_{12} = \sum_{k=m_1-m_1'}^{m_1} P_{v_{12k}} \ddot{a}_{v_{12k}:\overline{n-5-t_2}|} \frac{1}{{}_{n-5-t_2}E_{v_{12k}}}$$

$$A_{12} = \sum_{k=m_1-m_1'}^{m_1} k_1 A^{\ 1}_{v_{12k}:\overline{n-5-t_2}|} \frac{1}{{}_{n-5-t_2}E_{v_{12k}}} \qquad ec.\ 8.10$$

Para el segundo plan, se tiene que el valor de las obligaciones de la compañía y el asegurado para las pólizas emitidas al año t_3 de los m_2' participante(s), evaluada al tiempo *n-5* esta representada por,

$$P_{21} = \sum_{k=m_1}^{m_1+m_2'} P_{v_{21k}} \ddot{a}_{v_{21k}:\overline{n-5-t_3}|} \frac{1}{{}_{n-5-t_3}E_{v_{21k}}}$$
$$A_{21} = \sum_{k=m_1}^{m_1+m_2'} k_2 A^{\ \ 1}_{v_{21k}:\overline{n-5-t_3}|} \frac{1}{{}_{n-5-t_3}E_{v_{21k}}} \qquad \text{ec. 8.11}$$

Para los $m_2' - m_2''$ participantes de las pólizas emitidas al año t_4.

$$P_{22} = \sum_{k=m_1+m_2''-m_2'}^{m_1+m_2''} P_{v_{22k}} \ddot{a}_{v_{22k}:\overline{n-5-t_4}|} \frac{1}{{}_{n-5-t_4}E_{v_{22k}}}$$
$$A_{22} = \sum_{k=m_1+m_2''-m_2'}^{m_1+m_2''} k_2 A^{\ \ 1}_{v_{22k}:\overline{n-5-t_4}|} \frac{1}{{}_{n-5-t_4}E_{v_{22k}}} \qquad \text{ec. 8.12}$$

Para los $m_2'' - m_2$ participantes de las pólizas emitidas al año t_5.

$$P_{23} = \sum_{k=m-m_2''}^{m} P_{v_{23k}} \ddot{a}_{v_{23k}:\overline{n-5-t_5}|} \frac{1}{{}_{n-5-t_5}E_{v_{23k}}}$$
$$A_{23} = \sum_{k=m-m_2''}^{m} k_2 A^{\ \ 1}_{v_{23k}:\overline{n-5-t_5}|} \frac{1}{{}_{n-5-t_5}E_{v_{23k}}} \qquad \text{ec. 8.13}$$

Finalmente, usando las *ecuaciones 8.9 a 8.13* y aplicando la *def. 8.1* se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} {}_tV_{ij} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} P_{ij} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} A_{ij} \qquad \text{ec. 8.14}$$

Donde $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} {}_tV_{ij}$, representa la *valuación* para la reserva al año *n-5* de la compañía de seguros. Donde i es el tipo de plan de la compañía de seguros j el año de emisión.

■

Observación 8.2

En los *ejemplos 8.1 y 8.2* se ilustró una forma de encontrar la valuación a un año t por el método retrospectivo. Es claro, que la complejidad del cálculo está en función de; la cantidad de productos que la compañía administra, el número y diversidad de asegurados dentro de dichos productos y los años de emisión para las pólizas. Por estas razones, se debe tener especial cuidado con el manejo de los subíndices del conjunto cp_{ijk} para determinar de este modo la valuación.

Otros aspectos importantes de la Reserva

Otros puntos de importancia en los sistemas de cálculo de la reserva y de las valuaciones son los métodos modificados de reserva, dentro de los cuales se encuentra el plan completo preliminar del periodo[24].

Por ejemplo, con respecto a la distribución de los gastos, es claro que el primer año de emisión de la póliza, la compañía de seguros tiene gastos adicionales derivados por comisiones a agentes de ventas, exámenes médicos y otros. Es por ello, que las compañías modifican las primas netas, de suerte, que se tenga una prima especial el primer año para cubrir ese tipo de gastos y en consecuencia modificar la reserva. A esto, se le conoce como método modificado de reserva, que es el cimiento e algunos métodos de valuación.

La forma en la que se hace una reserva modificada para el caso de primas netas anuales, es a partir de las primas, por ejemplo, si P es una prima neta, entonces,

$$P\ddot{a}_{f(x)} = \alpha + \beta a_{f(x)} \qquad \textit{ec. 8.15}$$

Donde α representa un prima reducida para el primer año, que de hecho, es la prima pagada de forma anticipada. Ya que en este año, los gastos son mayores y una de las fuentes de financiamiento es a través de este ingreso. Por otra parte, β es la prima constante que el asegurado paga a partir del final de primer año. Además, $\ddot{a}_{f(x)}$ y $a_{f(x)}$ son anualidades contingentes que dependen de x, para una persona de edad x sería $\ddot{a}_x$.

Despejando β de la *ec. 8.15* para α conocida:

$$\beta = \frac{P\ddot{a}_{f(x)} - \alpha}{a_{f(x)}} \qquad \textit{ec. 8.16.}$$

---

[24] *Full Preliminary Term Plan, ver glosario.*

Así, las valuaciones modificadas pueden hacerse con la *ecuación 8.15* para el caso del plan preliminar del periodo. Así, la compañía tiene un margen de movilidad mayor durante el primer año de administración del seguro. Esto es particularmente útil, para aquellas compañías que desean modificar sus métodos de valuación y cálculo de reserva.

Ejemplo 8.3

Suponga que una compañía, ofrece un seguro ordinario de vida con suma asegurada de *k u.m.* Así, el asegurado debe pagar una prima *P* anual para tener derecho a la suma asegurada ofrecida. Encontrar la reserva modificada por el método prospectivo.
Sol.

Usando la *ec. 8.15* se obtiene

$$ {}_tV_x^{\text{mod}} = A_{x+t} - \beta a_{x+t} $$

La ecuación anterior, representa la reserva modificada para un seguro ordinario de vida y periodo de pago de primas anual desde la contratación hasta la muerte.

■

Observación 8.3

Al crear la *reserva modificada*, se busca evitar que al final del primer año se tenga una reserva negativa. Por está razón, existen criterios basados en los parámetros α y β, que ayudan a evitar estas circunstancias adversas para la compañía.

Considere el siguiente criterio, para evitar el problema de valuaciones de reserva negativas. Sea el parámetro α mayor o igual a un seguro dotal para un participante de edad actual *x*, $\alpha \geq A^{1}_{x:\overline{1|}}$. Lo anterior implica, que la primer prima pagada por el asegurado es de al menos el riesgo de fallecer entre el inicio y final del año de emisión de la póliza.

Al parámetro α evaluado como, $\alpha \geq A^{1}_{x:\overline{1|}}$ se le conoce como el *plan preliminar del periodo (*full preliminary term plan*)*.

La idea del párrafo anterior puede ser retomada y extendida para establecer diversos criterios mínimos de valuación para los parámetros α y β. Además de estos, se pueden buscar pagos equivalentes para ofrecer al participante un esquema de pago de primas más flexible y acorde a las necesidades de éste y la compañía.

Así, el esquema de pago de primas puede ser tan diverso como se desee, y no sólo acotarse por la *ec. 8.15*. Por ejemplo, se puede tener una prima nivelada P anual, conformada por α al momento de la emisión de la póliza y β_i creciente al final del primer año de emisión y hasta el final del periodo de cobertura, es decir, $\beta_1 < \beta_2, < \beta_3 < \ldots < \beta_n$. Lo interesante de expresar la prima neta como una suma de parámetros α y β, es brindar más flexibilidad en la administración de los gastos, distribuyéndolos uniformemente en el cálculo de la prima.

Ejercicios del Capítulo 8

Momento del Cálculo de Reserva

1.- Suponga que la reserva al año t representada por $_tV$, tiene el comportamiento de una función $f(x)=a_0 + a_1x + a_2x^2$. Con la función $f(x)$ aproxime la reserva en el intervalo del inicio y final del año, es decir, el intervalo cero y uno.

Método de valuación

2.- Suponga que una compañía de seguros emitió n pólizas al inicio del año, para un seguro ordinario de vida y participantes de edad x al momento de la emisión. Si el asegurado paga primas cada *m-ésimo* por $P^{(m)}/m$ *u.m*, complete la siguiente tabla con las expresiones faltantes de acuerdo a la columna (1).

(1)	Concepto	Expresión
(a)	$\sum cp_{ijk}$, Pólizas emitidas	
(b)	$VAOA_t$, valor actual de las obligaciones del asegurado al año t	
(a)(b)	Total de primas pagadas por los asegurados al año t	
(c)	$VAOC_t$, valor actual de las obligaciones de la compañía al año t	
(a)(c)	Total de obligaciones de la compañía al año t	
(b-c)	$_tV$, Reserva constituida al año t	
(a)(b-c)	**$\sum {_tV}$, valuación al año t**	

3.- Una compañía de seguros, tiene un conjunto de pólizas cp_{ijk} donde i es el tipo de plan, j el año de emisión y k la edad de entrada del participante de ese plan. Además, $\sum P_h$ representa el total de primas pagadas de forma agregada, $\sum S.A._h$ la suma asegurada de forma agregada, finalmente, $\sum {_tV_h}$ la reserva agregada al tiempo t, donde $h \in cp_{ijk}$. La palabra agregada, representa toda la población del conjunto de pólizas cp_{ijk}. Así, encontrar una expresión para la valuación $\sum {_tV_h}$ por el método de Fackler.

Ayuda: Utilice la definición del método recursivo, aplicando después las trasformaciones de Fackler. Finalmente, exprese la reserva para el conjunto de pólizas cp_{ijk}.

4.- Una compañía de seguros, administra un seguro de vida dotal mixto A_1 temporal a n años con suma asegurada SA_1 para participantes con característica k_1. Además, la compañía tiene otra cobertura de un seguro ordinario de vida A_2 con suma asegurada SA_2. Ahora, suponga que la primer cobertura comenzó a administrarse al inicio del año, y la segunda, en el año t_1, con $t_1>0$. Si al año j se emitieron e_j pólizas, tal que $j=1,2,...,t$ para ambas coberturas. Encontrar una expresión para una valuación al año t, sí $t_1<t$.

5.- La valuación al año t se denota como $\sum_t V_h$ y la valuación del año $t+1$ escrita como $\sum_{t+1} V_h$. Encontrar una expresión para la valuación al año t_0 ($\sum_{t_0} V_h$), tal que $t<t_0<t+1$, recuerde que h pertenece al conjunto cp_{ijk}. Dar otra expresión si, $t_0>t+1$.

Otros Aspectos Importantes de la Reserva

6.- Suponga que $P^{(m)}$, es la prima pagadera cada *m-ésimo*, para obtener una cobertura ofrecida por una compañía. Exprese $P^{(m)}$, suponiendo en la contratación la prima es α, los siguientes i años β_1 y del año $i+1$ en adelante, β_2. Además, utilice la anualidad anticipada que depende de la edad x escrita como, $\ddot{a}_{f(x)}$ para calcular los valores presentes. Finalmente, determine la reserva modificada por los parámetros α, β_1, β_2 por el método prospectivo.

7.- Se sabe que ${}_tV$ es una cuenta de pasivo. En este sentido, si la reserva al año t es menor o mayor que cero tiene ciertos efectos en la compañía. Si, la reserva al año t representada por ${}_tV$ tiene un comportamiento según la función,

$${}_tV = \begin{cases} {}_tV < 0 & para\ 0 < t \leq 5 \\ {}_tV > 0 & para\ t > 5 \end{cases}$$

Determinar:

i) Si ${}_tV<0$, beneficia o perjudica a la compañía, ¿por qué? ¿Se puede justificar matemáticamente su aseveración?

ii) ¿Cómo se puede modificar la reserva ${}_tV$, tal que ${}_tV>0$ para $t>0$?

iii) ¿Si se utiliza el plan preliminar del periodo que sucede?

iv) De una expresión matemática para justificar su respuesta, por cada uno de los puntos anteriores.

CAPÍTULO 9 "Asset Share"

Introducción

Una de las inquietudes de las compañías de seguros, es cuantificar de forma eficaz los flujos de capital. Dichos flujos de entrada y salida, tienen su movimiento en el fondo que denotado por la letra F. Así, el *asset share* (activo compartido) está basado en los activos de la compañía representados de forma equitativa por los asegurados. Dicha representación, se basa en las contribuciones de los participantes, es decir, las primas de tarifa menos el costo del seguro, gastos y dividendos (en el caso de seguros participativos) pertenecientes a la póliza.

Este cálculo, se hace con la experiencia actual, aunada con las suposiciones técnicas hechas en un inicio (mortalidad, interés, gastos) para el cálculo de las primas y reserva. Así, las observaciones experimentadas, no deben distar de aquellas hechas y previstas según los supuestos técnicos iniciales.

Lo anterior, hace notar que existe una complejidad para encontrar el monto constituido en el fondo F de los activos, mismo que puede administrar la compañía. Tal calculo se complica cuando las coberturas ofrecidas por las compañías de seguros diversos. En este capítulo, se estudian un par de métodos para determinar el asset share de acuerdo a algunos puntos básicos como:

i) La edad de los participantes.
ii) El total de pólizas vendidas por periodo.
iii) La suma asegurada de las pólizas emitidas.
iv) El comportamiento entre las suposiciones técnicas y reales.

Definición de Asset Share

Definición 9.1

El *asset share* al tiempo t, escrito como A_t, es la parte real del activo representado por equidad de los asegurados de una compañía de seguros, representado por,

$$A_t = \frac{F_t}{l_t} \qquad def.\ 9.1$$

Donde F_t es el fondo al tiempo t y l_t es el conjunto de participantes al tiempo t o el número de vivos de edad actual t. Por simplicidad se utiliza la siguiente ecuación.

$$F_t = A_t l_t \qquad ec.\ 9.1$$

Es claro, que en el fondo F_t actúan flujos de entrada y salida de capital. Por ejemplo, ingresos por el pago de primas de tarifa más intereses generados por las mismas, egresos por concepto de cancelación, pago de reclamaciones, gastos, etc.

Ejemplo 9.1

Sea A_t el *asset share* al final del año t de la póliza por unidad de participante para cubrir las reclamaciones de los participantes con suma asegurada de $S.A.$ $u.m.$ Así,

$$A_t = \frac{1}{p_{t-1}^{(T)}}\left\{(1+i)\left[A_{t-1} + GP\left(1 - E_t^1\right) - E_t^2 - E_t^3\right] - S.A.q_{t-1}^{(d)}\left((1+i)^{1/2} - 1\right) - q_{t-1}^{(c)}CV\right\} \qquad ec.\ 9.2$$

Donde

t = El año de la póliza.

GP = Prima de tarifa pagadera cada año[(25)].

E_t^1 = Porcentaje de gastos de la prima al año t[(25)].

E_t^2, E_t^3 = Gastos por participante en $u.m.$ al año de póliza t[(25)].

i = Tasa de interés técnico para el fondo de inversión.

[(25)] *En el Capítulo 7, se estudió la prima de tarifa y los tipos de gastos para calcularla.*

$p_{t-1}^{(T)}$ = Probabilidad que un participante dentro del plan de edad actual *t-1* continúe en el mismo a la edad *t*. (26)

$q_{t-1}^{(d)}$ = Probabilidad que un participante salga del plan por causa de muerte entre la edad *t-1* y *t*. (26)

$q_{t-1}^{(c)}$ = Probabilidad que un participante salga del plan por concepto de cancelación entre la edad *t-1* y *t*. (26)

CV = El valor garantizado(27) en *u.m.* si el participante cancela la póliza.

l_0 = El radix (número de participantes al momento de emisión de la póliza).

$d_{t-1}^{(d)}$ = Número de salidas del plan por causa de muerte entre las edades *t-1* y *t*.

$d_{t-1}^{(c)}$ = Número de salidas del plan por cancelación entre las edades *t-1* y *t*.

La *ec. 9.2* representa el asset share por participante. Sin embargo, resulta más simple utilizar esta expresión en términos de F_t como lo hace la *ec. 9.1*. Así, sustituyendo la *ec. 9.1* en *9.2*, se obtiene

$$F_t = \{F_{t-1} + l_{t-1}\left[GP\left(1 - E_t^1\right) - E_t^2 - E_t^3\right]\}(1+i) - S.A.d_{t-1}^{(d)}\left((1+i)^{1/2} - 1\right) - d_{t-1}^{(c)}CV \qquad ec.\ 9.3$$

Para volver a la ecuación de asset share tradicional, lo único que se necesita es aplicar la *def. 9.1*, es decir, dividir por l_{t-1} la ecuación anterior. La ventaja de utilizar la *ec. 9.3,* yace en que el fondo puede ser visto como un conjunto de flujos de efectivo o capital más el acumulado de los intereses(28). Así, cada unidad monetaria en el fondo al inicio del año tiene al final del año, la unidad monetaria más intereses(28).

■

(26) *Los aspectos referentes a esta notación se analizan en la Parte IV "Decremento Múltiple".*

(27) *El valor garantizado "CV" (cash value), es una cantidad en u.m. que el participante de un plan recibe si sólo sí éste se encuentra con vida. En el Capítulo 4, se trabaja de forma implícita con este tipo de valores cuando se utilizan anualidades diferidas. Ver glosario.*

(28) *Las consideraciones en las tasas de interés son diversas para el caso de la salida de los participantes. Por ejemplo; el supuesto de salidas a mitad del año (la hecha en las ecuaciones 9.2 y 9.3),* basadas en salidas distribuidas uniformemente en el año, o, el supuesto de tasas de interés simple, es decir, que al momento de salida del participante, se tiene un medio de la tasa de interés técnica.

Uso de la Integral de Stieltjes en el Asset Share

La integral de *Stieltjes*[29] es una generalización de las integrales de *Riemann y Darboux,* aunque, posteriormente se hizo una generalización conocida como la integral de *Lebesgue-Stieltjes*. Así, la interpretación del Asset Share a través de la integral de Stieltjes, permite tener una técnica para determinarlo a cualquier tiempo t y reducir el problema a las suposiciones de tasas de interés, emisiones y salidas del grupo, siempre perder de foco los principios de contabilidad generalmente aceptados (GAAP, ver glosario).

Definición 9.2

Se dice que la función f es integrable con respecto a la función g en el intervalo $[a, b]$ escrito como $I = \int_a^b f(s)dg(s)$ si para f, g funciones reales definidas en $[a, b]$ dado $\varepsilon > 0$ existe $P_\varepsilon \in P([a,b])$ tal que $|s(p,f,g) - I| < \varepsilon \ si \ P \supset P_\varepsilon$ donde,

$$s(p,f,g) = \sum_{i=1}^{n} f(s'_i)[g(s_i) - g(s_{i-1})], \ e \ I = \int_a^b f(s)dg(s) \qquad def. 9.2$$

Observe, que $P = (a=s_0.s_1,s_2,.......,s_n=b)$ es una partición arbitraria del intervalo $[a, b]$, s'_i es un punto arbitrario tal que $s'_i \in [s_{i-1}, s_i]$ para $i=0,1,2,....,n$, y $||P||$ el intervalo más grande de $[s_{i-1},s_i]$. Si $a=0$ y $b=1$ representan el inicio y final del año de emisión de la póliza, la definición anterior se expresa como:

$$I = \int_0^1 f(s)dg(s) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(s'_i)[g(s_i) - g(s_{i-1})] \qquad ec. 9.4$$

---

[29] *La integral de Stieltjes, fue introducida por vez primera en 1894 por T.J. Stieltjes "Recherches sur les fractions continues".* Las definiciones y pruebas con respecto a este concepto, pueden ser consultadas en el capítulo 6 del libro de Walter Rudin, *"Principles of mathematical analysis"*. Además, el uso de la integral de Stieltjes en el asset share, fue presentado por Peyton J. Huffman en 1978 en su artículo, "Asset share mathematics". Ver bibliografía.

Observación 9.1

La integral de Stieltjes generalmente existe, si f es continua y g tiene una variación acotada, es decir existe una constante M tal que $s(p, f, g) < M$.

Observación 9.2

Si g tiene derivada continua en el intervalo $[a, b]$ y si se utiliza el teorema del valor medio, la integral de Stieltjes puede ser reducida a una integral de Riemann. Así,

$$g(s_i) - g(s_i - 1) = g'(s_i'')\,(s_i - s_{i-1})$$

Sustituyendo lo anterior en la *ec. 9.4*, se obtiene,

$$\int_0^1 f(s)dg(s) = \int_0^1 f(s)g'(s)ds$$

Aún con las dos observaciones anteriores, es probable que no sea del todo evidente para el lector la forma en la que se empleará la *def. 9.2* en el cálculo del Asset Share. Sin embargo, si $f(s)$ es una *función de monto* y $g(s)$ es la *función de incidencia*, por lo tanto, $f(s)$ describe el valor del monto esperado para un flujo de efectivo[(30)] si el evento sobre el cual está considerado ocurre. Por otra parte, $dg(s)$ describe la incidencia esperada de eventos que harán incrementar el flujo de efectivo.

Ejemplo 9.2

Para construir lo flujos de efectivo, primero se tiene que utilizar la *ec. 9.3*, y haciendo un poco de álgebra, se obtiene la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} F_t &= F_{t-1} + iF_{t-1} \\ &\quad + l_{t-1}\left(GP - GPE_t^1 - E_t^2 - E_t^3\right) - S.A.d_{t-1}^{(d)}(1+i)^{1/2} + S.A.d_{t-1}^{(d)} - d_{t-1}^{(c)}CV \\ &\quad + il_{t-1}\left(GP - E_t^1 - E_t^2 - E_t^3\right) \end{aligned} \qquad ec.\ 9.5$$

[(30)] *El flujo de efectivo, se entiende como el producto de una función f(s) de monto y una función de incidencia g(s). Por ejemplo, el ingreso obtenido por las primas, puede ser visto como un flujo de efectivo tal que en el momento t, el Ingreso por primas es igual a;* $(GP)(l_t)$.

De esta forma, para ilustrar el uso de la *def. 9.2* en el cálculo del Asset Share, primero se tiene que hacer una partición de la ecuación anterior en flujos de efectivo. Así, observe que uno de los flujos de efectivo de la *ec. 9.5*, es el ingreso por primas que obtiene la compañía aseguradora. Es decir, ingreso de primas representado por el producto; $(GP)(l_{t-1})$, en este caso, las primas son pagaderas al inicio del año y tienen una función de incidencia $g(s)$, cuya derivada es la función escalón;

$$g'(s)=\begin{cases}0 & si\ \ s\le 0\\ l_{t-1+s} & si\ \ 0<s\le 1\end{cases} \qquad ec.\ 9.6$$

Si se utiliza la *ec. 9.4* y la *obs. 9.2* donde $f(s)=GP$ para toda s, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(s)dg(s) &= \int_0^1 GPg'(s)ds\\ &= GPl_{t-1}\end{aligned}$$

El resultado de la integral anterior, es en efecto el ingreso de primas propuesto en las *ec's. 9.3* y *9.5* pero utilizando la integral de Stieltjes. Donde, $f(s)$ es la función de monto y $g(s)$ es la función de incidencia. Otro flujo de efectivo, se construye considerando $f(s)$ = $S.A.$ y $g'(s)$ = $d_{t-1}^{(d)}(s)$. En este contexto, si las muertes se distribuyen uniformemente en el año de emisión de la póliza (nuevamente una función escalón), se tiene,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(s)dg(s) &= \int_0^1 S.A.g'(s)ds\\ &= S.A.d_{t-1}^{(d)}\end{aligned}$$

El resto de los flujos de efectivo de la *ec. 9.4*, pueden ser expresados en términos de la integral de Stieltjes de forma análoga, con una elección adecuada de $f(s)$ y $g'(s)$.

■

Observación 9.3

Los flujos de efectivo, pueden ser vistos de distintas formas para agruparse según convenga. Por ejemplo, en la *ec. 9.4* se puede tomar $f(s)=GP-E_t^1-E_t^2-E_t^3$ y utilizar la *ec. 9.6*, donde, nuevamente $g(s)$ es una función de incidencia. Observe, que para tomar los flujos de efectivo de una categoría dada, ésta debe ser generada por el mismo evento, función de incidencia $g(s)$.

Construcción del modelo de Asset Share con la Integral de Stieltjes

Definición 9.3

Se denota $\{C_k\}$, al conjunto arbitrario de flujos de efectivo, para $k = 1,2,...n$, donde cada categoría puede ser expresada como una integral de Stieltjes sobre el año de póliza (el intervalo de cero a uno), de esta manera, el flujo se representa como;

$$C_k = \int_0^1 f_k(s)dg_k(s) \qquad \textit{def. 9.3}$$

Las funciones; $f_k(s)$ y $g_k(s)$ son nuevamente la función de monto e incidencia respectivamente, según lo visto en los ejemplos anteriores. Así, el total de flujos de efectivo para un mismo tipo de póliza se puede expresar como,

$$\sum_{k=1}^{n} C_k = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(s)dg_k(s) \qquad \textit{ec. 9.8}$$

Definición 9.4

Sea I_k el ingreso asociado a cada flujo de efectivo C_k. De forma, que cada flujo de efectivo $f_k(s)g_k(s)$ dentro del año de la póliza gana una tasa de interés(31) de; $i(1-s)\,f_k(s)g_k(s)$ al momento s, representado por;

$$I_k = \int_0^1 i(1-s)f_k(s)dg_k(s) \qquad \textit{def. 9.4}$$

Distribuyendo la ecuación anterior y usando la *ec. 9.7* se obtiene

$$I_k = i\left[C_k - \int_0^1 sf_k(s)dg_k(s)\right] \qquad \textit{ec. 9.9}$$

(31) *Este ingreso por el incremento de interés, es bajo el supuesto de interés simple $(1+it)$, ya que el flujo de efectivo gana interés simple dentro de su respectivo periodo de incidencia. Sin embargo, bien puede considerarse interés compuesto $(1+i)^t$. De esta forma, el flujo de efectivo $f_k(s)g_k(s)$ al momento s ganaría una tasa de interés $(1+i)^{1-s}f_k(s)g_k(s)$.*

Si se factoriza C_k en la *ec. 9.9*, se obtiene

$$I_k = iC_k \left[1 - \frac{\int_0^1 s f_k(s) dg_k(s)}{C_k} \right] \qquad ec.\ 9.10$$

Si T_k es el primer momento normalizado de f_k sobre la función de incidencia g_k, se tiene

$$T_k = \begin{cases} \dfrac{\int_0^1 s f_k(s) dg_k(s)}{C_k} & si \quad C_k \neq 0 \\ 0 & si \quad C_k = 0 \end{cases} \qquad ec.\ 9.11$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la *ec. 9.9*.

$$I_k = iC_k (1 - T_k) \qquad ec.\ 9.12$$

Observe que T_k de la *ec. 9.11*, intuitivamente es el promedio ponderado de la duración de incidencia para un flujo de efectivo *k*. En este sentido, el ingreso total obtenido por la inversión de los flujos de efectivo C_k a la tasa de interés *i* es;

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = i \sum_{k=1}^{n} C_k (1 - T_k) \qquad ec.\ 9.13$$

Finalmente, con la *ec. 9.8* y *9.13* se tiene explícitamente el monto constituido en el fondo *F* al tiempo *t*, dado por

$$F_t = F_{t-1} + iF_{t-1} + \sum_{k=1}^{n} C_k + i \sum_{k=1}^{n} C_k (1 - T_k) \qquad ec.\ 9.14$$

La expresión anterior, sirve para cualquier tipo de póliza, es decir, para cualquier clase de seguro de vida y anualidad. Sin embargo, las restricciones, están inmersas en los flujos de efectivo, ya que éstos deben ser adecuados para que pueda construirse la integral de Stieltjes con la función de monto *f*(*s*) y una función de incidencia *g*(*s*), la cual, si cumple la observación *9.2* puede reducirse a una integral de Riemann.

Ejemplo 9.3

Usando la notación del *ejemplo 9.1*, considere una cobertura en la que el asegurado paga primas de tarifa con periodicidad m de $GP^{(m)}/m$ *u.m.* durante cada año. Si las muertes y salidas por cancelación de los participantes son distribuidas uniformemente en el año de la póliza, de una expresión para F_t según la integral de Stieltjes.

Sol.

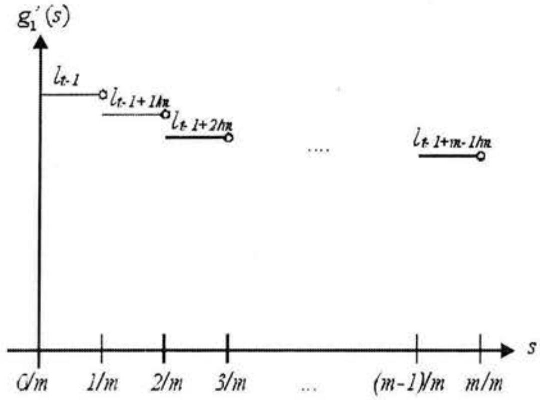
Lo primero que se necesita hacer, es identificar los flujos de efectivo involucrados en esta cobertura, para así, determinar las C_k y T_k para cada k según la *ec. 9.14.* De esta manera, se tienen los siguientes flujos, análogos a los de las *ec's. 9.2, 9.3, 9.5.*

$$i)\ \frac{GP^{(m)}}{m} l_{t-1}$$
$$ii)\ -\frac{GP^{(m)}}{m} E_t^1$$
$$iii)\ -l_{t-1}E_t^2$$
$$iv)\ -l_{t-1}E_t^3$$
$$v)\ -S.A.d_{t-1}^{(d)}$$
$$vi)\ -d_{t-1}^{(c)}CV$$

Para i), el primer flujo de efectivo igual al ingreso por primas de tarifa, considere a la función de monto $f_1(s)=\dfrac{GP^{(m)}}{m}$, cuya función de incidencia es $g_1(s)$, por lo tanto,

$$g_1'(s)=l_{t-1+s/m} \quad si\ s\in\left[\frac{s}{m},\frac{s+1}{m}\right]\ para\ s=0,1,2,\ldots,m-1$$

Gráficamente,



De este modo, el flujo de efectivo se representa por

$$C_1 = \int_0^1 f_1(s)dg_1(s)$$

Por ser g definida así, se tiene,

$$\int_0^1 f_1(s)dg_1(s) = \int_0^1 f_1(s)g'_1(s)ds$$

Observación 9.4

Estrictamente hablando, la igualdad anterior no pude darse ya que la función $g_1(s)$ tiene derivada discontinua en los puntos s/m. Sin embargo, abusando de que la función $g'_1(s)$ es continua para los intervalos $[s/m, s+1/m]$ se supondrá cierta la *observación 9.2*. Además, este problema puede ser corregido si se define la función $g_1(s)$ por intervalos, pero para fines de asset share, es innecesario, así

$$C_1 = \int_0^1 f_1(s)g'_1(s)ds = \int_0^1 GP^{(m)}(l_{t-1+s/m})ds$$
$$= \frac{1}{m}GP^{(m)}\sum_{s=0}^{m-1} l_{t-1+s/m}$$

Por las hipótesis del ejercicio, se sabe que las muertes y las salidas por cancelación se distribuyen uniformemente en el año. Lo anterior significa que,

$$l_{t-1+s/m} = l_{t-1} - \frac{s}{m}d_{t-1}^{(d)} - \frac{s}{m}d_{t-1}^{(c)}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en C_1, se obtiene

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{m}GP^{(m)}\sum_{s=0}^{m-1} l_{t-1+s/m} \\ &= \frac{1}{m}GP^{(m)}\sum_{s=0}^{m-1}\left(l_{t-1} - \frac{s}{m}d_{t-1}^{(d)} - \frac{s}{m}d_{t-1}^{(c)}\right) \\ &= \frac{1}{m}GP^{(m)}\left[(m-1)l_{t-1} - \frac{1}{m}\left(d_{t-1}^{(d)} + d_{t-1}^{(c)}\right)\sum_{s=0}^{m-1} s\right] \\ &= \frac{m-1}{m}GP^{(m)}\left[l_{t-1} - \frac{1}{2}\left(d_{t-1}^{(d)} + d_{t-1}^{(c)}\right)\right] \end{aligned}$$

ec. 9.15

Por otra parte, para obtener T_k considere la *ec.9.11* de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
C_1T_1 &= \int_0^1 sf_1(s)dg_1(s) = \int_0^1 sf_1(s)g'_1(s)ds \\
&= \int_0^1 sGP^{(m)}(l_{t-1+s/m})ds \\
&= GP^{(m)}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{s}{m^2}\left(l_{t-1}-\frac{s}{m}d_{t-1}^{(d)}-\frac{s}{m}d_{t-1}^{(c)}\right) \\
&= \frac{1}{m^2}GP^{(m)}\left[l_{t-1}\sum_{s=0}^{m-1}s-\frac{\left(d_{t-1}^{(d)}+d_{t-1}^{(c)}\right)}{m}\sum_{s=0}^{m-1}s^2\right] \\
&= \frac{1}{m^2}GP^{(m)}\left[\frac{(m-1)m}{2}l_{t-1}-\frac{(m-1)m(2m-1)}{6m}\left(d_{t-1}^{(d)}+d_{t-1}^{(c)}\right)\right] \\
&= GP^{(m)}\left[\frac{(m-1)}{2m}l_{t-1}-\frac{(m-1)(2m-1)}{6m^2}\left(d_{t-1}^{(d)}+d_{t-1}^{(c)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Despejando C_1 de la *ec. 9.15* para obtener T_1 se tiene;

$$T_1=\left[\frac{1}{2}l_{t-1}-\frac{(2m-1)}{6m}\left(d_{t-1}^{(d)}+d_{t-1}^{(c)}\right)\right]\left[l_{t-1}-\frac{1}{2}\left(d_{t-1}^{(d)}+d_{t-1}^{(c)}\right)\right]^{-1} \qquad \textit{ec. 9.16}$$

Para ii), el segundo flujo de efectivo, sea la función de monto $f_2(s)=-\frac{GP^{(m)}}{m}E_t^1$ y $g_2(s)=g_1(s)$ la función de incidencia, entonces

$$C_2=-C_1E_t^1,\ y \quad T_2=T_1 \qquad \textit{ec. 9.17}$$

Para los flujos de efectivo iii) y iv), suponiendo que se dan al inicio del año[32] e inciden sobre todo el año de duración de la póliza, considere la función monto $f_3(s)=E_t^2$ y la función de incidencia representada por $g_3(s)$, para la cual, su derivada es,

$$g_3'(s)=l_{t-1} \qquad si\ s\in[0,1]$$

[32] *Esta suposición se hace, para simplificar las expresiones de C_k y T_k. No obstante, el lector puede cambiar la suposición y adaptarla según requiera, distribuyendo así, los gastos en el año de póliza.*

Así,

$$C_3 = -l_{t-1}E_t^2, \quad T_3 = 1 \qquad ec.\ 9.17$$

Análogamente a la ecuación anterior, para el flujo iv) se obtiene

$$C_4 = -l_{t-1}E_t^2, \quad T_4 = 1 \qquad ec.\ 9.18$$

Para el flujo de efectivo v), considere la función de monto $f_5(s) = -S.A.$ y la función de incidencia representada por $g_5(s)$, cuya derivada es,

$$g'_5(s) = d_{t-1}^{(d)} \quad si\, s \in [0,1]$$

Entonces

$$C_5 = -S.A.d_{t-1}^{(d)}, \quad T_5 = \frac{1}{2} \qquad ec.\ 9.19$$

Para el flujo de efectivo vi), la función de monto es $f_6(s) = -C.V.$ y la función de incidencia representada por $g_6(s)$, así, la derivada de $g_6(s)$ es

$$g'_6(s) = d_{t-1}^{(c)} \quad si\, s \in [0,1]$$

Por lo tanto

$$C_6 = -C.V.d_{t-1}^{(c)}, \quad T_6 = \frac{1}{2} \qquad ec.\ 9.20$$

Finalmente, con las *ec's. 9.15 a 9.20* y la *ec. 9.14*, se obtiene el fondo al tiempo t, y por tanto, el asset share si se utiliza la igualdad de la *def. 9.1.*

$$F_t = F_{t-1} + iF_{t-1} + \sum_{k=1}^{6} C_k + i\sum_{k=1}^{6} C_k(1 - T_k)$$

■

Observación 9.5

La hipótesis de distribución uniforme de muertes o salidas, puede ser cambiada por otra distribución $H(s)$ [(33)], basada en la experiencia de la compañía de seguros, o, ser una distribución construida de forma teórica. De esta manera, las salidas de los participantes por el decremento *k-ésimo* están dadas por el producto $H(s)d_{t-1}^{k}$.

[(33)] *Sea h(s) una función de densidad de probabilidad. Se dice que H(s) es función de distribución, si se cumple que* $\frac{dH(s)}{ds} = h(s)$ *o equivalentemente,* $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds$.

Cálculo del Asset Share dentro del año de la póliza

Uno de los problemas prácticos relacionado con el cálculo del asset share, es la fecha a la cual se realiza el mismo. Por ejemplo, el asset share por conveniencia suele realizarse en el aniversario de la póliza. Consecuentemente, el valor del asset share dentro del año de póliza, se determina a través de interpolaciones. Por otro lado, otro problema que surge es, por ejemplo, ¿qué fecha de emisión tiene una póliza 31 de agosto ó 1 de septiembre para efectos de cálculo? Y finalmente, el problema de como son distribuidas las emisiones de las pólizas dentro del año. En este sentido, la técnica de cálculo de asset share con la integral de Stieltjes, es adecuada para resolver estos problemas prácticos, tan sólo, se necesitan considerar algunas hipótesis nuevas para revestir el modelo.

De esta forma, la intención es crear dos calendarios para el manejo de las fechas de emisión; el primero para el del tiempo de calendario, y el segundo, para el tiempo de póliza, por ejemplo, una póliza es emitida el 1° de enero del año t, *1/1/t*, donde, el tiempo de calendario termina el 31 de diciembre del año t representado por, *31/12/t*, mientras que el tiempo de póliza, termina con el aniversario de la póliza, es decir, el *1/1/t+1* . La siguiente figura, ilustra el tiempo de póliza con respecto al tiempo de calendario.

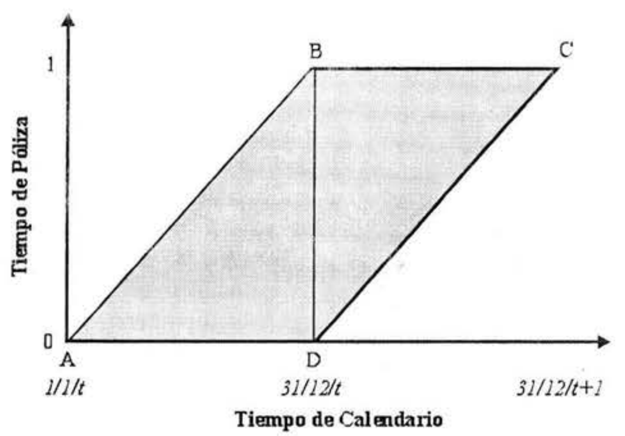


fig. 9.1

El primer año de emisiones de pólizas, está dado por el área *ABCD*. Observe, que el final del año de calendario está representado por *BD*. Por otra parte, *BC* es la recta que representa el final del primer año de una póliza emitida en el año t, que es el primer aniversario de las pólizas emitidas en la recta *AD*.

Una póliza emitida al momento s dentro del año de calendario t, tiene un tiempo de duración con respecto al mismo de, $1\text{-}s$.

Además, la frecuencia con la que se emiten las pólizas dentro de la recta AD, es decir, en el año t, puede ser muy diversa. Por ejemplo, una compañía de seguros sabe que puede emitir pólizas en la primera mitad del año t con probabilidad 2/3, en la segunda mitad con probabilidad 1/3, por lo tanto, estos valores dan información de la forma en la que se distribuyen las emisiones de pólizas durante el año. La función de densidad que describe el comportamiento de emisión de pólizas se denota como $r(z)$.

Definición 9.5

Sea s el momento de emisión de la póliza dentro del año de calendario t, $r(z)$ la función de densidad de la emisión de pólizas dentro del año t. Así, el flujo de efectivo C_k para la categoría *k-ésima* según la función de monto $f(s)$ y la función de incidencia $g(s)$ se puede representar como,

$$C_k = \int_0^1 \int_0^{1-s} f(s) r(z) dg(s) dz \qquad \textit{def. 9.5}$$

La definición anterior es una generalización de la *def. 9.3*. Siguiendo esta misma línea, la *ec. 9.11* se puede extender de la siguiente forma.

$$T_k = \begin{cases} \dfrac{\int_0^1 \int_0^{1-s} s f_k(s) r(z) dg_k(s) dz}{C_k} & si \quad C_k \neq 0 \\ 0 & si \quad C_k = 0 \end{cases} \qquad \textit{ec. 9.21}$$

Con las dos fórmulas anteriores se tiene un mecanismo más poderoso para poder determinar la *ec. 9.14* y encontrar así el fondo F_t para cualquier t dentro del año de calendario t.

Ejemplo 9.4

Una compañía de seguros, ha construido de forma empírica la función de densidad $r(z)$ dado que ha observado la distribución de las emisiones de pólizas dentro del año.

La compañía de seguros, desea determinar las expresiones para la *def. 9.5* y *ec. 9.21* si la función de densidad $r(z)$ es una función beta dada por

$$r(z)=\frac{z^{a-1}(1-z)^{b-1}}{B(a,b)} \quad para\ z\in(0,1)$$

Sol.

Los flujos de efectivo C_k y el momento normalizado T_k de la función de monto f_k sobre la función de incidencia g_k se pueden expresar de la siguiente forma. Primero, considere la *def. 9.5* para encontrar el flujo de efectivo.

$$C_k=\int_0^1\int_0^{1-s} f(s)\frac{z^{a-1}(1-z)^{b-1}}{B(a,b)}\,dg(s)dz$$

Por la *ec. 9.21* se tiene,

$$T_k=\begin{cases}\dfrac{\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-s} sf_k(s)\frac{z^{a-1}(1-z)^{b-1}}{B(a,b)}\,dg_k(s)dz}{C_k} & si \quad C_k\neq 0\\ 0 & si \quad C_k=0\end{cases}$$

■

Observación 9.6

En la función de densidad $r(z)$, si se calcula la probabilidad de que Z sea menor que z, es decir, $P(Z<z)$, se tiene la función de distribución acumulativa denotada por $R(z)$. Donde, $R(0)=0$ y $R(1)=1$, esto es, porque al inicio del año, $z=0$, no se ha emitido ninguna póliza, $R(0)=0$. Y por otra parte, al final del año, es decir $z=1$, se han emitido todas las pólizas del año en cuestión, $R(1)=1$.

Ejercicios del Capítulo 9

Definición de Asset Share

1.- Suponga que l_t representa la población asegurada de una compañía de seguros (número de vivos al tiempo t), GP la prima de tarifa cobrada a cada asegurado de forma anual, E es el vector columna con entradas e_1, e_2, e_3 de los gastos en porcentaje por póliza, d_t el número de muertos entre el tiempo t y $t+1$, y, la suma asegurada representada por $S.A.$ Si las muertes ocurren a mitad del año y se considera interés compuesto, determinar una expresión para el Asset Share al año t representado por A_t, para un fondo F_t.

2.- Complete el siguiente cuadro para $t=5$, usando la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Notación	Descripción	Monto
GP	Prima de tarifa anual	*1,600*
E	60% de la prima de tarifa	
$S.A.$	Suma Asegurada en *u.m.*	*50,000*
F_t	Fondo de activos al tiempo t	
l_t	Participantes al tiempo t	
d_t	Reclamaciones entre el año t y $t+1$	
c_t	Cancelaciones constantes entre el año t y $t+1$	*50* cancelaciones
i	Tasa de interés compuesto	*5%*

3.- Suponga que los valores de A_t y A_{t+1} son conocidos. Encontrar una aproximación en términos del polinomio $P(x)$ para A_{t+h}, si h está entre cero y uno, donde

$$P(x) = a_0 + a_1 e^{ix}$$

En el polinomio $P(x)$, los valores de a_0, a_1 son constantes de interpolación para una tasa de interés i.

Uso de la integral de Stieltjes en el Asset Share

4.- Usando las hipótesis de la integral de Stieltjes, demostrar formalmente que si $g(s)$ tiene derivada continua, entonces:

$$\int_0^1 f(s)dg(s) = \int_0^1 f(s)g'(s)ds$$

<u>*Ayuda:*</u> Ver observación *9.2*

5.- Sea $f(s)$ una función de monto y $g(s)$ una función de incidencia tal que:

$$f(s) = (1+i)^s \quad y \quad g(s) = s^2$$

Encontrar

$$\int_0^1 f(s)dg(s)$$

6.- Sea $f(s) = GP$ la función de monto, y $g(s)$ una función de incidencia cuya derivada es

$$g'(s) = \begin{cases} d_t & si \ 0 \le s < \dfrac{1}{2} \\ d_{t+1/2} & si \ \dfrac{1}{2} \le s < 1 \end{cases}$$

Dar una expresión para

$$\int_0^1 f(s)dg(s)$$

Y finalmente, reflexione lo siguiente

Si $g'(s)$ es discontinua, no se puede aplicar la proposición del ejercicio 4. Sin embargo, para fines del cálculo de Asset Share, este inconveniente, puede ser subsanado si $g'(s)$ es continua a intervalos, por ejemplo usando la función escalón. ¿Por qué sucede eso?

Construcción del modelo de Asset Share con la integral de Stieljes

7.- Resuelva el *ejemplo 9.3*, suponiendo ingresos a una tasa de interés compuesto, es decir

$$I_k = \int_0^1 (1+i)^{1-s} f_k(s) dg_k(s)$$

Donde el fondo al tiempo t, se representa como

$$F_t = F_{t-1} + iF_{t-1} + \sum_{k=1}^{n} C_k + \sum_{k=1}^{n} I_k$$

8.- Si se definen los momentos normalizados T_k y T'_k como en las *ec. 9.11*, ¿qué significado tiene $T_k > T'_k$?

CAPÍTULO 10 "El actuario competente"

Introducción

En la práctica, existen muchos elementos que revisten el trabajo actuarial cotidiano, dado que hay diversas áreas de estudio para un actuario, en particular, las relacionadas con; el seguro de vida, pensiones y planes de previsión social entre otros. En este sentido, el actuario profesional[34], debe tener una visión global, para establecer mecanismos adecuados que impulsen en la dirección y magnitud adecuadas el vector de estudio. Para así, tener una ventaja competitiva[35] individual y en conjunto, con el objetivo de ser mejor especialista y consultor.

Este capítulo, está dedicado al estudio de los elementos que comprenden la actividad práctica de un especialista actuarial. La práctica, está ensalzada por la ética moral como empleado, o consultor, sin dejar de lado la esfera jurídica y legal aplicable a cada uno de estos. Además, es necesaria una óptica profunda y diversa del horizonte de acción. Es decir, el especialista tiene conocimientos técnicos en; modelos matemáticos, administración de riesgos, contabilidad, administración, marcos jurídicos, y asimismo, tácticas y estrategias para la efectiva toma de decisiones.

En suma, el objetivo de este capítulo, consiste en brindar una perspectiva práctica al lector a través de la ética, los modelos matemáticos, el diseño, la administración de riesgos, aspectos legales.

---

(34) *Como profesional, se entiende a aquella persona que realiza su trabajo con; seriedad, claridad, eficiencia y capacidad. Haciéndolo, con el mayor esmero posible, siempre buscando la conciliación de intereses con su equipo de trabajo y el cliente.*

(35) *Según el contexto de Michael Porter. Ver bibliografía.*

Ética

En el contexto matemático, el axioma, es una proposición que muestra una realidad tan notoria, que no necesita demostración. Así, se puede dar una serie de axiomas que el actuario profesional debe cumplir para servir los intereses públicos y/o privados. Tales axiomas, pueden ser divididos en los siguientes; *conducta*, *capacidad*, *conciliación de intereses* y *cooperación profesional*.

De esta forma, es esencial que la musa de la *conducta* se gobierne por: la seriedad, experiencia, seguridad y honestidad. Si esto sucede, la labor actuarial se desarrolla en un marco de confiabilidad hacia el usuario, logrando así, la realización personal y avance de las metas propuestas, con base a los preceptos legales y moralmente aceptados, que, definitivamente impulsan la confianza del cliente y la compañía.

La *capacidad*, se define por el actuario en el contexto de su labor. Consecuentemente, negará aquéllas labores, para las cuales no se encuentre apropiadamente capacitado o bien, no posea las cualidades necesarias para la resolución del mismo. Por ello, es menester del actuario continuar con su formación a través de; actualizaciones, investigaciones y mediante la cooperación profesional.

Es extraordinariamente común, que existan discrepancias personales o profesionales entre el actuario profesional como; consultor o empleado, y el cliente o bien con la compañía según sea el caso. Así, en la medida de lo posible, se deben *conciliar intereses* entre éstos, con el objeto, de evitar actuales o futuros conflictos de interés entre las políticas propias y las de terceros.

De este modo, se deben negar los servicios profesionales en la presencia de discrepancias que conduzcan a conflictos mayores. En particular, si se tiene conocimiento que las labores realizadas tendrán como fin, un mal uso, o bien, entren en el marco de la ilegalidad o moralmente no aceptado.

Además, es muy importante el desarrollo de una constelación de conexiones profesionales durante la vida actuarial, en el sentido, de que a través de éstas, se puede tener una *cooperación profesional*, basada en la cordialidad para compartir conocimientos o experiencia adquirida, si existen los prerrequisitos para este caso. Éstas pueden establecerse en dos líneas; la primera a través de colegas con la misma formación, y el segundo, por medio del equipo de trabajo asignado, es decir, el del cliente o el de la compañía.

Modelos y presentación

En la práctica, el actuario profesional realiza con ayuda de sus bases matemáticas, mecanismos de medición o modelos esencialmente probabilísticos (no deterministas) para lograr la explicación de un fenómeno.

Donde un modelo, es un conjunto verificable de relaciones matemáticas y procedimientos lógicos, los cuales, se usan para presentar fenómenos de la vida real, observables y cuantificables, con el objetivo de comunicar hipótesis alternativas acerca de las causas de un fenómeno, y así, predecir futuros comportamientos del fenómeno con el propósito de tomar decisiones[(36)].

Lo anterior, obliga al especialista actuarial, disponer de un lenguaje amigable y formal para la interpretación de dichos modelos. Mismos, que serán presentados al cliente o compañía para su satisfacción. Además, es prerrequisito dar una presentación adecuada para comunicar de forma apropiada las hipótesis demostradas con dicho modelo. Por otra parte, los modelos deben ser lo más exhaustivos posibles, para no excluir algún factor importante relacionado con el fenómeno en cuestión.

Sin embargo, la fortaleza de un modelo es también su debilidad, ya que, a medida que el modelo interactúa con el mundo real, su validez es puesta en duda por colegas o el fenómeno mismo.

[(36)] *Según la definición de Jewel en 1980. Ver bibliografía.*

Por lo anterior, un modelo matemático con una gran complejidad de variables y supuestos, no significa que sea más determinista que uno matemáticamente más simple. Es decir, la existencia de "el modelo", es rechazada por perturbaciones internas y externas; internamente, las suposiciones técnicas; tasas de interés, mortalidad, etc, pueden ser ampliamente cuestionadas dado su naturaleza subjetiva del especialista, externamente, el modelo más fiel, es aquel que describe mejor el fenómeno de estudio, o, el que logre el propósito deseado.

Diseño, Distribución y Tipos de Cobertura

Las compañías de seguros al lanzar sus productos al mercado, algunas lo hacen con un diseño fundamentado en: legislación, presión de ventas, necesidad, opinión popular y presión de los medios. Sin embargo, el diseño debe ser estructuralmente cimentado en las necesidades del cliente, pues después de todo, es éste el usuario final.

Así, antes del lanzamiento de un producto, se tiene que hacer un diseño acorde a las necesidades del nicho de mercado, para posteriormente hacer una evaluación del plan o cobertura para su aplicabilidad, la cual, conducirá a su implementación y finalmente su distribución.

En este sentido, las compañías de seguros en la actualidad tienen profundos y diversos canales de distribución; ventas directas, agentes y consejeros financieros independientes o broker. Es así, como la compañía comunica al mercado sus productos, cuya fortaleza está basada en su difusión y funcionalidad. Entonces, el posicionamiento de la compañía está básicamente en función de los canales de distribución y productos ofrecidos.

Los productos o pólizas de seguro ofrecidos por la compañía, tienen una bifurcación en su estructura, además de su obvia diferencia de beneficios y cobertura. Esto es, se separan en seguros participativos y no participativos.

Los primeros, consisten en tener supuestos técnicos conservadores, de modo, que si se obtiene un excedente por concepto de inversión en un fondo o de otra índole, se devuelve al participante de la cobertura dicho excedente a través de dividendos. Hoy día, existen productos denominados vida universal (vida-inversión), que consisten en una especie de fondo de inversión donde el participante hace aportaciones voluntarias obteniendo como beneficio, los rendimientos de su inversión conjuntamente con un seguro de vida. Por otro lado, los seguros no participativos tienen supuestos técnicos más apegados a la realidad, y el beneficio para el participante es únicamente el pactado al momento de la realización del contrato de seguro.

Riesgo

El riesgo, puede ser analizado desde dos ángulos distintos. En primer lugar, el cliente acude a la compañía de seguros con la intención de protegerse de una cierta contingencia, la cual, puede quebrantar su estabilidad financiera o familiar.

En contraparte, el sentido de riesgo considerado desde el punto de vista de la compañía aseguradora, está vinculado al efecto adverso que puede tener para la misma, el no disponer de los activos suficientes para cumplir con los pasivos o compromisos financieros a un tiempo dado. Es decir, la insolvencia de la compañía.

Los posibles riesgos de la compañía de seguros, pueden acotarse para lograr la adversidad a estos, por ejemplo con; el reaseguro y la administración de riesgo. El primero, consiste en acudir con compañías de reaseguro, de suerte que se distribuya el compromiso adquirido por la compañía de seguros con un cliente, entre una o varias reaseguradoras. La otra línea y a saber, una de las más importantes, es la administración de riesgo por parte de los especialistas. Mismos, que buscan la adversidad al riesgo en: inversión de activos, diseño de productos, asignación de precios, marketing, reaseguro, reservas, distribución de los beneficios entre los accionistas, los tenedores de pólizas con seguros participativos, políticas de venta y distribución de productos o coberturas.

En suma, los posibles riesgos de la compañía están determinados por, insolvencia causada por problemas contractuales (no renovación, cancelación). Además, de los riesgos en las; inversiones, gastos y reservas.

Por eso, la compañía debe definir claramente el máximo riesgo asegurable que puede adquirir. Por otra parte, debe contar con mecanismos adecuados: actuariales, administrativos, contables o técnicos, para advertir posibles contingencias adversas a la compañía.

Los propósitos de este trabajo, distan mucho de dar métodos cuantitativos para formalizar el panorama de la administración de riesgo. No obstante, se dan algunos parámetros cualitativos para brindar al lector un paisaje de estos, y con ello, no subestimar estas posibilidades en la práctica, que finalmente, el riesgo, es el resultado del diferencial entre los supuestos técnicos y la realidad.

Aspectos Legales, Fiscales e Institucionales en el Seguro de Vida

La diversidad de regulaciones inmersas dentro del campo del seguro, conforma una ensalada de aspectos; legales, técnico-actuariales, administrativos y fiscales. Los cuales, en ocasiones, conducen a barreras competitivas causadas por el desconocimiento de éstas, en particular, aquellas ligadas a los aspectos legales que; regulan, instrumentan, y sancionan a las compañías de seguros.

Por otro lado, es difícil pretender generalizar en algunas áreas del negocio del seguro de vida. Y esto, no es menos verdadero para el caso legal dado su complejidad, que va desde problemas de contrato, hasta aspectos fiscales e institucionales. Aunada a esta complejidad, se añade un elemento más, pues con cierta periodicidad se cambian y adecuan las leyes, ajustando con esto, el marco legal involucrado con los elementos del seguro de vida y otras coberturas. Dichas modificaciones, se hacen el surgimiento de nuevas necesidades de instrumentación hacia; las compañías de seguros, las inversiones, las reservas, los contratos, etcétera.

En el caso de México, la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) es la encargada de sancionar instrumentar y regular a las compañías de aseguradoras. Además, la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP) observa y regula las inversiones, tipos de bienes y valores que administra la compañía aseguradora. Por otra parte, las compañías tienen un marco legal basado según la ley General de Instituciones Mutualistas de Seguros (LISM), ley Federal de Instituciones de Fianzas (LFIF). Y con respecto a la elaboración del contrato de seguro, se gobierna según las premisas de la Ley Sobre Contrato de Seguro (LSCS).

No obstante, otras leyes rigen las actividades de las compañías de seguros, como por ejemplo: la Ley del Impuesto Sobre la Renta (LISR), ley del Impuesto al Valor Agregado y al Activo, (LIVA) y (LIA) respectivamente, la ley de Sociedades Mercantiles (LGSM) y ley de Sociedades de Inversión (LSI).

Administración Actuarial

La compañía de seguros está estructurada en diversas áreas, muchas de las cuales son administradas actuarialmente. Una de particular interés, es la de administración de riesgo generalmente hecha a través de un control cíclico de intervención actuarial.

El ciclo consta en primer instancia, de la construcción de suposiciones iniciales para la elaboración de un nuevo modelo o producto (diseño), para posteriormente, hacer una prueba o análisis del mismo por medio de pruebas de beneficio para la compañía (valuación), de resultar positiva dicha prueba se pone en marcha el plan (implementación) y así, comenzar con el proceso de emisión de pólizas (administración). El ciclo, continúa de forma constante con el monitoreo de las pólizas y coberturas emitidas. De esta forma, si los supuestos iniciales dejan de tener aplicabilidad en las pólizas actuales, se adapta y actualiza las pólizas elaboradas inicialmente, para evitar una futura insolvencia por parte de la compañía aseguradora.

Toma de Decisiones

Existen dos tipos de toma de decisiones: las situacionales y las técnicas (elaboradas bajo técnicas cuantitativas). Las decisiones situacionales, dependen de eventos circunstanciales o de coyuntura que generalmente son tomadas por especialistas en el ramo en cuestión. Sin embargo, éste tipo de decisiones son las más difíciles de tomar, en el sentido, que se debe tener una amplia visión del problema y rapidez de análisis, para considerar el mayor número de elementos según importancia, y así, tomar la decisión adecuada.

En ocasiones, el tomar una decisión errónea conduce a condiciones poco favorables para la compañía. Dichas equivocaciones, son causadas por la variabilidad en las circunstancias y la falta de elementos para la toma de decisiones. Por ello, en la actualidad se ha extendido la toma de decisiones con un sustento matemático o cuantitativo, evitando así, navegar en el mercado con la dirección que tome el viento, por lo tanto, hay varios métodos y teorías de gran formalidad matemática e importancia, que sirven como justificación al momento de tomar una decisión importante. Un ejemplo de estas herramientas, son las encuestas, la investigación de operaciones, análisis de redes, etcétera.

No obstante, la decisión mejor sustentada, es aquélla con elementos situacionales y cuantitativos. Para el caso del análisis accionario, éstos son conocidos como el análisis técnico y fundamental. Así, debe existir una relación de cooperación entre los tomadores de decisiones fundamentales (situacionales) y los de índole técnica, pues el hacerlos ajenos, tiene como resultado consecuencias no positivas para la compañía.

PARTE III

CAPÍTULO 11

"Elementos actuariales de vida múltiple"

Introducción

En el mercado existen coberturas en las cuales se asegura un grupo de vidas, generalmente, diseñadas para matrimonios y familias. Es decir, en el caso de un matrimonio, se busca proteger al uno en caso del fallecimiento del otro, si es un seguro familiar, la protección es destinada a los hijos en el caso del fallecimiento de los padres. En el diseño de este tipo de coberturas, puede existir una discusión con respecto a sí una vida es independiente o dependiente de la otra. Por ejemplo, si en un grupo asegurado de una pareja uno de ellos fallece, intuitivamente el cónyuge sufre de forma natural y física la pérdida del primero, afectando así su mortalidad, en otras palabras, las vidas son dependientes.

Por otra parte, la idea general de vida múltiple se basa en la generalización de vida individual, sólo, que en vez de tomar una vida de edad actual x se considera un grupo de m vidas de edades distintas o iguales x_i. De esta forma, $(x_1,x_2,....x_m)$ es el grupo de vida conjunta, donde $x_1,x_2,....x_m$ son las edades de entrada de los m participantes. En este sentido, se dice que el grupo de vida conjunta continúa vigente o en existencia, si cada uno de los participantes sigue con vida. Es decir, el grupo se destruye si uno o más participantes fallecen, pues, por ser de vida conjunta debe avanzar conjuntamente a través del tiempo, en caso contrario el grupo se destruye.

En este capítulo, se estudian los aspectos básicos de los grupos de vida múltiple, tal como: notación, definición de las funciones biométricas, trasformación de grupos de m vidas en otros de m-k vidas, y, la ley de envejecimiento uniforme.

Definiciones y conceptos básicos

Definición 11.1

Se denota por $l_{x_1x_2x_3.....x_m}$ el número de vivos de edades $(x_1, x_2, ...x_m)$, y, $d_{x_1x_2x_3.....x_m}$ el número de muertes entre las edades x_i y x_i+1 donde $i=1,2....,m$, así;

$$d_{x_1x_2x_3.....x_m} = l_{x_1x_2x_3.....x_m} - l_{x_1+1:x_2+1:x_3+1:..:x_m+1} \qquad def.11.1$$

Reflexión 11.1

Si $l_{x_1x_2x_3.....x_m}$ es el número de vivos a edad x_i, ¿será cierto que $l_{x_1x_2x_3.....x_m} = l_{x_1}l_{x_2}l_{x_3}..l_{x_m}$?

Suponga que las vidas de edades x_i para $i=1,2....,m$ son independientes, entonces, la probabilidad que un grupo de vida conjunta de m vidas sobreviva a la edad x_i+n denotada por ${}_np_{x_1x_2x_3.....x_m}$, por la *ec. 1.3* se puede representar como

$${}_np_{x_1x_2x_3.....x_m} = \frac{l_{x_1+n:x_2+n:x_3+n:...x_m+n}}{l_{x_1x_2x_3...x_m}} \qquad ec\ 11.1$$

Como las m vidas son independientes

$${}_np_{x_1x_2x_3.....x_m} = {}_np_{x_1}\,{}_np_{x_2}\,{}_np_{x_3}\cdots{}_np_{x_m} \qquad ec\ 11.2$$

Escribiendo la ecuación anterior en términos de l_x, se obtiene

$$\frac{l_{x_1+n:x_2+n:x_3+n:...x_m+n}}{l_{x_1x_2x_3...x_m}} = \frac{l_{x_1+n}}{l_{x_1}}\frac{l_{x_2+n}}{l_{x_2}}\frac{l_{x_3+n}}{l_{x_3}}\cdots\frac{l_{x_m+n}}{l_{x_m}}$$

Finalmente, si $k = \dfrac{l_{x_1+n:x_2+n:x_3+n:...x_m+n}}{l_{x_1+n}l_{x_2+n}..l_{x_m+n}}$ se tiene

$$l_{x_1x_2x_3.....x_m} = k\left(l_{x_1}l_{x_2}l_{x_3}..l_{x_m}\right) \qquad ec\ 11.3$$

Donde k es un escalar entre cero y uno.

De la *ec. 11.3,* se deduce que la *reflexión 11.1* se cumple si sólo si $k=1$, consecuentemente no se pude utilizar arbitrariamente este supuesto

Por otro lado, observe que si ${}_nq_{x_1x_2x_3.....x_m}$ es la probabilidad de destrucción de un grupo entre las edades x_i y x_i+n, para $i=1,2,\dots,m$, entonces por la *def. 11.1* y *ec. 11.1* se tiene

$$\begin{aligned} {}_nq_{x_1x_2x_3.....x_m} &= \frac{d_{x_1+n:x_2+n:...:x_m+n}}{l_{x_1x_2x_3.....x_m}} \\ &= 1-{}_np_{x_1x_2x_3.....x_m} \end{aligned} \qquad ec\ 11.4$$

Observación 11.1

En ocasiones se representa el grupo de vidas $(x_1,x_2,....x_m)$ con las letras u y v. Por ejemplo, para la ecuación anterior se puede expresar como ${}_nq_u=1-{}_np_u$.

Por otra parte, la *ec. 11.4* puede generalizarse a la probabilidad de destrucción de un grupo entre los años n y r para n menor a r, es decir

$${}_{n|r}q_{x_1x_2x_3.....x_m} = \frac{{}_rd_{x_1+n:x_2+n:...:x_m+n}}{l_{x_1x_2x_3.....x_m}} \qquad ec\ 11.5$$

Ejemplo 11.1

Suponga que x, y representan las edades de dos participantes. Encontrar una expresión para la probabilidad que sobrevivan en forma conjunta n años, y, la probabilidad que el grupo se destruya entre el año n y m.

Sol.

Como x, y es un grupo de vida conjunta, por la *ec. 11.2* la probabilidad que los participantes x, y sobrevivan de forma conjunta a las edades $x+n$, $y+n$ es,

$${}_np_{xy} = \frac{l_{x+n:y+n}}{l_{xy}}$$

Con la *ec. 11.5*, la probabilidad de destrucción del grupo esta dada por

$${}_{n|m}q_{xy} = \frac{{}_md_{x+n:y+n}}{l_{xy}} \qquad \blacksquare$$

Observación 11.2

Análogamente al *Capítulo 1* se construyen las funciones biométricas; el número de personas vivas (l_x), el tiempo en que forma agregada vivirá la población (T_x), la esperanza de vida abreviada y completa (e_x , $\overset{o}{e}_x$), la tasa central de mortalidad (m_x), etc. En este sentido, se sugiere al lector revisar las *def's. 1.7* a la *1.11*, ya que la construcción de las funciones biométricas para un grupo de participantes de vida conjunta es análoga a estas, en particular, si se usa la *observación 11.1* es inmediata la construcción.

Aspectos sobre la mortalidad

Para el caso de un grupo de vida conjunta existen elementos asociados a la mortalidad, por ejemplo: la fuerza instantánea de mortalidad y las leyes de mortalidad como Gompertz y Makeham. Las cuales, se pueden utilizar para la transformación de grupos de vida múltiple, es decir, expresar un grupo de *m* vidas, como un grupo de *m-k* vidas. De esta forma, considere las siguientes definiciones.

Definición 11.2

Se denota por $\mu_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t}$ a la fuerza instantánea de mortalidad de un grupo de vida conjunta de *m* personas al tiempo *t*, es decir,

$$\mu_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t} = -\frac{1}{l_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t}}\frac{dl_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t}}{dt} \qquad \textit{def. 11.2}$$

Usando logaritmo natural

$$\mu_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t} = -D\ln\left(l_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t}\right)$$

Por la *ec. 11.3* y las propiedades de logaritmo

$$\mu_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t} = -\left(D\ln k + D\ln l_{x_1+t} + D\ln l_{x_2+t} + \ldots + D\ln l_{x_m+t}\right)$$

Con la ecuación anterior se obtiene

$$\mu_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t} = \mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t} + ... + \mu_{x_m+t} \qquad ec.\ 11.6$$

Si $t = 0$, se cumple la siguiente igualdad

$$\mu_{x_1x_2...x_m} = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + ... + \mu_{x_m} \qquad ec.\ 11.7$$

Con la *def. 11.2*, se obtiene una expresión alternativa para *ec 11.1.* Así, siguiendo un procedimiento análogo al mostrado en la *ec. 1.18* del capítulo 1.

$${}_n p_{x_1x_2...x_m} = \frac{l_{x_1+n:x_2+n:...:x_m+n}}{l_{x_1x_2...x_m}} = e^{-\int_0^n \mu_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t}\, ds} \qquad ec.\ 11.8$$

De igual modo, con la *ec. 1.18* se tiene una expresión alternativa para las *ec's. 11.4 y 11.5*

$${}_n q_{x_1x_2...x_m} = \int_0^n {}_t p_{x_1x_2...x_m} \mu_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t}\, dt \qquad ec.\ 11.9$$

$${}_{n|r} q_{x_1x_2...x_m} = \int_n^r {}_t p_{x_1x_2...x_m} \mu_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t}\, dt \qquad ec.\ 11.10$$

Leyes de mortalidad

En el primer capítulo, se definieron algunas leyes de mortalidad, las cuales, se definen también para un grupo de vida múltiple. Por lo tanto, si se tiene un grupo de m vidas, se puede dar una expresión de las leyes de Makeham y Gompertz, así, las *ec's. 1.23 y 1.24* se expresan en términos de un grupo de vida múltiple.

Con la *ec. 1.23* se tiene para Gompertz:

$${}_n p_{x_1x_2...x_m} = g^{C^{x_1+x_2+...+x_m}(C^n-1)} \qquad ec.\ 11.11$$

Análogamente para Makeham, con la *ec. 1.24*:

$$ {}_{n}p_{x_1x_2...x_m} = S^{nm} g^{C^{x_1+x_2+...+x_m}(C^n-1)} \qquad ec.\ 11.12 $$

Reflexión 11.2

¿Existirá una edad w tal que, ${}_{n}p_{x_1x_2...x_m} = {}_{n}p_{ww...w}$? Esto es, ¿existirá un grupo de m vidas de edad igual ($ww...w$) equivalente a uno de edades distintas ($x_1x_2...x_m$)? La reflexión tiene sentido, sólo sí x_i no es independiente de x_j. Pues, en caso contrario, cada ${}_{n}p_{x_i}$ se calcula con los valores de la tabla de mortalidad del Anexo 1.

En efecto, existe un grupo de m vidas de edad igual ($ww...w$) equivalente a uno de edades distintas ($x_1x_2...x_m$). Suponga que μ_x se comporta según la ley de Gompertz, así

$$ {}_{n}p_{x_1x_2...x_m} = {}_{n}p_{ww...w} $$

Sustituyendo la *ec. 11.11* en la expresión anterior,

$$ g^{C^{x_1+x_2+...+x_m}(C^n-1)} = g^{mC^w(C^n-1)} $$

Esto se cumple si sólo si

$$ C^{x_1+x_2+...+x_m}(C^n-1) = mC^w(C^n-1) $$

Despejando w

$$ w = \ln\left(\frac{C^{x_1+x_2+...+x_m}}{m\ln C}\right) \qquad ec.\ 11.13 $$

Donde w representa la edad a la cual ${}_{n}p_{x_1x_2...x_m} = {}_{n}p_{ww...w}$.

Por otra parte, si μ_x se comporta según la ley de Makeham, por la *ec. 11.12* se tiene

$$ {}_{n}p_{x_1x_2...x_m} = {}_{n}p_{ww...w} $$

$$ S^{nm} g^{C^{x_1+x_2+...+x_m}(C^n-1)} = S^{nm} g^{mC^w(C^n-1)} $$

Análogamente a la ley de Gompertz,

$$ w = \ln\left(\frac{C^{x_1+x_2+...+x_m}}{m\ln C}\right) \qquad ec.\ 11.14 $$

Ejemplo 11.2

Suponga que se tiene un grupo de vida conjunta de edades x, y, z. Encontrar el valor de w, tal que la probabilidad de supervivencia del grupo ${}_np_{xyz}$ sea igual a ${}_np_{www}$.

Sol.

Según la ley de mortalidad de Gompertz o la ley de Makeham, el valor de w se obtiene fácilmente por la *ec. 11.13* o *ec. 11.14*, así, como el grupo es de tres vidas

$$w = \ln\left(\frac{C^{x+y+z}}{3\ln C}\right)$$

El valor w, representa la edad para la cual ${}_np_{xyz} = {}_np_{www}$.

■

Por otro lado, suponga que se hace una trasformación de un grupo de vida de m personas de edades $(x_1x_2\ldots x_m)$, a uno equivalente de k personas de edad igual $(ww\ldots w)$ para $k = m\text{-}k'$ donde k' es un número entero, entonces

Si $k = m\text{-}k'$, la *ec. 11.13* de la ley de Gompertz se generaliza en

$$w = \ln\left(\frac{C^{x_1+x_2+\ldots+x_m}}{(m-k')\ln C}\right) \qquad ec.\ 11.15$$

Si $k = m\text{-}k'$, la *ec. 11.14* de la ley de Makeham se generaliza en

$$w = \ln\left(\frac{C^{x_1+x_2+\ldots+x_m}(C^n-1)\ln g + nk'\ln S}{(m-k')(c^n-1)\ln g \ln C}\right) \qquad ec.\ 11.16$$

Observación 11.3

Se dice que la trasformación es una reflexión, si $k' = 0$. Que justamente, es el caso de la *ec. 11.13* y *11.14* las leyes de Gompertz y Makeham son equivalentes. Si $k'<0$ es una expansión del grupo ya que $k>m$. Y finalmente, si $k'>0$ es una contracción del grupo de vida conjunta, ya que $k<m$.

La contracción, expansión y reflexión de los grupos de vida conjunta, es importante cuando no se dispone de una tabla de mortalidad para calcular las funciones biométricas del grupo $(x_1x_2...,x_m)$. Por esto, se hacen suposiciones de mortalidad como la ley de Gompertz o Makeham, para reemplazar un grupo de m vidas por uno de k personas con edades equivalentes w. Y así, solucionar el problema de calcular las probabilidades de vida y fallecimiento de un grupo de vida conjunta $(x_1x_2...,x_m)$.

Ejemplo 11.3

Para ilustrar la *observación 11.3*, suponga que quiere encontrar la probabilidad de supervivencia ${}_np_{xy}$, del grupo de vida conjunta de edades (xy), cuya mortalidad se comporta según la ley de Makeham. Encontrar una edad equivalente w tal que el grupo de vida conjunta (xy) se trasforme en:

i) (xy) $\longrightarrow$ (w), contracción.
ii) (xy) $\longrightarrow$ (ww), reflexión.
iii) (xy) $\longrightarrow$ (wwww), expansión.

Sol.

El valor de k' para las trasformaciones anteriores es; para i) $k'=1$, para ii) $k'=0$, y finalmente, para iii) $k'=-2$. De esta manera, con la *ec. 11.16* se obtiene.

Para i),

$$w = \ln\left(\frac{C^{xy}(C^n - 1)\ln g + n\ln S}{(C^n - 1)\ln g \ln C}\right)$$

Para ii),

$$w = \ln\left(\frac{C^{xy}}{2\ln C}\right)$$

Para iii),

$$w = \ln\left(\frac{C^{xy}(C^n - 1)\ln g - 2n\ln S}{4(C^n - 1)\ln g \ln C}\right)$$

■

Observación 11.4

De acuerdo a la ley de mortalidad de Gompertz o Makeham, $C^{x_1+x_2+...+x_m} = mC^{w}$.

Multiplicando por B y sumando mA en ambos miembros de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\mu_w = \frac{\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + ... + \mu_{x_m}}{m} \qquad ec.\ 11.16$$

La igualdad anterior, significa que la fuerza instantánea de mortalidad de un grupo de m personas de edad w, es el promedio de fuerzas de mortalidad de un grupo de m personas de edades distintas x_i. En resumen, cuando se quiere encontrar la probabilidad de supervivencia o destrucción de un grupo de m vidas no independientes, se pueden hacer trasformaciones para adaptar dichos grupos a otros calculables, o con probabilidades conocidas.

<u>Generalización de los valores conmutados</u>

La representación de los grupos de vida múltiple utilizando las definiciones y ecuaciones de vida individual (capítulo 1), también se hacen para generalizaciones de los valores conmutados, para las coberturas de anualidades, de seguros ordinarios de vida, coberturas temporales, etc. En este sentido, en los *Capítulos 3 y 4* se definieron valores conmutados para el caso de anualidades y seguros respectivamente, así, la generalización de los valores conmutados de las anualidades son

$$D_{x_1x_2...x_m} = V^{\frac{x_1+x_2+...+x_m}{m}} l_{x_1x_2...x_m} \qquad ec.\ 11.17$$

$$N_{x_1x_2...x_m} = \sum_{t=1}^{\infty} D_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t} \qquad ec.\ 11.18$$

$$S_{x_1x_2...x_m} = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t} \qquad ec.\ 11.19$$

Para los valores conmutados de los seguros de vida,

$$C_{x_1x_2...x_m} = V^{\frac{x_1+x_2+...+x_m}{m}+1} d_{x_1x_2...x_m} \qquad ec.\ 11.20$$

$$M_{x_1x_2\ldots x_m} = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t} \qquad ec.\ 11.21$$

$$\begin{aligned} R_{x_1x_2\ldots x_m} &= \sum_{t=0}^{\infty} tM_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)C_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t} \end{aligned} \qquad ec.\ 11.22$$

Las *ec's. 11.17* y *11.20* en el campo continuo se definen de la siguiente forma

$$\overline{D}_{x_1x_2\ldots x_m} = \int_0^1 D_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t}\,dt \qquad ec.\ 11.23$$

$$\overline{C}_{x_1x_2\ldots x_m} = \int_0^1 D_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t}\,\mu_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t}\,dt \qquad ec.\ 11.24$$

Para el caso continuo, el resto de los valores conmutados se define de forma análoga, además con las ecuaciones anteriores, resulta inmediata la definición de las anualidades y de los seguros en términos de los valores conmutados. En los siguientes capítulos, las anualidades y seguros son definidos de forma superficial, ya que el objetivo de esta tercera parte del texto no es la definición de una anualidad o un seguro, si no más bien, el comportamiento de un grupo de vida múltiple en una cobertura. Con respecto a los detalles de las anualidades y seguros de vida individual, los capítulos 2 y 4 sirven de consulta al lector.

Ejercicios del Capítulo 11

Definiciones y Conceptos Básicos

1.- Utilizando la notación adecuada, de una expresión para los siguientes enunciados:

i) La probabilidad que un grupo de vida conjunta (*xyzw*) continúe vigente dentro de cinco años.

ii) La probabilidad que un grupo de dos vidas (*xy*) se destruya dentro de los próximos diez años.

iii) La probabilidad de destrucción de un grupo de tres vidas de edades (*23:58:54*) entre del año *15* y año *20*.

iv) El número de muertos entre las edades x y $x+n$ para un grupo de vida conjunta de edades iguales (*xx*).

2.- Para un grupo de vida conjunta de tres participantes de edades (*30:31:32*) se cumple que

$$ {}_{10}p_{30:31:32} = \left({}_{10}p_{30}\right)\left({}_{10}p_{31}\right)\left({}_{10}p_{32}\right) $$

Si se sabe que $l_{30}=98{,}574$, $l_{31}=98{,}423$ y $l_{32}=98{,}091$, dar un valor numérico para $l_{30:31:32}$ considerando que la constante $k=10^{-10}$.

Sol. $l_{30:31:32}=95{,}118$

3.- Encontrar la probabilidad que dos personas de edades 30 y 40, fallezcan a la misma edad. Es decir, si el participante de edad 40 fallece a la edad 70, entonces el primer participante de edad actual 30 fallecerá a la edad 70 también. Probar que dicha probabilidad está dada por ${}_{10}p_{30}(1+e_{40:40})-2{}_{11}p_{30}(1+e_{40:41})+(p_{40})({}_{11}p_{30})(1+e_{41:41})$.

4.- En un matrimonio, uno de de los cónyuges tiene edad actual (x) y el otro edad (y). La compañía de seguros, desea conocer la probabilidad de supervivencia conjunta del grupo dentro de n años. Además, bajo estas hipótesis, ¿es cierta la siguiente igualdad?

$$_n p_{xy} = ({}_n p_x)({}_n p_y)$$

De tres argumentos para sustentar su respuesta, y de un expresión para $_n p_{xy}$ en términos de l_x suponiendo que las vidas son dependientes.

Aspectos sobre la mortalidad

5.- Por definición $\mu_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t} = -\dfrac{1}{l_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t}} \dfrac{dl_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t}}{dt}$, dar una expresión para el número de vivos de edad x_i, $l_{x_1 x_2 ... x_m}$, en términos de μ_x.

Leyes de Mortalidad

6.- Si la fuerza instantánea de mortalidad se comporta como $\mu_x = \dfrac{1}{w-x}$, de una expresión para los siguientes puntos, si se sabe que las vidas (x, y) son independientes.

i) $_n p_{xy}$

ii) $_{n|m} q_{xy}$

iii) Si (x, y) no son independientes de una expresión para $_n p_{ww}$, donde w es la edad equivalente para trasformar el grupo de vida conjunta (xy).

7.- Para las trasformaciones de grupos de vida conjunta; contracción, reflexión o expansión de grupos, se busca un valor de edad w para construir un grupo de vidas iguales y equivalente al grupo original. Ahora, suponga que se tiene un grupo de dos vidas $(x{:}x+n)$, encuentre un número t tal que $(x{:}x+n) \longrightarrow (x+t{:}x+t)$ suponiendo la ley de Makeham. ¿Cómo cambia la expresión para el caso de Gompertz? Ha esta trasformación, se le conoce como *ley de envejecimiento uniforme*.

Generalización de los Valores Conmutados

8.- Mostrar que:

$$\sum_{t=0}^{\infty} t M_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t} = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) C_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t}$$

9.- Se sabe que $l_{x_1x_2x_3.....x_m} = k(l_{x_1}l_{x_2}l_{x_3}...l_{x_m})$, determine si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. En caso de ser ciertas dar una demostración, en caso contrario dar un contraejemplo o argumente su respuesta.

i) $D_{x_1x_2...x_m} = D_{x_1}D_{x_2}...D_{x_m}$

ii) $D_{xy} = \sqrt{D_xD_y}$ Es decir, D_{xy} es la media geométrica de D_x y D_y, ¿será cierto para m vidas?

iii) $d_{xy}=kd_xd_y$

iv) $C_{x_1x_2...x_m} = C_{x_1}C_{x_2}...C_{x_m}$

CAPÍTULO 12

"Tablas de Mortalidad para Vida Conjunta"

Introducción

Cuando un grupo de vida conjunta $(x_1x_2...x_m)$ no cumple con el supuesto de independencia entre vidas, es decir, x_i es dependiente de x_j, se tiene ${}_np_{x_1x_3...x_m} \neq {}_np_{x_1}\,{}_np_{x_2}\cdots{}_np_{x_m}$

Si esto ocurre, la tabla de mortalidad de vida individual no se puede aplicar para encontrar la probabilidad conjunta. En consecuencia, es necesario construir una tabla de mortalidad con los valores de $l_{x_1x_2x_3.....x_m}$ para que se puede calcular ${}_np_{x_1x_2x_3.....x_m}$.

Con lo anterior, el lector puede anticipar acertadamente, que el tener de una tabla de mortalidad para un grupo de vida múltiple de m personas de distintas edades $x_1,x_2,...,x_m$ resuelve el problema de encontrar ${}_np_{x_1x_2x_3.....x_m}$. Si se tiene una tabla de mortalidad para encontrar la probabilidad anterior y se desea encontrar con la misma, la probabilidad de supervivencia de otro grupo de edad $y_1, y_2,..., y_m$ para al menos una $y_i \neq x_i$, la tabla de mortalidad utilizada para el grupo anterior es inútil. En otras palabras, se tienen que construir muchas tablas de mortalidad para calcular cualquier tipo de grupo de vida conjunta $(x_1x_2...x_m)$.

Por lo anterior, este capítulo se concentra en dar algunas técnicas para construir tablas de mortalidad para grupos de vida conjunta. Además, se utilizan transformaciones adecuar un grupo de vida conjunta de m vidas, a un grupo equivalente de edades w, de suerte, que los cálculos del grupo de vida conjunta se hagan con una tabla de mortalidad conocida. Las construcciones se hacen, con suposiciones apropiadas del comportamiento de la fuerza instantánea de mortalidad μ_x para: contraer, reflejar o expandir los de grupos de vida conjunta y adaptarlos según sea conveniente.

Construcción de tablas de mortalidad de vida conjunta

Si $(x_1,x_2,...x_m)$ es un grupo de vida conjunta de m personas de edades de entrada x_i, las construcciones o trasformaciones de tablas de mortalidad, consisten en encontrar un grupo equivalente de k vidas de edades iguales x, es decir, un grupo de k personas denotado por el vector de edades $(x{:}x{:}...{:}x)$, para construir tablas de mortalidad generales, selectas o bien últimas(37).

Como un acercamiento a lo propuesto en el párrafo anterior, considere el siguiente problema. Suponga que se tienen los valores de l_x de una tabla de mortalidad para cualquier edad de entrada x. Sin embargo, se desea construir una tabla de mortalidad para un grupo de vida conjunta $(x{:}x)$. Para resolver este paradigma, se necesitan hacer suposiciones sobre la tasa instantánea de mortalidad μ_x y la siguiente igualdad de acuerdo a las *ec's. 11.7 y 11.16*

$$\mu_{ww...w} = m\mu_w$$

Para determinar una tabla de mortalidad de un grupo de vida conjunta $(x{:}x)$, se encuentra una expresión para la tasa instantánea de mortalidad dado que son conocidos los valores del número de personas vivas a edad x, es decir, l_x, así

$$\mu_{xx} = 2\mu_x \qquad ec.12.1$$

Con la expresión anterior, claramente se tiene la construcción de una nueva tabla de mortalidad para el grupo de edad $(x{:}x)$ dado que se conoce el valor de l_x para toda x en el intervalo de supervivencia. Es decir, con la *ec. 12.1* se construye una nueva tabla de mortalidad para el grupo $(x{:}x)$ con las *ec's . 1.16* y *12.1* se tiene

$$l_{xx} = l_0 e^{-2\int_0^x \mu_s\, ds} \qquad ec.12.2$$

Pero, ¿qué comportamiento tiene la función μ_x?

(37) *Ver las definiciones 2.1-2.4, relativas a estos conceptos.*

La función μ_x en este caso en particular por ser conocidos los valores de l_x, tiene el comportamiento mostrado en la tabla de mortalidad de vida individual. Esto es, si la tabla de mortalidad de la cual proviene el valor de l_x, se distribuye según las leyes de mortalidad de Gompertz o Makeham, entonces, la función μ_x hereda ese comportamiento. Por ello, para encontrar el valor de μ_x según la *def.11.2* y construir una nueva tabla de mortalidad de un grupo de dos vidas conjuntas (x:x) usando la *ec. 2.2*, es necesario tomar en consideración lo siguiente:

i) Suponer que μ_x se comporta de acuerdo a una ley mortalidad: Gompertz, Makeham, etc. Y en consecuencia, proceder con la estimación de los parámetros según sea el caso (ver los ejercicios del *Capítulo 2*).

ii) Construir una aproximación para la tasa instantánea de mortalidad μ_x, utilizando los valores conocidos de l_x.

iii) Utilizar métodos estadísticos para estimar μ_x (conocidas como tablas modelo).

iv) Encontrar la función de supervivencia relacionada con los valores de l_x.

La decisión de que método escoger de entre i) y iv), depende fundamentalmente de las hipótesis técnicas de la construcción de la tabla inicial (la de los valores de l_x), de la facilidad de cálculo, el objetivo de la tabla y de la información adicional teórica o empírica que se tenga para su construcción. Por ejemplo, para el punto ii) generalmente se emplean métodos de aproximación por polinomios a través de diferencias finitas, el cual se aplicará en el siguiente ejemplo para el punto i). La sugerencia para el punto iii), es utilizar herramientas estadísticas, la cuales, dependen del tipo de información que se desea analizar. Y finalmente, para el punto iv) construir una función de supervivencia de acuerdo a alguna serie de datos empíricos, (ver *Capítulo 1*).

El siguiente ejemplo, ilustra el primer método descrito arriba. Sin embargo, puede extenderse por el lector a los demás puntos, utilizando como guía las suposiciones técnicas empleadas y la metodología usada en el cálculo de la tabla de mortalidad de vida conjunta, de este ejemplo.

Ejemplo 12.1

Suponga que se tiene como fuente de información los valores de l_x para toda x. En particular, suponga que los únicos datos disponibles son los de la tabla del Anexo 1. Por otra parte, suponga que μ_x tiene un comportamiento de acuerdo a la ley de Makeham. Con esta información, construya una nueva tabla de mortalidad para el grupo de vida conjunta $(x{:}x)$. En otras palabras, encuentre el valor de l_{xx} para las edades de 12 a 100 años, el cual, es el intervalo de edad de la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Sol.

Como μ_x se comporta bajo la ley de Makeham, se sabe que

$$\mu_x = A + BC^x$$

Además, por la *ec.12.2*

$$l_{xx} = l_0 e^{-2\int_0^x \mu_s\, ds}$$

De esta forma, es para determinar el comportamiento de l_{xx} es necesario evaluar la integral de μ_x para encontrar los valores del número de personas vivas del grupo de vida conjunta (xx).

Así, con un procedimiento análogo al empleado en la *ec. 1.22*, se tiene

$$2\int_0^x \mu_s ds = 2\left(xA + \frac{BC^x}{\ln C} - \frac{B}{\ln C} \right)$$

Haciendo: $\ln s = -A$ y $\ln g = -\dfrac{B}{\ln C}$ la ecuación anterior se trasforma en

$$2\int_0^x \mu_s ds = -\ln S^{2x} - \ln g^{2(C^x - 1)}$$

Sustituyendo esto en la *ec.12.2*

$$l_{xx} = kS^{2x} g^{2(C^x - 1)} \quad donde \quad k = \frac{l_0}{g} \qquad ec.12.3$$

Con la ecuación anterior, se tiene un método cuantitativo para determinar los valores de l_{xx} para toda x desde la edad 12 hasta 100. Sin embargo, ¿cuáles son los valores de los parámetros S, g y C? Para responder esta pregunta y finalmente concluir el objetivo deseado, es necesario retornar al ejercicio 1 del *Capítulo 2*, en donde se presenta un método para resolver esta cuestión. De esta forma, con un procedimiento análogo a la explicación de este ejercicio, se obtienen las fórmulas de los parámetros si μ_x se comporta según la ley de mortalidad de Makeham.

$$C = \sqrt[h]{\frac{\Delta^2 \ln l_{x+h}}{\Delta^2 \ln l_x}}$$

$$g = \exp\left(\frac{\Delta^2 \ln l_x}{(C^x - 1)(1 - C^h)^2} \right)$$

$$S = \exp\left(\frac{1}{h}\left((C^x - 1)(1 - C^h)\ln g - \Delta \ln l_x\right)\right) \; y \; k = \frac{l_0}{g}$$

Este procedimiento de estimación de parámetros, se conoce como diferencias finitas análogo al de la aproximación polinomial. Así, para estimar los tres parámetros C, g y S, se necesitan cuatro puntos igualmente espaciados, por ejemplo, los valores de l_x, l_{x+h}, l_{x+2h} y l_{x+3h}. En particular, considere los valores de l_{52}, l_{53}, l_{54}, l_{55} de la tabla del Anexo 1, aplicando las diferencias finitas para resolver las fórmulas anteriores, se obtiene

$$C = 1.07536523, \; g = 0.99755737, \; S = 0.99977475 \; y \; k = 100244.861.$$

Con los valores estos parámetros, se puede aplicar fácilmente la *ec. 12.3* y finalmente, encontrar la nueva tabla de mortalidad para el grupo de vida conjunta $(x{:}x)$. Es decir, pueden dar explícitamente los valores de l_{xx}. Los cuales, son los valores del número de sobrevivientes del grupo de vida conjunta (xx) de la tabla de mortalidad del Anexo 2.

■

Observación 12.1

En el ejemplo anterior, se obtuvo una estimación de los valores de l_{xx} suponiendo la ley de Makeham. De hecho, se utilizaron algunos valores de l_x de la tabla de mortalidad del Anexo 1 para su estimación. En este sentido, una forma de cuantificar el error de la aproximación, es reconstruir con los parámetros (C, g, S) la tabla de mortalidad utilizada para su estimación. Así, el error de estimación es

$$E = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\left| l_{x+ih} - \hat{l}_{x+ih} \right|}{n l_{x+ih}} \right) \quad \text{para } i = 0,1,2,3$$

Con esta fórmula, el error de estimación del *ejemplo 12.1* para los valores de l_{52}, l_{53}, l_{54} y l_{55} es 1.94%, donde l_{x+ih} es el valor empírico y $\hat{l}_{x+ih}$ el valor estimado descrito en la *ec.1.22* del capítulo primero. Si se calcula la formula del error para todos los valores de x, se tiene que el error global es de 3.13%. Que de hecho, es un valor aproximado a los estándares de error bajo la suposición de la ley de Makeham, ya que los modelos de mortalidad con esta ley tienen error aproximado a 3%.

Observación 12.2

En el ejemplo anterior, se utilizó la *ec. 12.3* para construir una tabla de mortalidad de vida conjunta o de dos vidas mancomunadas. Observe, que la generalización de la *ec.12.3* para un grupo de vida conjunta de m vidas, está dado por

$$l_{xx\ldots x} = kS^{mx} g^{m(C^x - 1)} \quad donde \quad k = \frac{l_0}{g} \qquad ec.\ 12.4$$

La fórmula anterior, es para una estimación con la suposición de la ley de mortalidad de Makeham.

Uso de las tablas de vida conjunta

Las tablas de vida conjunta, al igual que las de vida individual, tienen un universo de aplicación; funciones biométricas, anualidades, seguros, primas, reservas diferentes clases de tablas de mortalidad, esto es: selectas, últimas, agregadas. Las cuales, fueron estudiadas en la primera parte de este texto, por lo tanto, para los grupos de vida múltiple, se estudian exclusivamente las funciones biométricas y valores conmutados. Con el propósito de ilustrar el cálculo de las funciones biométricas y los valores conmutados, a continuación se hacen una serie ejemplos utilizando la tabla de vida conjunta del Anexo 2.

Ejemplo 12.2

Encontrar la probabilidad que un grupo de vida conjunta continúe vigente durante diez años, sabiendo que los participantes tienen edades iguales (23:23). Además, encuentre la probabilidad de destrucción del grupo en el mismo periodo.

Sol.

La probabilidad que el grupo continúe vigente, está dada por la *ec.11.1*, es decir

$$
\begin{aligned}
{}_{10}p_{23:23} &= \frac{l_{33:33}}{l_{23:23}} \\
&= \frac{93{,}822}{96{,}901} = .9682
\end{aligned}
$$

De donde, la probabilidad de destrucción se representa como

$$
\begin{aligned}
{}_{10}q_{23:23} &= 1 - {}_{10}p_{23:23} \\
&= .031774
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 12.3

¿Cuál es la esperanza abreviada de vida, de un grupo de vida conjunta de edades iguales 60:60)?

Sol.

De acuerdo a la tabla de mortalidad del anexo 2, un grupo de vida conjunta de edades (60:60) vivirá de forma conjunta 34 años, es decir, $e_{60:60} = 34.2$.

■

Ejemplo 12.4

Encontrar la prima neta única de una anualidad vitalicia de 1 *u.m*, para un grupo de vida conjunta de edades (32:32).

Sol.

Extendiendo la *def. 3.3* del capítulo 3, y usando los valores de la tabla de mortalidad del Anexo 2, se obtiene que,

$$a_{32:32} = \frac{N_{33:33}}{D_{32:32}}$$
$$= \frac{302{,}622.5}{19{,}773.3} = 15.3046$$

■

Ejemplo 12.5

Encontrar la prima neta única de un seguro ordinario de vida con suma asegurada de 1 *u.m*, para un grupo de vida conjunta de edades (25:25). Además, determine la prima anual pagadera de forma anticipada y con *P.P.P.* igual al periodo de cobertura.

Sol.

Con la *ec.4.1* el seguro vitalicio de un grupo de vida conjunta se puede expresar como

$$A_{25:25} = \frac{M_{25:25}}{D_{25:25}}$$
$$= \frac{4{,}952.3}{28{,}473.1} = .173929$$

Finalmente, con la *ec.5.1* se puede determinar la prima anual para un grupo de vida conjunta de edades iguales. Es decir,

$$P_{25:25} = \frac{A_{25:25}}{\ddot{a}_{25:25}} = \frac{M_{25:25}}{N_{25:25}}$$
$$= \frac{4{,}952.3}{493{,}936.5} = .019136$$

Por lo tanto, un grupo de vida conjunta (25:25), debe pagar *.019136 u.m.* por cada unidad monetaria que desee de suma asegurada.

■

Ejercicios del Capítulo 12

Construcción de tablas de mortalidad de vida conjunta

1.- Usando las suposiciones del *ejemplo 12.1*, construya una tabla de mortalidad para el grupo de vida conjunta formado por cuatro vidas de edades iguales $(x{:}x{:}x{:}x)$.

2.- Suponga que $\mu_x = ax^3+bx^2+cx+d$ para x entre 12 y 100. Encuentre l_{xxx}.

3.- Suponga que μ_x se comporta según la ley de Gompertz. Utilizando los valores de l_x de la tabla del Anexo 2 encuentre una tabla de mortalidad para el grupo de vida conjunta $(x{:}x)$ y construyendo los valores de l_{xx}. Compare los resultados obtenidos con los de la tabla del Anexo 2. ¿Cómo es el error de la tabla calculada por Gompertz con respecto este anexo?

Ayuda. El procedimiento es análogo al del *ejemplo 12.1* y la fórmula del error es la de la *observación 12.1*.

Uso de las tablas de vida conjunta

4.- Determine la prima anual para una anualidad diferida 10 años de *1 u.m.* de suma asegurada, para un grupo de vida conjunta de edades (40:40). Observe, que la prima se deja de pagar cuando entra en vigor la anualidad diferida, es decir, el grupo de vida conjunta hace 11 pagos anuales por concepto de prima antes de recibir el beneficio. Utilice la tabla de mortalidad del Anexo 2 para calcular el valor numérico de la prima.

5.- ¿Cuál es la prima única para un seguro dotal mixto con suma asegurada de 1 *u.m.* de un grupo de vida conjunta (52:52)? Utilice la tabla del Anexo 2.

6.- Dar un valor numérico con la tabla de mortalidad del Anexo 2, de la esperanza completa de vida para un grupo de vida conjunta (12:12) y para un grupo de vida conjunta (65:65).

CAPÍTULO 13 "Estados de destrucción de grupos"

Introducción

Cuando se estudia la mortalidad de un grupo de vida conjunta, se ha visto en los capítulos previos, que éste se destruye, cuando cualquiera de los integrantes del grupo fallece. Es decir, no se destruye si los participantes sobreviven de forma conjunta, no obstante, ¿es necesario que el grupo se destruya con el primer fallecimiento o salida de algún individuo del grupo? La respuesta a esta pregunta es negativa, por ejemplo, se puede considerar la destrucción de un grupo de vida conjunta de m vidas, cuando al menos r o exactamente r de los participantes han fallecido, o también, cuando ha fallecido el último sobreviviente del grupo, es decir, fallecieron todos los participantes del grupo de m individuos.

A los ejemplos anteriores, se les llama *estados de destrucción de grupos*. Los cuales, son los tipos de salidas que se dan en un grupo de vida conjunta. Los estados de destrucción, permiten el diseño de diversas coberturas de seguros y anualidades de vida adaptados a los requerimientos del cliente. En este sentido, una forma de cuantificar las probabilidades de último sobreviviente(38) y que al menos r(38) participantes estén con vida, se hace a través de un método denominado "método z", que, básicamente consiste en reducir cualquier función que depende de ${}_np_x$.

En este capítulo, se estudian los estados de un grupo de vida conjunta y algunos métodos para determinar las probabilidades de supervivencia y fallecimiento. Además, de su aplicación en el diseño de coberturas.

(38) *Las definiciones de los grupos de vida conjunta de último sobreviviente, al menos o exactamente r sobrevivientes se exponen más adelante.*

Estados de grupos

Si se recuerda de los capítulos anteriores, $(x_1x_2...x_m)$ denota un grupo de vida conjunta de m participantes, el cual se destruye cuando cualquier participante fallece, es decir, todos los participantes deben continuar con vida de forma conjunta para que el grupo continúe vigente. Por lo tanto un grupo de último sobreviviente, se destruye a la muerte del último sobreviviente, así

Definición 13.1

El vector de vidas $(\overline{x_1x_2...x_m})$ denota un grupo de vida conjunta de último sobreviviente, el cual se destruye a la muerte del último sobreviviente del grupo de m personas de edades actuales x_i para $i=1,2,...m$. El grupo también puede escribirse como, $(\overset{1}{\overline{x_1x_2...x_m}})$.

def. 13.1

Definición 13.2

Con la definición anterior, ${}_np_{\overline{x_1x_2...x_m}}$ representa la probabilidad que un grupo de último sobreviviente de m personas de edades x_i continúe vigente durante n años. O bien, la probabilidad que el último sobreviviente de edad x_i sobreviva a la edad x_i+n, es decir

$${}_np_{\overline{x_1x_2...x_m}} = 1-(1-{}_np_{x_1})(1-{}_np_{x_2})...(1-{}_np_{x_m}) \qquad \textit{def. 13.2}^{(39)}$$

Definición 13.3

De forma análoga, ${}_nq_{\overline{x_1x_2...x_m}}$ es la probabilidad que un grupo de último sobreviviente de m participantes de edades x_i se destruya entre la edad x_i y x_i+n. Así;

$${}_nq_{\overline{x_1x_2...x_m}} = 1-{}_np_{\overline{x_1x_2...x_m}} \qquad \textit{def. 13.3}$$

(39) *Si en el grupo de vida conjunta las vidas son independientes, la probabilidad que un grupo de último sobreviviente continúe vigente se expresa como el complemento de la probabilidad de supervivencia.*

Ejemplo 13.1

Encuentre una expresión para la probabilidad que un grupo de último sobreviviente de edades iguales $(\overline{x_1 : x_2})$ continúe vigente n años más.

Sol.

Por la *def. 13.2*, se tiene:

$$\begin{aligned} {}_n p_{\overline{x_1 x_2}} &= 1-(1-{}_n p_{x_1})(1-{}_n p_{x_2}) \\ &= {}_n p_{x_1} + {}_n p_{x_2} - {}_n p_{x_1 x_2} \end{aligned}$$

■

El ejemplo anterior se puede extender para el caso de m vidas usando la *def. 13.2*, es decir,

$$\begin{aligned} {}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} &= 1-(1-{}_n p_{x_1})(1-{}_n p_{x_2})\ldots(1-{}_n p_{x_m}) \\ &= \left({}_n p_{x_1} + {}_n p_{x_2} + \ldots + {}_n p_{x_m}\right) + \\ &\quad - \left({}_n p_{x_1 x_2} + {}_n p_{x_1 x_2} + \ldots + {}_n p_{x_{m-1} x_m}\right) + \\ &\quad + \left({}_n p_{x_1 x_2 x_3} + {}_n p_{x_1 x_2 x_4} + \ldots + {}_n p_{x_{m-2} x_{m-1} x_m}\right) + \\ &\quad + (-1)^{m+1} {}_n p_{x_1 x_2 \ldots x_m} \end{aligned} \qquad \textit{ec. 13.1}$$

La suma anterior se puede escribir

$${}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \sum_{i=1}^{m} \binom{{}_n p_{x_i}}{1} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \binom{{}_n p_{x_i x_j}}{2} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \binom{{}_n p_{x_i x_j x_k}}{3} + \ldots + (-1)^{m+1} {}_n p_{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

Agrupando los índices de las sumas

$${}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \sum_{i=1}^{m} \binom{{}_n p_{x_i}}{1} - \sum_{i,j=1}^{m} \binom{{}_n p_{x_i x_j}}{2} + \sum_{i,j,k=1}^{m} \binom{{}_n p_{x_i x_j x_k}}{3} + \ldots + (-1)^{m+1} {}_n p_{x_1 x_2 \ldots x_m} \qquad \textit{ec. 13.2}$$

Donde $\sum_{i=1}^{m} \binom{{}_n p_{x_i}}{1}$ representa la suma de las combinaciones de las probabilidades de supervivencia de m personas tomadas de una en una, es decir

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{{}_n p_{x_i}}{1} = {}_n p_{x_1} + {}_n p_{x_2} + \ldots + {}_n p_{x_m}$$

Análogamente el valor, $\sum_{i,j=1}^{m}\binom{{}_nP_{x_ix_j}}{2}$ representa la suma de las combinaciones de m participantes tomadas de dos en dos para $i \neq j$, es decir

$$\sum_{i,j=1}^{m}\binom{{}_nP_{x_ix_j}}{2} = {}_nP_{x_1x_2} + {}_nP_{x_1x_3} + \ldots + {}_nP_{x_{m-1}x_m}$$

El resto de los sumandos de la *ec. 13.2* se interpreta de forma análoga. Por otro lado, cualquier función que dependa de las probabilidades de supervivencia de la *def. 13.2* se puede reducir de con *ec. 13.2.*

Ejemplo 13.2

Dar una expresión para la probabilidad que un grupo de último sobreviviente continúe vigente dentro de n años para un grupo de participantes de edades x_1, x_2, x_3.

Sol.

$$\begin{aligned}{}_np_{\overline{x_1x_2x_3}} &= \sum_{i=1}^{m}\binom{{}_nP_{x_i}}{1} - \sum_{i,j=1}^{m}\binom{{}_nP_{x_ix_j}}{2} + {}_nP_{x_1x_2x_3} \\ &= {}_nP_{x_1} + {}_nP_{x_2} + {}_nP_{x_2} - {}_nP_{x_1x_2} - {}_nP_{x_1x_3} - {}_nP_{x_2x_3} + {}_nP_{x_1x_2}.\end{aligned}$$

■

Ejemplo 13.3

Reducir $\ddot{a}_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}$ en términos de anualidades simples (vida conjunta) usando la *ec.13.2*

Sol.

Por la definición de anualidad se sabe que $\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} V^t\,{}_tp_x$, entonces

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{x_1x_2x_3x_4}} &= \sum_{t=0}^{\infty} V^t\,{}_tp_{\overline{x_1x_2x_3x_4}} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} V^t\left[\sum_{i=1}^{m}\binom{{}_nP_{x_i}}{1} - \sum_{i,j=1}^{m}\binom{{}_nP_{x_ix_j}}{2} + \sum_{i,j,k=1}^{m}\binom{{}_nP_{x_ix_jx_k}}{3} - {}_nP_{x_1x_2x_3x_4}\right] \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} V^t\left[{}_nP_{x_1} + {}_nP_{x_2} + {}_nP_{x_3} + {}_nP_{x_4} - {}_nP_{x_1x_2} - {}_nP_{x_1x_3} - {}_nP_{x_1x_4} - {}_nP_{x_2x_3} - {}_nP_{x_2x_4} - {}_nP_{x_3x_4} + \right. \\ &\qquad \left. + {}_nP_{x_1x_2x_3} + {}_nP_{x_1x_2x_4} + {}_nP_{x_2x_3x_4} + {}_nP_{x_1x_3x_4} - {}_nP_{x_1x_2x_3x_4}\right]\end{aligned}$$

Finalmente, usando la definición de anualidad y distribuyendo la suma se obtiene

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{x_1x_2x_3x_4}} &= \ddot{a}_{x_1} + \ddot{a}_{x_2} + \ddot{a}_{x_3} + \ddot{a}_{x_4} - \ddot{a}_{x_1x_2} - \ddot{a}_{x_1x_3} - \ddot{a}_{x_1x_4} - \ddot{a}_{x_2x_3} - \ddot{a}_{x_2x_4} - \ddot{a}_{x_3x_4} + \\ &\quad + \ddot{a}_{x_1x_2x_3} + \ddot{a}_{x_1x_2x_4} + \ddot{a}_{x_2x_3x_4} + \ddot{a}_{x_1x_3x_4} - \ddot{a}_{x_1x_2x_3x_4}\end{aligned}$$

■

Ejemplo 13.3

De una expresión para ${}_{n|}q_{\overline{x_1x_2x_3}}$ en términos de grupos de vida conjunta.

Sol.

Considérese la siguiente igualdad ${}_{n|}q_{\overline{x_1x_2x_3}} = {}_np_{\overline{x_1x_2x_3}} - {}_{n+1}p_{\overline{x_1x_2x_3}}$.

Aplicando el resultado *del ejemplo 13.2*, se obtiene fácilmente

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}q_{\overline{x_1x_2x_3}} &= \left[{}_np_{x_1} + {}_np_{x_2} + {}_np_{x_2} - {}_np_{x_1x_2} - {}_np_{x_1x_3} - {}_np_{x_2x_3} + {}_np_{x_1x_2x_3}\right] + \\
&- \left[{}_{n+1}p_{x_1} + {}_{n+1}p_{x_2} + {}_{n+1}p_{x_2} - {}_{n+1}p_{x_1x_2} - {}_{n+1}p_{x_1x_3} - {}_{n+1}P_{x_2x_3} + {}_{n+1}p_{x_1x_2x_3}\right].
\end{aligned}
$$

■

Observación 13.1

La generalización del resultado anterior, es muy útil para el cálculo de los seguros de vida, pues estos dependen de la probabilidad de fallecimiento, es decir

$$A_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\,{}_{t|}q_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}$$

En otras palabras, un seguro de último sobreviviente se puede expresar como la suma de seguros de vida conjunta.

Observación 13.2

En general, cualquier grupo de último sobreviviente se reduce a la suma de grupos de vida conjunta siempre y que esté, dependa de la probabilidad de supervivencia. Lo anterior, se expresa en el siguiente enunciado.

Si *f* es una función lineal que depende de ${}_np_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}$, escrita como $f\left({}_np_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}\right)$. Entonces, la función *f* se puede reducir usando la *ec.13.2.* La proposición anterior es verdadera, pues si *f* es una función lineal que depende de un grupo de último sobreviviente, la función puede ser expresada con l ec. 13.2, es decir

$$
\begin{aligned}
f\left({}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}\right) &= f\left({}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}\right) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{m}\binom{{}_n p_{x_i}}{1} - \sum_{i,j=1}^{m}\binom{{}_n p_{x_i x_j}}{2} + \sum_{i,j,k=1}^{m}\binom{{}_n p_{x_i x_j x_k}}{3} + \ldots + (-1)^{m+1}\,{}_n p_{x_1 x_2 \ldots x_m}\right)
\end{aligned}
$$

Por ser f una función lineal

$$
f\left({}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{m}\binom{{}_n p_{x_i}}{1}\right) - f\left(\sum_{i,j=1}^{m}\binom{{}_n p_{x_i x_j}}{2}\right) + f\left(\sum_{i,j,k=1}^{m}\binom{{}_n p_{x_i x_j x_k}}{3}\right) + \ldots + (-1)^{m+1} f\left({}_n p_{x_1 x_2 \ldots x_m}\right)
$$

La ecuación anterior, es la generalización de la *ec.13.2* la cual significa que todas las funciones lineales (biométricas o contingentes) de grupos de vida múltiple que dependan de la probabilidad ${}_n p_x$, se pueden reducir a expresiones de vida conjunta.

Método Z

Por la *def. 13.1* un grupo de último sobreviviente $(\overline{x_1 x_2 \ldots x_m})$, se destruye al fallecimiento de su último sobreviviente. La generalización de este tipo de grupo, se tiene cuando al menos r de los m participantes han sobrevivido, o bien, $m - r + 1$ han fallecido. Este grupo se representa como $(\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}^{\,r})$. Con la notación anterior, el grupo de último sobreviviente es un caso particular cuando $r = 1$.

De esta manera, el método Z es una fórmula para expresar funciones que dependan de grupos de al menos o exactamente r sobrevivientes, en términos de grupos de vida conjunta. Así, $(\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}^{\,[r]})$ representa el grupo de vida múltiple que continúa vigente si sólo si, exactamente r de los m participantes continúan con vida.

Definición 13.4

Se denota por ${}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}^{\,r}$ la probabilidad que de en un grupo de m participantes, al menos r lleguen con vida a la edad $x_i + n$, por lo tanto

$$
{}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}^{\,r} = {}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}^{\,[r]} + {}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}^{\,[r+1]} + \ldots + {}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}^{\,[m]} \qquad \textit{def. 13.4}
$$

Como la probabilidad que al menos r participantes lleguen con vida a la edad x_i+n está en función de las probabilidades que exactamente r participantes lleguen con vida a la edad x_i+n, entonces, se procederá a encontrar una expresión para determinar las probabilidades de supervivencia de un grupo de exactamente r.

En primer lugar, considere un grupo de m participantes de edades iguales x. Así, la probabilidad que exactamente r participantes lleguen con vida a la edad $x+n$, y que $m-r$ participantes estén muertos, está dada por

$$ {}_n p_x^r \left(1-{}_n p_x\right)^{m-r} \qquad ec.13.3 $$

Es claro para el lector, que la expresión anterior sólo explica el caso en el que los primeros r participantes llegan con vida a la edad $x+n$, y los restantes $m - r$ fallezcan para un grupo de edades iguales. Sin embargo, la probabilidad que exactamente r participantes lleguen con vida ${}_n p_{\overline{xx\ldots x}}^{[r]}$ se expresa como las combinaciones de m participantes tomados de r, es decir

$$ {}_n p_{\overline{xx\ldots x}}^{[r]} = \binom{m}{r} {}_n p_x^r \left(1-{}_n p_x\right)^{m-r} \qquad ec.13.4 $$

La expresión anterior es el *r-ésimo* elemento de la expansión del teorema del binomio(40). Si ahora, por el contrario, se hace la suposición que las m vidas tienen edad distinta x_i , la probabilidad que sobrevivan exactamente r participantes es

$$ {}_n p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[r]} = {}_n p_{x_1}\, {}_n p_{x_2} \cdots {}_n p_{x_r} \left(1-{}_n p_{x_{r+1}}\right)\left(1-{}_n p_{x_{r+2}}\right)\ldots\left(1-{}_n p_{x_m}\right) $$

Con la expresión anterior y siguiendo un razonamiento análogo a la *ec.13.4* se tiene.

Definición 13.5

Se dice que ${}_n p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[r]}$ es la probabilidad que un grupo de m participantes exactamente r lleguen con vida a la edad x_i+n, si

$$ {}_n p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[r]} = Z_r + k_1 Z_{r+1} + \ldots + k_t Z_{r+t} + k_{m-1} Z_m \qquad def.13.5 $$

(40) *El teorema del binomio afirma que si a,b son dos números cualesquiera, entonces* $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$ *donde* $\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!\,j}$. *Michael Spivak, ver bibliografía.*

Donde, los valores de K_s para $0 \leq s \leq m\text{-}r$ son constantes y el valor de Z_s es la forma simbólica de expresar la suma de las combinaciones de la probabilidad de supervivencia al final de n años de m participantes tomados de s maneras, es decir

$$Z_s = \sum_{s=1}^{m} \binom{{}_n p_{x_1 x_1 \ldots x_s}}{s} \qquad ec.13.5$$

Para determinar los valores de K_s, suponga que la edad de los m participantes es igual a x, utilizando la *ec. 13.4* y aplicando el teorema del binomio, se obtiene

$$\begin{aligned} {}_n p_{\overline{xx\ldots x}^{[r]}} &= \binom{m}{r} {}_n p_x^r (1 - {}_n p_x)^{m-r} \\ &= \binom{m}{r} {}_n p_x^r - \binom{m}{r}\binom{m-r}{1} {}_n p_x^{r+1} + \binom{m}{r}\binom{m-r}{2} {}_n p_x^{r+2} + \ldots + \\ &\quad (-1)^t \binom{m}{r}\binom{m-r}{t} {}_n p_x^{r+t} + \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m}{r} {}_n p_x^m \end{aligned} \qquad ec.13.6$$

Con la *ec.13.5* y la ecuación anterior, la *def.13.5* se expresa

$$Z_s = \sum_{s=1}^{m} \binom{{}_n p_{x_1 x_2 \ldots x_s}}{s} = \binom{m}{s} {}_n p_x^s \qquad ec.13.7$$

Sustituyendo esta ecuación en la *def. 13.5*,

$${}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}^{[r]}} \approx {}_n p_{\overline{xx\ldots x}^{[r]}} = \binom{m}{r} {}_n p_x^r + k_1 \binom{m}{r+1} {}_n p_x^{r+1} + \ldots + k_t \binom{m}{r+t} {}_n p_x^{r+t} + \ldots + k_{m-r}\, {}_n p_x^{m-t} \qquad ec.13.8$$

Igualando las *ec's. 13.6* y *13.8* miembro a miembro, los valores para k_s son

$$k_1 = \frac{-\binom{m}{r}\binom{m-r}{1}}{\binom{m}{r+1}} = -\binom{r+1}{1}, \quad k_2 = \frac{\binom{m}{r}\binom{m-r}{2}}{\binom{m}{r+2}} = \binom{r+2}{2}, \ldots,$$

$$k_s = \frac{(-1)^s \binom{m}{r}\binom{m-r}{s}}{\binom{m}{r+s}} = (-1)^s \binom{r+s}{s}, \ \ldots, k_{m-r} = (-1)^{m-r}\binom{m}{r} = (-1)^{m-r}\binom{m}{m-r}$$

Sustituyendo los valores de k_i para $1 \leq i \leq m\text{-}r$ en la *ec. 13.8*, se obtiene

$$_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;[r]} = Z_r - \binom{r+1}{1}Z_{r+1} + \binom{r+2}{2}Z_{r+2} + \ldots + (-1)^t\binom{r+t}{t}Z_{r+t} + \ldots + (-1)^{m-r}\binom{m}{m-r}Z_{m-r}$$

Rescribiendo,

$$_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;[r]} = \sum_{t=0}^{m-r}(-1)^t\binom{r+t}{t}Z_{r+t} \qquad ec.13.9$$

La expresión anterior, es la probabilidad que un grupo de m participantes de edades distintas x_i lleguen con vida exactamente r a la edad x_i+n. Luego entonces, la probabilidad que al menos r participantes lleguen con vida a la edad x_i+n, se encuentra fácilmente si se sustituye la *ec.13.9* en la *def.13.4*, es decir

$$\begin{aligned} {}_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;r} &= \sum_{s=r}^{m} {}_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;[s]} \\ &= \sum_{s=r}^{m}\sum_{t=0}^{m-r}(-1)^t\binom{s+t}{t}Z_{s+t} \end{aligned} \qquad ec.13.10$$

La ecuación anterior se puede expresar como

$$_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;r} = \sum_{s=r}^{m}(-1)^{s-r}\binom{s-1}{s-r}Z_s \qquad ec.13.11$$

Además, las *ec's. 13.9 y 13.11* cumple con lo propuesto en la *observación 13.2* y son de gran ayuda cuando se desea calcular la probabilidad de grupos de vida múltiple, en los cuales al menos o exactamente r participantes lleguen con vida a la edad x_i+n.

Observación 13.3

El objetivo de estudio de los grupos de último sobreviviente en donde al menos o exactamente r participantes sobreviven, consiste en diseñar coberturas pagaderas cuando el grupo continúa vigente.

Ejemplo 13.4

Encuentre una expresión en términos de anualidades de vida conjunta, para la prima neta única de una anualidad anticipada vitalicia de *1 u.m.* para los participantes de edades (x, y, z). La cual, continúa pagándose si están exactamente dos participantes vivos.

Sol.

La anualidad $\ddot{a}_{\overline{xyz}}^{[2]}$ se paga, si exactamente dos participantes están con vida. Ahora, si se utiliza la *ec.13.9* se tiene:

$$\ddot{a}_{\overline{xyz}}^{[2]} = \ddot{a}_{xy} + \ddot{a}_{xz} + \ddot{a}_{yz} - 3\ddot{a}_{xyz}$$

■

Ejemplo 13.5

Encuentre una expresión en seguros de vida conjunta, para un seguro ordinario de vida de *1 u.m.* de *S.A.* pagadero a la destrucción del grupo de participantes (x,y,z,w). La suma asegurada se paga si fallecen al menos dos participantes. Es decir, no se paga si al menos tres participantes están con vida.

Sol.

Expresando el seguro ordinario de vida $A_{\overline{xyzw}}^{\;3}$ en términos de probabilidades de fallecimiento y usando la *ec. 13.11* para reducirlo a seguros de vida conjunta se obtiene,

$$A_{\overline{xyzw}}^{\;3} = A_{xyz} + A_{xyw} + A_{yzw} + A_{xzw} - 3A_{xyzw}$$

La ecuación anterior, representa una cobertura con suma asegurada de *1 u.m*, pagadera si fallecen al menos dos participantes del grupo asegurado.

■

Definición 13.6

Se dice que la suma asegurada de la cobertura $A_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;r}$ se paga, si del grupo de participantes fallecen al menos $(m\text{-}r\text{+}1)$ participantes.

Análogamente, se dice que la suma asegurada de la cobertura $A_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}^{[r]}}$ se paga, si del grupo de participantes fallecen al menos (*m-r*) participantes.

def.13.6

Observación 13.4

Es muy importante, que el lector tome en consideración la forma en la cual se interpretan las expresiones de los seguros de vida y las anualidades. Ya que de no hacerlo, puede cometer errores de interpretación y de cálculo. Por otro lado, la notación aparentemente complicada, se vuelve simple cuando se recuerdan las definiciones de los seguros de vida, las anualidades (capítulo 4 y 3 respectivamente), los grupos de vida múltiple y los estados de grupos. Esto último se puede hacer, ya que los seguros y las anualidades de vida son funciones lineales que dependen de ${}_np_x$.

<u>Generalización y composición de estados de destrucción de grupos</u>

Los estados de grupos hasta ahora vistos, consisten en que al menos o exactamente *r* participantes sobrevivan de un grupo dado. No obstante, los grupos de vida múltiple se generalizan, cuando en un mismo grupo de *m* participantes se aplica más de una vez la *def. 13.4* y *13.5*.

Por ejemplo, el grupo $\left(\overline{x_1 x_2 x_3 \ldots \overline{x_{m-1} x_m}}^{\,r}\right)$ continúa vigente si al menos *r* participantes están con vida. Sin embargo, observe que las vidas $x_{m-1}x_m$ forman otro grupo, llámese *v*, el cual continúa vigente hasta que fallece el último sobreviviente. Así, el grupo puede escribirse como $(\overline{x_1 x_2 x_3 \ldots v}^{\,r})$.

Ejemplo 13.6

Reducir ${}_np_{\overline{x_1 x_2 x_3 \overline{x_4 x_5}}^{\,3}}$ en términos de probabilidades de vida conjunta.

$${}_np_{\overline{x_1 x_2 x_3 \overline{x_4 x_5}}^{\,3}} = {}_np_{x_1x_2x_3} + {}_np_{x_1 x_2 \overline{x_4 x_5}^{\,1}} + {}_np_{x_2 x_3 \overline{x_4 x_5}^{\,1}} + {}_nP_{x_1 x_3 \overline{x_4 x_5}^{\,1}} - 3\,{}_np_{x_1 x_2 x_3 \overline{x_4 x_5}^{\,1}}$$

Si las vidas son independientes, se tiene

$$
\begin{aligned}
{}_np_{\overline{x_1x_2x_3\,\overline{x_4x_5}}}^{\;3} &= {}_np_{x_1x_2x_3} + \left({}_np_{x_1x_2}\right)\left({}_np_{\overline{x_4x_5}}^{\;1}\right) + \left({}_np_{x_2x_3}\right)\left({}_np_{\overline{x_4x_5}}^{\;1}\right) + \left({}_np_{x_1x_3}\right)\left({}_np_{\overline{x_4x_5}}^{\;1}\right) - 3\left({}_np_{x_1x_2x_3}\right)\left({}_np_{\overline{x_4x_5}}^{\;1}\right) \\
&= {}_np_{x_1x_2x_3} + \left({}_np_{x_1x_2} + {}_np_{x_2x_3} + {}_np_{x_1x_3} - 3\,{}_np_{x_1x_2x_3}\right)\left({}_np_{\overline{x_4x_5}}^{\;1}\right)
\end{aligned}
$$

Donde

$$
{}_np_{\overline{x_4x_5}}^{\;1} = {}_np_{x_4} + {}_np_{x_5} - {}_np_{x_4x_5}
$$

Sustituyendo este resultado en la expresión anterior, finalmente

$$
\begin{aligned}
{}_np_{\overline{x_1x_2x_3\,\overline{x_4x_5}}}^{\;3} &= {}_np_{x_1x_2x_3} + \left({}_np_{x_1x_2} + {}_np_{x_2x_3} + {}_np_{x_1x_3} - 3\,{}_np_{x_1x_2x_3}\right)\left({}_np_{x_4} + {}_np_{x_5} - {}_np_{x_4x_5}\right) \\
&= {}_np_{x_1x_2x_3} + {}_np_{x_1x_2x_4} + {}_np_{x_1x_2x_5} - {}_np_{x_1x_2x_4x_5} + \\
&\quad + {}_np_{x_2x_3x_4} + {}_np_{x_2x_3x_5} - {}_np_{x_2x_3x_4x_5} + \\
&\quad + {}_np_{x_1x_3x_4} + {}_np_{x_1x_3x_5} - {}_np_{x_1x_3x_4x_5} + \\
&\quad - 3\,{}_np_{x_1x_2x_3x_4} - 3\,{}_np_{x_1x_2x_3x_5} + 3\,{}_np_{x_1x_2x_3x_4x_5}
\end{aligned}
$$

La solución de este ejemplo es sencilla, si se utiliza la suposición de independencia y se tiene cuidado con la agrupación de las vidas.

■

Ejemplo 13.7

Encontrar una expresión en seguros de vida conjunta para $A_{\overline{xy}:\overline{zw}}$. El cual, es un seguro ordinario de vida de *1 u.m.* de *S.A.* pagadera a la destrucción del último sobreviviente del grupo *(xy)* y del último sobreviviente del grupo *(zw)*. Suponga que los grupos son independientes entre sí.

Sol.

Utilizando el supuesto de independencia $A_{\overline{xy}:\overline{zw}} = A_{\overline{xy}}A_{\overline{zw}}$ .Por las propiedades del grupo de último sobreviviente, finalmente

$$
\begin{aligned}
A_{\overline{xy}}A_{\overline{zw}} &= \left(A_x + A_y - A_{xy}\right)\left(A_z + A_w - A_{zw}\right) \\
&= A_{xz} + A_{xw} - A_{xzw} + A_{yz} + A_{yw} - A_{yzw} - A_{xyz} - A_{xyw} + A_{xyzw}
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 13.8

Encuentre una expresión para $\ddot{a}_{\overline{(x:\overline{n|}):(y:\overline{n|})}}$. Que representa la prima neta única de una anualidad de *1 u.m.* pagadera hasta la destrucción del grupo.

Sol.

Por la definición de grupo de último sobreviviente $\ddot{a}_{\overline{(x:\overline{n|}):(y:\overline{m|})}} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \ddot{a}_{y:\overline{m|}} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}:y:\overline{m|}}$. En la expresión anterior, la anualidad $\ddot{a}_{x:\overline{n|}:y:\overline{m|}}$ se puede escribir como

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}:y:\overline{m|}} = \begin{cases} \ddot{a}_{xy:\overline{n|}} & si\ n < m \\ \ddot{a}_{xy:\overline{m|}} & si\ m < n \end{cases}$$

La anualidad tiene este comportamiento, porque al terminar la temporalidad el grupo de vida conjunta se destruye. Además, si $n<m$ el grupo se destruye porque han transcurrido n años. También se destruye, si $m<n$.

■

Ejemplo 13.9

Encuentre una expresión en términos de seguros de vida conjunta, para una cobertura de un seguro ordinario de vida con suma asegurada de *1 u.m.* pagadera a la destrucción del grupo $\left(\overline{x\,\overset{[1]}{\overline{yz}}}\right)$.

Sol.

Como el grupo $\left(\overline{x\,\overset{[1]}{\overline{yz}}}\right)$ es de último sobreviviente,

$$\begin{aligned} A_{\overline{x\,\overset{[1]}{\overline{yz}}}} &= A_x + A_{\overset{[1]}{\overline{yz}}} - A_{x\,\overset{[1]}{\overline{yz}}} \\ &= A_x + \left(A_y + A_z - 2A_{yz}\right) - A_x\left(A_y + A_z - 2A_{yz}\right) \\ &= A_x + \left(1 - A_x\right)\left(A_y + A_z - 2A_{yz}\right) \end{aligned}$$

■

Observación 13.5

De los ejemplos vistos, se concluye que la forma de reducir expresiones de grupos de exactamente o al menos r participantes vivos, se tiene que considerar; la notación que involucre todo el grupo de vida múltiple y reducir por los métodos vistos el resto de los subgrupos formados.

Orden de fallecimiento

Los grupos de vida múltiple que se han estudiado, se pueden clasificar de acuerdo al tipo y momento de destrucción del grupo, es decir:

i) Vida conjunta, se destruye cuando cualquiera de sus miembros fallece.
ii) Al menos r sobrevivientes, se destruye cuando fallecen $m-r+1$ participantes.
iii) Exactamente r sobreviven, se destruye cuando fallecen $m - r$ participantes.

De los tres casos anteriores, ninguno contempla la posibilidad de orden en el fallecimiento ya que los grupos se destruyen cuando ocurre: i), ii) ó iii). Así, se utilizará el nombre de orden de fallecimiento para caracterizar aquellos grupos de vida múltiple que contengan un orden en las muertes. Por ejemplo, suponga que se desea la probabilidad que del grupo (x, y), fallezca (x) antes que (y). En este pequeño ejemplo, el orden de fallecimiento consiste en que los participantes (x,y) fallecen en un orden establecido y por lo tanto, el grupo se destruye si sólo si, (x) muere antes que (y).

Definición 13.7

Se dice que el grupo de vida múltiple $\left(x_1x_2\ldots\overset{i}{x_j}\ldots x_m\right)$ se destruye, sí el participante de edad x_j fallece en el *i-ésimo* lugar. En otras palabras, el grupo se destruye si han fallecido *i-1* participantes y la *i-ésima* muerte es la del participante de edad x_j.

def.13.7

Definición 13.8

Se dice que el grupo de vida múltiple $\left(x_1x_2\ldots\overset{i}{\overline{x_j\ldots x_{j+k}}}\ldots x_m\right)$ se destruye, sí de entre los participantes de edad $x_j\ldots x_{j+k}$, el participante de edad x_j ó x_{j+1} ó … x_{j+k} fallece en el *i-ésimo* lugar. Es decir, el grupo se puede representar como la unión de

$$\left(x_1x_2\ldots\overset{i}{\overline{x_j\ldots x_{j+k}}}\ldots x_m\right)=\left(x_1x_2\ldots\overset{i}{x_j}\ldots x_{j+k}\ldots x_m\right)\cup\left(x_1x_2\ldots x_j\overset{i}{x_{j+1}}\ldots x_{j+k}\ldots x_m\right)\cup\ldots\cup\left(x_1x_2\ldots x_j\ldots\overset{i}{x_{j+k}}\ldots x_m\right) \qquad \textit{def. 13.8}$$

Ejemplo 13.9

Suponga que se tienen dos participantes de edades (x,y). Se desea, encontrar la probabilidad que el participante de edad x fallezca en primer lugar.

Sol.

Con la interpretación de la *ec. 1.20*, y definiendo a ${}_nq_{\overset{1}{x}y}$ como la probabilidad que una persona de edad x fallezca en primer lugar de el grupo (xy), se tiene

$$ {}_nq_{\overset{1}{x}y} = \int_0^n {}_tp_{xy}\mu_{x+t}\,dt \qquad ec.\ 13.12 $$

Donde ${}_tp_{xy}\mu_{x+t}$ representa que (x) fallecerá según la tasa instantánea de mortalidad al tiempo t, para $0 \le t \le n$ mientras el participante de edad (y) continúa con vida. Por otro lado, se pueden dar otras expresiones alternativas para la probabilidad de fallecimiento del grupo de vida múltiple.

$$ {}_nq_{\overset{1}{x}y} = \int_0^n {}_tp_{xy}\mu_{x+t}\,dt \qquad ec.\ 13.13 $$

$$ {}_{n|m}q_{\overset{1}{x}y} = \int_n^m {}_tp_{xy}\mu_{x+t}\,dt \qquad ec.\ 13.14 $$

■

Observación 13.6

Las definiciones de orden de fallecimiento, sólo se aplican cuando se trata de funciones que dependen de la probabilidad de fallecimiento ${}_nq_x$, ya que en otro caso, pierden sentido de interpretación las *def's. 13.7* y*13.8.*

Ejemplo 13.10

Analogamente al *ejemplo 13.9*, ¿qué sucede si la persona de edad (x) fallece en segundo lugar?

Sol.

La probabilidad que (x) fallezca en segundo lugar ${}_nq_{\overset{2}{x}y}$ se representa como, entonces

$$ {}_nq_{\overset{2}{x}y} = \int_0^n {}_tq_{y\,t}p_x\mu_{x+t}\,dt $$

■

Como se recuerda, los grupos de último sobreviviente continúan vigentes, si al menos o exactamente r de los m participantes están con vida (*def. 13.4* y *13.5*). Lo anterior, se puede utilizar para determinar expresiones con orden de fallecimiento en términos de probabilidades que al menos o exactamente r sobrevivan. Observe el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13.11

Determine la probabilidad que (x) fallezca en segundo lugar del grupo de vida múltiple de edades (x, y, z). Reduzca la expresión por el método Z.

Sol.

$${}_nq_{\overset{2}{x}yz} = \int_0^n {}_tp_x\, {}_tp_{\overset{[1]}{yz}}\, \mu_{x+t}\, dt$$

Donde ${}_tp_x\, {}_tp_{\overset{[1]}{yz}}\, \mu_{x+t}$ representa que los participantes de edades (y, z) llegue exactamente uno con vida y que (x) fallezca de forma instantánea al momento t después de la primer muerte del grupo (y,z). Reduciendo la expresión anterior por el método z,

$$\begin{aligned} {}_nq_{\overset{2}{x}yz} &= \int_0^n {}_tp_x\, {}_tp_{\overset{[1]}{yz}}\, \mu_{x+t}\, dt = \int_0^n {}_tp_x\left({}_tp_y + {}_tp_z - 2\,{}_tp_{yz}\right)\mu_{x+t}\, dt \\ &= {}_nq_{\overset{1}{x}y} + {}_nq_{\overset{1}{x}z} - 2\,{}_nq_{\overset{1}{x}yz} \end{aligned}$$

ec. 13.15

■

Ejemplo 13.12

Suponga que (x,y,z,w) son las edades de un grupo de participantes. Encontrar la probabilidad de destrucción del grupo, donde (x) fallece en tercer lugar y al menos uno de entre (z) y (w) fallece. Reduzca por el método Z.

Sol.

$$\begin{aligned} {}_nq_{\overset{3}{x}y\overline{zw}} &= \int_0^n {}_tp_x\, {}_tp_{\overset{[1]}{y\overline{zw}}}\, \mu_{x+t}\, dt \\ &= \int_0^n {}_tp_x\left({}_tp_y + {}_tp_{\overline{zw}} - 2\,{}_tp_{y\overline{zw}}\right)\mu_{x+t}\, dt \\ &= \int_0^n {}_tp_x\left[{}_tp_y + \left(1 - 2\,{}_tp_y\right)\left({}_tp_y + {}_tp_z - {}_tp_{zw}\right)\right]\mu_{x+t}\, dt \\ &= {}_nq_{\overset{1}{x}y} + {}_nq_{\overset{1}{x}z} + {}_nq_{\overset{1}{x}w} - {}_nq_{\overset{1}{x}zw} + \\ &\quad - 2\left({}_nq_{\overset{1}{x}yz} + {}_nq_{\overset{1}{x}yw} - {}_nq_{\overset{1}{x}yzw}\right) \end{aligned}$$

ec. 13.16

■

Para la *ec.13.16*, el problema consiste en reducir expresiones de la forma ${}_nq_{x_1x_2\ldots \overset{1}{x_j}\ldots x_m}$ en términos de funciones biométricas conocidas. Considere los siguientes casos:

i) Los participantes tienen edades idénticas $x_1=x_2=\ldots=x_m$.

ii) Los participantes tienen edades distintas $x_1\neq x_2\neq\ldots\neq x_m$.

Para el caso i), suponga que se desea encontrar la probabilidad que uno de los m participantes de edad igual (x) fallezca en primer lugar, esto es

$$\begin{aligned} {}_nq_{\overset{1}{x}x\ldots x} &= \int_0^n {}_tp_{xx\ldots x}\mu_{x+t}dt \\ &= \int_0^n ({}_tp_x)^{m-1}\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt \end{aligned} \qquad ec.\ 13.17$$

Haciendo el cambio de variable, ${}_tp_x=t$ entonces $\frac{d\,{}_tp_x}{dt}=dt$. Utilizando esta expresión en la *ec.1.15* se obtiene

$$\frac{d\,{}_tp_x}{dt}=\frac{d\left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\right)}{dt}=\frac{Dl_{x+t}}{l_x}$$

Como ${}_tp_x\mu_{x+t}=-\frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{Dl_{x+t}}{l_{x+t}}$, y sustituyendo la ecuación anterior en la *ec.13.17*, se tiene

$$\begin{aligned} {}_nq_{\overset{1}{x}x\ldots x} &= \int_0^n ({}_tp_x)^{m-1}d({}_tp_x) \\ &= \left[\frac{1}{m}({}_tp_x)^m\right]_{t=0}^{t=n} \\ &= \frac{1}{m}\left[1-({}_np_x)^m\right] \end{aligned} \qquad ec.\ 13.18$$

Para el caso ii) donde los m participantes tienen edades diferentes, se tiene que hacer una suposición sobre el comportamiento de la fuerza instantánea de mortalidad μ_x. La cual, puede ser de acuerdo a las leyes de Makeham, Gompertz, o en su caso, suponer otro comportamiento la fuerza de mortalidad (μ_x).

Por lo anterior, una de las suposiciones más simples que se puede hacer sobre la tasa instantánea de mortalidad, es la ley de Gompertz $\mu_x = BC^x$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
{}_nq_{x_1x_2\ldots \overset{1}{x_j}\ldots x_m} &= \int_0^n {}_tp_{x_1x_2\ldots x_j\ldots x_m}\mu_{x_j+t}dt \\
&= \int_0^n {}_tp_{x_1x_2\ldots x_j\ldots x_m}BC^{x_j+t}dt \\
&= \frac{C^{x_1}+C^{x_2}+\ldots+C^{x_j}+\ldots+C^{x_m}}{C^{x_1}+C^{x_2}+\ldots+C^{x_j}+\ldots+C^{x_m}}\int_0^n {}_tp_{x_1x_2\ldots x_j\ldots x_m}BC^{x_j+t}dt \\
&= \frac{C^{x_j}}{C^{x_1}+C^{x_2}+\ldots+C^{x_j}+\ldots+C^{x_m}}\int_0^n {}_tp_{x_1x_2\ldots x_j\ldots x_m}BC^t\left(C^{x_1}+C^{x_2}+\ldots+C^{x_j}+\ldots+C^{x_m}\right)dt \\
&= \frac{C^{x_j}}{C^{x_1}+C^{x_2}+\ldots+C^{x_j}+\ldots+C^{x_m}}\int_0^n {}_tp_{x_1x_2\ldots x_j\ldots x_m}\mu_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_j+t:\ldots:x_m+t}dt \\
&= \frac{C^{x_j}}{C^{x_1}+C^{x_2}+\ldots+C^{x_j}+\ldots+C^{x_m}}\,{}_nq_{x_1x_2\ldots x_j\ldots x_m} \qquad \textit{ec.13.19}
\end{aligned}
$$

El desarrollo de la ley de Makeham para reducir grupos del tipo ${}_nq_{x_1x_2\ldots \overset{1}{x_j}\ldots x_m}$, se da de manera análoga al de la *ec.13.19*. De igual forma, nada impide aplicar otra suposición en el comportamiento de la fuerza instantánea de mortalidad y así, reducir expresiones que dependen de un orden en el fallecimiento a otras de vida conjunta.

Ejemplo 13.13

Reduzca la expresión ${}_nq_{x_1\overset{1}{\overline{x_2x_3}}x_4}$ en términos de probabilidades de fallecimiento de vida conjunta (sin orden de fallecimiento).

Sol.

Por la *def.13.8* se sabe que, ${}_nq_{x_1\overset{1}{\overline{x_2x_3}}x_4} = {}_nq_{x_1\overset{1}{x_2}x_3x_4} + {}_nq_{x_1x_2\overset{1}{x_3}x_4}$. Si se supone la ley de Gompertz. Con la *ec.13.19*, se obtiene

$$
\begin{aligned}
{}_nq_{x_1\overset{1}{\overline{x_2x_3}}x_4} &= \frac{C^{x_2}}{C^{x_1}+C^{x_2}+C^{x_3}+C^{x_4}}\,{}_nq_{x_1x_2x_3x_4} + \frac{C^{x_2}}{C^{x_1}+C^{x_2}+C^{x_3}+C^{x_4}}\,{}_nq_{x_1x_2x_3x_4} \\
&= \frac{\left(C^{x_2}+C^{x_3}\right)}{C^{x_1}+C^{x_2}+C^{x_3}+C^{x_4}}\,{}_nq_{x_1x_2x_3x_4}
\end{aligned}
$$

Composición de funciones con orden de fallecimiento

Los estados de grupos estudiados, pueden ser extendidos a un orden de fallecimiento más amplio. Por ejemplo, suponga que se tienen *m* participantes y uno de ellos fallece en primer lugar, otro en segundo y otro en el *n-ésimo* lugar. Con lo anterior, las probabilidades de fallecimiento de los *m* participantes que integran el grupo de vida múltiple, pueden acotarse a orden en el fallecimiento. Esto, resulta particularmente útil cuando se diseñan coberturas pagaderas si ocurre cierto orden en el orden de fallecimiento.

Para ilustrar el párrafo anterior, suponga que para un grupo de tres participantes de edades (x,y,z), se desea encontrar la probabilidad que (x) fallezca en primer lugar y (y) en segundo lugar es decir ${}_nq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z}$, así

$$ {}_nq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^n {}_tq_x\, {}_tp_{yz}\mu_{y+t}\,dt \qquad ec.13.20 $$

Donde, ${}_tq_x\, {}_tp_{yz}\mu_{y+t}$ representa la probabilidad de que el participante de edad (x) fallezca en primer lugar, y el de edad (y), fallezca al momento t posterior a la muerte de (x).

Como ${}_nq_x = 1 - {}_np_x$ la *ec.13.19* se trasforma en

$$ \begin{aligned} {}_nq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} &= \int_0^n (1-{}_tp_x)\, {}_tp_{yz}\mu_{y+t}\,dt \\ &= \int_0^n {}_tp_{yz}\mu_{y+t}\,dt + \int_0^n {}_tp_{xyz}\mu_{y+t}\,dt \\ &= {}_nq_{\overset{1}{y}z} + {}_nq_{x\overset{1}{y}z} \end{aligned} \qquad ec.13.21 $$

Observación 13.7

La *ec.13.20* puede expresarse de otras formas, por ejemplo

$$ {}_nq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^n ({}_tp_{xyz})(\mu_{x+t})\, {}_tq_{\overset{1}{y+t}:z+t}\,dt $$

$$ {}_nq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^n {}_tq_{\overset{2}{x}y}\, {}_tp_x\mu_{x+t}\,dt $$

La composición en el orden de fallecimiento, sólo tiene sentido cuando el grupo de vida múltiple tiene al menos tres participantes, de no ser así el orden de fallecimiento está limitado a dos casos.

Ejemplo 13.14

Encontrar una expresión para la probabilidad de destrucción dentro de n años, de un grupo de cuatro participantes de edades (x,y,z,w). Si el participante de edad (x) fallece en primer lugar, el de edad (y) en segundo lugar y el de edad (z) en tercer lugar.

Sol.

$${}_nq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}\overset{3}{z}w} = \int_0^n {}_tq_x\left({}_tp_{yzw}\mu_{y+t}\right){}_nq_{\overset{1}{z+t}:w+t}\,dt \qquad ec.13.22$$

La ecuación anterior se puede escribir como

$${}_nq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}\overset{3}{z}w} = \int_0^n {}_tq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}}\left({}_tp_{zw}\mu_{z+t}\right)dt \qquad ec.13.23$$

■

Observación 13.8

Las expresiones con orden de fallecimiento compuesto dependen, del participante que se utilizó como punto de referencia. Por ejemplo, en la *ec.13.22* se utilizó como referencia el participante de edad (x) que fallece en primer lugar. Por otro lado, la *ec.13.23* fue construida tomando como referencia el participante de edad (y) que fallece en segundo lugar. Este mismo fenómeno puede apreciarse en la *ec.13.20* y sus expresiones alternas de la *observación 13.7.*

Por otro lado, las expresiones de los seguros de vida por ser funciones que dependen de la probabilidad de fallecimiento ${}_nq_x$, implica que pueden tener orden de fallecimiento (ver la *observación 13.1*). De esta manera, considere las siguientes expresiones de seguros discretos y continuos con orden de fallecimiento.

Por ejemplo, una cobertura discreta para la *ec. 13.21* de un seguro ordinario de vida de *1 u.m.* de suma asegurada pagadero al final del año de la destrucción del grupo. Se expresa

$$
\begin{aligned}
A_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} &= \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\,{}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\left({}_{t|}q_{\overset{1}{y}z} + {}_{t|}q_{x\overset{1}{y}z}\right) \\
&= A_{\overset{1}{y}z} + A_{x\overset{1}{y}z}
\end{aligned}
\qquad ec.13.24
$$

Otro ejemplo, una cobertura discreta para la *ec.13.22* de un seguro ordinario de vida de *1 u.m.* pagadero al final del año de destrucción del grupo se expresa como

$$
\begin{aligned}
A_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}\overset{3}{z}w} &= \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\,{}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}\overset{3}{z}w} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\int_0^n {}_tq_{x\overset{2}{y}}\left({}_tp_{zw}\mu_{z+t}\right)dt
\end{aligned}
\qquad ec.13.25
$$

Para el caso de los seguros continuos, se puede utilizar la caracterización de la *ec. 4.8* y extenderla para vida múltiple. Por ejemplo, para una cobertura de un seguro continuo ordinario de vida de *1 u.m.* de suma asegurada, pagadera al momento de la destrucción del grupo (según las condiciones de la *ec.13.21*), se representa por

$$
\overline{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^{\infty} V^t\left(1-{}_tp_x\right){}_tp_{yz}\mu_{y+t}\,dt \qquad ec.13.26
$$

Por otro lado, si se tiene una cobertura de un seguro continuo de *1 u.m.* de suma asegurada, pagadera al momento de destrucción del grupo (según las condiciones de la *ec.13.22*), se tiene

$$
\overline{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}\overset{3}{z}w} = \int_0^{\infty} V^t\,{}_tq_x\left({}_tp_{yzw}\mu_{y+t}\right){}_nq_{\overset{1}{z+t}:w+t}\,dt \qquad ec.13.27
$$

Otro ejemplo muy ilustrativo, resulta de una cobertura de un seguro continuo ordinario de vida de *1 u.m.* de suma asegurada, pagadera al instante de la destrucción del grupo de los participantes de edades (xyz), donde (x) fallece en primer lugar y (z) en tercer lugar. Así,

$$
\overline{A}_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^{\infty} V^t\,{}_tq_x\left({}_tp_{yz}\mu_{y+t}\right)\overline{A}_{z+t}\,dt \qquad ec.13.28
$$

Donde ${}_tq_x$ es la probabilidad que (x) fallezca en primer lugar, ${}_tp_{yz}\mu_{y+t}$ es la probabilidad que (y) fallezca al momento t y $\overline{A}_{z+t}$ el seguro para que (z) fallezca en tercer lugar.

Resumen de Notación

En suma, los aspectos más importantes de la notación e interpretación de los grupos de vida múltiple son;

$_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;r}$ Es la probabilidad que al menos r de los m participantes sobrevivan a la edad x_i+n para $i=1,2,\ldots m$. Una forma de reducir esta expresión, es a través del método Z. Observe, si $r = 1$ la probabilidad se escribe como, $_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}$.

$_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;[r]}$ Es la probabilidad que exactamente r de los m participantes sobrevivan a la edad x_i+n para $i=1,2,\ldots m$. Una forma de reducir esta expresión, es a través del método Z.

Además, la notación de las dos expresiones anteriores se puede escribir en términos de $_{n}q_{x}$ porque $_{n}p_{x}=1-{}_{n}q_{x}$. La siguiente notación, es para aquellas funciones contingentes que dependen de la probabilidad de fallecimiento $_{n}q_{x}$ como los seguros de vida. Esta notación, solo se puede utilizar para funciones que dependen de la probabilidad $_{n}q_{x}$, pues tiene un orden de fallecimiento. Así:

$_{n}q_{x_1x_2\ldots \overset{i}{x_j}\ldots x_m}$ Es la probabilidad que un grupo de m participantes se destruya cuando el participante de edad x_j fallece en el *i-ésimo* lugar antes de transcurridos n años, para $i,j=1,2,\ldots m$.

$_{n}q_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;i}$ Es la probabilidad que un grupo de m participantes se destruya cuando el participante de edad x_1 fallece en el *i-ésimo* lugar o el de edad x_2 en el *i-ésimo* lugar, o el de edad x_m en el *i-ésimo* lugar, antes de transcurridos n años, para $i=1,2,\ldots m$.

Observe, que otras condiciones en la destrucción de grupos pueden deducirse haciendo combinaciones de las notaciones anteriores.

Ejercicios del Capítulo 13

Estados de Grupos

1.- En la *def. 13.3* se afirma que $\,_nq_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} = 1 - \,_np_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}$. Más, esta definición puede darse como una proposición, entonces, dé una demostración formal de ésta igualdad.

2.- Encuentre un valor numérico para $\,_np_{\overline{x_1x_2}}$, donde *n = 8, x₁ = 50 y x₂ = 45.* Utilice la tabla de mortalidad del Anexo 2.

3.- Escriba una expresión en términos de funciones de vida conjunta, en los siguientes puntos (sin utiiizar el método *Z*):

i) $\,_nq_{\overline{x_1x_2x_3x_4x_5}}$

ii) $\,_np_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}$

iii) $\ddot{a}_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}$

4.- Dar una expresión en términos de seguros ordinarios de vida, para una cobertura con suma asegurada de *1 u.m*, pagadera al final del año de la destrucción del grupo de último sobreviviente formado por el grupo de edades (*x, y, z*).

5.- Explique en qué consiste el siguiente beneficio y dé una expresión en términos de grupos de vida conjunta para la anualidad:

$$\ddot{a}_{\overline{x_1x_2x_3}:\overline{x_4x_5x_6}}$$

6.- Explique el significado y de una expresión para las siguientes coberturas:

i) $A_{\overline{x:\overline{n|}}}$

ii) $A_{\overline{x_1x_2}:\overline{n|}}$

Método Z

7.- Utilizando la *ec. 13.9*, reduzca las siguientes expresiones en términos de grupos de vida conjunta:

i) $\ddot{a}_{\overline{x_1x_2x_3}}^{[1]}$

ii) $A_{\overline{x_1x_2}^{[1]}:\overline{x_1x_2x_3}^{[2]}}$

iii) ${}_{n}p_{\overline{x_1x_2x_3x_4x_5}}^{[3]}$

8.- Utilizando la *ec. 13.11*, reduzca las siguientes expresiones en términos de grupos de vida conjunta:

i) ${}_{n|m}q_{\overline{x_1x_2x_3}}^{2}$

ii) ${}_{n}p_{\overline{x_1x_2x_3}^{2}:\overline{x_4x_5}}$

iii) $\ddot{a}_{\overline{x_1x_2x_3x_4}^{[3]}:\overline{n}|}$

Generalización y composición de estados de destrucción de grupos

9.- La anualidad $\ddot{a}_{\overline{\overline{xy}:\overline{z:\overline{n}|}}}^{[1]}$, representa la prima neta única de una anualidad temporal a n años para un grupo de participantes de edades (x,y,z) de *1 u.m.* anual. Además, deja de ser pagadera cuando exactamente uno de los grupos $(x:y)$ ó $(z:n)$ se destruye, lo cual, ocurre al fallecimiento del último sobreviviente de cada grupo. Dar una expresión en términos de anualidades de vida conjunta.

10.- De una interpretación de la siguiente notación y reduzca las expresiones en términos de vida conjunta.

i) ${}_{n}p_{\overline{\overline{xy}zw}}^{[2]}$

ii) $A_{\overline{x\overline{yz}}}$

iii) $a_{\overline{x\overline{yz}:\overline{n|}}}$

Orden de fallecimiento

11.- Demostrar que si μ_x se comporta según la ley de Makeham ($\mu_x = A + BC^x$), entonces:

$$ {}_{n}q_{x_1x_2\ldots \overset{1}{x_j}\ldots x_m} = (A)\overset{o}{e}_{x_1x_2\ldots x_m:\overline{n|}} + \frac{C^{x_j}}{C^{x_1}+C^{x_2}+\ldots+C^{x_m}}\left({}_{n}q_{x_1x_2\ldots x_m} - mA\overset{o}{e}_{x_1x_2\ldots x_m:\overline{n|}} \right) $$

Ayuda: vea como se resolvió el problema para el caso de Gompertz (*ec.13.19*).

12.- ¿Cómo cambia la ecuación anterior si se hace la siguiente contracción de grupos?

$$ mC^{w} = C^{x_1} + C^{x_2} + \ldots + C^{x_m} $$

13.- Reducir el orden de fallecimiento de las siguientes expresiones:

i) $A_{xyz\overset{4}{w}}$

ii) $A_{x\overset{2}{y}z:\overline{n|}}$

iii) $A_{\overset{2}{\overline{xy}}zw:\overline{n|}}$ El grupo (xy) se destruye al fallecimiento del último sobreviviente de entre los participantes de edad (x) ó (y). Además, el número dos sobre el grupo (xy), significa que el seguro se paga cuando el grupo (xy) se destruye en segundo lugar, no confundir esta notación con la de al menos r participantes.

iv) $A_{x\overset{3}{y}z:\overline{n|}}$

14.- Reduzca el orden de fallecimiento de las expresiones del ejercicio anterior, si μ_x se comporta de acuerdo a las suposiciones de la ley de Makeham del ejercicio 11.

Composición de funciones con orden de fallecimiento

15.- Reducir el orden de fallecimiento de las siguientes expresiones:

i) ${}_nq_{\underset{1}{x}yz\overset{3:4}{w}} = {}_nq_{\underset{1}{x}yz\overset{3}{w}} + {}_nq_{\underset{1}{x}yz\overset{4}{w}}$

ii) $A_{\overset{2}{\overline{xyz}}\,\overset{1}{w}:\overline{n}|}$

iii) $A_{\overset{1\,[2]}{\overline{xyz}}\,\overset{2}{w}}$

iv) $A_{\overset{1}{\overline{xy}}\,\overset{2}{\overline{zw}}:\overline{n}|}$

v) ${}_nq_{\overset{2}{\overline{xy}}\,z\,\underset{3}{w}}$

vi) ${}_nq_{xy\,\overset{4}{z}\,\underset{3}{w}}$

16.- Si $\mu_{x+t} = q_{x+t}$ para todos lo valores de *t*, demostrar que:

$$\overline{A}^{2}_{x\underset{1}{y}z} = \frac{1}{\delta}\left[\overline{A}_{xyz} - \overline{A}_{xz} - (1-\mu_x)(\overline{A}_{x+1:yz} - \overline{A}_{x+1:z})\right]$$

CAPÍTULO 14 "Anualidades de vida múltiple"

Introducción

La anualidad entendida como una serie de pagos periódicos a través del tiempo, conserva su definición para el caso de vida múltiple. No obstante, ésta puede ser enriquecida por lo estudiado en el capítulo anterior, dado que en un grupo de m participantes se tienen distintos estados de un grupo, en particular, el relacionado con el orden de fallecimiento.

De esta manera, suponga que se tienen dos participantes de edades (x) y (y), los cuales, tienen una cobertura en la que se paga *1 u.m.* al final del año y de forma vitalicia anual al beneficiario cuando el participante de edad (x) fallece. Donde, la suma asegurada, es cobrada por el beneficiario de edad (y) hasta que éste fallece. Este tipo de anualidad, es un claro ejemplo en el que se considera orden de fallecimiento, ya que la *S.A.* es pagadera si sólo si (x) fallece primero, en caso opuesto, no se paga el beneficio. A este tipo de anualidad se le conoce como anualidad de reversión.

Con el ejemplo anterior, pueden construirse dos tipos de anualidades más. La primera, para el caso en el cual el participante de edad (x) fallece en un momento t dentro del año, si esto sucede, se recompensa al beneficiario con una cantidad proporcional al periodo faltante. Esta anualidad, es conocida como *anualidad completa.* Finalmente, otro tipo de anualidad conocida como de aniversario, la cual comienza a pagarse en el aniversario de la muerte del participante de edad (x).

En éste capítulo, se estudian las anualidades de; reversión, completas y de aniversario, mismas que pueden combinarse para hacer coberturas más complejas, pero conservando el sentido de anualidad definido en el *Capítulo 3.*

Anualidades de Reversión

Definición 14.1

Se denota por $a_{u|v}$, a la una anualidad de reversión de un conjunto de participantes (u,v) de *1 u.m.* pagadera al final del año de la destrucción del grupo asegurado (u) y hasta la destrucción del grupo (v), la cual se puede expresar como;

$$\begin{aligned} a_{u|v} &= \sum_{t=1}^{\infty} V^{t}\,{}_{t}p_{v}(1-{}_{t}p_{u}) \\ &= a_{v} - a_{uv} \end{aligned} \qquad def.14.1$$

Ejemplo 14.1

Sean (x,y) las edades de un grupo de asegurados de último sobreviviente, cuyos beneficiarios son los participantes formados por el grupo de último sobreviviente (w_1,w_2), determinar una expresión para la anualidad de reversión de *1 u.m.* de estas hipótesis.

Sol.

$$\begin{aligned} a_{\overline{xy}|\overline{w_1w_2}} &= \sum_{t=1}^{\infty} V^{t}\,{}_{t}p_{\overline{w_1w_2}}(1-{}_{t}p_{\overline{xy}}) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} V^{t}\left({}_{t}p_{w_1}+{}_{t}p_{w_2}-{}_{t}p_{w_1w_2}\right)\left(1-\left({}_{t}p_{x}+{}_{t}p_{y}-{}_{t}p_{xy}\right)\right) \\ &= a_{w_1}+a_{w_2}-a_{w_1w_2}-a_{w_1x}-a_{w_1y}+a_{w_1xy}-a_{w_2x}-a_{w_2y}+a_{w_2xy}+ \\ &\quad -a_{w_1w_2x}-a_{w_1w_2y}+a_{w_1w_2xy} \end{aligned}$$

■

Observación 14.1

En la *def. 14.1*, el vector de vidas (u,v) puede sustituirse por; grupos de vida múltiple de último sobreviviente, grupos con estados de destrucción más complejos (como se hizo en el *Capítulo 13*), o, por grupos de al menos o exactamente r sobrevivientes. Sin embargo, no se pueden utilizar grupos con orden de fallecimiento, ya que por definición, la anualidad de reversión tiene un orden de destrucción, el cual, consiste en la destrucción del vector de vidas (u) en primer lugar, para que se pague el beneficio.

Ejemplo 14.2

El símbolo $a_{xy|v:\overline{n}|}$ denota la prima neta única de una anualidad de reversión de *1 u.m.* pagadera al final del año de la destrucción del grupo de vida conjunta (*xy*). El beneficio, continúa pagándose hasta la destrucción del grupo $(v:\overline{n}|)$, es decir, cuando el vector de vidas (v) se destruye, o, termina la temporalidad de n años. Expresar la anualidad de reversión en términos de anualidades de vida conjunta.

Sol.

$$\begin{aligned} a_{xy|v:\overline{n}|} &= \sum_{t=1}^{n} V^t\,{}_tp_v - \sum_{t=1}^{n} V^t\,{}_tp_{v\,t}\,p_{xy} \\ &= a_{v:\overline{n}|} - a_{vxy:\overline{n}|} \end{aligned}$$

■

Observación 14.2

La notación de las anualidades de reversión, se representa con los criterios del *Capítulo 3*, es decir por: la temporalidad, el diferimiento, la periodicidad de pago, etc. Sin embargo, observe que no existen anualidades de reversión anticipadas, ya que no es posible cuantificar el momento exacto del fallecimiento de los asegurados, momento en el cual se comienzan a hacer los pagos de la anualidad de reversión. Para subsanar este inconveniente, considere la siguiente construcción de una anualidad de reversión continua, pagadera al momento del fallecimiento del grupo asegurado.

Definición 14.2

Se denota por $\bar{a}_{u|v}$ a la prima neta única de una anualidad de reversión de *1 u.m.* al momento de la destrucción del vector asegurado de vidas (u), pagadera al vector de vidas (v) hasta su destrucción. Lo anterior se puede escribir como;

$$\begin{aligned} \bar{a}_{u|v} &= \int_0^{\infty} V^t\,{}_tp_v(1-{}_tp_u)dt \\ &= \bar{a}_v - \bar{a}_{uv} \end{aligned} \qquad \textit{def. 14.2}$$

Sustituyendo la igualdad $\int_0^t {}_tp_u\mu_{u+t}dt = 1-{}_tp_u$ de la *ec.1.20* en la definición anterior se tiene;

$$\bar{a}_{u|v} = \int_0^\infty\int_0^t V^t\,{}_tp_v({}_sp_u\mu_{u+s})dsdt$$

Cambiando los límites de integración de la primera integral, se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{u|v} &= \int_0^\infty\int_s^\infty V^t\,{}_sp_u\mu_{u+s}\,{}_tp_v dtds\\ &= \int_0^\infty V^s\,{}_sp_u\mu_{u+s}\left({}_{s|}\bar{a}_v\right)ds\\ &= \int_0^\infty V^s\,{}_sp_u\mu_{u+s}\bar{a}_{v+s}ds\end{aligned} \qquad ec.\ 14.1$$

Ejemplo 14.3

Reduzca $\bar{a}_{\overline{xy}|z:\overline{n}|}$ en términos de anualidades de vida conjunta usando la *def. 14.2*.

Sol.

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\overline{xy}|z:\overline{n}|} &= \bar{a}_{z:\overline{n}|} - \bar{a}_{\overline{xy}:z:\overline{n}|}\\ &= \bar{a}_{z:\overline{n}|} - \bar{a}_{x:z:\overline{n}|} - \bar{a}_{x:z:\overline{n}|} + \bar{a}_{xy:z:\overline{n}|}\end{aligned}$$

■

Anualidades de Aniversario

En este tipo de anualidad, el esquema de pagos es análogo al de la anualidad de reversión. Sólo, que es pagadera a partir del final del primer año de la destrucción del grupo asegurado. Esto es, si el grupo asegurado se destruye al momento t entre el inicio y final de algún año, entonces la anualidad se paga a partir del momento $t+1$, es decir, se paga en el aniversario de la destrucción del grupo asegurado, no obstante, el aniversario puede ser cada *m-ésimo* posterior a la destrucción del grupo.

En este sentido, la *ec. 14.1* puede utilizarse para caracterizar las anualidades de aniversario, ya que, tal expresión contiene los elementos necesarios para hacerla pagadera cada aniversario de la destrucción del grupo asegurado. Observe la siguiente definición.

Definición 14.3

Se denota por $\hat{a}_{u|v}$, a la prima neta única de una anualidad de aniversario de *1 u.m.* a la destrucción del grupo asegurado (u), pagadera al final del primer aniversario al grupo de beneficiarios (v) hasta su destrucción. Lo anterior se puede representar como,

$$\hat{a}_{u|v} = \int_0^\infty V^t \,{}_t p_u \mu_{u+t} a_{v+t} dt \qquad \textit{def. 14.3}$$

Análogamente, se puede definir:

$$\hat{a}^{(m)}_{u|v} = \int_0^\infty V^t \,{}_t p_u \mu_{u+t} a^{(m)}_{v+t} dt \qquad \textit{def. 14.4}$$

La *def. 14.4*, se interpreta como una anualidad de aniversario pagadera al final del primer *m-ésimo* de la destrucción del grupo asegurado (u) durante cada *m-ésimo*, hasta la destrucción del vector de beneficiarios (v).

Por otra parte, la anualidad de aniversario puede ser definida cuando el primer pago se hace de forma anticipada, es decir:

Si la anualidad de reversión es pagadera cada año, se tiene.

$$\hat{\ddot{a}}_{u|v} = \int_0^\infty V^t \,{}_t p_u \mu_{u+t} \ddot{a}_{v+t} dt \qquad \textit{def. 14.5}$$

Si es pagadera cada *m-ésimo*;

$$\hat{\ddot{a}}^{(m)}_{u|v} = \int_0^\infty V^t \,{}_t p_u \mu_{u+t} \ddot{a}^{(m)}_{v+t} dt \qquad \textit{def. 14.6}$$

Ejemplo 14.4

Suponga que un grupo asegurado (xy) desea proteger al grupo (zw) durante n años, con una suma asegurada de k *u.m.* pagaderas al final del mes de la destrucción del grupo (xy) y hasta la destrucción del grupo (zw). Dar una expresión en términos de anualidades de vida conjunta para la anualidad de reversión.

Sol.

Por la *def. 14.4* la cobertura se puede expresar.

$$k\,\hat{a}^{(12)}_{xy|zw:\overline{n}|} = k\int_0^\infty V^t\,{}_tp_{xy}\mu_{x+t:y+t}\,a^{(12)}_{z+t:w+t:\overline{n}|}dt$$

Usando la *ec. 3.8*

$$k\,\hat{a}^{(12)}_{xy|zw:\overline{n}|} \approx k\int_0^\infty V^t\,{}_tp_{xy}\mu_{x+t:y+t}\left(a^{(12)}_{z+t:w+t:\overline{n}|}+\frac{11}{24}\right)dt$$

$$= k\int_0^\infty V^t\,{}_tp_{xy}\mu_{x+t:y+t}\,a_{z+t:w+t:\overline{n}|}dt + \frac{11}{24}k\int_0^\infty V^t\,{}_tp_{xy}\mu_{x+t:y+t}dt$$

Con la *ec.14.1* y la *ec.4.8*

$$k\,\hat{a}^{(12)}_{xy|zw:\overline{n}|} \approx k\left[\bar{a}_{xy|zw:\overline{n}|}+\frac{11}{24}\bar{A}_{xy}\right]$$

Reduciendo la expresión anterior a grupos de vida conjunta, finalmente

$$k\,\hat{a}^{(12)}_{xy|zw:\overline{n}|} \approx k\left[\bar{a}_{zw:\overline{n}|}-\bar{a}_{xyzw:\overline{n}|}+\frac{11}{24}\bar{A}_{xy}\right]$$

■

Observación 14.3

Las anualidades de aniversario, tienen como inconveniente que son expresiones que generalmente dependen de integrales complejas de resolver, consecuentemente es muy adecuado tratar de buscar una aproximación para resolverla. En particular, se pueden tener en mente las *ec's. 3.8, 4.1 y 4.8*, las cuales, conjuntamente con los valores conmutados permiten dar un valor numérico de una anualidad de reversión.

Anualidades Completas

La anualidad completa, análogamente a la anualidad de reversión, consiste en suponer que existen dos grupos de participantes; el primero, el grupo asegurado (u) y el segundo, el grupo de los beneficiarios (v). Ahora bien, en la anualidad de reversión, cuando el grupo de asegurados (u) se destruye, se comienza a pagar una anualidad al final del año de su destrucción y hasta la destrucción del grupo de beneficiarios (v).

En este sentido, la anualidad completa consiste en devolver a los beneficiarios (v) una compensación proporcional al tiempo restante para completar el año corriente. Esto es, si el grupo asegurado se destruyó en un momento t entre el inicio y final del año ($0 \leq t \leq 1$), entonces el tiempo que le faltó al grupo asegurado para completar el año es $1-t$.

Definición 14.7[41]

Se denota por $\overset{o}{a}_{u|v}$, a la prima neta única de una anualidad completa de *1 u.m.* pagadera al final año de la destrucción del grupo asegurado (u), con una compensación proporcional y hasta la destrucción del grupo de beneficiarios (v), es decir

$$\overset{o}{a}_{u|v} = a_{u|v} + E[T] A_{\underset{2}{u}\overset{1}{v}} \qquad def.\ 14.7$$

Donde T[42], es una variable aleatoria que determina si el grupo asegurado (u) se destruye o no entre el inicio y final del año. Su función de densidad está dada por

$$f_T(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; t \in (0,1) \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

[41] *La anualidad completa, también se puede definir para los grupos de vida conjunta de los capítulos previos. Para su construcción, las suposiciones son análogas a las usadas en la def. 14.7.*

[42] *Esta variable aleatoria, se utiliza bajo un escenario análogo en la observación 5.3 del Capítulo 5.*

Calculando la esperanza de la función $f_T(t)$, la *def. 14.7* se puede expresar

$$\overset{o}{a}_{u|v} = a_{u|v} + \frac{1}{2} A_{\overset{1}{u}\,\underset{2}{v}} \qquad ec.\ 14.2$$

Ejemplo 14.4

Reducir la anualidad $\overset{o}{a}_{\overline{\overset{[1]}{xy}}|v:\overline{n}|}$ usando la *ec.14.2*. La cual, es una anualidad completa con una suma asegurada de *1 u.m*, pagadera al final del año de la destrucción un grupo (xy), que se destruye cuando exactamente uno de éstos fallece. El beneficio, lo recibe el grupo de beneficiarios (v) durante n años o su destrucción.

Sol.

$$\begin{aligned}\overset{o}{a}_{\overline{\overset{[1]}{xy}}|v:\overline{n}|} &= a_{\overline{\overset{[1]}{xy}}|v:\overline{n}|} + \frac{1}{2} A_{\underset{1}{\overline{\overset{[1]}{xy}}}\left(\overset{2}{v:\overline{n}|}\right)} \\ &= a_{xv:\overline{n}|} - \left(a_{xv:\overline{n}|} + a_{yv:\overline{n}|} - 2a_{xyv:\overline{n}|}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(A_{\overset{1}{x}:\underset{2}{\left(v:\overline{n}|\right)}} + A_{\overset{1}{y}:\underset{2}{\left(v:\overline{n}|\right)}} - 2A_{\overset{1}{xy}:\underset{2}{\left(v:\overline{n}|\right)}}\right)\end{aligned}$$

■

Observación 14.4

La notación de la anualidad completa y de aniversario, puede ser combinada para formar una anualidad de aniversario completa. Esto es, formar una anualidad del tipo;

$$\begin{aligned}\hat{\overset{o}{a}}_{u|v} &= \hat{a}_{u|v} + \frac{1}{2} A\overset{1}{u}\underset{2}{v} \\ &= \int_0^{\infty} V^t\, {}_t p_u \mu_{u+t} a_{v+t}\, dt + \frac{1}{2} A\overset{1}{u}\underset{2}{v} \qquad ec.14.3\end{aligned}$$

Por otra parte, observe que no existen anualidades completas anticipadas por la naturaleza de su definición. Es decir, si el pago es anticipado, no tiene sentido el dar una compensación al grupo de beneficiarios.

Ejercicios del Capítulo 14

Anualidades de reversión

1.- Una anualidad de reversión denotada por $a_{u|v}$, tiene un esquema de pagos de manera que, durante los primeros años y hasta la destrucción del grupo (u) se utiliza una tasa de interés técnico del i_1 % para calcular los valore presentes contingentes. Después de la destrucción del grupo asegurado (u), y hasta la destrucción del grupo de beneficiarios (v) se utiliza la tasa de interés i_2 %. Dar una expresión en términos de anualidades de vida conjunta para la anualidad de reversión.

2.- Una pareja de padre y madre de edades actuales (x, y) respectivamente, desean adquirir una cobertura, la cual brinda a su único hijo de edad actual (z) un beneficio de k *u.m.* pagaderos cada *m-ésimo* de año a partir de su destrucción. El grupo asegurado se destruye, a la muerte de cualquiera de los dos padres e incluso los dos. Dar una expresión en términos de grupos de vida conjunta, para la prima neta única que deben pagar los padres. Además, de otra expresión, considerando la restricción que el beneficio debe ser pagado al hijo hasta que alcance la edad de 18 años (este tipo de beneficio, pude ser considerado como una pensión temporal o vitalicia cuyo beneficiario, es el hijo).

3.- Reducir las siguientes anualidades de reversión, a anualidades que dependan de grupos de vida conjunta.

i) $a_{\overset{[2]}{\overline{xyz}}|\overset{2}{\overline{w_1w_2w_3}}}$

ii) $a_{\overline{xy:\overline{n|}}|\overline{w_1w_2:\overline{m|}}}$ para $n < m$

iii) $\ddot{a}^{(6)}_{x\underset{1}{y}z|\overline{w_1w_2:\overline{n|}}}$

iv) $\ddot{a}_{xy|zw:\overline{m|}}$

Anualidades de aniversario y completas

4.- Encontrar una expresión para la prima neta única, de una anualidad completa pagadera cada *m-ésimo* de año de *k u.m.* para un grupo asegurado (*xyz*), el cual se destruye a la muerte del último sobreviviente. De este modo, el grupo de beneficiarios de edades w_1, w_2 reciben el beneficio a lo más *n* años después de la destrucción del grupo (*xyz*). Reducir la expresión a anualidades de vida conjunta.

5.- ¿Será cierto que $\overset{o}{a}_{u|v} > a_{u|v} > \hat{a}_{u|v}$? De ser afirmativa su respuesta, demostrarla. En caso opuesto, dar un contraejemplo.

6.- Encontrar una expresión para la prima neta única, de una anualidad de *k u.m.* pagadera al aniversario de la destrucción del grupo asegurado de vida conjunta (*xy*) y hasta la destrucción del grupo de beneficiarios (*zw*). El grupo (*zw*) se destruye, cuando exactamente los dos fallecen. Exprese su resultado en términos de anualidades de vida conjunta.

7.- Reducir las siguientes expresiones a anualidades de vida conjunta, y de encuentre una expresión en términos de valores conmutados.

i) $\overset{o}{a}_{\overline{xyz}:\overline{n}|}$

ii) $\hat{a}_{xy|\overline{zw}:\overline{n}|}$

iii) $\hat{a}^{(12)}_{xy|\overline{zw}:\overline{n}|}$

iv) $\hat{\overset{o}{a}}_{xyz|w_1w_2}$

v) $\hat{\overset{o}{a}}_{\overline{xyz}|\overset{2}{\overline{w_1w_2}}:\overline{n}|}$

CAPÍTULO 15 "Productos, Primas y Reservas de vida múltiple"

Introducción

El diseño de una nueva cobertura, en particular la de grupos de vida múltiple, generalmente comienza con la concepción de una idea, la cual se representa matemáticamente con un modelo. Tal concepción, es relativamente simple, sin embargo el segundo paso, requiere de una representación apropiada del fenómeno en cuestión. Así, los productos, primas y reservas que diseña la compañía, siempre están en función de la idea inicial y de las suposiciones técnicas actuariales.

De esta manera, en ese capítulo se presentan distintos tipos de coberturas y planes con la notación vista en los capítulos anteriores. Por otra parte, aunque en este capítulo se da por hecho que el cálculo de las primas netas y reservas ya han sido estudiadas por el lector, éste capítulo también contiene una breve, pero clara explicación de estos elementos para las coberturas de grupos de vida múltiple.

De esta forma, este capítulo tiene como principal objetivo, dar un panorama un tanto general del diseño de algunas coberturas para el caso de vida múltiple y un tanto más para los cálculos de las primas netas y reservas. Mismas, que como se aprecia más adelante, pueden expresarse de diversas formas a causa de los estados de destrucción del grupo.

Al final del estudio del capítulo, el lector podrá establecer una cobertura para un grupo de vida múltiple dependiendo de sus estados de destrucción. Además, podrá cuantificar la prima que tiene que pagar el asegurado para que la compañía pague los beneficios, y el monto constituido en el fondo de reserva para este tipo de cobertura.

Algunos planes para el caso de vida múltiple

La mayoría de los productos ofrecidos por las compañías de seguros, están sustentados de acuerdo a una serie de suposiciones: la póliza o el contrato de seguro. En las cuales, se muestra al participante el tipo de producto y cobertura que tendrá al aceptar y firmar el contrato. Lo anterior, también sucede para el caso de grupos de vida múltiple, y se agregan las suposiciones hechas por los estados de los grupos: asegurados y beneficiarios. Así, el siguiente ejemplo contiene una serie de suposiciones para ilustrar el potencial de las funciones biométricas para los grupos de vida múltiple.

Ejemplo 15.1

Suponga que un contrato contiene las siguientes suposiciones:

i) Plan diseñado para un grupo de participantes de edades actuales (x, y, z, w), las cuales, son independientes entre sí.

ii) Para que los participantes del punto i), tengan derecho a recibir los beneficios estipulados en los siguientes puntos, éstos deben pagar una prima neta única al momento de la contratación de la cobertura.

iii) Al fallecimiento de (x) y (y), se paga una pensión a los participantes de edades (z, w) por una cantidad de k_1 *u.m.* mensuales durante m años.

iv) Si antes de terminados los m años del punto iii), fallece (z) antes que (w), ó (w) antes que (z), se le paga a éste último sobreviviente la cantidad de k_2 *u.m.* al final del año del fallecimiento de (z) ó (w), según sea el caso.

v) Al fallecimiento del último sobreviviente del grupo asegurado (x, y, z, w) se paga a algún beneficiario designado, la cantidad de k_3 *u.m.* al final del año de la destrucción del grupo.

Sol.

Escribiendo los puntos i) al v), en términos de expresiones de grupos de vida múltiple se tiene que, La prima neta única esta dada por, $PNU = k_1 a_{xy|zw:\overline{m}|} + k_2 A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overset{2}{\overline{zw}}:\overline{m}|} + k_3 A_{\overline{xyzw}:\overline{m}|}$.

Donde:

$k_1 a_{xy|zw:\overline{m}|}$, es una anualidad de reversión pagadera al fallecimiento del último sobreviviente del grupo asegurado (x, y), pagando k_1 *u.m.* durante m años y hasta la destrucción del grupo de beneficiarios (z, w). Cumpliéndose el punto iii).

$k_2 A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overset{2}{\overline{zw}}:\overline{m}|}$, es la cobertura del punto iv), que paga k_2 *u.m.* cuando (z) ó (w) fallecen en tercer lugar antes de transcurridos m años.

$k_3 A_{\overline{xyzw}:\overline{m}|}$, es la cobertura del punto v), pagadera al final del año de la muerte del último sobreviviente del grupo (x, y, z, w).

Observe, que la prima neta única puede ser rescrita en términos de grupos de vida conjunta, de la siguiente forma,

$$
\begin{aligned}
PNU &= k_1 a_{xy|zw:\overline{m}|} + k_2 A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overset{2}{\overline{zw}}:\overline{m}|} + k_3 A_{\overline{xyzw}:\overline{m}|} \\
&= k_1\left(a_{zw:\overline{m}|} - a_{xyzw:\overline{m}|}\right) + k_2\left(A_{x:\overline{m}|} + A_{y:\overline{m}|} + A_{xy:\overline{m}|}\right)\left(A_{z:\overline{m}|} + A_{w:\overline{m}|} + A_{zw:\overline{m}|}\right) + \\
&\quad + k_3\left(A_{x:\overline{m}|} + A_{y:\overline{m}|} + A_{z:\overline{m}|} + A_{w:\overline{m}|}\right) - k_3\left(A_{xy:\overline{m}|} + A_{xz:\overline{m}|} + A_{xw:\overline{m}|} + A_{yz:\overline{m}|} + A_{yw:\overline{m}|} + A_{zw:\overline{m}|}\right) + \\
&\quad + k_3\left(A_{xyz:\overline{m}|} + A_{xyw:\overline{m}|} + A_{yzw:\overline{m}|}\right) - k_3\left(A_{xyzw:\overline{m}|}\right)
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 15.2

Suponga que se desea diseñar una cobertura para una pareja de padre y madre, que desean brindar a sus hijos una protección en caso del fallecimiento de los padres, a través de una pensión mensual hasta que éstos alcancen la edad de 18 años, según las siguientes características:

i) Los padres tienen edad actual (x, y). Y los hijos, edades actuales (w_1, w_2, w_3).

ii) Para obtener los beneficios estipulados en los siguientes puntos, es necesario que el grupo asegurado pague una prima neta única al momento de la contratación.

iii) Al fallecimiento de los dos padres de edades (x, y), se paga una mensualidad al final del mes por k *u.m.* a los hijos de edades (w_1, w_2, w_3).

iv) Si los padres fallecieron, el beneficio de k *u.m.* es pagado a los hijos de forma conjunta y continúa así, hasta que todos hayan alcanzado la edad de 18 años.

v) Si los padres están con vida y los hijos fallecen o éstos han alcanzado la edad de 18 años, no se paga ninguna suma asegurada a los padres.

Encontrar la prima neta única, para que se cumplan las suposiciones de los puntos i) al v).

Sol.

La prima neta única se expresa como, $(12k)a^{(12)}_{\overline{xy}|\left(\overline{w_1:18-w_1|}\right)\left(\overline{w_2:18-w_2|}\right)\left(\overline{w_2:18-w_2|}\right)}$

Donde:

$(12k)a^{(12)}$, es la pensión pagadera cada mes por una cantidad de k *u.m.* Y, $(\overline{xy})$, es el grupo asegurado formado por los padres de edades (x, y). Además, observe que se destruye a la muerte del último sobreviviente, con lo que cumple el supuesto iii).

$\left(\overline{w_1:18-w_1|}\right)\left(\overline{w_2:18-w_2|}\right)\left(\overline{w_2:18-w_2|}\right)$, es el grupo de beneficiaros. El cual, se destruye cuando cada grupo individual $\left(w_i:\overline{18-w_i|}\right)$ se destruye. Esto es, cuando cada hijo de edad w_i fallece, alcanza la edad 18, en otras palabras cumple con la temporalidad $\overline{18-w_i|}$. Que es la edad, que le falta a cada hijo para completar la edad de 18 años, donde $i=1, 2, 3$. Con lo cual se cumplen las hipótesis de los puntos iv) y v).

Como la prima neta única cumple con los cinco supuestos. Entonces, se puede encontrar una expresión en términos de anualidades de vida conjunta de la siguiente forma.

$$
\begin{aligned}
(12k)a^{(12)}_{\overline{xy}|(w_1:\overline{18-w_1|})(w_2:\overline{18-w_3|})(w_2:\overline{18-w_2|})} &= 12k\left[a^{(12)}_{(w_1:\overline{18-w_1|})(w_2:\overline{18-w_2|})(w_2:\overline{18-w_2|})} - a^{(12)}_{\overline{xy}:(w_1:\overline{18-w_1|})(w_2:\overline{18-w_2|})(w_2:\overline{18-w_2|})}\right] \\
&= 12k\Big[a^{(12)}_{:(w_1:\overline{18-w_1|})(w_2:\overline{18-w_2|})(w_2:\overline{18-w_2|})} - \Big(a^{(12)}_{x:(w_1:\overline{18-w_1|})} + a^{(12)}_{x:(w_2:\overline{18-w_2|})} + a^{(12)}_{x:(w_2:\overline{18-w_2|})} + \\
&\quad - a^{(12)}_{x:(w_1:\overline{18-w_1|})(w_2:\overline{18-w_2|})} - a^{(12)}_{x:(w_1:\overline{18-w_1|})(w_3:\overline{18-w_3|})} - a^{(12)}_{x:(w_2:\overline{18-w_2|})(w_3:\overline{18-w_3|})} + \\
&\quad + a^{(12)}_{x:(w_1:\overline{18-w_1|})(w_2:\overline{18-w_2|})(w_3:\overline{18-w_3|})} + a^{(12)}_{y:(w_1:\overline{18-w_1|})} + a^{(12)}_{y:(w_2:\overline{18-w_2|})} + a^{(12)}_{y:(w_2:\overline{18-w_2|})} + \\
&\quad - a^{(12)}_{y:(w_1:\overline{18-w_1|})(w_2:\overline{18-w_2|})} - a^{(12)}_{y:(w_1:\overline{18-w_1|})(w_3:\overline{18-w_3|})} - a^{(12)}_{y:(w_2:\overline{18-w_2|})(w_3:\overline{18-w_3|})} + \\
&\quad + a^{(12)}_{y:(w_1:\overline{18-w_1|})(w_2:\overline{18-w_2|})(w_3:\overline{18-w_3|})} + a^{(12)}_{xy:(w_1:\overline{18-w_1|})} + a^{(12)}_{xy:(w_2:\overline{18-w_2|})} + a^{(12)}_{xy:(w_2:\overline{18-w_2|})} + \\
&\quad - a^{(12)}_{xy:(w_1:\overline{18-w_1|})(w_2:\overline{18-w_2|})} - a^{(12)}_{xy:(w_1:\overline{18-w_1|})(w_3:\overline{18-w_3|})} - a^{(12)}_{xy:(w_2:\overline{18-w_2|})(w_3:\overline{18-w_3|})} + \\
&\quad + a^{(12)}_{xy:(w_1:\overline{18-w_1|})(w_2:\overline{18-w_2|})(w_3:\overline{18-w_3|})}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

La expresión anterior, puede ser reducida quitando la periodicidad y la temporalidad de las anualidades. Una aproximación para las anualidades pagaderas m veces por periodo está dada por la *ec. 3.8.*

■

Reflexión 15.1

Del ejemplo anterior, si $w = mín(w_1, w_2, w_3)$. Entonces, la anualidad de reversión se expresa como $(12k)a^{(12)}_{\overline{xy}|w:\overline{18-w|}}$. Ésta última expresión, ¿cumplirá todas las hipótesis planteadas? ¿Qué ventajas tiene utilizar esta expresión en relación con la del ejemplo 15.2?

Ejemplo 15.3

Un contrato de seguro diseñado para dos participantes de edades (x, y) contiene los siguientes derechos y obligaciones:

i) Para obtener derecho a los beneficios de los siguientes puntos, se debe pagar una cantidad en unidades monetarias por concepto de prima neta única al momento de la contratación.

ii) Si el participante de edad (x) fallece antes que (y), ó (y) antes que (x), se paga al sobreviviente una cantidad de k_2 *u.m.* al momento del fallecimiento.

iii) A la muerte del último sobreviviente del grupo asegurado (x, y), se paga una cantidad de k_3 *u.m.* al final del año del fallecimiento del grupo asegurado a un beneficiario asignado por éstos.

iv) Si el grupo asegurado no se ha destruido transcurridos n años, la protección termina, y se devuelve a ambos la cantidad de k_2 *u.m.*

Sol.

Sea la prima neta única dada por, $PNU = k_2 \bar{A}_{\overset{1}{xy}:\overline{n|}} + k_3 A_{\overline{xy}:\overline{n|}}$.

Donde:

$k_2 \bar{A}_{\overset{1}{xy}:\overline{n|}} = k_2 \left(\bar{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}} + \bar{A}_{x\overset{1}{y}:\overline{n|}} \right)$, es el seguro pagadero al momento del fallecimiento de (x), ó de (y) por una cantidad de k_2 *u.m.* El cual es un dotal mixto, ya que si se terminan los n años, se pagarán las k_2 *u.m.* Cumpliéndose así, las suposiciones de los puntos ii) y iv).

$k_3 A_{\overline{xy}:\overline{n|}}$, es el seguro pagadero al final del año del fallecimiento del último sobreviviente del grupo asegurado (x, y). Cuya suma asegurada, está dada por la cantidad de k_3 *u.m.* cumpliéndose la hipótesis iii).

Así, la prima neta única pagadera al momento de la contratación es:

$$\begin{aligned} PNU &= k_2 \bar{A}_{\overset{1}{xy}:\overline{n|}} + k_3 A_{\overline{xy}:\overline{n|}} \\ &= k_2 \left(\bar{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}} + \bar{A}_{x\overset{1}{y}:\overline{n|}} \right) + k_3 \left(A_{x:\overline{n|}} + A_{y:\overline{n|}} - A_{xy:\overline{n|}} \right) \end{aligned}$$

■

Los tres ejemplos anteriores, muestran la variedad y versatilidad que pueden tener las coberturas de grupos vida múltiple. Además, ejemplifican los conceptos básicos de los capítulos previos, de hecho, son ocupados muchos de ellos para reducir las expresiones y, encontrar las primas netas pagaderas al momento de la contratación.

Primas Netas

En el capítulo quinto, se estudiaron las primas netas cuyas definiciones básicas se retoman ahora, para dar una extensión de las mismas en grupos de vida múltiple. Así, la idea general de las primas netas como se ha visto, es distribuir la prima neta única (la de una sola exhibición al momento de la contratación) en un periodo de pago de primas con la duración y periodicidad que se desee. Es decir, se hace un esquema de pago de primas de manera que sea más accesible al participante adquirir la cobertura. Estas ideas básicas, se conservan para el caso de vida múltiple, de tal suerte, que la definición general de la prima neta puede ser representada de la misma forma, es decir,

$$P = \frac{A}{a}$$

Donde "P" representa la prima neta, "a" la periodicidad de la prima y "A" el tipo de cobertura, que puede ser: un seguro o anualidad (diferidas, reversión, aniversario, completas).

Observación 15.1

El primer obstáculo que debe ser sorteado, es en relación a la longitud del periodo de pago de prima. Así, se le llama prima neta trivial[(43)] para grupos de vida múltiple, a la prima P representada por:

$$P = \frac{A_{(x_1 x_2 \ldots x_m)}}{\ddot{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m}}$$

Donde $(x_1 x_2 \ldots x_m)$ es un grupo de vida conjunta y $A_{(x_1 x_2 \ldots x_m)}$ es una función que brinda algún beneficio a los participantes del grupo asegurado $(x_1 x_2 \ldots x_m)$. En otras palabras, es el valor actual de las obligaciones de la compañía (*VAOC*).

(43) *Se dice que es trivial, porque en las coberturas donde hay involucrados grupos de asegurados de vida múltiple, es necesario analizar con cuidado la forma en la que estos se van destruyendo, de tal suerte, que el periodo de pago de primas no se vea afectado. Por esta razón, este tipo de prima se le denomina trivial, pues no contempla los casos en los cuales debería continuar el periodo de pago de primas.*

Ejemplo 15.4

Suponga que se tiene un seguro del tipo $A_{x\overset{2}{y}}$, es decir, un seguro ordinario de vida para un grupo asegurado (x, y), pagadero al final del año si sólo si (y) fallece en segundo lugar. Dar una prima neta anual, pagadera de forma anticipada durante todo el periodo de cobertura.

Sol.

La prima trivial, es decir, la prima pagadera de forma anticipada y anual se escribe como:

$$P_1 = \frac{A_{x\overset{2}{y}}}{\ddot{a}_{xy}} \qquad ec. 15.1$$

En la expresión anterior, el periodo de pago de primas termina con la muerte de cualquiera de los dos participantes, ya que el grupo de vida conjunta (x,y) se destruye con el fallecimiento de cualquiera de ellos. Si (x) fallece primero, según la expresión anterior se dejan de pagar las primas, por lo tanto, el periodo de pago de primas termina antes que el de cobertura. Por otro lado, si (y) fallece primero, se dejan de pagar primas, lo cual es correcto dadas las hipótesis, que la cobertura termina si (y) no fallece en segundo lugar. De esta forma, la prima calculada con la *ec. 15.1* no es útil para representar una prima pagadera durante todo el periodo de cobertura.

Con esto se quiere decir, que deben analizarse los casos en los cuales se termina la cobertura para considerarlos en el periodo de pago de primas y extenderlo durante todo el periodo de cobertura. Para este ejemplo, el único caso no contemplado en el cual debería de continuar el periodo de pago de primas, es cuando el participante de edad (x) fallece primero, pues si esto pasa, el participante de edad (y) fallecerá segundo lugar. Finalmente, agregando esto a la *ec. 15.1* para que el periodo de pago de primas continúe durante todo el periodo de cobertura, se tiene:

$$P_2 = \frac{A_{x\overset{2}{y}}}{\ddot{a}_{xy} + a_{x|y}} \qquad ec. 15.2$$

La anualidad de reversión $a_{x|y}$ de la ecuación anterior, representa el caso para el cual el participante de edad (x) fallece en primer lugar, de esta forma, el participante de edad (y) continúa pagando la prima neta anual. Por lo tanto, en la *ec. 15.2* el periodo de pago de primas es igual al periodo de cobertura.

■

Observación 15.1

En el *ejemplo 1.4* se cumple que $P_1 > P_2$. Esto quiere decir, que al reducir el periodo de pago de primas a un intervalo de tiempo menor, la prima se incrementa. Por ejemplo, si se tiene una misma cobertura con un periodo de pago de primas (*PPP*) de 10 años, con el cual se calcula una prima P_2 y otra prima P_1 con un *PPP* de 6 años, entonces $P_1 > P_2$. La prima P_1 es mayor que la prima P_2, porque el periodo de pago de primas de P_1 es menor que el de la prima P_2. Para demostrar que $P_1 > P_2$ dadas por las *ec's. 15.1* y *15.2*:

Se sabe que $0 < a_{x|y}$, *sumando un número mayor a cero* $(0 < \ddot{a}_{xy})$. *Se tiene* $\ddot{a}_{xy} < \ddot{a}_{xy} + a$

tomando el inverso $\dfrac{1}{\ddot{a}_{xy}} > \dfrac{1}{\ddot{a}_{xy} + a_{x|y}}$, *así,* $\dfrac{A_{\overset{2}{xy}}}{\ddot{a}_{xy}} > \dfrac{A_{\overset{2}{xy}}}{\ddot{a}_{xy} + a_{x|y}}$. *Finalmente,* $P_1 > P_2$.

Ejemplo 15.5

Se tiene un seguro ordinario de vida, pagadero al final del año de la destrucción del grupo asegurado por una suma asegurada de *1 u.m.* El grupo asegurado está formado por el grupo de vidas (x, y, z), cuya destrucción ocurre cuando el participante de edad (y) fallece en segundo lugar y el participante de edad (z) fallece en tercer lugar. Encontrar una prima neta anualizada, pagadera de forma anticipada con periodo de pago de primas igual al periodo de cobertura. No utilice la prima trivial porque en ese caso, el periodo de pago de primas sería menor al periodo de cobertura.

Sol

La cobertura se puede representar como, $A_{x\overset{1}{y}\underset{3}{z}}$ (análogamente a la *ec.13.24*).

Para hacer que el *PPP* continúe hasta la destrucción del grupo asegurado, considere el siguiente cuadro de las posibles combinaciones de fallecimiento de los participantes.

Orden de Fallecimiento	1er lugar	2do lugar	3er lugar	*Suma Asegurada*
Caso 1	x	y	z	No se paga, termina *PPP*
Caso 2	x	z	y	No se paga, termina *PPP*
Caso 3	y*	x*	z	Se paga *S.A*, termina *PPP*
Caso 4	y*	z	x	No se paga, termina *PPP*
Caso 5	z	x	y	No se paga, termina *PPP*
Caso 6	z	y	x	No se paga, termina *PPP*

* *Continúa el PPP*

Tabla 15.1

Entonces, para que el *PPP* continúe durante todo el periodo cobertura la expresión de la prima debe contener los casos 3 y 4. Considere la siguiente construcción de la prima neta anualizada, con *PPP* igual al periodo de cobertura.

$$P = \frac{A_{\overset{\ \ 1}{xy\underset{3}{z}}}}{\ddot{a}_{xyz} + a_{y|xz} + a_{\overset{2}{xy}|z}} \qquad ec.15.3$$

Observación 15.2

La prima P calculada con el denominador $\ddot{a}_{xyz} + a_{y|xz} + a_{\overset{2}{xy}|z}$, permite extender el periodo de pago de primas hasta que termina el periodo de cobertura. De esta forma, si el lector analiza cuidadosamente del primero al sexto caso de la *Tabla 15.1*, observará que el *PPP* termina para todos los casos, excepto para el tres y cuatro, pues son los únicos en los cuales se puede satisfacer la hipótesis de destrucción del grupo asegurado y pagarse la suma asegurada. En ambos casos, el participante de edad (y) ha fallecido en primer lugar, pero en el la segunda etapa del *Caso 4* cuando (z) fallece en segundo lugar termina el *PPP* y la suma asegurada no se paga, porque no cumplen las hipótesis para que el contrato estipula para pagar el beneficio. Sin embargo, en el *Caso 3* la suma asegurada se paga y termina el periodo de pago de primas. Por lo tanto, la *ec.15.3* representa la prima anualizada con periodo de pago igual al periodo de cobertura. ■

En los ejemplos anteriores, el concepto básico de la prima en esencia se conserva. Pero, la dificultad consiste cuando se desea que el periodo de pago de primas sea extendido durante todo el periodo de cobertura, pues en éste caso no se puede utilizar la prima trivial.

Aunque las primas han sido pagaderas de forma anual, el lector tiene los elementos para hacerla pagadera m veces por periodo. Incluso, de acuerdo a lo estudiado en el *Capítulo 5* se pueden dar expresiones de primas: a plazos, reales o a prorrata. En el siguiente ejemplo, se utilizan primas pagaderas doce veces por periodo (mensuales).

Ejemplo 15.6

Un grupo formado por las vidas (x, y, z), está asegurado bajo el esquema de una anualidad de reversión temporal a n años con *S.A.* de k *u.m.* pagaderas de forma mensual, si el participante de edad (x) fallece en primer lugar. Este beneficio, lo recibe el grupo de participantes de edades (y, z) durante n años o el fallecimiento del último sobreviviente.

Encontrar la prima mensual, con periodo de pago de primas igual al periodo de cobertura. Es decir, el *PPP* tiene una duración de lo más n años.

Sol.

Como la prima se define como el cociente entre el valor actual de las obligaciones de la compañía y el asegurado. De esta manera, se tiene que el valor actual de las obligaciones de la compañía está dado por:

$$VAOC = a^{(12)}_{x|\overline{yz}:\overline{n}|}$$

Para hacer el periodo de pago de primas igual al periodo de cobertura (n años), se tiene que considerar la siguiente tabla para definir los casos en los cuales el *PPP* debe terminar o continuar.

Orden de Fallecimiento	1er lugar	2do lugar	3er lugar	*Suma Asegurada*
Caso 1	x	y	z	Se paga $S.A$, termina PPP
Caso 2	x	z	y	Se paga $S.A$, termina PPP
Caso 3	y*	x	z	No se paga, termina PPP
Caso 4	y*	z	x	No se paga, termina PPP
Caso 5	z*	x	y	No se paga, termina PPP
Caso 6	z*	y	x	No se paga, termina PPP
Caso 7	Termina la temporalidad de n años, termina PPP y no se paga $S.A.$			

* *Continúa el PPP*

Tabla 15.2

Con la tabla anterior, la prima de periodicidad mensual se escribe como,

$$P = \frac{a^{(12)}_{x|\overline{yz:n}|}}{\ddot{a}^{(12)}_{xyz:\overline{n}|} + a^{(12)}_{y|\overline{x:n}|} + a^{(12)}_{z|\overline{x:n}|}} \qquad ec.15.4$$

La prima P de la ecuación anterior, tiene un PPP igual al periodo de cobertura. Donde, la cobertura es la anualidad de reversión. Además, el denominador (PPP) cumple con los casos de la *Tabla 15.2.*

■

Reservas

En el *Capítulo 6*, se estudiaron las características generales de las reservas para el caso de vida individual. Ahora, la definición de reserva para los grupos de vida múltiple se conserva y se extiende para coberturas con estados de destrucción del grupo. Es de mencionarse, que las reservas al igual que las primas dependen del tipo de cobertura, pues el monto constituido en el fondo de reserva debe continuar acumulándose hasta que termina la cobertura. Para que el fondo sea apropiado y continúe incrementándose de manera que la compañía cumpla sus compromisos, se tienen que analizar los fallecimientos de los grupos asegurados, porque el fondo de reserva depende directamente de la destrucción de estos.

Así, la reserva de un grupo de vida múltiple se entenderá de acuerdo a lo propuesto en la *def. 6.1*, esto es:

$$ {}_tV = VAOC_t - VAOA_t $$

Donde $VAOC_t$ es el valor actual de las obligaciones de la compañía al tiempo t (la cobertura ofrecida), y $VAOA_t$ es el valor actual de las obligaciones del asegurado al tiempo t (las primas). Además ${}_tV$ representa la reserva al año t. Recuerde, que la reserva se puede determinar de acuerdo a distintos métodos, por ejemplo: prospectivo, retrospectivo, recursivo y el método de Fackler.

Ejemplo 15.7

Considere una cobertura como la del *ejemplo 15.4*. Con la *ec.15.2* determine la reserva al año t por el método prospectivo.

Sol.

Por *ec.15.2*, se sabe que la prima neta anual esta dada por la igualdad

$$ P = \frac{A_{\overset{2}{xy}}}{\ddot{a}_{xy} + a_{x|y}} $$

Haciendo uso del hecho que ${}_tV = VAOC_t - VAOA_t$ y utilizando el método prospectivo para el cálculo de la reserva, se obtiene lo siguiente:

$$ {}_tV_{\left(A_{\overset{2}{xy}}\right)} = \begin{cases} A_{\overset{2}{x+t:y+t}} - P\left(\ddot{a}_{x+t:y+t} + a_{x+t|y+t}\right) & si\ x\uparrow, y\uparrow\ Caso\ 1 \\ A_y - Pa_{y+t} & si\ x\downarrow, y\uparrow\ Caso\ 2 \\ 0 & si\ x\uparrow, y\downarrow\ Caso\ 3 \\ 0 & si\ x\downarrow, y\downarrow\ Caso\ 4 \end{cases} \qquad ec.15.5 $$

Donde $x\downarrow$ significa que el participante de edad (x) falleció, y, $x\uparrow$ quiere decir que el participante de edad (x) continúa con vida, igualmente para (y). En el *caso 3* y *4*, se cumple que ${}_tV = 0$ ya que las condiciones en las cuales se paga la suma asegurada no se cumplen, pues la cobertura ha terminado. Por otro lado, en los *casos 1* y *2* la reserva matemática se define como ${}_tV=VAOC_t-VAOA_t$ porque el periodo de cobertura continúa.

■

Ejemplo 15.8

Considere las suposiciones del *ejemplo 15.6*, donde la prima mensual esta representada por la *ec.15.4.* Encuentre la reserva al año t por el método prospectivo.

Sol.

Por la *ec. 15.4* se sabe que,

$$P=\frac{a^{(12)}_{x|\overline{yz:\overline{n}|}}}{\ddot{a}^{(12)}_{xyz:\overline{n}|}+a^{(12)}_{y|x:\overline{n}|}+a^{(12)}_{z|x:\overline{n}|}}$$

Reduciendo la expresión en términos de anualidades de vida conjunta

$$P=\frac{a^{(12)}_{y:\overline{n}|}+a^{(12)}_{z:\overline{n}|}-a^{(12)}_{yz:\overline{n}|}-a^{(12)}_{xy:\overline{n}|}-a^{(12)}_{xz:\overline{n}|}+a^{(12)}_{xyz:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(12)}_{xyz:\overline{n}|}+a^{(12)}_{y|x:\overline{n}|}+a^{(12)}_{z|x:\overline{n}|}} \qquad ec.15.6$$

Utilizando la prima de la ecuación anterior, la reserva al año t por el método prospectivo se puede escribir como:

$${}^{n}_{t}V^{(12)}_{\left(a^{(12)}_{x|\overline{yz:\overline{n}|}}\right)}=\begin{cases}
a^{(12)}_{x+t|\overline{y+t:z+t:\overline{n}|}}-P\left(\ddot{a}^{(12)}_{x+t:y+t:z+t:\overline{n}|}+a^{(12)}_{y+t|x+t:\overline{n}|}+a^{(12)}_{z+t|x+t:\overline{n}|}\right) & si\ x\uparrow, y\uparrow, z\uparrow\ Caso\ 1\\
a^{(12)}_{y:\overline{n}|}-a^{(12)}_{xy:\overline{n}|}-P\left(a^{(12)}_{y:\overline{n}|}-a^{(12)}_{xy:\overline{n}|}\right) & si\ x\uparrow, y\uparrow, z\downarrow\ Caso\ 2\\
a^{(12)}_{z:\overline{n}|}-a^{(12)}_{xz:\overline{n}|}-P\left(a^{(12)}_{z:\overline{n}|}-a^{(12)}_{xz:\overline{n}|}\right) & si\ x\uparrow, y\downarrow, z\uparrow\ Caso\ 3\\
0 & si\ x\uparrow, y\downarrow, z\downarrow\ Caso\ 4\\
a^{(12)}_{y:\overline{n}|}+a^{(12)}_{z:\overline{n}|}-a^{(12)}_{yz:\overline{n}|}-P\left(a^{(12)}_{y:\overline{n}|}+a^{(12)}_{z:\overline{n}|}-a^{(12)}_{yz:\overline{n}|}\right) & si\ x\downarrow, y\uparrow, z\uparrow\ Caso\ 5\\
a^{(12)}_{y:\overline{n}|}-P\left(a^{(12)}_{y:\overline{n}|}\right) & si\ x\downarrow, y\uparrow, z\downarrow\ Caso\ 6\\
a^{(12)}_{z:\overline{n}|}-P\left(a^{(12)}_{z:\overline{n}|}\right) & si\ x\downarrow, y\downarrow, z\uparrow\ Caso\ 7\\
0 & si\ x\downarrow, y\downarrow, z\downarrow\ Caso\ 8\\
0 & si\ han\ finalizado\ los\ n\ años.
\end{cases}$$

■

Observación 15.3

Para obtener una expresión de la reserva al año t en los grupos de vida múltiple, es necesario considerar la siguiente reflexión. ¿Hasta que momento terminan los compromisos de la compañía? De este modo, el monto constituido en la reserva cuando terminan los compromisos es cero, no así, cuando la cobertura está vigente. Esto tiene sentido, porque cuando termina la cobertura no es necesario tener ninguna cantidad en unidades monetarias para que la compañía cumpla sus obligaciones.

Observación 15.4

En general, todas las expresiones de reservas para grupos de vida múltiple de m vidas, es decir, $(x_1, x_2,\ldots,x_m)$ contienen 2^m casos. En efecto, para el *ejemplo 15.7* se tiene un grupo de vida múltiple (x,y) por tanto, se obtuvo una expresión para la reserva al año t con $2^2=4$ casos. Sin embargo, para el *ejemplo 15.8* del grupo (x,y,z) se obtuvo un caso más, esto es, $2^3+1=9$ casos, pues se tuvo que considerar el caso de la temporalidad a n años de la cobertura.

En general, si se consideran estas observaciones en los cálculos de las reservas de vida múltiple, resulta relativamente simple determinar los casos de la reserva al año t. Además, de construir tablas como las de los ejemplos de este capítulo.

Ejercicios del Capítulo 15

Algunos planes para el caso de vida múltiple

1.- Encontrar la prima neta única de un grupo asegurado (x,y,z,w) cuya cobertura está definida por los siguientes puntos.

i) Se paga una suma asegurada de k_1 *u.m*, a la muerte del último sobreviviente del grupo asegurado.

ii) Si cualquiera de los participantes fallece en primer lugar, se paga una pensión de k_2 *u.m.* de forma mensual durante n años, hasta el segundo fallecimiento de los sobrevivientes del grupo asegurado.

2.- Dar una expresión para la prima neta única, de manera que se cumplan las siguientes suposiciones del grupo asegurado (x, y, z) y el grupo de beneficiarios (u,v).

i) Si fallecen todos los participantes del grupo asegurado (x, y, z), se paga una anualidad de reversión al final del año de k_1 *u.m.* a los beneficiarios (u, v) durante los primeros n_1 años y de k'_1 *u.m.* los siguientes n'_1 años.

ii) Si los participantes del grupo asegurado llegan con vida al año n_2, se paga una cantidad de k_2 *u.m.*

iii) Si de los participantes del grupo de beneficiarios (u,v) fallece el último sobreviviente, antes de ocurrir la muerte de los participantes del grupo asegurado, se les pagará a éstos, una anualidad completa de k_3 *u.m.* mensuales hasta la primer muerte del grupo asegurado.

iv) Si todos los participantes del grupo de beneficiarios llegan con vida al año n_4, se paga una cantidad de k_4 *u.m.* a estos.

v) En caso que ningún participante fallezca llegado el año n_5, se paga k_5 *u.m.*

vi) En los puntos anteriores, se cumple que $n_1 < n'_1 < n_2 < n_4 < n_5$.

Primas Netas

3.- Sea $f_{VAOC}(x_1, x_2 \ldots x_m)$ la función que determina el valor actual de las obligaciones de la compañía y $f_{VAOA}(x_1, x_2 \ldots x_m)$ la función que determina el valor actual de las obligaciones del asegurado. Así, para un grupo asegurado de edades $(x_1, x_2 \ldots x_m)$ se tiene que

$$ {}_nP = \frac{f_{VAOC}(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{f_{VAOA}(x_1, x_2, \ldots, x_m)} $$

Donde ${}_nP$ es la prima con periodo de pago igual a n. Demostrar que si se calcula otra ${}_mP$ tal que $n<m$ para la misma cobertura, es decir, para la misma función del valor actual de las obligaciones de la compañía, entonces ${}_nP > {}_mP$.

Ayuda: Una demostración particular se da en la *observación 15.1.*

4.- Suponga que se tienen las siguientes coberturas:

i) $PNU = a_{x|y}$

ii) $PNU = A_{\overset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}w}$

iii) $PNU = a_{\overline{xyz}|\overline{w_1 w_2 : n}|}$

Encuentre una expresión para la prima anual, donde el periodo de pago de primas es igual al periodo de cobertura.

5.- Encuentre una prima mensual P_1 para los ejercicios 1 y 2, para que el periodo de pago de primas sea igual al periodo de cobertura. En los mismos ejercicios, construya primas P_2 con un periodo de cobertura igual a n años. De acuerdo a la proposición del ejercicio 3, ¿cómo es la prima P_1 con respecto a la prima P_2? ¿Qué esquema de pago de primas es más atractiva para el participante?

Reservas

6.- Determinar la reserva al año t por el método prospectivo, para las siguientes primas.

i) $$P = \frac{A_{\overset{2}{x\,yz}}}{\ddot{a}_{xyz} + a_{y|xy} + a_{z|xy}}$$

ii) $$P = \frac{A_{\overset{2}{x\,y}} + a_{\overset{2}{x\,y}|uv}}{\ddot{a}_{xyuv} + a_{y|x} + a_{u|xv} + a_{v|xu}}$$

iii) $$P = \frac{a_{\overline{xy}|uv}}{\ddot{a}_{xyuv} + a_{u|\overline{xy}v} + a_{v|\overline{xy}u} + a_{x|y\overline{uv}} + a_{y|x\overline{uv}}}$$

7.- Dar una expresión para la reserva al año t por el método retrospectivo, para las siguientes primas.

i) $$P = \frac{A_{\overset{2}{x\,yz}}}{\ddot{a}_{xyz} + a_{y|xy} + a_{z|xy}}$$

ii) $$P = \frac{A_{\overset{2}{x\,y}} + a_{\overset{2}{x\,y}|uv}}{\ddot{a}_{xyuv} + a_{y|x} + a_{u|xv} + a_{v|xu}}$$

iii) $$P = \frac{a_{\overline{xy}|uv}}{\ddot{a}_{xyuv} + a_{u|\overline{xy}v} + a_{v|\overline{xy}u} + a_{x|y\overline{uv}} + a_{y|x\overline{uv}}}$$

8.- Dar una expresión de la reserva al año t con el método de Fackler, para la siguiente prima.

$$P = \frac{\overset{o}{a}_{x|\overline{yzw}}}{\ddot{a}_{xyzw} + a_{y|x} + a_{z|x} + a_{w|x}}$$

9.- Determine la interpolación de la reserva al tiempo t, para cualquier t entre el inicio y final del año si la prima es:

$$P = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \overline{A}_{\overset{2}{\overline{yz}}\,w:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xyzw\overline{n}|} + a_{w|\overline{yz}:\overline{n}|}}$$

PARTE IV

CAPÍTULO 16

"Elementos actuariales de decremento múltiple"

Introducción

El termino decremento múltiple, se utiliza para decir que una población está expuesta a una serie de factores internos o externos que producen la disminución del grupo. Por ejemplo, la mortalidad es un decremento porque la población disminuye periodo tras periodo. Además de la mortalidad, se pueden definir distintos decrementos, por ejemplo: cancelación, vejez, invalidez, cesantía, etc. Estos son considerados decrementos, porque producen la salida de los participantes del grupo original. Por lo tanto, si un participante sale del grupo, se dice que fue por el decremento *k-ésimo*.

Por ejemplo, si un grupo de N asegurados está sujeto a los decrementos: mortalidad y cancelación. Entonces, cada participante dentro del grupo está expuesto a una probabilidad positiva de salir de éste, por el decremento muerte o cancelación.

En este capítulo, se utilizan las definiciones de las funciones biométricas de vida individual, para dar una construcción de otras en términos de decremento múltiple. En otras palabras, las funciones biométricas del decremento múltiple, se forman con las funciones estudiadas de los grupos de vida individual de los capítulos anteriores.

Con los elementos básicos de decremento múltiple, el lector puede diseñar nuevas coberturas para grupos expuestos a diversas salidas. Así, el decremento múltiple tiene gran aplicación en la práctica, porque permite explicar cuantitativamente la salida de los participantes del grupo y el riesgo que implica ofrecerle una cobertura. Por ejemplo, los planes de pensiones y de previsión social se diseñan utilizando funciones biométricas de decrementos múltiples, pues la población siempre está expuesta a diversas causas de salida del grupo original.

Definiciones y conceptos básicos

Los decrementos múltiples surgen de la necesidad de explicar la salida de los participantes de un grupo. Así análogamente al capítulo primero, se da una notación especial para: el número de vivos a edad x, el número de muertes, las probabilidades de supervivencia y salida del grupo, etc. Considere la siguiente notación donde k representa el decremento o causa de salida *k-ésima.*

$l_x^{(k)}$ El número de personas vivas de edad actual (x) sujetas al decremento k.

$d_x^{(k)}$ El número de salidas del grupo a causa del decremento k entre la edad (x) y la edad $(x+1)$.

${}_np_x^{(k)}$ La probabilidad que un participante de edad (x) sobreviva a la edad $(x+n)$ sujeto al decremento k.

${}_nq_x^{(k)}$ La probabilidad que un participante de edad (x) salga del grupo original entre las edades (x) y $(x+n)$ por el decremento k.

La unión de todos los decrementos se representa por la letra T. Es decir, el decremento total T es la unión de todas las causas de salidas o decrementos k para $k = 1,2,..., m$.

Definición 16.1

Se denota a $l_x^{(T)}$ como el número de personas vivas de edad actual (x) sujetas a todas las causas de decrementos T, es decir

$$l_x^{(T)} = \sum_{k=1}^{m} l_x^{(k)} \qquad \textit{def. 16.1}$$

Definición 16.2

Se dice que $d_x^{(T)}$ es el número de personas que han salido del grupo por el decremento T entre las edades (x) y $(x+1)$, si

$$d_x^{(T)} = \sum_{k=1}^{m} d_x^{(k)} \qquad \textit{def. 16.2}$$

Definición 16.3

Se denota como ${}_{n}p_{x}^{(T)}$ a la probabilidad que un participante de edad actual (x) sobreviva a la edad ($x+n$) si está expuesto al decremento T, es decir

$$
{}_{n}p_{x}^{(T)} = \frac{l_{x+n}^{(T)}}{l_{x}^{(T)}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} l_{x+n}^{(k)}}{l_{x}^{(T)}} = \sum_{k=1}^{m} {}_{n}p_{x}^{(k)} \qquad \textit{def. 16.3}
$$

Utilizando la definición anterior y como ${}_{n}q_{x} = 1 - {}_{n}p_{x}$

$$
\begin{aligned}
{}_{n}q_{x}^{(T)} &= 1 - {}_{n}p_{x}^{(T)} \\
&= \frac{l_{x}^{(T)} - l_{x+n}^{(T)}}{l_{x}^{(T)}} = \sum_{k=1}^{m} {}_{n}q_{x}^{(k)}
\end{aligned} \qquad \textit{ec. 16.1}
$$

El resto de las funciones biométricas; m_x, L_x, T_x, e_x, se construyen con las tres definiciones anteriores y las vistas en el capítulo primero. De hecho, las propiedades de las funciones de vida individual del primer capítulo se cumplen para el decremento múltiple, la notación es, $m_{x}^{(T)}$, $L_{x}^{(T)}$, $T_{x}^{(T)}$, $e_{x}^{(T)}$.

Con la *def. 1.8* del capítulo primero, se obtiene una definición para la tasa central de mortalidad de la siguiente forma.

$$
m_{x}^{(k)} = \frac{d_{x}^{(k)}}{L_{x}^{(T)}} \qquad \textit{ec. 16.2}
$$

En general, si T es la unión de todos los decrementos.

$$
m_{x}^{(T)} = \sum_{k=1}^{m} m_{x}^{(k)} \qquad \textit{ec. 16.3}
$$

En la *ec. 16.2*, $L_{x}^{(T)}$ representa el valor medio de la función $l_{x}^{(T)}$ de la *def. 1.6*. Es decir,

$$
L_{x}^{(T)} = \int_{x}^{x+1} l_{t}^{(T)} dt = \int_{0}^{1} l_{x+t}^{(T)} dt \qquad \textit{ec. 16.4}
$$

Utilizando la *ec. 1.6* se obtiene

$$
L_{x}^{(T)} \approx l_{x}^{(T)} -- \frac{1}{2} d_{x}^{(T)} \qquad \textit{ec. 16.5}
$$

Con respecto al tiempo que de forma agregada vive la población, por la *def. 1.7*, y utilizando las hipótesis de decremento múltiple, ésta se trasforma en:

$$T_x^{(T)} = \sum_{t=0}^{\infty} L_{x+t}^{(T)} \qquad ec.16.6$$

De igual suerte, la esperanza abreviada y completa se obtienen de la generalización de las *def's. 1.9* y *1.10* respectivamente, entonces,

$$e_x^{(T)} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x^{(T)} \qquad ec.16.7$$

$$\overset{o}{e}_x^{(T)} = \int_{t=1}^{\infty} {}_t p_x^{(T)} dt \qquad ec.16.8$$

Observación 16.1

Las *ec's. 16.2-16.8*, cumplen con las mismas propiedades del capítulo primero. En realidad, se puede expresar cualquier función biométrica de los capítulos anteriores, en términos de decremento múltiple.

Según la observación anterior, cualquier función biométrica se puede representar en términos de decremento múltiple. Por ejemplo, la fuerza instantánea de mortalidad se construye con la *def. 1.12*.

Definición 16.4

La función $\mu_x^{(k)}$ representa la fuerza instantánea de mortalidad para una persona de edad actual (x) sujeta al decremento k.

$$\mu_x^{(k)} = \lim_{h \to 0}\left(\frac{{}_h q_x^{(k)}}{h}\right) = -\frac{1}{l_x^{(k)}}\frac{d\left(l_x^{(k)}\right)}{dx} \qquad def.16.4$$

Con la *def. 16.4* y la *def. 16.1* se obtiene

$$\mu_x^{(T)} = \sum_{k=1}^{m} \mu_x^{(k)} \qquad ec.16.9$$

Usando la *def. 16.4*, se obtiene otra caracterización de $l_x^{(T)}$, análoga a la *ec.1.16* del capítulo primero.

$$l_x^{(T)} = l_0^{(T)} e^{-\int_0^x \mu_s^{(T)} ds} \qquad ec.16.10$$

Análogamente, con la *ec.1.18* y la *ec.1.20* se obtienen expresiones en términos de la fuerza instantánea de mortalidad para ${}_np_x$ y ${}_nq_x$ respectivamente.

$$_n p_x^{(T)} = \frac{l_{x+n}^{(T)}}{l_x^{(T)}} = e^{-\int_x^{x+n} \mu_s^{(T)} ds} \qquad ec.16.11$$

$$_n q_x^{(T)} = \int_0^n {}_t p_x^{(T)} \mu_{x+t}^{(T)} \, dt \qquad ec.16.12$$

Tablas de Mortalidad

La tabla de mortalidad entendida como un conjunto de funciones biométricas, tiene para el caso de decremento múltiple, los mismos elementos mostrados en los capítulos 2 y 12, de esta forma, las tablas de decremento múltiple son el conjunto de funciones biométricas del decremento total e individual. Para así, determinar las probabilidades de salida de un participante por la causa *k*.

Por lo tanto, el construir una tabla de decremento múltiple de *m* salidas, no es más que observar una población con un radix inicial y registrar el número de salidas por decremento durante un periodo de observación fijo, estos decrementos pueden ser: mortalidad, invalidez, vejez, cancelación, etc. Este proceso, se aplica desde la edad inicial l_0 hasta la edad de extinción l_w.

Una tabla de decremento múltiple construida en su forma simple, se representa por las columnas l_x, d_x, p_x, q_x. Por ejemplo:

x	$l_x^{(T)}=\sum_{k=1}^{m} l_x^{(k)}$	$d_x^{(T)}=\sum_{k=1}^{m} d_x^{(k)}$	$p_x^{(T)}=\sum_{k=1}^{m} p_x^{(k)}$	$q_x^{(T)}=\sum_{k=1}^{m} q_x^{(k)}$
1	$l_1^{(T)}$	$d_1^{(T)}$	$p_1^{(T)}$	$q_1^{(T)}$
2	$l_2^{(T)}$	$d_2^{(T)}$	$p_2^{(T)}$	$q_2^{(T)}$
...				
w	$l_w^{(T)}$	$d_w^{(T)}$	$p_w^{(T)}$	$q_w^{(T)}$

Tabla 16.1

Observación 16.2

La tabla anterior se denotada por T_m. Donde, T_m es una tabla de mortalidad T construida con m decrementos para un conjunto de funciones biométricas, las cuales constituyen la unión de k decrementos. Además, en una tabla de decremento múltiple, cada decremento k_i es dependiente de otro k_j para $i,j=1,2,...,m$.

Lo anterior, induce a pensar que a partir de una tabla con m decrementos, se pueden construir m tablas independientes con decrementos individuales. Por lo tanto, si se tiene una tabla de decremento múltiple T_2, donde el primer decremento es la mortalidad y el segundo la cancelación, entonces, se pueden construir dos tablas de decremento independiente e individual. En este sentido, la tabla de mortalidad se representa como $T'^{(1)}_2$ y la tabla de cancelación como $T'^{(2)}_2$. Ambas tablas, subconjuntos de la tabla de decremento múltiple T_2.

Con lo anterior, $T'^{(k)}_m$ representa una tabla de decremento individual k para $k=1,2,..,m$, construida a partir de una tabla de decremento múltiple T_m con m decrementos ${}_nq_x^{(k)}$.

Además, si la tabla $T'^{(k)}_m$ es construida en base a una tabla T_m, entonces la probabilidad de salida por causa del decremento *k-ésimo* se denota por ${}_nq'^{(k)}_x$. Por ejemplo, suponga que a partir de una tabla con los decrementos mortalidad y cancelación se construyen dos tablas independientes. Haciendo esto, se tiene que la probabilidad de destrucción por el decremento mortalidad se representa como ${}_nq'^{(2)}_x$ y la cancelación como ${}_nq'^{(1)}_x$, los cuales son independientes entre sí. Sin embargo, ¿cuál es la expresión para estas probabilidades dado que se conocen los valores provenientes de la tabla de mortalidad T_m?

Para responder esta cuestión, se define a $d_x^{(-k)}$ como el número de salidas de una persona de edad (x) por una causa de decremento distinta a k.

Utilizando la hipótesis $d_x = l_xq_x$, se obtiene:

$$d_x^{(k)} \approx {}_nq'^{(k)}_x \left(l_x^{(k)} - \frac{1}{2} d_x^{(-k)} \right)$$

Donde, el valor de $-\frac{1}{2} d_x^{(-k)}$ representa la cantidad de personas que salen del grupo original por un decremento distinto a k. De esta manera, la probabilidad de salida de un participante por el decremento k es,

$${}_nq'^{(k)}_x \approx \frac{d_x^{(k)}}{l_x^{(k)} - \frac{1}{2} d_x^{(-k)}} \qquad ec.16.13$$

Con esta ecuación, si se tiene una tabla T_m con m decrementos dependientes, se pueden construir m tablas independientes de decremento simple.

Anualidades y Seguros

Al igual que las funciones biométricas de decremento múltiple, la extensión de las anualidades contingentes y los seguros de vida individual se hace fácilmente considerando la siguiente construcción de los valores conmutados.

Por ejemplo, los valores conmutados de las anualidades de vida individual, en particular el dotal puro para una persona de edad (x) a la edad $(x+n)$ se define utilizando la *ec. 3.3*, es decir,

$${}_nE_x^{(T)} = \frac{D_{x+n}^{(T)}}{D_x^{(T)}}$$

Donde,
$$D_x^{(T)} = \sum_{k=1}^{m} D_x^{(k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} V^x l_x^{(k)}$$

Por otro lado, el valor conmutado para N_x se construye de la siguiente forma;

$$N_x^{(T)} = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{(T)}$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} D_{x+t}^{(k)} = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{(1)} + \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{(2)} + \ldots + \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{(m)}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} N_{x+t}^{(k)}$$

Definición 16.5

Se denota por $a_x^{(T)}$, a la prima neta única de una anualidad vitalicia de *1 u.m.* para una persona de edad x sujeta al conjunto de decrementos T. Es decir, por la *def. 3.3* se tiene,

$$a_x^{(T)} = \frac{N_{x+1}^{(T)}}{D_x^{(T)}}$$

def. 16.5

Utilizando la *def. 3.7* análogamente se obtiene:

$$\ddot{a}_x^{(T)} = \frac{N_x^{(T)}}{D_x^{(T)}}$$

def. 16.6

Con estas definiciones y los conceptos estudiados en los capítulos 3 y 14, las distintos tipos de anualidades de vida individual y múltiple se expresan de forma análoga.

Por oto lado, la definición del seguro de vida se hace utilizando los valores conmutados del capítulo 4. Por ejemplo, para expresar la *ec.4.1* en términos de decremento múltiple se tienen que definir los siguientes valores conmutados:

$$M_x^{(T)} = \sum_{k=1}^{m} C_x^{(T)}$$

Donde,

$$C_x^{(T)} = V^{x+1} d_x^{(T)}$$

Definición 16.7

Sea $A_x^{(T)}$ la prima neta única de un seguro ordinario de vida con suma asegurada de *1 u.m.* pagadera al final del año del fallecimiento de una persona de edad *x*, sujeta al conjunto de decrementos *T*, es decir:

$$A_x^{(T)} = \frac{M_x^{(T)}}{D_x^{(T)}} \qquad \textit{def.16.7}$$

Primas netas y reservas

En los capítulos anteriores, se ha estudiado que las primas son una cantidad en unidades monetarias que paga el participante para tener derecho a una cobertura con el objetivo de recibir un beneficio futuro. De esta manera, con lo visto en la *def. 5.1* la prima neta para el decremento múltiple se define:

Definición 16.8

Se denota por $P_{\left(A^{(T)}\right)}$ a la prima anual de participantes sujetos a los decrementos *T*, con una cobertura $A^{(T)}$ y un periodo de pago de primas $\ddot{a}^{(T)}$. Entonces, la prima se representa por el cociente de las obligaciones de la compañía entre las del asegurado. Es decir,

$$P_{\left(A^{(T)}\right)} = \frac{A^{(T)}}{\ddot{a}^{(T)}} \qquad \textit{def. 16.8}$$

Observación 16.2

La notación del decremento múltiple, debe manejarse con especial cuidado para evitar confusiones de interpretación en las anualidades y primas, donde el superíndice, además de representar el decremento múltiple, representa la periodicidad. Para hacer esto, se sugiere al lector utilizar el símbolo "m_i" para denotar la periodicidad de pago, y las letras "*T*" y "k_i" para el decremento múltiple.

Las expresiones de las primas netas y las primas fra[illegible] los periodos de pagos de primas son iguales a los periodos de cobertura s[illegible] [illegible]yen utilizando los conceptos de los capítulos 5, 7 y 15.

Por otro lado, las reservas para coberturas con decremento múltiple, son el monto constituido de la compañía de seguros para hacer frente a sus compromisos adquiridos con el participante, de esta forma, según lo propuesto en la *def. 6.1* la reserva se expresa como el diferencial entre el valor actual de las obligaciones de la compañía y el asegurado.

Definición 16.9

Se denota por ${}_tV^{(T)}$ a la reserva al año t para una cobertura sujeta al conjunto de decrementos T. Es decir,

$$ {}_tV^{(T)} = VAOC_t^{(T)} - VAOA_t^{(T)} \qquad def.16.9 $$

Observe, que la reserva está en función de la cobertura y del periodo de pago de primas para definir los montos constituidos en el fondo al año t. Así, las expresiones de reservas para coberturas que dependen de decrementos múltiples se pueden construir de acuerdo a las definiciones del capítulo 6. Por último, cabe mencionar que la prima de tarifa y las valuaciones para coberturas con decremento múltiple, se hacen de acuerdo a lo estudiado en los capítulos 7 y 8.

ANEXOS

ANEXO 1

"Tabla de mortalidad individual"

Información de la tabla

Tipo: Agregada.
Uso: Mortalidad de los Asegurados.
Fuente: Estadísticas de las Compañías Aseguradoras.
Periodo de Observación: de 1991 a 1998.
Unidad de Observación: Pólizas.
Volumen de datos: 54,623 reclamaciones.

Método de Construcción. Tabla Agregada sin periodo de selección, suponiendo exposición uniforme sin considerar sexo.

Rango de Edad: De los 12 años a los 100 años.

Publicada: Documento publicado por la CNSF en el diario oficial del viernes 31 de diciembre de 1999.

Nota: Esta tabla fue construida usando los valores publicados de q_x.

Anexo 1 "Tabla de Mortalidad Individual"

Tabla individual de la CNSF, México 2000-2001.																		
Edad	Funciones Biométricas									Valores Conmutados al 5% de interés técnico						Edad
										Anualidades			Seguros			
	l_x	d_x	${}_1p_x$	${}_1q_x$	$L_x^{(1)}$	T_x	m_x	e_x	$\mathring{e}_x$	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	
45	94,701	434	0.9954	0.004585	94,484.2	3,123,526.1	0.004596	51.9	33.1	10,539.9	167,280.9	2,203,410.7	46.0	2,574.2	62,356.5	45
46	94,267	465	0.9951	0.004938	94,034.4	3,029,041.9	0.004950	50.9	32.2	9,992.0	156,740.9	2,036,129.9	47.0	2,528.1	59,782.4	46
47	93,802	499	0.9947	0.005317	93,552.2	2,935,007.6	0.005331	49.9	31.4	9,469.2	146,748.9	1,879,388.9	48.0	2,481.2	57,254.2	47
48	93,303	534	0.9943	0.005725	93,035.8	2,841,455.3	0.005741	48.9	30.5	8,970.3	137,279.7	1,732,640.0	48.9	2,433.2	54,773.1	48
49	92,769	572	0.9938	0.006164	92,482.8	2,748,419.6	0.006183	47.9	29.7	8,494.3	128,309.4	1,595,360.3	49.9	2,384.3	52,339.9	49
50	92,197	612	0.9934	0.006637	91,890.9	2,655,936.8	0.006659	46.9	28.9	8,039.9	119,815.1	1,467,050.9	50.8	2,334.4	49,955.6	50
51	91,585	654	0.9929	0.007145	91,257.8	2,564,045.8	0.007171	45.9	28.1	7,606.2	111,775.2	1,347,235.8	51.8	2,283.6	47,621.1	51
52	90,931	700	0.9923	0.007693	90,580.8	2,472,788.0	0.007723	44.9	27.3	7,192.3	104,169.0	1,235,460.5	52.7	2,231.9	45,337.5	52
53	90,231	747	0.9917	0.008282	89,857.4	2,382,207.2	0.008316	43.9	26.5	6,797.1	96,976.7	1,131,291.6	53.6	2,179.2	43,105.7	53
54	89,484	798	0.9911	0.008915	89,084.9	2,292,349.8	0.008955	43.0	25.7	6,419.8	90,179.6	1,034,314.9	54.5	2,125.5	40,926.5	54
55	88,686	851	0.9904	0.009597	88,260.5	2,203,264.9	0.009643	42.0	25.0	6,059.6	83,759.8	944,135.3	55.4	2,071.0	38,801.0	55
56	87,835	907	0.9897	0.010330	87,381.2	2,115,004.4	0.010384	41.0	24.2	5,715.7	77,700.2	860,375.5	56.2	2,015.7	36,729.9	56
57	86,928	967	0.9889	0.011119	86,444.3	2,027,623.2	0.011181	40.0	23.5	5,387.3	71,984.5	782,675.3	57.0	1,959.4	34,714.3	57
58	85,961	1,029	0.9880	0.011967	85,446.7	1,941,178.9	0.012039	39.0	22.7	5,073.7	66,597.3	710,690.7	57.8	1,902.4	32,754.9	58
59	84,932	1,094	0.9871	0.012879	84,385.4	1,855,732.2	0.012962	38.0	22.0	4,774.2	61,523.6	644,093.4	58.6	1,844.5	30,852.5	59
60	83,838	1,162	0.9861	0.013860	83,257.5	1,771,346.8	0.013957	37.0	21.3	4,488.3	56,749.4	582,569.8	59.2	1,786.0	29,008.0	60
61	82,676	1,233	0.9851	0.014914	82,060.0	1,688,089.3	0.015026	36.0	20.6	4,215.4	52,261.0	525,820.4	59.9	1,726.7	27,222.0	61
62	81,443	1,307	0.9840	0.016048	80,789.9	1,606,029.4	0.016178	35.0	19.9	3,954.8	48,045.7	473,559.4	60.4	1,666.9	25,495.2	62
63	80,136	1,384	0.9827	0.017265	79,444.7	1,525,239.4	0.017415	34.1	19.2	3,706.0	44,090.9	425,513.7	60.9	1,606.4	23,828.4	63
64	78,753	1,463	0.9814	0.018574	78,021.5	1,445,794.8	0.018748	33.1	18.5	3,468.6	40,384.9	381,422.8	61.4	1,545.5	22,221.9	64
65	77,290	1,544	0.9800	0.019980	76,518.0	1,367,773.3	0.020182	32.1	17.9	3,242.0	36,916.4	341,037.9	61.7	1,484.1	20,676.5	65
66	75,746	1,628	0.9785	0.021490	74,932.0	1,291,255.3	0.021723	31.1	17.2	3,026.0	33,674.3	304,121.5	61.9	1,422.4	19,192.3	66
67	74,118	1,713	0.9769	0.023111	73,261.6	1,216,323.3	0.023381	30.1	16.6	2,819.9	30,648.3	270,447.2	62.1	1,360.5	17,769.9	67
68	72,405	1,799	0.9751	0.024851	71,505.5	1,143,061.7	0.025164	29.2	16.0	2,623.6	27,828.4	239,798.9	62.1	1,298.4	16,409.4	68
69	70,606	1,887	0.9733	0.026720	69,662.5	1,071,556.2	0.027082	28.2	15.4	2,436.6	25,204.8	211,970.5	62.0	1,236.3	15,111.0	69
70	68,719	1,974	0.9713	0.028724	67,732.3	1,001,893.7	0.029143	27.2	14.8	2,258.5	22,768.2	186,765.7	61.8	1,174.3	13,874.6	70
71	66,745	2,061	0.9691	0.030874	65,715.0	934,161.4	0.031358	26.2	14.2	2,089.2	20,509.7	163,997.5	61.4	1,112.6	12,700.3	71
72	64,685	2,146	0.9668	0.033180	63,611.5	868,446.4	0.033740	25.3	13.7	1,928.3	18,420.5	143,487.8	60.9	1,051.1	11,587.7	72
73	62,538	2,230	0.9643	0.035651	61,423.6	804,834.9	0.036298	24.3	13.1	1,775.5	16,492.2	125,067.4	60.3	990.2	10,536.6	73
74	60,309	2,310	0.9617	0.038300	59,153.9	743,411.3	0.039048	23.3	12.6	1,630.7	14,716.7	108,575.2	59.5	929.9	9,546.4	74
75	57,999	2,386	0.9589	0.041136	56,806.1	684,257.3	0.042000	22.4	12.0	1,493.6	13,086.0	93,858.5	58.5	870.4	8,616.5	75
76	55,613	2,457	0.9558	0.044174	54,384.8	627,451.2	0.045172	21.4	11.5	1,363.9	11,592.4	80,772.5	57.4	811.9	7,746.1	76

Anexo 1 "Tabla de Mortalidad Individual"

Tabla individual de la CNSF, México 2000-2001.

Edad	Funciones Biométricas								
	l_x	d_x	${}_1p_x$	${}_1q_x$	$L_x^{(1)}$	T_x	m_x	e_x	$\mathring{e}_x$
12	100,000	40	0.9996	0.000396	99,980.2	6,368,053.1	0.000396	84.8	63.7
13	99,960	43	0.9996	0.000427	99,939.1	6,268,072.9	0.000427	83.8	62.7
14	99,918	46	0.9995	0.000460	99,894.7	6,168,133.9	0.000460	82.8	61.7
15	99,872	49	0.9995	0.000495	99,847.0	6,068,239.1	0.000495	81.8	60.8
16	99,822	53	0.9995	0.000533	99,795.7	5,968,392.1	0.000533	80.8	59.8
17	99,769	57	0.9994	0.000575	99,740.4	5,868,596.4	0.000575	79.8	58.8
18	99,712	62	0.9994	0.000619	99,680.9	5,768,855.9	0.000619	78.8	57.9
19	99,650	61	0.9994	0.000617	99,619.3	5,669,175.1	0.000617	77.8	56.9
20	99,589	72	0.9993	0.000718	99,552.8	5,569,555.8	0.000718	76.8	55.9
21	99,517	77	0.9992	0.000773	99,478.6	5,470,003.0	0.000773	75.8	55.0
22	99,440	83	0.9992	0.000833	99,398.7	5,370,524.4	0.000833	74.8	54.0
23	99,357	89	0.9991	0.000897	99,312.7	5,271,125.7	0.000897	73.8	53.1
24	99,268	96	0.9990	0.000966	99,220.2	5,171,813.0	0.000966	72.8	52.1
25	99,172	103	0.9990	0.001041	99,120.6	5,072,592.8	0.001042	71.8	51.2
26	99,069	111	0.9989	0.001121	99,013.5	4,973,472.2	0.001122	70.8	50.2
27	98,958	119	0.9988	0.001207	98,898.2	4,874,458.7	0.001208	69.9	49.3
28	98,839	128	0.9987	0.001300	98,774.3	4,775,560.4	0.001301	68.9	48.3
29	98,710	138	0.9986	0.001400	98,640.9	4,676,786.2	0.001401	67.9	47.4
30	98,572	149	0.9985	0.001508	98,497.5	4,578,145.2	0.001509	66.9	46.5
31	98,423	160	0.9984	0.001624	98,343.3	4,479,647.7	0.001625	65.9	45.6
32	98,263	172	0.9983	0.001749	98,177.4	4,381,304.4	0.001751	64.9	44.6
33	98,091	185	0.9981	0.001884	97,999.1	4,283,127.0	0.001886	63.9	43.7
34	97,907	199	0.9980	0.002029	97,807.4	4,185,127.9	0.002031	62.9	42.8
35	97,708	214	0.9978	0.002186	97,601.2	4,087,320.6	0.002188	61.9	41.9
36	97,494	230	0.9976	0.002354	97,379.7	3,989,719.3	0.002357	60.9	41.0
37	97,265	247	0.9975	0.002535	97,141.7	3,892,339.6	0.002538	59.9	40.1
38	97,018	265	0.9973	0.002730	96,885.9	3,795,198.0	0.002734	58.9	39.2
39	96,754	284	0.9971	0.002940	96,611.3	3,698,312.0	0.002944	57.9	38.3
40	96,469	305	0.9968	0.003166	96,316.3	3,601,700.7	0.003171	56.9	37.4
41	96,164	328	0.9966	0.003410	95,999.7	3,505,384.4	0.003416	55.9	36.5
42	95,836	352	0.9963	0.003672	95,659.8	3,409,384.7	0.003679	54.9	35.6
43	95,484	378	0.9960	0.003954	95,295.0	3,313,725.0	0.003962	53.9	34.8
44	95,106	405	0.9957	0.004258	94,903.8	3,218,429.9	0.004267	52.9	33.9

Valores Conmutados al 5% de interés técnico						Edad
Anualidades			Seguros			
D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	
55,683.7	1,093,246.6	19,442,188.3	21.0	3,624.4	167,428.1	12
53,011.1	1,037,562.9	18,348,941.6	21.6	3,603.4	163,803.8	13
50,465.2	984,551.8	17,311,378.7	22.1	3,581.8	160,200.4	14
48,040.0	934,086.5	16,326,827.0	22.6	3,559.7	156,618.6	15
45,729.8	886,046.5	15,392,740.5	23.2	3,537.1	153,058.9	16
43,528.9	840,316.7	14,506,694.0	23.8	3,513.9	149,521.8	17
41,432.3	796,787.8	13,666,377.2	24.4	3,490.0	146,007.9	18
39,434.9	755,355.5	12,869,589.4	23.2	3,465.6	142,517.9	19
37,533.9	715,920.6	12,114,233.9	25.7	3,442.4	139,052.3	20
35,720.9	678,386.7	11,398,313.3	26.3	3,416.7	135,609.9	21
33,993.6	642,665.9	10,719,926.5	27.0	3,390.5	132,193.2	22
32,347.9	608,672.3	10,077,260.6	27.6	3,363.5	128,802.7	23
30,779.9	576,324.4	9,468,588.4	28.3	3,335.8	125,439.2	24
29,285.8	545,544.5	8,892,264.0	29.0	3,307.5	122,103.4	25
27,862.2	516,258.7	8,346,719.4	29.7	3,278.5	118,795.9	26
26,505.7	488,396.4	7,830,460.7	30.5	3,248.8	115,517.4	27
25,213.1	461,890.7	7,342,064.3	31.2	3,218.3	112,268.6	28
23,981.2	436,677.6	6,880,173.6	32.0	3,187.1	109,050.3	29
22,807.3	412,696.4	6,443,495.9	32.8	3,155.1	105,863.3	30
21,688.5	389,889.1	6,030,799.5	33.5	3,122.3	102,708.2	31
20,622.2	368,200.6	5,640,910.4	34.4	3,088.8	99,585.8	32
19,605.8	347,578.5	5,272,709.8	35.2	3,054.4	96,497.1	33
18,637.0	327,972.7	4,925,131.3	36.0	3,019.3	93,442.6	34
17,713.5	309,335.7	4,597,158.6	36.9	2,983.2	90,423.4	35
16,833.1	291,622.2	4,287,823.0	37.7	2,946.4	87,440.1	36
15,993.8	274,789.0	3,996,200.8	38.6	2,908.6	84,493.7	37
15,193.6	258,795.2	3,721,411.8	39.5	2,870.0	81,585.1	38
14,430.6	243,601.6	3,462,616.6	40.4	2,830.5	78,715.1	39
13,703.0	229,171.0	3,219,015.0	41.3	2,790.1	75,884.6	40
13,009.2	215,468.0	2,989,844.0	42.2	2,748.8	73,094.5	41
12,347.4	202,458.8	2,774,376.0	43.2	2,706.5	70,345.7	42
11,716.3	190,111.4	2,571,917.2	44.1	2,663.4	67,639.1	43
11,114.2	178,395.1	2,381,805.8	45.1	2,619.2	64,975.8	44

Anexo 1 "Tabla de Mortalidad Individual"

Tabla individual de la CNSF, México 2000-2001.																
Edad	Funciones Biométricas									Valores Conmutados al 5% de interés técnico						Edad
										Anualidades			Seguros			
	l_x	d_x	${}_1p_x$	${}_1q_x$	$L_x^{(1)}$	T_x	m_x	e_x	$\mathring{e}_x$	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	
77	53,157	2,521	0.9526	0.047424	51,896.1	573,066.4	0.048576	20.5	11.0	1,241.6	10,228.5	69,180.1	56.1	754.5	6,934.2	77
78	50,636	2,577	0.9491	0.050902	49,346.9	521,170.3	0.052231	19.5	10.6	1,126.4	8,986.9	58,951.7	54.6	698.4	6,179.7	78
79	48,058	2,625	0.9454	0.054619	46,745.7	471,823.4	0.056152	18.6	10.1	1,018.2	7,860.5	49,964.8	53.0	643.8	5,481.2	79
80	45,433	2,662	0.9414	0.058592	44,102.3	425,077.7	0.060360	17.6	9.6	916.7	6,842.3	42,104.3	51.2	590.9	4,837.4	80
81	42,771	2,687	0.9372	0.062834	41,427.5	380,975.5	0.064872	16.7	9.2	821.9	5,925.6	35,262.0	49.2	539.7	4,246.5	81
82	40,084	2,700	0.9326	0.067362	38,733.7	339,548.0	0.069710	15.7	8.8	733.6	5,103.7	29,336.3	47.1	490.5	3,706.8	82
83	37,384	2,699	0.9278	0.072190	36,034.3	300,814.3	0.074893	14.8	8.3	651.6	4,370.1	24,232.6	44.8	443.5	3,216.2	83
84	34,685	2,682	0.9227	0.077337	33,343.7	264,780.0	0.080448	13.9	7.9	575.8	3,718.6	19,862.5	42.4	398.7	2,772.7	84
85	32,002	2,650	0.9172	0.082817	30,677.3	231,436.3	0.086394	13.0	7.5	505.9	3,142.8	16,143.9	39.9	356.3	2,374.1	85
86	29,352	2,602	0.9114	0.088649	28,051.1	200,759.0	0.092761	12.0	7.2	441.9	2,636.9	13,001.1	37.3	316.4	2,017.8	86
87	26,750	2,537	0.9052	0.094850	25,481.5	172,707.9	0.099572	11.1	6.8	383.6	2,194.9	10,364.2	34.7	279.1	1,701.4	87
88	24,213	2,456	0.8986	0.101436	22,984.8	147,226.4	0.106855	10.2	6.4	330.7	1,811.4	8,169.3	31.9	244.4	1,422.3	88
89	21,757	2,359	0.8916	0.108424	20,577.3	124,241.6	0.114639	9.3	6.0	283.0	1,480.7	6,357.9	29.2	212.5	1,177.9	89
90	19,398	2,247	0.8842	0.115832	18,274.4	103,664.3	0.122953	8.4	5.7	240.3	1,197.7	4,877.2	26.5	183.2	965.5	90
91	17,151	2,121	0.8763	0.123677	16,090.4	85,389.9	0.131829	7.5	5.3	202.3	957.4	3,679.5	23.8	156.7	782.2	91
92	15,030	1,984	0.8680	0.131973	14,038.0	69,299.5	0.141297	6.7	4.9	168.9	755.1	2,722.1	21.2	132.9	625.5	92
93	13,046	1,836	0.8593	0.140737	12,128.2	55,261.5	0.151390	5.8	4.6	139.6	586.2	1,967.0	18.7	111.7	492.6	93
94	11,210	1,681	0.8500	0.149983	10,369.5	43,133.3	0.162142	4.9	4.2	114.2	446.6	1,380.7	16.3	93.0	380.9	94
95	9,529	1,522	0.8403	0.159723	8,767.8	32,763.8	0.173586	4.1	3.7	92.5	332.4	934.1	14.1	76.7	287.9	95
96	8,007	1,361	0.8300	0.169970	7,326.4	23,996.0	0.185757	3.3	3.3	74.0	239.9	601.6	12.0	62.6	211.3	96
97	6,646	1,201	0.8193	0.180733	6,045.4	16,669.6	0.198688	2.4	2.8	58.5	165.9	361.7	10.1	50.6	148.7	97
98	5,445	1,046	0.8080	0.192020	4,922.0	10,624.2	0.212414	1.6	2.2	45.6	107.4	195.8	8.3	40.5	98.1	98
99	4,399	897	0.7962	0.203837	3,950.9	5,702.2	0.226969	0.8	1.4	35.1	61.8	88.4	6.8	32.2	57.6	99
100	3,503	3,503	0.0000	1.000000	1,751.3	1,751.3	2.000000	0.0	1.0	26.6	26.6	26.6	25.4	25.4	25.4	100

(1) Columna calculada con la aproximación de la *ec. 1.6*

Información de la Tabla

Tipo: Agregada.

Uso: Mortalidad de los Asegurados.

Fuente: Estadísticas de las Compañías Aseguradoras.

Periodo de Observación: de 1991 a 1998.

Unidad de Observación: Pólizas.

Volumen de datos: 54,623 reclamaciones.

Método de Construcción. Tabla Agregada sin periodo de selección, suponiendo exposición uniforme sin considerar sexo.

Rango de Edad: Edad mínima 12 años a máximo 100 años.

Publicada: Documento publicado por la CNSF en el diario oficial del viernes 31 de diciembre de 1999.

Nota: Esta tabla fue construida usando los valores de q_x.

ANEXO 2

"Tabla de mortalidad para un grupo de vida conjunta de dos vidas"

Información de la tabla

Tipo: Agregada.

Uso: Mortalidad de los grupos de Asegurados de dos vidas conjuntas..

Fuente: Estadísticas de las Compañías Aseguradoras.

Periodo de Observación: de 1991 a 1998.

Unidad de Observación: Pólizas.

Volumen de datos: 54,623 reclamaciones.

Método de Construcción. Tabla Agregada sin periodo de selección, suponiendo exposición uniforme sin considerar sexo.

Rango de Edad: Edad mínima 12 años a máximo 100 años.

Publicada: Documento publicado por la CNSF en el diario oficial del viernes 31 de diciembre de 1999.

Nota: Esta tabla fue construida usando los valores de q_x.

Tabla de vida conjunta para dos personas suponiendo Makeham[2]. Basada en la tabla individual de la CNSF, México 2000-2001.

Edad	Funciones Biométricas									Valores Conmutados al 5% de interés técnico						Edad
										Anualidades			Seguros			
	l_{xx}	d_{xx}	${}_1p_{xx}$	${}_1q_{xx}$	$L_{xx}^{(1)}$	T_{xx}	m_{xx}	e_{xx}	$\mathring{e}_{xx}$	D_{xx}	N_{xx}	S_{xx}	C_{xx}	M_{xx}	R_{xx}	
12	98,786	132	0.9987	0.001331	98,720.4	5,270,786.9	0.001332	81.8	53.4	55,007.8	1,031,878.2	17,124,662.8	69.7	5,870.8	216,418.0	12
13	98,655	138	0.9986	0.001398	98,585.7	5,172,066.5	0.001399	80.8	52.5	52,318.7	976,870.4	16,092,784.6	69.6	5,801.0	210,547.3	13
14	98,517	145	0.9985	0.001469	98,444.4	5,073,480.8	0.001470	79.8	51.5	49,757.7	924,551.7	15,115,914.3	69.6	5,731.4	204,746.3	14
15	98,372	152	0.9985	0.001546	98,296.0	4,975,036.4	0.001547	78.8	50.6	47,318.6	874,794.0	14,191,362.6	69.7	5,661.8	199,014.9	15
16	98,220	160	0.9984	0.001628	98,140.0	4,876,740.4	0.001629	77.8	49.7	44,995.7	827,475.4	13,316,568.5	69.8	5,592.1	193,353.1	16
17	98,060	168	0.9983	0.001717	97,975.9	4,778,600.3	0.001718	76.8	48.8	42,783.3	782,479.7	12,489,093.1	70.0	5,522.4	187,761.0	17
18	97,892	177	0.9982	0.001812	97,803.0	4,680,624.4	0.001814	75.8	47.9	40,676.0	739,696.4	11,706,613.4	70.2	5,452.4	182,238.6	18
19	97,714	187	0.9981	0.001915	97,620.8	4,582,821.4	0.001917	74.8	46.9	38,668.9	699,020.4	10,966,917.0	70.5	5,382.2	176,786.2	19
20	97,527	197	0.9980	0.002025	97,428.5	4,485,200.6	0.002027	73.8	46.0	36,757.0	660,351.5	10,267,896.7	70.9	5,311.7	171,404.0	20
21	97,330	209	0.9979	0.002144	97,225.4	4,387,772.2	0.002146	72.8	45.1	34,935.8	623,594.5	9,607,545.2	71.3	5,240.8	166,092.4	21
22	97,121	221	0.9977	0.002271	97,010.8	4,290,546.8	0.002274	71.8	44.2	33,200.8	588,658.7	8,983,950.7	71.8	5,169.5	160,851.6	22
23	96,901	233	0.9976	0.002408	96,783.8	4,193,536.0	0.002411	70.8	43.3	31,548.0	555,457.9	8,395,291.9	72.4	5,097.7	155,682.1	23
24	96,667	247	0.9974	0.002556	96,543.6	4,096,752.1	0.002559	69.8	42.4	29,973.4	523,909.9	7,839,834.0	73.0	5,025.3	150,584.5	24
25	96,420	262	0.9973	0.002714	96,289.3	4,000,208.5	0.002718	68.8	41.5	28,473.1	493,936.5	7,315,924.1	73.6	4,952.3	145,559.2	25
26	96,158	277	0.9971	0.002884	96,019.7	3,903,919.2	0.002889	67.8	40.7	27,043.7	465,463.4	6,821,987.6	74.3	4,878.7	140,606.8	26
27	95,881	294	0.9969	0.003068	95,734.0	3,807,899.5	0.003072	66.8	39.8	25,681.6	438,419.7	6,356,524.3	75.0	4,804.5	135,728.1	27
28	95,587	312	0.9967	0.003265	95,430.9	3,712,165.5	0.003270	65.8	38.9	24,383.6	412,738.1	5,918,104.5	75.8	4,729.4	130,923.6	28
29	95,275	331	0.9965	0.003476	95,109.3	3,616,734.5	0.003482	64.8	38.0	23,146.7	388,354.5	5,505,366.4	76.6	4,653.6	126,194.2	29
30	94,944	352	0.9963	0.003704	94,767.8	3,521,625.3	0.003711	63.8	37.2	21,967.8	365,207.8	5,117,011.9	77.5	4,577.0	121,540.6	30
31	94,592	374	0.9961	0.003949	94,405.2	3,426,857.4	0.003957	62.8	36.3	20,844.2	343,240.0	4,751,804.1	78.4	4,499.5	116,963.6	31
32	94,218	397	0.9958	0.004212	94,020.0	3,332,452.2	0.004221	61.8	35.4	19,773.3	322,395.8	4,408,564.1	79.3	4,421.1	112,464.1	32
33	93,822	422	0.9955	0.004495	93,610.8	3,238,432.2	0.004505	60.8	34.6	18,752.4	302,622.5	4,086,168.3	80.3	4,341.8	108,043.0	33
34	93,400	448	0.9952	0.004799	93,175.8	3,144,821.4	0.004811	59.8	33.8	17,779.1	283,870.1	3,783,545.8	81.3	4,261.5	103,701.3	34
35	92,952	476	0.9949	0.005126	92,713.4	3,051,645.6	0.005139	58.8	32.9	16,851.2	266,091.0	3,499,675.7	82.3	4,180.2	99,439.8	35
36	92,475	507	0.9945	0.005478	92,221.9	2,958,932.2	0.005493	57.8	32.1	15,966.5	249,239.8	3,233,584.7	83.3	4,098.0	95,259.5	36
37	91,969	539	0.9941	0.005855	91,699.4	2,866,710.3	0.005873	56.8	31.3	15,122.9	233,273.2	2,984,344.9	84.3	4,014.7	91,161.6	37
38	91,430	572	0.9937	0.006262	91,143.9	2,775,010.9	0.006281	55.9	30.4	14,318.5	218,150.3	2,751,071.7	85.4	3,930.3	87,146.9	38
39	90,858	609	0.9933	0.006698	90,553.4	2,683,867.0	0.006721	54.9	29.6	13,551.2	203,831.9	2,532,921.4	86.4	3,845.0	83,216.6	39
40	90,249	647	0.9928	0.007167	89,925.7	2,593,313.6	0.007193	53.9	28.8	12,819.5	190,280.6	2,329,089.5	87.5	3,758.5	79,371.6	40
41	89,602	687	0.9923	0.007672	89,258.5	2,503,387.9	0.007701	52.9	28.0	12,121.5	177,461.1	2,138,808.9	88.6	3,671.0	75,613.1	41
42	88,915	730	0.9918	0.008214	88,549.7	2,414,129.4	0.008248	51.9	27.3	11,455.8	165,339.6	1,961,347.7	89.6	3,582.4	71,942.1	42
43	88,184	776	0.9912	0.008797	87,796.6	2,325,579.8	0.008835	50.9	26.5	10,820.6	153,883.9	1,796,008.1	90.7	3,492.8	68,359.7	43
44	87,409	824	0.9906	0.009423	86,997.0	2,237,783.1	0.009467	49.9	25.7	10,214.7	143,063.2	1,642,124.3	91.7	3,402.2	64,866.8	44

Tabla de vida conjunta para dos personas suponiendo Makeham[2]. Basada en la tabla individual de la CNSF, México 2000-2001.

Edad	Funciones Biométricas									Valores Conmutados al 5% de interés técnico						Edad
										Anualidades			Seguros			
	l_{xx}	d_{xx}	$_1p_{xx}$	$_1q_{xx}$	$L_{xx}^{(1)}$	T_{xx}	m_{xx}	e_{xx}	$\mathring{e}_{xx}$	D_{xx}	N_{xx}	S_{xx}	C_{xx}	M_{xx}	R_{xx}	
45	86,585	874	0.9899	0.010096	86,148.1	2,150,786.1	0.010147	48.9	25.0	9,636.6	132,848.5	1,499,061.0	92.7	3,310.5	61,464.7	**45**
46	85,711	927	0.9892	0.010819	85,247.4	2,064,638.1	0.010878	47.9	24.2	9,085.1	123,211.9	1,366,212.5	93.6	3,217.9	58,154.2	**46**
47	84,784	983	0.9884	0.011596	84,292.2	1,979,390.7	0.011663	46.9	23.5	8,558.9	114,126.8	1,243,000.6	94.5	3,124.2	54,936.3	**47**
48	83,801	1,042	0.9876	0.012431	83,279.8	1,895,098.5	0.012508	45.9	22.8	8,056.8	105,568.0	1,128,873.8	95.4	3,029.7	51,812.1	**48**
49	82,759	1,103	0.9867	0.013328	82,207.4	1,811,818.7	0.013417	45.0	22.0	7,577.7	97,511.2	1,023,305.8	96.2	2,934.3	48,782.3	**49**
50	81,656	1,167	0.9857	0.014291	81,072.4	1,729,611.3	0.014394	44.0	21.3	7,120.7	89,933.5	925,794.6	96.9	2,838.2	45,848.0	**50**
51	80,489	1,234	0.9847	0.015327	79,872.1	1,648,538.9	0.015445	43.0	20.6	6,684.7	82,812.8	835,861.2	97.6	2,741.2	43,009.9	**51**
52	79,255	1,303	0.9836	0.016439	78,603.9	1,568,666.8	0.016575	42.0	20.0	6,268.8	76,128.1	753,048.4	98.1	2,643.7	40,268.6	**52**
53	77,952	1,375	0.9824	0.017634	77,265.1	1,490,062.9	0.017790	41.0	19.3	5,872.1	69,859.3	676,920.3	98.6	2,545.5	37,625.0	**53**
54	76,578	1,449	0.9811	0.018917	75,853.6	1,412,797.8	0.019097	40.0	18.6	5,493.9	63,987.1	607,061.1	99.0	2,446.9	35,079.4	**54**
55	75,129	1,525	0.9797	0.020294	74,366.9	1,336,944.2	0.020502	39.0	18.0	5,133.3	58,493.2	543,074.0	99.2	2,347.9	32,632.5	**55**
56	73,605	1,603	0.9782	0.021774	72,803.2	1,262,577.3	0.022013	38.1	17.3	4,789.7	53,359.9	484,580.8	99.3	2,248.7	30,284.6	**56**
57	72,002	1,682	0.9766	0.023362	71,160.9	1,189,774.1	0.023638	37.1	16.7	4,462.3	48,570.2	431,220.9	99.3	2,149.4	28,035.9	**57**
58	70,320	1,763	0.9749	0.025068	69,438.4	1,118,613.2	0.025386	36.1	16.1	4,150.5	44,108.0	382,650.6	99.1	2,050.1	25,886.5	**58**
59	68,557	1,844	0.9731	0.026898	67,635.0	1,049,174.8	0.027265	35.1	15.5	3,853.7	39,957.5	338,542.6	98.7	1,951.0	23,836.4	**59**
60	66,713	1,926	0.9711	0.028863	65,750.2	981,539.8	0.029285	34.2	14.9	3,571.5	36,103.8	298,585.1	98.2	1,852.3	21,885.4	**60**
61	64,787	2,007	0.9690	0.030971	63,784.2	915,789.6	0.031458	33.2	14.4	3,303.3	32,532.3	262,481.3	97.4	1,754.1	20,033.1	**61**
62	62,781	2,086	0.9668	0.033233	61,737.7	852,005.4	0.033795	32.2	13.8	3,048.5	29,229.0	229,949.1	96.5	1,656.7	18,279.0	**62**
63	60,695	2,164	0.9643	0.035660	59,612.4	790,267.6	0.036307	31.3	13.3	2,806.9	26,180.5	200,720.1	95.3	1,560.2	16,622.4	**63**
64	58,530	2,240	0.9617	0.038262	57,410.4	730,655.3	0.039009	30.3	12.7	2,577.9	23,373.6	174,539.6	93.9	1,464.9	15,062.2	**64**
65	56,291	2,311	0.9589	0.041054	55,135.2	673,244.8	0.041914	29.3	12.2	2,361.2	20,795.7	151,166.1	92.3	1,370.9	13,597.3	**65**
66	53,980	2,378	0.9560	0.044046	52,791.0	618,109.6	0.045038	28.4	11.7	2,156.4	18,434.5	130,370.4	90.5	1,278.6	12,226.4	**66**
67	51,602	2,438	0.9527	0.047253	50,383.0	565,318.7	0.048397	27.4	11.2	1,963.3	16,278.0	111,935.9	88.4	1,188.1	10,947.8	**67**
68	49,164	2,492	0.9493	0.050691	47,917.7	514,935.7	0.052009	26.5	10.7	1,781.4	14,314.8	95,657.9	86.0	1,099.8	9,759.6	**68**
69	46,672	2,538	0.9456	0.054373	45,402.8	467,018.0	0.055892	25.5	10.3	1,610.6	12,533.3	81,343.1	83.4	1,013.8	8,659.8	**69**
70	44,134	2,574	0.9417	0.058317	42,847.1	421,615.2	0.060068	24.6	9.8	1,450.5	10,922.7	68,809.8	80.6	930.4	7,646.0	**70**
71	41,560	2,599	0.9375	0.062540	40,260.6	378,768.1	0.064559	23.6	9.4	1,300.9	9,472.2	57,887.1	77.5	849.8	6,715.6	**71**
72	38,961	2,613	0.9329	0.067060	37,654.7	338,507.5	0.069386	22.7	9.0	1,161.5	8,171.3	48,414.9	74.2	772.3	5,865.8	**72**
73	36,348	2,613	0.9281	0.071896	35,041.7	300,852.8	0.074577	21.8	8.6	1,032.0	7,009.8	40,243.6	70.7	698.2	5,093.5	**73**
74	33,735	2,600	0.9229	0.077069	32,435.0	265,811.2	0.080158	20.8	8.2	912.2	5,977.9	33,233.8	67.0	627.5	4,395.3	**74**
75	31,135	2,572	0.9174	0.082600	29,849.2	233,376.1	0.086158	19.9	7.8	801.8	5,065.7	27,255.9	63.1	560.6	3,767.8	**75**
76	28,563	2,528	0.9115	0.088510	27,299.3	203,526.9	0.092608	19.0	7.5	700.5	4,263.9	22,190.2	59.1	497.5	3,207.3	**76**

Tabla de vida conjunta para dos personas suponiendo Makeham[2]. Basada en la tabla individual de la CNSF, México 2000-2001.

Edad	Funciones Biométricas									Valores Conmutados al 5% de interés técnico						Edad
										Anualidades			Seguros			
	l_{xx}	d_{xx}	${}_1p_{xx}$	${}_1q_{xx}$	L_{xx}[1]	T_{xx}	m_{xx}	e_{xx}	$\mathring{e}_{xx}$	D_{xx}	N_{xx}	S_{xx}	C_{xx}	M_{xx}	R_{xx}	
77	26,035	2,469	0.9052	0.094823	24,800.8	176,227.6	0.099543	18.1	7.1	608.1	3,563.4	17,926.3	54.9	438.4	2,709.8	77
78	23,566	2,393	0.8984	0.101564	22,369.7	151,426.8	0.106997	17.2	6.8	524.2	2,955.3	14,362.8	50.7	383.5	2,271.4	78
79	21,173	2,303	0.8912	0.108756	20,021.6	129,057.1	0.115010	16.3	6.4	448.6	2,431.1	11,407.5	46.5	332.8	1,887.8	79
80	18,870	2,197	0.8836	0.116426	17,771.8	109,035.5	0.123623	15.4	6.1	380.7	1,982.5	8,976.5	42.2	286.3	1,555.0	80
81	16,673	2,078	0.8754	0.124601	15,634.5	91,263.7	0.132879	14.5	5.8	320.4	1,601.8	6,994.0	38.0	244.1	1,268.7	81
82	14,596	1,946	0.8667	0.133307	13,622.9	75,629.2	0.142827	13.6	5.6	267.1	1,281.4	5,392.2	33.9	206.1	1,024.6	82
83	12,650	1,804	0.8574	0.142573	11,748.3	62,006.3	0.153517	12.8	5.3	220.5	1,014.2	4,110.9	29.9	172.2	818.5	83
84	10,847	1,653	0.8476	0.152427	10,019.9	50,258.0	0.165002	11.9	5.0	180.0	793.8	3,096.6	26.1	142.3	646.3	84
85	9,193	1,498	0.8371	0.162896	8,444.4	40,238.1	0.177341	11.1	4.8	145.3	613.7	2,302.9	22.5	116.1	504.0	85
86	7,696	1,339	0.8260	0.174011	7,026.1	31,793.7	0.190594	10.2	4.5	115.9	468.4	1,689.2	19.2	93.6	387.9	86
87	6,357	1,181	0.8142	0.185799	5,766.0	24,767.6	0.204827	9.4	4.3	91.1	352.5	1,220.8	16.1	74.4	294.4	87
88	5,175	1,026	0.8017	0.198288	4,662.4	19,001.6	0.220110	8.6	4.1	70.7	261.3	868.3	13.3	58.2	220.0	88
89	4,149	878	0.7885	0.211504	3,710.5	14,339.2	0.236515	7.8	3.9	54.0	190.7	606.9	10.9	44.9	161.8	89
90	3,272	738	0.7745	0.225473	2,902.8	10,628.7	0.254121	7.0	3.7	40.5	136.7	416.3	8.7	34.0	116.9	90
91	2,534	609	0.7598	0.240218	2,229.6	7,725.9	0.273009	6.2	3.5	29.9	96.2	279.6	6.8	25.3	82.9	91
92	1,925	492	0.7442	0.255762	1,679.1	5,496.2	0.293266	5.4	3.3	21.6	66.3	183.4	5.3	18.5	57.6	92
93	1,433	390	0.7279	0.272123	1,237.9	3,817.2	0.314980	4.7	3.1	15.3	44.7	117.1	4.0	13.2	39.1	93
94	1,043	302	0.7107	0.289316	892.1	2,579.3	0.338246	4.0	2.9	10.6	29.3	72.5	2.9	9.2	25.9	94
95	741	228	0.6926	0.307352	627.3	1,687.2	0.363161	3.3	2.7	7.2	18.7	43.1	2.1	6.3	16.6	95
96	513	167	0.6738	0.326236	429.7	1,059.9	0.389823	2.6	2.5	4.7	11.5	24.4	1.5	4.2	10.3	96
97	346	120	0.6540	0.345969	286.1	630.2	0.418335	1.9	2.2	3.0	6.8	12.9	1.0	2.7	6.1	97
98	226	83	0.6335	0.366546	184.8	344.1	0.448798	1.2	1.9	1.9	3.7	6.2	0.7	1.7	3.4	98
99	143	56	0.6120	0.387951	115.5	159.4	0.481314	0.6	1.4	1.1	1.8	2.5	0.4	1.1	1.7	99
100	88	88	0.0000	1.000000	43.9	43.9	2.000000	0.0	1.0	0.7	0.7	0.7	0.6	0.6	0.6	100

[1] Columna calculada con la aproximación de la *ec. 1.6*

[2] Utilizando los siguientes valores de los parámetros según la *ec. 12.3*

S = 0.99977475

g = 0.99755737

C = 1.07536523

Información de la Tabla

Tipo: Conjunta, para dos participantes de edades iguales *xx*

Uso: Mortalidad de los Asegurados.

Fuente: Estadisticas de las Compañias Aseguradoras.

Periodo de Observación: de 1991 a 1998.

Unidad de Observación: Pólizas.

Volumen de datos: 54,623 reclamaciones.

Método de Construcción. Tabla Agregada sin periodo de selección, suponiendo exposición uniforme sin considerar sexo y la ley de Makeham para determinar l_{xx}

Rango de Edad: Edad mínima 12 años a máximo 100 años.

Nota: Esta tabla fué construida usando como referencia única la columna l_{xx}.

ANEXO 3 "Tasas de interés"

Tipos de interés

El interés es el dinero pagado por una parte por el uso de fondos de otra, de esta manera, una tasa de interés es la proporción que paga una parte por el uso de fondos de otra. Por ejemplo, cuando se deposita dinero en una cuenta de ahorro está brinda ciertos intereses, los cuales, son producto del uso del dinero depositado en la cuenta.

Así, se denota con la letra i a las tasas de interés efectivas por periodo, por ejemplo, si $i=10\%$ y se tiene un capital de *200 u.m.* el interés ganado al final del periodo es *20 u.m.* Por otro lado, las tasas de interés pagaderas más de una vez por periodo, mejor conocidas como tasas nominales, se representan como $i^{(m)}$. Por ejemplo, si $i^{(2)}=10\%$ quiere decir que se paga el 5% de interés cada semestre (si el periodo es anual). La acumulación de los intereses a través del tiempo, se puede entender como una función con las siguientes características.

Se dice que $a(t)$ es una *función de acumulación* si sólo si:

i) $a(0) = 1$

ii) $a(t)$ es una función creciente para $t \geq 0$.

La acumulación de los intereses, generalmente es bajo dos esquemas; interés simple e interés compuesto. En el primero, se pagan los mismos intereses cada periodo y en el segundo, se pagan intereses sobre intereses. Por lo tanto, si $a(t) = 1+it$ se dice que es *interés simple*. Pero, si la función de acumulación se define como $a(t) = (1 + i)^t$, se dice que es *interés compuesto*.

De este modo, si x representa una cantidad en unidades monetarias y $A(t)$ el *monto acumulado* del capital x al momento t, entonces;

i) $A(t) = xa(t)$

ii) $A(0) = x$. Al tiempo cero no se ha acumulado ningún capital, salvo el inicial.

Ejemplo A3.1

Suponga que se invierten *6,000 u.m.* en un fondo que brinda una tasa de interés simple del *15%* anual. ¿Cuánto dinero se tiene en el fondo al final del año cinco? Es decir, ¿cuánto vale el monto acumulado $A(5)$?

Sol.

Como $A(5)=6{,}000(1+5i)$, donde i es la tasa de interés simple efectiva por periodo, entonces

$$\begin{aligned} A(5)&=6{,}000(1.75)\\ &=10{,}500 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

■

Ejemplo A3.2

Si se invierten *8,000 u.m.* en un fondo a una tasa de interés compuesto del *12%*, ¿cuánto hay en el fondo al final del tercer año?

Sol.

Como $A(3)=8{,}000(1+i)^3$, donde i es la tasa de interés compuesto efectiva por periodo, entonces,

$$\begin{aligned} A(3)&=8{,}000(1.12)^3\\ &=11{,}239 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

■

Ejemplo A3.3

Un banco, paga una tasa de interés nominal pagadera cuatrimestralmente de *10%*. Si se depositan *2,000 u.m.* al inicio del año, ¿cuánto se tiene en el banco al final del año seis suponiendo interés compuesto?

Sol.

Como la tasa de interés se paga cada cuatrimestre, entonces $i^{(3)}=10\%$. De esta manera, el monto acumulado al final de los seis años se representa por,

$$\begin{aligned} A(6) &= 2{,}000\left(1+\frac{i^{(3)}}{3}\right)^{(6)(3)}\\ &= 2{,}000(1.0333)^{18}\\ &= 3{,}609 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

■

Valor presente

El valor presente, es la cantidad necesaria para obtener otra en un futuro. Por ejemplo, ¿qué cantidad x se necesita tal que al invertirla al *5%* se obtengan *500 u.m* en un año? Es decir, si x_0 es el valor presente de x_t y la función de acumulación $a(t)$ es biyectiva, entonces existe una función $a^{-1}(t)$ tal que $x_0 = x_t\, a^{-1}(t)$. A la ecuación anterior, se le conoce como el <u>*valor presente*</u> de x_t porque $x_t = x_0\, a(t)$.

Si la función de acumulación se define utilizando interés compuesto $a(t) = (1 + i)^t$, entonces:

$$a^{-1}(t) = V^t, \quad donde \;\; V^t = \frac{1}{(1+i)^t}$$

Ejemplo A3.4

En dos años se desea tener un ahorro de *4,500 u.m.* ¿cuánto se tiene que depositar en una cuenta de ahorro que paga el *6%* de interés anual, de suerte que se tengan *4,500 u.m.* dentro de cinco años?

Sol.

Lo que se pregunta es; ¿qué cantidad x se necesita para que al invertirla al *6%* de interés anual se obtengan *4500 u.m*? En otras palabras, ¿cuál es el valor presente de *4,500* al *5%* de interés anual? Es decir, $x(1+i)^5 = 4,500$, despejando x se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= 4{,}500V^5 \\ &= 4{,}500\frac{1}{(1.06)^5} \\ &= 3{,}363\ u.m. \end{aligned}$$

■

Tasas de descuento

Una tasa de descuento, es la proporción restada que paga una parte, por el uso de fondos de otra. Por ejemplo, si se pide un préstamo de *100 u.m.* a una tasa de descuento del

5%, entonces, el dinero prestado a descuento es *100(1-d) u.m.* Es decir, serán prestadas *95 u.m.* y no las *100 u.m.* solicitadas en un inicio.

La tasa de descuento, usualmente se representa con la letra "*d*" y análogamente a las tasas de interés, se clasifica en tasa de descuento; efectiva y nominal. Además, observe que se cumplen las siguientes igualdades: $d = iV$, $d=1-V$, $i = d(1-d)^{-1}$.

Fuerza de interés

La fuerza de interés, es la intensidad con la que actúa el interés al momento exacto t. Por lo tanto, se define la <u>*fuerza de interés*</u> como una función δ_t que depende del momento exacto t, usualmente, la función δ_t se escribe simplemente como δ. De esta manera,

$$\delta = \frac{a'(t)}{a(t)}$$

Por ejemplo, para la función de acumulación $a(t)=(1+i)^t$ se tiene;

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{a'(t)}{a(t)} \\ &= \frac{\ln(1+i)(1+i)^t}{(1+i)^t} \\ &= \ln(1+i)\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por el número e, se obtiene;

$$e^{\delta} = 1+i$$

Por lo tanto,

$$e^{\delta t} = (1+i)^{t}$$

La ecuación anterior, es otra caracterización de la función de acumulación de interés compuesto.

ANEXO 4 — "Métodos Numéricos"

Introducción

Los métodos numéricos, son el conjunto de metodologías necesarias para dar una representación numérica a un modelo matemático. En el contexto específico de la teoría actuarial del seguro de personas, los métodos numéricos se emplean para; interpolar, ajustar, integrar y derivar funciones cuyas expresiones son complejas o se desconocen. Para este fin, se utiliza la computadora por su capacidad de realizar millones de operaciones en intervalos de tiempo muy pequeños.

Aproximación, interpolación y ajuste de curvas

La aproximación, interpolación y ajuste de curvas, consiste en una serie de datos exactos, proporcionados por una función desconocida. La cual, se desea aproximar a través de una curva.

Polinomios de Lagrange

Suponga que se proporcionan $n+1$ valores distintos de la forma $(x_i, f(x_i))$, y se desea encontrar un polinomio cuya gráfica pase por estos puntos. Es decir:

$$P_n(x_i) = f(x_i) \text{ para todo punto } i=1,2,\ldots n+1$$

El polinomio es de la forma $P_n(x_i) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ *ec. A4.1*

De esta forma, los polinomios de Lagrange se representan como

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i),\ donde\ L_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad ec.\ A4.2$$

Ejemplo A4.1

Encontrar un polinomio de ajuste con los valores (-1,1), (0,1), (1,1), (2,-5).

Sol.

Utilizando la *ec. A4.2* el polinomio de ajuste se representa como

$$P_3(x_i) = f(x_0)L_o(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

Sustituyendo los valores de $f(x_i)$

$$P_3(x_i) = L_o(x) + L_1(x) + L_2(x) - 5L_3(x) \qquad ec.\ A4.3$$

Calculando los valores de Lagrange $L_i(x)$

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \prod_{j=0,\, j\neq i}^{3} \frac{x - x_0}{x_0 - x_j} \\ &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} \\ &= \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{(-1)(-2)(-3)} \end{aligned}$$

De manera similar

$$L_1(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(1)(-1)(-2)}, \quad L_2(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{(2)(1)(-1)} \quad y \quad L_3(x) = \frac{x^3 - x}{(3)(2)(1)}$$

Sustituyendo los valores de $L_i(x)$ en la *ec. A4.3*, se obtiene el polinomio cuya grafica pasa por los puntos dados, es decir:

$$P(x) = -x^3 + x + 1$$

■

Diferencias Divididas

Si se desea ajustar una curva desconocida con un polinomio de grado n, tal que su gráfica pase por los valores $(x_i, f(x_i))$. Es decir, $P_n(x_i)=f(x_i)$, entonces:

$$P_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)\right) \qquad ec.\ A4.4$$

Donde

$$a_k = f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{f[x_1, x_1, ..., x_k] - f[x_0, x_1, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Un método particular de las diferencias, resulta cuando los valores $f(x_i)$ están igualmente espaciados. Es decir, existe un número h tal que x_i - x_{i+h} = h, en forma paramétrica $x = x_0 + sh$. Por ejemplo, en los ejercicios del capítulo 2 se explica un método que tiene mucho que ver con las diferencias divididas, ya que se tiene un fragmento de tabla de mortalidad para valores equidistantes de l_x, con los cuales, se estiman los parámetros de las leyes de mortalidad de Gompertz y Makeham.

Ejemplo A4.2

Ajustar un polinomio de grado tres, para los valores equidistantes de l_x tomados de la tabla de mortalidad del Anexo 1 y graficarlo. Finalmente, con el polinomio encontrado de una función aproximativa de la fuerza de mortalidad usando la *def. 1.12.*

x	15	25	35	45
l_x	99,872	99,172	97,708	94,701

Sol.

Desarrollando la *ec.A4.4* para *n= 3*, se obtiene:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \left(\sum_{k=0}^{3} a_k\right)\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)\right) \\ &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \\ &\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned} \qquad ec.\ A4.5$$

Observe, que el valor de a_k si $k=1$ es de la forma

$$a_1 = f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

De esta manera, la tabla de diferencias divididas se representa como

Punto	Edad x	$f(x)$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
1	x_0	$f(x_0)$	$\frac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_0}$	$\frac{f[x_2,x_1]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$\frac{f[x_3,x_2,x_1]-f[x_2,x_1,x_0]}{x_3-x_0}$
2	x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\frac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1}$	
3	x_2	$f(x_2)$	$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$		
4	x_3	$f(x_3)$			

Como $f(x)= l_x$, se puede construir la siguiente tabla

Punto	Edad x	l_x	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_0	15	99,872	-70.00	-3.82	-0.13
x_1	25	99,172	-146.40	-7.72	
x_2	35	97,708	-300.70		
x_3	45	94,701			

Sustituyendo los valores en la *ec. A4.5* se obtiene:

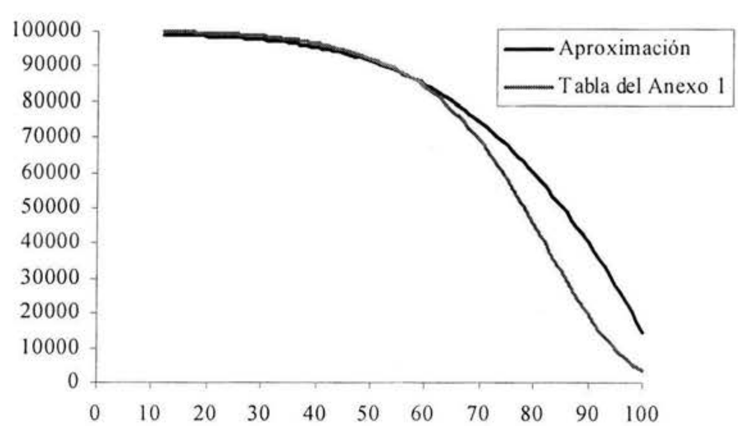
$$P_3(x) = 99{,}872 - 70(x-15) - 3.82(x-15)(x-25) - .13(x-15)(x-25)(x-35)$$

Reduciendo la expresión

$$P_3(x) = -.13x^3 + 5.93x^2 - 147.95x + 100{,}145.9 \qquad ec.A4.6$$

Graficando la *ec.A4.6* conjuntamente con los valores de la tabla de mortalidad del Anexo 1.

Numero de vivos a edad x



Observe, que el polinomio se ajusta mejor para el intervalo de 12 años hasta 60 años, no así en el intervalo de 60 años en adelante. Finalmente, por la *def.1.12* se sabe que μ_x se define como $\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}$. Sustituyendo la *ec. A4.6* en la definición de fuerza instantánea de mortalidad se obtiene;

$$\mu_x = -\frac{1}{P_3(x)}\frac{dP_3(x)}{dx}$$

$$= \frac{.39x^2 - 11.86x + 147.95}{-.13x^3 + 5.93x^2 - 147.95x + 100{,}145.9}$$

Esta expresión, aproxima mejor la fuerza de mortalidad en el intervalo de edad de 12 años a 60 años.

■

Polinomios de Newton

Cuando se tienen datos igualmente espaciados, se obtiene un método de aproximación de curvas por diferencias finitas. Es decir, con datos equidistantes existe un número h tal que $x_i - x_{i+h} = h$ o en forma paramétrica $x = x_0 + sh$. Con la ecuación anterior, se tiene que $x_1 - x_0 = h,\ x_2 - x_0 = 2h,\ x_3 - x_0 = 3h, \ldots,\ x_s - x_0 = sh$. Restando x_i de la ecuación $x = x_0 + sh$,

$$x - x_i = h(s-i)$$

Sustituyendo el cambio de variable $x = x_0 + sh$ en la *ec. A4.1*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + sh) \\ &= f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \ldots + \\ &\quad + s(s-1)\ldots(s-(n-1))h^n f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

Es decir,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k \prod_{i=0}^{k-1}(s-i) \qquad ec.\ A4.7$$

Si se define el operador diferencia denotado por Δ. La primer diferencia de la función $f(x)$ se representa como:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

La *n-ésima* diferencia, está dada por

$$\begin{aligned} \Delta^n f(x) &= \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x) \\ &= \Delta^{n-1}\left(f(x+h) - f(x)\right) \\ &= \Delta\left(\Delta^{n-1} f(x)\right) \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f[x_1] - f[x_0] \\ &= hf[x_0, x_1] \end{aligned}$$

Despejando,

$$f[x_0, x_1] = \frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$

En general, se tiene:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!\,h^n}\Delta^n f(x_0)$$

Con lo anterior, la *ec. A3.4* se escribe de la siguiente forma:

$$P_n(x) = f(x_0) + s\Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-(n-1))}{n!}\Delta^n f(x_0) \qquad ec.\ A4.8$$

Integración

Como el polinomio $P_n(x)$ se ha encontrado de manera que aproxima satisfactoriamente la función $f(x)$ en un intervalo dado, se esperaría que la integral definida del polinomio $P_n(x)$ en un intervalo aproxime la integral definida de la función $f(x)$. Es decir,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx \qquad ec.A4.9$$

Por lo tanto, si el polinomio da un buen ajuste de la función $f(x)$, se puede utilizar la ecuación anterior, porque la integral del polinomio brinda una excelente aproximación de la integral de la función. Sin embargo, a continuación se explican un par de métodos que el lector pueden utilizar como alternativas para aproximar integrales: el método del trapecio y la regla de Simpson.

Método del trapecio

En este método, el área bajo la curva en cada subintervalo, es aproximada por el trapezoide formado al sustituir la curva por su secante trazada entre los puntos extremos de la función. De donde, la integral se aproxima con la suma de todas las áreas trapezoidales, donde cada área de trapezoide es su altura media multiplicada por su base. Por lo tanto, si se desea integrar la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, se subdivide el intervalo en n subintervalos de tamaño h, obteniéndose

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)\\ &= \frac{h}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+f(x_n)\right)\end{aligned} \qquad ec.A4.10$$

El caso más simple del método del trapecio, resulta cuando se divide el intervalo en un solo subintervalo. Así, la *ec. A4.10* se reduce a:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) \qquad ec.A4.11$$

Por ejemplo, la *ec. 1.6* se obtuvo utilizando la aproximación de la ecuación anterior.

Regla de Simpson

Esta regla, consiste en integrar un polinomio de segundo grado sobre dos intervalos denominados paneles. En otras palabras, se aproxima la función $f(x)$ con una parábola y la aproximación de la integral, es el área bajo el segmento de parábola comprendida entre $f(x_0)$ y $f(x_2)$. Esto es,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_2} P_2(x)dx$$

Utilizando la *ec. A4.8* de los polinomios de Newton,

$$P_2(x) = f(x_0) + s\Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)$$

Sustituyendo el cambio de variable $x=x_0+sh$ en la integral $\int_{a=x_0}^{b=x_2} P_2(x)dx$,

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\int_0^2 P_2(x_0+sh)ds$$

$$= h\left[2f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \frac{1}{3}\Delta^2 f(x_0)\right] = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \qquad ec.A4.12$$

La ecuación anterior, esta definida para dos paneles. Sin embargo, la extensión de la regla de Simpson se obtiene subdividiendo el intervalo en n subintervalos, obteniéndose

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{a=x_0}^{x_2} P_1(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} P_2(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n=b} P_n(x)dx$$

Donde $P_i(x)$ es el polinomio de segundo grado entre los puntos $[x_i, x_{i+2}]$. Sustituyendo la *ec. A4.12* en la ecuación anterior para valores equidistintantes $[x_i, x_{i+2}]$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] + \ldots$$

$$+ \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \qquad ec.A4.13$$

A esta ecuación, se le conoce como la regla de Simpson extendida.

Derivación

Aunque la desviación entre el polinomio $P_n(x)$ y la función $f(x)$ es pequeña, la derivada del polinomio y la función puede tener variaciones muy grandes. No obstante, para funciones cuyo comportamiento se ajusta a polinomios con grado menor a cinco, se tiene

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{dP_n(x)}{dx} \qquad ec.A4.14$$

Al calcular la fuerza instantánea de mortalidad del *ejemplo A4.2*, se utilizó esta suposición dado que se conocía el polinomio de ajuste. Sin embargo, como la curva de ajuste tiene menos variaciones en el intervalo de edad (12,60), la derivada del polinomio es más adecuada en éste. Así, sustituyendo la aproximación de la *ec.A4.8* en la *ec.A4.14*,

$$\begin{aligned}\frac{dP_n(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[f(x_0) + \frac{x-x_0}{h}\Delta f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2}\Delta^2 f(x_0) + \ldots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!h^n}\Delta^n f(x_0)\right] \\ &= \frac{\Delta f(x_0)}{h} + (2x - x_0 - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + \\ &\quad + \left[3x^2 - 2x(x_0+x_1+x_2) + (x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2)\right]\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3} + \ldots \qquad ec.A4.14\end{aligned}$$

<u>Fórmula de Woolhouse</u>

Esta fórmula, es el resultado subdividir el intervalo de integración en *m* subintervalos equidistantes con la expansión Maclaurin. Esta subdivisión, permite aproximar funciones definidas en subintervalos, por ejemplo: las anualidades pagaderas *m* veces por periodo, las primas fraccionadas, etc. La expansión de Maclaurin se representa por la siguiente fórmula.

$$\int_0^m f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} f_i + \frac{1}{2}(f_m - f_0) - \frac{1}{12}(f_m' - f_0') + \frac{1}{720}(f_m'' - f_0'') + \ldots$$

Subdividiendo el intervalo de integración en *m* partes de tamaño *1/m*, la expansión de Maclaurin se escribe

$$\sum_{i=0}^{mn} f_{\frac{i}{m}} = n\sum_{i=0}^{m} f_i - \frac{n-1}{2}(f_{mn} + f_0) - \frac{n^2-1}{12}(f_{mn}' - f_0') + \frac{n^4-1}{720}(f_{mn}'' - f_0'')\ldots$$

A esta expresión, se le conoce como la fórmula de Woolhouse. La cual, se reduce para funciones biométricas con valores de *n* adecuados, ya que $f_{nm}=0$. Es decir;

$$\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{w} f_{\frac{i}{m}} = \sum_{i=0}^{w} f_i - \frac{m-1}{2m}f_0 + \frac{m^2-1}{12m^2}f_0' - \frac{m^4-1}{720m^4}f_0'' + \ldots$$

Donde *w*, es la edad de extinción de la tabla de mortalidad.

Glosario

Español / Inglés

A

ACCIÓN / share: titulo financiero que da derecho a parte de los activos, riesgos y beneficios de la compañía.

ACCIONISTA / shareholder: acreedor que tiene acciones en una compañía.

ACTIVO / asset: bienes y derechos que tiene la compañía.

ACTIVO COMPARTIDO POR ASEGURADO / asset share: activo percápita del fondo de reserva.

ACTUARIO / actuary: profesional que estudia, plantea, formula y aplica modelos de contenido matemático a situaciones reales haciendo uso de diversas técnicas.

AHORROS / savings: cantidad en unidades monetarias, usualmente llamada capital, guardado para un uso posterior. Como se busca conservar un capital, se desea que la forma en que se guarda (colchón, alcancía, banco,..) no tenga riesgo.

AISS (ASOCIACIÓN INTERNACIONAL DE SEGURIDAD SOCIAL) / ISSA (internacional social security association): ver las referencias electrónicas

AMORTIZACIÓN / amortization: desglose sistemático de los pagos de un pasivo, intereses y capital.

ANUALIDAD / annuity: serie de pagos periódicos a través del tiempo.

ANUALIDAD ANTICIPADA / due annuity: anualidad con esquema de pagos al momento de la contratación.

ANUALIDAD CRECIENTE / increasing annuity: anualidad con esquema de pagos crecientes.

ANUALIDAD DECRECIENTE / decreasing annuity: anualidad con esquema de pagos decreciente.

ANUALIDAD DIFERIDA / deferred annuity: anualidad con esquema de pagos posterior a la contratación (diferida).

ASEGURADO / assured: individuo que se encuentra cubierto por los beneficios de una póliza.

ASEGURADOR / assurer: institución que realizó un contrato de seguro con un participante (asegurado).

B

BALANCE GENERAL / balance sheet: estado financiero que contiene las cuentas de activo, pasivo y capital.

BENEFICIARIO / beneficiary: individuo(s) designados en la póliza por el contratante como titular(es) de los beneficios que ella establece.

BENEFICIO / profit: es el monto en unidades monetarias asegurado, (suma asegurada) que se paga en una póliza al asegurado o sus beneficiarios en caso de ocurrir un siniestro.

C

CADUCAR / fall due: situación producida en un contrato de seguro cuando por determinadas circunstancias previstas, dejan de tener vigencia las condiciones establecidas en el mismo.

CARGA / load: cantidad en unidades monetarias o proporción que se incrementará a otra.

CERTIDUMBRE / certainty: es la seguridad de conocer en este momento el valor final de un depósito en ahorro o inversión.

CESANTÍA / unemployment: estado de un individuo en el cual no trabaja, ha cesado de trabajar.

COASEGURO / coinsurance: contrato de seguro compartido entre dos compañías aseguradoras.

COBERTURA / coverage, hedge: es el compromiso aceptado por la compañía en virtud del cual se hace cargo, hasta el límite estipulado en la póliza, de las consecuencias derivadas de un siniestro.

CONSULTOR / consultant, advisor: especialista en un área determinada capaz de aconsejar.

CONSULTORIA / consultancy, advisor bureau: empresa dedicada a dar consejos y resolver problemas.

CONTABILIDAD / accounting: materia dedicada a controlar cuantitativamente los activos y pasivos de una empresa.

CONTRATANTE / policy holder: individuo que suscribe con una entidad aseguradora una póliza de seguro, comúnmente el contratante es el mismo asegurado.

CUENTA INDIVIDUAL / individual account: registro de ingresos y egresos que la compañía mantiene vigente a nombre del contratante, donde se abonan las primas de la póliza, de las cláusulas adicionales y los intereses garantizados y se rebajan las deducciones mensuales que establece la póliza.

D

DESCUENTO / discount, abating: cantidad en unidades monetarias reducida a otra, producto de alguna política.

DIVISA / currency: unidad monetaria, moneda.

DOTAL / endowment: seguro pagadero cuando un asegurado fallece en un intervalo de tiempo estipulado en la póliza.

DOTAL MIXTO / endowment assurance, insurance: seguro pagadero cuando un asegurado fallece en un intervalo de tiempo, o llega con vida al final de la cobertura.

DOTAL PURO / pure endowment: seguro pagadero si un asegurado llega con vida a un periodo determinado estipulado en la póliza.

E

EDAD A LA EMISIÓN / age at issue: número de años del participante al momento de realizarse un contrato de seguro o emitirse una póliza.

EDAD AL VENCIMIENTO / age at expiry: número de años del participante al momento de terminarse el contrato.

EDAD ALCANZADA (REAL) / age at attained: numero de años de un participante.

EDAD DE ENTRADA / age at entry: Ver edad a la emisión.

EDAD DE RETIRO, JUBILACIÓN / age at withdrawal: numero de años del participante al momento de retirarse.

EGRESO / outgo: flujo negativo en unidades monetarias que realiza la compañía de seguros.

ELEGIBILIDAD / eligibility: condición necesaria para admitir a los participantes a un plan.

EMISIÓN / issue: momento en el que se realiza un contrato.

ENTREGA / delivery: momento en el que termina un contrato o bien expira.

ESPERANZA DE VIDA / life expectation: valor esperado en años que se cree vivirá un individuo.

ESTUDIO, ENCUESTA / survey, poll: proceso técnico-fundamental que permite conocer; opiniones, circunstancias, escenarios, con fines; demográficos, económicos, etc.

F

FACTOR DE GASTOS / expense factor: escalar que permite expandir o contraer el monto en unidades monetarias por concepto de gastos.

FIDEICOMISARIO / trustee, devisee: Persona física o moral capacitada legalmente para recibir el beneficio de un fideicomiso.

FIDEICOMISO / trust: es un contrato mercantil en el cual una persona que denominada fideicomitente, entrega bienes o derechos a otra que denominada fiduciaria, para que ésta los administre y realice con ellos el cumplimiento de finalidades lícitas, determinadas y posibles; una vez que éstos sean cumplidos, destine los bienes, derechos y provechos aportados y los que se hayan generado a favor de otra persona que se denomina fideicomisario, que puede ser el propio fideicomitente.

.FIDEICOMITENTE / truster: individuo o entidad que dentro de un contrato de fideicomiso destina o afecta ciertos bienes a un fin lícito y determinado, a un fiduciario.

FIDUCIARIO / fiduciary,trustee: son entidades que administran los bienes o derechos del fideicomitente, son las instituciones de crédito, de seguros, de fianzas, casas de bolsa, las sociedades financieras de objeto limitado, los almacenes generales de depósito y el Patronato del Ahorro Nacional; las sociedades financieras de objeto limitado y los almacenes generales de depósito solo tratándose de fideicomiso de garantía.

FLUJO DE EFECTIVO / cash flow: cantidad en unidades monetarias positivas o negativas para la compañía de seguros.

FONDO / fund: cuenta de activo o pasivo destinada a guardar, administrar, invertir unidades monetarias.

FONDO DE ACTIVOS / asset found: fondo que está destinado exclusivamente a manejar cuentas de activos.

FONDO DE AMORTIZACIÓN / sinking, administration fund: fondo en el cual se realiza una amortización. Ver amortización.

FONDO DE PENSIONES / pension fund: fondo cuyo fin es proveer beneficios al retiro a un beneficiario.

G

GANANCIA, UTILIDAD / gain, earning, utility: beneficio obtenido en unidades monetarias por un servicio.

GASTO / expense: monto en unidades monetarias pagado a cambio de un activo.

GRUPO DE VIDA CONJUNTA / joint life group: conjunto de participantes que se cubrirán contra un riesgo.

I

INCAPACIDAD / inability: estado de un individuo que no le permite trabajar por fallar su integridad física o mental.

INCERTIDUMBRE / uncertainty: es la incapacidad de conocer en este momento el valor final de un depósito en ahorro o inversión.

INDEMNIZACIÓN / indemnity: monto en unidades monetarias que se paga al haber ocurrido un riesgo protegido por el seguro.

INGRESO / income: los recursos positivos de un flujo de capital.

INSTITUCIONES FINANCIERAS / financial institutions: entidades dedicadas a realizar actividades relacionadas con finanzas.

INTERÉS / interest: dinero pagado por una parte, por el uso de fondos de otra.

INTERESES DEVENGADOS / accrued interest: monto en unidades monetarias que ha generado o se le ha aplicado un interés.

INTERMEDIARIO FINANCIERO / broker: individuo o entidad que sirve de eslabón en una operación financiera, generalmente compra-venta.

INVALIDEZ / invalidity: estado de un invididuo que no le permite trabajar, usualmente relacionado con la salud.

INVERSIÓN / investment: cantidad en unidades monetarias, que en lugar de sólo guardarla se busca incrementarla, es decir vale más que el capital original. Para poder lograr este incremento el dinero se deposita con mayor riesgo que cuando simplemente se ahorra.

INVERSIONISTA / investor: individuo o entidad dedicada a invertir, cuya finalidad es generar más activos con éstos recursos.

M

MERCADO DE CAPITALES / capital market: lugar donde se negocian instrumentos con vencimiento mayor a uno o tres años, caso mexicano o estadounidense.

MERCADO DE DERIVADOS / derivative market: lugar donde se negocian instrumentos financieros cuyo subyacente es otro (generalmente activo subyacente), es decir, están respaldados por otro activo.

MERCADO DE DINERO / money market: lugar donde se negocian instrumentos financieros con vencimiento menor a uno o tres años, caso mexicano o estadounidense.

MONETARY UNITY (M.U.) / unidad monetaria (u.m.): valor real para cuantificar.

N

NO PAGADO / uncashed: pasivo o activo no pagado.

O

OPINIÓN PÚBLICA / public opinion: conjunto de percepciones de un conjunto de personas.

ORGANIZACIÓN INTERNACIONAL DEL TRABAJO / ILO (internacional labour office): ver referencias en la bibliografía.

P

PA (PRIMA ADICIONAL) / ad (additional premium): cantidad en unidades monetarias pagadera de manera adicional a la prima, usualmente en caso de desear un beneficio o derecho adicional.

PAGO / payment: monto en unidades monetarias para saldar un pasivo, o bien, ser acreedor a un activo.

PASIVO / liability: deudas y obligaciones de la compañía.

PENSIÓN / pension: serie de pagos periódicos a través del tiempo a cambio de haber realizado un servicio.

PÉRDIDA / loss: déficit o cantidad en unidades monetaias que produce efectos negativos en las cuentas de activos de la compañía.

PIB (PRODUCTO INTERNO BRUTO) / gnp (gross nacional product): monto en unidades monetarias producido por un país.

PLAN PRELIMINAR DEL PERIODO / full preliminary term plan: método de valuación de reserva para una póliza de seguro de vida, el cual combina un seguro temporal a un año sumado al resto de la cobertura con diferimiento de un año, donde la prima neta es suficiente para cubrir las reclamaciones de muerte del primer año.

PÓLIZA / policy: contrato de seguro emitido por la compañía donde se estipulan los derechos y obligaciones, de la compañía y el asegurado.

PRÉSTAMO / loan: cantidad en unidades monetarias que es prestada. En el caso del seguro, un prestamo puede ser tomado como un valor garantizado contra la póliza en cualquier momento.

PRESUPUESTO / budget: monto en unidades monetarias que puede ser particionado para lograr determinados fines.

PRIMA / premium: valor en unidades monetarias determinado por la aseguradora, como contraprestación por las coberturas de seguro contratadas.

PRIMA DE AHORRO / investment portion of the premium: parte de la prima que pude ser invertida.

PRIMA DE RIESGO / risk premium: parte de la prima que cubre la contingencia.

PRIMA DE TARIFA / gross premium: prima que paga el contratante o asegurado con cierta periodicidad, incluye la prima de riesgo, ahorro y los gastos.

PRIMA NETA / net premium: la suma de la prima de ahorro y prima de riesgo.

PRIMA NETA NIVELADA / net level premium: prima uniforme a través del tiempo, ver prima neta.

PRINCIPIOS DE CONTABILIDAD GENERALMENTE ACEPTADOS / GAAP (general accepted accounting principles): conjunto de principios acordados para controlar y administrar negocios relacionados con el ramo asegurador.

PROBABILIDAD / probability: frecuencia con la que ocurre un evento, es un valor entre cero y uno.

PROBABILIDAD A POSTERIORI / probability a posteriori: proporción determinada después de una serie de experimentos.

PROBABILIDAD A PRIORI / probability a priori: proporción determinada como el cociente del número de casos favorables entre casos totales, definición clásica.

PROMEDIO / averange: valor equivalente a la suma de n valores divididos entre n.

PROVEEDOR / suplier: entidad o invididuo que proporciona insumos a la compañía.

R

RADIX / radix: base sobre la cual se construye una tabla de mortalidad.

REASEGURO / reinsurance: contrato realizado entre la compañía de seguros y otra, siendo la primera el asegurado para la segunda.

RECLAMACIÓN / claim: derecho del beneficiario para exigir su suma asegurada en caso de una continencia prevista en la póliza.

RECLAMACIONES / claims: disposición de un individuo por exigir un derecho.

RENDIMIENTO / return: cantidad o porcentaje obtenido por realizar una operación (inversión, compra-venta, etc.).

RENTA / rent: rendimiento de un instrumento, puede ser fija o variable.

RESCATE (VALOR DE) / rescue value: el valor que adquiere la póliza luego de un determinado periodo de vigencia, éste puede ser requerido por el contratante en caso de no desear continuar con la póliza.

RESERVA / reserve: cuenta de pasivo entendida como el diferencial entre las obligaciones actuales del asegurado y la compañía.

RESERVA LEGAL / legal reserve, statutory reserve: proporción que la compañía destina de acuerdo a la ley para hacer frente a sus compromisos con los asegurados.

RIESGO / risk: la factibilidad de que ocurra un evento adverso, usualmente aplicado en la inversión o el ahorro.

S

SALARIO / salary: es la retribución que debe pagar el patrón al trabajador por su trabajo.

SALDO EN EFECTIVO / cash balance: usualmente referido a un plan, en el cual el empleado contribuye con un porcentaje hipotético.

SEGURO / insurance: mecanismo para contratar la protección de un conjunto de riesgos, mediante una compensación monetaria o beneficio, suma asegurada.

SEGURO COLECTIVO / group life insurance: conjunto de individuos asegurados, no conjuntamente.

SEGURO DE VIDA / life insurance: es uno de los tipos del seguro de personas en el que el pago por parte de la compañía de seguros de la suma asegurada depende del fallecimiento ó sobrevivencia del asegurado en un momento determinado.

SEGURO SALDADO / paid insurance: a solicitud del contratante la póliza mantiene su periodo de vigencia, pero con una nueva suma asegurada fija y suspendiendo el pago de primas.

SEGURO TEMPORAL / temporary insurance: seguro con periodo de cobertura limitado por cierta cantidad de años.

SOCIEDAD ACTUARIAL DE ACCIDENTES / cas (casuality actuarial society): ver en la bibliografía referencias electrónicas.

SOCIEDAD DE ACTUARIOS / SOA (society of actuaries): ver en la bibliografía referencias electrónicas.

SOCIEDAD DE INVERSION / investment institution: las sociedades de inversión son empresas que tienen como actividad, invertir en instrumentos de deuda, divisas, acciones de empresas bursátiles y no bursátiles, etc.

SUMA ASEGURADA / amount assured, sum assured, lump assured: es el valor atribuido por el contratante a la vida del asegurado.

T

TABLA DE DECREMENTOS MÚLTIPLES / multiple decrement table: conjunto de funciones biométricas que miden la posibilidad de diversas salidas.

TABLA DE MORTALIDAD / mortality table: conjunto de funciones biométricas.

TASA, TANTO, RAZÓN / rate: cociente de dos cantidades.

V

VALOR GARANTIZADO / cash value: monto en unidades monetarias que el contratante o beneficiario recibe hasta que termina el contrato de seguro.

VEJEZ / old age, elderly person: estado de un individuo, para el cual es sujeto de los beneficios de una pensión.

VOLATILIDAD / volatility: grado en que varía o fluctúa el precio o interés de un instrumento a través del tiempo.

Inglés / Español

A

ACCOUNTING / contabilidad: materia dedicada a controlar cuantitativamente los activos y pasivos de una empresa.

ACCRUED INTEREST / intereses devengados: monto en unidades monetarias que ha generado o se le ha aplicado un interés.

ACTUARY / actuario: profesional que estudia, plantea, formula y aplica modelos de contenido matemático a situaciones reales haciendo uso de diversas técnicas.

AD (ADDITIONAL PREMIUM) / PA (prima adicional): cantidad en unidades monetarias pagadera de manera adicional a la prima, usualmente en caso de desear un beneficio o derecho adicional.

AGE AT ATTAINED / edad alcanzada (real): numero de años de un participante.

AGE AT ENTRY / edad de entrada: Ver edad a la emisión.

AGE AT EXPIRY / edad al vencimiento: número de años del participante al momento de terminarse el contrato.

AGE AT ISSUE / edad a la emisión: número de años del participante al momento de realizarse un contrato de seguro o emitirse una póliza.

AGE AT WITHDRAWAL / edad de retiro, jubilación: numero de años del participante al momento de retirarse.

AMORTIZATION / amortización: desglose sistemático de los pagos de un pasivo, intereses y capital.

AMOUNT ASSURED, SUM ASSURED, LUMP ASSURED / suma asegurada: es el valor atribuido por el contratante a la vida del asegurado.

ANNUITY / anualidad: serie de pagos periódicos a través del tiempo.

ASSET / activo: bienes y derechos que tiene la compañía.

ASSET FOUND / fondo de activos: fondo que está destinado exclusivamente a manejar cuentas de activos.

ASSET SHARE / activo compartido por asegurado: activo percápita del fondo de activo.

ASSURED / asegurado: individuo que se encuentra cubierto por los beneficios de una póliza.

ASSURER / asegurador: institución que realizó un contrato de seguro con un participante (asegurado).

AVERANGE / promedio: valor equivalente a la suma de n valores divididos entre n.

B

BALANCE SHEET / balance general: estado financiero que contiene las cuentas de activo, pasivo y capital.

BENEFICIARY / beneficiario: individuo(s) designados en la póliza por el contratante como titular(es) de los beneficios que ella establece.

BROKER / intermediario financiero: individuo o entidad que sirve de eslabón en una operación financiera, generalmente compra-venta.

BUDGET / presupuesto: monto en unidades monetarias que puede ser particionado para lograr determinados fines.

C

CAPITAL MARKET / mercado de capitales: lugar donde se negocian instrumentos con vencimiento mayor a uno o tres años, caso mexicano o estadounidense.

CAS (CASUALITY ACTUARIAL SOCIETY) / Sociedad Actuarial de Accidentes: ver en la bibliografía referencias electrónicas.

CASH BALANCE / saldo en efectivo: usualmente referido a un plan, en el cual el empleado contribuye con un porcentaje hipotético.

CASH FLOW / flujo de efectivo: cantidad en unidades monetarias positivas o negativas para la compañía de seguros.

CASH VALUE / valor garantizado: monto en unidades monetarias que el contratante o beneficiario recibe hasta que termina el contrato de seguro.

CERTAINTY / certidumbre: es la seguridad de conocer en este momento el valor final de un depósito en ahorro o inversión.

CLAIM / reclamación: derecho del beneficiario para exigir su suma asegurada en caso de una continencia prevista en la póliza.

CLAIMS / reclamaciones: disposición de un individuo por exigir un derecho.

COINSURANCE / coaseguro: contrato de seguro compartido entre dos compañías aseguradoras.

CONSULTANT, ADVISOR / consultor: especialista en un área determinada, capaz de aconsejar.

CONSULTANCY, ADVISOR BUREAU / consultaría: empresa dedicada a dar consejos y resolver problemas.

COVERAGE, HEDGE / cobertura: es el compromiso aceptado por la compañía en virtud del cual se hace cargo, hasta el límite estipulado en la póliza, de las consecuencias derivadas de un siniestro.

CURRENCY / divisa: unidad monetaria, moneda.

D

DECREASING ANNUITY / anualidad decreciente: anualidad con esquema de pagos decreciente.

DEFERRED ANNUITY / anualidad diferida: anualidad con esquema de pagos posterior a la contratación.

DELIVERY / entrega: momento en el que termina un contrato o bien expira.

DERIVATIVE MARKET / mercado de derivados: lugar donde se negocian instrumentos financieros cuyo subyacente es otro (generalmente activo subyacente), es decir, están respaldados por otro activo.

DISCOUNT, ABATING / descuento: cantidad en unidades monetarias reducida a otra, producto de alguna política.

DUE ANNUITY / anualidad anticipada: anualidad con esquema de pagos al momento de la contratación.

E

ELIGIBILITY / elegibilidad: condición necesaria para admitir a los participantes a un plan.

ENDOWMENT / dotal: seguro pagadero cuando un asegurado fallece en un intervalo de tiempo estipulado en la póliza.

ENDOWMENT ASSURANCE, INSURANCE / dotal mixto: seguro pagadero cuando un asegurado fallece en un intervalo de tiempo, o bien llega con vida al final de la protección.

EXPENSE / gasto: monto en unidades monetarias pagado a cambio de un activo.

EXPENSE FACTOR / factor de gastos: escalar que permite expandir o contraer el monto en unidades monetarias por concepto de gastos.

F

FALL DUE / caducar: situación producida en un contrato de seguro cuando por determinadas circunstancias previstas, dejan de tener vigencia las condiciones establecidas en el mismo.

FIDUCIARY, TRUSTEE / fiduciario: son entidades que administran los bienes o derechos del fideicomitente, son las instituciones de crédito, de seguros, de fianzas, casas de bolsa, las sociedades financieras de objeto limitado, los almacenes generales de depósito y el Patronato del Ahorro Nacional; las sociedades financieras de objeto limitado y los almacenes generales de depósito solo tratándose de fideicomiso de garantía.

FINANCIAL INSTITUTIONS / instituciones financieras: entidades dedicadas a realizar actividades relacionadas con finanzas.

FULL PRELIMINARY TERM PLAN / plan preliminar del periodo: método de valuación de reserva para una póliza de seguro de vida, el cual combina un seguro temporal a un año sumado al resto de la cobertura con diferimiento de un año, donde la prima neta es suficiente para cubrir las reclamaciones de muerte del primer año.

FUND / fondo: cuenta de activo o pasivo destinada a guardar, administrar, invertir unidades monetarias.

G

GAAP (GENERAL ACCEPTED ACCOUNTING PRINCIPLES) / principios de contabilidad generalmente aceptados: conjunto de principios acordados para controlar y administrar negocios relacionados con el ramo asegurador.

GAIN, EARNING, UTILITY / ganancia, utilidad: beneficio obtenido en unidades monetarias por un servicio.

GNP (GROSS NACIONAL PRODUCT) / PIB (producto interno bruto): monto en u.m. producido por un país.

GROSS PREMIUM / prima de tarifa: prima que paga el contratante o asegurado con cierta periodicidad, incluye la prima de riesgo, ahorra y los gastos.

GROUP LIFE INSURANCE / seguro colectivo: conjunto de individuos asegurados, no conjuntamente.

I

ILO (INTERNACIONAL LABOUR OFFICE) / organización internacional del trabajo: ver en la bibliografía referencias electrónicas.

INABILITY / incapacidad: estado de un individuo que no le permite trabajar por fallar su integridad física o mental.

INCOME / ingreso: los recursos positivos de un flujo de capital.

INCREASING ANNUITY / anualidad creciente: anualidad con esquema de pagos crecientes.

INDEMNITY / indemnización: monto en unidades monetarias que se paga al haber ocurrido un riesgo protegido por el seguro.

INDIVIDUAL ACCOUNT / cuenta individual: registro de ingresos y egresos que la compañía mantiene vigente a nombre del contratante, donde se abonan las primas de la póliza, de las cláusulas adicionales y los intereses garantizados y se rebajan las deducciones mensuales que establece la póliza.

INSURANCE / seguro: mecanismo para contratar la protección de un conjunto de riesgos, mediante una compensación monetaria o beneficio, suma asegurada.

INTEREST / interés: dinero pagado por una parte, por el uso de fondos de otra.

INVALIDITY / invalidez: estado de un individuo que no le permite trabajar, usualmente relacionado con la salud.

INVESTMENT / inversión: cantidad en unidades monetarias que en lugar de sólo guardarla se busca incrementarla, es decir que valga más que el capital original. Para poder lograr este incremento el dinero se deposita con mayor riesgo que cuando solamente se ahorra.

INVESTMENT INSTITUTION / sociedad de inversión: Las sociedades de inversión son empresas que tienen como actividad invertir en instrumentos de deuda, divisas, acciones de empresas bursátiles y no bursátiles, etc.

INVESTMENT PORTION OF THE PREMIUM / prima de ahorro: parte de la prima que pude ser invertida.

INVESTOR / inversionista: individuo o entidad dedicada a invertir, cuya finalidad es generar más activos con éstos recursos.

ISSA (INTERNACIONAL SOCIAL SECURITY ASSOCIATION) / AISS (asociación internacional de seguridad social): ver en la bibliografía referencias electrónicas.

ISSUE / emisión: momento en el que se realiza un contrato.

J

JOINT LIFE GROUP / grupo de vida conjunta: conjunto de participantes que se cubrirán contra un riesgo.

L

LEGAL RESERVE, STATUTORY RESERVE / reserva legal: proporción que la compañía destina de acuerdo a la ley para hacer frente a sus compromisos con los asegurados.

LIABILITY / pasivo: deudas y obligaciones de la compañía.

LIFE EXPECTATION / esperanza de vida: valor esperado en años que se cree vivirá un individuo.

LIFE INSURANCE / seguro de vida: es uno de los tipos del seguro de personas en el que el pago de la suma asegurada por parte de la compañía de seguros depende del fallecimiento o supervivencia del asegurado en un momento determinado.

LOAD / carga: cantidad en unidades monetarias o proporción que se incrementará a otra.

LOAN / préstamo: cantidad en unidades monetarias que es prestada. En el caso del seguro, un prestamo puede ser tomado como un valor garantizado contra la póliza en cualquier momento.

LOSS / pérdida: déficit o cantidad en unidades monetarias que produce efectos negativos en las cuentas de activos de la compañía.

M

MONEY MARKET / mercado de dinero: lugar donde se negocian instrumentos financieros con vencimiento menor a uno o tres años, caso mexicano o estadounidense.

MORTALITY TABLE / tabla de mortalidad: conjunto de funciones biométricas.

MULTIPLE DECREMENT TABLE / tabla de decrementos múltiples: conjunto de funciones biométricas que miden la posibilidad de diversas salidas.

N

NET LEVEL PREMIUM / prima neta nivelada: prima uniforme a través del tiempo, ver prima neta.

NET PREMIUM / prima neta: la suma de la prima de ahorro y prima de riesgo.

O

OLD AGE, ELDERLY PERSON / vejez: estado de un individuo para el cual es sujeto de los beneficios de una pensión.

OUTGO / egreso: flujo negativo en unidades monetarias que realiza la compañía de seguros.

P

PAID INSURANCE / seguro saldado: a solicitud del contratante la póliza mantiene su periodo de vigencia, pero con una nueva suma asegurada fija y suspendiendo el pago de primas.

PAYMENT / pago: monto en unidades monetarias para saldar un pasivo, o bien, ser acreedor a un activo.

PENSION / pensión: serie de pagos periódicos a través del tiempo a cambio de haber realizado un servicio.

PENSION FUND / fondo de pensiones: fondo cuyo fin es proveer beneficios al retiro a un beneficiario.

POLICY / póliza: contrato de seguro emitido por la compañía donde se estipulan los derechos y obligaciones, de la compañía y el asegurado.

POLICY HOLDER / contratante: individuo que suscribe con una entidad aseguradora una póliza de seguro, comúnmente el contratante es el mismo asegurado.

PREMIUM / prima: valor en unidades monetarias determinado por la aseguradora, como contraprestación por las coberturas de seguro contratadas.

PROBABILITY / probabilidad: frecuencia con la que ocurre un evento, es un valor entre cero y uno.

PROBABILITY A POSTERIORI / probabilidad a posteriori: proporción determinada después de una serie de experimentos.

PROBABILITY A PRIORI / probabilidad a priori: proporción determinada como el cociente del número de casos favorables entre casos totales, definición clásica.

PROFIT / beneficio: es el monto en unidades monetarias asegurado (suma asegurada) que se paga en una póliza, al asegurado o sus beneficiarios en caso de ocurrir un siniestro.

PUBLIC OPINIÓN / opinión pública: conjunto de percepciones de un conjunto de personas.

PURE ENDOWMENT / dotal puro: seguro pagadero si un asegurado llega con vida a un periodo determinado estipulado en la póliza.

R

RADIX / radix: base sobre la cual se construye una tabla de mortalidad.

RATE / tasa, tanto, razón: cociente de dos cantidades.

RECUE VALUE / rescate (valor de): el valor que adquiere la póliza luego de un determinado periodo de vigencia, éste puede ser requerido por el contratante en caso de no desear continuar con la póliza.

REINSURANCE / reaseguro: contrato realizado entre la compañía de seguros y otra, siendo la primera el asegurado para la segunda.

RENT / renta: rendimiento de un instrumento, puede ser fija o variable.

RESERVE / reserva: cuenta de pasivo entendida como el diferencial entre las obligaciones actuales del asegurado y la compañía.
RETURN / rendimiento: cantidad o porcentaje obtenido por realizar una operación (inversión, compra-venta, etc.).
RISK / riesgo: la factibilidad de que ocurra un evento adverso, usualmente aplicado en la inversión o el ahorro.
RISK PREMIUM / prima de riesgo: parte de la prima que cubre la contingencia.

S

SALARY / salario: es la retribución que debe pagar el patrón al trabajador por su trabajo.
SAVINGS / ahorros: cantidad en unidades monetarias, usualmente llamada capital, guardado para un uso posterior. Como se busca conservar un capital se desea que la forma en que se guarda (colchón, alcancía, banco, ...) no tenga riesgo.
SHARE / acción: titulo financiero que da derecho a parte de los activos, riesgos y beneficios de la compañía.
SHAREHOLDER / accionista: acreedor que tiene acciones en una compañía.
SINKING, ADMINISTRATION FUND, / fondo de amortización: fondo en el cual se realiza una amortización, ver amortización.
SOA (SOCIETY OF ACTUARIES) / sociedad de actuarios: ver en la bibliografía referencias electrónicas.
SUPLIER / proveedor: entidad o individuo que proporciona insumos a la compañía.
SURVEY, POLL / estudio, encuesta: proceso técnico-fundamental que permite conocer; opiniones, circunstancias, escenarios, con fines; demográficos, económicos, etc.

T

TEMPORARY INSURANCE / seguro temporal: seguro con periodo de cobertura limitado por cierta cantidad de años.
TRUST / fideicomiso: es un contrato mercantil en el cual una persona que se denominará fideicomitente, entrega bienes o derechos a otra que se denominará fiduciaria, para que ésta los administre y realice con ellos el cumplimiento de finalidades lícitas, determinadas y posibles; una vez que éstos sean cumplidos, destine los bienes, derechos y provechos aportados y los que se hayan generado a favor de otra persona que se denomina fideicomisario, que puede ser el propio fideicomitente.
TRUSTEE, DEVISEE / fideicomisario: persona física o moral capacitada legalmente para recibir el beneficio de un fideicomiso.
TRUSTER / fideicomitente: individuo o entidad que dentro de un contrato de fideicomiso destina o afecta ciertos bienes a un fin lícito y determinado a un fiduciario

U

UNCASHED / no pagado: pasivo o activo no pagado.
UNCERTAINTY / incertidumbre: es la incapacidad de conocer en este momento el valor final de un depósito en ahorro o inversión.
UNEMPLOYMENT / cesantía: estado de un individuo en el cual no trabaja, ha cesado de trabajar.
UNIDAD MONETARIA (u.m.) / monetary unity (m.u.): valor real para cuantificar.

V

VOLATILITY / volatilidad: grado en que varía o fluctúa el precio o interés de un instrumento a través del tiempo.

Bibliografía

Referencias

Alexander M. Mood, Franklin A. Graybill, Duane C. Boes. *"Introduction to the theory of Statistics"*. Third Edition. McGraw-Hill, 1974.

Bowers, N.L. Jr. Gerber, H.U. Hickman, J.C., Jones, D.A. and Nesbitt. *"Actuarial Mathematics"*, 2nd ed. Shaumburg, III, Society of Actuaries CJ. 1997.

C.D. Daykin, T. Pentikäinen, M. Pesonen. *"Practical Risk Theory for Actuaries"*, Chapman & Hall, 1995.

César Calvo Langarica . *"Análisis e Interpretación de Estados Financieros"*. Décima Edición. Edit. PAC S.A. de C.V., 2000.

Chester Wallace Jordan Jr. *"Life Contingencies"*. 2nd ed. The Society of Actuaries, 1975.

Curtis F. Gerald. *"Análisis Numérico con Aplicaciones"*. Sexta Edición, Edit. Pearson Education, 2000.

Davis W. Gregg. *"Life and Health Insurance Hand book"*. Second Edition. Richard D. Irwing Inc. Homewood Illinois, 1964.

Hans U. Gerber. *"Life insurance mathematics"*, Third Edition, Springer, Swiss Association of Actuaries Zurich, 1997.

Harvey W. Rubin. *"Dictionary of Insurance Terms"*. Fourth Edition. Barron's Educational Series, Inc., 2000.

Huebner, S.S., and Black, Kenneth, Jr. *"Life Insurance"*. 6th ed. New York: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1964.

Jewell, W.S. *"Models in Insurance Paradigms, Puzzles, Comunications and Revolutions".* Transactions of 21st Congress of Actuaries, Vol. 5 páginas. 87-141.

Kate L. Turabian. *"A manual for writers of term papers, theses and dissertations"*. Sixth Edition, The University of Chicago, 1996.

Maclean, Joseph B. *"Life Insurance"*. 9th ed. New York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1962.

Michael E. Porter. *"The competitive advantage of nations"*. The Free Press. 1990.

Michael Spivak. *"Cálculo Infenitesimal"*. Segunda Edición. Editorial Reverté, S.A., 1992.

P. Booth, R, Chadburn, D. Cooper, S. Haberman, D. James. *"Modern actuarial Theory and Practice"*. CHAPMAN & HALL/CRC, 1999.

Paul Blanchard, Rober L. Devaney, Glen R. Hall. *"Ecuaciones diferenciales"*. Internacional Thomson Editores S.A. de C.V., 1999.

Payton J. Huffman. *"Asset Share Mathematics"*. Transactions of Society of Actuaries Vol. 30. 1978: 277-322.

Plamondon, P.; Drouin, A.; Bniet, G.; Cichon, M.; McGillivray, W.R.; Bénard, M.; Perez-Montas,H. *"Actuarial practice in social security"*. 1st Edition. Geneva, ILO, ISSA 2002.

Serge Lang. *"Algebra Lineal"*. Fondo educativo americano. 1976.

Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, Second Edition James O. Berger, Springer-Verlag, 1985.

Stephen G. Kellison. *"Theory of interest"*. Second Edition, Irwin McGraw-Hill 1991

Subramanian Iyer, Subramanian S. Iyer. *"Actuarial mathematics of social security pensions"*. International Labour Organization, 1999.

Vaughan, Theresa M. Vaughan. *"Fundamentals of risk and Insurance"*. Eight Edition. John Wiley and Sons Inc., 1999.

Walter Rudin. *"Principles of mathematical analysis"*. Third Edition, McGraw-Hill, 1976.

Referencias electrónicas

Julio G. Villalón, Josefina Martínez Barbeito. *"Diccionario Técnico Inglés-Español Económico Financiero Actuarial"*.1ª edición, Netbiblo, S.L., A. Coruña, 2003.

Poder Judicial de la Federación, Suprema Corte de Justicia de la Nación. *"Compila VII, Legislación Federal y del Distrito Federal"*. México, 12 de Febrero del 2003.

www.actuary.org, *American Academy of Actuaries.*

www.amac.org.mx, *Asociación Mexicana de Actuarios Consultores.*

www.conac.org.mx, *Colegio Nacional de Actuarios.*

www.condusef.gob.mx, *Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los usuarios de Servicios Financieros.*

www.consar.org.mx, *Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro.*

www.ilo.org, *Internacional Labour Organization.*

www.issa.int, *Internacional Social Security Association.*

www.sat.gob.mx, *Servicios de Administración Tributaria.*

www.shcp.gob.mx, *Secretaría de Hacienda y Crédito al Público.*

www.soa.org, *Society of Actuaries.*