01968

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN PSICOLOGIA
RESIDENCIA EN PSICOLOGIA ESCOLAR

REPORTE DE EXPERIENCIA PROFESIONAL

LA INSTRUCCION POR MEDIO DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DENTRO DE UNA COMUNIDAD DE APRENDIZAJE MATEMATICO

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRIA EN PSICOLOGIA
PRESENTA:
MIGUEL ANGEL PARRA ALVAREZ

DIRECTOR DEL REPORTE: DRA. ROSA DEL CARMEN FLORES MACIAS
COMITE TUTORIAL: MTRA. HILDA PAREDES DAVILA
DRA. GLORIA SILVIA MACOTELA FLORES
DRA. LIZBETH OBDULIA VEGA PEREZ
DR. JAVIER AGUILAR VILLALOBOS
MTRA. ROCIO SORIANO TRUJANO
MTRA. AURORA GONZALEZ GRANADOS

MEXICO, D. F. 2004

Universidad Nacional
Autónoma de México
UNAM

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: MIGUEL ANGEL PARRA ALVAREZ
FECHA: 09-FEB-2004
FIRMA:

Agradecimientos:

El mundo es ancho y se mueve sin cesar
Un día ya no nos veremos más
Pero a pesar de eso no podremos olvidar
Estos momentos de sinceridad.
- Martín Valverde-

A mis padres
Por la libertad que me dieron
para elegir mi propio camino
con mis propios recursos.

A Gloria
Por tu compañía y tu sabia sentencia
"Valdría la pena aunque sólo durara un día."

A mis compañeras:
Adriana, Grace, Maricheto.
Maye y Yunuén.
Dicen que el destino es un niño que juega a tirar los dados.
Quién sabe en que extraña combinación cayeron
para que tuviera la fortuna de conocerlas a cada una de ustedes.
Gracias por la aventura de formar este equipo.

A mis otras compañeras
Lore e Irma
Gracias por permitirme reflejarme en su espejo.

Especialmente a
la Doctora Rosa del Carmen.
Rosy: Gracias por tu apoyo,
tiempo, dedicación y disposición.

Y a todas las personas
que me apoyaron directa o indirectamente
para alcanzar esta meta.. mil gracias.

Miguel Ángel Parra Álvarez.

Índice

Introducción

Desde 1999, año en que comenzó el Programa Alcanzando el Éxito en Secundaria (PAES), los tutores han elaborado una serie de manuales con el fin de satisfacer necesidades dentro de éste. Hasta el momento, se han desarrollado temas como el desarrollo de la disciplina en el trabajo de tutoría, la enseñanza estratégica en la comprensión lectora, estrategias en la elaboración de resúmenes y un programa de asesorías telefónicas para padres. El tema de las matemáticas, aún no ha sido abordado en un manual de aplicación. Tal es la necesidad que pretende cubrir el presente trabajo, además, dar una respuesta a la necesidad del plan de programas de estudio actual en enfocar la enseñanza en la resolución de problemas con el fin de desarrollar el pensamiento matemático de los alumnos.

Este trabajo, se presenta como un manual anecdótico, que establece una estrecha relación entre la teoría desarrollada por expertos en la enseñanza de las matemáticas, así como sus sugerencias, y la narración anecdótica de la experiencia de crear una comunidad de aprendizaje. De esta manera, los objetivos del manual anecdótico son:

- Describir los pasos dados en la experiencia de crear una comunidad de aprendizaje matemático.
- Describir detalladamente el papel del tutor a lo largo de las sesiones y con ello, analizar sus estrategias para apoyar a los alumnos con problemas de aprendizaje, en la resolución de problemas, con el propósito de que adquieran estrategias de solución y desarrollen su pensamiento matemático.

La actividad principal dentro de la comunidad de aprendizaje, es la resolución de problemas con fracciones con el fin de que los alumnos adquieran estrategias para solucionarlos.

Este trabajo se divide en dos secciones: una sección teórica, titulada "Conozcamos la teoría" y una sección práctica llamada "Practiquemos la teoría." En la sección teórica se expone las propuestas que especialistas e investigadores han encontrado al respecto de los siguientes temas: Alumnos con problemas de aprendizaje, comunidad de aprendizaje, la instrucción, resolución de problemas y las fracciones.

Tomando como base lo expuesto en la sección teórica, en la sección práctica se describe la forma en que se encaminó el proyecto, que se denominó comunidad **π**. Ésta última sección se divide en cuatro temas principales:

1) La instrucción. Donde se describe el análisis de las diferentes fases de la instrucción: obertura, cuerpo y cierre.
2) El modelo de la llave dentro de la comunidad de aprendizaje. En este apartado se describen las características que la instrucción debe desarrollar para generar el mejor aprendizaje de las matemáticas.
3) La selección de problemas adecuados. En esta sección se dan ejemplos de la valoración del conocimiento y estrategias que los alumnos utilizan en la resolución de problemas matemáticos. También se dan pautas al tutor para poder analizar los problemas que va a presentar durante las sesiones y se describen los conocimientos que los alumnos deben desplegar en ellos.
4) Análisis de la enseñanza en contexto. Aquí se proporcionan bases para que los maestros analicen su propia instrucción y lo que logran con ella.

El manual anecdótico no pretende ser una receta o una guía inflexible. Por el contrario, se presenta como una propuesta para ser enriquecida con el conocimiento, habilidad y creatividad de maestros, tutores, investigadores y todos aquellos interesados en mejorar la educación en México.

1. Conozcamos la teoría

Un hombre va al saber como a la guerra:
bien despierto, con miedo, con respeto
y con absoluta confianza.
Ir en cualquier otra forma
al saber o a la guerra es un error
y quien lo cometa
vivirá para lamentar sus pasos.

-Las enseñanzas de Don Juan-

En esta sección abordaremos los aspectos teóricos que sustentan el manual anecdótico. La experiencia se llevó a cabo dentro del Programa Alcanzando el Éxito en Secundaria (PAES). Comenzaremos primeramente por hacer un recorrido sobre la problemática actual de las matemáticas en México, en seguida expondremos brevemente los aspectos generales del PAES. Continuaremos con la descripción de los alumnos con problemas de aprendizaje. Después entraremos de lleno a la comunidad de aprendizaje y los elementos que debemos tomar en cuenta: la instrucción, la resolución de problemas matemáticos y, finalmente, las fracciones.

La problemática de las matemáticas en México

Las matemáticas han formado parte de la cotidianeidad a lo largo de nuestra vida; los números se han hecho presentes de manera cotidiana en hechos tan simples como mencionar la edad, fecha de nacimiento, estatura o peso, en las operaciones realizadas diariamente al comprar algún producto o en el manejo de tiempo. De manera formal las matemáticas se estudian desde el principio de la educación básica; tan sólo al terminar la primaria, ya se ha estudiado seis años de matemáticas, mientras que al término de la secundaria se han cursado nueve. Si se toma en cuenta que un alumno egresa de secundaria a los 15 ó 16 años, entonces poco más de la mitad de su vida ha estudiado matemáticas formales. Pero ¿ de qué calidad son los conocimientos adquiridos durante esta etapa?

Desafortunadamente, en México los resultados no son alentadores. Diferentes estudios han revelado el bajo aprovechamiento en la educación básica. A continuación se muestran algunos resultados reportados que abarcan el nivel primaria, otros el nivel secundaria y otros más el nivel de jóvenes egresados de secundaria y adultos, incluidos estudiantes universitarios.

En 1983 la Delegación Regional de la Secretaría de Educación Pública (SEP) y la Universidad de Aguascalientes (citado en Ornelas, 1995) aplicaron un examen de conocimientos a alumnos de primaria, encontrando un índice de reprobación[1] de entre 66.4% y 84.1% dependiendo del grado escolar.

En 1990 Guevara Niebla (1991) realizó una investigación entre alumnos de primaria y secundaria, donde el promedio nacional de calificaciones del examen aplicado a alumnos de primaria en el área de matemáticas fue de 4.39; y el porcentaje de aprobados fue de 15.3%. Mientras que en nivel secundaria el promedio fue de 3.47, con un nivel de aprobación del 7% de los alumnos. En éste nivel los estudiantes manejaron con facilidad las cuatro operaciones básicas, sin embargo presentaron problemas en:

- Resolver problemas de fracciones.
- Resolver problemas de álgebra, geometría y estadística.
- Utilización adecuada de signos diferenciales.
- Realización de operaciones con conjuntos.

En secundaria se notó una mejoría, con respecto a alumnos de primaria, en las operaciones básicas para resolver problemas y en la ubicación de coordenadas.

---

[1] Quienes no estuvieron de acuerdo con esta apreciación argumentaron que 1) los instrumentos carecian de validez y confiabilidad, 2) los alumnos no estaban acostumbrados a realizar exámenes estandarizados, y 3) el currículo estaba por encima de las capacidades de los alumnos.

Durante el periodo escolar 1991-1992, Sylvia Schmelkes (citada en Ornelas 1995), realizó en Puebla, una investigación con alumnos de cuarto y sexto de primaria. El índice de reprobación en comunicación (interpretación de imágenes, comprensión y expresión escrita) fue de entre 50% y 66% respectivamente; mientras que en matemáticas fue entre 73% y 77%.

En 1995[2] se llevó a cabo una evaluación a nivel mundial por parte de la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (IEA por sus siglas en inglés). Los resultados del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias colocó a México en los últimos lugares con más de 100 puntos por debajo de la media mundial (Melgar, 2001).

Por ejemplo, en primero de secundaria, México quedó en último lugar en matemáticas con 375 aciertos frente a 483 de la media mundial y 604 que obtuvo Singapur el primer lugar. Mientras que en segundo año se ubicó en último lugar con una diferencia de 115 aciertos con respecto a la media mundial. Resultados semejantes se obtuvieron en los grados de primaria.

Ésta investigación concluye que los resultados de los alumnos, se extienden también al desempeño de los maestros, la calidad de los planes de estudio y libros de texto, además de las características del entorno escolar y familiar del estudiante.

Hay evidencia de más información, que aunque no fue recabada con alumnos de secundaria, implica el empleo de conocimientos matemáticos de nivel básico. En 1998, Antonio Chalini (citado por González, 2001) realizó un investigación sobre habilidades matemáticas con alumnos de recién ingreso a planteles del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH). En el tema de solución de problemas, encontró que el 74% de los alumnos estudiados, mostraron habilidades escasamente

---

[2] Aunque la evaluación se llevó a cabo en 1995, durante el sexenio del Presidente Ernesto Zedillo, los resultados permanecieron ocultos durante seis años, y se dieron a conocer en noviembre de 2001 por el periódico Reforma (Melgar, 2001).

desarrolladas o nulas; el 23% mostró habilidades regularmente desarrolladas y solamente el 3% presentó habilidades desarrolladas. Mientras que en la solución de ecuaciones el 63% tenía poca o nula destreza; en operaciones aritméticas, casi el 66% presentaba poca o nula destreza y en las interpretaciones algebraicas el 65% presentaba poca o habilidad nula. Cabe destacar que los estudiantes consideraron que sus conocimientos matemáticos eran buenos.

En 1998, Alatorre, De Bengoechea y Mendiola (2002a y 2002b), hicieron un estudio entre adultos de la ciudad de México (con y sin escolaridad), sobre sus conocimientos matemáticos de nivel primaria principalmente y algunos de secundaria. El objetivo de la investigación fue conocer los aspectos temáticos y sociales del efecto remanente de las matemáticas cursadas a nivel básico, es decir, los conocimientos que permanecen a través del tiempo. En sus hallazgos se muestran resultados por lo demás interesantes de los cuales sólo se mencionan algunos:

- Existen conocimientos matemáticos que se adquieren fuera del currículo formal, esto permitió a las personas sin escolaridad responder acertadamente a algunos problemas planteados en la investigación.
- Los contenidos que se manejan mejor son las operaciones básicas con números naturales y fracciones sencillas, además de la suma de decimales. Mientras que los contenidos más difíciles son la percepción de mitades en un dibujo, equivalencia de medidas de capacidad (convertir metros a metros cúbicos), las operaciones de resta y división con centésimas y, finalmente, el cálculo con el teorema de Pitágoras.
- No encontraron diferencias sustanciales en los resultados de los cuestionarios aplicados a personas que cursaron la primaria durante los planes de estudio de 1944 a 1972; resultados similares se encontraron a nivel secundaria. A los estudiantes del plan de 1993 no fue posible evaluarlos porque aun eran menores de edad. De lo anterior, se desprende

la hipótesis de las investigadoras de que "los cambios curriculares en sí mismos no resuelven el problema de la enseñanza matemática" (p. 133).

En el año 2000, la UNESCO realizó una evaluación a nivel primaria (Herrera, 2001) entre 11 países de Latino América, donde ubicó a los estudiantes mexicanos en quinto lugar -ya con el nuevo programa de estudios de 1993-, detrás de países como Cuba, Argentina, Chile y Brasil. El desempeño más bajo se observó en los temas de numeración y habilidades para resolver problemas. El desempeño medio se encontró en geometría y el alto desempeño en operaciones con números naturales y significativamente alto en fracciones comunes.

Tomando en cuenta el contenido curricular que se consideró en las investigaciones anteriores puede verse que los estudiantes de secundaria presentan dificultades en:

1. Operaciones de resta y división con centésimas.
2. Resolución de problemas con fracciones.
3. Solución de equivalencias de medidas de capacidad.
4. Resolución de problemas de álgebra, geometría y estadística.
5. Realización de operaciones de conjuntos[3].
6. Presentan escasa habilidad en la solución de problemas, solución de ecuaciones, operaciones aritméticas e interpretaciones algebraicas.

Si tomamos en cuenta que en el currículo de matemáticas de 1993 de nivel secundaria, los tres grados comparten los temas de aritmética, geometría, estadística –que se ha denominado como presentación y tratamiento de la información- y probabilidad, y se hace una comparación con los puntos 1, 2 y 4 anteriormente mencionados, la conclusión sería alarmante: los alumnos de secundaria tienen problemas con todo el currículo dominando solamente las

---

[3] Éste tema ha sido eliminado de los planes y programas de 1993 de educación básica de nivel secundaria.

operaciones básicas con números naturales. Sin embargo, el problema no termina en el nivel básico, sino que se extiende a nivel bachillerato y universitario.

Por ejemplo, De la Peña y Barot (2002) hicieron una investigación en el DF en 1998, sobre la "cultura científica" del mexicano, la cual abarcaba temas tales como: ciencia, matemáticas y creencias en: la ciencia, la seudociencia y creencias religiosas y ocultistas. Aplicaron un instrumento de cinco preguntas de cada tema a adultos en las plazas públicas y en Ciudad Universitaria. Las preguntas, según los investigadores, podrían ser contestadas con los conocimientos que tiene un niño que termina la primaria. La calificación promedio en conocimientos matemáticos y científicos fue de 5.01 en adultos entrevistados en plazas públicas y de 6.68 entre estudiantes universitarios. En matemáticas específicamente el 71% de los adultos en plazas públicas y el 45.5% en Ciudad Universitaria no pudieron contestar correctamente tres de las cinco preguntas. Cabe destacar que 6 de cada 10 personas se negaron a participar en la investigación al enterarse que se trataba de medir sus conocimientos matemáticos.

En una investigación sobre la representación social de las matemáticas en alumnos de nuevo ingreso del área de ciencias sociales y humanidades en la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Iztapalapa (UAM-I), Rodríguez, Olvera y Aquino (2002) encontraron cuatro tendencias básicas en los alumnos: 1) Calificación: los alumnos califican a las matemáticas como abstractas, frías y metódicas. 2) Efectos: las matemáticas les producen los efectos de aburrimiento, desinterés y la sensación de pérdida de tiempo. 3) Naturaleza: las matemáticas son por naturaleza difíciles, laboriosas y confusas. 4) Requerimientos: para realizar matemáticas se requiere concentración, esfuerzo y constancia.

Esta investigación fue motivada por el índice de reprobación que se presenta durante el primer curso de matemáticas. El índice de reprobación se encuentra entre el 60 y 70 por ciento. Cuando los alumnos consiguen acreditar la materia lo hacen después de preparar un examen extraordinario o por recursar la materia.

Los autores afirman que, el hecho de aprobar la materia no convierte a los alumnos de ciencias sociales y humanidades en aficionados a las matemáticas, ni desaparecen sus creencias en torno a su apreciación o utilidad.

Para combatir el rezago educativo a nivel secundaria, la Secretaría de Educación Pública (SEP), realizó cambios en los planes y programas en 1993.

Planes y programas de 1993

En 1993 la Secretaría de Educación Pública (SEP) echó a andar el Plan de Programas de Estudio de la Educación Secundaria[4] (SEP, 1993) cuyos propósitos esenciales son:

1. En el ámbito académico: elevar la calidad de la formación de los estudiantes que han terminado su educación primaria con el fin de continuar posteriormente con estudios de nivel medio superior.
2. En el ámbito laboral: facilitar la incorporación del alumno al mundo del trabajo.
3. En el ámbito social: coadyuvar a las demandas prácticas de la vida cotidiana estimulando la participación activa y reflexiva de los alumnos en organizaciones sociales y en la vida política y cultural de la nación.

Específicamente, el plan de estudios en la materia de matemáticas ha establecido como prioridad ampliar y consolidar en los alumnos sus conocimientos, habilidades y capacidades matemáticas para aplicarlas en el planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana, además de que entiendan, organicen y comuniquen la información cuantitativa.

---

[4] Según especialistas aún no arroja los resultados esperados debido principalmente a la falta de capacitación a los maestros, las desventajas socioeconómicas de los alumnos y a la escasa cultura matemática en el pais pero aún así, es muy pronto para descalificarlo (Herrera, 2001)

De esta manera, se pretende que la enseñanza de las matemáticas deje de ser mera transmisión de conocimientos fijos y acabados y en su lugar, se estimule en el alumno la curiosidad en la materia, con el fin de utilizar las matemáticas para resolver problemas no sólo con los procedimientos aprendidos en la escuela, sino enriqueciéndolos con soluciones que sean el producto de su propio descubrimiento, curiosidad e imaginación creativa (SEP, 1995).

Este enfoque en los Planes y Programas de la materia de matemáticas y su énfasis en priorizar la resolución de problemas de la vida cotidiana, comparte la visión de otros países, como por ejemplo las reformas educativas en los Estados Unidos, especialmente en la reforma más significante de ese país en los ochentas, cuando se instituye el Consejo Nacional para la Enseñanza de las Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés), donde se inicia el cambio en la preparación de programas de maestros y en el currículo de matemáticas así como en la instrucción en la escuela pública (Rivera, 1997). El motivo fue un suceso científico y tecnológico: en 1957 el lanzamiento del primer satélite Sputnik por parte de los soviéticos hace que los Estados Unidos sintieran su rezago científico cuyo origen podía ser el atraso educativo general (De la Peña y Barot, 2002; Bryant y Rivera, 1997; y Rivera, 1997).

Con relación a la propuesta del NCTM, Rivera (1997) hace las siguientes observaciones. La meta de la reforma es habilitar a los estudiantes norteamericanos a desarrollar una educación matemática fuerte. Busca que entiendan el proceso matemático para comunicarse con términos matemáticos, no memorizados, y se enfatiza el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas, y la importancia de que los estudiantes adquieran fortalezas en matemáticas (Miller y Mercer, 1997; Montague, 1997; Goldman, Hesselbring y el grupo de cognición y tecnología de Vanderbilt, 1997), con el fin de que en el futuro los estudiantes norteamericanos estén a la cabeza a nivel mundial en el desempeño de las matemáticas y la ciencia (Patton, Cronin, Basset y Koppel 1997).

Las normas del NCTM han sido criticadas por sus desventajas (Rivera, 1997), por sus fallas en programas instruccionales (Patton, Cronin, Basset y Koppel 1997) y sobre todo porque a pesar de que las normas abarcan a "todos los estudiantes" hay quienes afirman que no se toma en cuenta o hay pocas modificaciones en las normas para el trabajo con alumnos con problemas de aprendizaje (Patton, Cronin, Basset y Koppel 1997; Miller y Mercer, 1997). Mientras que para otros, la afirmación si incluye a éstos alumnos (Thornton, Langrall y Jones, 1997).

No es el propósito de este trabajo hacer un análisis de las normas del NCTM en Estados Unidos, sin embargo, es útil conocerlas debido a la gran semejanza que tienen con el Plan de Programas de Estudio 1993 de México. Además, de que a partir de tales normas, se ha impulsado en los Estados Unidos la investigación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, cuyos resultados pueden ser valiosos si se adaptan a la cultura mexicana para elevar el aprovechamiento en la materia.

Con base en lo expuesto anteriormente, es notoria la necesidad de realizar intervenciones para superar el rezago educativo existente en el país, ya no es suficiente sólo saber el nivel de conocimientos predominantes en los alumnos. Ya se sabe que el nivel es bajo la necesidad prioritaria es, ahora, retomar los resultados arrojados por las investigaciones y concretizarlos en el diseño de diferentes formas de intervención en beneficio de los alumnos.

El PAES se presenta como una propuesta de intervención para superar el rezago educativo. Su objetivo es apoyar a los alumnos con problemas de aprendizaje a terminar su educación secundaria, dotándolos de oportunidades para desarrollar y aprender estrategias que les den elementos para enfrentar de una manera más eficaz el aprendizaje de los contenidos curriculares y la realización de actividades escolares.

Programa Alcanzando el Éxito en Secundaria (PAES)

> *Los estudiantes que aún deben lograr*
> *las competencias académicas y sociales*
> *requeridas para tener éxito en la escuela*
> *se encuentran atrapados en un hueco académico.*
> *Enfrentan la posibilidad de llegar a tener un nivel menor*
> *de educación y preparación*
> *para participar exitosamente en el siglo XXI.*
> -Hock, Schumaker y Deshler-

El PAES atiende a Alumnos con problemas de aprendizaje. Su objetivo es lograr que los alumnos, puedan terminar sus estudios de secundaria, y que se desarrollen de manera autónoma e independiente en sus estudios. Esta meta se consigue ayudándoles a reconocer sus propias fortalezas, apoyándoles en la adquisición de estrategias cognitivas y metacognitivas para enfrentar con éxito las tareas académicas y que las extiendan a la solución de problemas sociales (Flores, 2000).

En el PAES cada alumno trabaja con dos compañeros y un tutor. La función del tutor es generar un ambiente de aprendizaje motivante para que el alumno experimente éxitos y comience a mejorar su propia percepción de eficacia; el tutor también promueve la participación de los padres en las problemáticas académicas y establece un vínculo de colaboración entre la escuela y el programa.

Dentro del PAES, el alumno y el tutor trabajan con actividades escolares de diferente naturaleza. Existe la tarea académica encargada por los maestros de las diferentes materias, aquí, el alumno tiene una necesidad inmediata a cubrir, ya sea terminar su tarea, preparar un exposición o estudiar para un examen; en este caso, el papel del tutor es tomar tal actividad como punto de partida para la enseñanza y desarrollo de estrategias cognitivas y metacognitivas en el alumno.

En el caso particular de una tarea de matemáticas, le exige al tutor formas de intervención, que pueden ir desde comprender junto con el alumno la naturaleza de la actividad y su procedimiento de solución, hasta la explicación misma del contenido cuando éste no está claro para el alumno.

Cuando no hay tarea escolar, alumno y tutor proponen una actividad en el momento mismo de la sesión. Dentro del PAES siempre existe una actividad a realizar con el fin de apoyar al alumno a desarrollar estrategias. El alumno puede establecer como meta, tareas de diferente índole: lectura en voz alta, comprensión lectora, elaboración de textos, repaso de algún tema difícil elegido por él mismo. En matemáticas se puede realizar un repaso de algoritmos en donde el tutor ha detectado que el alumno ha mostrado dificultades a lo largo de las sesiones, o se propone repasar el último tema visto en clase por el alumno.

Alumnos con Problemas de Aprendizaje

> *En todos los niveles educativos nos encontramos*
> *con numerosos problemas de aprendizaje,*
> *y sabemos que son muchos los factores*
> *que pueden influir en un momento determinado,*
> *sin embargo, existe la evidencia que uno de estos factores*
> *es no saber cómo aprender;*
> *esto es que la mayoría de los estudiantes*
> *no utilizan las estrategias adecuadas*
> *para lograr un aprendizaje significativo.*
> -Irene Muria-

Como se mencionó anteriormente, el PAES atiende a alumnos con problemas de aprendizaje que son canalizados por orientadores, psicólogos y trabajadoras sociales de sus respectivas escuelas secundarias. El indicador principal para canalizar a un alumno al PAES es la cantidad de materias reprobadas durante los bimestres cursados.

Existe amplia literatura referente a las características de los alumnos con problemas de aprendizaje; en la mayoría se reportan las carencias que presentan los alumnos olvidándose de lo que sí pueden lograr. Un aspecto importante dentro del PAES es reconocer las fortalezas de los alumnos y a partir de ellas, apoyarlos en la adquisición y desarrollo de estrategias para enfrentar exitosamente sus demandas académicas.

A continuación se presentan las características generales de éstos alumnos reportados en investigaciones especializadas, para después hacer mención de las fortalezas observadas en ellos dentro de las sesiones de tutoría.

Los alumnos con problemas de aprendizaje parecen estar esforzándose en las tareas académicas pero fracasan, debido tal vez a algún tipo de dificultad cognitiva (Ginsburg, 1997). Son considerados como alumnos de "ocho horas de problemas de aprendizaje" porque sólo presentan problemas dentro de la escuela, mientras que fuera de ella se desarrollan bien (Snart, Brenton-Headen y Mulcally, 1995).

Algunos de ellos son percibidos por sus padres y maestros como físicamente sanos e inteligentes, y su desinterés en las tareas académicas trata de explicado como problemas emocionales, problemas de conducta o falta de motivación, pero no se le intenta explicar como problemas pedagógicos (Stevens y Shenker, 1992).

Diversos autores (Flores, 2000; Flores, 1999; Miller y Mercer, 1997; Rivera, 1997; Ginsburg, 1997, Stevens y Shenker, 1992) han descrito las características de los alumnos con problemas de aprendizaje básicamente en los dominios cognitivo, metacognitivo, socio-emocional y motivacional.

Características cognitivas y metacognitivas.

Los alumnos responden impulsivamente a las demandas de la tarea sin identificar ni seleccionar las estrategias adecuadas. Las dificultades cognitivas y metacognitivas que presentan son sólo parciales, pues hacen el intento de utilizar estrategias cognitivas que, no obstante, pueden no ser suficientes para resolver correctamente alguna tarea o problema matemático. En el uso de la estrategia elegida, no son eficientes para planificarla, monitorearla o evaluarla; lo que los conduce a responder rápidamente y con varios errores.

Los alumnos con problemas de aprendizaje presentan, además, problemas en la organización y coordinación de actividades cognoscitivas simultáneas y secuenciales (Flores, 2001) y un déficit del procesamiento de información que se refleja en problemas tales como déficit de atención, problemas de memorización y dificultades visuales-espaciales (Miller y Mercer, 1997).

Características socio-emocionales y motivacionales.

El dominio afectivo es reconocido como una variable importante en la ejecución de tareas. Los alumnos con problemas de aprendizaje, pueden presentar características tales como:

a) Desesperanza aprendida: Una larga historia de fracaso y frustraciones frecuentemente resultan en baja autoestima y pasividad emocional en el aprendizaje. De hecho los alumnos estarán seguros de que el éxito escolar no es posible para ellos.
b) Percepción pobre de auto-eficacia: Los alumnos no creen que sus esfuerzos puedan tener resultados positivos, motivo por el cual no están dispuestos a enfrentar tareas o problemas matemáticos que perciban como difíciles.
c) Percepción pobre de auto-concepto: Los alumnos se perciben a sí mismos y a sus conocimientos y habilidades de forma devaluada.
d) Atribuciones externas: Atribuyen sus éxitos y fracasos a factores externos como el maestro, la dificultad de la tarea, o la suerte.
e) Algunos reaccionan emotivamente en forma negativa, evitan la tarea y en lo concerniente a las matemáticas, desarrollan ansiedad matemática, cuyos resultados comúnmente son: pensamiento confuso, desorganización, evitación y fobia a las matemáticas.

El aprendizaje de las matemáticas en alumnos con problemas de aprendizaje

En un mayor acercamiento a la materia de matemáticas, las investigaciones han documentado deficiencias específicas en alumnos con problemas de aprendizaje, principalmente en las áreas de cálculo y solución de problemas. Los problemas en matemáticas son evidentes a lo largo de los años y su ejecución tiene su mayor manifestación en 5° ó 6° grado. Esto es, los problemas se presentan en la primaria, y continúan a través de la secundaria hasta la edad adulta (Rivera, 1997). El conocimiento matemático de los alumnos con problemas de aprendizaje tiende a progresar aproximadamente un año por cada dos de asistir a la escuela (Miller y Mercer, 1997), de esta manera, un alumno con problemas de aprendizaje, que curse actualmente segundo de secundaria, tendría consolidado el conocimiento matemático que debería tener un alumno de cuarto grado de primaria.

En principio, las descripciones de los alumnos con problemas de aprendizaje se presentan con alto grado de pesimismo. Pareciera que no son capaces de realizar bien alguna tarea y cuando se trabaja con ellos es como si se comenzara desde cero. Sin embargo esto no es así, dentro del PAES, se da valor a lo que el alumno sí sabe y es capaz de hacer, y con base en ello, se le apoya en la adquisición de estrategias que lo lleven a realizar con éxito las demandas académicas.

Algunas de las fortalezas que poseen los alumnos que asisten al PAES son, entre otras, las siguientes:

1. Poseen voluntad de asistir al programa, que se lleva a cabo en un horario extra escolar, y trabajan con aquellas tareas que en otros contextos evitarían.
2. Son capaces de proponerse metas académicas y esforzarse por alcanzarlas.
3. Una vez que entienden la tarea, son capaces de involucrarse en ella evitando las distracciones.
4. Aplican las estrategias practicadas en sesiones de tutoría anteriores para realizar tareas semejantes, por ejemplo, cuando solucionan un cuestionario.
5. Son capaces de explicar tareas, procedimientos, conocimientos y estrategias a otros alumnos aún con sus limitantes conceptuales.

Cierto es que no todos los alumnos son iguales y por lo tanto poseen en mayor o menor grado las fortalezas mencionadas anteriormente. Éstas son pues, las características de la población que asiste al PAES y por lo tanto quienes participan en la comunidad de aprendizaje matemático.

Comunidad de aprendizaje

> *Lo primero que la educación transmite*
> *a cada uno de los seres pensantes*
> *es que no somos únicos,*
> *que nuestra condición implica el intercambio*
> *significativo con otros parientes simbólicos...*
> *Lo segundo... que aparecemos en un mundo*
> *donde ya está vigente la huella humana de mil modos...*
> *Para el ser humano, éstos son los dos descubrimientos*
> *originarios que le abren su vida propia: la sociedad y el tiempo.*
> -Fernando Savater-

Las matemáticas son un producto social que permite compartir significados a los miembros inmersos en una comunidad, es por medio del intercambio social que se aprenden las matemáticas, así, su conocimiento permite la socialización de las personas, de hecho para Resnick (1988, citado en Schoenfeld, 1992) la educación matemática es un proceso de socialización más que un proceso instruccional, entendido éste como mera transmisión de conocimientos que permanecen inertes.

De tal manera que aprender matemáticas en un contexto social donde se experimenta su utilidad, resulta más significativo porque sirve de vehículo de comunicación y entendimiento entre los miembros de una sociedad.

Por esta razón, es congruente pensar que la enseñanza matemática debe dejar de ser vista como mera experiencia escolar pasiva -en donde, hacer matemáticas significa seguir reglas establecidas por el maestro, el conocimiento matemático significa solamente aplicar correctamente los procedimientos y el maestro es el poseedor de la verdad matemática (Lampert, 1990; citado en Schoenfeld, 1992)- para convertirse en un acto social y colaborativo donde los estudiantes reflexionen sobre los conceptos, problemas y estrategias de solución durante el aprendizaje de las matemáticas (Schoenfeld, 1992).

A este mismo respecto, Santos (1997) menciona que las matemáticas vistas desde un punto de vista dinámico conducen a elaborar un ambiente de aprendizaje que tienda hacia la aceptación de un salón de clases como una comunidad matemática, donde los alumnos desarrollen su razonamiento matemático y no sólo memoricen fórmulas y procedimientos ni se dediquen a dar solamente respuestas mecánicas, sino por el contrario, participen activamente en actividades matemáticas como entender una idea matemática o la solución de problemas, con el fin de que exploren diversas soluciones, hagan conjeturas, utilicen representaciones y comuniquen resultados tanto en forma oral como escrita.

Este ambiente de aprendizaje puede impulsarse por medio de una comunidad de aprendizaje. Ser miembro de una comunidad matemática es un aspecto central para tener conocimiento matemático, pues las personas desarrollan mayor comprensión de cualquier tema participando dentro de una comunidad donde el tema es practicado (Schoenfeld, 1992), de hecho las matemáticas se aprenden por un proceso de comunicación (Santos, 2003).

Kearney (2002), en una revisión del concepto de comunidad de aprendizaje, ha encontrado su derivación de diferentes autores. El concepto por ejemplo, se retoma de la comunidad de práctica de Ettiene Wegner, quien afirma que desde el principio de la historia, el hombre ha formado comunidades donde se acumula el aprendizaje que se manifiesta en las prácticas sociales. La comunidad de aprendizaje surge también de la concepción de Peter Senge de las organizaciones que aprenden, asegura que el aprendizaje es un proceso permanente. En relación directa con el ámbito educativo, Kearney reconoce las aportaciones de la pedagogía de Paulo Freire donde los alumnos se convierten en participantes activos y responsables de su propio aprendizaje dentro de una comunidad de aprendizaje. También retoma el concepto de Zona de Desarrollo Próximo de Vigotsky y el andamiaje de Bruner.

En una comunidad de aprendizaje, los participantes pueden ensayar su participación como miembros activos mientras tanto adquieren conocimientos. De hecho, una comunidad de aprendizaje puede ser entendida como "una serie de 'zonas de desarrollo próximo', una especie de andamio que permite que la comunidad de aprendizaje se vaya asemejando cada vez más a una comunidad de práctica" (Kearney, 2002; p. 6)

En un sentido amplio, una comunidad de aprendizaje es una comunidad humana que se compromete, se involucra y se construye dentro de un proyecto educativo y cultural propio, con el objetivo de educarse a sí misma, y a todos sus actores: niños, jóvenes y adultos, en el esfuerzo cooperativo y solidario, basado en un diagnóstico no sólo de sus carencias, sino sobre todo, de sus fortalezas para superar sus debilidades (Torres, 1999).

Contextualizando la comunidad de aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas, Santos (2003) menciona que las matemáticas no se constituyen solamente de actividades que el estudiante aprende dentro del salón de clase. Sino que las actividades matemáticas deben ser comunidades donde la gente tome acuerdos, se comporte de cierta forma y donde exista un gran diálogo para construir un argumento para sustentar o refutar alguna idea o resultado.

Básicamente las características de una comunidad de aprendizaje son las siguientes
(Schoenfeld, 1992; Santos, 1997; Torres, 1999; Kearney, 2002; y Macías, 2003):

- No es sólo un grupo, es un equipo. La responsabilidad es compartida, todos los miembros de la comunidad son participes directos en el proceso de aprendizaje. El intercambio de información, reflexión, respeto y recursos educativos, puede potenciar los esfuerzos individuales. Se trata entonces de un proceso activo y colaborativo, que evita la pasividad de los alumnos.
- Involucra a niños, jóvenes y adultos valorando el aprendizaje intergeneracional y entre pares. De esta manera el profesor es un

facilitador del proceso de aprendizaje personal y grupal, quien no sólo enseña, también aprende como los demás miembros de la comunidad.

- El aprendizaje dentro de la comunidad se entiende como un proceso donde el alumno se aproxima paulatinamente al comportamiento, vocabulario y conocimiento de una determinada comunidad de práctica.
- No tiene una determinación específica, "puede estar al margen de la institución educativa" (Macías, 2003; p. 4) y puede haber más de un maestro.
- Se reconoce y respeta la diferencia entre los miembros. No todos sus miembros trabajan igual ni tampoco aprenden igual.

Para alcanzar los propósitos de una comunidad de aprendizaje, es necesario no sólo su formación, sino además la instrucción que se da dentro de la misma, a este respecto Schoenfeld (1992) menciona que las metas de una instrucción matemática deben:

1. Proveer a los alumnos con un sentido de disciplina –un sentido de su alcance, poder, usos e historia. El maestro debe darles un sentido de lo que son las matemáticas y cómo son. Los alumnos deben valorar las matemáticas y sentir confianza en su habilidad para hacerlas.

2. Desarrollar el entendimiento de los estudiantes de conceptos importantes más que en meras habilidades mecánicas.

3. Proveer a los estudiantes la oportunidad de explorar un amplio rango de problemas y situaciones problemas, yendo de los ejercicios a los problemas y situaciones de exploración.

4. Desarrollar lo que podría ser llamado "el punto de vista matemático". Esto ayudaría a los estudiantes a desarrollar sus habilidades analíticas y la habilidad de razonar sus argumentos.

5. Ayudar a los estudiantes a desarrollar la precisión en las presentaciones escritas y orales.

6. Ayudar a los estudiantes a desarrollar la habilidad para leer y usar textos, además de otros materiales matemáticos.

La comunidad de aprendizaje en la cual los alumnos aprenden matemáticas debe reflejar y apoyar éstas formas de pensamiento. Esto es, los salones de clases debe ser comunidades en las cuales el sentido matemático, de lo que se espera que desarrollen los estudiantes, sea practicado.

Impulsar una comunidad de aprendizaje dentro de las sesiones de tutoría en el PAES es de gran utilidad, porque los alumnos pueden desarrollar su pensamiento matemático ensayando diversas soluciones a los problemas propuestos sin sentirse presionados por dar sólo respuestas correctas o por llevar a cabo solamente los procedimientos de solución propuesto por un maestro. La comunidad de aprendizaje es un espacio útil para animar a los alumnos a experimentar posibles soluciones y procedimientos sin ser desvalorizados sus intentos, sino por el contrario, tutor y compañeros mismos proveen retroalimentación positiva en un espacio de respeto mutuo.

En el intento de dar solución a los problemas propuestos, los alumnos recuerdan y ponen en práctica conocimientos previos tales como procedimientos de operaciones algorítmicas aprendidos en la escuela; también hacen uso de sus conocimientos cotidianos. De esta manera, los procedimientos que se tienen presentes son practicados y consolidados, posteriormente pueden hacer uso de ellos en el salón de clases pues a fin de cuentas, ahí se les exige saber bien tales procedimientos.

Debido al propio tiempo, espacio y objetivo de la comunidad de aprendizaje, es posible, para el tutor, establecer un intercambio con los alumnos de forma tal que, a partir del proceso de solución seguido por los alumnos, puede adecuar su ayuda a las necesidades especiales de cada alumno.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente y a manera de resumen se procederá a dar el concepto de comunidad de aprendizaje utilizado en este trabajo:

Una comunidad de aprendizaje matemático se construye socialmente, tiene su propio espacio, lugar y tiempo, se trata, entonces, de un espacio diferenciado de cualquier otro donde los alumnos se sienten parte de ella. De esta manera, sus miembros (maestro y estudiantes) participan activamente en una constante interacción e intercambio de ideas alrededor de actividades matemáticas que les permite reflexionar sobre conceptos, problemas y estrategias de solución durante el aprendizaje de las matemáticas.

Dentro de la comunidad de aprendizaje existen elementos prácticos que deben ser tomados en cuenta. En primer lugar, la instrucción que se da dentro de ella, en segundo lugar, el fin de la comunidad, -desarrollar en los alumnos estrategias para resolver problemas matemáticos- y finalmente, el tópico en particular en que giran los problemas: en este caso se trata de las fracciones. Se trabajará con problemas matemáticos porque permiten a los alumnos desplegar una serie de estrategias que los induce a desarrollar su pensamiento matemático para encontrar una solución. Por otro lado se retoman las fracciones porque es un tema que a pesar de ser abordado desde la primaria, no se domina aún en la secundaria, además de que algunas investigaciones reportan la carencia de conocimientos en este tema.

En los siguientes apartados se abarcan estos tres elementos: la instrucción, resolución de problemas y fracciones.

La instrucción

"El niño no es una botella que hay que llenar;
sino un fuego que es preciso encender."
-Montaigne-

Como se mencionó anteriormente, en una comunidad de aprendizaje, el tutor debe diseñar una instrucción que tienda a: 1) apoyar a los alumnos para que desarrollen confianza en su propia habilidad para hacer matemáticas y valorarlas; 2) apoyar a los alumnos a entender los conceptos y procedimientos algorítmicos importantes para que puedan utilizarlos posteriormente en sus argumentaciones y comunicación de resultados; 3) proveer a los estudiantes de oportunidades para explorar diversas soluciones en interacción con sus compañeros y; 4) diseñar situaciones en los que conceptos y procedimientos sean útiles.

Jones, Wilson y Bhujwani (1997) afirman que una instrucción de gran calidad puede hacer que los estudiantes adquieran habilidades en menor tiempo y transfieran sus conocimientos a otras áreas, que aquellos alumnos que reciben instrucción de baja calidad. La calidad de la instrucción depende de dos elementos del diseño del currículo: organización del contenido y la presentación del contenido. Los alumnos con problemas de aprendizaje probablemente no adquieran las competencias adecuadas a menos que el contenido de la instrucción sea elegido y organizado cuidadosamente.

En este apartado se abarcarán algunos de los diferentes tipos de instrucción que han sido investigados en la enseñanza de las matemáticas. Se presentan primeramente lo que Jones et. al. (1997) ha denominado enfoques instruccionales; se describen después, los principios básicos de la instrucción formulados por Carnine (1997), y dos modelos de instrucción: el modelo de la llave (Bottge, 2001) y finalmente, el modelo de enseñanza en contexto (Schoenfeld, 1998) cuya propuesta es analizar detalladamente las acciones del profesor con el fin de mejorar su instrucción.

Enfoques instruccionales

Jones et. al. (1997), en una revisión sobre diversas investigaciones que se han hecho sobre la instrucción, dirigida a alumnos con problemas de aprendizaje, diferencian tres enfoques instruccionales: la instrucción directa, la instrucción mediada por un compañero y la instrucción estratégica. Éstos se diferencian por el rol que juega tanto el maestro como los alumnos.

Instrucción directa.

En la instrucción directa el maestro es el líder, la instrucción es sistemática y la práctica es estructurada. El maestro monitorea el logro de los estudiantes para después darles reforzamiento y retroalimentación correctiva. Dentro de la instrucción directa se presenta una relación interactiva entre el maestro y las respuestas de los estudiantes.

La estructura de la instrucción del maestro líder se divide en: obertura, cuerpo y cierre. En la obertura el maestro pretende: ganar la atención de los estudiantes, revisar los logros pertinentes de la instrucción previa, y establecer las metas de la lección.

En el cuerpo de la instrucción se pretende: modelar la ejecución de la habilidad enseñada, incitar al estudiante a ejecutar la habilidad junto con el profesor, verificar la ejecución de la habilidad del alumno de manera independiente.

Finalmente en el cierre se lleva a cabo: la revisión de la realización de la lección, revisión de las metas para la siguiente lección, y asignar trabajo independiente.

Instrucción mediada por un compañero.

La instrucción mediada por un compañero se caracteriza por el rol activo de los estudiantes, quienes se apoyan entre sí para dar solución a un problema o actividad escolar. La función del maestro es promover esta forma de trabajo entre los alumnos. Las modalidades principales que se encuentran en esta clase de instrucción son: la instrucción entre pares y aprendizaje cooperativo.

Instrucción entre pares o tutoría entre iguales: las principales características de la tutoría entre pares son las siguientes (Melero y Fernández, 1997):

- Se construye una situación de enseñanza- aprendizaje entre dos alumnos donde están presentes comportamientos de apoyo y guía. En una tutoría de este tipo se ve disminuida la ansiedad y el estrés.

- Existen relaciones asimétricas entre los miembros. Uno de ellos , el que posee mayores conocimientos y habilidades (alumno experto) sirve de guía y dirige la interacción. Éste, en su apoyo al alumno novato, desarrolla una serie de habilidades al intentar explicar al otro y esto a su vez lo conduce a alcanzar mayores logros académicos.

- Existe una meta que alcanzar.

Aprendizaje cooperativo: el aprendizaje cooperativo se lleva a cabo con más de dos alumnos, de hecho Rivera (1996) recomienda que dentro de una clase normal de matemáticas, se formen grupos de cuatro alumnos donde uno de ellos es considerado como alumno con problemas de aprendizaje.

La literatura al respecto del aprendizaje cooperativo es vasta en cuanto sustento teórico y técnicas. Este documento se limitará a abordar solamente sus elementos básicos (Johnson y colaboradores, citado en Ovejero 1990 y Rivera 1996):

1. Interdependencia positiva: Todos los miembros del grupo cooperativo dependen de todos. El aprendizaje de cada miembro es compartido por cada uno de los demás. De esta manera, el esfuerzo de uno beneficia al desempeño del grupo.

2. Responsabilidad individual: Se evalúa el dominio de cada estudiante a quien se le proporciona retroalimentación sobre su progreso por parte del maestro. Al grupo en su conjunto también se le retroalimenta dando información sobre cada miembro para que el grupo sepa a quién apoyar y en qué forma.

3. Interacción cara a cara: La interacción entre los miembros del grupo cooperativo los involucra en un ambiente de trabajo que promueve el contacto visual y social. Por medio de la interacción, se enseñan las habilidades sociales necesarias para la colaboración, como liderazgo, habilidades de comunicación, habilidades de negociación, etc.

4. El liderazgo es compartido, no existe un líder solamente.

5. Metas específicas: Las metas de los grupos de aprendizaje cooperativo básicamente son las siguientes: lograr que cada uno de sus miembros aprenda lo más posible y mantener buenas relaciones entre ellos.

6. Procesamiento de grupo: Al finalizar la tarea, cada miembro del grupo de aprendizaje cooperativo analiza su propio desempeño colaborativo así como el de su grupo.

La ventaja que presenta la instrucción mediada por un compañero es la capacidad que logran desarrolla los alumnos para mostrar sus estrategias escuchando las estrategias de otros, discutiendo diferencias entre estrategias, justificando sus pensamientos y ayudándose entre sí a entender los problemas.

Con base en la revisión de cuatro estudios, Thornton, Langrall y Jones (1997) reportan que el enfoque instruccional basado en el constructivismo social planteó que las oportunidades de los estudiantes para construir el conocimiento matemático crece de los intentos de resolver puntos de vista conflictivos en un grupo, de intentos de reconstruir y verbalizar una idea matemática o solución y, más generalmente, de intentos de alcanzar consensos con otros. Por ello, se propone que los alumnos con problemas de aprendizaje sean desafiados con problemas útiles que promuevan diversos caminos de solución para que desarrollen estrategias múltiples.

Las clases en donde los estudiantes discuten, critican, explican, y cuando es necesario, justifican sus interpretaciones y soluciones, son efectivas en el pensamiento matemático no rutinario. Los enfoques entre pares mejora los tipos de comunicación personal que son necesarios para los estudiantes porque de esta manera internalizan procesos, organizan y retienen ideas (Jones, et. al. 1997). Además se facilita el entendimiento del vocabulario y las representaciones simbólicas (Rivera, 1996).

Instrucción estratégica.

Al igual que en la instrucción directa, el maestro y el alumno están en constante interacción, la diferencia radica en los apoyos que proporciona el maestro al alumno. Durante la instrucción estratégica se pretende que los alumnos desarrollen independencia en su quehacer académico, pues no siempre habrá un maestro o compañero para apoyarlos. La meta de la instrucción estratégica es entonces, conseguir que los alumnos sean autónomos (Jones, et. al. 1997) y que adquieran estrategias para desarrollarse de forma independiente en sus clases (Hock, Schumaker y Deshler, 2001; y Hock, 2001).

Las estrategias se seleccionan con referencia a las demandas del currículo, los maestros modelan las estrategias y dirigen a los estudiantes a través de su aplicación. Se deja a los alumnos a que apliquen la estrategia, después el maestro anima a los estudiantes a verbalizar la forma en que la aplicaron con el propósito de monitorear su propio progreso. El maestro también provee a los estudiantes de muchas oportunidades para determinar cuál estrategia es la adecuada, y hacer uso de ella.

Dentro de la comunidad de aprendizaje no se desarrolla únicamente un sólo tipo de instrucción, por el contrario, pueden combinarse diversas formas instruccionales con el fin de alcanzar los objetivos mencionados al principio de ésta apartado.

Principios básicos de la instrucción

Otra perspectiva de la instrucción es proporcionada por Carnine (1997), quien ha identificado e investigado un conjunto de cinco principios del diseño instruccional efectivo para elevar la calidad de la instrucción en alumnos con problemas de aprendizaje: (1) enseñanza de grandes ideas, (2) enseñanza de estrategias sobresalientes (conspicuas), (3) uso eficiente del tiempo, (4) comunicar claramente las estrategias de una manera explícita y, (5) proveer de práctica y revisión para facilitar la retención. Éstos principios pueden ser enriquecidos con los tres apoyos empíricos propuestos por Woodward (1991) para elevar la calidad de la instrucción: a) la naturaleza de los ejemplos, b) la parsimonia y, c) presentación explícita de conceptos y habilidades. Las características de los dos últimos incisos corresponden a los puntos 3 y 4 respectivamente de la propuesta de Carnine. De esta manera se tienen seis principios básicos de la instrucción:

I. Naturaleza de los ejemplos.

Los estudiantes aprenden de ejemplos. Dos deficiencias comunes que contribuyen para que una instrucción sea ineficiente se encuentran en:

- El número de ejemplos instruccionales y la organización de las actividades prácticas son insuficientes para que los estudiantes logren dominarlos.

- Los ejemplos presentados son inadecuados para definir un concepto dado. La adecuada selección de ejemplos depende de muchos factores incluyendo: a) variaciones posibles del concepto, b) la complejidad del concepto enseñado y, c) la variedad de la aplicación potencial del concepto.

Jones, et. al (1997) afirma que el maestro debe seleccionar los ejemplos instruccionales de acuerdo a:

  a. El dominio individual de la habilidad específica por parte del estudiante.
  b. El modo en que el problema matemático será representado.
  c. El modo en el que los estudiantes responderán al problema.

A su vez, los problemas pueden ser presentados de cuatro modos:

1. Haciendo uso de materiales didácticos y permitir a los alumnos la construcción activa de sus conocimientos o la manipulación de objetos.
2. El maestro puede hacer uso de materiales visuales fijos, tales como gráficas o esquemas.
3. Por medio de exposiciones orales.
4. Por medio de representaciones escritas o simbólicas, es decir por medio de problemas o ejercicios.

II. Enseñanza de grandes ideas.

Los estudiantes han adquirido conocimientos relevantes, lo importante ahora es utilizarlo apropiadamente, esto es, los estudiantes no necesitan solamente entender *qué* significa un concepto, sino además necesita saber *cómo* y *cuándo* aplicarlo. Ésta forma de usar el conocimiento puede ser ilustrado como una "Gran idea".

III. Enseñanza de estrategias conspicuas (sobresalientes).

Una estrategia es un serie de pasos que los estudiantes siguen para alcanzar una meta. La instrucción debe hacer explícitos a los estudiantes cada uno de los pasos de la estrategia. Cuándo ésta se domina, los pasos se vuelven más discretos, tal como lo hacen los expertos.

IV. Uso eficiente del tiempo (parsimonia).

Se debe aprovechar al máximo todo el tiempo que tenga la instrucción, para ello se debe enseñar a los alumnos todo aquello que necesitan saber en términos cuantitativos y cualitativos, sin abrumarlos ni perderlos tratando de hacer muchas actividades, de manera rápida. Esto se consigue:

- Abandonando los objetivos de baja prioridad y focalizándose en las Grandes Ideas: aunque los programas intentan cubrir objetivos de aprendizaje extensos muchos no priorizan objetivos. La instrucción puede focalizarse en todo lo razonablemente importante.

- Proporcionar las estrategias complejas de manera fácil: No enseñar una estrategia compleja en una sola lección o en muy poco tiempo, esperando que los alumnos la desarrollen bien. Es conveniente simplificar la complejidad, no dejando a los alumnos que analicen solos el problema, más bien crear una ayuda (una tabla de datos por ejemplo) para llegar a la solución; después, los alumnos no tendrán tal ayuda sino que pensarían en construir una antes de resolver el problema.

- Uso de lecciones secuenciadas[5]: Cada Gran Idea y los conceptos que la componen, pueden ser muchas lecciones consecutivas que están dedicadas a una Gran Idea en particular. Hay muchas razones para organizar material instruccional en torno a lecciones consecutivas:

    a) Se recomienda diseñar más actividades en el mismo tiempo en que normalmente se realiza una sola, por ejemplo, en vez de ocupar 30

---

[5] En este apartado se hace uso del término secuencia, pero Carnine hace uso del término hilo (strand) en su documento original para dar a entender la secuencia consecutiva de las lecciones.

minutos en una sola actividad, se pueden diseñar 3 ó 4 actividades durante ese mismo tiempo, así se practican y repasan más conceptos.

b) Las actividades consecutivas hacen que la secuencia de los conceptos del tema se manejen mejor.

c) El uso de materiales didácticos debe ser eficiente: resulta más eficiente secuenciar el uso de materiales didácticos como actividad consecutiva que usarlos como actividad introductoria.

V. Comunicar claramente las estrategias en forma explícita.

Los conceptos y estrategias nuevas deben ser explicadas en un lenguaje claro, conciso, exacto y comprensible, sin ambigüedades. Para ello se recomiendan cinco etapas en el proceso del diseño instruccional (Woodward, 1991; y Carnine, 1997):

- Determinar los conceptos y habilidades que deben ser aprendidos.
- Identificar la importancia entre conceptos y habilidades.
- Organizar hechos, conceptos y habilidades en jerarquías lógicas.
- Desarrollar accesorios de ejemplos instruccionales que ilustren, sin ambigüedades, el alcance del concepto y las habilidades que deben ser dominadas.
- Presentar los ejemplos instruccionales a los alumnos.
- Hacer estrategias explícitas y claras.
- Proveer transición andamiada al aprendizaje auto-dirigido.
- Hacer uso de retroalimentación consistente.

VI. Proveer práctica y revisión para facilitar la retención.

Para ello se recomiendan guías: Facilitar la automaticidad cuando sea apropiado y proveer oportunidades de integración.

Modelo de la llave

Bottge (2001) pone de manifiesto que la instrucción debe activar la mente de los alumnos para que tengan un vida escolar satisfactoria, para ello, propone su modelo de la llave para la resolución de problemas, el cual está dirigido especialmente a alumnos adolescentes y adultos jóvenes con bajo aprovechamiento. El modelo está basado en la analogía de la llave y la cerradura. Para que la cerradura abra, deben coincidir con sus pernos cada uno de los dientes de la llave. De esta manera para Bottge, la llave representa la instrucción y la cerradura el aprendizaje.

En la figura A, se presenta el modelo. La llave (instrucción) tiene seis dientes que representan las condiciones necesarias para promover la resolución de problemas matemáticos en los alumnos: así la instrucción debe presentar problemas significativos (significativa), debe hacer explícitas las estrategias que desarrollarán los alumnos (explícita), debe tomar en cuenta su aprendizaje informal (informal), no debe situarse sólo en el contexto escolar, sino también en la vida cotidiana (situada más allá del salón de clases), debe promover el aprendizaje social entre los alumnos (social) y finalmente está a cargo de un maestro que promueve expectativas en los estudiantes (maestro específico).

Por otra parte, los seis pernos de la cerradura (aprendizaje) que deben coincidir, o que deben ser desencadenados con cada diente de la llave son: el compromiso e interés de los alumnos por resolver problemas matemáticos (compromiso), las bases teóricas para que los alumnos puedan resolver problemas (fundamentos), promover las intuiciones para llegar a la solución del problema (intuiciones), la transferencia del conocimiento de un contexto escolar a la vida cotidiana (transferencia), apoyos culturales tales como el trabajo colaborativo con otras personas (apoyos culturales), y promover las expectativas propias de los alumnos (estudiantes específicos).

Como puede verse en la figura A, cada condición de la instrucción debe corresponder con otra del aprendizaje con el fin de encontrar la condición óptima (línea vertical) en la relación instrucción-aprendizaje. Basta con que una condición instruccional no esté acorde para dificultar el aprendizaje matemático.

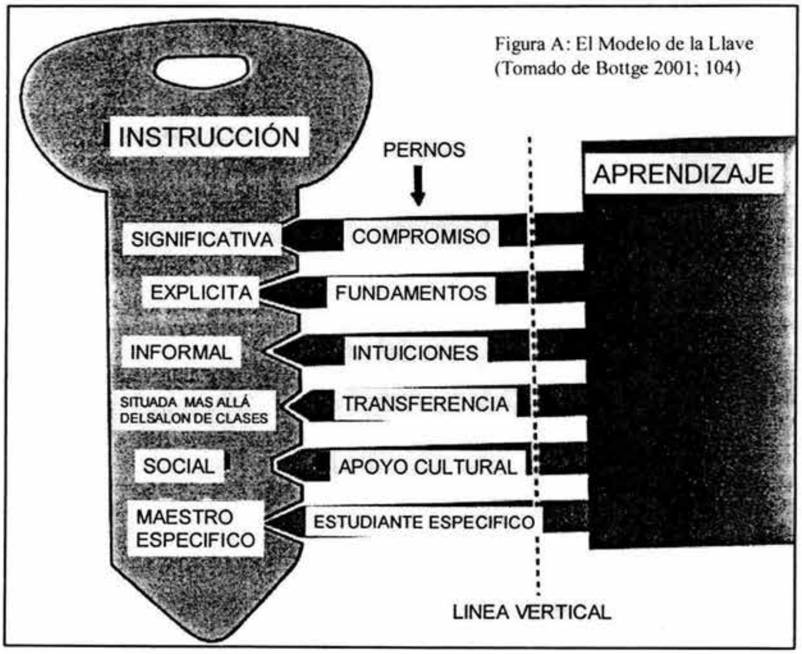


Figura A: El Modelo de la Llave
(Tomado de Bottge 2001; 104)

Así, se tiene la primera condición: instrucción significativa- compromiso por aprender (significativa-compromiso). Los problemas deben ser significativos para que el alumno se interese en resolverlos y con ello se comprometa en su aprendizaje.

Para lograr el aprendizaje significativo desde una perspectiva constructivista es necesario que se presenten las siguientes condiciones (Díaz Barriga, 1998):

a) El material: tiene un significado lógico. La nueva información presentada al alumno por medio de materiales o contenidos debe tener estructura y organización adecuadas. Esto es, el material debe relacionarse de un modo no arbitrario y debe ser sustancial. Se dice que el material o contenido es no arbitrario, cuando deja de ser azaroso y por el contrario, tiene la intencionalidad de relacionarse acorde al nivel que se encuentran los alumnos a quienes se presenta. El material es sustancial (o de relacionabilidad sustancial), cuando un concepto puede ser expresado de manera sinónima y aún así, puede seguir transmitiendo el mismo significado.

b) El alumno: el material debe convertir su significado lógico, en significado real o psicológico. Esto se logra cuando el alumno ha asimilado un contenido nuevo. Para ello, durante la instrucción, se deben presentar materiales que interesen al alumno con el fin de que tenga disposición o actitud positiva para el aprendizaje. Esto se logra cuando se toma en cuenta la naturaleza de la estructura cognitiva del alumno, así como de sus conocimientos y experiencias previas.

Segunda condición del modelo de la llave: instrucción explícita- fundamentos para resolver problemas (explícita-fundamentos). La instrucción debe hacer explícitas las estrategias utilizadas en la resolución de problemas con el fin de que los alumnos tengan fundamentos para enfrentar los problemas matemáticos.

Tercera condición: instrucción informal- intuiciones de los alumnos (informal-intuiciones). Durante la instrucción, el maestro debe asegurase de que los conocimientos y procedimientos informales de los alumnos se vinculen con los conocimientos formales. Gracias a los conocimientos informales, los estudiantes son capaces de resolver problemas reales. Si se enriquece el conocimiento informal con el conocimiento formal, el alumno puede generar intuiciones para resolver un problema matemático. No se debe negar, pues, los conocimientos informales[6] del alumno, y sustituirlos por los formales, por el contrario, en la instrucción debe haber una combinación de ambos.

Cuarta condición: instrucción situada más allá del salón de clases- transferencia del aprendizaje (situada más allá del salón de clases-transferencia). El aprendizaje y el contexto no están separados, la instrucción debe proporcionar conocimientos útiles en el alumno para que pueda transferirlos fuera del contexto escolar; de esta manera, los conocimientos dejan de situarse solamente en el contexto escolar para ser transferidos a la vida cotidiana.

Las siguientes dos condiciones se desprenden de la teoría socio-cultural de Vigotsky.

Quinta condición: instrucción social- aprendizaje como soporte cultural (social-soporte cultural). La instrucción debe fomentar el aprendizaje social permitiendo la interacción y el diálogo entre los alumnos en pequeños grupos, con el fin de que tengan confianza de exponer sus opiniones y pensamientos durante la resolución de un problema, para después exponerlos a toda una clase. Esto permite que los alumnos desarrollen una serie de habilidades sociales en la resolución de problemas, que les permitan trabajar cooperativamente con otras personas en un contexto diferente, como el laboral, por ejemplo.

Sexta condición: maestro específico-estudiante específico. La instrucción es una ciencia y un arte. El maestro debe dejar de tener expectativas hacia los alumnos y reemplazarlas en promover las expectativas propias de los estudiantes.

Si todas estas condiciones se dan en forma adecuada (línea vertical), el aprendizaje de los alumnos estará asegurado.

---

[6] A lo largo del presente trabajo, se utilizará el término conocimiento cotidiano para designar lo que éstos autores denominan conocimiento informal.

Modelo de la enseñanza en contexto

Schoenfeld (1998) propone un modelo donde se describe la manera en que las metas, creencias y conocimientos del maestro interactúan, para dar como resultado las decisiones y acciones que toma momento a momento en la enseñanza de las matemáticas. Conocer la forma en que interactúan estos elementos podría explicar de manera coherente y detallada lo que el maestro hace y por qué lo hace.

En otras palabras, durante la instrucción pasa algo, el maestro percibe las fortalezas y limitaciones de los alumnos ya sea de manera individual o grupal, o puede ver un buen o mal currículo de matemáticas, puede disponer de recursos materiales para su enseñanza. ¿Qué hará el maestro después? Y lo más importante ¿por qué lo hará?

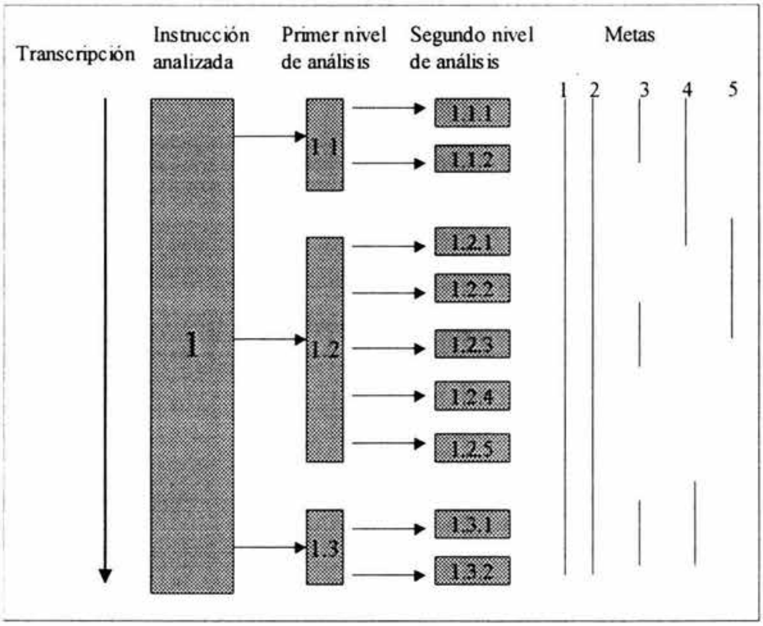
Schoenfeld propone teorizar fuera de escenarios controlados, para hacerlo en contextos reales donde se presenta el caos de la clase o las verdaderas problemáticas de los alumnos al resolver problemas matemáticos. La meta es desarrollar una teoría del comportamiento humano en los escenarios sociales complejos. El modelo tiene tres justificaciones pragmáticas:

1. El modelo no se enfoca en una sola clase de enseñanza, su estructura permite hacer descripciones exactas de la enseñanza en general, que puede ir desde la enseñanza tradicional hasta la enseñanza más libre, el modelo no se enfoca sólo en lo que los maestros hacen (creencias y metas) sino en los que los habilita para hacer lo que hacen. Es decir, el modelo pone mayor énfasis en los diferentes tipos de conocimiento del maestro (conocimiento de la materia, conocimientos pedagógicos, información que ha memorizado, esquemas, rutinas, etc.) que guían sus acciones en la clase, con el fin de fomentar la buena enseñanza.

2. Es una herramienta de desarrollo personal, el profesor puede explorar lo que estaba intentando alcanzar, los opciones que tenía y si funcionó el trabajo; esto permite al maestro reflexionar en el proceso que llevó a cabo y detectar opciones que pudieran haberse llevado a cabo.

3. El modelo puede usarse para delinear la evolución del maestro.

El modelo tiene componentes (creencias, metas y conocimientos del maestro) y mecanismos (la manera en que los componentes trabajan juntos). La forma de analizar la instrucción es por medio de video grabaciones, a través del análisis de las secuencias de acción hechas por el maestro durante su actividad. Schoenfeld propone realizar el análisis por medio de la siguiente representación:



La línea de la izquierda representa la trascripción de la sesión. La columna siguiente (1) representa la instrucción como un todo, que también puede ser un aspecto específico que se pretenda analizar. Ésta se descompone en fragmentos (1.1; 1.2, ...), que en sí, forman una colección de actividades fragmentadas, que se caracterizan por los cambios en la instrucción, tales como un cambio de dirección en la instrucción (como puede ser el énfasis en algún tema, organización en grupos de trabajo, discusión del problema, etc). De cada uno de éstos fragmentos, se obtienen sub-fragmentos (1.1.1; 1.2.1...) que sirven para descomponer el proceso de la instrucción para realizar un análisis más fino. El criterio para obtener los sub-fragmentos, que representan las expectativas de la instrucción (monitorear la discusión por ejemplo), está estrechamente ligado con las metas (representadas a su derecha) que se pretendían lograr. Las metas pueden presentarse a lo largo de toda la sesión, o solamente en determinados momentos. Se pueden representar cualquier clase de metas: las importantes para la sesión, o metas sociales.

Aunque las creencias no aparecen representadas, Schoenfeld, en los ejemplos que presenta, las abarca en el análisis final de la instrucción.

Con el modelo de enseñanza en contexto no se pretende criticar el desempeño del maestro o tutor. Por el contrario, la implementación del modelo es voluntaria y está dirigido por el maestro mismo.

El modelo de enseñanza en contexto es personal. Describe la actuación del maestro y permite explicar las razones que lo llevaron a actuar de determinada manera en un momento dado. El fin último es proporcionarle información sobre la estructura de su estilo de enseñanza con el fin de permitir la auto-reflexión sobre ello y realice las modificaciones necesarias que lo lleven a mejorar su desempeño y calidad de enseñanza. De esta manera, el modelo puede delinear la evolución del maestro a lo largo de las sesiones y le da más herramientas para planificar sus sesiones.

En resumen, con el modelo de enseñanza en contexto, el maestro elige en aspecto básico que le interese, no necesariamente debe ser toda la sesión. Puede hacer un análisis sobre el tipo o tipos de enfoques instruccionales que el maestro lleva a la práctica, permite analizar las actividades que lleva a cabo para dar cumplimiento a los principios básicos de la instrucción y si éstos cumplen su objetivo en el aprendizaje de los alumnos.

Resolución de problemas.

> *"Cuando me ocupo de un problema en especial,*
> *me gusta recurrir a las pruebas de teorías*
> *matemáticas y físicas que conozco desde hace tiempo.*
> *Esta tarea no tiene una meta en especial;*
> *es sólo una oportunidad para entregarme*
> *a la placentera ocupación de pensar."*
> -Einstein-

Hoy en día existe una vasta información teórica enfocada en la resolución de problemas, en este apartado se hace mención de una pequeña muestra de ello. En la actualidad, se ha justificado la propuesta del uso de problemas como una de las metas más importantes para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas dentro del salón de clases. La resolución de problemas es, entonces, un aspecto esencial en el desarrollo de las ideas matemáticas (NCTM, 1989 y 1995 citado en Santos, 1997).

Para llevar a cabo los propósitos del programa de la SEP en la materia de matemáticas, se recomienda diseñar y seleccionar situaciones didácticas que pueden dividirse en (SEP, 1993 y 1999):

a) Ejercicios: su objetivo es favorecer en los alumnos la apropiación de los conocimientos básicos además de ayudarles a adquirir destreza y seguridad en la aplicación de procedimientos y técnicas.
b) Problemas de aplicación, o aplicaciones: ayudan a mostrar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana.
c) Problemas de exploración y búsqueda: son necesarios para que los alumnos formen conceptos, desarrollen capacidades y aptitudes para la investigación, comuniquen resultados y justifiquen sus afirmaciones.

Las situaciones didácticas propuestas por la SEP para el currículo de secundaria se complementan entre sí. Comenzaremos exponiendo el concepto de problema, sus tipos y usos. Durante la exposición ahondaremos un poco más en las diferencias que existen entre ejercicios y problemas sin entrar en la polémica actual sobre la diferencia entre ambos.

El concepto de problema ha sido definido de diferentes formas:

Un problema matemático puede definirse como la narración de una situación cotidiana donde existe la relación entre dos variables y requiere de manipulación de datos numéricos para llegar a una solución; una de las variables puede ser manipulada o planteada como interrogante (Flores, 1999). Un problema es, entonces, una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, para cuya solución no existe solamente un medio o camino aparente y obvio (Krulik y Rudnik, 1980; citado en García, 2003). Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata (Polya, 1961; citado en García, 2003).

De esta manera, un problema "enriquecedor" es una tarea o situación, que debe satisfacer los siguientes requisitos o componentes (Stenmark; citado en Good, et. al. 1992; Fredericksen; citado en Santos, 1997; y García, 2003): el problema debe ser aceptado por el individuo o grupo, existe pues, un interés por resolverlo. Debe existir un bloqueo en el camino de solución, donde el uso de técnicas e intentos iniciales no den un resultado inmediato, con ello se forza a realizar diversas exploraciones de nuevos métodos para llegar a la solución, de esta manera el problema guía a otros problemas, suscita otras preguntas. El problema entonces, no tiene una solución inmediata, tiene diversos caminos o métodos de solución, sean algebraicos, geométricos o numéricos.

Tipos de problemas

Para Polya (1969), existen dos clases de problemas: por resolver y por demostrar.

a) Los problemas por resolver son los problemas de rutina y los problemas prácticos. Los problemas de rutina sólo requieren conocimiento matemático, mientras que los problemas prácticos requieren, para ser solucionados, el uso de conocimientos formales, y de conocimientos previos, requieren, además, de oportunidades para recurrir a juicios o facultades inventivas. Los problemas por resolver tienen el propósito de descubrir la incógnita del problema (que puede ser de diversos tipos tales como encontrar, obtener, adquirir, producir o construir todos los objetos imaginables: al asesino, una jugada, una palabra, un número, una figura, etc.). Sus elementos son la incógnita, los datos y la condición. Su importancia se encuentra en las matemáticas elementales.

b) Los problemas por demostrar tienen el propósito de demostrar de modo concluyente las exactitud o falsedad de una información claramente enunciada, sus elementos son la hipótesis y la conclusión. Su mayor importancia se encuentra en las matemáticas superiores.

R. Borasi (1986; citado en García, 2003), ubica a los ejercicios como un tipo de problema. Para tipificar los problemas el autor utiliza elementos tales como:

(1) El contexto del problema, es decir la situación misma en que se enmarca el problema.
(2) La formulación del problema, se refiere a la definición explícita de la tarea a realizar.
(3) El conjunto de soluciones que pueden ser aceptados para llegar a la solución del problema.
(4) El método de aproximación que podría utilizarse para llegar a la solución.

Con base a lo anterior, García (2003) propone clasificar los problemas en ejercicios, problemas con texto, puzzle, prueba de una conjetura, problemas de la vida real, situaciones problemáticas y situaciones.

El ejercicio

Carece de contexto, su formulación es única y explícita. La solución es única y exacta. Su método consiste en combinar los algoritmos conocidos. A un problema con estas características, las palabras son la formulación del problema: calcular, probar, resolver, etc.

Un ejemplo de ejercicio es: Calcular [5 x 3] / 2.

El problema

Tiene un contexto explícito. Su formulación es única y explícita. La solución es única y exacta. Su método consiste en combinar los algoritmos conocidos. El contexto está dado en un lenguaje o texto no matemático como el idioma español por ejemplo (Manheim, 1971).

Un ejemplo de problema es: José tiene 24 dulces y los quiere repartir entre sus tres amigos, ¿cuántos dulces le tocan a cada uno de sus amigos?

El puzzle

Tiene un el contexto explícito en el texto, su formulación es única y explícita. Su solución es única y exacta. El método consiste en elaborar un nuevo algoritmo, se trata entonces, de un acto ingenioso.

Ejemplo: a partir de seis cerillos, construir cuatro triángulos equiláteros.

La prueba de una conjetura

Tiene un contexto en el texto pero sólo de forma parcial. Su formulación es única y explícita. La solución es por lo general única, pero no necesariamente. El método utilizado es de exploración del contexto, reformulación y elaboración de nuevos algoritmos.

Ejemplo: Demostrar que si a, b y c son enteros impares, entonces las raíces de la ecuación ax^2+bx+c no son racionales.

Los problemas de la vida real

Cuentan con un contexto en forma parcial en el texto. La formulación está parcialmente dada, sólo hay algunas alternativas posibles. Existen muchas soluciones posibles, todas de forma aproximada. El método es por medio de la exploración del contexto, se hace uso de reformulaciones y la creación de un modelo.

Ejemplo: necesitamos pintar una habitación, para ello se necesita primero echar una mano de pintura blanca y después dos manos de pintura azul, necesitamos saber la cantidad de pintura blanca y azul necesarias, pero no tenemos suficiente dinero como para comprar mucha pintura de sobra.

La situación problemática

Tiene el contexto de forma parcial en el texto. Su formulación está implícita, se sugieren varias problemáticas. Existen varias soluciones pero debe hacerse una de forma explícita. El método que se requiere es de exploración del contexto, hacer uso de reformulaciones y plantear el problema.

Ejemplo: Un teorema fundamental establece que la descomposición de un número natural en producto de números primos es única. ¿Qué ocurre si cambiamos en dicho enunciado la palabra producto por la palabra suma?

La situación

Posee el contexto sólo de forma parcial en el texto. No existe formulación. La solución es la creación del problema. Su método consiste en la formulación del problema.

Ejemplo: Considere las siguientes parejas de números primos gemelos (3,5) (5,7) (11,13), (17,19) (29,31) (41,43) (71,73).

Por su parte, Fredericksen (citado en Santos, 1997) sugiere tres categorías en la clasificación de problemas:

1. Problemas bien estructurados: son aquellos que aparecen claramente formulados, se pueden resolver con la aplicación de algún algoritmo conocido, y existen criterios para verificar si la solución es correcta. Estos problemas aparecen en los libros de texto de matemáticas. Por las características de esta clase de problemas, tienen semejanza con la clasificación propuesta por García (2003) con el ejercicio y el problema.

2. Problemas estructurados: requieren un "pensamiento productivo". Son parecidos a los bien estructurados, la diferencia radica en que el resolutor necesita diseñar todo el proceso de solución o parte de éste. No existe un algoritmo que produzca directamente la demostración. Éstos problemas podrían asemejarse al puzzle, la prueba de una conjetura y el problema de la vida real de la caracterización de García (2003)

3. Problemas mal estructurados: carecen de una clara formulación, carecen de un procedimiento que garantice una solución, y no existen criterios definidos para determinar cuándo se ha obtenido la solución. Esta clase de problemas podrían asemejarse a la situación problemática y la situación propuestos por García (2003).

Usos de los problemas matemáticos

El uso de problemas matemáticos lleva una larga trayectoria. Schoenfeld (1992) describe los usos que han tenido los problemas en la escuela en dos aspectos (1)

Problemas como ejercicios rutinarios; y (2) Usos tradicionales de "resolución de problemas" en el sentido de tareas que requieren ser resueltas.

(1) Problemas como ejercicios rutinarios.

Los problemas como ejercicios rutinarios tienen el mismo sentido que los ejercicios mencionados anteriormente que carecen de contexto. Los problemas matemáticos son utilizados como vehículos de instrucción, es decir, se limita a la mera práctica de procedimientos o técnicas enseñadas en el salón de clases. Por ello sirven como criterio para la adquisición de habilidades matemáticas. En otras palabras se usan como ejercicios rutinarios organizados para proveer una técnica particular que ha sido enseñada al estudiante. La estructura del uso de los problemas matemáticos es: (a) Una tarea es utilizada para introducir una técnica en un tema determinado del currículo. (b) La técnica es ilustrada o modelada por el maestro para que los alumnos aprendan a utilizarla. (c) El maestro provee de más tareas para que el estudiante pueda practicar la técnica ilustrada.

(2) Usos tradicionales de la "resolución de problemas[7]*."*

Este tipo de problemas se enfocan a un fin. Apoyado en el trabajo de Stanic y Kilpatrick (citado en Schoenfeld, 1992), el autor hace mención de los tres temas principales en los que se ha usado la "resolución de problemas": a) como contexto; b) como habilidad y c) como arte.

a) Los problemas como contexto son empleados como vehículos al servicio de las metas del currículo, la resolución de problemas no es vista como una meta en sí misma, sino como facilitador para el logro de otras metas. Los roles que juegan los problemas como contexto son:

- Como una justificación de la enseñanza de las matemáticas: algunos problemas se relacionan con las experiencias del mundo real incluidas en el currículo para convencer a maestros y alumnos sobre el valor de las matemáticas.

---

[7] Las comillas son de Schoenfeld (1992).

- Para proveer motivación específica de temáticas particulares: una vez terminado algún tema en específico, se presentan problemas donde el estudiante hace uso de los conocimientos recién aprendidos para resolverlos.
- Como recreación: se hace uso de problemas para demostrar que las matemáticas son divertidas, su objetivo es que los alumnos practiquen sus nuevas habilidades.
- Como significado del desarrollo de nuevas habilidades: se presentan problemas con una secuencia que va de menor a mayor dificultad. Presentan nuevos retos para los estudiantes y provocan discusión en relación a las técnicas que se aplican para llegar a su solución.
- Como práctica: una mayor parte del trabajo matemático escolar caen en esta categoría, se deja a los alumnos resolver una serie de problemas, con el fin de dominar la técnica enseñada en clase.

b) Problemas como habilidad: Los problemas sirven para practicar las técnicas enseñadas. Están encaminados para que el estudiante posea un repertorio de procedimientos para solucionar problemas.

c) Problemas como arte: son problemas que tiene el verdadero sentido de un problema real, son difíciles y complejos. Este tipo de problemas son el corazón de las matemáticas.

En resumen, tenemos que un ejercicio carece de contexto, requiere de la aplicación de un algoritmo de forma más o menos mecánica que dará la respuesta inmediata, en el ejercicio se superan dificultades evitando introducir reglas más complejas. Mientras que en el problema se tiene que dar una explicación coherente al conjunto de datos relacionados dentro de un contexto. En ambos casos, la respuesta es única, pero la diferencia radica en la estrategia de solución, en el ejercicio sólo hay un camino dictado por el procedimiento enseñado a los alumnos en clase, mientras que en el problema los caminos son diversos, pues requieren un esfuerzo mayúsculo por parte de los alumnos, tales como, identificar los datos importantes, elegir las operaciones, estimar respuestas, entre otras (Cordero, 2000).

Estrategias de solución de problemas

Como se mencionó anteriormente, una de las grandes diferencias entre ejercicio y problema, es el uso de estrategias para llegar a la solución. Para alcanzar la solución, en el ejercicio basta con aplicar correctamente un procedimiento mecánicamente, mientras que el problema requiere un análisis más complejo por parte del alumno. En este apartado se abarcará lo que los expertos proponen para dotar a los alumnos de estrategias para enfrentar con éxito un problema matemático.

Para Polya (1969), el proceso de solución consiste en cuatro fases (descritas a continuación a grandes rasgos):

1) Comprender el problema. Se requiere identificar la incógnita, los datos y la condición en que se encuentran. Se debe analizar después si es posible satisfacer la condición. Se recomienda dibujar un figura donde se introduzca los datos indicados y con base en ello, separar en varias partes la condición.

2) Concebir un plan de solución. Es necesario encontrar la conexión entre los datos y la incógnita, se recomienda al alumno recordar si ha tenido un problema con características semejantes y preguntarse si conoce algún teorema que le pueda ser de utilidad. Se recomienda sustituir los datos a una situación más sencilla para probar posibles procedimientos. Un aspecto muy importante es preguntarse si se utilizaron todos los datos en los intentos de solución posibles.

3) Llevar a cabo el plan. Revisar cada paso de la ejecución del plan para asegurase de que el proceso es correcto y hacer las comprobaciones necesarias.

4) Examinar la respuesta obtenida. Consiste en examinar el resultado y compararlo con lo que se pidió en el problema.

Por otro lado, el programa norteamericano Mathcounts (1999), basado en las fases propuestas por Polya, hace uso de un método de cuatro pasos básicos para resolver problemas:

- ✓ Búsqueda: ver el problema, reflexionar si se ha visto uno similar anteriormente, si es así, identificar semejanzas y diferencias. Identificar los hechos y lo que no está presentado en el problema.

- ✓ Elegir una estrategia: preguntarse cómo se resolvió el problema similar anteriormente y qué estrategias se utilizaron e intentar una estrategia si ésta no funciona, de todos modos su aplicación puede dirigir a una estrategia correcta.

- ✓ Resolverlo: utilizar la estrategia seleccionada y trabajarla en el problema.

- ✓ Examinar: releer la pregunta del problema y analizar si se contesta con el resultado obtenido. Verificar las unidades en que se expresó la respuesta. Verificar si la solución es coherente.

Stacey y Groves (1999) proponen las siguientes estrategias dividiéndolas en cuatro fases:

1. Para empezar: esta fase hace indicaciones al alumno: a) lee el problema para tratar de comprenderlo y, b) escribe o dibuja algo (si no sabes cómo empezar, identifica lo que quieres y lo que sabes sobre ello).

2. Mientras trabajas: a) usa algo que te ayude (diagramas, lápices álgebra, etc.), b) anota lo que haces así no olvidarás lo que hiciste y cómo lo hiciste. c) numera cada página y, d) trabaja sistemáticamente.

3. ¿Estás bloqueado?: a) no te preocupes, plantéate, qué sé sobre el problema, qué quiero hacer, ¿puedo usar algo que me ayude?, ¿puedo hacer una conjetura?, ¿puedo comprobar lo que he hecho?

4. ¿Has acabado?: a) explica lo que has hecho de forma que otros puedan entenderlo y, b) plantéate ¿qué ocurriría si...? y así tendrás ideas para otro problema.

Flores (1999) en la capacitación a madres en la enseñanza de una estrategia a alumnos con problemas de aprendizaje de segundo y tercer año de primaria, para la solución de problemas. Y García (2002) en su grupo de niños de "Motivación para las matemáticas" constituido por alumnos de tercero de primaria, utilizaron las fases que se muestran en el cuadro 1, para enseñar una estrategia en la solución de problemas de suma y resta por medio de una tarjeta auto-instruccional[8] diseñada por Flores (1999).

En el cuadro 1, Flores (1999) describe los componentes de la estrategia de solución de problemas. De los componentes identifica cuatro fases de la estrategia y las habilidades que los alumnos requieren para llevarla a cabo. En la última columna describe diez auto-instrucciones que formarán parte de la tarjeta auto-instruccional.

---

[8] La tarjeta instruccional utilizada en la comunidad π, se muestra en la segunda sección de este trabajo.

Cuadro 1

Componentes de la estrategia de solución de problemas		
Fases de la estrategia	**Habilidades requeridas**	**Auto-instrucciones**
1 Lectura del problema	Leer sin errores	Leo el problema
	Parafrasear el contenido	Lo platico
2 Identificación de la información relevante	Identificar la interrogante	Digo la pregunta
	Identificar los datos numéricos	Busco los datos
3 Planificación de la solución	Representar gráficamente el problema	Hago un dibujo
	Establecer en la representación una relación entre variables	Con mi dibujo busco una operación
	Seleccionar el algoritmo apropiado	
4 Ejecución y evaluación del plan de solución	Escribir la operación	Escribo
	Realizar la operación	Resuelvo
	Comprobar el resultado	Compruebo
	Analizar la correspondencia entre resultado y pregunta	
	Redactar el resultado	Escribo completa la respuesta

Todas las estrategias propuestas por los autores mencionados en este apartado, son decisiones ejecutivas que son determinantes en la eficiencia de los conocimientos y recursos utilizados para resolver un problema. La función de las decisiones ejecutivas, es adquirir control sobre el proceso de solución de problemas matemáticos (Schoenfeld, citado en García, 2003). Básicamente, las decisiones ejecutivas son:

- Hacer un plan.
- Seleccionar objetivos centrales y sub objetivos.

- Buscar recursos conceptuales y heurísticos[9] adecuados para el problema.
- Evaluar el proceso de solución a medida que evoluciona.
- Revisar o abandonar planes cuando su evaluación así lo indica.

La resolución de problemas en alumnos con problemas de aprendizaje

Hasta el momento, se ha expuesto a grandes rasgos las características de un problema, las diferencias entre éste y un ejercicio, los usos de los problemas y las estrategias recomendadas para que los alumnos resuelvan un problema matemático eficazmente. Es oportuno señalar, ahora, las características que presentan los alumnos con problemas de aprendizaje, al enfrentarse a los problemas matemáticos.

Good, Mulryan y McCaslin, (1992), en un estudio con alumnos de primaria, mencionan que aunque la resolución de problemas tradicionalmente ha sido un área difícil para muchos alumnos con problemas de aprendizaje, encontraron que pueden tener éxito más allá de las expectativas presentes si son expuestos a tareas útiles y apropiadas a su desarrollo, y sobre todo, si tales actividades son complementadas con modificaciones instruccionales apropiadas.

Básicamente, cuando los alumnos con problemas de aprendizaje se enfrentan a un problema matemático, presentan las siguientes características (Flores, 1999):

---

[9] Polya (1969) hace la distinción entre la concepción antigua de heurística y la heurística moderna. Menciona que la heurística "tenía por objeto el estudio de las reglas y los métodos del descubrimiento y de la invención" (p. 101). Como adjetivo significa "servicio al investigador" (p. 102). Por otra parte la heurística moderna trata de comprender los métodos que conducen a la solución de problemas, en particular, las operaciones mentales.

Por su parte García (2003) afirma que las heurísticas son "las operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas, son como reglas o modos de comportamiento que favorecen el éxito en el proceso de resolución, sugerencias generales que ayudan al individuo o grupo a comprender mejor el problema y a hacer progresos hacia su solución. Existe una amplia lista de heurísticas. Entre las más importantes cabría citar: Buscar un problema relacionado. Resolver un problema similar más sencillo. Dividir el problema en partes. Considerar un caso particular. Hacer una tabla. Buscar regularidades. Empezar el problema desde atrás. Variar las condiciones del problema." (p. 8).

1. Sus razonamientos son inconsistentes.
2. Cometen errores frecuentes en la realización de la operación.
3. Tienen dificultades en la comprensión del texto del problema.
4. Difícilmente emplean mediadores verbales que dirijan su ejecución.
5. Están ausentes estrategias de apoyo como dibujos o diagramas.
6. Se les dificulta identificar la fuente de sus errores.
7. No emplean sus experiencias en problemas con un contenido semántico similar.
8. Sustentan sus soluciones de los problemas en informaciones, creencias o experiencias irrelevantes.
9. Se dan por vencidos fácilmente.

Éste último punto es de suma importancia, pues si el alumno se da por vencido fácilmente, entonces difícilmente hará intentos por involucrarse no sólo en el problema presente, sino en los siguientes. De hecho es común encontrar que los alumnos con problemas de aprendizaje dediquen muy poco tiempo a la resolución de un problema. La consecuencia de ello es la falta de hábitos en esforzarse por conseguir las propias metas. El alumno no disfruta de los retos intelectuales, pues son percibidos como pérdida de tiempo, el estudiante aprende a dedicar sólo un tiempo muy corto a la solución del problema, después de ese tiempo, si no ha llegado a la solución entonces considera que no puede resolverlo (Schoenfeld, 1992 y Cordero, 2000). La tarea del maestro, en este caso consiste en hacer disfrutar a los alumnos de sus resultados logrados a través de su esfuerzo y dedicación (Cordero, 2000).

Durante este apartado se han descrito diversos aspecto sobre la resolución de problemas matemáticos: su clasificación, características y sus usos, se ha hecho un breve recorrido sobre las diversas estrategias de solución de problemas que los expertos recomiendan para ser adoptadas por los alumnos y finalmente las características de los alumnos con problemas de aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos.

La importancia de este tema radica en que el currículo de 1993 de la SEP prepondera el uso de problemas matemáticos con el fin de mejorar el aprendizaje de los alumnos pues la tendencia actual es resolver problemas para aprender matemáticas y no aprender matemáticas para después resolver problemas (Pérez, 2003). Sin embargo, la resolución de problemas se encuentra estrechamente ligado con la instrucción pues los problemas en sí mismos no tienen efecto en el aprendizaje. Al respecto Flores, Farfán y Ramírez (en prensa) en su investigación encontraron que los alumnos que recibieron una instrucción destinada al aprendizaje de estrategias por medio de un programa para tal fin, obtuvieron mejores resultados.

La investigación se realizó con tres grupos de nivel primaria: un grupo control sin tratamiento (sin programa de enseñanza de estrategias), un grupo experimental, denominado sólo de práctica, al que se le presentó una serie de problemas pero sin la enseñanza de estrategias, en su lugar se propició un ambiente motivante con juego y conversación. Y un grupo experimental sometido a un programa de enseñanza de estrategias de solución de problemas matemáticos.

En el pretest, que consistió en problemas matemáticos de suma y resta, los tres grupos obtuvieron resultados semejantes, mientras que en el postest, el grupo control y el grupo sólo de práctica no vieron cambios en sus resultados, el grupo que llevó el programa obtuvo un considerable mejoría con respecto a los demás grupos.

De esta manera, se comprueba la eficacia de la instrucción que abarca la enseñanza de estrategias y toma como vía principal la resolución de problemas con el fin de que los alumnos aprendan matemáticas. En el siguiente apartado, se abarca el tema de fracciones cuyo aprendizaje tiene sus propias dificultades y más aún si son contemplados en problemas matemáticos.

Las fracciones

Las fracciones eran conocidas por los egipcios y los babilonios.
La barra horizontal por medio de la cual se expresa un fracción
fue inventada por los árabes, y empleada de manera regular en
Europa a partir del siglo XVI.
En 1845, el matemático inglés (nacido en la India) Augosto Morgan
Propuso la forma a/b para denotar la fracción.

Un aspecto básico en la creación de una comunidad de aprendizaje es que el maestro posea un conocimiento amplio de conceptos y principios matemáticos vinculados al tema que será objeto la comunidad. Por ello, en este apartado se abarcará el tema de las fracciones lo suficiente para que el lector tenga una idea más clara del tema y sus significados.

Como se mencionó en el apartado "La problemática de las matemáticas en México", pareciera que los alumnos de secundaria tienen problemas con todo el currículo de matemáticas, exceptuando los algoritmos básicos de suma y resta con números naturales. De entre los temas que no se dominan se encuentran las fracciones, cuya enseñanza se ha limitado a meros procedimientos y representación de figuras regulares divididas en partes.

En un recorrido sobre el tema de fracciones, Mancera (1992) asegura que éstas han ocupado un lugar por más de un siglo en el currículo mexicano de la escuela elemental. Su enseñanza durante todo ese tiempo se ha caracterizado por ser rígida y basada en modelos esquemáticos. Mancera analiza dos reformas del currículo de matemáticas en primaria: la de 1972 y la de 1980.

En la reforma del currículo de nivel primaria en 1972, se incorporan explicaciones con apoyos gráficos de la multiplicación y la división además de la resolución de problemas que incluyera ambos algoritmos; en el tema de fracciones se incorpora su representación en la recta numérica. En esta reforma, según la interpretación de Mancera, no se consideraron las características del niño, pues tal vez se pensó que si el niño ya conoce los números se podría abordar fácilmente las fracciones.

Para la reforma de 1980, hubo un tratamiento didáctico con más apoyos gráficos, expandiéndose así la etapa de manipulación de objetos. Los contenidos se dosificaron con mayor cuidado que en la reforma anterior con el fin de que los alumnos construyeran su conocimiento. Con ello se pretendía que los alumnos comprendieran la fracción en una expresión a/b para después establecer equivalencias. Estas propuestas, sin embargo, dice Mancera, tampoco toman en cuenta el conocimiento real que el niño adquiere, ni cómo aprende, ni en lo que puede aprender, ni porqué se le dificulta hacerlo.

Mientras tanto en secundaria se introdujeron elementos de la llamada "matemática moderna." Se dio preferencia a la lógica de conjuntos[10] y se sacrificaron otros temas. En el tema de fracciones su tratamiento es pobre y conduce a concepciones limitadas tales como el uso del modelo del pastel o figuras regulares susceptibles a ser partidos, se da mayor énfasis en los procedimientos. Mancera propone que seguir enseñando procedimientos traería consigo un retraso que para evitarlo, se debería acentuar la atención al aspecto conceptual.

Actualmente, el programa de secundaria de 1993, el tema de las fracciones es abarcado durante los tres años. Tenemos entonces que en primer año se ve los siguientes temáticas:

1. Revisión de noción de fracción, sus usos y significados en diversos contextos.
2. Paso de fracciones a decimales, aproximaciones decimales al valor de una fracción.
3. Fracciones reductibles e irreductibles.
   a. Simplificación de fracciones.
   b. Conversión de dos fracciones a un común denominador.
4. Comparación de fracciones previa reducción a un común denominador o realizando la división a mano o con calculadora.

---

[10] Tema desaparecido de los planes y programas de secundaria de 1993.

5. Suma y resta de dos fracciones.

En segundo año se debe revisar:

1. Suma y resta de fracciones.
    a. Sumas de más de dos fracciones.
    b. Sumas y restas combinadas.
2. Equivalencia y orden en las fracciones; criterio de la razón cruzada para saber si dos fracciones son equivalentes o no.
3. Situaciones asociadas la multiplicación de fracciones.
    a. Algoritmo de la multiplicación.
    b. Recíproco de una fracción y división de fracciones.

Y para tercero:

1. Fracciones algebraicas.
2. Revisión y expresión simbólica de las operaciones con fracciones comunes.
3. Operaciones con fracciones algebraicas: simplificación, suma, resta, multiplicación y división.

El currículo actual es motivo principal para retomar la fracciones en los problemas presentados en este manual. Otro motivo, son los resultados arrojados por investigaciones sobre el tema, que se presentarán a continuación.

La mayoría de las investigaciones referentes a fracciones se han hecho a nivel primaria, a pesar de que este trabajo está dirigido a alumnos de secundaria, es importante saber las problemáticas que se encuentran en el aprendizaje de las fracciones en primaria, pues si no está consolidado conceptualmente el término fracción, entonces su desempeño a nivel secundaria pudiera limitarse a conocer sólo los procedimientos.

La principal problemática que tienen los alumnos a nivel primaria y algunos a nivel secundaria es que poseen un conocimiento de las fracciones muy rudimentario, que pareciera implicar una comprensión amplia de las fracciones: utilizan bien los términos fraccionarios, hablan coherentemente acerca de las fracciones y resuelven problemas, pero no captan varios aspectos cruciales de las fracciones, pasan de año en año sin dominar las dificultades de las fracciones (Nunes y Bryant, 1998); usan pues el lenguaje matemático sin conocer su naturaleza.

Por ejemplo, investigaciones indican que los pequeños de siete a ocho años no conservan el entero cuando debía dividirse en partes diferentes y negaron que dos mitades y cuatro cuartos forman el mismo entero (Lima, 1982; citado en Nunes y Bryant, 1998), además de que la mayoría de los alumnos se centran en el número de partes en que se divide el entero pero no toman en cuenta el tamaño de las partes (Dávila, 1992). De esta manera los alumnos pueden resolver bien una operación de fracciones utilizando el método adecuado, repitiendo una rutina aprendida en clase, pero no pueden explicar por ejemplo, porqué se debe obtener un común denominador.

Por su parte los alumnos de entre 12 y 14 años a pesar de ser capaces de resolver equivalencias complejas, tienen dificultad para ordenar fracciones e identificar su posición en una recta numérica (Kerslake, 1986, citado en Nunes y Bryant, 1998), lo que significaría que los estudiantes dominan en cierta parte los procedimientos pero no el concepto en sí.

Con base en la revisión de estudios experimentales Nunes y Bryant (1998) afirman que existe una brecha entre la comprensión infantil de los números racionales y la correcta realización de tareas con números racionales. Esto podría deberse, según los autores, a que en tareas experimentales sobre la división de números racionales, los alumnos necesariamente tiene que razonar las situaciones. En contraste, en evaluaciones docentes, consideran que se trata de una situación en la que necesitan pensar qué operaciones hacer con los números y cómo utilizar lo que se les ha enseñado en la escuela, de esta manera en el manejo de símbolos los estudiantes podrían tener un bajo nivel de desempeño porque no se concentran en la situación del problema. La brecha entre comprensión y realización, puede deberse a que los niños aprenden sólo algunos significados de las fracciones, como el procedimiento parte-todo y no consideran otros como el de división por ejemplo.

En resumen, tenemos que las fracciones son presentadas por primera vez mostrando dibujos de enteros divididos en partes. Se les dice que el número total de partes es el denominador y las partes pintadas el numerador; esto aunado a ciertas reglas para calcular los estudiantes dan la impresión de saber mucho sobre fracciones, sin embargo se presenta una brecha entre la comprensión de los números racionales y su operalización.

Esta brecha que los autores han encontrado entre la comprensión de la fracción y su forma de operar puede arrojar luz sobre cómo presentar el tema de fracciones, de hecho, esto lleva a Nunes y Bryant (1998) a tomar en cuenta dos variables en al enseñanza de las fracciones: su representación simbólica y un contexto familiar de éstas para los alumnos.

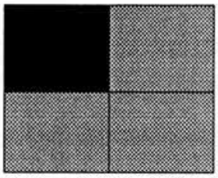
Éstos autores afirman que si se salta de problemas representados simbólicamente a otros problemas similares planteados en contextos familiares, los estudiantes empiezan a relacionar los símbolos y procedimientos fraccionarios con su conocimiento formal que permita tener a los alumnos en mente ambas variables.

Esta es una de las razones por la cual, dentro de la comunidad **π** se presentan problemas con fracciones, con el propósito de que los alumnos reflexionen sobre el contexto en el que se presentan los datos, y con ello manejen representaciones simbólicas para hallar una operación que los dirija a una solución. Cabe hacer notar que para entender la representación simbólica es necesario que los alumnos hagan uso de representaciones pictóricas o icónicas; de hecho la traducción de un sistema de representación a otro es de por sí compleja (Valdemoros, 1997).

Sin embargo, con el uso de dibujos, los niños desarrollan espontáneamente el "algoritmo gráfico[11]" que les facilita la resolución de la tarea, pues la construcción de modelos visuales cumplen el papel de abrir canales a los niños para el desarrollo de sus proceso de matematización (Streefland, 1991; citado en Valdemoros, 1997).

El problema de las Interpretaciones de la fracción

La forma común de encontrar una fracción es cuando está simbolizada como a/b donde "a" y "b" son enteros y "b" es diferente de cero. A los alumnos se les enseña que "a" es el numerador y "b" el denominador, de tal manera que "a" es el número de partes en que se divide o se toman del entero "b", a esta clase de interpretación se le denomina fracción como parte-todo.



$\frac{1}{4}$ Se toma una parte.
De cuatro.

Sin embargo, ésta no es la única interpretación de las fracciones. Mancera (1992)[12], por ejemplo, hace un recuento de los conceptos e interpretaciones que de las fracciones hacen diferentes expertos para finalmente mostrar *"la complejidad que existe en relación a la comprensión de los diversos significados o*

---

[11] Algoritmo gráfico: sustituir el algoritmo convencional por dibujos que representen una operación (Valdemoros, 1997).

[12] El autor hace un interesante recorrido histórico sobre las dificultades relacionadas a los significados de las fracciones haciendo énfasis en la forma en que se confunden los significados (plano conceptual de las fracciones) y los significantes (plano de las representaciones). El autor retoma a autores expertos en el tema de fracciones como Kieren (1976, 1981 y 1988), Streefland (1978), Hart (1981), Rosimba-Rajohn (1982), Behr, Lesh, Post y Silver (1983), Freudenthal (1983), Borasi y Michaelsen (1985), Vest (1986), Ohisson (1988), para finalmente, con base a todos ellos, mencionar los cuatro aspectos básicos de las fracciones. No es el propósito de este capítulo extenderse en los diferentes significados de la fracción, para profundizar en este tema se recomienda al lector la consulta del artículo de Mancera (1992) cuya bibliografía aparece al final de este trabajo.

interpretaciones o ideas básicas o conceptos relativos o subconstructos de los números racionales" (p. 49); y considerar cuatro significados básicos en la comprensión de las fracciones:

a. La relación parte todo: significados asociados al cociente de enteros.
b. Las estructuras multiplicativas: pròporcionalidad y temas a fines.
c. El sistema decimal de numeración: decimales.
d. Los procesos de medición: procesos de conmensuración (razón), localización de puntos en la recta numérica y los procesos de fraccionamiento de la unidad.

Mancera agrega una dificultad más si se piensa en modelos y referentes que se podrían emplear en la enseñanza; sólo por mencionar algunos ejemplos, se tienen los diferentes tipos de fracciones: discretas, continuas, definidas, indefinidas, estructuradas, no estructuradas.

Pero la dificultad aumenta cuando se piensa además en la representación escrita y lo que con ello se enfatiza, aunque el símbolo sea el mismo. Por ejemplo, la relación parte-todo a/b puede indicarse también como una división a:b.

Finalmente Mancera, una vez planteada la complejidad de la construcción conceptual de la fracción, hace énfasis sobre la falta de claridad en el tránsito que un alumno sigue desde la adquisición del concepto hasta su manejo operativo. Prueba de ello es el uso del común denominador en una suma de diferentes denominadores cuya representación concreta resulta complicada.

Tenemos entonces que una fracción tiene diversas interpretaciones[13], modelos y tipos. Con base a ello, se abordará cada una de tales implicaciones de la fracción

---

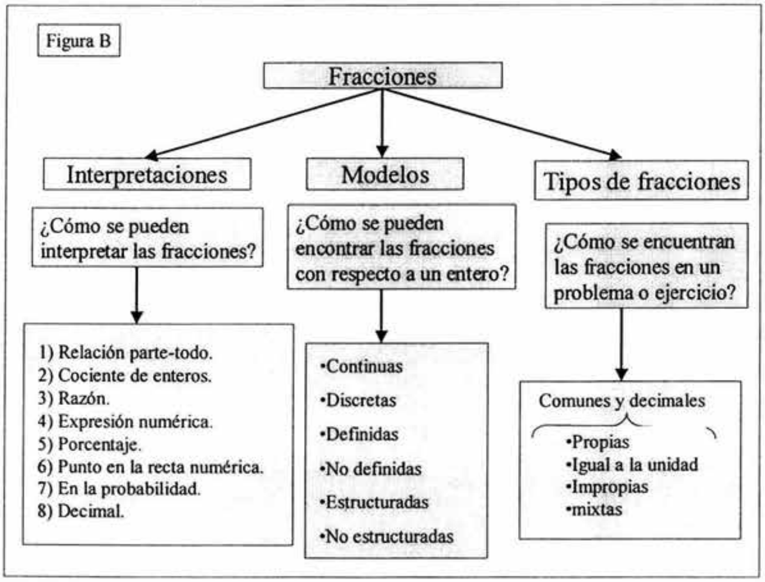
[13] Cabe destacar que aunque en la figura 1 se representan las interpretaciones de la fracción, los diferentes autores no concuerdan en la cantidad de éstas, pues algunos proponen ciertas interpretaciones que otros no toman en cuenta. Este manual no tiene el objetivo de discutir al respecto de ello, baste con mencionar que las fracciones tienen propiedades que las hacen difíciles de integrar en una interpretación general debido a que

(figura B), enriqueciéndola con la opinión de diversos autores que hablan del tema de fracciones (Mancera, 1992; Clemente, Ayala, Favila y López, 2001; Valdemoros, 1997; Peralta, 1991; Piñón, 1995; y SEP, 1995).

Interpretaciones

La fracción representada como a/b, puede tener diversas interpretaciones, dependiendo del contexto en donde se encuentren, por ejemplo, puede interpretarse como la parte que se toma de un entero, o como un porcentaje, o como una división. A continuación se presentan algunas interpretaciones que los alumnos de secundaria pueden hacer de las fracciones.

Figura B



1) La fracción como relación parte-todo.

Se presenta cuando el todo, sea este continuo o discreto, se divide en partes iguales que pueden ser las partes de una superficie o la cantidad de objetos. El todo recibe el nombre de unidad.

---

comparten representaciones semejantes. Tales propiedades son homonimia y sinonimia. Homonimia, por ejemplo, se refiere a que la representación de la fracción a/b está asociada a diferentes significados tales como razón, número racional, operador, etc. En la sinonimia el concepto fracción se puede representar como cociente de enteros o una expresión decimal (Mancera, 1992).

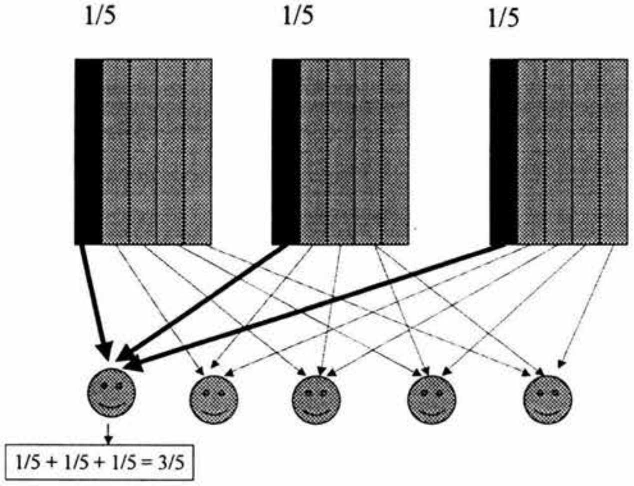
2) La fracción como cociente de enteros.

Bajo esta interpretación se asocia a la operación de dividir un número natural por otro (a/b). Por ejemplo:

Al dividir tres unidades entre cinco personas 3/5 = 3:5= 0.6, donde 3 y 5 son números naturales y la relación a/b se asocia con una división.

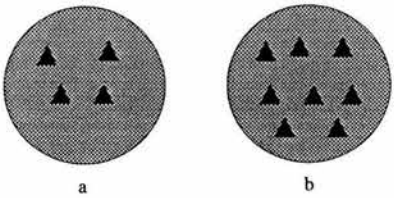
Esta interpretación también indica una división entre dos números naturales, pero aparecen en un contexto de reparto. Indica el proceso de repartir. Por ejemplo:

Se tienen tres barras de chocolate y se quieren repartir en forma equitativa entre cinco niños, ¿Cuánto le toca a cada uno?



3) La fracción como razón.

Esta interpretación se da cuando grandes unidades son comparadas, la comparación es bidireccional. Esta interpretación no se desprende del parte-todo, sino de la idea de par ordenado de números naturales. La fracción como razón se representa gráficamente a continuación:



La relación entre los triángulos de a y b es de 4/8 (4:8)
La relación entre los triángulos de b y a es de 8/4 (8:4)

4) La fracción como una expresión numérica.

Las fracciones se asocian con unidades de medida. Por ejemplo: ¾ de metro ó ½ kilo.

5) La fracción como porcentaje.

Se trata de una relación de proporcionalidad que se establece entre un número y el 100. Se le puede entender también como el establecimiento de relaciones entre razones donde se dan subconjuntos de 100 partes.

Ejemplo 1: Supongamos la siguiente información. De 60 alumnos, que componen el total de tercer año de secundaria, el 25% ha tenido problemas de mala conducta. La relación sería 25% de 60.

60/100 ------ X/25	Donde x es la incógnita.
60 → (: 4) → 15 100% → (: 4) → 25%	Se busca un mismo divisor para el numerador y el denominador ya dados (60 y 100) que den como resultado la proporción 15. El 25% de 60 es 15.

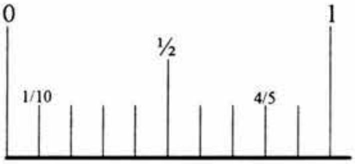
Ejemplo 2: supongamos la siguiente información: dos de cada cinco niños tienen zapatos negros es lo mismo que decir que 40 de cada 100 niños tienen zapatos negros. Esto se desprende de una equivalencia:

$2 \longrightarrow (x\ 20) \longrightarrow 40$ $5 \longrightarrow (x\ 20) \longrightarrow 100$	Se busca un mismo múltiplo para el numerador y denominador ya dados (2 y 5) para obtener la proporción 40/100

6) La fracción como un punto en la recta numérica.

Se hace uso de la recta numérica como auxiliar para asociar a la fracción como un punto en la recta numérica, donde cada segmento se ha dividido en "n" partes iguales.

Por ejemplo:



7) La fracción en la probabilidad.

En fenómenos de azar, las fracciones pueden considerarse para la interpretación donde se establezca una comparación todo-todo entre el conjunto de casos favorables y el conjunto de casos posibles.

Por ejemplo, en una bolsa hay 7 bolas negras y 3 bolas blancas. Al sacar aleatoriamente una bola, ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra? La probabilidad de extraer una bola negra es de 7 a 10, esto se puede escribir así 7/10.

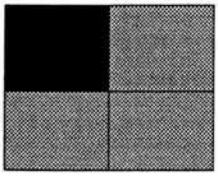
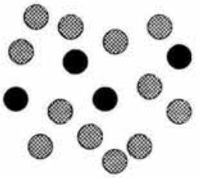
8) Sistema decimal de numeración.

Se hace uso de una fracción para indicar un número decimal.

Por ejemplo: 1/3 = .33333333; 1/5= 0.2; ¾= 0.75

Modelos

El todo, no siempre estará contenido en una sola figura o cantidad. Podemos encontrarlo en una serie de figuras, unidades o elementos naturalmente separados unos de otros. Incluso en ocasiones, el todo puede no estar representado en su totalidad. A estas diferentes propiedades se les denomina modelos. A continuación presentamos éstos modelos.

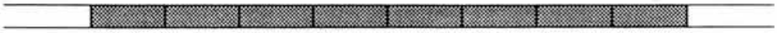
Representaciones continuas El todo se encuentra contenido en una sola figura, por ejemplo ¼ se representa así:	***Representaciones discretas*** El todo no está contenido en una sola figura, sino que todas las figuras lo forman, por ejemplo en la siguiente figura también se representa ¼:
	

Representaciones definidas

El todo está completamente representado:

Representaciones indefinidas

El todo está representado parcialmente:



Representación estructurada

El todo se representa fraccionado, sus partes pueden percibirse con cierta estructura.

Representación sin estructura

El todo se representa fraccionado, se dificulta percibir la estructura de sus partes.

Las representaciones que comúnmente utilizan los alumnos son la representación continua y la representación discreta.

Tipos de fracciones

Cuando los alumnos se enfrentan a problemas o ejercicios con fracciones, deben hacer una serie de procedimientos para poder manipularlas. Las fracciones, aunque se encuentran representadas como a/b, el valor de numerador y el denominador indica ciertas características de la fracción, que es necesario conocer para poder manipularlas. Entre ellas se encuentran los siguientes tipos:

Fracciones comunes

Son fracciones cuya representación es b/c, donde el numerador puede ser cualquier número, mientras que el denominador *no está formado* por la unidad seguida de ceros (10, 100, 1000). Por ejemplo ¾, 7/8, 25/32...

Fracciones decimales

Son fracciones cuya representación es b/c, donde el numerador puede ser cualquier número, mientras que el denominador *está formado* por la unidad seguida de ceros (10, 100, 1000). Por ejemplo 7/10, 9/100, 15/1000...

Ambos tipos de fracciones pueden ser a su vez propias, igual a la unidad, impropias y mixtas:

Fracciones propias

Son fracciones cuya representación es b/c, donde el numerador (b) es menor que el denominador (c). Por ejemplo: ½, ¾, 15/20, 45/100...

Fracción igual a la unidad

Son fracciones cuya representación es b/c, donde numerador y denominador son iguales, por lo tanto, el resultado de la división es igual a uno. Por ejemplo 3/3, 25/25, 10/10...

Fracciones impropias

Son fracciones cuya representación es b/c, donde el denominador (b) es mayor que el numerador (c). Por ejemplo: 8/7, 10/2, 15/10. Las fracciones impropias pueden convertirse en fracciones mixtas:

1 15/10 = 10 |15 = 1 5/10 5	Donde el cociente (1) es el entero, el residuo (5) se convierte en el numerador y el divisor (10) se convierte en el numerador: 1 5/10.
1 5/10 = 1 ½	La fracción propia puede reducirse a su mínima expresión (fracciones equivalentes).

O en enteros: 14/7 = 2; 21/3 = 7; 150/10 = 15...

Fracciones mixtas

Son fracciones cuya representación es: a b/c, donde (a) es un entero y el denominador (b) es mayor que el numerador (c). Las fracciones mixtas pueden convertirse en fracciones impropias.

Por ejemplo:

3 ½	El denominador (2) se multiplica por el entero (3), al resultado se le suma el numerador (1): 2 x 3 = 6; 6 + 1 = 7 así se obtiene el futuro numerador. El denominador es el mismo de la fracción mixta.	= 7/2

Como puede verse, el tema de las fracciones posee una variada gama de posibilidades que pueden ser explotadas en diversos problemas matemáticos. En la siguiente sección "Pongamos en práctica la teoría", se analizarán los conocimientos que los alumnos despliegan a lo largo de su procedimiento de solución así como las problemáticas que presentan. Como se verá más adelante, los problemas presentados no abarcan todas las interpretaciones debido a la dificultad que mostraron los alumnos de la comunidad de aprendizaje matemático en el concepto de fracción.

Síntesis teórica

Para superar el rezago educativo en la materia de matemáticas, los expertos hacen básicamente dos recomendaciones, una de ellas es convertir el salón de clases en una comunidad de aprendizaje, la otra se refiere a la enseñanza de las matemáticas por medio de la resolución de problemas matemáticos. En estas propuestas, el papel del maestro no se limita a ser mero transmisor del conocimiento, sino que se convierte en un facilitador del conocimiento. Su principal objetivo, con respecto a la instrucción, es diseñar sesiones con el fin de transformar el salón de clases en una comunidad de aprendizaje y favorecer la dinámica que dentro de ella ocurre, utilizando la resolución de problemas para favorecer en los alumnos, su razonamiento matemático.

Una comunidad de aprendizaje es un ambiente que permite la participación activa de los alumnos, quienes no se limitan a memorizar formulas y procedimientos, ni se les pide dar respuestas mecánicas. Por el contrario, se involucran en actividades matemáticas como la resolución de problemas con el fin de que interactúen entre ellos para explorar diversas soluciones, exponer ideas propias, hacer conjeturas, comunicar resultados, tomar acuerdos y aproximarse paulatinamente al vocabulario matemático.

Así la comunidad de aprendizaje deja de ser sólo un grupo para convertirse en un equipo, donde la responsabilidad del aprendizaje de todos los miembros es compartida. Es también un espacio donde no sólo se aprenden matemáticas, se aprende y desarrollan además habilidades sociales como el respeto por los demás compañeros y sus ideas, se promueve el apoyo, la comunicación, la negociación y la retroalimentación positiva.

Para favorecer la dinámica que se da dentro de la comunidad de aprendizaje, es necesario poner énfasis en la instrucción. Las metas de la instrucción son proveer a los alumnos confianza en su habilidad para hacer matemáticas, desarrollar en ellos el entendimiento de conceptos importantes y no meras habilidades mecánicas, proveer a los estudiantes de oportunidades de explorar un amplio rango de problemas y situaciones matemáticas, desarrollar el razonamiento matemático en los alumnos y desarrollar habilidades para leer y usar textos matemáticos.

Dentro de una comunidad de aprendizaje, no existe el dominio exclusivo de un tipo de instrucción específica, por el contrario, es posible que converjan diferentes tipos. La instrucción puede ser *directa* donde el maestro es el líder y su práctica es sistemática y estructurada cuando comienza a enseñar un tema nuevo. Puede ser también *estratégica*, donde el maestro está en constante interacción con los alumnos para brindarles los apoyos necesarios con el propósito de que sean independientes. Y puede ser también *mediada por un compañero*, donde los alumnos formados en pares (instrucción entre pares) o en equipos de más de dos alumnos (aprendizaje cooperativo), se apoyan mutuamente para alcanzar una meta.

Para asegurar el aprendizaje de los alumnos, según el modelo de la llave de Bottge (2001), la instrucción debe:

1. Presentar problemas significativos para ganar el interés de los alumnos y de esta manera se comprometan en su aprendizaje.
2. Hacer explícitas las estrategias utilizadas en la resolución de problemas para dotar a los alumnos de bases para enfrentarlos exitosamente.
3. Asegurar que los conocimientos formales y cotidianos de los alumnos se complementen entre sí.
4. Proporcionar conocimientos útiles al alumno para que pueda transferirlos fuera del contexto educativo.
5. Fomentar el aprendizaje social con el fin de que los alumnos lo utilicen para trabajar cooperativamente dentro del contexto educativo primero, y después lo transfieran al ámbito laboral, por ejemplo.

6. Impulsar las expectativas de los alumnos, antes que las del maestro.

En cuanto a los problemas matemáticos se refiere, han tenido un uso limitado dentro de la instrucción matemática. Se les ha usado como medios para la enseñanza de procedimientos mecánicos de solución o una estrategia determinada, para ello, el maestro expone y modela el procedimiento o la estrategia a enseñar, después dota a los alumnos de ejercicios y problemas para que practiquen lo enseñado, para finalmente dar retroalimentación correctiva.

Sin embargo, las propuestas se encaminan a expandir su uso, esto es, no limitar su uso como medio para aprender algún procedimiento o estrategia, sino convertirse en un fin en sí mismo, donde los alumnos desplieguen sus, habilidades, estrategias, conocimientos formales y cotidianos con el objetivo de tener elementos para ser buenos resolutores de problemas matemáticos.

El maestro debe diseñar los problemas matemáticos con base a los conocimientos actuales de los alumnos, recordando que los alumnos con problemas de aprendizaje traen consigo una larga historia de fracasos escolares que se manifiestan en actitudes que pueden ir desde responder impulsivamente una actividad matemática hasta evitarla. Las principales características de los alumnos con problemas de aprendizaje son de tipo a) cognitivo y metacognitivo (dan respuestas impulsivas, sus estrategias de solución son ineficientes, carecen de capacidad para planificar, monitorear y evaluar una estrategia), b) socio-emocionales y motivacionales (muestran desesperanza aprendida, percepción pobre de auto-eficacia y auto-concepto, atribución de éxitos y fracasos a factores externos y reacción negativa hacia las matemáticas).

Para hacer una elección de problemas apropiados a las capacidades y conocimientos de los alumnos, el maestro debe valorar, primeramente, el nivel en donde se encuentran para así tener información base para realizar un análisis de las actividades matemáticas y problemas idóneos a presentar. La valoración del conocimiento del alumno se desprende del análisis del proceso de solución llevado a cabo para resolver un problema, poniendo especial atención en los aspectos donde el alumno presente ciertas deficiencias, que servirán para diseñar las actividades dentro de la comunidad de aprendizaje.

Una vez hecha la valoración, un análisis de los problemas a presentar es de gran utilidad para saber de antemano los conocimientos que el alumno debe desplegar para llegar a la solución. El análisis proporciona información previa al maestro sobre los aspectos donde el alumno puede hallar obstáculos y prever la forma en que los apoyará. Con ello puede considerar si el problema a presentar está a un nivel adecuado a los alumnos dentro de la comunidad de aprendizaje.

Para enriquecer de elementos a la instrucción proporcionada por el maestro, es conveniente hacer un análisis personal. En este trabajo se recomienda el modelo de la enseñanza en contexto propuesta por Schoenfeld (1998), que consiste en dividir la instrucción proporcionada por el maestro en pequeñas unidades de análisis, con el fin de hacer descripciones exactas de su enseñanza en general, además de explorar, valorar y mejorar su desempeño dentro de la comunidad de aprendizaje y así delinear su evolución a lo largo de las sesiones.

Durante esta sección, se han abordado aspectos teóricos sobre la comunidad de aprendizaje, la instrucción, problemas matemáticos, las fracciones y alumnos con problemas de aprendizaje. En la siguiente sección se abarcan estos mismos elementos en acción, por medio de la experiencia dentro de la comunidad **π**.

2. Pongamos en práctica la teoría

Frente a una sociedad dinámica, en transición,
no admitimos una educación que lleve al hombre a posiciones quietistas,
sino aquellas que lo lleven a procurar la verdad en común
"oyendo, preguntando, investigando".
Sólo creemos en una educación que haga del hombre
un ser cada vez más consciente de su transitividad,
críticamente, o cada vez más racional.
-Paulo Freire-

Manual

Este manual se apoya en la revisión teórica hecha en la sección anterior. No pretende ser una receta para ser seguida al pié de la letra, por el contrario, su objetivo es que a partir de la descripción de la experiencia generada en la comunidad **π**, el lector retome algunas ideas, las adapte y enriquezca con sus propios conocimientos, habilidades, experiencia y creatividad.

Cabe destacar que el material recopilado y analizado durante la experiencia de la comunidad **π** es vasto, sólo presentamos una selección del más representativo y didáctico para su mejor entendimiento. Presentamos unos recuadros donde apuntamos aspectos puntuales de la teoría expuesta en la sección anterior. Presentamos también unos recuadros titulados "Experiencia en la comunidad **π**," donde describimos, a manera de ejemplos, los aspectos prácticos sugeridos en la teoría.

La construcción social de una comunidad de aprendizaje

Las matemáticas son un producto social que permite compartir significados a los miembros inmersos en una comunidad, se aprenden por medio del intercambio social, de hecho la educación matemática es un proceso de socialización más que un proceso instruccional, entendido éste como mera transmisión de conocimientos que permanecen inertes.

Por esta razón, es congruente pensar que la enseñanza matemática debe dejar de ser vista como mera experiencia escolar pasiva para convertirse en un acto social y colaborativo donde los estudiantes reflexionen sobre los conceptos, problemas y estrategias de solución durante el aprendizaje de las matemáticas. De esta manera, una comunidad de aprendizaje matemático es construida socialmente por el maestro y los alumnos (Schoenfeld, 1992)

En el transcurso del tiempo, las matemáticas han evolucionado a tal grado que, aunque resulta complicado entender las matemáticas superiores, siguen facilitando la vida del hombre además de proporcionarle herramientas para poder explicarse su entorno. Gracias a las matemáticas y su combinación con otras ciencias, hoy en día tenemos computadoras, juegos de video, mejores equipos de sonido, se tienen diseños arquitectónicos que satisfacen las necesidades de los hombres de diferentes culturas, se explican, predicen y miden fenómenos naturales, podemos saber la distancia de las estrellas, se puede predecir eclipses, estados del tiempo, etc.

Todo lo mencionado anteriormente tiene un denominador común, fueron especialistas, reunidos en una comunidad científica, donde intercambiaban información, quines lograron tales avances. No todos los intentos funcionaron inmediatamente, también hubo fracasos, pero gracias a ellos se logró consolidar los conocimientos actuales. De la misma manera, los alumnos deben aprender las matemáticas dentro de una comunidad de aprendizaje, donde discutan, elaboren, prueben métodos, donde puedan incluso equivocarse y lo más importante, no se sientan solos ni mucho menos amenazados en el proceso del aprendizaje de las matemáticas. Lo importante es que tengan la oportunidad de practicar las matemáticas aventurándose a desarrollar su pensamiento matemático con el apoyo de compañeros y maestros.

En esto radica la importancia de construir socialmente una comunidad: un grupo no hace una comunidad, es necesario que se tengan objetivos comunes, y que reciban apoyo de los demás para facilitarles su comprensión del mundo, esto es, debemos permitir la comunicación entre nuestros estudiantes para que dejen de ser estudiantes solitarios que sólo dependen de sí mismos para entender la materia. Necesitamos, además, que nuestros alumnos se sientan parte de una comunidad, que sientan que sus esfuerzos rinden frutos tanto al nivel individual como social.

Al referirnos a la construcción social de una comunidad de aprendizaje, no nos referimos a la conformación de los individuos dentro de una comunidad, pues los alumnos no eligen a sus compañeros ni al maestro, como tampoco el maestro elige a sus alumnos. Al hablar de la construcción social, nos referimos a la dinámica de trabajo que se lleva dentro de ella, la cual dependerá de la forma en que el maestro perciba su rol y el rol de los estudiantes, así como de la noción que el maestro tenga de enseñanza, aprendizaje, evaluación y matemáticas. Las nociones y concepciones que el maestro tenga, se verán reflejados en la dinámica de su clase.

Por ejemplo, un maestro con un enfoque tradicional, desempeñará su rol como el experto que enseña a los alumnos que no saben lo que él si. A los alumnos los tratará como personas pasivas que están reunidos en un grupo para aprender de él y para ello dirigirá sus esfuerzos para ganar su absoluta atención en las explicaciones, fuera de distracciones. El maestro con estas características conceptuará la enseñanza como la transmisión de conocimientos, y considerará el aprendizaje a partir del dominio individual que tengan los alumnos de los conocimientos transmitidos. Éstos, serán evaluados por las respuestas que den los alumnos a ejercicios que serán calificadas como correctos o incorrectos. En suma, tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se centra en el maestro.

En contraste, la función del maestro, dentro de una comunidad de aprendizaje, es propiciar que los alumnos sean miembros activos de una comunidad, cuya característica principal es el apoyo mutuo en la búsqueda de soluciones a problemas matemáticos. Esto remite indudablemente a la comunicación entre sus miembros y su participación dista de ser pasiva. Dentro de una comunidad de aprendizaje matemático, no sólo se aprende matemáticas, también se estimulan comportamientos tales como el respeto, la paciencia, la tolerancia, el apoyo, la confianza, entre otros. El principal impulsor de ello, en un principio es del maestro. A lo largo de esta sección desarrollaremos con mayor detenimiento el papel del maestro en la construcción social de una comunidad de aprendizaje.

La instrucción

(Desarrollo de las sesiones)

> *Dictamos ideas. No cambiamos ideas.*
> *Dictamos clases. No debatimos o discutimos temas.*
> *Trabajamos sobre el educando. No trabajamos con él.*
> *Le imponemos un orden que él no comparte, al cual sólo se acomoda.*
> *No le ofrecemos medios para pensar automáticamente, porque al recibir fórmulas dadas simplemente las guarda.*
> *No las incorpora, porque la incorporación es el resultado de la búsqueda de algo que exige, de quien lo intenta, un esfuerzo de recreación y de estudio.*
> *Exige reinvención.*
> -Paulo Freire-

Dentro de una comunidad de aprendizaje, el maestro debe diseñar una instrucción matemática que tienda a (Schoenfeld, 1992):

1) Apoyar a los alumnos para que desarrollen confianza en su propia habilidad para hacer matemáticas y valorarlas.
2) Apoyar a los alumnos a entender los conceptos y procedimientos algorítmicos importantes para utilizarlos posteriormente en sus argumentaciones y en la comunicación de resultados.
3) Proveer a los estudiantes de oportunidades para explorar diversas soluciones interactuando con otros compañeros.
4) Diseñar situaciones en los que conceptos y procedimientos sean útiles.

Para lograr estos objetivos es muy importante organizar y planificar cada sesión de trabajo, de forma tal que los alumnos tengan claro lo que se persigue en cada momento. Por esta razón, El diseño de la sesión debe tener bien establecidas sus fases, los objetivos de cada una de ellas y los materiales a utilizar. Para ello, proponemos las siguientes fases: obertura, cuerpo y cierre.

Obertura

Los objetivos de esta fase son en su conjunto asegurar un clima social favorable para el trabajo, esto se consigue al ganar la atención de los estudiantes, revisar los logros alcanzados durante la sesión anterior y establecer las metas para la sesión. A continuación abordamos cada uno de los objetivos de la obertura.

Asegurar un clima social favorable para el trabajo

Ganar la atención de los alumnos

Con seguridad los alumnos habrán tenido una serie de actividades previas a su estancia en la comunidad de aprendizaje. En tal caso, los alumnos aún no están listos para entrar de lleno a trabajar en las matemáticas, de hecho es muy probable que no todos los alumnos se encuentren ya en el espacio destinado a la comunidad de aprendizaje o algunos estén dando fin a la actividad anterior (una clase, el receso, cambio de salón, etc.). De la misma manera, el maestro se integra a la comunidad habiendo tenido sus propias actividades, de tal manera que maestro y alumnos deben prepararse para dar inicio a la sesión.

Un aspecto muy importante que debemos tomar en cuenta es la dinámica de los grupos. Un grupo deja de ser el mismo cada vez que se integra un miembro. Por ejemplo, en un salón de clases a nivel secundaria, la dinámica grupal cambia cada vez que entra un maestro diferente a impartir su clase, y a su vez el comportamiento del grupo es diferente con cada uno de ellos. De la misma manera, la presencia de un alumno que estuvo ausente en la sesión anterior, cambia la dinámica de trabajo dentro del salón. Por ello afirmamos que un grupo no siempre es el mismo y el maestro o tutor que coordina una comunidad de aprendizaje debe tener esto muy en cuenta.

A continuación se presentan algunas sugerencias que pueden a ayudar a asegurar un clima social favorable para el trabajo y ganar la atención de los alumnos

Interesarse por los alumnos

Una forma útil de comenzar a construir socialmente la comunidad de aprendizaje, es por medio de acciones sencillas tales como:

- Saludar a los alumnos.
- Interesarse y preguntar sobre sus actividades anteriores.

- Escuchar las inquietudes que en el momento deseen expresar aunque no tengan nada que ver con las matemáticas.

Con estas acciones, los alumnos aprenden, como mencionamos más arriba, no sólo matemáticas, sino también habilidades sociales como la confianza, el respeto y el apoyo, por mencionar algunas, además de que maestro y alumnos se preparan para comenzar las actividades en la comunidad de aprendizaje.

Experiencia dentro de la comunidad **π**

Los seis alumnos, miembros de la comunidad de aprendizaje, venían de secundarias diferentes y se integraban poco a poco, de hecho en ocasiones llegaban cuando la fase de obertura llegaba a su fin. El tutor tenía la costumbre de preguntar cómo les había ido en la escuela. Preguntaba "¿Alguien tiene una aventura escolar que quiera contarnos brevemente?", o "¿Cómo les fue el fin de semana?", las preguntas iban encaminadas a conocer un poco más a los alumnos. En un principio, solamente contestaban con monosílabos "si", "bien" y en el mejor de los casos con frases cortas: "más o menos", "nada importante", "como siempre." Con el paso del tiempo, los miembros de la comunidad **π** presentaron mayor confianza en los demás, y los comentarios comenzaron a ser más amplios. Durante esta parte se hablaba de deportes, de sus travesuras en la escuela, de su música y comics favoritos, de sus aventuras en casa y con sus amigos. Cada uno aprendió que cuando una persona se expresaba, tenía el derecho de ser escuchado por todos, sin interrupciones y en un ambiente fuera de críticas, sabían que cada cual tenía su tiempo para expresarse y para escuchar. Estas actitudes fueron favorecidas poco a poco y cada una de las sesiones en donde se desarrollaba la comunidad.

Durante cierta sesión, sólo habían llegado dos alumnos y el tutor. Uno de ellos se le percibía cabizbajo y pensativo, características que hasta el momento no había presentado. Al verlo comenzó el siguiente diálogo:
Tutor: Te noto raro Nicolás, ¿estás triste?
Nicolás: un poco.. pero no importa.
T: Claro que importa, estamos dispuesto a escucharte si tu quieres hablar.
Domingo: si quieres hablar nosotros te escuchamos, mira, ya guardé mis cosas para ponerte atención.
N: La muchacha que me gusta ya no me habla.

Nicolás empezó a expresar su tristeza mientras era escuchado con atención. Mientras tanto, los demás miembros de la comunidad fueron llegando y al ver que Nicolás hablaba se sentaron y escucharon sin interrumpirlo. Cuando terminó el tutor comentó "la forma en que te podemos apoyar, aparte de escucharte, es intentar darte un punto de vista propio de cómo vemos tu situación si tu quieres. Alguno de ustedes (los demás miembros de la comunidad) le gustaría dedicarle algunas palabras a Nicolás, por su puesto que no es forzoso, a quien le nazca decir algo lo puede hacer."

Los otros miembros de la comunidad decidieron darle su propio punto de vista, sin burlas y con todo el respeto que la ocasión merecía, al terminar, el tutor preguntó a Nicolás si estaba listo para comenzar con las actividades de la comunidad. En este punto, el grupo no era el mismo que cuando Nicolás comenzó a hablar.

Este es un ejemplo de las grandes cosas que se pueden generar con acciones sencillas como interesarse por los alumnos. Aunque en esta sesión se omitieron algunos aspectos planificados como la "Lectura del día" y la "Revisión de los logros alcanzados hasta el momento" (que expondremos en seguida), fue un momento que ayudó a cohesionar a la comunidad **π.**

La lectura del día

Otra manera de ganar la atención de los alumnos para introducirlos al estudio de las matemáticas y crear un clima social favorable, es el uso de "*La lectura del día*". En esta lectura, se presenta una breve anécdota sobre la vida de un matemático. Normalmente, las biografías de los matemáticos, están llenas de aspectos históricos relevantes, pero se les presenta como seres extraordinarios e inalcanzables. El objetivo de la Lectura del día, es comenzar por despojar a las matemáticas de su mitificación y presentar a los grandes matemáticos como los seres humanos que fueron. Esto cambia la percepción de los alumnos respecto a las cualidades de alguien que sabe matemáticas y los ayuda a identificarse con ellos, pues se dan cuenta de que muchos fueron adolescentes como ellos.

La lectura del día presenta diferentes aspectos de las matemáticas o de los matemáticos:

- Aspectos históricos sobre algún tema o descubrimiento matemático.
- Una anécdota graciosa de los matemáticos, o aspectos de su vida cotidiana, presentando después sus aportaciones.
- Acciones ingeniosas de los matemáticos para solucionar un problema de la vida cotidiana o para dar respuesta a una interrogante.

Antes de la *lectura del día*, el maestro puede introducir un breve comentario o pregunta a los alumnos para atraer su atención. Después, la lectura puede ser hecha por un alumno en voz alta y al final el tutor puede hacer preguntas sobre la lectura introduciendo aspectos como "¿Les llamó la atención algo de la *lectura del día*?", "¿Se hubieran imaginado algo así de un matemático?", "¿Se parece a algo que ustedes hayan vivido?" y si fue así "¿Qué hicieron ustedes o que hubieran hecho?". A continuación presentamos un ejemplo de la interacción entre tutor y alumnos al respecto de la *lectura del día*. En este caso de trata de un aspecto de la vida cotidiana de un matemático (la lectura completa aparece en el anexo 1).

Experiencia dentro de la comunidad π

Tutor: Vamos a comenzar con nuestra lectura del día. ¿Saben ustedes quién ha sido considerado el mayor genio del siglo XX?
Nicolás y Raymundo: Einstein.
T: Pues el día de hoy vamos a conocer un poco más de la persona considerada, después de Einstein, como el mayor genio del siglo XX.
Elías: ¿Newton?
Nicolás: ¿Galileo?
T: NO. Galileo murió a mediados del siglo XVII y Newton murió a principios del siglo XVIII. ¿Recuerdan la lectura que hicimos sobre el nacimiento de Newton?
Alicia: Si. El mismo año en que murió Galieo Galilei, nació Newton.
T: Así es, pues la lectura del día de hoy tiene una coincidencia parecida. Nuestro personaje nació el año en que se celebraba el 300 aniversario de la muerte de Galileo Galilei. Pero, además, nuestro personaje ocupa actualmente el puesto que desempeñó Isaac Newton hace muchos años. Vamos a ver la lectura de Stephen Hawking (un alumno hace la lectura en voz alta y comienzan los comentario finales).
Domingo: ¿Qué enfermedad tiene?
T: No me acuerdo, pero déjame investigarlo y la siguiente sesión te lo digo[14]. Según lo que leímos, ¿cómo lo ha dejado su enfermedad?
D: En una silla de ruedas y me parece que no puede hablar.
E: ¿Entonces cómo se comunica?
T: Algunas personas le han donado mini computadoras para comunicarse. Si les interesa la vida de Hawking, les puedo traer otra lectura sobre él ¿qué les parece? Para terminar con la lectura del día de hoy ¿qué enseñanza nos puede dejar esta breve lectura?
N: Que fue un estudiante como cualquiera de nosotros.
E: Y que era inteligente pero no un super sabio en la escuela, así como un alumno normal. A parte de que iba desarreglado a la escuela. Todos los matemáticos que hemos visto eran así, no se peinaban o estaban desarreglados.
A: Lo que yo aprendí es que él no se dio por vencido, a pesar de su enfermedad siguió adelante. Yo creo que ese es un gran ejemplo para nosotros.
T: Muy bien. Creo que fue una lectura muy provechosa para todos nosotros. Pero ya llegó el momento de pasar a la solución del problema de esta sesión.

---

[14] La enfermedad se llama ALS o enfermedad de las neuronas motoras.

En el anexo 2, presentamos dos lecturas breves sobre anécdotas de un matemático.

Revisión de logros alcanzados

La revisión de los logros alcanzados por los alumnos, se da en términos sencillos y breves, su objetivo es realizar un recordatorio por parte de todos los miembros de la comunidad, incluido el maestro, de los temas vistos y los logros alcanzados durante la sesión anterior. A este respecto es común que los alumnos expresen aspectos generales sin entrar en detalles. Si el maestro lo considera pertinente, puede profundizar en los comentarios de los alumnos haciendo preguntas más específicas, además de dar su propio punto de vista sobre los alcances que observó de los alumnos.

Experiencia dentro de la comunidad **π**

Ya avanzadas las sesiones de la comunidad **π**, el tutor se percató de los avances que los alumnos habían tenido; sin embargo, ellos no los reportaban en su hoja de metas[15], entonces para hacerles concientes sus avances, procuró que intentaran darse cuenta de ello por sí mismos.

Tutor: ¿Recuerdan lo que vimos la sesión anterior?
Oswaldo: Vimos problemas de fracciones.
Alicia: Aprendimos a hacer suma de fracciones.
T: He visto que han tenido una serie de avances durante las últimas sesiones ¿Qué logros han notado ustedes en el tiempo que llevamos en la comunidad **π**?
Nicolás: Hemos aprendido a resolver problemas.
T: ¿Resuelven los problemas de la misma manera en que los resolvían antes?
N: No. Antes leíamos el problema y luego, luego, hacíamos las operaciones sin fijarnos en lo que nos pedía el problema.
T: Ese es un aspecto muy importante. ¿Ahora cómo resuelven los problemas?
N: Ahora leemos, identificamos los datos y nos fijamos en lo que está pidiendo el problema.
T: Muy bien, ¿a qué se debe que ahora ya lean bien el problema para saber lo que les está pidiendo?
Alicia: A que utilizamos la tarjeta (auto-instruccional), en ella están todos los pasos que debemos seguir para resolver un problema.
T: Y esos pasos de la tarjeta ¿qué son?

---

[15] El uso de la hoja de metas se expone en el siguiente apartado.

A: Los pasos de una estrategia.
T: Es decir, que han aprendido a utilizar una estrategia para resolver problemas matemáticos.
A: Si.
T: ¿Y podrán utilizar esta estrategia para resolver otros problemas aunque no sean de fracciones?
A: Si, porque en todos los problemas debemos saber exactamente qué nos piden encontrar.
T: ¿Han resuelto los problemas solos o con ayuda?
N: A veces solos y a veces con ayuda. Luego tu nos ayudas cuando ya no sabemos por dónde seguir.
T: ¿Hemos aprendido a trabajar en equipo entonces?
A: Sí, a mi se me hace más fácil trabajar en equipo porque hay cosas de las que no me acuerdo y entonces puedo apoyarme en uno de ellos y ya sé que me pueden explicar.

Este diálogo con los alumnos puede dar pauta para el establecimiento de metas, pues los miembros pueden expresar dudas que tengan aún de la sesión anterior y pretendan clarificarlas en la sesión actual. Además, es una buena oportunidad para que los alumnos tomen conciencia de sus conocimientos y de la utilidad de adoptar una estrategia apropiada para la solución de problemas

Establecimiento de metas

En este apartado pretendemos que los alumnos establezcan sus propias metas para la sesión. El objetivo de las metas es que los alumnos delimiten y hagan accesibles sus actividades. Las metas promueven la motivación intrínseca de los estudiantes, hacia la realización de una tarea, esto es, por medio del establecimiento de la meta, el alumno imprimirá su propio esfuerzo para alcanzarla, pues no es impuesta por otras personas, se trata de un objetivo propio.

Las metas para poseer un valor motivacional deben poseer las siguientes características: deben de ser próximas, específicas y accesibles (Bandura, 1997, citado en Jiménez, 2002).

- Próximas: El logro de la meta debe ser cercana en cuanto a tiempo se refiere. Las metas dentro de la comunidad **π** estaban propuestas para alcanzarlas durante la misma sesión con el fin de valorarlas al final en términos de que si se alanzaron o no y porqué.

- Específicas: Las metas deben ser actividades concretas y delimitadas.

- Accesibles: Las metas deben representar un reto al alumno, pero debe estar acorde a sus habilidades con el fin de que sea alcanzada y experimente, de esta manera, éxitos en su esfuerzo.

En la comunidad **π** los alumnos establecen metas que pueden tener que ver con un conocimiento: aprender un algoritmo, entender un concepto, resolver un problema, etc. También pueden relacionarse con una situación afectiva: perder miedo a las matemáticas, controlar los nervios al explicar, etc.

Cada alumno registra sus metas en la hoja destinada para ello (anexo 3) la cual terminan de llenar en el cierre de la sesión. Por otra parte, el tutor pide a los miembros que expresen las metas que como comunidad se pretenden alcanzar en la sesión, éstas son registradas en la hoja de metas grupal (en el anexo 4 se muestra una hoja de metas grupal llena).

Algunos ejemplos de metas planteadas por los alumnos en la comunidad **π** fueron:

- Resolver más problemas.
- Aprender sumas de fracciones.
- Trabajar otra vez con Alicia.
- Trabajar en equipo.

Cuerpo

El cuerpo es la parte medular de la sesión de trabajo, durante esta fase se describe el papel del maestro dentro de la comunidad de aprendizaje. Su objetivo es crear un ambiente favorable para el aprendizaje de las matemáticas promoviendo la interacción entre los miembros de la comunidad para que los alumnos practiquen diversas formas de solución al problema presentado, tomen acuerdos y comuniquen resultados. En esta fase de la instrucción se consideran los siguientes rubros:

- Presentación del problema
- Solución del problema por parte de los alumnos
- Intervención del tutor

Presentación del problema

Para llevar a cabo los propósitos del programa en la materia de matemáticas, la SEP (1993 y 1999) recomienda diseñar y seleccionar situaciones didácticas que pueden dividirse en:

- Ejercicios: su objetivo es favorecer en los alumnos la apropiación de los conocimientos básicos además de ayudarles a adquirir destreza y seguridad en la aplicación de procedimientos y técnicas.
- Problemas de aplicación, o aplicaciones: ayudan para mostrar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana.
- Problemas de exploración y búsqueda: son necesarios para que los alumnos formen conceptos, desarrollen capacidades y aptitudes para la investigación, comuniquen sus resultados y justifiquen sus afirmaciones.

El plan de estudios, sugiere entonces, el uso de ejercicios, problemas de aplicación y de exploración con el fin de ampliar y consolidar en los alumnos sus conocimientos, habilidades y capacidades matemáticas para aplicarlas en el planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana, además de que entiendan, organicen y comuniquen la información cuantitativa.

Como podemos ver, la tendencia actual es trabajar la resolución de problemas. Es necesario entonces analizar qué clase de problemas son los idóneos para presentar a los alumnos, esto merece que lo abordemos a mayor profundidad en otro apartado que presentaremos más adelante. Por ahora, nos limitaremos a describir, a *grosso modo*, las actividades en que se divide el cuerpo de la instrucción.

Durante la etapa de presentar a los alumnos el problema, es necesario no presentar cualquier problema o ejercicio, es necesario adecuar sus características al nivel de conocimiento y habilidad que presenten los miembros de la comunidad. El problema o ejercicio a resolver, debe implicar un verdadero reto para los alumnos, pero que pueda ser resuelto con sus conocimientos y habilidades con el fin de no desmotivarlos y evitar que se den por vencidos fácilmente. Debemos recordar las características de los alumnos con problemas de aprendizaje:

Características de los alumnos con problemas de aprendizaje en la resolución de problemas (Flores, 1999):

1. Sus razonamientos son inconsistentes.
2. Cometen errores frecuentes en la realización de la operación.
3. Tienen dificultades en la comprensión del texto del problema.
4. Difícilmente emplean mediadores verbales que dirijan su ejecución.
5. Están ausentes estrategias de apoyo como dibujos o diagramas.
6. Se les dificulta identificar la fuente de sus errores.
7. No emplean sus experiencias en problemas con un contenido semántico similar.
8. Sustentan sus soluciones de los problemas en informaciones, creencias o experiencias irrelevantes.
9. Se dan por vencidos fácilmente.

Los problemas que planteamos dentro de la comunidad de aprendizaje están acorde al currículo escolar, sin embargo, dadas las características de los alumnos con problemas de aprendizaje, es necesario, en ocasiones trabajar con contenidos correspondientes a años anteriores al nivel actual que cursan los alumnos. Esto nos es particularmente útil, pues hay que recordar que con frecuencia los alumnos con problemas de aprendizaje presentan lagunas en sus conocimientos.

Para determinar el nivel de dificultad apropiado de los problemas que vamos a presentar, es necesario recurrir a la valoración del conocimiento de los alumnos, en donde consideremos tanto el proceso que siguen en la resolución de problemas como en el producto obtenido. En el apartado "Selección de problemas adecuados[16]," presentamos ejemplos de la valorización del conocimiento de los

---

[16] En el apartado "Selección de problemas adecuados" (página 119) presentamos la teoría que sustenta la valoración del conocimiento en los alumnos, mientras que en el apartado "Análisis de problemas de fracciones" (página 126) presentamos ejemplos concretos, producto de la experiencia en la comunidad de aprendizaje.

alumnos, y con base en ello, hacemos el análisis de los problemas a presentar durante las sesiones de la comunidad de aprendizaje.

En este momento es importante que el tutor anime a los alumnos a solucionar el problema por sí mismos. Les puede guiar para que recuerden sus experiencias con problemas similares.

Solución de problemas por parte de los alumnos

La instrucción mediada por un compañero.

La instrucción mediada por un compañero se caracteriza por el rol activo de los estudiantes, quienes se apoyan entre sí para dar solución a un problema o actividad escolar. La función del maestro es promover esta forma de trabajo entre los alumnos. Las principales formas de este tipo de instrucción son: la instrucción entre pares y aprendizaje cooperativo (Jones et. al. 1997).

Es necesario que el maestro tenga una idea clara de la forma en que va a animar a los alumnos para que busquen la solución del problema presentado e intervenga sólo cuando los alumnos estén en un atolladero que les impida continuar en el proceso de solución.

Ahora valoramos que los alumnos tengan un papel activo en el aprendizaje. Lo cual ocurre cuando se entabla la comunicación entre ellos para que tengan un intercambio de opiniones y de esta manera se apoyen entre sí para dar solución a un problema matemático. Esto podemos lograrlo promoviendo la instrucción mediada por un compañero donde los estudiantes sean capaces de mostrar estrategias escuchando las estrategias de otros, verbalizar sus ideas matemáticas, discutir diferencias entre estrategias, justificar sus pensamientos. Tomar acuerdos para llegar a una solución convincente para ellos.

El maestro puede promover las principales formas de la instrucción mediada por un compañero. Si forma equipos de dos personas donde uno de los alumnos posee mayor conocimiento y habilidad matemática con la consigna de apoyar explicando a otro alumno que tiene un nivel menor que él, entonces el maestro estará promoviendo la instrucción entre pares.

Si conforma los equipos con más de dos alumnos y da la consigna de que todos deben entender e intervenir en el proceso de solución de un problema y que la responsabilidad de ello es compartida por todos, entonces estará promoviendo el aprendizaje cooperativo.

En un principio, los alumnos invertirán poco tiempo en la solución de un problema, algunos se darán por vencidos y se distraerán. Aconsejamos al maestro no decepcionarse. Ambos tipos de instrucción han demostrado tener éxito (como lo hemos expuesto en la sección teórica), en la instrucción entre pares se benefician tanto el alumno que instruye, como el que es instruido. Mientras que en el aprendizaje cooperativo todos los alumnos se benefician por igual independientemente de su grado de capacidad y rendimiento académico (Melero y Fernández, 1997).

Sólo es cuestión, por un lado, que los alumnos se habitúen a trabajar de esa forma, y por otro, que el maestro supervise y dé los apoyos necesarios a los alumnos. Es conveniente que los alumnos trabajen regularmente por medio de la instrucción mediada por un compañero. Si el maestro se desespera por no obtener los resultados deseados y decide cambiar de inmediato la forma de trabajo y sólo promueve el trabajo cooperativo por un periodo corto, entonces se expone a obtener resultados negativos para el aprendizaje de los alumnos (Melero y Fernández, 1997).

Cuando los alumnos se han habituado a trabajar cualquier tipo de instrucción mediada por un compañero, son capaces de desarrollar una serie de estrategias y habilidades que les permiten enfrentar de una manera exitosa los problemas matemáticos que se les presentan. A continuación presentamos el fragmento de un diálogo entre dos alumnos en la resolución de un problema.

Experiencia dentro de la comunidad π

Ambos alumnos tenían la experiencia de trabajar con un alumno experto. En aquellas sesiones, el tutor dio la consigna de que ellos (los alumnos novatos) serían quienes explicarían al resto de la comunidad su proceso de solución.
En esta ocasión, el tutor decidió ponerlos a trabajar juntos.

Alicia: el problema nos pide encontrar la cantidad de fruta que se necesitó para preparar la ensalada.
Elías: Tenemos que sumar todo.
A: No podemos sumarlo todo... bueno si podemos, pero mira, algunas frutas nos la dan en fracciones y otras no.
E: Vamos a separar las que podamos sumar y después le preguntamos a tutor.
A: Bueno, pero son muchas cantidades, vamos a escribirlas todas para que no nos perdamos (las escriben. Ambos deciden trabajar en la hoja de Alicia). Ya están ordenadas, ahora vamos a sumarlas.
E: Es más fácil sumar las frutas que no están en fracciones (ambos hacen la suma por separado).
A: ¿Cuánto te salió?
E: 6.950 kilos, ¿y a ti?
A: 5.950. Haber, vamos a revisar la suma (lo hacen). Me salió 5.950.
E: A mí me volvió a salir 6.950. A ver, enséñame cómo la hiciste (Alicia realiza la suma en voz alta), espera, en esta suma llevamos uno. Se te olvidó tomar en cuenta el uno que llevabas.
A: Tu estás bien, el resultado es 6.950. Ahora tenemos que sumar las fracciones (ambos las realizan por separado, pero Alicia tiene duda en el procedimiento de obtener el común denominador y pregunta al tutor quién está supervisando). El común denominador es dos ¿verdad?
Tutor: Déjame ver (el tutor observa que el común denominador es erróneo y observa también el de Elías, el cual es correcto). Elías, ¿te acuerdas cómo sacamos el común denominador?
E: Sí.
T: Qué tal si le recuerdas el procedimiento a Alicia.
E: Mira Alicia se hace ... (le explica).

Alicia y Elías llegan a la respuesta correcta. Ambos se involucraron en la solución del problema, al final, Alicia se propuso para explicar su proceso a los demás miembros de la comunidad.

Intervención del tutor

La intervención del tutor en el apoyo a los alumnos es característica de la instrucción estratégica, en la cual el maestro y los alumnos están en constante interacción. Los apoyos que proporciona el maestro se caracterizan por evitar, cuando es posible, dar las respuestas y explicaciones directas. Como veremos a lo largo de todos los recuadros de "Experiencia dentro de la comunidad **π**" los apoyos dados por el tutor son por medio de preguntas al alumno para que éste reflexione y encuentre respuesta a la duda que presenta.

Polya (1969) hace las siguientes recomendaciones a los maestros en el apoyo a alumnos:

- El maestro no debe ayudar ni mucho ni poco, debe dejar al alumno asumir una parte razonable del trabajo.
- Si el alumno no está en condiciones de avanzar lo suficiente en su proceso de solución, entonces, el maestro debe mantenerle al menos la ilusión de que su trabajo está dando resultados para darle indicios de su progreso. Pero, entonces, debe apoyar discretamente al alumno sin imponerle su ayuda.
- Lo mejor es apoyar al alumno de manera natural. Para ello, el maestro debe ponerse en el lugar del alumno, y ver desde su punto de vista para así intentar comprender lo que pasa por su mente, y plantearle preguntas, recomendaciones, operaciones intelectuales o indicarle algún camino que pudiese ocurrírsele al propio alumno.

Igualmente Flores, Farfán y Ramírez (en prensa) sugieren que el tutor durante la interacción con el alumno:

1. Identifique mediante el diálogo los conocimientos y entendimiento que del problema tenga el alumno. Mediante preguntas de inferencia y la petición de explicaciones, induzca a los alumnos a que: razonen; justifiquen sus acciones y, en su caso las replanteen. Y con ello, que identifiquen algún error; modelen mediante una representación gráfica las relaciones

expresadas en el problema; identifiquen un algoritmo apropiado. Estas interacciones ayudan a los alumnos a establecer o clarificar significados.

2. Apoye a cada alumno, o grupo de alumnos, partiendo de la identificación de sus conocimientos y entendimiento del problema. Por ejemplo, en el caso de una solución incorrecta, primero identifica cómo entendió el problema y en qué basó su entendimiento. A partir de esta información el tutor induce al alumno a que encuentre las similitudes y las diferencias entre el problema que puede solucionar y el que no soluciona adecuadamente. La ayuda que proporciona el tutor se desvanece a medida que el alumno es más competente.

3. Motive constantemente a cada alumno: ofreciendo retroalimentación positiva por sus logros; ayudando a superar las dificultades; practicando con problemas que hablan de eventos cotidianos y atractivos; demostrándole que sus soluciones correctas son resultado de la estrategia y conocimientos que aplica en el problema y que si no se obtiene un resultado correcto se puede intentar una nueva solución.

Estas observaciones implican el fin último de la instrucción estratégica que es desarrollar independencia en los alumnos en sus actividades académicas, pues no siempre habrá un maestro o compañero para apoyarlos.

Después de brindar los apoyos necesarios, el maestro permite a los alumnos terminar con el problema y animarlos después a comunicar sus resultados finales y el proceso de solución del problema a los demás miembros de la comunidad de aprendizaje.

Cierre.

Durante el cierre pretendemos que los alumnos expresen las problemáticas encontradas durante su proceso de solución, además de que distingan las fortalezas que tuvieron o las habilidades que han ido desarrollando y los conocimientos que les falta por consolidar. La información expresada por los alumnos, nos es de gran utilidad para diseñar los contenidos de la próxima sesión. Las actividades que componen el cierre de la sesión están encaminadas para promover la auto-evaluación de desempeño, conocimientos y auto-recomendaciones futuras de los propios alumnos. Finalmente el tutor da retroalimentación positiva a cada uno de ellos.

El cierre lo dividimos en las siguientes etapas: Animar a los alumnos a expresar sus problemáticas y fortalezas, llenado de hoja de metas

Expresión de problemáticas y fortalezas

Aunque esta etapa parece de lo más sencilla y lógica, es de suma importancia, porque permite a los alumnos expresar la percepción de sí en su desempeño durante la sesión. El hecho de poner en palabras su desempeño, les permite ser concientes de conocimientos, habilidades y estrategias que han ido desarrollando o que les falta por desarrollar. Con ello les permitimos valorar su desempeño, es decir, damos la pauta para su autoevaluación en un clima de confianza fuera de críticas.

Sugerimos dos formas de animar la expresión de los alumnos, dependiendo del tiempo que se tenga para ello: el tutor como interlocutor de los alumnos y un alumno como interlocutor de otro. Es recomendable utilizar la primera forma durante las primeras sesiones de la comunidad de aprendizaje e irla sustituyendo paulatinamente con la segunda.

El tutor como interlocutor de los alumnos.

Esta forma de relación es la más común cuando pretendemos que los alumnos se expresen. Básicamente consiste en que el tutor hace preguntas directas a los alumnos sobre su desempeño, y la respuesta es dirigida al tutor. Las preguntas que el tutor puede hacer a cada alumno son las siguientes: ¿Cómo te pareció el problema de esta sesión? ¿Se te hizo fácil o difícil? ¿Por qué? ¿Lo resolviste solo? ¿Qué estrategias utilizaste para resolverlo? ¿Qué te haría falta para resolver mejor los problemas? ¿Qué recomendaciones harías para la siguiente sesión? En el siguiente cuadro presentamos la interlocución de éste tipo:

Experiencia dentro de la comunidad π

Tutor: Domingo, ¿Cómo te pareció el problema de esta sesión?
Domingo: Estuvo dificil.
T: ¿Por qué lo consideras dificil?
D: Porque no me acordaba cómo se hacía la suma de fracciones.
T: ¿Resolviste solo el problema?
D: No. Me ayudó Raymundo.
T: ¿Te despejó tu duda?
D: Sí. Después de que me explicó ya le entendí mejor a la suma de fracciones.
T: Me di cuenta que comenzaste a resolver el problema tu solo, pero después te apoyaste en Raymundo, buscar el apoyo de alguien más es una buena estrategia. ¿Podrías decirme las estrategias que utilizaste desde el comienzo del problema?
D: Me apoyé en la tarjeta (auto-instruccional) y seguí los pasos, leí el problema, me fijé que es lo que me pedía, busqué los datos, no hice un dibujo porque era claro lo que me pedía el problema, después como no me acordaba de la suma de fracciones le pregunté a Raymundo y cuando me explicó terminé el problema.
T: ¿Y tu respuesta fue correcta?
D: No.
T: ¿A que crees que se debió?
D: A que me falló una suma.
T: ¿Cómo podrías superar ese problema que no te permitió llegar a la solución correcta?
D: Revisando las operaciones.
T: ¿Qué recomendación te harías para los problemas futuros?
D: Revisar las operaciones para ver si están bien.

Un alumno como interlocutor de otro.

Dentro de una comunidad de aprendizaje pretendemos generar la comunicación entre los alumnos, no sólo durante el cuerpo de la sesión, también durante el

cierre. La interlocución entre ellos puede ser de dos formas: un alumno formula preguntas a otro o un alumno expresa su propio desempeño a otro.
Un alumno formula preguntas a otro: La ventaja que los alumnos obtienen al ser interlocutores entre ellos, es que aprenden a hacer preguntas más precisas a otro sobre el proceso de solución, con ello desarrollan su habilidad de comunicación pues no solamente se dedican a responder, sino también a elaborar preguntas, que de por sí, tienen su propia dificultad para ser formuladas.

En un principio, los alumnos suelen hacer pocas preguntas, y al formularlas se expresan con cierta pena. Al paso del tiempo, cuando observan al tutor hacer preguntas, ellos comienzan a formular las propias utilizando como base las elaboradas por el tutor en ocasiones anteriores.

Un alumno expresa su propio desempeño a otro: El tutor puede animar a los alumnos a que se expresen entre sí, de esta manera el tutor deja de ser el interlocutor y promueve la comunicación directa entre ellos. Pedir a los alumnos que comuniquen su desempeño uno a otro, es una consigna con cierto grado de dificultad, pues no están acostumbrados a ello. En esta ocasión la díada no es el que pregunta y el que responde, sino que se sustituye por el que comenta y el que escucha.

En un principio los alumnos se dirigen al tutor, y éste debe continuamente recordar que las palabras no deben ser dirigidas hacia él sino hacia un compañero. El tutor tiene que preparar el terreno para que la comunicación fluya y que los alumnos puedan expresarse en un ambiente fuera de críticas, además, debe ser conciente de la dificultad que tienen los alumnos para expresar su propio desempeño. Para promover la interacción entre ellos, el tutor puede hacer uso de frases incompletas que el alumno deberá ir completando para facilitarle su expresión. El uso de frases incompletas permite al alumno reflexionar sobre su desempeño para completarlas. A continuación presentamos un ejemplo de ello (las frases incompletas aparecen entre paréntesis y en cursivas).

Experiencia dentro de la comunidad π

Tutor: Es el momento de ver cómo fue el desempeño de cada uno durante esta actividad, pero ahora no me lo van a comentar a mí, sino que se lo van a comentar entre ustedes. Comenzando con Elías y hacia su izquierda va a elegir a algún compañero y le va a expresar cómo considera que fue su desempeño en esta sesión. ¿A quién te vas a dirigir Elías?

Elías: A Oswaldo
T: Muy bien, adelante.
E: Yo creo que me distraje mucho... (el alumno a pesar de elegir a Oswaldo, mira al tutor y le habla a él)
T: Elías, elegiste a Oswaldo, y él está enfrente de ti, díselo a él.
E: (voltea hacia Oswaldo y se dirige a él) Yo creo que me distraje mucho (*y me distraje porque...*) porque no le entendía al problema (*para entenderlo yo hice...*) mmm... le pregunté a Nicolás, vi cómo lo estaba haciendo y me dio ideas para seguir con el problema, (*cuando pasé al pizarrón a explicar mi solución me sentí...*) me sentí incómodo porque no me gusta pasar al pizarrón *(pero aún así cuando expliqué mi solución me sentí...)* bien, (*porque....*) porque se me quitó la pena y me quedó claro cómo sacar el denominador para hacer la suma de fracciones.
T: Muy bien Elías, todo esto que acabas de decir exprésaselo a Oswaldo como si fuera un resumen.
E: (dirigiéndose a Oswaldo) Me di cuenta de que me distraigo cuando no entiendo el problema, pero cuando le entiendo no me distraigo más, y ya no me siento tan nervioso cuando paso a explicar algo al pizarrón.

Se les da la oportunidad de expresarse a todos los alumnos. Cuando todos hubieron pasado, el tutor da su propio punto de vista para cada miembro de la comunidad de aprendizaje, destacando la retroalimentación positiva, reconociendo los logros y avances que ha percibido de cada uno de los miembros y dando sugerencias para mejorar su desempeño matemático.

Llenado de hoja de metas

La última parte del cierre consiste en llenar la hoja de metas individual y grupal. El tutor debe estar consciente de que en ocasiones a los alumnos se les dificulta escribir sus estrategias debido a que la actividad de la sesión los ha cansado, por ello se realiza la actividad verbal descrita anteriormente. Una forma de cubrir esta eventualidad es por medio de la hoja de metas grupal, que es llenada por el tutor, quien puede leer a los alumnos los apartados de la hoja de metas grupal y con la información que le proporcionen llenarla él mismo (anexo 4).

El modelo de la llave dentro de la comunidad de aprendizaje

> *Los ingenieros dicen que se ha "inventado" una idea nueva*
> *cuando se demuestra que funciona en el laboratorio.*
> *La idea se transforma en "innovación"*
> *sólo cuando se puede reproducir sin contratiempos,*
> *en gran escala y a costes prácticos...*
> *Según estos términos, las organizaciones inteligentes*
> *ya se han inventado pero aún no se han innovado.*
> -Peter M. Senge-

Hasta el momento hemos descrito el diseño de las sesiones de la comunidad de aprendizaje. En este apartado retomaremos el modelo de la llave propuesto por Bottge (2001) ya desarrollado en la sección teórica. El objetivo es analizar la manera en que la instrucción dentro de la comunidad de aprendizaje promueve el aprendizaje del alumno.

Problemas significativos generan compromiso por el aprendizaje

Primera condición del modelo de la llave:

Los problemas deben ser significativos para que el alumno se interese en resolverlos y con ello se comprometa en su aprendizaje.

Para que un problema sea significativo para los alumnos debe poseer ciertas características, en este apartado haremos mención de ellas. Un problema significativo, debe despertar primeramente el interés de los alumnos, esto puede conseguirse variando las características de los problemas, por ejemplo:

- Variar la forma en que se presenta un problema: Los problemas pueden presentarse de manera diferente a la que comúnmente están acostumbrados los alumnos, que puede ir desde una hoja con ilustraciones llamativas, hasta presentarles materiales que puedan manipular (una hoja, un dibujo, cerillos, figuras de cartón) y proponerles una actividad con ellos.

- Variar la manera de presentar los datos: podemos presentar un problema típico, pero que en su contexto hagamos uso de nombres de personajes o palabras que sean familiares a los alumnos. Así como datos reales que sirvan como información general.

- Variar la manera de resolver el problema: Tal vez el problema que presentemos no contenga ninguna de las características anteriores, pero podemos pedir a los alumnos que lo resuelvan apoyándose en otros compañeros. Un problema compartido llama la atención de los alumnos.

Sin embargo, el aspecto más importante, es que los alumnos tengan las habilidades y conocimientos suficientes para resolver problemas, de lo contrario se desanimarían y perderían el interés por resolver más. Por ello, es de suma importancia que hagamos una valoración de los conocimientos de los alumnos para seleccionar adecuadamente los problemas. En el apartado de "Selección de problemas adecuados" profundizaremos en la valoración de los conocimientos y habilidades de los alumnos. Además haremos un análisis más profundo de los problemas a presentar.

Durante nuestra experiencia pudimos comprobar que no sólo los problemas pueden ser significativos, sino también las actividades en su conjunto dentro de la comunidad de aprendizaje con el fin de complementarse entre sí. La importancia de construir socialmente la comunidad radica en que todos los partícipes se sientan identificados como miembros de ella, participando y apoyándose entre todos. Por su parte, el tutor es el responsable de generar un ambiente positivo y motivante fuera de críticas, para que los alumnos se expresen sin sentirse ansiosos en su participación. Esto conduce a que los alumnos adquieran confianza de expresar sus ideas a sabiendas de que serán respetados por los demás miembros de la comunidad. Un modo para comenzar a lograr que los alumnos se sientan partícipes de la comunidad es pidiéndoles que pongan un nombre a "su comunidad."

Otras actividades encaminadas a hacer significativa la comunidad de aprendizaje, aparte de la interacción constante entre los alumnos, son los descritos en el apartado de Obertura: Ganar la atención de los alumnos interesándonos por sus actividades y por medio de la lectura del día.

La instrucción debe hacer explícita la estrategia para dar fundamentos

Segunda condición del modelo de la llave:

La instrucción debe hacer explícitas las estrategias utilizadas en la resolución de problemas con el fin de que los alumnos tengan fundamentos para enfrentar los problemas matemáticos.

Dentro de la comunidad de aprendizaje, favorecemos el desarrollo de estrategias para que los alumnos aborden de manera sistemática la solución de los problemas matemáticos y con ello tengan bases para apoyar sus soluciones.

En la comunidad hicimos uso de la tarjeta auto-instruccional diseñada por Flores (1999) cuyo sustento teórico abordamos en la primera sección de este trabajo bajo el titulo de "La resolución de problemas." Esta tarjeta (mostrada más adelante) sintetiza de manera sencilla y práctica, todos los pasos que otros autores han propuesto para la solución de problemas matemáticos. La tarjeta auto-instruccional se presenta como un buen ejemplo de enseñanza de estrategias conspicuas (sobresalientes) donde se deben detallar claramente y sin ambigüedades los pasos de una estrategia.

El uso de la tarjeta auto-instruccional tiene por objetivo, guiar al alumno en el proceso de solución de problemas matemáticos haciendo uso directo de ella en primera instancia, para finalmente apoyar al alumno en la internalización de la estrategia. Este proceso es paulatino y se compone de las siguientes etapas:

- El alumno se familiariza con la tarjeta auto-instruccional.
- El tutor modela el uso de la tarjeta auto-instruccional.
- El tutor encamina el uso de la tarjeta auto-instruccional.

- El tutor interactúa con los alumnos una vez comenzado el problema.

Tarjeta auto-instruccional[17].

1. Leo el problema.
2. Lo platico.
3. Digo la pregunta.
4. Busco los datos.
5. Hago un dibujo.
6. Escribo todos los datos en mi dibujo.
7. Busco una operación.
8. Escribo la operación.
9. La resuelvo.
10. Compruebo la operación.
11. Verifico si ocupé todos los datos.
12. Escribo la respuesta correcta.

El alumno se familiariza con la tarjeta auto-instruccional

En este primer paso, el tutor presenta la tarjeta a los alumnos, la lee junto con ellos y explica claramente cada paso de la estrategia. Los pasos de la estrategia que se muestran en la tarjeta resultan obvios para los alumnos por la sencillez en que se presentan. Sin embargo dejan de seguir la estrategia cuando se encuentran con problemas cuya solución a primera vista les parece también obvia. Cuando esto ocurre, el tutor guía al alumno en la segunda etapa del uso de la tarjeta.

El tutor modela el uso de la tarjeta auto-instruccional

Cuando los alumnos obtienen el resultado erróneo de un problema, en cuyo proceso de solución hace falta un paso de la estrategia, el tutor da mayor claridad a la utilidad de la tarjeta, resolviendo un problema, modelando todos los pasos de la estrategia, pensando en voz alta, hasta resolverlo completamente. Esta etapa

---

[17] La tarjeta auto-instruccional se había utilizado con alumnos de nivel primaria y constaba originalmente de 10 pasos. En nuestra experiencia con alumnos de secundaria, nos vimos en la necesidad de aumentar los pasos 6 y 11.

tiene como propósito que los alumnos perciban y reflexionen sobre la importancia de cada paso de la tarjeta aunque cada uno parezca obvio.

El tutor encamina el uso de la tarjeta auto-instruccional

Cuado presentamos el problema para la sesión, el tutor coordina el uso de la tarjeta pidiendo a un alumno que lea el primer paso de la estrategia y a otro alumno diferente que lo ponga en práctica. Esto podemos hacerlo durante los cuatro primeros pasos de la estrategia: Leo el problema, Lo platico, Digo la pregunta y Busco los datos. Una vez encaminada la estrategia, animamos a los alumnos a continuar solos en el proceso de solución.

El tutor interactúa con los alumnos una vez comenzado el problema

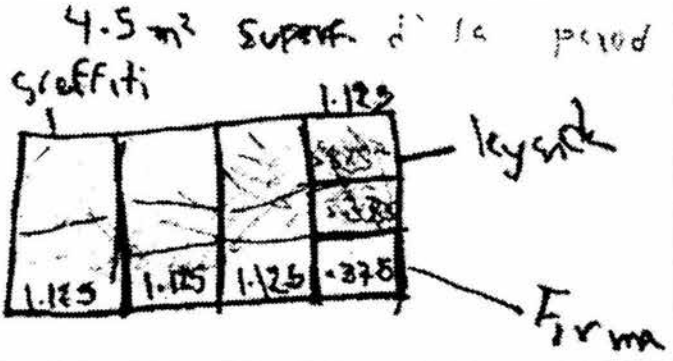
En este punto animamos a los alumnos a resolver el problema, pero no los encaminamos en la estrategia, solamente les recordamos no olvidar el uso de la tarjeta auto-instruccional. Cuando nos percatamos de que algún alumno o equipo se ha trabado en el problema, nos acercamos a ellos y si detectamos que el obstáculo está en el uso de la estrategia, entonces tomamos la tarjeta auto-instruccional, leemos cada paso y pedimos a los alumnos nos muestren cómo llevaron a cabo cada paso de la estrategia. Con esta forma de proceder, los alumnos se dan cuenta que en ocasiones omiten algún paso importante de la estrategia, no permitiéndoles tener claridad en la solución del problema. En el siguiente cuadro ejemplificamos este punto.

Experiencia dentro de la comunidad π
El problema para la sesión era el siguiente: Los graffitis *En un concurso de graffitis, se le va a dar a cada grafitero una pared que tiene una superficie de 4.5 metros cuadrados, para que hagan su obra. Los autores deben cumplir con los siguientes requisitos: tres cuartas partes de la pared deben destinarse al graffiti. Del resto de la pared, dos terceras partes deben ser destinadas para escribir una leyenda que hable de la obra, y una tercera parte para la firma del autor. ¿Qué superficie del total de la pared será abarcada por la leyenda? ¿Qué superficie para la firma del autor?*

Oswaldo, había comenzado a resolver el problema junto con un compañero. En un principio comenzó a dar sugerencias de solución, pero después dejó de participar y permanecía como espectador solamente. En su hoja de trabajo sólo había dibujado un rectángulo dividido en cuatro partes iguales. En ese momento el tutor, que estaba supervisando el trabajo de todos los alumnos, se acercó y lo apoyó con el uso de la tarjeta auto-instruccional:

Tutor: ¿Ya te trabaste Oswaldo?
Oswaldo: Si.
T: Veo que ya hiciste un dibujo, el rectángulo lo dividiste en cuatro ¿qué piensas hacer después?
O: No sé.
T: ¿Qué te parece si lo hacemos entre los dos? Yo comienzo a leer la tarjeta auto-instruccional y tu me explicas cómo llevaste a cabo los pasos de la estrategia ¿Te parece?
O: Sí.
T: El primer paso dice **"Leo del problema"** ¿ya lo leíste?
O: Sí.
T: Muy bien, el segundo paso dice **"Lo platico"** ¿de qué trata el problema Oswaldo?
O: De que es un concurso de graffitis y a cada quién le dieron una pared para hacer su graffiti.
T: ¿El graffiti debe tener una característica en especial?
O: mmmm... déjame leer otra vez el problema (lo lee) ah, si, el graffiti debe ocupar tres cuartas partes de la pared.
T ¿Y el resto de la pared para qué es?
O: Es para la leyenda y para la firma.
T: Bueno, el siguiente paso dice **"Digo la pregunta."**
O: ¿Qué superficie del total de la pared será abarcada por la leyenda? ¿Qué superficie para la firma del autor?
T: El siguiente paso es **"Busco los datos"** ¿ya los encontraste?
O: Sí.
T: ¿En donde los pusiste?
O: En ninguna parte, solamente los leí.
T: Hay ocasiones en que comienzo a resolver algún problema y de repente me doy cuenta de que no utilicé todos los datos y por eso no encuentro la solución. ¿qué me recomendarías para que no se me olvide utilizar todos los datos?
O: Escribirlos a parte para que no se te olviden.
T Qué te parece si hacemos lo mismo con este problema para que no se nos olvide utilizar alguno.
O: ¿Y si mejor los subrayo?
T: Si crees que así no los olvidamos entonces los subrayamos (el alumno subraya los datos del problema). El siguiente paso dice **"Hago un dibujo."**
O: Ya lo hice. También lo dividí en cuatro partes. Y agarré un tercio y también lo dividí en tres partes.
T: Muy bien, ¿por qué lo dividiste en cuatro partes?
O: Porque el problema dice que tres cuartas partes de la pared son para el graffiti, entonces iluminé tres.
T: ¿Y por qué, aparte agarraste un tercio y lo dividiste en tres?

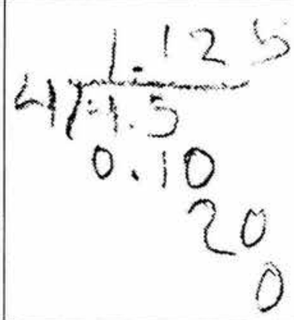
O: Porque el problema dice que del resto, dos terceras partes son para la leyenda y un tercio para la firma.
T: Perfecto, este es el punto en donde te trabase ¿verdad? El siguiente paso dice **"Busco una operación"** ¿qué operación podríamos hacer para resolver el problema?
O: Eso es lo malo, el problema no pide hacer ninguna operación.
T: ¿Ya utilizamos todos los datos que nos da el problema? ¿qué te parece si lo verificamos? (aspectos como este nos motivaron a aumentar el paso **"escribo todos los datos en mi dibujo"**).
O: (el alumno observa los datos subrayados) ¡ah!, nos falta la superficie de la pared que es de 4.5 metros cuadrados.



Oswaldo había hecho este dibujo pero sin escribir los datos. Los datos los comenzó a escribir conforme avanzábamos en la solución del problema.

T: Muy bien Oswaldo, ya estábamos dejando afuera un dato, ¿A qué corresponde ese dato?
O: A la superficie de la pared.
T: ¿Qué te parece si **ponemos todos los datos en nuestro dibujo** para que en el futuro no se nos olvide utilizar alguno?
O: Si (el alumno escribe el dato de la superficie arriba de su dibujo, escribe además los letreros de graffiti, leyenda y firma para saber que superficie corresponde a cada uno)

T: Creo que ahora si tenemos todos los datos. Nuestra pared mide 4.5 metros cuadrados. ¿Podremos encontrar con esto una operación? Si la pared mide 4.5 metros cuadrados, ¿qué debemos hacer ahora?
O: Dividirla en cuatro.
T: ¡Muy bien Oswaldo! ¿Qué operación nos puede servir? La tarjeta dice **"Escribo la operación."**
O: Una división, tenemos que dividir 4.5 entre cuatro partes (escribe, resuelve la operación y entre los dos la comprobamos).



T: Ya hiciste los otros dos pasos de la estrategia **"La resuelvo"** y **"Compruebo la operación."** El resultado que obtuviste (1.125) ¿a qué corresponde?
O: Es lo que mide cada cuarto.
T: Estoy de acuerdo contigo, ¿qué te parece si escribimos este resultado en cada cuarto en que dividimos la pared? (escribe el resultado en su dibujo). El último paso de la tarjeta dice **"Escribo la respuesta correcta."** ¿Crees que ya encontramos la respuesta del problema?

O: Sí, la respuesta correcta es 1.125. T: ¿Cuántas preguntas nos hace el problema? O: Dos. T: ¿Y éste resultado a cuál respondería? O: A ninguno. Todavía nos falta. Tenemos que dividir 1.125 entre tres para tener lo que mide la leyenda y la firma (escribe y hace la división). Cada parte mide 0.375. T: Muy bien, que te parece si escribimos el resultado en el dibujo (lo escribe) ¿qué hacemos ahora, ya podemos contestar las preguntas? O: (observa su dibujo) Si cada cuadrito vale 0.375, entonces, si tomamos uno es lo que vale la firma y para saber cuánto mide la leyenda tenemos que sumar los dos cuadritos que hacen falta.	0.375 $3\overline{)1.125}$ 22 15 0
T: ¡Muy bien Oswaldo! ¿Cuánto debe medir el espacio para la firma? O: vale 0.375 T: ¿Y cómo obtenemos la medida de la leyenda? O: Sumando los dos cuadritos 375 + 375 (escribe y resuelve la operación). T: ¿Ya podremos contestar las preguntas? O: Sí. T: Ahora sí, el último paso de la tarjeta dice **"Escribo la respuesta correcta"** (el alumno escribe la respuesta final).	$+\ 375$ 375 750
.750 m² la leyenda .375 m2 la firma	En ocasiones anteriores, el tutor pedía a Oswaldo que explicara su solución, pero en esta ocasión, al término de la actividad, Oswaldo se propuso a sí mismo para explicar su procedimiento de solución.

Los alumnos resuelven el problema sin el uso de la tarjeta auto-instruccional

En este punto los alumnos han internalizado los pasos de la estrategia y ya no es necesario la presencia física de la tarjeta. Nuestro apoyo se centra entonces, en las dudas que los alumnos tengan en el propio proceso de solución, siempre y cuando sea necesario.

La instrucción que retoma los conocimientos informales, produce intuiciones de solución

Tercera condición del modelo de la llave:

Durante la instrucción, el maestro debe asegurase de que los conocimientos y procedimientos informales de los alumnos se vinculen con los conocimientos formales.

Gracias a los conocimientos informales, los estudiantes son capaces de resolver problemas reales. Si se enriquece el conocimiento informal con el conocimiento formal, el alumno puede generar intuiciones para resolver un problema matemático. No se debe negar, pues, los conocimientos informales del alumno, y sustituirlos por los formales, por el contrario, en la instrucción debe haber una combinación de ambos.

Un aspecto que debemos resaltar y desarrollar en nuestros alumnos es la utilidad de sus conocimientos cotidianos en la resolución de problemas matemáticos en un contexto de enseñanza formal como lo es cualquier salón de clases.

Suele ser común que los alumnos no tomen en cuenta sus conocimientos cotidianos para facilitarse una actividad matemática escolar. Pareciera como si los conocimientos cotidianos no fuesen útiles en un contexto formal, ejemplos de ello, los tenemos en el siguiente cuadro:

<table>
<tr><th colspan="2">Experiencia dentro de la comunidad π</th></tr>
<tr><td colspan="2">A los alumnos se les presentó el problema: "se acabó la leche":
- <i>¡Cómo! ¿ya no hay leche? -preguntó la madre asombrada-. Si ayer compré suficiente para la cena.</i>
<i>-La mitad la usó la abuela para el arroz con leche – dijo Rosita.</i>
<i>-Bueno, yo usé la mitad de la que quedó, para los licuados esta mañana- dijo Martha.</i>
<i>-Acuérdate que al medio día ocupaste la mitad de la que había para el flan- aclaró Javier.</i>
<i>-Y yo me tomé la mitad de la que quedaba esta tarde, mientras veía la televisión- agregó Juanito.</i>
<i>-¿Y solo queda ¼ de litro?- preguntó el padre-, pues ¿cuánto compraste ayer?</i>
Los alumnos, en pares, comenzaron a resolver el problema con procedimientos formales.</td></tr>
<tr><td>Resolvieron el problema sin hacer uso de la tarjeta auto-instruccional. Dos equipos realizaron el siguiente proceso de solución:</td><td>$1 \quad \frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1+2}{8}=\frac{3}{8}=1\frac{3}{8}$</td></tr>
</table>

En el recuadro vemos cómo los alumnos intentan procedimientos formales (suma de fracciones) que desembocan en un resultado erróneo. Cuando descontextualizamos los datos del ámbito formal y los vinculamos con la experiencia cotidiana, los procedimientos y operaciones matemáticas cobran otro sentido: dotan a los estudiantes de intuiciones que les dan fundamentos que los apoyan para resolver problemas matemáticos nuevamente en un contexto formal.

Nuestra instrucción consiste en establecer un vínculo útil entre los conocimientos formales y los cotidianos. La experiencia nos muestra que el uso de conocimientos cotidianos en la resolución de un problema suele ser una alternativa sencilla para llegar a la solución. Pero la problemática radica en la dificultad que tienen los alumnos de explicar matemáticamente un proceso de solución que involucra conocimientos cotidianos. A continuación ejemplificamos la solución del problema anterior (que los alumnos intentaron primeramente resolverlo con su conocimiento formal). En el ejemplo que ahora presentamos, los alumnos intentan solucionarlo haciendo uso de sus conocimientos cotidianos (el tutor relaciona vivencias de los alumnos para ser utilizadas en el proceso de solución).

Experiencia dentro de la comunidad π

Tutor: ¿Cuál fue su respuesta final?

Raymundo: 13/8.

T: ¿Cómo llegaron a esa solución?

R: El problema dice que quedaba un cuarto, pero se tomó la mitad, entonces la mitad de ¼ es 1/8. Y el problema dice que se volvió a tomar la mitad, y sacamos la mitad de 1/8 que es 1/16; después sumamos las fracciones y nos dio 1 3/8.

T: Veo que colocaron al principio de su suma el número uno ¿Por qué lo pusieron?

Nicolás: Porque es un litro.

T: Bien. ¿El problema menciona en algún lado un litro? (leen el problema nuevamente en silencio).

Elías: No. Pero se supone que está hablando de un litro, porque de ahí fueron tomando leche.

T: Ustedes dan por hecho que había un litro ¿verdad?

Todos: Si.

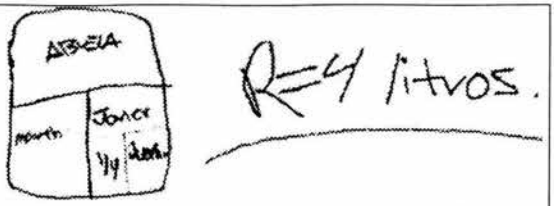
T: Sin embargo, su resultado final dice que compraron 13/8. ¿Cuál es la respuesta correcta un litro o un litro y tres cuartos? (los alumnos piensan y se quedan callados). ¿Es posible que en la tienda nos vendan 1¾ de leche?

N: No, entonces la respuesta correcta es un litro.

T: Dime Nicolás, ¿cuántos litros de leche llegan a comprar normalmente en tu casa para toda la familia?

N: Como tres.

T: ¡Eso es! Entonces no necesariamente debe haber solamente un litro en el problema. ¿Qué les parece si comprobamos su respuesta?

<table>
<tr><td>El tutor encamina a los alumnos con el uso de la tarjeta auto-instruccional hasta el paso de “hago un dibujo.” Los alumnos discuten y hacen el siguiente dibujo. Sin utilizar alguna operación llegan al resultado correcto:</td><td> </td></tr>
<tr><td colspan="2">T: ¿Cómo llegaron a este resultado?
R: Como no sabemos el total de litros, dibujamos un entero y lo fuimos dividiendo como lo decía el problema, y le pusimos el nombre de las personas que tomaron leche y al final nos quedó el cuarto que sobró.
N: Al final vimos que el cuarto se parecía a lo que Juanito se había tomado, entre los dos daba como resultado ½, y sumándolo con lo que se tomó Javier nos da un litro, que es lo mismo que usó la mamá, eso quiere decir que llevamos dos litros y con lo de la abuela nos salieron cuatro litros.</td></tr>
</table>

Para los alumnos resultaba obvia la respuesta, por supuesto una vez que tuvieron los datos en su dibujo. El problema lo resolvieron por medio de una representación gráfica, es decir sustituyeron el algoritmo formal por el dibujo que les representó la operación. Pero se les dificultó explicar el problema en términos formales.

Esto es natural. En el proceso de construcción de un conocimiento, gradualmente los alumnos tienden un puente entre su conocimiento cotidiano y el conocimiento formal, en este puente las representaciones gráficas son muy importantes.

Los conocimientos generados en el contexto escolar deben transferirse a la vida cotidiana

> Cuarta condición del modelo de la llave:
>
> El aprendizaje y el contexto no están separados, la instrucción debe proporcionar conocimientos útiles en el alumno para que pueda transferirlos fuera del contexto escolar. De esta manera, los conocimientos dejan de estar situados solamente en el contexto escolar para ser transferidos a la vida cotidiana.

El reto de la educación es dotar a los alumnos de conocimientos y habilidades que sean de utilidad no sólo en el contexto escolar, sino que sean transferidos a la vida cotidiana. El uso de problemas matemáticos aporta ciertos elementos para lograr este fin:

- La narración del problema involucra la *compresión del texto* y el *análisis de los datos*. Ambos son aspectos que la vida cotidiana exige de las personas en sociedad para comprender información cuantitativa.

- La información del texto puede contener ejemplos y datos reales que son útiles a los alumnos para comprender mejor no sólo su entorno, sino, además, su mundo.

- Las unidades de medida que presentan los problemas son los utilizados en la vida cotidiana, pero muchos exigen el uso de cifras que no son tan comunes (por ejemplo 2/7 de litro), esto permite al alumno realizar cálculos de mayor complejidad.

La transferencia de los conocimientos representa un reto para el maestro de matemáticas, sobre todo cuando éstas se vuelven más abstractas. Estamos convencidos de que la transferencia a la que nos hemos estado refiriendo no sólo involucra a las matemáticas, también involucra la información social que contengan los problemas. Lograr la transferencia de los conocimientos es un reto que involucra a la creatividad del maestro de matemáticas.

Por ejemplo, para un maestro de matemáticas creativo, las noticias sobre los sucesos y hechos importantes de actualidad en el mundo pueden representar material valioso para el diseño de problemas matemáticos. Estos, además de favorecer la práctica matemática de los alumnos les proveen de información para comprender su entorno y generar puntos de vista propios, tomando como base tanto los datos sociales como los matemáticos presentados. De esta manera, dentro de una comunidad de aprendizaje matemático, se habla también de geografía, historia, democracia, demografía, moda, deportes, espectáculos, etc.

Podemos crear diferentes tipos de problemas de acuerdo con diversas informaciones que encontremos, las cuales pueden ser meramente cotidianas, científicas, sociales o políticas. A continuación haremos un ejemplo de cada tipo propuesto:

Problema con información cotidiana

Esta clase de ejemplos pueden desprenderse de la vida y el lenguaje coloquial de los alumnos, un ejemplo de este tipo lo encontramos en el problema "*se acabó la leche*" descrito en el cuadro de *Experiencia dentro de la comunidad* **π** de la página 111.

Problema con información científica

La información que aparece en libros de texto de materias como biología, geografía, o en revistas especializadas, nos pueden ser de gran utilidad para diseñar nuestros propios problemas.

Ejemplo 1.

Tomemos los siguientes datos tomados de una enciclopedia:

- Velocidad de la luz: 300, 000 km/s.
- Distancia de la tierra al sol: 150 millones de kilómetros aproximadamente.

Podemos diseñar nuestro problema de la siguientes manera:
Si la distancia que hay entre el sol y la tierra es de aproximadamente 150 millones de kilómetros, ¿Cuántos minutos tarda en llegar la luz del sol a la tierra si la velocidad de la luz es de 300, 000 km/s?

Este problema presenta dos dificultades básicamente, por un lado, es el manejo de operaciones con números naturales grandes, el problema presenta los millones con letra y no como un número completo, de tal manera que tendrán que escribir toda la cifra para poder realizar las operaciones pertinentes.

Otro obstáculo lo encontramos en la medidas de tiempo. Si los alumnos realizan la operación con los datos proporcionados obtendrían el resultado final en segundos, pero el problema pide dar la respuesta en minutos, esto involucra una conversión.

Ejemplo 2.

Supongamos ahora los siguientes datos, tomados también de una enciclopedia:

- Distancia de la tierra al sol: 150 millones de kilómetros aproximadamente.
- Distancia de la tierra a la luna: 384, 403 km. En promedio.

Podemos formular un problema en los siguientes términos:
Si la distancia de la tierra al sol es de 150 millones de kilómetros aproximadamente. Y la distancia de la tierra a la luna es de 384, 403 km. En promedio. ¿Cuánto habrá de distancia entre la luna y el sol en un eclipse de luna? ¿y en un eclipse de sol?

En este problema, los alumnos recurren a conocimientos de otras materias. Para resolverlo, deben saber lo que es un eclipse de sol y de luna y la diferencia que existe entre ellos, de esta manera, los alumnos transfieren sus conocimientos matemáticos para explicar fenómenos naturales ligando sus conocimientos de matemáticas a otras materias.

Problemas con información social y política

La información de temas sociales y políticos son ideales para el tema de fracciones, este tipo de información la encontramos en periódicos de circulación nacional o en diversas revistas. En estos temas es importante evitar agregar juicios de valor. Si queremos que nuestros alumnos se expliquen el mundo donde viven, podemos estimular la discusión de tales temas en una sesión de discusión posterior a la solución del problema, con el fin de que ellos mismos se formen criterios propios.

Ejemplo 1.

En el anexo 5, presentamos el fragmento de una noticia. Podemos presentar a los alumnos toda la noticia, o podemos tomar sólo algunos de los datos:

Si tomamos los datos 20 tractores por cada mil campesinos y 25 millones de campesinos. Podemos formular un problema que involucra la fracción como razón, de la siguiente manera:

¿Cuántos tractores están trabajando en territorio mexicano si por cada mil campesinos hay 20 tractores y hay en total de 25 millones de campesinos?

Ejemplo 2.

Para este ejemplo tomamos el fragmento de dos noticias (anexos 6 y 7). Podemos presentar los fragmentos a los alumnos y convertirlos en un problema al hacer la pregunta final. O podemos sintetizar la información y presentarla sólo con los datos importantes. El problema resultante presenta a las fracciones como porcentaje:

Antes de las elecciones del 6 de julio del 2003, los partidos políticos esperaban un abstencionismo (gente que no va a votar) de entre el 40 y 50%. Sin embargo, el abstencionismo que se presentó fue del 59% según el Instituto Federal Electoral (IFE). Del total de los votos del conteo rápido, el 34.4 % fue para el PRI, el 30.5% para el PAN, el 17.1 para el PRD y el resto para los demás partidos. Si el total del electorado (ciudadanos con capacidad para votar) está compuesto 64 millones. ¿Cuánta gente no fue a votar el 6 de julio?, ¿Qué cantidad de votos obtuvieron el PRI, PAN y PRD respectivamente?

Si presentamos el problema junto con los fragmentos de la información de los anexos 6 y 7, los alumnos tendrán que discriminar la información que no les sirve. Esto requiere, además, la comprensión del texto, pues de lo contrario, pueden tomar en cuenta la información irrelevante.

Con éstos ejemplos, procuramos que los alumnos transfieran no sólo su conocimiento matemático, sino además la información social y política que poseen lo problemas. En el anexo 8, presentamos una noticia más para que el lector haga uso de su creatividad y diseñe su propio problema.

El fomento del aprendizaje social como soporte cultural

Quinta condición del modelo de la llave:

La instrucción debe fomentar el aprendizaje social permitiendo la interacción y el diálogo entre los alumnos en pequeños grupos, con el fin de que tengan confianza de exponer sus opiniones y pensamientos durante la resolución de un problema, para después exponerlos a toda una clase. Esto permite que los alumnos desarrollen una serie de habilidades sociales en la resolución de problemas, que les permitan trabajar cooperativamente con otras personas en un contexto diferente, como el laboral por ejemplo.

Dentro de la comunidad de aprendizaje, como ya hemos mencionado, los alumnos no sólo desarrollan habilidades y conocimientos matemáticos, también desarrollan habilidades sociales, actitudes y comportamientos. Si a esto agregamos, además, información como la expuesta en el apartado anterior, entonces también estarán aprendiendo historia, geografía, biología, etc.

Tenemos, entonces, que en una comunidad, el aprendizaje es una construcción social, donde se promueve la comunicación entre sus miembros con el fin de practicar matemáticas, y si además agregamos información del mundo y a partir de ella reflexionamos junto con los alumnos, estaremos promoviendo el vínculo no sólo con la vida cotidiana de los alumnos, sino con su mundo. Cabe rescatar el pensamiento de Paulo Freire (1987) quién afirma que la verdadera educación es praxis, es reflexión, y es acción del hombre sobre el mundo con el fin de transformarlo.

La instrucción como promotora de expectativas de los alumnos

Sexta condición del modelo de la llave:

La instrucción es una ciencia y un arte. El maestro debe dejar de imponer sus expectativas hacia los alumnos y tratar de promover que los estudiantes planteen sus propias expectativas.

Las expectativas de los maestros dentro de la comunidad de aprendizaje pueden ser variadas: que los alumnos desarrollen estrategias de solución de problemas matemáticos, desarrollen su pensamiento matemático, dominen conceptos y procedimientos, se comuniquen con lenguaje matemáticos, que desarrollen amor por las matemáticas, etc. Pero para los alumnos las expectativas pueden no ser tan claras o pueden presentarlas en términos más sencillos como "resolver bien los problemas". Sin embargo, gradualmente los alumnos aprenderán a delimitar sus propias expectativas

Debemos tener presente que la enseñanza tradicional domina los salones de clases. Ahí los alumnos quizá solamente tengan como expectativa no reprobar la materia. Dentro de la comunidad de aprendizaje matemático esperamos que los alumnos tengan sus propias expectativas, pero ello se logra con el trabajo previo, descrito a lo largo de esta sección.

A continuación abarcaremos el tema de la selección de problemas adecuados para alumnos con problemas de aprendizaje y todo lo que encierra en ello.

Selección de problemas adecuados

-¿Quieres decirme, por favor, qué camino debo tomar para salir de aquí?
- Eso depende mucho de a dónde quieres ir- respondió el Gato.
- Poco me importa a dónde ir -dijo Alicia.
- Entonces, poco importa el camino que tomes -replicó el Gato.
- Con tal que conduzca a alguna parte -añadió Alicia como conclusión.
- ¡Oh! Puedes estar segura de que llegarás a alguna parte -dijo el Gato- si caminas lo suficiente.
-Alicia en el país de las Maravillas-

Lo problemas deben ser seleccionados de acuerdo a:

- El dominio individual de la habilidad específica por parte del estudiante: este aspecto abarca los conocimientos previos del alumno así como sus estrategias de solución.
- El modo en que el problema matemático será representado. Con base en la valoración del conocimiento de los alumnos, se eligen los problemas acordes a sus habilidades.
- El modo en el que los estudiantes responderán al problema. En este punto el maestro debe ser consciente de las dificultades que tiene el problema a presentar.

En este apartado veremos la valoración del conocimiento del alumno, analizaremos las características de los problemas y finalmente analizaremos también los conocimientos que deben imprimir los alumnos en la resolución de los problemas.

El primer aspecto que debemos tomar en cuenta es el nivel de conocimiento que tienen nuestros alumnos. No debemos dar por hecho que tiene todos los conocimientos ni tampoco que dominan todos los procedimientos implícitos en los programas del año que cursa y de los años anteriores. La valoración del conocimiento de los alumnos, es entonces, el primer paso que debemos dar para poder diseñar las actividades que tendrán lugar dentro de la comunidad de aprendizaje.

Valoración del conocimiento

Para seleccionar adecuadamente un problema es necesario, entonces, hacer una valoración de los conocimientos que poseen los alumnos. Esta valoración no se refiere solamente al resultado final que den los alumnos, sino a su proceso de solución. Esto nos da una información valiosa sobre la habilidad individual del alumno. Ginsburg (1997), recomienda abordar cinco áreas del aprendizaje matemático en alumnos con dificultades en matemáticas. Aunque el autor se basó en alumnos de primaria, sus recomendaciones son pertinentes para el nivel de secundaria:

1. Dificultad con los símbolos: El alumno tiene problemas con algunos signos utilizados en matemáticas, estos pueden deberse a una comprensión equivocada de su significado.

Por ejemplo, en secundaria los alumnos necesitan comprender nuevos significados de los signos (+) y (-), que en ocasiones se contraponen con el conocimiento que desarrollaron en la primaria. Tal es el caso de la *ley de los signos*, que es aplicable a la multiplicación pero no así a la suma. Los alumnos suelen generalizar, erróneamente, la ley de los signos de la multiplicación hacia la suma. Por ejemplo:

La ley de los signos dice que la multiplicación de signos iguales nos da un signo positivo: (+) (+) = (+); y (-) (-) = (+). Mientras que la multiplicación de signos diferentes nos da un signo negativo: (+) (-) = (-); y (-) (+) = (-). De tal manera que el resultado de las siguientes multiplicaciones será:

(4) (3) = 12	(-4) (-3) = 12	(4) (-3) = -12	(-4) (3) = -12

Si por el contrario, en vez de presentar multiplicaciones, presentamos sumas nos encontraremos con los siguientes problemas en el procedimiento de los alumnos:

4 + 3 = 7	En esta operación no suelen tener problemas.

-4 -3 = 7	El resultado real es –7, pero los alumnos explican su respuesta en los siguientes términos: menos por menos da más y cuatro más tres nos da 7. por lo tanto el resultado es más siete.
4 – 3 = -7	El resultado real es 1, los alumnos en ocasiones no alcanzan a ver que se trata de una resta común, pero como están viendo sumas y restas con números positivos y negativos, explican su respuesta en los siguientes términos: cuatro y tres son siete, y más por menos da menos por lo tanto el resultado es -7
-4 +3 = -7	El resultado real es –1. Pero los alumnos explican su respuesta de la siguiente manera: cuatro y tres son siete, y menos por más da menos por lo tanto el resultado es -7

En este ejemplo es posible detectar la problemática que tienen los alumnos en entender el significado de los signos positivo y negativo. La problemática se agudiza cuando sustituimos los números enteros por fracciones.

2. Conocimientos erróneos[18]: Son conocimientos matemáticamente erróneos pero que tienen lógica para los alumnos. Estos conocimientos son muy importantes para entender la comprensión de los alumnos en una tarea. Los maestros no se dan cuenta de que una equivocación de un niño puede ser una respuesta inteligente y que puede implicar información de gran utilidad por un lado, para ayudara al alumno a comprender su error, y por el otro da elementos valioso para el diseño de la instrucción para sesiones posteriores. El resultado puede ser erróneo, pero en la lógica del niño es posible tal resultado. Para ejemplificar esto, veamos la siguiente experiencia:

Experiencia dentro de la comunidad π
Durante la solución de un problema Oswaldo hizo la siguiente suma de fracciones cuyo procedimiento explicó a toda la comunidad:
② $2\frac{6}{8} + 4\frac{2}{4} + \frac{12}{16} + 4\frac{4}{6} = 10\frac{24}{34}$

---

[18] Ginsburg (1997) designa a ésta área de aprendizaje con la palabra en inglés "bugs" que significa bichos o problemas. Nosotros utilizamos "conocimientos erróneos" para designar el mismo fenómeno.

Tutor: Oswaldo, ¿puedes explicarnos el procedimiento de tu suma de fracciones?
Oswaldo: Sume los enteros, 2 + 4 + 4 = 10. Después, sumé los números de arriba...
T: ¿Cómo se llaman los números de arriba de una fracción?
O: mmm....
T: ¿Alguien recuerda cómo se llaman los números de arriba y de abajo que componen una fracción?
Raymundo y Nicolás: Si, el de arriba se llama numerador y el de abajo denominador.
T: ¿Estás de acuerdo Oswaldo?
O: Si.
T: Bueno, síguenos explicando el procedimiento de tu suma de fracciones.
O: Después de sumar los enteros, sumé los numeradores 6 + 2 + 12 + 4 = 24. Y después sumé los denominadores 8 + 4 + 16 + 6 = 34. Mi resultado final fue 10 24/34.
T: Supongamos que tienes ½ + ½ , escríbelo en el pizarrón ¿cuál sería el resultado?
O: 2/4
T: Supongamos ahora que vas a la tienda y compras medio kilo de huevo. Pero antes de llegar a tu casa, te das cuenta de que tu mamá no te pidió esa cantidad y te regresas a comprar otro medio kilo de huevo. ¿Cuánto habrás comprado en total?
O: Pues un kilo.
T: Muy bien, eso quiere decir que ½ kilo más ½ kilo es igual a un kilo. Ahora observa tu resultado del pizarrón, ¿estás de acuerdo con el resultado de 2/4 que obtuviste antes?
O: No. El resultado es uno.

A partir de este momento se comenzó a ver la suma de fracciones con numerador diferente. La sesión posterior se inició realizando una serie de ejercicios de suma de fracciones con denominador igual y diferente. El problema que se presentó después de los ejercicios se solucionaba haciendo los procedimientos practicados.

El ejemplo anterior es una clara demostración de un *conocimiento erróneo*. El alumno realizaba la suma de fracciones, partiendo de su conocimiento de los números enteros, y no reconocía la relación existente entre el numerador y el denominador. Pero en la lógica del alumno esto era posible y válido. Sin embargo, esta situación no toma desprevenido al tutor. Gracias a una valoración inicial del conocimiento de los alumnos, ésta problemática ya había salido a flote y el tutor puedo plantear una situación que ayudara a Oswaldo a reconocer el equívoco de su respuesta.

A continuación presentamos un problema que sirvió para valorar el conocimiento del significado de fracción. Esta valoración nos arrojó los elementos suficientes para diseñar las sesiones en función del nivel de conocimiento en que se encontraban los alumnos.

Experiencia dentro de la comunidad π

Aunque no se trata de un problema propiamente dicho, se presentó la siguiente narración con el objetivo de analizar dominio del alumno del concepto de fracción con representación a/b:

Javier debe acomodar tornillos dentro de cajas vacías que solo tienen los siguientes letreros para identificar la medida de tornillos que debe ir en cada caja: 1/8, 1/64, 1/16, ½, 1/32 y ¼. Javier debe acomodar las cajas para así poder meter los tornillos según su medida. ¿Cómo deben quedar ordenadas las cajas si las ordena de menor a mayor?

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$$

Los cinco alumnos que realizaron este problema dieron la respuesta de arriba, su explicación fue en los siguientes términos:
Tutor: ¿Qué número es el menor?
Domingo: ½.
T: ¿Y cuál es el mayor?
D: 1/64
T: ¿Puedes decirme cómo supiste eso?
D: El dos (denominador de ½) es el menor de todos, el cuatro (denominador de ¼) es mayor que el dos, y así puse 1/64 al final porque el 64 es el más grande de todos.

Con ello nos dimos cuenta de que los alumnos identificaban al denominador no como la parte en que está dividido un entero, sino como un entero sin relación con el numerador. Por lo cual, aplicaban su conocimiento acerca de los números enteros.

3. Creencias: los alumnos tienen diversas creencias respecto a las matemáticas, hacia los maestros de matemáticas o hacia las respuestas que se espera de ellos.

Debemos tomar en cuenta que a muchos alumnos no les agrada la idea de estudiar matemáticas, perciben a la materia como difícil. Por ello es necesario darnos la oportunidad de conocer la percepción que los alumnos tienen de ellas. Habrá alumnos a quienes les agrade y facilite la materia, y a otros no. Es de suma importancia tomar en cuenta las opiniones de éstos últimos, así como los conocimientos que poseen porque a partir de ellos, se diseñan las sesiones.

Así como los alumnos tienen una serie de creencias, el maestro también posee las propias, por ejemplo, puede pensar que las matemáticas son en verdad difíciles y por lo tanto, no todos los alumnos tiene la capacidad para entenderlas. O puede pensar que las matemáticas son sencillas y el bajo rendimiento se deba a que los alumnos no ponen la atención necesaria para dominarlas.

En suma, alumnos y maestros poseen creencias en torno a las matemáticas. Desde este hecho, las personas se están relacionan ya con la materia. Hay quienes sentirán rechazo por ella, otros mostrarán interés, otros harán lo necesario para "pasar" de año, por su parte el maestro puede exigir exactitud en sus alumnos dado que las matemáticas son una ciencia exacta.

4. Aprendizaje rutinario: Un alumno puede ejecutar bien algún algoritmo pero no puede dar la explicación de porqué funciona así, tiene, pues, problemas para teorizar sobre algún aspecto matemático. Dentro del tema de las fracciones, la explicación de algunos procedimientos no resulta fácil. Pensemos por ejemplo, en la obtención del denominador común en la suma de fracciones. Los alumnos pueden llegar a dominar el procedimiento y explicarlo, pero difícilmente explicarán su lógica y significado.

5. Carencia de conexión entre lo formal y lo cotidiano: Los alumnos tienen dificultad para hacer uso de sus conocimientos cotidianos en una situación escolar. Este aspecto se ejemplificó en la solución del problema "Se acabó la leche" descrito en el cuadro de Experiencia dentro de la comunidad π de la página 111.

El análisis de éstos cinco puntos propuestos por Ginsburg, nos dan una amplia panorámica para valorar el conocimiento del alumno. Éste autor propone, además, el uso de la *entrevista clínica* con el propósito de comprender la manera que el alumno está entendiendo el problema, los conceptos y los procesos algorítmicos.

Ejemplos de este tipo de entrevista se han presentado en los cuadros de "Experiencia dentro de la comunidad **π**."

Profundizando en la entrevista clínica, Flores (2002), a partir de una revisión del trabajo representativo de Piaget, explica que en ésta el niño pone la pauta en la dirección que se seguirá. Trabajar con este método implica las siguientes características por parte del entrevistador.

a. Debe *saber observar*. Es decir, dejar hablar al niño, no agotar nada, no desviar nada y, al mismo tiempo, saber buscar algo preciso, tener en todo instante alguna hipótesis de trabajo que comprobar.

b. Tener un marco teórico a partir del cual se desarrollen las hipótesis que irán orientando el interrogatorio. La ausencia de hipótesis lleva a una indagación ciega.

c. Saber conducir una secuencia dialéctica de preguntas y respuestas, y promover en el niño la producción de argumentaciones y su defensa.

Durante la entrevista se pueden emplear tres tipos de preguntas, que no necesariamente guardan un orden cronológico: de *exploración* que tienden a develar el concepto cuya existencia y estructuración se busca; de *justificación* que llevan al niño a legitimar su punto de vista; y de *control* donde se buscan la coherencia o contradicción de la respuesta a través de la contra argumentación.

Con la entrevista clínica pretendemos descubrir el proceso de pensamiento del niño, describir cómo opera este proceso y valorar el nivel de competencia del niño. Esto lleva al tutor a:

Descubrir el proceso de pensamiento del niño. Implica obtener información sobre la forma cómo el alumno resuelve un problema, cómo elabora la información que recibe del problema o justifica sus acciones, que dificultades enfrenta y cuál puede ser el origen de estas dificultades.

Descubrir cómo opera el pensamiento. Implica elaborar hipótesis explicativas del proceso de pensamiento del niño. Esto requiere que el investigador cuente con un referente conceptual sobre el aprendizaje de las matemáticas. Para probar estas hipótesis el investigador prepara diferentes tareas que se refieran a aspectos generales y específicos y aborden situaciones sencillas y complicadas para el alumno.

Evaluar la competencia del alumno. Implica la obtención de evidencia acerca del conocimiento del estudiante, de su habilidad para usarlo y disposición hacia las matemáticas. Implica entender cuál es el nivel de conceptuación del alumno en la tarea de solución de problemas tanto en situaciones en las que es autónomo como en las que requiere ayuda. Por lo cual se requiere preparar estrategias de apoyo que permitan al alumno continuar en la tarea cuando esta se le complique.

En otras palabras, por medio de la entrevista clínica, se busca analizar la forma en que el alumno está entendiendo el problema, y cómo explica y utiliza los conceptos que están en juego. En el siguiente apartado, abordaremos el análisis de los problemas que se presentan a los estudiantes.

Análisis de problemas de fracciones

Problema matemático

Un problema matemático puede definirse como la narración de una situación cotidiana donde existe la relación entre dos variables y requiere de manipulación de datos numéricos para llegar a una solución; una de las variables puede ser manipulada o planteada como interrogante (Flores, 1999). Un problema es, entonces, una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, para cuya solución no existe un sólo medio o camino aparente y obvio (Krulik y Rudnik, 1980; citado en García, 2003). Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata (Polya, 1961; citado en García, 2003).

De esta manera, un problema "enriquecedor" es una tarea o situación, que debe satisfacer los siguientes requisitos o componentes (Stenmark; citado en Good, et. al. 1992; Fredericksen; citado en Santos, 1997; y García, 2003):

- El problema debe ser aceptado por el individuo o grupo, existe pues, un interés por resolverlo.
- Debe existir un bloqueo en el camino de solución, donde el uso de técnicas e intentos iniciales no den un resultado inmediato.
- El problema guía a otros problemas, suscita otras preguntas.
- El problema no tiene una solución inmediata, tiene diversos caminos o métodos de solución, sean algebraicos, geométricos o numéricos.

A continuación haremos un análisis de dos problemas que utilizamos para valorar el conocimiento de los alumnos antes y después de pertenecer a la comunidad de aprendizaje matemático. Tomamos como base las categorías que los expertos mencionan en sus textos[19]. Primero analizaremos si los problemas poseen las cualidades de un problema enriquecedor, para ello retomaremos las siguientes categorías:

- Narración de una situación cotidiana.
- Relación entre variables, una de ellas es planteada como interrogante.
- Manipulación de datos numéricos.
- La solución no se alcanza de forma inmediata.
- Debe existir un bloqueo en el camino (el problema guía a otros problemas).
- Tiene diversos caminos de solución.

En segundo lugar, analizaremos el tipo de problemas apoyado en las siguientes categorías:

- Contexto del problema.
- La formulación del problema.
- Conjunto de soluciones posibles.

---

[19] Expuestos en el apartado "Resolución de problemas" página 45.

- Métodos de aproximación posibles.

En tercer lugar presentamos las características particulares del problema. Y finalmente los posibles métodos de solución, que pudieran llevar a cabo los alumnos, que van desde el más probable, hasta el improbable pero posible.

Presentamos después, el proceso de solución que llevaron a cabo dos miembros de la comunidad π antes de pertenecer a ella y después, cuando ésta hubo concluido. Al término de cada proceso de solución de los alumnos, presentamos una valoración de su desempeño en función de fortalezas y debilidades.

Análisis del problema "El librero"

Problema:

Para construir un librero, los alumnos del taller de carpintería necesitan los siguientes cortes de madera: cuatro tiras de 1 ¾ m, dos tiras de 2 ½ m, cuatro tiras de ¾ m, y dos tiras de 2 2/3 m. ¿Cuántos metros de tiras de madera se necesitan en total?

Objetivo:

- Analizar el conocimiento acerca de las fracciones y de los algortimos de la suma de fracciones y procedimientos de transformación de fracciones.

¿ Posee las cualidades de un problema?

Este problema presenta una narración de una situación cotidiana, existe relación entre las variables, en este caso, los datos se presentan como fracciones con interpretación de medida, en particular unidades de longitud.

La variable planteada como interrogante debe ser también una medida de longitud, y para obtenerla se deben manipular todos los datos numéricos.

La respuesta no es obvia para alumnos con problemas de aprendizaje, no se encuentra de forma inmediata, debido a que los datos se presentan simbolizados como fracciones (mixtas y propias).

El método de solución es obvio (sumar todos los datos para llegar a la solución), pero existe un bloqueo en el camino: posiblemente los alumnos no dominan las operaciones básicas de fracciones.

De esta manera, el problema suscita otros problemas, en este caso de procedimientos mecánicos formales.

El problema, hablando en términos generales tiene un sólo camino de solución: las suma de fracciones y todo lo que ello conlleva. La diferencia radicaría en la forma de resolver la suma de fracciones (agrupación de datos o sustitución de la suma de fracciones por la multiplicación). Con base al análisis, podemos decir que el problema contiene todas las cualidades de un problema.

Tipo de problema

El problema tiene un contexto explícito, en él se narra una situación concreta y presenta todos los datos necesarios para llegar a la solución. Su formulación es única y explícita, los datos se presentan sin ambigüedades en su interpretación y la pregunta a contestar está claramente definida. La solución debe ser única y exacta, el método por el que se puede llegar a la solución es por medio de algoritmos conocidos (la suma de fracciones). Es un problema de texto y debido a su método de solución comparte las características de un ejercicio.

Características generales:

- El problema presenta los datos en forma de fracciones.
- Los tipos de fracciones son mixtas y propias.
- La principal problemática radica en dominar el procedimiento de la suma de fracciones. Los conocimientos en juego son los formales.
- El problema no puede ser resuelto con el apoyo de conocimientos cotidianos acerca de la fracción. En la vida cotidiana la fracción que comúnmente utilizan como medida de longitud es el medio metro. No así las medidas de tres cuartos y dos tercios de metro.

Conocimientos que deben dominar los alumnos para solucionar el problema

Presentamos con negritas los conocimientos y procedimientos que los alumnos deben dominar para llegar a la solución del problema.

Soluciones posibles al problema "El librero"

Solución 1: con conocimientos formales.

Un método para resolver este problema es por medio de suma de fracciones únicamente: Se tienen las siguientes medidas: 1 ¾ , 2 ½, ¾ y 2 2/3.

A) De donde 1 ¾ , 2 ½ y 2 2/3 son **fracciones mixtas que pueden convertirse a fracciones impropias**, de tal manera que se tiene:

1 ¾ = 7/4

2 ½ = 5/2

2 2/3 = 8/3

B) Se procede a realizar **sumas de las fracciones con denominador común**:

- 4 tiras de 7/4 (1 ¾) por lo tanto 7/4 + 7/4 + 7/4 + 7/4 = 28/4 **fracción impropia que pude convertirse a enteros** = 7

- 2 tiras de 5/2 (2 ½) por lo tanto 5/2 + 5/2 = 10/2 fracción impropia que puede convertirse a enteros = 5
- 4 tiras de ¾ por lo tanto ¾ + ¾ + ¾ + ¾ = 12/4 fracción impropia que puede convertirse a enteros = 3
- 2 tiras de 8/3 (2 2/3) por lo tanto 8/3 + 8/3 = 16/3 **fracción impropia que puede convertirse a fracción mixta** = 5 1/3

C) Se realiza la suma de enteros y se incluye la única fracción mixta:

7 + 5 + 3 + 5 1/3 = **20 1/3. Se necesitan veinte metros y 1/3 de madera.**

Solución 2: uso de conocimientos formales de multiplicación y suma de fracciones:

A) Se convierten las fracciones mixtas a impropias como en el inciso "A" de la solución anterior.

B) Se realiza la **multiplicación de una fracción y un número entero**:

(7/4) (4) = (7/4) (4/1) = 28/4

(5/2) (2) = 10/2

(3/4) (4) = 12/4

(8/3) (2) = 16/3

C) Se puede proceder tal como en el ejercicio anterior, convirtiendo las fracciones impropias a mixtas y se suman los enteros, para finalmente obtener **20 1/3**.

D) Otra opción es que una vez obtenidas las multiplicaciones del inciso "B" de la solución 2, se evita convertir a enteros y se realiza la **suma con fracciones impropias**, para ello es necesario **obtener el común denominador**:

$$28/4 + 10/2 + 12/4 + 16/3 = \frac{84 + 60 + 36 + 64}{12} = 244/12$$

E) 244/12 es fracción impropia que puede convertirse a fracción mixta, por lo tanto 244: 12 = 20 4/12

F) del resultado anterior, 4/12 es una **fracción reductible (fracción equivalente)**, de esta manera tenemos que 4/12 = 1/3

G) Se necesitan veinte metros y un tercio de madera.

Después del análisis de la solución podemos tener más claro los conocimientos que debe tener el alumno para resolver este problema:

- Las fracciones mixtas y su propiedad para convertirse en fracciones impropias.
- Las fracciones impropias y sus propiedades para convertirse en fracciones mixtas o en números enteros.
- Sumas de fracciones con denominador común.
- Suma de fracciones impropias.
- Multiplicación de una fracción y un número entero (opcional).
- La fracción reductible (fracción equivalente) (opcional).

Ahora analizaremos este mismo problema, pero resuelto por un alumno antes de pertenecer a la comunidad de aprendizaje matemático.

Experiencia dentro de la comunidad π

Después de leer el problema, el alumno trabaja con las medidas de las tablas pero no toma en cuenta el número de tablas que necesita.

Escribe la suma: 1 ¾ + 2 ½

Convierte correctamente las fracciones mixtas a impropias: 1 ¾ + 2 ½ = 7/4 + 5/2

Realiza correctamente la suma de fracciones impropias con denominador diferente:

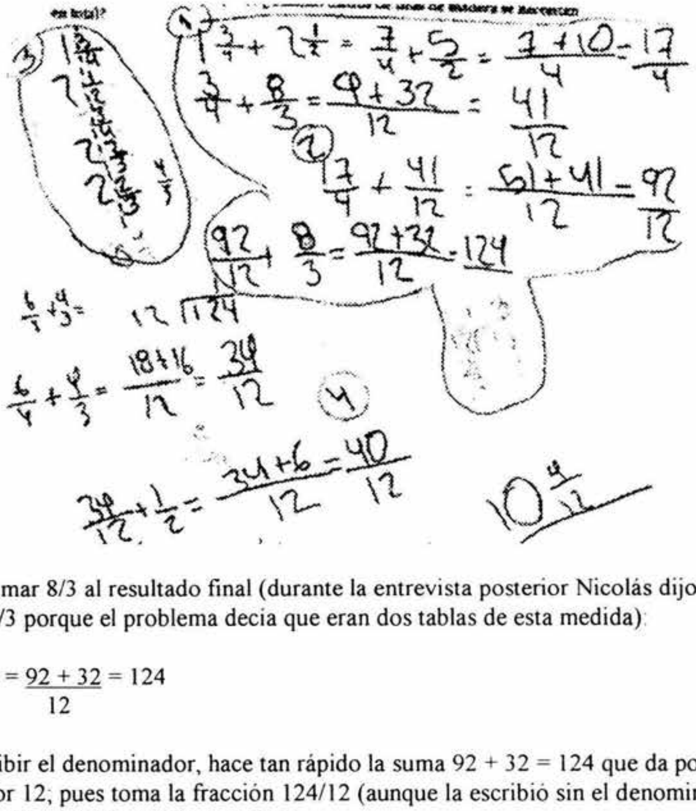
1 ¾ + 2 ½ = 7/4 + 5/2 = $\frac{7 + 10}{4} = \frac{17}{4}$

Después suma las fracciones ¾ y 2 2/3 (éste último lo transforma a fracción impropia mentalmente):

¾ + 8/3 = $\frac{9 + 32}{12} = \frac{41}{12}$

Suma correctamente las fracciones impropias que son el producto las dos operaciones anteriores:

17/4 + 41/12 = $\frac{51 + 41}{12} = \frac{92}{12}$



Vuelve a sumar 8/3 al resultado final (durante la entrevista posterior Nicolás dijo que utilizó dos veces 8/3 porque el problema decia que eran dos tablas de esta medida):

92/12 + 8/3 = $\frac{92 + 32}{12}$ = 124

Olvida escribir el denominador, hace tan rápido la suma 92 + 32 = 124 que da por hecho el denominador 12; pues toma la fracción 124/12 (aunque la escribió sin el denominador) como impropia para convertirla en mixta:

$$124/12 = \begin{array}{r} 1 \\ 12\overline{\smash{)}124} \\ 0 \end{array}$$

Deja incompleta la división.

Decide resolver el problema de otra forma:

Escribe todos los datos separándolos de sus respectivos enteros:

(1) ¾
(2) ½
¾
(2) 2/3
(2) 2/3

El dato 2 2/3 es el único que toma en cuenta para repetirlo pues el problema dice que son dos tablas de ésta medida. Pero no toma en cuenta el número de tablas de las otras medidas.

Toma todas las fracciones con denominadores comunes y los suma mentalmente:

¾ + ¾ = 6/4

2/3 + 2/3 = 4/3

Realiza la suma de ambos resultados, para después sumar ½ que le hace falta:

$$6/4 + 4/3 = \frac{18 + 16}{12} = \frac{34}{12}$$

$$34/12 + ½ = \frac{34 + 6}{12} = \frac{40}{12}$$

Convierte mentalmente la fracción impropia a mixta para obtener el resultado final, sin reducir la fracción final:

40/12 = **10 4/12**

El resultado es erróneo.

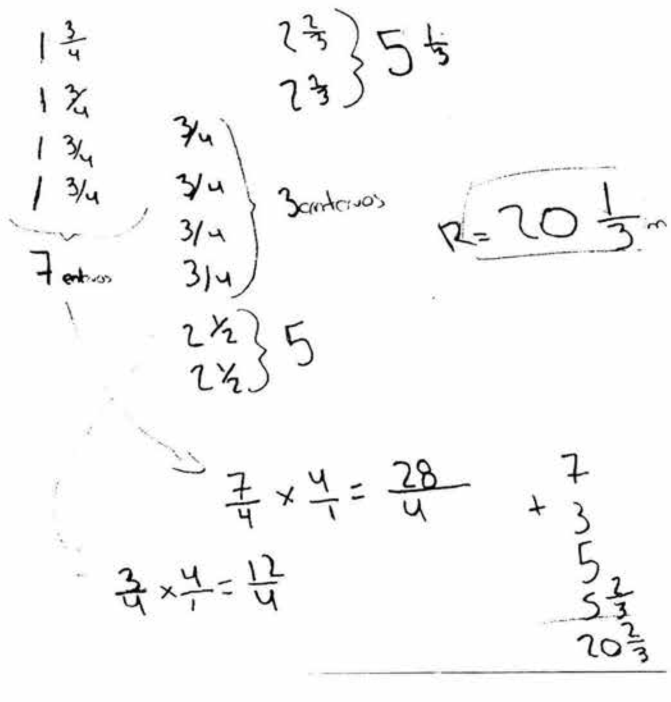
Con el análisis del proceso de solución del alumno, podemos hacer una valoración de sus fortalezas y debilidades:

Nicolás: antes de pertenecer a la comunidad π	
Fortalezas:	Debilidades:
Domina los siguientes conocimientos y procedimientos: - La noción de fracción - La suma de fracciones con denominador común (las hace incluso mentalmente). - La suma de fracciones con denominador diferente. - La conversión de fracciones impropias a mixtas (las hace incluso mentalmente). - La conversión de fracciones mixtas a impropias (también es capaz de hacerla mentalmente). Es capaz de cambiar de estrategia: después de intentar la suma formal de fracciones, realiza una suma mental con fracciones con denominador común, pero separando los enteros para sumarlos al final.	Omite datos por falta de atención al leer el problema. Actúa impulsivamente ante el problema: realiza la operación inmediatamente sin detenerse a razonar el contexto. Se le dificulta hacer divisiones. Presenta cierta inseguridad para dar el primer paso de solución, busca la aceptación del tutor por medio de preguntas.

Con base en esta valoración, tenemos una mayor información de lo que nuestros alumnos dominan y los aspectos que debemos trabajar con ellos. Cabe desatacar que Nicolás era el alumno con mayor conocimiento matemático dentro de la comunidad π. Ahora presentaremos este mismo problema resuelto por Nicolás después de terminada la comunidad de aprendizaje matemático.

Experiencia dentro de la comunidad π
Después de leer, el alumno escribe las fracciones el número de veces que el problema lo pide. Convierte la fracción mixta 1 ¾ a fracción impropia (7/4) y decide realizar una multiplicación, pero duda: A: ¿Cómo hago para multiplicar las fracciones? T: ¿Qué te pide el problema que hagas? A: me pide sumar, pero es mejor la multiplicación. T: ¿Por qué no lo quieres intentar con la suma? A: porque me tardo más, además, son muchos datos, ¿cómo se multiplica?

¿Así (señala la relación denominador-numerador) o así (señala la relación numerador-numerador)?
T: ¿cuándo multiplicas números enteros como le haces?
A: si tengo 2 x 2 = 4
T: ¿esa información te serviría para salir de tu duda?
A: mmm... si a los enteros les pongo el uno, entonces es una fracción y se hace así (señala la relación numerador-numerador)



De esta manera obtiene 7/4 x 4/1 = 28/4. Sigue el mismo procedimiento con la fracción siguiente: ¾ x 4/1= 12/4.

De ambas obtiene fracciones impropias y mentalmente las convierte en enteros (28/4 = 7; y 12/4 = 3) coloca el resultado a un lado de cada lista de fracciones.
Hace mentalmente las siguientes sumas de fracciones con denominador común escribiendo los resultado al lado de cada lista:

2 ½ + 2 ½ = 5
2 2/3 + 2 2/3 = 5 1/3

Coloca todos los resultados en forma vertical y los suma obteniendo 20 2/3:

error al rectificar mentalmente los datos de la suma final y solo cambia su resultado final).

Su resultado final es 20 1/3 m.
El resultado es correcto.

Si hacemos la valoración del proceso de solución de Nicolás y lo comparamos con su propio desempeño anterior nos encontramos con las siguientes fortalezas y debilidades, las cuales son testimonio de los avances que el alumno tuvo durante su participación como miembro de una comunidad de aprendizaje matemático:

Nicolás: Al término de la comunidad **π.**	
Fortalezas:	Debilidades:
Aunado a las fortalezas de la valoración anterior, se suman las siguientes: Además de los conocimientos y procedimientos que mostró anteriormente, ahora domina: • La suma de fracciones con denominador diferente. Anteriormente necesitaba realizarlos en papel y ahora es capaz de hacerlas mentalmente. • Sabe que el procedimiento de la multiplicación le dará los mismos resultados que el de la suma, pero con la ventaja de que le ahorra tiempo. En sus estrategia: Anota los datos a parte para no omitir ninguno. Revisa sus operaciones. De lo contrario hubiese tenido mal el problema. A pesar de que no recuerda exactamente como ser realiza la multiplicación de fracciones, es capaz de obtenerla cuando se le hace una analogía con la multiplicación de enteros.	No recuerda con exactitud el procedimiento de la multiplicación y de la división de fracciones.

Veamos ahora el análisis de otro problema con objetivo diferente al anterior.

Análisis del problema: "La bolsa del mandado"

Problema:

Las señora Rosa fue al mercado y compró un kilo de carne, medio kilo de huevo, tres cuartos de jamón, un cuarto de verduras y una caja de cereales de 400 gramos. ¿Cuánto pesa la bolsa que va cargando?

Objetivo:

- Analizar las estrategias utilizadas en la resolución de problemas.
- Analizar la capacidad del alumno para integrar sus conocimientos formales con los cotidianos, en relación con las fracciones.
- Analizar los conocimientos de los alumnos para vincular las fracciones con los números decimales.

¿Posee las cualidades de un problema?

El problema "la bolsa del mandado" presenta la narración de una situación cotidiana, donde existe relación entre las variables, en este caso, los datos se presentan como fracciones con interpretación de medida: unidades de peso.

La variable planteada como interrogante es también una medida de peso, y para obtenerla se deben manipular todos los datos numéricos.

La respuesta no es obvia para alumnos con problemas de aprendizaje, no se encuentra de forma inmediata, debido a que los datos no se presentan simbolizados de manera uniforme, algunos son enteros, otros son fracciones propias y otro más se presenta como decimal.

Aunque el método de solución parece obvio (sumar todos los datos para llegar a la solución), existe un bloqueo en el camino: no se pueden sumar fracciones con decimales a menos que se realicen conversiones. De esta manera, el problema suscita otros problemas, en este caso es la conversión de fracciones a decimales o viceversa.

El problema no tiene un sólo camino de solución, de hecho se presentan abajo tres formas de realizarlo.

Tipo de problema

El problema tiene un contexto explícito, en él se narra una situación concreta y presenta todos los datos necesarios para llegar a la solución. Su formulación es única y explícita, los datos se presentan sin ambigüedades en su interpretación y está claramente definida la pregunta a contestar. La solución es única y exacta, el método por el que se puede llegar a la solución es por medio de algoritmos conocidos (conocimientos formales), conocimientos cotidianos y la combinación de ambos. Se trata, entonces, de un problema con texto.

Características generales:

- El problema presenta una combinación de fracciones, enteros y decimales.
- Los decimales a su vez están representados como "si fueran enteros", pues no tienen un punto decimal (se presentan como 400 gramos y no como 0.400 kilogramos) pero se diferencian del entero (1 kilo) por la unidad de medida (gramos).
- La principal problemática radica en sumar decimales y fracciones, sobretodo si los alumnos se inclinan a resolver el problema con procedimientos formales.
- En un procedimiento formal (solución 3 descrita abajo) el alumno tendría que desplegar una serie de procedimientos tales como: suma de fracciones, conversión de fracciones impropias a mixtas y viceversa, conversión de decimales a fracciones o viceversa.

- Estos problemas pueden ser salvados en parte haciendo uso de conocimientos cotidianos (solución 1) o con la combinación de conocimientos previos y cotidianos (solución 2).

Soluciones posibles al problema: "La bolsa del mandado"

Solución 1: Con conocimientos cotidianos.

1) Los alumnos pueden convertir **fracciones a decimales** haciendo **uso de sus conocimientos cotidianos** cuando recuerdan lo que la báscula marca cuando piden determinados pesos:

- Un kilogramo es igual a 1000 gramos.
- ½ es igual a 500 gramos.
- ¾ es igual a 750 gramos.
- ¼ es igual a 250 gramos.
- Ya se tienen los 400 gramos.

Se procede a la suma:

1000 + 500 + 750 + 250 + 400 = **2900 gramos.**

El resultado anterior es correcto, pero si se desea convertir gramos a kilogramos entonces el resultado es: **2.900 kilogramos. Por lo tanto la bolsa pesa dos kilos 900 gramos.**

2) Se puede realizar el proceso anterior pero sin convertir el kilogramo a gramos:

- Un kilogramo = 1 kilo.
- ½ es igual a 500 gramos.
- ¾ es igual a 750 gramos.
- ¼ es igual a 250 gramos.
- Ya se tienen los 400 gramos.

Se procede a la suma comenzando por el kilo:

un kilo + 500 gramos = un kilo quinientos gramos (1.500) + 750 gramos = dos kilos doscientos cincuenta gramos (2.250) + 250 gramos = dos kilos quinientos gramos (2.500) + 400 gramos = dos kilos novecientos gramos (2.900).

El resultado es: la bolsa pesa dos kilos novecientos gramos (2.900)

Solución 2: Conocimientos previos y cotidianos.

El alumno puede agrupar y **sumar las fracciones que tienen mismo común denominador**:

Dados los datos: 1 kilo, ½ , ¾ , ¼ , 400 gramos.

El alumno puede sumar ¾ + ¼ = 4/4 = 1

Al resultado puede sumarle el kilo: 1 + 1 = 2

Y después sumar ½ que le hace falta 2 + ½ = 2 ½. En este punto, el alumno se encuentra con el problema de sumar la fracción mixta con los decimales, para ello puede recurrir a sus conocimientos cotidianos para **convertir fracciones a decimales**:

2 ½ = 2 kilos 500 gramos (2.500) + 400 gramos = **2 kilos 900 gramos.**

Solución 3: conocimientos formales.

En esta solución se formaliza la **conversión de fracciones a decimales**:

1) **Las fracciones se toman como cocientes**:

1kg. Se toma como tal.

½ = 1: 2 = .5 kg.

¾ = 3 : 4 = .75 kg

¼ = 1 : 4 = .25 kg

400 gr. = .4 kg. En este caso es necesario hacer **cambio de unidades de medida**, de gramos a kilogramos.

Se procede a la **suma de decimales**:

1 + 0.5 + 0.75 + 0.25 + 0.4 = **2.9. La bolsa pesa dos kilos novecientos gramos.**

Después del análisis de la solución podemos tener más claro los conocimientos que debe tener el alumno para resolver este problema:

- Transformación de fracciones a decimales con el uso de conocimientos cotidianos.
- Las fracciones impropias y sus propiedades para convertirse en fracciones mixtas o en números enteros.
- Transformación de fracciones (como cocientes) a decimales con métodos formales (opcional).
- Sumas de fracciones con denominador común.
- Transformación de unidades de medida de gramos a kilogramos y viceversa (opcional).
- Suma de decimales.

Ahora analizaremos este mismo problema, pero resuelto por un alumno antes de pertenecer a la comunidad **π**.

Experiencia dentro de la comunidad **π**	
1 K 1/2 3/4 1/4 400g	Después de leer el problema, el alumno se limita a escribir los datos. Su mirada permanece fija en el problema y no hace algo más, ni pregunta nada al tutor. Después hecha una mirada de reojo a otras partes del salón y comienza a ponerse ansioso. El tutor decide intervenir: Tutor: ¿Hay algún problema Elías? E: Si. No sé como resolverlo. T: ¿Qué te pide el problema? E: Que sume el peso de las cosas que compró la señora. T: Muy bien, ahora cómo piensas hacerlo. E: No sé. No me acuerdo como sumar quebrados. T- Cuando vas a la tienda a comprar medio kilo de huevo ¿cuánto debe marcar la báscula? E: Medio kilo. T: ¿Y cómo se representa el medio kilo en la báscula? E: No sé. T: Bueno, vamos a probar otra forma. Si compras un kilo de carne y después compras medio kilo de huevo, ¿cuánto pesarán entre los dos? E: Un kilo y medio. T- Muy bien, ¿esta información te serviria para continuar con el problema?

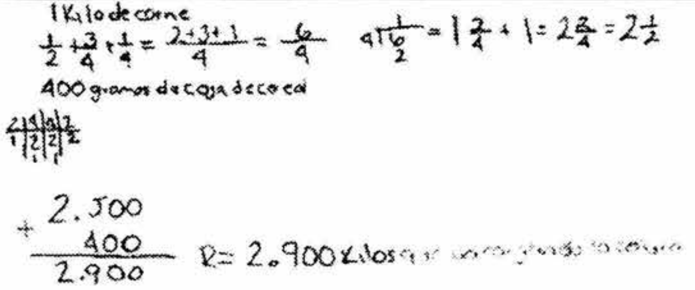
	E: ¿Pero después cómo sumo los cuartos? T: Si tienes tres cuartos de jamón y un cuarto de verdura, ¿cuánto pesarán entre los dos? E: No sé. T: Yo me he fijado que cuando voy a la tienda y pido un cuarto de jamón, la báscula marca 250 gramos. ¿cuánto crees que marque la báscula si se pesa algo de medio kilo? E: mmm.... no sé, no me he fijado en la báscula de la tienda. T: Creo que este un problema un poco difícil, pero tu puedes decidir, quieres intentar solucionarlo o prefieres pasar a otro? E: Mejor otro. Dejó incompleto el problema y se le presentaron otros problemas matemáticos.

A continuación presentamos la valoración de Elías en términos de fortalezas y debilidades. A pesar de que el alumno no resolvió el problema, la entrevista nos dio buenos indicadores sobre los aspectos que debíamos trabajar con él.

Valoración de Elías antes de pertenecer a la comunidad	
Fortalezas:	Debilidades:
Localiza todos los datos del problema.	No pide ayuda de ningún tipo. Se da por vencido fácilmente.
Tiene la noción de la operación con la que puede resolver el problema.	No tiene presente el procedimiento de la suma fracciones.
	No se arriesga a experimentar soluciones propias. Se pone ansioso cuando no sabe qué hacer.
	Tiene dificultad para hacer uso de sus conocimientos cotidianos como apoyo para resolver el problema.
	Desconoce la relación entre fracciones y decimales

Presentamos ahora la valoración del conocimiento de Elías después de pertenecer a la comunidad de aprendizaje matemático, en ella encontramos cambios que saltan a la vista.

Experiencia dentro de la comunidad π



1 Kilo de carne

$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+3+1}{4}=\frac{6}{4}$ $\quad 4\overline{)6}\ \frac{1}{2}=1\frac{2}{4}+1=2\frac{2}{4}=2\frac{1}{2}$

400 gramos de caja de cereal

$$\begin{array}{r} 2.500 \\ +\ \ 400 \\ \hline 2.900 \end{array}$$

R= 2.900 kilos [illegible]

Después de leer el problema, Elías escribe el número entero, las fracciones y el decimal, en forma de lista. Escribe las fracciones propias en forma de suma.

Realiza la suma de fracciones utilizando el procedimiento formal: utiliza una tabla para obtener el común denominador, el resultado que obtiene (fracción impropia) la transforma en fracción mixta obteniendo el resultado parcial (1 2/4) el cual suma el entero faltante para obtener el resultado (2 2/4) que reduce a su mínima expresión (2 ½).

½ + ¾ + ¼ = (procedimiento formal) = 2 ½.

El alumno duda.
A: ¿cómo le hago aquí?
T: ¿cuál es el problema?
A: no sé que hacer ahora.
T: ¿qué crees que debes hacer?
A: sumar 2 ½ + 400 gramos, pero no sé cómo. Si es una suma de fracciones ¿debo convertir 400 a fracciones?
T: ¿eso te daría resultado?.
A: mmmm... no.
T: ¿porqué?
A: no lo sé.
T: ¿te gustaría dejar así el problema?
A: ¡No!.
T: cuándo vas a la tienda y pides un cuarto de jamón ¿cuánto debe marcar la báscula?
A: mmm... 200.
T: y cuando pides medio kilo de jamón ¿cuánto debe marcar la báscula?
A: ¡ya!, si es medio kilo debe marcar 500 y si es un cuarto debe marcar 250.
T: ¿crees que esa información te sirva para continuar con el problema?
A: (observa el problema) si.

El alumno suma 2.500 + 400 = 2.900.

Su respuesta final es 2.900 kilos que va cargando la señora.
La respuesta es correcta.

Si hacemos la valoración del proceso de solución de Elías y lo comparamos con su propio desempeño anterior nos encontramos con las siguientes fortalezas y debilidades, las cuales son testimonio de los avances que el alumno tuvo durante su participación como miembro de una comunidad de aprendizaje matemático:

Valoración de Elías después de la comunidad de aprendizaje.	
Fortalezas	Debilidades
El alumno anota todos los datos para utilizarlos y facilitarse así el proceso de solución. Desarrolla correctamente: • Las suma de fracciones con denominador diferente. • La obtención del común denominador por medio de una tabla. • Transformación de fracciones impropias a mixtas. • La reducción de las fracciones (fracciones equivalentes). Aplica su conocimiento de la relación entre fracciones y decimales. Distingue que no puede sumar fracciones con decimales y debe transformar algún dato para que sean iguales y poder sumarlos. Con apoyo del tutor, logró conectar sus conocimientos cotidianos con los formales (aspecto que se le dificultó en la primera valoración). No se da por vencido fácilmente, prefiere preguntar para despejar su duda.	Aún necesita ayuda para terminar el problema, lo que indica que aún debe reforzar el uso de sus conocimientos cotidianos acerca de la equivalencia entre decimales y fracciones en una actividad formal.

Con base en los ejemplos vistos sobre el análisis de un problema matemático y sobre la valoración de las fortalezas y debilidades de los alumnos en la resolución de problemas, tendremos entonces elementos suficientes para seleccionar los problemas adecuados a las habilidades y conocimientos de los miembros de la comunidad de aprendizaje.

Es posible que nos encontremos con alumnos que tienen un nivel mayor de conocimiento que otros. Debemos partir, entonces, del nivel de los alumnos más bajos (en la literatura especializada se les llaman novatos) para que vayan desarrollando sus habilidades matemáticas y adquieran mayores fortalezas en la resolución de problemas. Por su parte, los alumnos con mayor nivel (llamados expertos) tendrán la oportunidad de explicar a los novatos procedimientos de solución, podrán dar ideas de solución, proponer diversas estrategias y podrán compartir su conocimiento con ellos. Como vimos anteriormente, los alumnos que explican a otros desarrollan un mayor nivel de conocimiento que si solamente escucharan al profesor. De esta manera, tenemos que ambas clases de alumnos se pueden beneficiar de un problema matemático.

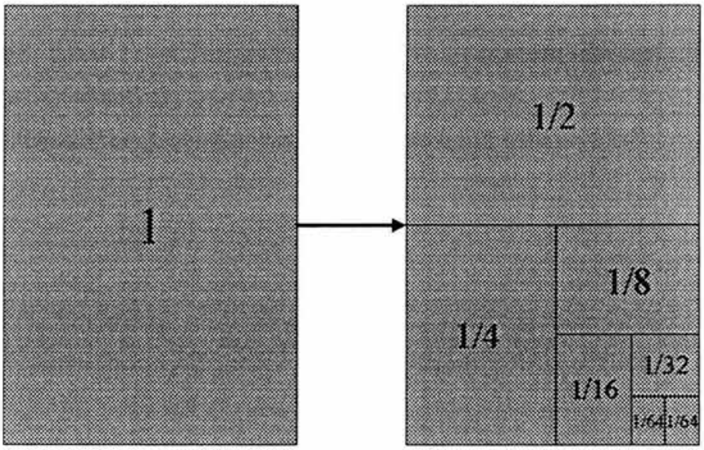
A continuación ejemplificaremos actividades ordenadas jerárquicamente desde el ejercicio más sencillo hasta el problema más complicado.

Serie de problemas ordenados jerárquicamente

Dentro del tema de fracciones, tenemos alumnos que en su valoración del conocimiento, reconocen que la simbolizada a/b representa una fracción. Sin embargo, como vimos en las *Experiencia dentro de la comunidad* **π,** no lo asocian con el significado de fracción que es la relación entre un entero y sus partes, expresada en la relación entre el numerador y el denominador, por ello se les dificulta identificar qué fracción es mayor que otra. Con base en esto, podemos diseñar una serie de actividades ordenadas en jerarquías lógicas que van desde las más sencillas hasta las que representan una mayor dificultad con el fin de que los alumnos tengan mejores oportunidades de desarrollar su pensamiento matemático. A continuación presentamos cinco actividades ordenadas en jerarquías lógicas:

1) Fraccionar un entero.

Utilizamos material didáctico para ser manipulado por los alumnos. Este ejercicio comienza por un entero y lo vamos dividiendo hasta llegar a la fracción más pequeña posible. Los alumnos comprenden las fracciones que utilizan comúnmente como ½ y ¼ cuando están representadas físicamente, pero en la forma escrita (simbólica) se presentan las dificultades. Con esta información podemos proponer el siguiente ejercicio coordinado por el profesor:



El dividir un entero en fracciones es la parte más sencilla de la serie de actividades que presentamos después. A continuación veremos un ejemplo de cómo se llevó a cabo este ejercicio durante la comunidad de aprendizaje.

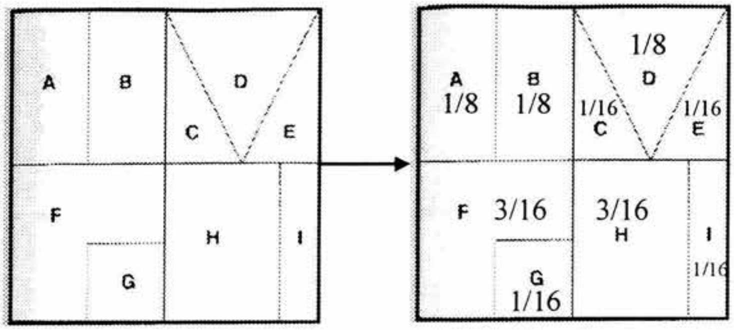
Experiencia dentro de la comunidad π
Con el uso de una hoja de papel para cada uno de los miembros de la comunidad, el tutor dice que la hoja en su totalidad representa un entero. Pide, después a los alumnos cortar por la mitad el entero y pregunta: Tutor: ¿A cuánto equivale cada parte? Elias: A la mitad. T ¿Y en fracciones a cuánto equivale? E: A un medio.

T: Muy bien, vamos a tomar un medio y le vamos a escribir la cantidad de ½. Y si ahora dividimos un medio a la mitad, ¿cuánto obtendremos Elias?
E: mmm...
Domingo: Un cuarto.
T: Muy bien, ¿qué quiere decir un cuarto?
Nicolás: que el entero lo dividimos en cuatro partes y un cuarto es sólo una parte de él.
T: Ahora, tomamos un cuarto y le escribimos la cantidad ¼. Después tomamos un cuarto y lo dividimos a la mitad ¿a cuanto equivale cada parte?
Todos: mmmm... (piensan).
N: ¿A un octavo?
T: Así es, ¿cómo podemos comprobarlo? (los alumnos piensan). Voy a tomar prestados dos octavos de Nicolás, dos de Elías, dos de Domingo y dos míos, ¿podré formar un entero? (coloca los octavos y forma una hoja completa, al verlo, los alumnos responden "si"). Esto significa que si tomo 1/8 y después lo junto con otro y después junto otro, ¿cuántos octavos necesitaré para formar el entero?
D: Ocho.
T: Muy bien, entonces ¿qué significa la fracción 1/8?
D: Que es una parte de ocho.
T: ¿Qué fracción es mayor y cuál es menor de 1/8, ½ ó ¼?
D: La mayor es ½ y la menor 1/8.
T: Pero el denominador de ½ es menor que el denominador de 1/8, ¿cómo es posible que ½ sea mayor que 1/8?
N: El ½ nos indica que tomamos una parte de dos que está dividido el entero, mientras que el 1/8 nos indica que el entero está divido en 8, de las cuales tomamos nada más una.
T: Así es. Tomemos ahora 1/8 y dividámoslo a la mitad, ¿cuánto vamos a obtener?
D: Pues 1/16...

La actividad continúa hasta obtener 1/64. Después el tutor pide a cada alumno, por turnos, que forme un entero pudiendo utilizar las fracciones de otros compañeros.

2) Encontrar los valores de un cuadro fraccionado.

Utilizamos un cuadro fraccionado previamente. En este ejercicio, se parte de un entero fraccionado, los alumnos deben encontrar el valor de cada parte del cuadro y colocar el valor de la letra que representa la fracción:



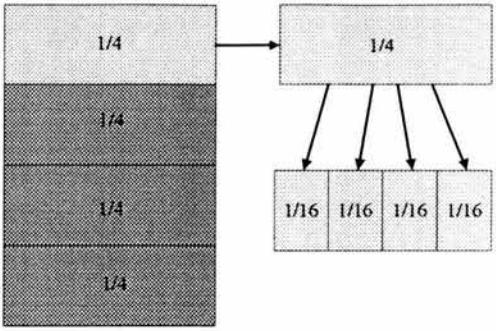
Al término del ejercicio, pedimos a los alumnos realizar otras actividades (la hoja de actividades completa aparece en el anexo 7), entre ellas, pedimos a los alumnos formar su propio cuadro diferente al del ejercicio. Con ésta última actividad, los alumnos realizan un ejercicio con un razonamiento parecido al descrito con el número 1.

3) Problema donde se pide hallar fracciones con respecto al entero.

Presentamos el siguiente problema: El pastel de ayer.

"El día de ayer fue el cumpleaños de Luisa y sus papás le compraron un pastel para festejarlo, los invitados se comieron tres cuartas partes del pastel. El día de hoy a Rosa, a su mamá, a su papá y a su hermano menor se les antojó una rebanada de pastel, ¿Qué cantidad de todo lo que fue el pastel le toca a cada uno, si se reparten rebanadas del mismo tamaño?"

A diferencia de los dos ejercicios anteriores, se presenta un problema con texto donde los alumnos deben interpretarlo y manipular sus datos. En la resolución de este problema, los alumnos hacen uso de su noción de fracción. Pero después deben utilizar una sola parte y dividirla como lo pide el problema. El proceso de solución involucra los conocimientos que los alumnos adquirieron durante los ejercicios anteriores. A continuación presentamos de forma gráfica la solución del problema.

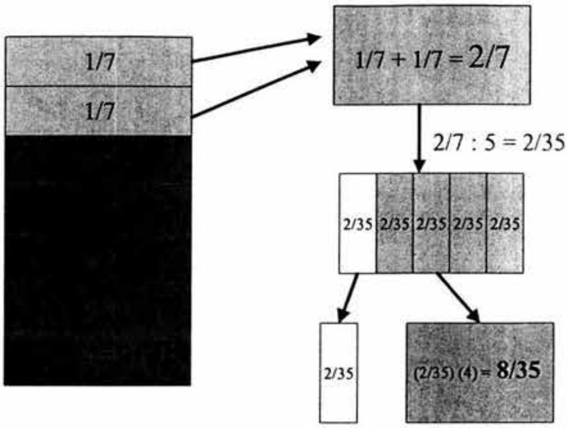


4) Problema donde se pide hallar fracciones (más complicadas) con respecto al entero.

El concierto de rock.

En el Zócalo de la Ciudad de México se llevará a cabo un concierto de rock; cinco séptimas partes de la explanada estarán ocupadas por el público. Del espacio restante, una quinta parte estará ocupada por el escenario donde tocarán los grupos de rock y el resto será ocupado por el equipo de sonido. ¿Qué parte del total del Zócalo será ocupada por el escenario? Y ¿Qué parte del total del Zócalo será ocupada por el equipo de sonido?

Resolver este problema requiere que los alumnos tomen una parte del problema y lo dividan, tal como el problema anterior. Pero se le aumenta una dificultad: la parte elegida debe ser dividida también sin perder de vista que sigue siendo parte de un entero. A continuación presentamos la solución gráfica del problema.



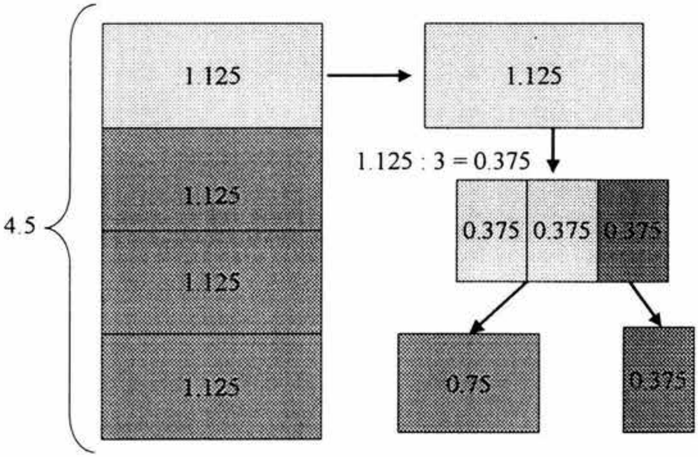
5) Problema donde se pide hallar el valor de cada fracción, con respecto a un entero.

En este problema, el entero deja de tener implícito el valor de uno (un entero del cual se obtienen medios, cuartos u octavos, etc.) y adquiere un valor que obliga a los alumnos a dejar de percibir a las fracciones como tales: como veremos, un cuarto por ejemplo, deja de tener la expresión a/b para convertirse en número decimal.

Los graffitis 2

En un concurso de graffitis, se les va a dar a cada grafitero una pared que tiene una superficie de 4.5 metros cuadrados, para que hagan su obra. Los autores deben cumplir con los siguientes requisitos: tres cuartas partes de la pared deben destinarse al graffiti; del resto de la pared, dos terceras partes deben ser destinadas para escribir una leyenda que hable de la obra, y una tercera parte para la firma del autor. ¿Qué superficie del total de la pared será abarcada por la leyenda? ¿Qué superficie para la firma del autor?

A diferencia de los dos problemas anteriores, el actual tiene un texto semejante al anterior pero el entero tiene un valor. Esta pequeña modificación permite a los alumnos hacer uso de fracciones tomando como base un entero de valor diferente a uno. A continuación presentamos el proceso de solución gráfico.



Como podemos ver, los problemas se van dificultando pero todos están ligados entre sí, llevan una secuencia lógica que permite a los alumnos hacer uso de las estrategias y conocimientos utilizados en el problema anterior. Una de las tareas que tenemos como maestros en encontrar problemas que aumenten su dificultad paulatinamente para que el alumno haga uso más enriquecedor de sus conocimientos.

La enseñanza en contexto

"Puedes practicar los tiros ocho horas al día,
pero si tu técnica es mala, entonces nada más
eres bueno para tirar de manera equivocada.
Llega a las bases fundamentales y surgirá el nivel de todo lo que hagas"
-Michael Jordan-

Schoenfeld (1998) propone teorizar fuera de escenarios controlados, para hacerlo en contextos reales donde se presenta el caos de la clase o las verdaderas problemáticas de los alumnos al resolver problemas matemáticos. La meta es desarrollar una teoría del comportamiento humano en los escenarios sociales complejos. El modelo tiene tres justificaciones pragmáticas:

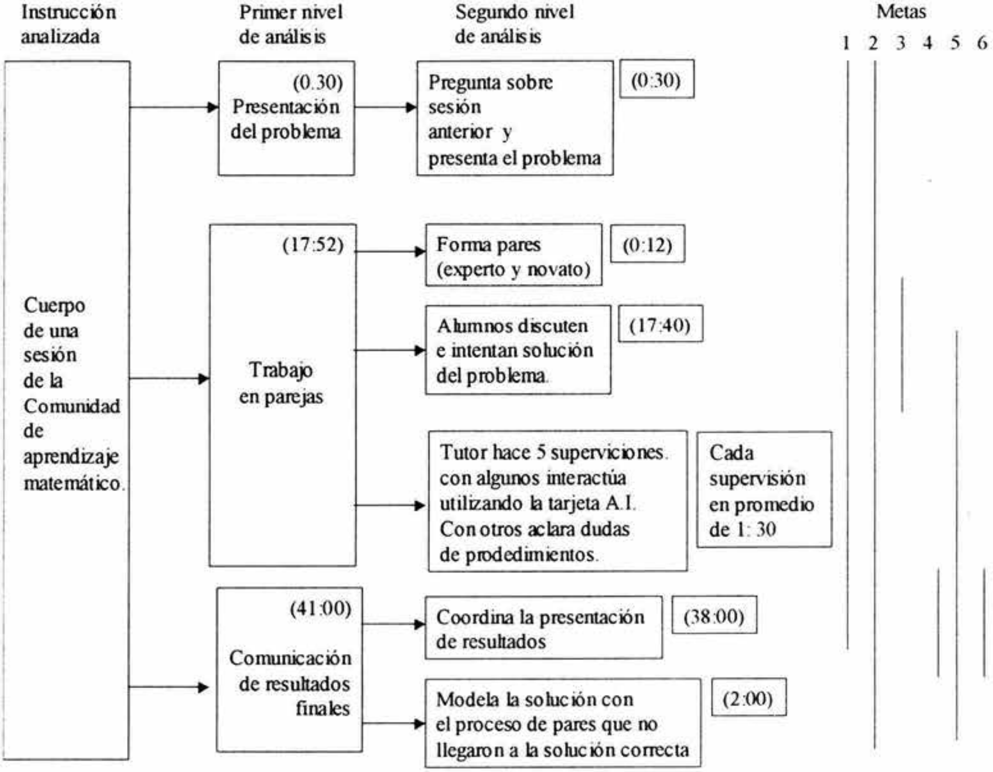
1. El modelo no se enfoca en una sola clase de enseñanza, su estructura permite hacer descripciones exactas de la enseñanza en general, que puede ir desde la enseñanza tradicional hasta la enseñanza más libre, el modelo no se enfoca solo en lo que los maestros hacen (creencias y metas) sino en los que los habilita para hacer lo que hacen, con el fin de fomentar la buena enseñanza.
2. Es una herramienta de desarrollo personal, el profesor puede explorar lo que estaba intentando alcanzar, los opciones que tenía y si funcionó el trabajo.
3. El modelo puede usarse para delinear la evolución del maestro.

En este apartado, haremos un ejemplo sobre cómo analizar las características de la instrucción. Para ello haremos uso de la propuesta de Schoenfeld (1998) descrita en la primera sección "Conozcamos la teoría." El objetivo de realizar éste análisis es que el maestro tenga información clara y precisa sobre su papel en cada una de las actividades programadas.

En el siguiente cuadro presentamos el análisis de las actividades llevadas a cabo en el cuerpo[20] de una sesión intermedia (que fue video grabada), con sus respectivos niveles de análisis (fragmentos y sub-fragmentos en que se dividió la instrucción del tutor). Los números entre paréntesis denotan el tiempo en minutos que duró la actividad. Las metas se enuncian después del cuadro. Finalmente hacemos un breve análisis de la enseñanza en contexto de ésta sesión en particular.

---

[20] Con este modelo se puede analizar desde la sesión completa, hasta una actividad específica. Debemos recordar que la instrucción que proponemos se divide en obertura, cuerpo y cierre. Hemos decidido presentar el análisis del papel del tutor a lo largo de la fase del cuerpo porque en ésta se desarrollan los apoyos del tutor en la resolución de problemas.



Metas: como vimos en la sección "Conozcamos la teoría", se pueden proponer tantas mentas como sea necesario. En este caso, se presentan algunas metas propuestas en la sesión para favorecer el aprendizaje. Además, presentamos metas sociales como el respeto y el apoyo entre los miembros de la comunidad. En el cuadro de arriba, las metas se encuentran numeradas, éstas son las siguientes:

1. Propiciar la interacción entre los alumnos.
2. Propiciar el respeto entre los miembros de la comunidad de aprendizaje.
3. Que los alumnos exploren, discutan y lleguen a soluciones.

4. Que los alumnos analicen las soluciones de otros y los apoyen en donde el proceso se dificulta.
5. Los alumnos sean conscientes de su estrategia de solución.
6. Que los alumnos expongan a la comunidad de aprendizaje su proceso de solución, en un ambiente fuera de críticas y favorable para las sugerencias.

Como puede verse en el cuadro, las metas están propuestas para la sesión pero varían dependiendo de la actividad, de esta manera, por ejemplo, la meta dos "Propiciar el respeto entre los miembros de la comunidad de aprendizaje" se propone para alcanzarla durante toda la sesión, mientras que la meta tres "Que los alumnos exploren, discutan y lleguen a soluciones" se propone para alcanzarla solamente mientras los alumnos trabajan reunidos en pares.

Análisis de la enseñanza en contexto

Durante la fase del cuerpo de la sesión que presentamos, podemos ver que la mayor parte del tiempo fue ocupada en el fragmento de comunicación de resultado finales, básicamente en el sub-fragmento donde el tutor coordina la presentación de resultados de los alumnos (38 minutos) y el trabajo entre pares (casi 18 minutos). Veamos por qué fue así.

Durante esta sesión el papel del tutor se caracteriza por desempeñar el rol de coordinador. Los alumnos se dedicaron durante casi 18 minutos a resolver el problema por sí mismos. Durante este tiempo el tutor hizo cinco supervisiones, que los alumnos aprovecharon para manifestarles sus dudas.

¿Qué hizo el tutor? Esta sesión se caracterizó por que el tutor fungió como coordinador y la mayor parte del tiempo supervisó el avance de los alumnos. Cada supervisión tuvo una duración de un minuto y medio, el tiempo total de supervisión se limitó a siete minutos y medio. El tutor interaccionó con el fin de apoyar a los alumnos en el uso la tarjeta auto-instruccional y para despejar algunas dudas, pero los dejó que terminaran con el problema, independientemente si percibía que el proceso de solución o el resultado eran erróneos. No dejó solos a los alumnos durante todo el proceso para evitar la desmotivación, pues como propone Polya (1969) el maestro debe apoyar de una manera efectiva y natural sin imponerle su propio punto de vista y dejar que el alumno asuma una parte razonable del trabajo, pero el alumno debe tener indicios de que está progresando.

Durante la comunicación de resultados finales, que se llevó la mayor parte de la sesión, el tutor coordinó y animó a los alumnos a:

1. Exponer su proceso de solución ante los demás miembros de la comunidad (las tres parejas participaron).
2. Responder preguntas que el tutor hacía con respecto a su proceso de solución o algún procedimiento.
3. Apoyar a sus compañeros en el proceso de solución o responder a preguntas que éstos hacían.
4. Explicar algún procedimiento que no quedaba claro para algunos miembros de la comunidad.
5. Decidir, después de que todos hubieran pasado, cuál resultado les parecía el correcto y que lo fundamentaran.

¿Por qué hizo esto el tutor? Porque consideró la necesidad de que todos las parejas expresaran en términos matemáticos su proceso de solución y pudieran darse cuenta de sus errores. Además porque cada exposición le daban información de cómo estaban entendiendo los alumnos el problema, en qué procedimientos tenían lagunas y qué parte de la estrategia les hacía falta enfatizar. Propiciaba también la comunicación de resultados, con el fin de que los alumnos se animen a expresar sus ideas dentro y fuera de la comunidad.

Al final de la comunicación de resultados, al tutor le tomó dos minutos modelar un proceso de solución tomando como base las ideas de las parejas cuya respuesta no fue correcta, ¿por qué lo hizo? Porque era necesario hacer notar a los alumnos que no sólo existe un camino de solución y para que se dieran cuenta de que su proceso iba bien encaminado y que no había sido en vano. En todo momento, el tutor alcanzó las metas propuestas.

La intervención del tutor a lo largo del desarrollo de una comunidad de aprendizaje.

En el apartado anterior presentamos el análisis de una sesión intermedia con base en el modelo de enseñanza en contexto, donde los alumnos trabajaban de manera independiente, pero no siempre fue así. Al principio, los alumnos necesitaron mayor apoyo, ya sea porque no estaban acostumbrados a esta forma de trabajo, o porque se daban por vencidos fácilmente o porque definitivamente no entendían algún procedimiento. De la misma manera, el tutor va adquiriendo experiencia (tanto en la instrucción, como en la presentación de problemas adecuados) y habilidad para reconocer el tipo de ayudas que los alumnos necesitan. A continuación presentaremos una tabla donde se presentan las diferencias en la intervención del tutor durante tres sesiones: la primera sesión, una sesión intermedia y la última sesión de la comunidad de aprendizaje.

Sesión 1

Tiempo (min)			5			10			15			20			25			30			35			40			45			50			55			60
Presentación	X																					X														
Solución		■	▨	▨	▨																		■	▨	▨											
Comunicación						■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■					■	■								

Sesión 6

Tiempo (min)			5			10			15			20			25			30			35			40			45			50			55			60
Presentación	X																																			
Solución		■	■	■	■	■	■	■	■	■	■																									
Comunicación												■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	

Sesión 13

Tiempo (min)			5			10			15			20			25			30			35			40			45			50			55			60
Presentación	X																X																			
Solución		▨	▨	■	▨	▨	■	■	■	▨	▨	▨	▨	▨				■	■	■	■	■	■	■												
Comunicación										■	■	■	■	■	▨	■									■	■	■	■	■	■	■	■	■			

X Presentación de un problema nuevo.

■ Tutor apoyando a todos los alumnos.

▨ Tutor apoyando solamente a un alumno o a un equipo.

■ Alumnos trabajando en equipo de manera independiente.

Como podemos ver, en la primera sesión el tutor apoyó por más tiempo a los alumnos. Así mismo, el trabajo independiente de los alumnos era mínimo. Conforme las sesiones transcurrieron, el apoyo del tutor decreció paulatinamente, mientras que el trabajo independiente de los alumnos aumentó en tiempo. Con esto, nos queda claro que la intervención del tutor a lo largo de las sesiones no siempre es semejante. Las actividades pueden ser parecidas, pero su intervención varía en tiempo y forma.

Cabe destacar que en la fila de "solución" de la sesión 13, esquematizada en la tabla anterior, convergen dos situaciones diferentes pero que se llevaron a cabo de manera simultánea. Por un lado se presenta a los alumnos trabajando en equipo de manera independiente, éstos equipos trabajaron así durante toda la sesión. Pero también se representa al tutor apoyando a un sólo alumno, en este caso, el alumno tenía conocimientos más avanzados que los demás, por ello, se le dotó de un problema con un nivel de complejidad mayor, por tal motivo, el tutor lo apoyaba con más frecuencia. De hecho, en la fila de comunicación, podemos observar que mientras los equipos que habían dado solución al problema matemático, estaban comunicando sus resultados a los demás, mientras tanto, el alumno más avanzado continuaba resolviendo el problema complejo.

El análisis de la instrucción por medio del modelo de la enseñanza en contexto aunado al análisis de los problemas a presentar y a la valoración de los alumnos dentro de la comunidad de aprendizaje, ayudaron al tutor a mejorar su quehacer profesional al analizar aspectos que podrían mejorarse. Cabe destacar que su evolución como coordinador de una comunidad de aprendizaje tuvo cambios perceptibles en su enfoque instruccional, aunque siempre buscó que los alumnos trabajaran cooperativamente (instrucción mediada por un compañero), en las primeras sesiones predominaba la instrucción directa, donde el tutor descubrió que él era el centro de atención en las relaciones, él era quién explicaba los procesos de solución de un problema que los alumnos no conseguían resolver por cuenta propia. Al paso del tiempo, esta situación cambió paulatinamente, hasta que logró consolidar el trabajo cooperativo y con ello, aprendió a coordinar a los alumnos sin darles las respuestas inmediatamente sino que les animó a buscar y sustentar las propias.

Durante esta experiencia, podemos notar que no solamente los alumnos aprendieron. El tutor también lo hizo y ésta es una de las metas de una comunidad de aprendizaje. Todos los miembros de la comunidad **π** se aventuraron a experimentar nuevas formas de trabajar y el resultado fue alentador para todos.

Consideraciones finales

En este apartado presentaremos a manera de resumen, los requerimientos de una comunidad de aprendizaje, y las actividades que el maestro o tutor lleva a cabo para alcanzar ese fin.

Para desarrollar una comunidad de aprendizaje...

Se requiere...	**Y para ello el tutor...**
Construir socialmente la comunidad de aprendizaje.	• Toma la responsabilidad de la comunidad de aprendizaje. • Diseña las sesiones con el fin de que los alumnos interactúen entre sí para apoyarse. • No se focaliza solamente en la instrucción directa. Promueve además la instrucción estratégica y la instrucción mediada por un compañero, con fines complementarios.
Ganar la atención de los alumnos.	• Comienza a ganar la atención desde la obertura. • Muestra interés por las actividades de los miembros de la comunidad para establecer mejores vínculos de relación. Esta actividad es recomendada cuando los miembros aún no están presentes en su totalidad. • Induce el tema por medio de la lectura del día, que habla sobre un aspecto anecdótico de un matemático. Sus fines son mostrar a los alumnos que los matemáticos son seres humanos como ellos y despojar a las matemáticas de su rigidez.
Revisar los logros alcanzados durante la sesión anterior.	• Hace comentarios o preguntas a los alumnos con el fin de que sean concientes de los logros que han alcanzado.
Establecer las metas	• Dota a los alumnos de hojas de mentas individuales

para la sesión.	que son llenadas por ellos, mientras el tutor llena la hoja de metas grupal. Las metas deben ser próximas, específicas y accesibles.
Los alumnos desarrollen estrategias de solución de problemas matemáticos.	• Dota a los alumnos con una tarjeta auto-instruccional. • Modela el uso de la tarjeta auto-instruccional. • Encamina el uso de la tarjeta auto-instruccional. • Interactúa con los alumnos una vez comenzado el problema, con el fin de facilitar la internalización de los pasos de la estrategia.
Presentar problemas significativos y adecuados al nivel de los alumnos.	• Hace una valoración de los conocimientos actuales de los alumnos, poniendo especial énfasis en su proceso de solución y no sólo en el resultado final. Para comprender mejor el proceso de solución, es de gran utilidad hacer una entrevista para obtener información sobre cómo está entendiendo el alumno algún concepto o algoritmo matemático. • Hace un análisis de los problemas que piensa presentar, para tener claro los conocimientos que el alumno necesita desplegar para llegar a la solución y así anticiparse a los posibles obstáculos. • A lo largo de las sesiones, presenta una serie de problemas que aumentan paulatinamente su dificultad. • Para hacer significativo un problema, desde el punto de vista socio-emocional, anima a los alumnos apoyarse en la solución del problema. • Diseña o busca problemas que contengan información interesante al alumno (como deportes, o nombres de personajes famosos para él), o pueden

	ser sucesos cotidianos narrados con lenguaje coloquial, o pueden referirse a aspectos científicos o sociales que le ayuden a explicarse mejor su entorno.
Los alumnos solucionen problemas por sí mismos en constante apoyo mutuo.	• Anima a los alumnos a trabajar entre pares o en equipos de más de dos alumnos y estimular así el aprendizaje cooperativo. • No se desanima si no obtiene los resultados esperados en un tiempo corto. Al principio los alumnos no están acostumbrados a trabajar en la instrucción mediada por un compañero. Puede ser que comiencen a distraerse o que se den por vencidos fácilmente, pero conforme empiezan a experimentar logros, se habitúan mejor al trabajo.
Intervenir cuando se considere necesario.	• Interviene cuando detecta que los alumnos se dan por vencidos, se distraen constantemente o cuando no pueden resolver el problema debido al uso ineficiente de la estrategia o el desarrollo de procesos algorítmicos erróneos. • Brinda los apoyos necesarios dejando al alumno asumir una parte razonable del trabajo, mantiene la ilusión al alumno de que sus esfuerzos están produciendo buenos resultados, apoya de manera natural. Para ello, el maestro se pone en el lugar del alumno, y ver desde su punto de vista para así intentar comprender lo que pasa por su mente y plantearle una preguntas, recomendaciones, operaciones intelectuales o indicarle algún camino que pudiese ocurrírsele al propio alumno.
Los alumnos comuniquen resultados, expresen	• Anima a los alumnos formados en equipos, a experimentar procedimientos de solución, explorar ideas y tomen acuerdos.

sus problemáticas y fortalezas.	• Es el interlocutor de los alumnos. • Promueve que un alumno sea interlocutor de otro, proponiendo que un alumno haga preguntas a otro sobre su desempeño o que exprese a otro su propio desempeño. Con esta información el tutor obtiene información importante, que registra en la hoja de metas grupal, que le son de utilidad para diseñar la siguiente sesión.

Con esto finalizamos diciendo que no solamente los alumnos se desarrollan en una comunidad de aprendizaje matemático. También el maestro desarrolla una serie de habilidades, incluidas las sociales, para llevar a cabo una instrucción de manera diferente promoviendo, además de conocimiento matemático, la cultura general u otros contenidos que no están peleados con la materia, con el fin de que los alumnos conozcan mejor el mundo que les tocó vivir.

México D. F. Noviembre de 2003

Bibliografía

Alatorre, F. S., De Bongoechea, N., y Mendiola, S. E. (2002a). "Aspectos temáticos del efecto remanente de las matemáticas escolares." En De la Peña José Antonio *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*. México: Siglo XXI en coedición con el Instituto de Matemáticas, UNAM. 51-112.

Alatorre, F. S., De Bongoechea, N., y Mendiola, S. E. (2002b). "Aspectos sociales del efecto remanente de las matemáticas escolares." En De la Peña José Antonio *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*. México: Siglo XXI en coedición con el Instituto de Matemáticas, UNAM. 113-154.

Bottge, Brian, A. (2001). "Reconceptualizing mathematics problem solving for low-achivement students." *Remedial and especial education*. 22, 2, 102-112.

Bryant, B. R. & Rivera D. P. (1997). "Educational assessment of mathematics skills and abilities." *Journal of learning disabilities*. 1, 57-68.

Carnine, Douglas. (1997). "Instructional designs in mathematics for students with learning disabilities." *Journal of learning disabilities*. 2, 130-141.

Clemente, G. D; Ayala, G. F; Favila, J. J. L; y López, E. E. (2001) "Las fracciones: una propuesta constructivista para su enseñanza-aprendizaje". *Correo del maestro; Revista para profesores de educación básica*. México, 5, 56, 8-19.

Cordero. J. A. (2000). "Resolución de Problemas." Documento en linea disponible en http://www.xtec.es/~jcorder/investig.htm

Dávila, Marta; (1992). "El reparto y las fracciones". *Educación matemática*. 4, 1, 32-45.

De la Peña, J. A.; y Barot, M. (2002). "Las matemáticas en la cultura". En . De la Peña José Antonio *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*. México: Siglo XXI en coedición con el Instituto de Matemáticas, UNAM. 9-50.

Díaz Barriga, A. F., y Hernández, R. G., (1998). *Estrategias Docentes para un aprendizaje Significativo*. México: Mc Graw Hill.

Flores, Macias, R. C. (1999) "La Enseñanza de una Estrategia de Solución de Problemas a Niños con Problemas de Aprendizaje." *Integración, Educación y Desarrollo Psicológico*; 11, 11, 1-17.

Flores, Macías, R. C. (2000). *Alcanzando el éxito en secundaria programa de apoyo para adolescentes con dificultades en el aprendizaje.* Manuscrito de circulación interna: Facultad de Psicología, U.N.A.M.

Flores, Macías, R. C. (2001). "Instrucción estratégica en alumnos con problemas de aprendizaje." *Revista Mexicana de Psicología.* 18, 2, 247-256.

Flores, M. R. C. (2002). *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación.* Tesis de doctorado. Universidad Autónoma de Aguascalientes, México.

Flores, Macías, R. C., Farfán, A & Ramírez C (2003). Solución de problemas de adición y sustracción en alumnos con problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Manuscrito enviado para su publicación a la Revista Mexicana de Psicología.

Freire, Paulo (1987). *La educación como práctica de la libertad.* México: Siglo XXI editores. 37ª edición.

García, Cruz, J. A. (2003) "La Didáctica de las Matemáticas: una visión general." Documento en línea disponible en: *Red telemática europea* http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/rtee.htm

García, Robelo, Octaviano. (2002). *Estrategias para favorecer el aprendizaje de solución de problemas matemáticos de suma y resta.* Tesis de Maestría. Facultad de Psicología UNAM.

Goldman, S. R., Hasselbring, T. S., & The Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1997). "Achieving meaningful mathematics literacy for students with learning disabilities." *Journal of learning disabilities.* 2, 198-208.

González, Alberto. (2001). "Fallan en 'mate' 3 de cada 4 ceceacheros." *Grupo Reforma Ciudad de México (20 agosto 2001).* Documento en línea disponible en: http://www.reforma.com/ciudaddemexico/articulo/119100/

Good, T. L., Mulryan, C. & McCaslin. (1992). "Grouping for instruction in mathematics: a call for programmatic research on small-grup process." En Grows, Douglas (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of teachers of mathematics.* USA: Macmillian publishing company.

Guevara, Niebla, Gilberto. (1991). "México: ¿un país de reprobados?" *Nexos*; 162, 33-44.

Ginsburg, H. P. (1997) "Mathematics learning disabilities: A view from developmental psychology." *Journal of learning disabilities.* 1, 20-33.

Herrera, Beltrán, Claudia. (2001). "A ocho años de implantado, aún no aterriza el programa de matemáticas." *La Jornada lunes 10 de diciembre de 2001.* documento en línea disponible en: http://www.jornada.unam.mx/2001/dic01/011210/052n1soc.html

Hock, M. F; Schumaker, J. B; & Deshler, D. D; (2001). "The case for strategic tutoring." *Educational Leadership.* April 2001, 50-52.

Hock, Michael, F. (2001). "SIM Spotlight. Strategy instruction & tutoring." Documento en Línea, disponible en http://www.ku-crl.org/archives/2001/0201spot.htm

Jiménez, Huerta, Maria del Rocio (2002). "La promoción de un ambiente favorable para el aprendizaje y el desarrollo de la disciplina en el Programa Alcanzando el Éxito en Secundaria." *Tesis de maestría. Facultad de psicología.* UNAM.

Jones, E., Wilson, R. & Bhojwani. (1997). "Mathematics instruction for secondary students with learning disabilities." *Journal of learning disabilities.* 2, 151-163.

Kearney, Nick. (2002). "Comunidades de aprendizaje: un enfoque pedagógico del futuro." Documento en línea disponible en: www.florida-uni.es

Macías, Humberto (2003). "Comunidad de aprendizaje." Documento en línea disponible en http://kino.tij.uia.mx/~humberto/comun3.html

Mancera, Martínez, E. (1992). "Significados y significantes relativos a las fracciones". *Educación matemática.* 4, 2, 30-54.

Manheim, Jerome (1971). "Word problems or problems with words." En Schminke, C. W; y William, R. A. *Mathematics is a verb. Options for teaching a book of readings.* USA: the Dryden press inc. Hinsdale, Illinois.

Mathcounts Foundation. (1999). "Problem Solving Strategies." Documento en linea disponible en http://mathcounts.org/Problems/strategies.html

Melero, Z. M. A; y Fernández, B. P; (1997). "El aprendizaje entre iguales: el estado de la cuestión en Estados Unidos." En: Fernández Berrocal Pablo y Melero Zabal Ma. Ángeles (Comps.). *La interacción social en contextos educativos.* México: Siglo XXI. Tercera edición.

Melgar, I., (2001). "Reprueba México calidad educativa." Documento en linea disponible en http://www.reforma.com/ed_impresa/Notas/011015/portada/textos/rpor0000.htm

Miller S. P; & Mercer, C. D. (1997). "Educational aspects of mathematics disabilities. Journal of learning disabilities. 1, 47-56.

Montague, Marjoirie (1997). Cognitive strategic instruction for students with learning disabilities." *Journal of learning disabilities*. 2, 164-177.

Nunes, T; y Bryant, P; (1998). *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño*. México: Siglo XXI. Segunda edición.

Ornelas, C., E (1995). *Sistema Educativo Mexicano: La Transición de fin de siglo*. México: Fondo de Cultura Económica.

Ovejero, A. (1990). *Métodos de aprendizaje cooperativo*. Barcelona: Promociones y publicaciones universitarias.

Patton, J. P, Cronin, M. E. Basset, D. S. & Koopel, A. E. (1997). "A life skill approach to Mathematics instruction: preparing students with learning disabilities for real-life math demands of adulthood." *Journal of learning disabilities*. 2, 178-187.

Peralta, Monge, Teresita; (1991). "Entorno al aprendizaje de las fracciones". *Educación: Revista de la Universidad de Costa Rica*. 15, 2, 75-80.

Pérez, Ontiveros, Juan, F. (2003). "Aprender matemáticas para resolver problemas vs resolver problemas para aprender matemáticas." *Paedagogium*. 3, 8, 18-21.

Piñón Durán, M. R; (1995). "Las fracciones en la escuela." *Pedagogía*. 10, 5, 58-65.

Polya, George. (1969). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Rivera, Diane, Pedrotty. (1996). "Using cooperative learning to teach mathematics to students with learning disabilities." Documento en Línea, disponible en http://www.ldonline.org/ld_indepth/math_skills/coopmath.html

Rivera, Diane, Pedrotty. (1997). "Mathematics education and students with learning disabilities: introduction to the special series." *Journal of learning disabilities*. 1, 2-19.

Rodríguez, O. C; Olvera, S. L; y Aquino, M. N; (2002). "¿Por qué reprueban matemáticas los estudiantes de ciencias sociales? Un análisis de sus creencias y justificaciones." *Segundo coloquio nacional de la metodología de la ciencia y de la investigación para la educación. Aportaciones mexicanas a la metodología aplicada a la educación COPM AMMCI*. Editada en UPIICSA. Memoria en cd rom.

Santos, Trigo, L. M. (2003). "El salón de clase: Una comunidad matemática." documento en línea disponible en http://www.minedu.gob.pe/dinesst/udcrees/material_docentes/amatematica/compe_mate.doc

Santos, Trigo, L., M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de CV., 2ª Edición.

Schoenfeld, Alan, H. (1992). "Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics." En: Douglas Grows (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of teachers of mathematics*. USA: Macmillian publishing company.

Schoenfeld, Alan, H. (1998). "Toward a theory of teaching-in-context." Documento en línea disponible en http://www-gse.berkeley.edu/faculty/aschoenfeld/TeachInContext/teaching-in-context.html

SEP (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: SEP.

SEP. (1993). *Plan y programas de Estudio, Educación Básica Secundaria*. México: SEP.

SEP. (1999). *Libro Para el Maestro, Matemáticas*. México: SEP.

Snart, F; Brenton-Haden, S; & Mulcahy R. (1995). "Meeting the needs of students with learning disabilities: Broadening the assessment perspective." Documento en línea, disponible en http://www.lin.ca/resource/html/Vol22/v22n3a5.htm

Stacey, K; y Groves, S. (1999). *Resolver problemas: estrategias. Unidades para desarrollar el razonamiento matemático*. Madrid: Narcea, S. A. Ediciones Madrid.

Stevens, R. & Shenker, L. (1992). *To succeed in high school. A multidimensional treatment program for adolescents with learning disabilities*. The learning center of Québec.

Thornton, C. A; Langrall, C. W. (1997). "Mathematics instruction for elementary students with learning disabilities." *Journal of learning disabilities*. 2, 142-150

Torres, Rosa, M. (1999). "Comunidad de aprendizaje: Una comunidad organizada para aprender." Documento en linea disponible en http://www.psi.uba.ar/carrerasdegrado/psicologia/educaci1/bibliografia/COMUNIDAD%20DE%20APRENDIZAJE.rtf

Valdemoros, Álvarez, M. E. (1997). "Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones; estudio de caso." *Educación matemática*. 9, 3, 5-17.

Woodward, J. (1991). "Procedural knowledge in mathematics: the rol of the curriculum." *Journal of learning disabilities*, 24, 242-251.

Bibliografía recomendada para biografías de matemáticos y problemas

Greene, Jay, E. (1982). *100 grandes científicos*. México: México.

Hawking, Stephen. (1999). *Historia del tiempo. Del big bang a los agujeros negros.* Barcelona: Drakontos.

Parker, Barry. (2002*). El universo de Einstein*. México: Aguilar.

SEP. (1999). *Libro Para el Maestro, Matemáticas*. México: SEP.

Waldegg,G; Villaseñor, R; y García, V. (1998*). Matemáticas en contexto. Aprendiendo matemáticas a través de la resolución de problemas*. Primer curso. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Waldegg,G; Villaseñor, R; y García, V. (1998). *Matemáticas en contexto. Aprendiendo matemáticas a través de la resolución de problemas*. Segundo curso. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Waldegg,G; Villaseñor, R; y García, V. (1998). *Matemáticas en contexto. Aprendiendo matemáticas a través de la resolución de problemas.* Tercer curso. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Anexos

Anexo 1

STEPHEN HAWKING

Quizá sea una de esas extrañas coincidencias de la suerte que el 8 de enero de 1942 fuera a la vez el tricentenario de la muerte de una de la mayores figuras intelectuales de la historia, el científico italiano Galileo Galilei, y el día que Stephen William Hawking nació a un mundo desgarrado por la guerra y la contienda global. Pero, como señala el propio Hawking: "alrededor de otros doscientos mil bebés nacieron aquel mismo día, de modo que quizá, después de todo, no sea una coincidencia tan sorprendente".

La imagen de Stephen era la del estudiante con su uniforme gris de la escuela y su gorra. Era excéntrico y desmañado, delgado e insignificante. Su uniforme escolar siempre parecía estar hecho un lío y, según sus amigos, farfullaba antes que hablar claramente, era ese tipo de chico presente en todas las escuelas, un objeto de diversión para toda la clase, hostigado y en ocasiones intimado por los demás, respetado en secreto por algunos, evitado por la mayoría. Parece que en la escuela sus talentos fueron objeto de ciertas discusiones: cuando tenía doce años, uno de sus amigos apostó a que Hawking no haría nada importante en su vida. Como el propio Hawking dice ahora modestamente: "ignoro si esta apuesta fue pagada alguna vez, y si lo fue, en qué sentido lo fue". En el tercer año, Stephen era considerado por sus maestros como un buen estudiante, pero sólo un poco por encima de la media en la clase superior de este año.

Stephen W. Hawking ocupa actualmente la cátedra Lucasian matemáticas de la Universidad de Cambridge, desempeñada en otro tiempo por Newton. Considerado el mayor genio del siglo XX después de Einstein, es ya una leyenda, no solo por su brillante contribución a la física teórica, sino también por su coraje frente a una enfermedad terrible que desde hace 35 años ha ido destruyendo inexorablemente su cuerpo, confinándolo a una silla de ruedas y privándolo de la capacidad de hablar. Pero su cerebro, indemne, no ha dejado de trabajar nunca.

Anexo 2

EXÁMENES QUE HORROR

"Para los exámenes, uno debía atiborrarse de toda es basura, sin importar que uno quisiera o no. Este hecho tuvo un efecto tan negativo en mí, que durante un año entero me fue desagradable la tarea de pensar en cualquier problema científico" Comentario de Einstein sobre sus exámenes finales en el Politécnico de Zürich.

EINSTEIN NO SABÍA CONTAR

Einstein cuenta que un día abordó un autobús de pasajeros en Berlín. Al pagar el pasaje, se quedó con la impresión de que el conductor le había dado mal el cambio. El conductor observó volvió a contar el dinero y se lo devolvió diciéndole "El cambio está bien. El problema es que usted no sabe contar."

Obviamente, el conductor del autobús no sabía que hablaba con el hombre que había hecho la "cuenta" más complicada y abstracta que el mundo jamás ha conocido.

Anexo 3

Hoja de metas individual

Nombre ________________________________ Fecha __________________

Mi meta par esta sesión es:

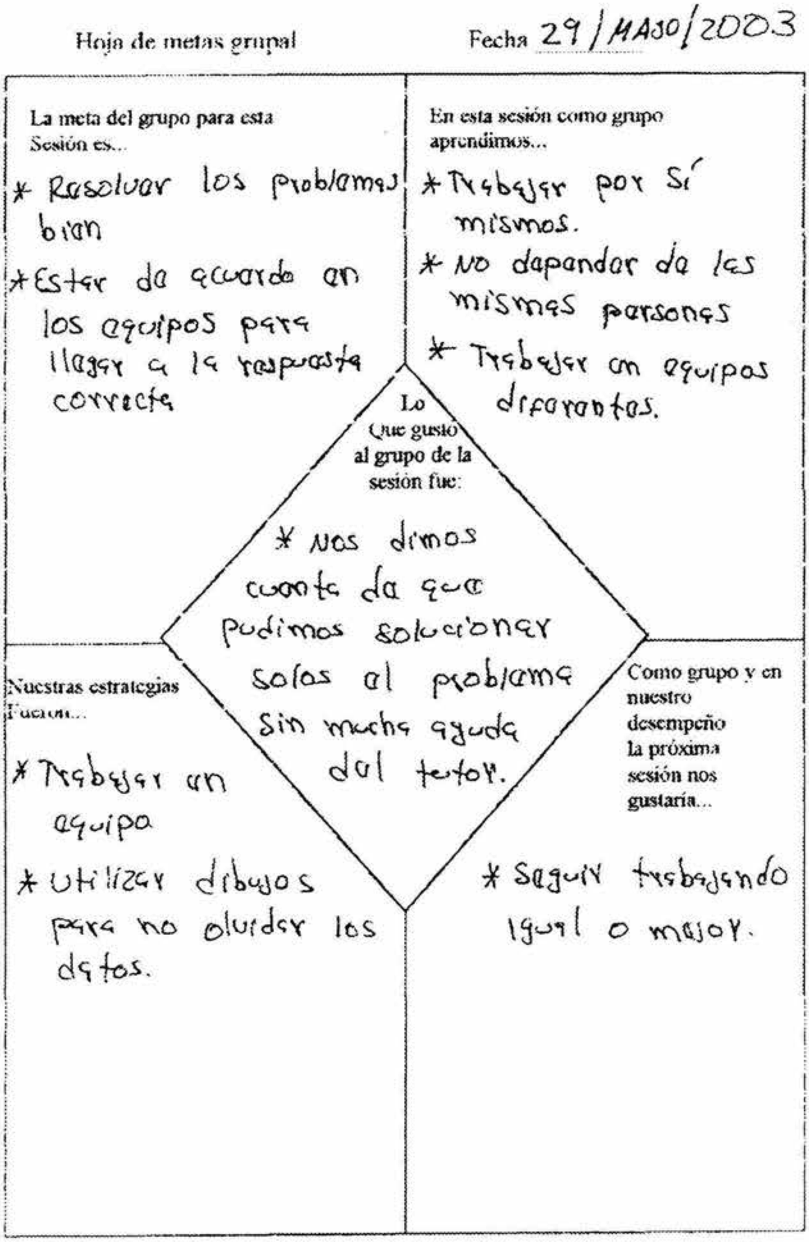
En esta sesión aprendí:

Lo
que me
gustó de
la sesión fue:

Mis estrategias
fueron:

Para la siguiente
sesión me gustaría:

Anexo 4



Hoja de metas grupal

Fecha 29 / MAYO / 2003

La meta del grupo para esta Sesión es...

* Resolver los problemas bien

* Estar de acuerdo en los equipos para llegar a la respuesta correcta

En esta sesión como grupo aprendimos...

* Trabajar por sí mismos.

* No depender de las mismas personas

* Trabajar en equipos diferentes.

Lo Que gustó al grupo de la sesión fue:

* Nos dimos cuenta de que pudimos solucionar solos el problema sin mucha ayuda del tutor.

Nuestras estrategias Fueron...

* Trabajar en equipo

* Utilizar dibujos para no olvidar los datos.

Como grupo y en nuestro desempeño la próxima sesión nos gustaría...

* Seguir trabajando igual o mejor.

Anexo 5

Revista Proceso 29/12/02

Guerra contra el TLCAN

Guillermo Correa.

Dispuestos a todo, los campesinos de México reclaman por la iniquidad que existe con los agricultores de Canadá y Estados Unidos: ¿cómo se va a competir si por cada mil campesinos hay 20 tractores en el país mientras que en el otro existen mil 484?

A nueve años de existencia del TLCAN, la mayoría de los 25 millones de campesinos mexicanos se encuentran en banca rota, y aún "falta lo peor", pues a unos días de que entre en vigor la etapa casi terminal del acuerdo comercial, con la liberalización de todas las fracciones arancelarias del sector, prácticamente ha desaparecido la agricultura como negocio en este país.

Anexo 6

México D.F. Domingo 6 de julio de 2003

Confrontación y falta de propuestas, constante en campañas

Abstencionismo, el enemigo; PRI, AN y PRD lo fomentaron

Prevén partidos participación de 40 o 50% del padrón electoral

GEORGINA SALDIERNA, ENRIQUE MENDEZ Y RENATO DAVALOS

PRI, PAN y PRD, los tres grandes partidos políticos del país, llegan a la elección de hoy preocupados por el elevado abstencionismo que ellos mismos provocaron con su "guerra mercadológica" y "ausencia de propuestas", según documentó recientemente el Instituto Federal Electoral (IFE).

Las propias fuerzas políticas estiman una participación en los comicios de 40 o 50 por ciento del padrón de 64 millones de electores. En 1997 y 2000 los índices de abstencionismo fueron de 36.04 y 42.31 por ciento, respectivamente.

Anexo 7

México D.F. Lunes 7 de julio de 2003

Lo siguen Acción Nacional, con 30.5, y el sol azteca, 17.1 por ciento

El conteo rápido del IFE da al PRI 34.4 por ciento de la votación nacional

Obtendría de 222 a 227 diputados; el *blanquiazul* 148 a 158, y el PRD de 93 a 100

ALONSO URRUTIA, MIREYA CUELLAR Y FABIOLA MARTINEZ

El Partido Revolucionario Institucional se alzó anoche como la primera fuerza política del país al alcanzar 34.4 por ciento de la votación nacional, seguido del Partido Acción Nacional con 30.5 por ciento, y el Partido de la Revolución Democrática se ubicó como tercera fuerza, con 17.1 por ciento, de acuerdo con los resultados del conteo rápido ordenado por el Instituto Federal Electoral. Conforme a estas cifras, el PRI obtendría entre 222 y 227 diputados para la próxima legislatura; el PAN oscilaría entre 148 y 158 legisladores, mientras que el PRD alcanzaría entre 93 y 100.

El Comité Técnico del IFE precisó que con una participación electoral que apenas alcanzó 41 por ciento, el Partido Verde Ecologista de México obtuvo 6.2 por ciento, lo que le daría entre 14 y 16 legisladores; el Partido del Trabajo alcanzó 2.4 por ciento de los votos, y llevará al Congreso entre 5 y 8 diputados, mientras que Convergencia sumó 2.3 por ciento, lo que le da posibilidad de obtener entre 5 y 6 curules.

En el otro extremo, los partidos México Posible (1 por ciento), Alianza Social (0.7), Fuerza Ciudadana (0.5), Liberal Mexicano (0.4) y Sociedad Nacionalista, el menos votado (0.3 por ciento), perderán el registro, pues en conjunto no sumaron ni siquiera 3 por ciento de la votación nacional, según lo establecido por el conteo rápido, considerado con suficiente evidencia estadística.

Anexo 8

La jornada 2003

Mexicanos que habitan en Estados Unidos

La Población Mexicana de
EE.UU. es de 20.6 Millones

Puertorriqueños y Cubanos También son Ahora Más que en 1990

La población mexicana residente en Estados Unidos aumentó drásticamente un 53% entre 1990 y 2000, para un total de 20.6 millones de personas, de acuerdo con las más recientes cifras de la Oficina del Censo de este país.

Se atribuye a la población mexicana el gran aumento del número de hispanos en Estados Unidos, que es actualmente de 35.3 millones de habitantes.

Los mayores aumentos poblacionales de personas de origen mexicano se observan en California y Texas, pero pequeños estados del medio-oeste y del sureste de Estados Unidos han experimentado también un crecimiento notable.

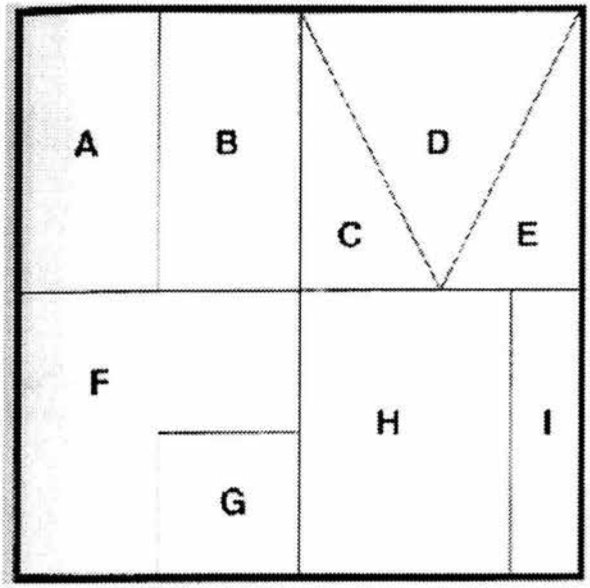
Los puertorriqueños, que son ciudadanos estadounidenses por nacimiento, también experimentaron un crecimiento notable de un 25% más que en 1990, para un total de 3.4 millones de personas. Constituyen el segundo grupo hispano más numeroso después de los mexicanos. Los puertorriqueños contados son sólo los que viven en el territorio continental de Estados Unidos, no los de la isla de Puerto Rico.

La población cubana, el tercer grupo hispano de mayor número de personas en Estados Unidos, aumentó un 19%. El total de cubanos es de un millón 200 mil, más de la mitad de los cuales vive en el condado Miami-Dade, en el estado de Florida.

Anexo 9

El cuadro fraccionado

El siguiente cuadro representa una unidad completa. Ésta ha sido seccionada en varias piezas. Cada una de las piezas está identificada con una letra



1. De todo el cuadro decide qué fracción representa cada pieza y escríbelo al lado de cada letra.

2. Explica cómo supiste el nombre de la fracción para cada una de las siguientes piezas:

A

C

D

F

3. Según tus respuestas del cuadro anterior, sustituye las siguientes letras con los valores que les diste en el cuadro de arriba y resuelve las operaciones:

A + B =

F + C + D =

D – E =

A + B + C + D + E + F + G + H + I =

4. Diseña tu propio cuadro usando el de abajo. Tu cuadro debe contener por lo menos cuatro diferentes piezas fraccionadas diferentes y no debe ser igual al cuadro de arriba. Coloca la fracción que le corresponda.