

00362



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

“ESTUDIO DE PATRONES FRACTALES”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

ALFONSO ARTURO CASTREJON PITA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ANTONIO SARMIENTO GALAN

COMITÉ TUTORAL:

DRA. GUADALUPE HUELSZ LESBROS
DR. JAIME DE URQUIJO CARMONA

pcf

posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

pcf

posgrado en ciencias físicas
u n a m

2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA


A mis padres

Rafael Castrejón García
Leonor Pita de Castrejón

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: ALFONSO ARTURO
CASTREJÓN PITA

FECHA: 29 DE ENERO 2004

FIRMA: 

A mi hermano Rafael Castrejón Pita, por su apoyo y ayuda en la realización de este trabajo

A mis tutores y amigos:

Dr. Antonio Sarmiento
Dra. Guadalupe Huelsz
Dr. Jaime de Urquijo

Al Centro de Investigación en Energía y al Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Agradezco el apoyo recibido del CONACYT y de la DGEP-UNAM por la beca y complemento de beca recibidos, también agradezco al proyecto 32707-U del CONACYT.

Estudio de patrones fractales

Tesis

que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias Físicas

presenta

Alfonso Arturo Castrejón Pita

Comité tutorial:

Antonio Sarmiento Galán (Asesor),
Guadalupe Huelsz Lesbros,
Jaime de Urquijo Carmona

January 26, 2004

CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN	3
2	ANTECEDENTES	5
2.1	Fractales	5
2.2	Dimensión por Conteo de Cajas	6
2.3	Teorema de Intersección	8
2.4	Valor Umbral de Conversión de Imágenes a Blanco y Negro	8
3	EL MOLUSCO <i>Nautilus pompilius</i>	10
3.1	El Nautilus y su Entorno	10
3.2	Método	11
3.3	Resultados y Predicciones	16
4	LA DIMENSIÓN DE UN AEROSOL DE ACEITE	18
4.1	Motivación	18
4.2	Dispositivo Experimental	19
4.3	Resultados	20
5	LOS GLIFOS DE NASCA	25
5.1	El Dilema	25
5.2	Análisis	27
5.3	Resultados	28
6	PATRONES EN LAS ALAS DE MARIPOSAS	30
6.1	Antecedentes	30
6.2	Método	32
6.3	Resultados	35
6.4	Discusión	37
7	CUASIPERIODICIDAD ACÚSTICA	38
7.1	Introducción	38
7.2	Análisis	38
7.3	Dispositivo Experimental	40
7.4	Resultados	41
8	CONCLUSIONES	51

RESUMEN

En esta tesis se hace un estudio de la dimensión fractal, a partir del método de conteo de cajas, para determinar y estudiar diversos patrones tanto naturales como artificiales.

En particular, se estudia la complejidad de la concha de un molusco, el *Nautilus pompilius*, estableciendo su dimensión fractal mediante el método del conteo de cajas y mediante el método de la masa; se encuentra además, que este cefalópodo crece obedeciendo un criterio de autosimilaridad y se confirma que su estructura es una espiral equiangular.

También se analiza la imagen, obtenida a través de la técnica de fotografía de sombra, de la interfase líquido-gas de un aerosol de aceite. Para esto, fue necesario construir el sistema experimental de fotografía de sombra cuyas componentes y diseño se muestran en el Cap. 4. Se encuentra que el cálculo de la dimensión puede ser utilizado para conocer el diámetro promedio de las gotas producidas en el proceso de fragmentación, una relación de importancia en ciertos procesos industriales.

Se calcula además, la dimensión de los geoglifos de Nasca, estructuras hechas por el hombre en la parte central del Perú y de las cuales, la información sobre su antigüedad y orden cronológico es desconocida. Con dicho estudio y tomando en cuenta las recientes hipótesis sobre evolución temporal de la complejidad geométrica y fractal, nos es posible proponer un orden de creación para cada uno de los geoglifos.

Otro estudio que se realizó, se refiere al análisis de especies de mariposas, cuya evolución las ha llevado a mostrar patrones geométricos muy parecidos en sus alas. Se muestra, con los ejemplos de la mariposa monarca y dos de las subespecies que son miméticas a ella y con otro anillo mimético, que el uso de la dimensión fractal podría ayudar a confirmar y hasta a descubrir, grupos de especies o subespecies que compartan la misma base genética.

Por último, se muestran los resultados de un experimento de acústica en donde se aplican las herramientas del análisis de series temporales con el fin de obtener la periodicidad del sistema, su atractor, su espectro de frecuencias, su máximo exponente de Lyapunov y la dimensión del atractor. De este último estudio se encuentra que un artículo publicado, con un sistema muy parecido, muestra resultados confusos e incorrectos.

1 INTRODUCCIÓN

Actualmente, los fractales han demostrado ser un éxito en cuanto a cuantificar la complejidad exhibida por una cantidad enorme de patrones naturales. Numerosos estudios se han hecho con base a la respuesta humana a las cualidades visuales de los fractales. Se ha demostrado que el ser humano tiene preferencia visual a objetos con dimensiones semi-enteras, incluso, se ha observado un cambio en las condiciones fisiológicas de los observadores de fractales con ese tipo de dimensión [57]. Este tipo de análisis se ha utilizado también en ciencias biológicas, desde la discriminación humana de imágenes fractales [34], el origen de leyes de escalas alométricas [61], la relaciones de escala en la variación del tamaño del cuerpo de mamíferos y pájaros [24], hasta la interdependencia del aparato circulatorio humano y las venas del riñón en tres dimensiones [22].

El parámetro más importante para caracterizar o cuantificar patrones fractales y su complejidad visual es la llamada dimensión fractal D . Este parámetro describe la manera en la que el patrón ocurre o se repite a diferentes escalas o magnificaciones para construir el fractal resultante.

El objetivo de este trabajo es el de aplicar el análisis fractal en patrones o figuras de tal manera que podamos extraer información, tanto para entenderlos mejor, como para explicar alguna de sus características (tecnológicas, taxonómicas, cronológicas) o para caracterizar al sistema dinámico que los origina.

La organización de este trabajo es como sigue: en el segundo capítulo se da una pequeña introducción a los temas que serán abordados extensamente en el resto del trabajo y se da una pequeña reseña de las investigaciones previas relacionadas con esta tesis. Además, se describe el método de conteo de cajas, el principal método que se utilizó para calcular la dimensión de las imágenes y patrones mostrados a lo largo de la tesis, y se presentan algunos conceptos o resultados necesarios para su aplicación (como la multifractalidad, el teorema de intersección y el valor umbral).

En el tercer capítulo se presenta el estudio geométrico de la concha del molusco *Nautilus pompilius*, y se muestra que dicha estructura tiene dimensión fractal; adicionalmente, se encuentra que el molusco crece con un comportamiento autosimilar, puesto que la dimensión permanece aproximadamente constante a lo largo de toda su vida y desde el momento mismo de su nacimiento. Aunado a todo esto, se confirma que la estructura espiral cor-

responde a una de tipo equiangular y se muestra que propiedades como, el volumen o el área transversal de las cámaras del molusco, crecen de manera exponencial al crearse una nueva cámara.

En el cuarto capítulo, se presenta el estudio, desde el punto de vista fractal, del contorno de la interfase líquido-gas de un aerosol de aceite generado a presión. Se encuentra además una relación entre la dimensión fractal D , el tamaño de la gota y la presión aplicada al fluido para generar el aerosol. Esta relación puede resultar de mucha utilidad debido a que es más sencillo obtener la dimensión que contar y medir un número razonable de gotas.

En el quinto capítulo se presenta el análisis fractal de los controvertidos geoglifos de Nasca conocidos como las líneas de Nasca. Se aplica una teoría reciente que estudia tanto la preferencia visual, la percepción psicológica y la evolución temporal de objetos fractales (tanto naturales como creados por el hombre), con el fin de proponer un orden temporal en la construcción de los geoglifos de Nasca.

En el capítulo 6 se presentan un estudio que se realizó sobre los patrones geométricos en las alas de mariposas. Debido a los resultados de la dimensión fractal de dichos patrones, se propone un nuevo punto de vista sobre la evolución/mimetismo de las mariposas. En particular, se estudia la relación mimética que supuestamente existe entre la mariposa monarca, *Danaus plexippus*, y otras dos subespecies: la *Basilarchia archippus obsoleta* (o mariposa virrey) y la *Basilarchia archippus hoffmanni* (o virrey tropical). Para este caso, se muestra que las tres especies tienen, dentro de las incertidumbres, la misma dimensión fractal, indicando que quizá esta herramienta se pueda usar para determinar patrones desarrollados por información genética común y no por un supuesto mimetismo.

En el capítulo 7 se presenta el estudio experimental de un sistema acústico construido para analizar la posibilidad de un comportamiento caótico y estudiar el atractor resultante (cuya dimensión puede ser fractal); se muestra además, que una publicación reciente sobre los resultados de un experimento similar, proporciona información confusa y errónea.

Cabe destacar que todos los dispositivos experimentales y mediciones experimentales fueron realizadas para el desarrollo de esta tesis, excepto las imágenes de las figuras de Nasca.

En el capítulo 8 se presentan las conclusiones de este trabajo y sus expectativas.

2 ANTECEDENTES

2.1 Fractales

La palabra *fractal* fue inventada por B. Mandelbrot para identificar una serie de objetos llamados en algún tiempo como “estructuras patológicas o monstruosas”, puesto que no encajaban en la geometría Euclidiana de esa época. Esta palabra proviene del adjetivo latino *fractus*, el correspondiente verbo en latín es *frangere* que significa “romper”, esta raíz se conserva en palabras como fractura o fraccionar con el significado de fragmentado; *fractus* también puede ser interpretado como “irregular”. Estas estructuras “patológicas” resultaron ser inherentes a objetos familiares que nos rodean, de ahí que Mandelbrot diga que: “Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos y los rayos no viajan en línea recta”.

Hoy en día se han identificado innumerables manifestaciones naturales de estructuras fractales. Se sabe que esta geometría está presente en depósitos y agregados coloidales (como los generados por el polvo y el smog), poliméricos y electroquímicos, en aparatos y sistemas de los seres vivos, como los vasos capilares, tubos intestinales, biliares y bronquiales y en las redes neuronales [40].

En general, parece ser que dondequiera que un proceso irregular o desordenado ha dado forma al ambiente (erosión, vientos, fallas geológicas), se han generado geometrías fractales (costas, ríos, montañas, nubes y rocas) que por su redundancia y falta de regularidad poseen propiedades estructurales particulares.

Es importante señalar que los fractales que existen en la naturaleza tienden a ser irregulares y la autosimilaridad se presenta sólo en sentido estadístico; esto es, si tomamos un conjunto suficientemente grande de objetos de la misma clase y amplificamos una porción de alguno de ellos, es posible que no sea idéntico al original, pero seguramente sí será similar a algún otro miembro de la colección. Su dimensión es fraccional pero se obtiene realizando promedios sobre sus valores en muchas regiones y para muchos cuerpos del mismo tipo. Cuando se amplifica una de las partes de un fractal natural, la propiedad de generar la misma figura, o alguna similar, tiene límites físicos tanto inferiores como superiores.

2.2 Dimensión por Conteo de Cajas

Cuando una estructura es muy irregular y no es formalmente autosimilar, su dimensión fractal se puede calcular mediante un método propuesto por Hausdorff y Besicovitch llamado método de conteo de cajas [25]. Danielson *et al.*, [16], demostraron que este método da los mismos resultados que los métodos de autocorrelación y codimensión. El método de conteo de cajas es el método que más se utiliza debido a su facilidad de implementación. En esta sección se presentan los principios del método de conteo de cajas, siguiendo la exposición de Alligood *et al.*, [2], que constituye una introducción al estudio de los sistemas dinámicos.

Exploremos esta idea imaginando la figura fractal en una malla compuesta por cajas equiespaciadas del mismo tamaño y contemos el número de cajas necesarias para cubrir dicha figura. A continuación, estudiemos la forma en la que este número varía mientras el tamaño de la malla se hace cada vez más pequeño.

Consideremos el caso de una figura unidimensional que queda completamente cubierta mediante una malla de cajas cuyo tamaño es $1/n$ en el intervalo $[0, 1]$. Esto es, hay puntos de la malla en $0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1$. Entonces, ¿Cómo varía el número de cajas de la malla con el tamaño de las cajas de dicha malla? La respuesta es que hay n cajas de tamaño $1/n$. La situación cambia ligeramente si se considera el caso en el que necesitamos el intervalo $[0, 8]$ para cubrir completamente a la figura. Aquí necesitamos $8n$ cajas de tamaño $1/n$. La propiedad común de los intervalos unidimensionales es que el número de cajas de tamaño ε necesarias para cubrir un intervalo no es más que $C(1/\varepsilon)$, donde C es una constante dependiente de la longitud del intervalo. Esta proporcionalidad se expresa diciendo que el número de cajas de tamaño ε se escala por $1/\varepsilon$.

El cuadrado de lado uno en el plano, $\{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$, puede ser cubierto por n^2 cajas de lado $1/n$. El exponente 2 es el que diferencia este ejemplo del anterior. Cualquier rectángulo bidimensional en \mathbb{R}^2 puede ser cubierto por $C(1/\varepsilon)^2$ cajas de tamaño ε . Igualmente, una región d -dimensional requiere $C(1/\varepsilon)^d$ cajas de tamaño ε . La constante C depende del rectángulo. Si consideramos un cuadrado de lado 2 en el plano y lo cubrimos con cajas de tamaño $\varepsilon = 1/n$, entonces se requieren $4(1/\varepsilon)^2$ cajas, es decir, $C = 4$. La constante C puede tomar valores tan grandes como se necesite, tanto como el escalamiento $C(1/\varepsilon)^2$ se mantenga al hacer que ε tienda a 0.

Ahora, preguntemos para un objeto m -dimensional, ¿Cuántas cajas m -

dimensionales de tamaño ε se necesitan para cubrir el objeto? Por ejemplo, cubrimos objetos en el plano con cuadrados de tamaño $\varepsilon \times \varepsilon$. Para objetos tridimensionales, usamos cubos con lados de longitud ε . El número de cajas, en los casos comentados anteriormente, está dado por una relación del tipo $C(1/\varepsilon)^d$, en donde asignamos a d la dimensión del objeto. El propósito es extender esta idea a conjuntos más complicados, como fractales, y usar esta "relación de escala" para *definir* la dimensión d de un objeto en casos donde comenzamos sin conocer la respuesta.

Observemos que un intervalo de longitud uno, visto como un subconjunto del plano, requiere de $1/\varepsilon$ cajas bidimensionales de tamaño ε para cubrirlo. Éste es el mismo escalamiento que encontraríamos para el intervalo unitario considerado como un subconjunto de la recta \mathbb{R} , y marca lo que encontraríamos por un intervalo unitario en \mathbb{R}^m para cualquier m . Este escalamiento es, entonces, intrínseco al intervalo unitario e independiente del espacio en el que esté. Denotaremos por $N(\varepsilon)$ al número de cajas de lado ε necesarias para cubrir un conjunto dado. En general, si S es un conjunto de \mathbb{R}^m , y queremos decir que S es un conjunto d -dimensional cuando puede ser cubierto por $N(\varepsilon)$ cajas de lado ε , con ε pequeña, tendremos que:

$$N(\varepsilon) = C(1/\varepsilon)^d, \quad (1)$$

donde, siguiendo el razonamiento anterior, el exponente d no debe necesariamente ser un entero.

Supongamos que S es un subconjunto de \mathbb{R}^m . Para medir la dimensión de S , ponemos una malla m -dimensional de lado ε sobre S y contamos $N(\varepsilon)$ cajas de la malla que intersectan a S . Resolviendo la ley de escalamiento para la dimensión d tenemos:

$$d = \frac{\ln N(\varepsilon) - \ln C}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (2)$$

Si C es una constante para valores pequeños de ε , la contribución del segundo término en el numerador de la ecuación anterior será despreciable.

Finalmente, tenemos que la dimensión por conteo de cajas (o dimensión de Hausdorff), D_b , de un subconjunto $S \in \mathbb{R}^n$ queda definida como:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (3)$$

Para poder utilizar este método en forma automatizada, se requiere de la digitalización y procesamiento de las imágenes de los patrones a analizar.

2.3 Teorema de Intersección

Veamos ahora el problema de relacionar la dimensión fractal de un objeto n -dimensional con la dimensión fractal de su intersección con un conjunto en donde la medida de la dimensión se facilite, digamos un plano (\mathbb{R}^2). Aunque éste es un tema añejo en la discusión correspondiente [41, 42], el resultado que nos interesa se refiere a las propiedades aditivas de las codimensiones (diferencia entre la dimensión de un objeto y la dimensión de un objeto contenido en el primero) de intersecciones [40]. En detalle, la propiedad de interés se encuentra en el siguiente enunciado.

Teorema.- Sean S_1 y S_2 , dos conjuntos *independientes* que se encuentran inmersos en un espacio de dimensión d ; si se satisface que la suma de sus codimensiones sea menor a la dimensión del espacio: $cod(S_1) + cod(S_2) < d$, entonces la codimensión de la intersección de S_1 con S_2 será igual a la suma de las codimensiones de S_1 y S_2 : $cod(S_1 \cap S_2) = cod(S_1) + cod(S_2)$.

En particular, si el objeto C se encuentra inmerso en un espacio tridimensional y es intersectado por un plano, el resultado anterior implica que la dimensión de la intersección es una unidad menor que la del objeto, o equivalentemente, $dim(C) = dim(C \cap \mathbb{R}^2) + 1$.

La medida de la dimensión fractal de la intersección de un objeto tridimensional con una línea, nos daría un valor inferior en dos unidades para la dimensión fractal del objeto, es decir: $dim(C) = dim(C \cap \mathbb{R}) + 2$.

Una manera de confirmar que este resultado es válido, consiste en verificar que la dimensión fractal medida en la intersección, tiene un valor que es independiente de la orientación que se le de al plano o a la línea en el espacio, es decir, que dicho valor es independiente del plano o de la línea particular que se elijan para hacer la medición de la dimensión fractal de la intersección.

Este resultado es de particular importancia para algunos de los objetos analizados en este trabajo y cuya dimensión se ha medido en términos de su intersección con planos; tal es el caso de la concha del *Nautilus* (Capítulo 3) y del aerosol de aceite (Capítulo 4).

2.4 Valor Umbral de Conversión de Imágenes a Blanco y Negro

Para poder utilizar el método de conteo de cajas, utilizando el código descrito ([64]) en forma automatizada, se requiere de la digitalización y procesamiento de las imágenes de los patrones a analizar. Para ello es necesario hacer una

serie de filtrados digitales con el fin de obtener imágenes de buena resolución de la cual obtener el contorno.

Los programas de detección de contornos funcionan de la siguiente forma. Como ya se ha explicado, las imágenes utilizadas en este trabajo están en formato de 8 unidades básicas de información o *bits*, lo que significa que cada unidad de resolución o *pixel* de la imagen está definido por cuatro cantidades de 8 *bits* cada una. Hay 8 dígitos para el color rojo, 8 dígitos para el color azul, 8 dígitos para el amarillo y finalmente, 8 dígitos para la intensidad; cada *pixel* se forma con la combinación de todos los valores anteriores. Por lo tanto, con esta resolución es posible obtener imágenes con 8^4 colores.

En el caso de imágenes en escala de grises, solo hay 256 valores en la escala y por ello, el umbral de conversión se escoge dentro de éstos. Finalmente, la detección de bordes se logra calculando la derivada (cambio de intensidad/pixel), todo de la manera que ya se encuentra automatizada en muchos de los códigos comerciales de procesamiento de imágenes. La dimensión fractal calculada por este proceso es función del umbral de conversión de la escala de grises a blanco y negro. En el caso en el que esta función presenta un rango en el cual es constante, el valor de la dimensión fractal es justamente dicha constante, en el caso contrario se debe escoger el valor del umbral que de cualitativamente la mejor representación del contorno.

3 EL MOLUSCO *Nautilus pompilius*

En esta sección se analiza la complejidad del *Nautilus pompilius* en términos de la dimensión fractal [12]. Este trabajo muestra que la concha del Nautilus es fractal desde su nacimiento y que crece siguiendo un criterio de autosimilaridad. Otras variables, como el volumen asociado a cada cámara del molusco, son analizadas en términos co-dimensionales.

3.1 El Nautilus y su Entorno

El *Nautilus pompilius* es una especie nativa del océano Indopacífico Oeste (Latitud 30° N a 30° S, Longitud 90° a 135° O [51]) que usualmente vive en profundidades que varían entre los 50 y los 480 metros con temperaturas entre los 8 y los 24° centígrados. La especie alcanza su madurez sexual hasta los 15 años y producen de 10 a 15 huevos por año. La vida promedio de estos animales, aunque no se ha establecido precisamente, es de más de 20 años.

La concha es de madreperla y resistente a altas presiones, implota a 800 metros de profundidad, aproximadamente. La vulnerabilidad de este cefalópodo es debido a su baja tasa de reproducción y al hecho de que su explotación comercial se ha incrementado en el presente, poniéndola en la lista de especies amenazadas o en peligro de extinción [53].

Para nuestros estudios la característica más interesante de este molusco es la forma espiral de la parte interna de la concha y sus subdivisiones en una serie de cámaras sucesivas. Al nacer, el Nautilus cuenta con 7 cámaras en su concha y conforme va creciendo y por lo tanto, requiriendo más espacio, va creando una nueva cámara y mudándose a vivir en ella, la última y más grande, localizada al final de la concha. La velocidad a la que la nueva cámara se crea varía, al principio parece tomarle más tiempo al molusco crear la octava cámara, pero después el proceso toma entre 43 y 77 días [35]. Por supuesto, es fácil entender que estos cambios en la velocidad de crecimiento se deben a variables ambientales y a la disponibilidad de comida [59, 23]. Cuando el molusco crea la nueva cámara deja un pequeño tubo en el centro de cada cámara, llamado sifuncló, que permite al Nautilus mantener el control de la presión dentro de cada cámara y así regular su flotabilidad [45, 8]. La antigüedad del Nautilus se ha estimado en 500 millones de años.

El corte transversal de la concha (figura 1) muestra una espiral geométrica, no encontrada en algún otro objeto natural. La (figura 1) es una imagen en blanco y negro donde los bordes han sido preparados para el análisis de

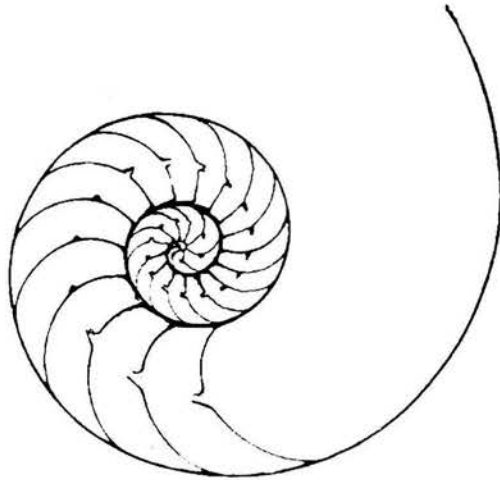


Figure 1: Imagen en blanco y negro de un corte transversal de la concha del *Nautilus pompilius*.

conteo de cajas. El tamaño de la concha original es de 96.1×106.2 mm de área transversal y 32.2 mm de ancho; el número de cámaras es de 30. El hecho más sorprendente es que el crecimiento parece ser autosimilar, por lo tanto se sospecha que posee dimensión fractal.

3.2 Método

La imagen digital mostrada en la figura 1, fue obtenida poniendo el corte de la concha directamente sobre la plancha del dispositivo utilizado en la captura digital de la imagen o *scanner*. Todas las medidas en las imágenes digitales fueron hechas en unidades del elemento de resolución o *pixel*; el factor de conversión está dado por la resolución del *scáner* (72 *pixeles* por pulgada). Los bordes de la concha fueron previamente pintados de negro para ganar contraste y definición haciendo innecesario el tratamiento del umbral de intensidad del contorno.

Para aplicar el método de conteo de cajas [64, 2], es necesario definir un criterio para el tamaño de las cajas, en particular para el tamaño máximo. En este caso, este valor se determina fácilmente: es el rectángulo más pequeño que inscribe a la imagen, el uso de cajas más grandes que la imagen pro-

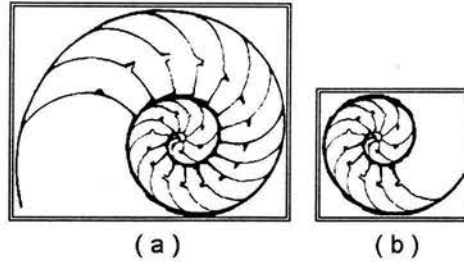


Figure 2: Figura donde se muestran las imágenes alteradas digitalmente para simular la edad del cefalópodo mediante la disminución artificial del número de cámaras.

duciría valores constantes rompiendo la validez del método. El método de conteo de cajas es aplicado a la imagen original y la dimensión fractal de la concha completa es obtenida a través del ajuste lineal de los datos. El tamaño más pequeño de caja es de un píxel y el más grande varía dependiendo del número de cámaras analizadas, por ejemplo, para 7 cámaras es de 94 píxeles y para 30 cámaras es de 575 píxeles. Para examinar la autosimilaridad observada se analiza la dimensión de pequeños fragmentos de la imagen; si se comprueba que la complejidad geométrica es la misma en varias escalas, la autosimilaridad queda demostrada. Para cumplir esto se procede de la siguiente manera: una vez que la dimensión fractal ha sido aplicada a la imagen completa, la última cámara es digitalmente eliminada, y nuevamente se determina la dimensión fractal (figura 2). Este proceso es repetido hasta el punto en que sólo se tienen las siete cámaras originales en la concha. El área de los rectángulos que en el cual están inscritas las imágenes fue calculado para cada paso y los resultados se muestran en la figura 3.

Del procedimiento anterior se puede obtener, al realizar la aproximación lineal, el valor de las diferentes intersecciones con la coordenada vertical, es decir, la ordenada de cada aproximación. Ya que cada una de esas ordenadas corresponde a cada una de las cámaras, el resultado es una función que puede ser usada para predecir la posición o el tiempo de aparición de una nueva cámara. El tamaño en píxeles de las imágenes está relacionado con la ordenada al origen del método del conteo de cajas de la siguiente forma. De la ley de escalamiento:

$$N(\varepsilon) = C(1/\varepsilon)^d, \quad (4)$$

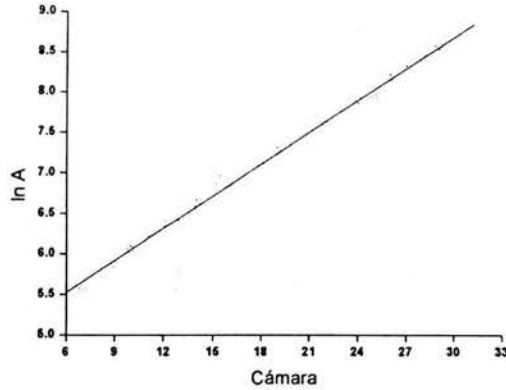


Figure 3: Área A del rectángulo en donde el *Nautilus pompilius* es inscrito como función del número de cámaras.

se puede obtener la siguiente relación lineal:

$$\ln N(\varepsilon) = D \ln(1/\varepsilon) + \ln C \quad (5)$$

donde podemos observar que la ordenada de la relación lineal anterior puede ser interpretada como el logaritmo natural del número de *pixeles* de la imagen analizada, C , lo que nos da información sobre el perímetro de la imagen, ya que en la práctica, el tamaño de la caja más pequeña no puede ser menor que un *pixel*. Los resultados de este análisis se encuentran en la gráfica 4, en donde se muestra el logaritmo de C como función del número de cámaras analizadas (Figura 2).

También se construyó una gráfica de evolución temporal de la dimensión; para ello, se tomó un valor promedio del tiempo requerido para crear una nueva cámara igual a 60 ± 17 días. Los resultados pueden observarse en la gráfica 5.

Una vez terminado este paso, se procedió a estudiar la dependencia del área total de la concha, como función del número de cámaras creadas. Esto se hizo contando en la imagen digital, el número de *pixeles* de cada cámara o usando la relación lineal previamente discutida. Como se puede ver en la gráfica 6, se presenta nuevamente una relación lineal.

Todos estos estudios nos permiten predecir, con cierta precisión, el ta-

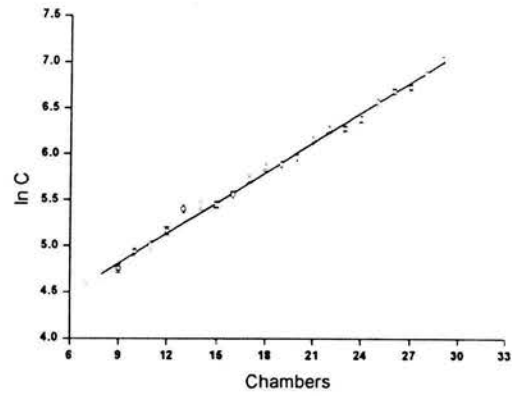


Figure 4: Logaritmo de C de las líneas obtenidas a través del método de conteo de cajas como función del número de cámaras.

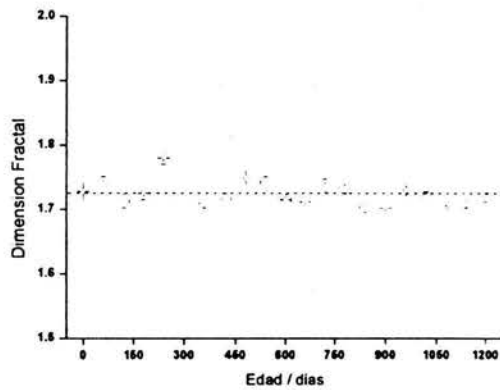


Figure 5: Dimensión fractal de la concha como función del tiempo. la edad se mide en días, a partir del nacimiento, empezando con la octava cámara.

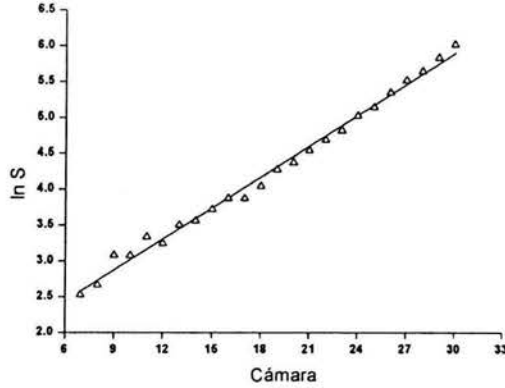


Figure 6: Área de cada cámara en pixeles², S , como función del número de cámara.

maño de la nueva cámara que aparecería si el espécimen aún estuviese vivo. También se realizó un estudio para medir el volúmen de cada cámara. Esto se hizo llenando cada cámara con agua, depositando gotas de 0.005 ml de agua sobre una balanza con precisión de 5 mg para comprobar las medidas. Los resultados de estas mediciones están en milímetros cúbicos y estos pueden servir para predecir el volúmen de las cámaras aún no formadas. El resultado se puede ver en la figura 7. Se puede observar que para las cámaras menores al 12 los datos experimentales discrepan de la aproximación lineal. La posible explicación a esto es que como lo dice la literatura, al molusco le toma mucho tiempo desarrollar las primeras cámaras (de la octava en adelante) después de haber nacido y esto depende mucho de las condiciones ambientales y nutritivas donde se desarrolla el ser vivo.

Como un análisis final, aproximamos una espiral equiangular a la concha [52]:

$$r = e^{\delta\theta}, \quad (6)$$

donde (r, θ) son las coordenadas polares y δ es un parámetro que puede ser determinado a través del cociente entre la distancia del centro en cualquier dirección y la misma distancia después de una vuelta completa:

$$\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 2\pi\delta, \quad (7)$$

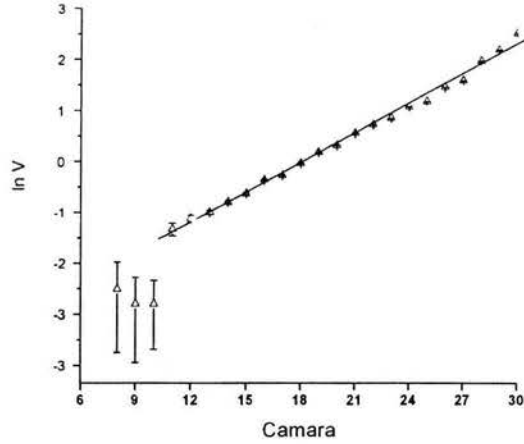


Figure 7: Volúmen de las cámaras como función del número de cámara.

donde r_1 es la distancia desde el centro a la pared después de una vuelta y r_2 es la distancia a la pared respectiva después de dos vueltas. El valor obtenido para el cociente es igual a $\delta = 0.162 \pm 0.002$. En la figura 8 se puede observar la espiral superimpuesta a la concha original del *Nautilus* en donde los círculos abiertos corresponden a la espiral, comenzando cerca de la octava cámara. La aproximación teórica es sorprendentemente acertada a partir de la séptima cámara.

3.3 Resultados y Predicciones

La dimensión fractal de la concha del *Nautilus* completa es de 1.635 ± 0.006 , (2.635 en el espacio tridimensional) y la dimensión promedio a lo largo del tiempo, desde su nacimiento, es de 1.730 ± 0.019 .

Las otras variables usadas en el análisis previo, muestran una dependencia exponencial respecto al número de cámaras, o equivalentemente, respecto a la edad del *Nautilus*.

$$y = \alpha_i e^{\beta_i x}, \quad (8)$$

donde y es una de las propiedades descritas en las figuras 4, 3, 6 o 7: α_i es la exponencial de la ordenada en la relación lineal mostrada en cualquiera de los análisis previos, β_i es la pendiente de la relación correspondiente y x es el

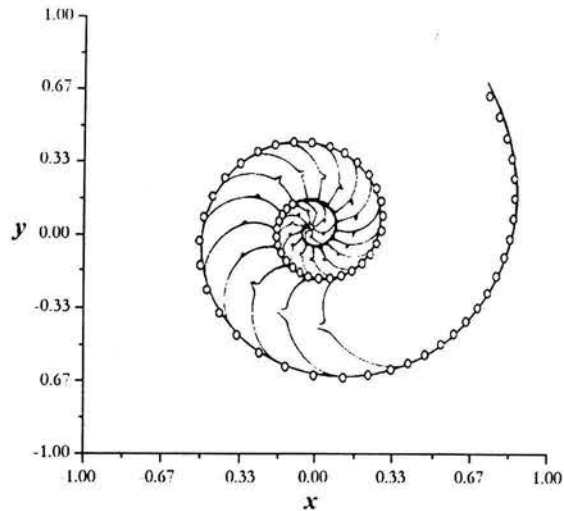


Figure 8: Espiral equiangular (círculos) superpuesta a la imagen de la concha del *Nautilus*.

número de cámaras en la imagen analizada. Los resultados para las ordenadas son: $\alpha_c = 113.863 \pm 0.039 \text{ mm}^2$, $\alpha_a = 46.016 \pm 0.039 \text{ mm}^2$, $\alpha_A = 4.852 \pm 0.050 \text{ mm}^2$, y $\alpha_v = 0.030 \pm 0.072 \text{ ml}$; los valores para las pendientes son: $\beta_c = 0.132 \pm 0.002$, $\beta_a = 0.109 \pm 0.002$, $\beta_A = 0.143 \pm 0.003$, y $\beta_v = 0.192 \pm 0.003$. Los factores de correlación para los ajustes lineales mencionados en las figuras son: 0.996, 0.996, 0.992, y 0.997 (En este caso, el ajuste lineal comienza en la cámara número 11, ver figura 7), respectivamente.

A partir de los resultados encontrados, y dentro de la precisión en cuanto al tiempo de creación de una nueva cámara, es posible predecir la aparición de la cámara número 31, con un volumen de $11.347 \pm 0.010 \text{ mm}^3$, un área transversal de $415.71 \pm 0.005 \text{ mm}^2$ y 60 ± 17 días después de que la última se haya formado. Cabe destacar que se realizó un análisis cualitativo para determinar si había una relación entre los resultados de área y volumen Figs. 6 y 7, sin embargo, no se encontró ninguna dependencia.

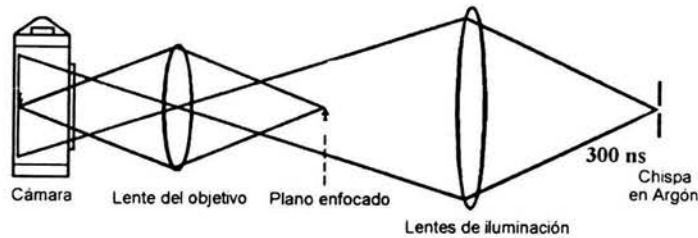


Figure 9: Esquema del dispositivo experimental usado en la fotografía de sombra.

4 LA DIMENSIÓN DE UN AEROSOL DE ACEITE

En esta sección se estudia la dimensión del contorno de la interfase líquido-gas en un aerosol de aceite, [11]. Las imágenes presentadas incluyen la región de filamentos y la región de rompimiento y son obtenidas por un método de alta resolución de fotografía de sombra. Con esto se logran imágenes que pueden ser sujetas a un intenso filtrado, equivalente a un análisis de umbral de intensidades, que establece el rango fractal. Al final, se deriva una relación empírica, para conocer el tamaño de las gotas producidas en el aerosol.

4.1 Motivación

El estudio de la complejidad de la región de rompimiento y de la región de filamentos de la interfase líquido-gas en un aerosol es de gran interés debido a que el proceso de fragmentación (erróneamente llamado *atomización*) está íntimamente relacionado a muchas aplicaciones tecnológicas y comerciales [63], desde la aplicación de insecticidas, pinturas y recubrimientos optoelectrónicos, hasta en procesos de combustión en calderas y motores de gasolina, diesel u otros combustibles [4, 60]. En todos estos procesos, la medición y control del tamaño de las gotas, al final del proceso de fragmentación, es muy importante [28].

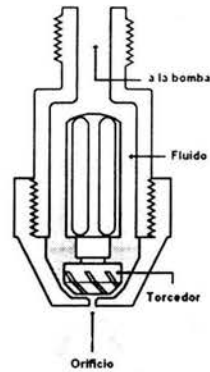


Figure 10: Atomizador, orificio de 1 mm que produce un cono a 45°.

4.2 Dispositivo Experimental

La principal ventaja de la fotografía de sombra es la capacidad de visualización de objetos cuya apreciación es muy difícil o imposible de lograr con técnicas de fotografía convencional. Esto es particularmente útil cuando los objetos a fotografiar son poco opacos o translúcidos, por ejemplo aire en agua o fluidos transparentes.

En la técnica de fotografía de sombra, el objeto es iluminado desde atrás, a través de un sistema óptico diseñado específicamente para este propósito; para ello, la luz que llega a la película fotográfica es la misma que atraviesa al objeto sin interactuar con él. La luz que interactúa con el objeto es absorbida o desviada por las diferencias en el índice de refracción y no incide sobre la película fotográfica. La figura 9 muestra una vista esquemática del sistema de fotografía de sombra usado en este trabajo.

El proceso de fragmentación del aceite ocurre como resultado de la interacción entre el aceite en estado líquido y el aire circundante, e involucra algunos estados en los que el líquido se convierte en aerosol. Estos estados pueden ser fácilmente observados en cualquier fotografía de las mostradas. Inicialmente y tan pronto como el aceite es forzado a dejar la nariz del atomizador, el fluido toma una estructura laminar que por la acción de las fuerzas aerodinámicas, gradualmente se convierte en filamentos. Estos filamentos se

rompen en una nube de pequeñas gotas que continúan moviéndose con una velocidad terminal de algunos metros por segundo.

Las fotografías corresponden a un aerosol de aceite transparente producido por un atomizador de giro cuyo orificio en la nariz es de 1 mm de diámetro y produce un cono de aerosol de 45° , (Figura 10). La presión de fragmentación es de 40,000 Pa. El fluido es una mezcla de aceites industriales designados para igualar las características del aceite diesel [7]. La medición de la velocidad terminal es determinada con una técnica de seguimiento de partículas, basada en una doble exposición fotográfica. La región de rompimiento, donde se ha establecido la velocidad terminal, es ópticamente ampliada y la película fotográfica (ASA 400) se imprime por un par de haces provenientes de un generador de chispas de arco de 300 ns de duración y separadas entre sí por 0.1 ms. Ello crea una imagen doble en donde se pueden identificar las características individuales con las que puede calcularse la velocidad de las gotas. Se puede así medir la velocidad media en la región de rompimiento a 30 mm de la nariz del atomizador.

Las fotografías utilizadas en este trabajo han sido amplificadas 20 veces sin pérdida de calidad. Finalmente, para analizar la estructura, las fotografías fueron digitalizadas con una resolución de 150 pixeles por pulgada, en un formato de 8 bits en la escala de grises.

4.3 Resultados

El cálculo de la dimensión fractal se realizó con el método de conteo de cajas aplicado al contorno de la imagen completa. El tamaño más pequeño de caja es de un pixel (0.023 mm) y el más grande es de 1300 pixeles (30 mm). La imagen original fue digitalizada y transformada a escala de grises (256 niveles). Esta imagen fue sometida a filtros y variaciones de contraste con el fin de obtener una buena representación en blanco y negro de la cual se obtuvo el contorno. En la figura 14 se muestra un análisis de la dependencia de la dimensión fractal con el umbral de conversión de escala de grises a blanco y negro. Se optó por escoger el valor localizado a la mitad de la variación, esto debido a que mostraba una mejor representación de la imagen real. Este método fue aplicado a todas las imágenes.

En la gráfica de la figura 15 podemos observar el resultado de aplicar el conteo de cajas a la imagen mostrada en la figura 13.

Realizando el cálculo de la dimensión fractal para las imágenes en las que las condiciones de la producción del aerosol eran distintas, en particular, la

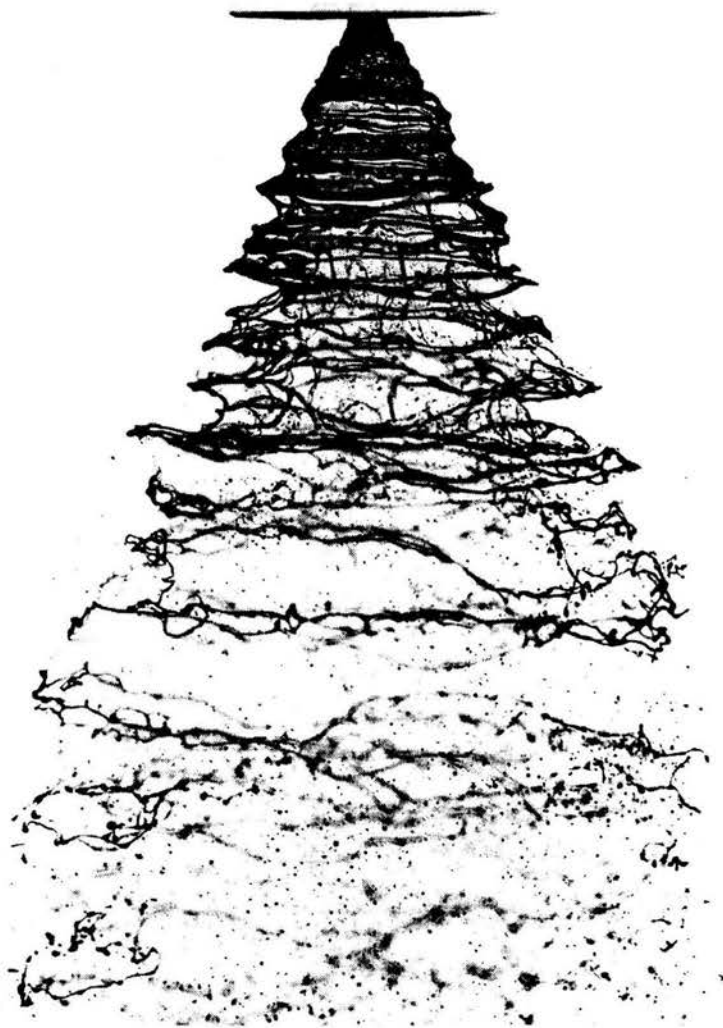


Figure 11: Imagen típica obtenida mediante la técnica de fotografía de sombra aplicada a un aerosol de aceite.

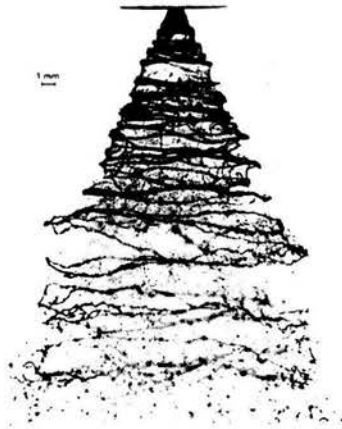


Figure 12: Otra imagen típica de la fotografía de sombra.



Figure 13: Contorno de la imagen mostrada en la figura 12.

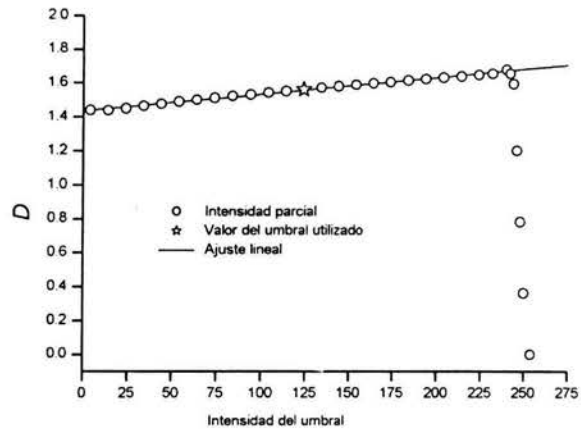


Figure 14: Dependencia de la dimensión fractal con el umbral de conversión de escala de grises a blanco y negro.

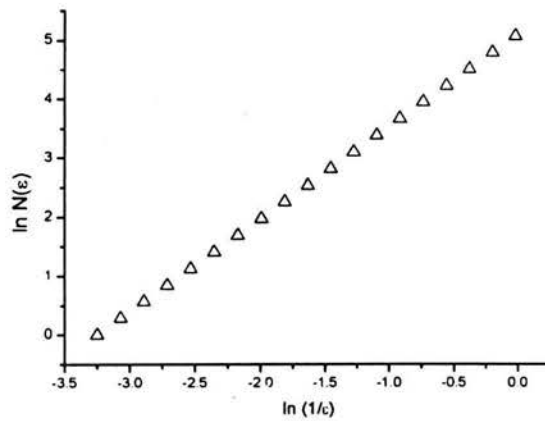


Figure 15: Resultados del método de conteo de cajas, $D = 1.57 \pm 0.002$.

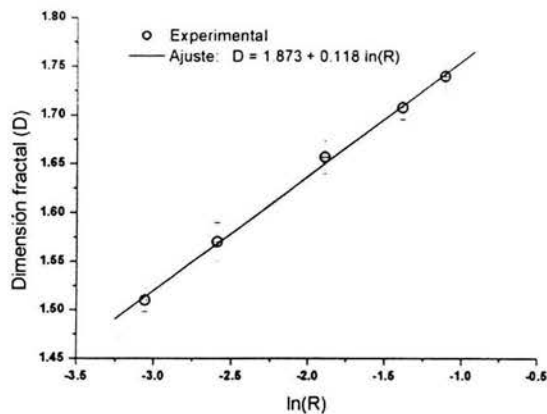


Figure 16: Ajuste de la dependencia de la dimensión fractal (D) del aerosol y el diámetro promedio de la gota (R).

presión, (y por lo tanto, el tamaño de la gota resultaba diferente). se encontró que existe una relación exponencial entre el valor de la dimensión fractal y el diámetro promedio de las gotas. Como se muestra en la figura 16, la tendencia está perfectamente clara.

Este descubrimiento es importante puesto que los experimentos tradicionales para medir el tamaño de las gotas de aerosoles son relativamente imprecisos. Los dos procesos comunes son: medición de las gotas una a una sobre una fotografía y la medición de las gotas depositadas sobre un placa. La primera técnica es laboriosa, puesto que se necesita medir un gran número de gotas para encontrar el valor promedio y la segunda puede contener información errónea, pues puede haber traslapes y deformaciones en las gotas depositadas en una placa. Con el método que proponemos, se aprovechan las técnicas de fotografía que se utilizan en la primera técnica mencionada anteriormente (y la utilizada en este trabajo para obtener los datos de la Fig. 16) y el proceso es mucho más sencillo. Sólo es necesaria hacer una calibración y obtener la curva correspondiente.

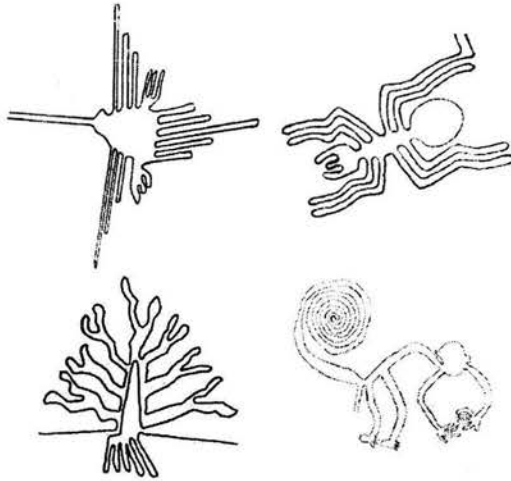


Figure 17: Contorno de cuatro de las más conocidas figuras de Nasca.

5 LOS GLIFOS DE NASCA

Con el objetivo de entender un poco más sobre las diversas estructuras geométricas en los geoglifos del Perú central, se analizaron las figuras biomórficas en términos de su dimensión [13]. Como primer descubrimiento, se observó que dichas figuras tienen una dimensión no entera, es decir, una dimensión fractal. Este valor, puede ser de ayuda en una posible clasificación cronológica de las figuras. Los resultados y el uso de la hipótesis de que la habilidad de los creadores de los geoglifos crecía con el tiempo, permite ordenar cronológicamente las bioformas. Este ordenamiento nos enseña una evolución interesante; partiendo de líneas simples, pasando a líneas paralelas conectadas y llegando a líneas curvas no paralelas y trapecoides bidimensionales.

5.1 El Dilema

Los conocidos geoglifos de Nasca en la región central de Perú ($14^{\circ}40'$ a $14^{\circ}55'$ lat. S y $75^{\circ}00'$ a $75^{\circ}10'$ long. O), han sido uno de los redescubrimientos del siglo XIX que han permanecido como un misterio en muchos sentidos. Estos geoglifos fueron hechos por habitantes pre-Incas durante un período incierto:

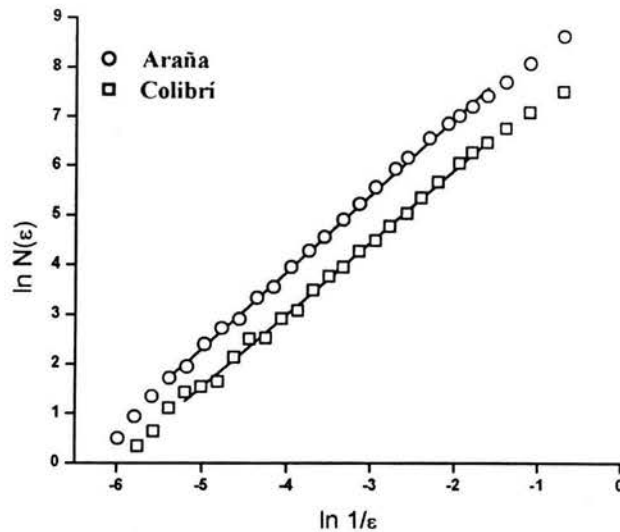


Figure 18: Resultados del método de conteo de cajas de dos geoglifos.

i) Antes del año 600 (fecha obtenida a partir de cerámica esparcida en la superficie), *ii*) Alrededor del año 525 ± 80 (fecha proveniente del análisis de radiocarbono de trozos de madera encontrados en la zona), o bien, *iii*) Entre el año 190 ac y el 660 (según algunos barnices de material orgánico). Las figuras fueron construidas al remover una capa superficial muy oscura, de material en el suelo; debajo de esta capa el suelo es de un color claro, ocasionando que las figuras tengan mucho contraste. Algunas teorías dicen que se realizaron al hacer caminatas o danzas religiosas [3, 43, 21]. Desafortunadamente y debido a su construcción, no es posible aplicar los métodos tradicionales directos para determinar su edad; más aún, uno está forzado a buscar vías alternativas para estimarla. La región de Nasca ha sido sujeta a inmensas perturbaciones (turismo ignorante, principalmente) y algunos de los geoglifos han sido terriblemente dañados. Afortunadamente, hay algunas buenas fotografías que fueron tomadas cuando las figuras acababan de ser redescubiertas, presumiblemente por la matemática María Reiche [48].

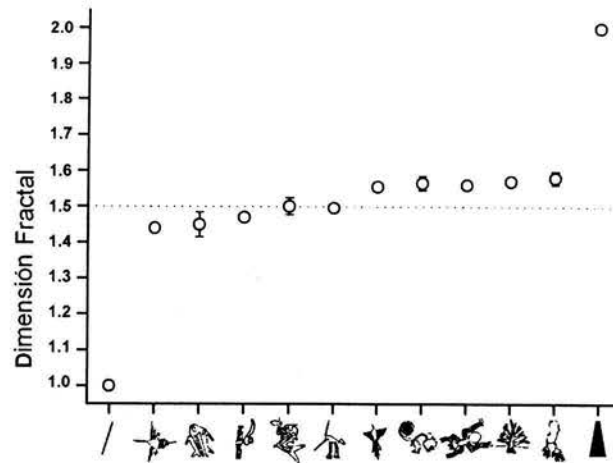


Figure 19: Arreglo cronológico de las figuras dependiendo de su dimensión (según el criterio de Taylor).

5.2 Análisis

Investigaciones en variados y diversos campos han mostrado que existe una tendencia en algunos sistemas naturales hacia el incremento de la complejidad con el tiempo [6]; la psicología, el comportamiento animal [24] y algunas manifestaciones humanas [54, 32] no representan excepción alguna a dicha tendencia. Si tomamos en cuenta sólo a aquellas figuras que representan bioformas, observamos que hay diferentes grados de simplicidad en ellas; de manera que, tomando como válida la tendencia hacia la complejidad, intentamos establecer un orden relativo midiendo su dimensión fractal. Desde esta perspectiva, concluimos que las figuras más simples tendrían que ser más viejas que las figuras más elaboradas, reflejándose el aumento en la complejidad como un incremento con el tiempo en la dimensión fractal.

Se midió la dimensión fractal de las figuras disponibles con una buena resolución del geoglifo. Éstas fueron: tres pájaros, dos ballenas, un perro, un lobo, una araña, un par de manos, y un árbol (se muestran algunos en la figura 17). A las imágenes originales, obtenidas de la bibliografía disponible, se les aplicó un proceso de filtrado digital que involucra filtros de tonalidades, intensificación de contraste, localización de contornos y eliminación del ruido de fondo. Al final, se obtienen figuras con un contorno bien definido.

Para la determinación de la dimensión fractal, usando el método del conteo de cajas, el tamaño más pequeño de la caja fue de un pixel equivalente a aproximadamente 15 – 20 cm de la figura original y a 0.32 mm de la imagen digital y el tamaño más grande fue de 400 pixeles, equivalente a aproximadamente 60 metros de la imagen original. En la figura 18 se observa la gráfica para determinar la dimensión fractal de dos geoglifos, el de la araña y el del colibrí. En esta gráfica se observa también la aproximación lineal. Como regla general, se despreciaron los primeros y los últimos tres puntos de cada gráfica. En consecuencia, nuestros coeficientes de correlación para todas los geoglifos quedaron dentro del intervalo [0.995, 0.999].

5.3 Resultados

Si uno acepta la hipótesis estudiada y propuesta por investigadores como R. Taylor [55, 56] en el sentido de que la complejidad y riqueza en los patrones artísticos incrementan en el rango de la dimensión fractal de 1 a 2, y la hipótesis de la evolución temporal de la complejidad de los dibujos con el tiempo, entonces tenemos que poner a las líneas antes de los trapecoides, es decir que las líneas son más antiguas que los trapecoides. Estos resultados están de acuerdo con recientes descubrimientos en donde se ha logrado descifrar que las culturas de Nasca comenzaron construyendo las líneas rectas, y al adquirir más experiencia se aventuraron a realizar estructuras más complejas. El ordenamiento cronológico mostrado en la gráfica 19, coloca a las figuras en cuya construcción se usan líneas curvas y paralelas antes de aquellas que necesitan trazos más complejos. Esta relación puede implicar que las primeras figuras son más viejas y menos sofisticadas que las siguientes, cuya estructura es más compleja, en los términos ya mencionados.

La hipótesis de Taylor concuerda con estudios sobre las pinturas de J. Pollock [58], en donde se sugiere que además de que el artista, sin saberlo, aumentaba la dimensión fractal de sus pinturas con el tiempo, llegó a un máximo, $d = 1.72$, en donde las figuras eran más gustadas o apreciadas. Esto, conlleva a decir que quizá existe cierta relación entre la complejidad, entendida a partir de la dimensión fractal, y la preferencia visual de ciertas imágenes.

Es aún controversial el decidir si un objeto es más complejo si su dimensión se acerca a dos. Esto, debido a que se puede interpretar que, un objeto cuya dimensión es 1.2 tiene tanta separación de una dimensión entera, en este caso 1, como la que tiene un objeto cuya dimensión es 1.8 de

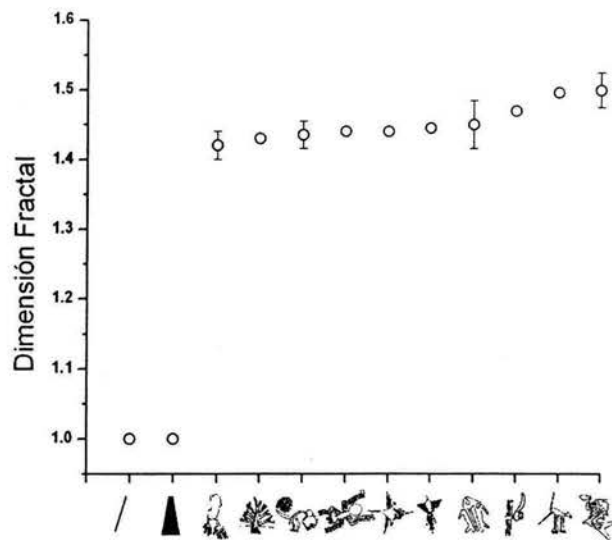


Figure 20: Arreglo cronológico de las figuras dependiendo de su dimensión.

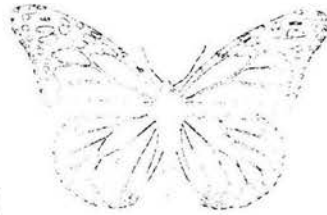
la dimensión entera igual a 2 (en donde se interpreta como objetos menos complejos a aquellos con dimensión entera). Quizás, el valor en donde la complejidad es mayor, sea en los valores cercanos a 0.5, 1.5 y 2.5. En la figura 20 se puede observar un segundo arreglo cronológico ocupando la hipótesis de mayor complejidad en dimensión semientera, en este caso 1.5.

6 PATRONES EN LAS ALAS DE MARIPOSAS

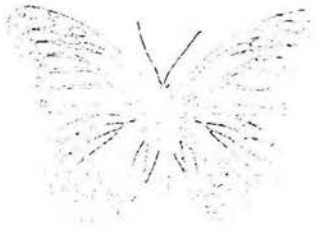
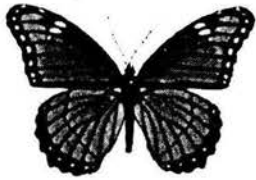
En esta sección se presenta el estudio de la complejidad geométrica (dimensión fractal) de los contornos de los patrones de color y las venosidades en las alas de 10 especies diferentes de mariposas. Este análisis incluye tres mariposas que son un ejemplo típico de mimetismo: la especie *Danaus plexippus* (o mariposa monarca), y las dos subespecies *Basilarchia archippus obsoleta* (o mariposa virrey) y *Basilarchia archippus hoffmanni* (o virrey tropical). Como resultado, se encuentra que el mimetismo entre estas mariposas está también representado en la dimensión fractal, lo que podría implicar que las ligeras diferencias de color no juegan un papel importante para la distinción entre especies miméticas. Este resultado es consistente con otro grupo mimético estudiado aquí mismo, el formado por la especie *Greta oto* y la especie *Hypoleria cassotis*. Más aún, las mariposas que pueden parecer miméticas a primera vista, son claramente distinguibles en términos de su dimensión fractal. Esto es claro para el caso de la mariposa monarca y la especie *Neophasia terlootii* que parecen compartir una gran similitud en sus patrones y color, pero que sin embargo, no tienen el mismo valor de dimensión fractal. Finalmente, esta sección concluye conjeturando que los individuos de un grupo con dimensión fractal muy similar, comparten la misma base genética y han sido sometidos por depredación o algún otro efecto selectivo, a condiciones muy similares de desarrollo evolutivo.

6.1 Antecedentes

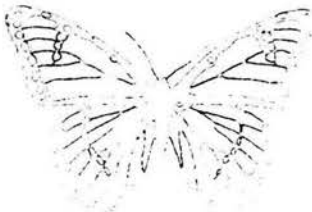
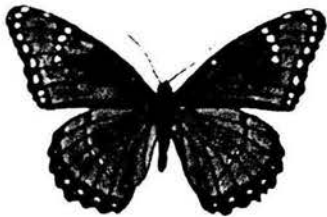
Este estudio está motivado por el debate sobre la posible existencia de un anillo de mimetismo en el género *Danaus* y su carácter particular (Batesiano o Mulleriano). Los ejemplos de coevolución en patrones (mimetismo) son comúnmente citados en libros de texto (ver por ejemplo [33, 15] y [9]), pero el debate que ellos generan también está presente en la bibliografía especializada ([49, 50]). Este debate está basado en el hecho de que algunas especies anteriormente conocidas como miméticas Müllerianas, no requieren del mimetismo ya que también comparten la defensa evolutiva contra los depredadores, defensa que se considera como la razón del mimetismo. Este es el caso de la mariposa virrey ya que, al igual que la monarca, es desagradable al paladar de los depredadores. Este debate no ha culminado debido a



a)



b)



c)

31
Figure 21: a) Mariposa monarca, b) Virrey y c) Virrey tropical

la falta de experimentos o pruebas que presenten una evidencia concluyente del tipo de mimetismo en estas especies [31]. Hasta ahora las pruebas para confirmar el mimetismo se han basado en evidencia circunstancial y no sobre mediciones directas de los patrones de evolución.

La mariposa monarca y sus especies miméticas (figura 21) cohabitan la región central de México, pero sólo la monarca migra hacia el noreste del continente americano (de 4,000 a 5,000 km aproximadamente). La especie virrey tropical fue catalogada por R. L. Chermok en 1947 y sólo se encuentra en México alrededor del trópico de Cáncer. La especie no tropical fue catalogada por W. H. Edwards en 1882 y sólo habita las regiones al este de Norteamérica. Posteriormente, ambas subespecies fueron reclasificadas como *Limenitis archippus* pero la clasificación original sigue siendo comúnmente usada.

Otra especie cuyas alas también tienen patrones con un marcado parecido a los de la mariposa monarca, es la *Lycorea ilione albescens* (catalogada por Distant en 1876, figura 22). Más aún, la dimensión fractal asociada a esta mariposa es también similar. Debido a que algunas mariposas pueden tener patrones similares a otras mariposas a las que no son miméticas, en este trabajo también se compararon los patrones de la especie *Neophasia terlootii* (Behr, 1869), la cual también presenta patrones similares a los presentes en el anillo de mimetismo de la monarca. Mientras que esta última mariposa luce similar a la monarca a primera vista, no tiene dimensión fractal parecida. Por lo tanto, aún cuando la cuestión sobre que tipo de mimetismo actúa sobre las especies no pueda ser resuelta con el análisis fractal, resulta interesante observar que especies, que habiendo sido catalogadas como miméticas sin importar el tipo, presentan también un valor común para la dimensión fractal de sus patrones geométricos.

Al igual que en los otros estudios presentados en esta tesis, se ha propuesto el análisis fractal debido a que éste contiene información sobre todas las escalas del sistema y por lo tanto, representa una relación más cuantitativa que la similaridad visual. Como este trabajo muestra, esta herramienta puede agrupar patrones geométricos de igual complejidad y que pueden haber tenido el mismo patrón de desarrollo debido a la selección natural.

6.2 Método

Como ya se ha mencionado a lo largo de esta tesis, la dimensión fractal está relacionada con la habilidad de los objetos de usar u ocupar espacios

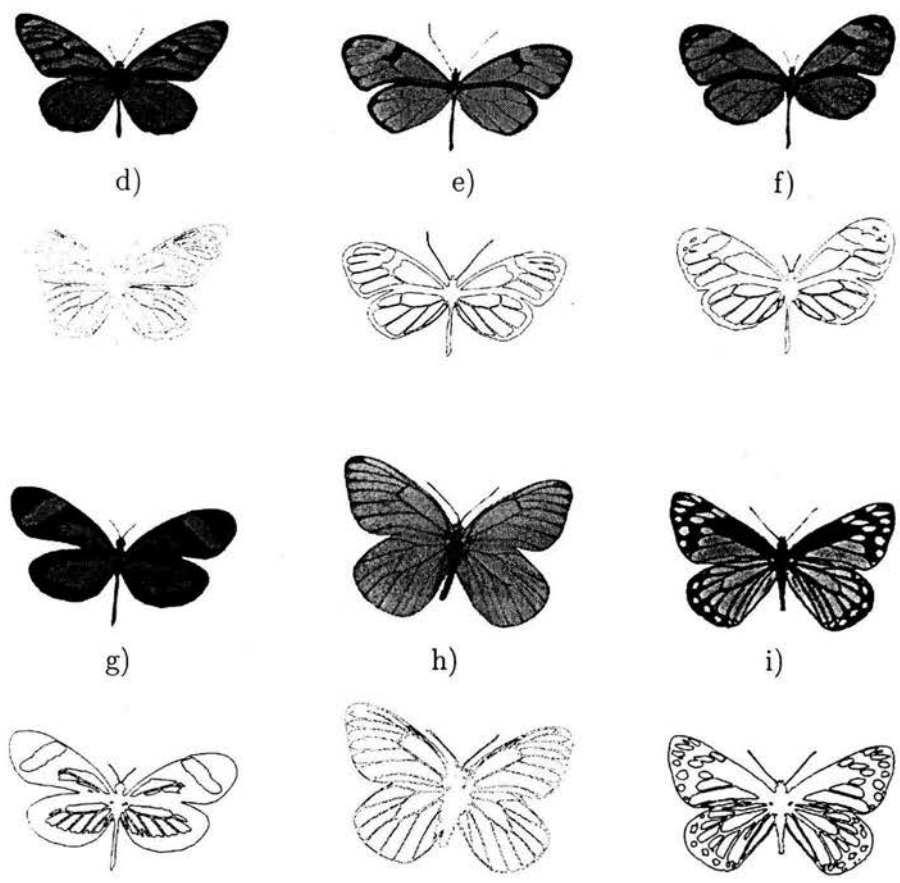


Figure 22: Otras especies estudiadas: d) *Lycorea ilione albescens*, e) *Greta nero nero*, f) *Hypoleria cassotis*, g) *Dismorphia theucarila fortunata*, h) *Aporia crataegi*, y i) *Neophasia terlootii*

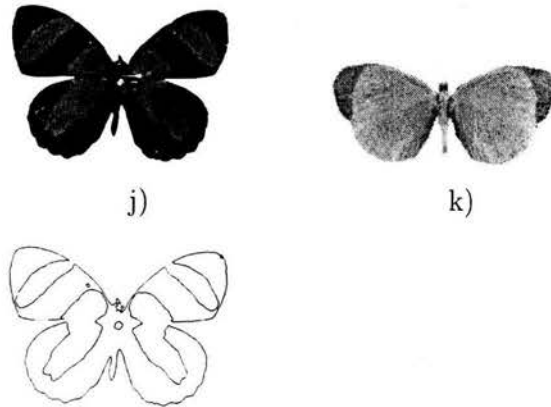


Figure 23: Otras especies estudiadas: j) *Callicore pitheas*, k) *Eurema Abula*

Euclidianos de manera óptima, y éste es el factor principal por el que este tipo de estudios es usado en la ingeniería y en la industria. Por otro lado, la dimensión fractal también ha sido usada en la biología debido a que esta técnica permite distinguir y caracterizar las escalas presentes en sistemas vivos.

En el mejor de los casos, la dimensión fractal puede contener información acerca de la evolución de las especies, debido a que algunos sistemas tienden a incrementar su complejidad con el tiempo. Un ejemplo típico de esto se presenta en [6], donde se muestra que la complejidad de la familia de las amonitas se ha incrementado desde la aparición de esta especie hasta su extinción.

Al igual que en otras secciones de esta tesis, la definición de dimensión fractal por conteo de cajas es la que se ha utilizado para medir la complejidad geométrica de los patrones de contorno en las alas de mariposas. El tamaño de caja más pequeño fue de un pixel, 0.037 mm y el más grande fue del tamaño de la mariposa, desde 3 cm hasta 12 cm, dependiendo del espécimen.

Los especímenes fueron iluminados con luz blanca, procedente de una lámpara de diodos emisores de luz blanca *LEDs*, y fotografiados directamente con una cámara digital (Sony Cybershot DSC-P50) de alta resolución (2.1 Megapíxeles). A esta resolución, las estructuras más finas pueden ser fácilmente observables y ello implica que las escalas más pequeñas del sistema están registradas. Al igual que en el estudio del aerosol, se aplica un

intenso realce del contraste y un filtrado digital de colores.

Este análisis se ha hecho únicamente con las regiones negras de las alas de las mariposas, en donde los bordes están formados por las venosidades de las alas y por la estructura del patrón formado por las escamas de colores propios de la mariposa. De esta forma, se propone que la dimensión fractal puede estimar la complejidad de la estructura en las alas y con esto medir la diferenciabilidad de las especies. El caso más sencillo es la *Eurema albula* (Cramer, 1776), que es una mariposa completamente blanca, cuyas venosidades no se alcanzan a distinguir, y que se encuentra desde el sur de Texas hasta Brasil ([18, 37]). Como se espera teóricamente, el valor de la dimensión fractal de esta especie es cero. El segundo caso es la *Neophasia terlootii* que se encuentra desde el sur de Arizona hasta Nuevo León; la estructura de sus alas luce muy similar al de las monarcas y no hay diferencia detectable a primera vista ([17, 44]). Junto con el grupo mimético de la monarca, también se analizó el anillo mimético de la *Greta nero nero* (Hewitson, 1855) y la *Hypoleria cassotis* (H. W. Bates, 1864). Otras mariposas sin grupo mimético aparente (figura 22), también fueron estudiadas; éstas son la *Callicore pithaeas* (Latreille, 1811), la *Dismorphia theucarila fortunata* (Lucas, 1854) y la *Aporia crataegi* (Linnaeus, 1758).

En el análisis se utilizaron 10 especímenes de mariposa monarca, 6 de cada una de las virreyes y 4 de cada una de las otras especies.

6.3 Resultados

La dimensión fractal para la mariposa monarca es de 1.632 ± 0.0036 , para las mariposas virrey tropical de 1.628 ± 0.0059 y para las virrey del norte de 1.634 ± 0.0051 . Como se puede observar, estos resultados muestran que no existe distinción entre la complejidad geométrica de especies que se consideran miméticas. La única posible fuente de distinción es a través de los colores propios de cada especie, pero esto no influye en la dimensión fractal. Desafortunadamente, un análisis de esta naturaleza no puede incorporarse a la medición de dimensión fractal ya que distintos individuos de la misma especie presentan tanta variación en color como la que se observa con miembros de otras especies.

Los resultados presentados aquí pueden verse en la siguiente tabla y en la figura 24, en donde podemos ver que el anillo Greta-Hypoleria también tiene una dimensión fractal común.

Dimensión fractal e incertidumbre

No.	Anillo	Nombre	Dimensión	Incertidumbre
a	<i>M - V</i>	<i>Danaus plexippus</i>	1.632	0.0036
b	<i>M - V</i>	<i>Basilarchia archippus obsoleta</i>	1.634	0.0051
c	<i>M - V</i>	<i>Basilarchia archippus hoffmanni</i>	1.628	0.0059
d		<i>Lycorea ilione albescens</i>	1.609	0.0042
e	<i>G - H</i>	<i>Greta nero</i>	1.524	0.0028
f	<i>G - H</i>	<i>Hypoleria cassotis</i>	1.527	0.0091
g		<i>Dismorphia theucarila fortunata</i>	1.585	0.0057
h		<i>Aporia crataegi</i>	1.745	0.0057
i		<i>Neophasia terlootii</i>	1.478	0.0030
j		<i>Callicore pitheas</i>	1.229	0.0127
k		<i>Eurema Albula</i>	0.000	0.0000

Esos resultados también muestran que los patrones de las alas que lucen similares no tienen la misma dimensión (consideremos la *Neophasia terlooti* y el anillo mimético Monarca-Virreyes, o la *Dismorphia theucarila* y el anillo mimético Greta-Hypoleria); mientras que otras, cuya apariencia no es muy similar, comparten un valor cercano de dimensión fractal (la *Lycorea ilione* y el anillo mimético Monarca-Virreyes). Este punto en particular es consistente con los resultados derivados por las reglas aceptadas en el estudio del desarrollo de patrones en las alas de mariposas, *Nymphalid Ground Plan o NGP* [5], y la evidencia genética a favor de la existencia de redes de genes de prendido-apagado que limitan el número posible de estados finales [10]. Estos resultados coinciden con otros datos que sugieren que las características que definen especies son, a menudo, producto de selección natural; ahora es posible identificar los genes precisos que contribuyen a la especialización y a las fuerzas que están involucradas en su evolución [47]. Entonces, es posible que el uso del análisis fractal puede ser usado para identificar grupos donde el material genético base sea una característica común y se vea modificado sólo por la selección natural (depredación o sexual) [38].

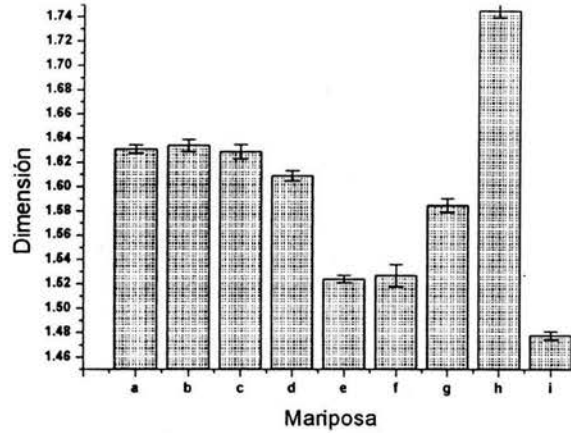


Figure 24: Dimensión fractal de los patrones geométricos en las alas de las mariposas estudiadas

6.4 Discusión

Con respecto al anillo mimético de la monarca, estos análisis presentan nuevas incógnitas. Es un hecho bien conocido que algunas especies utilizan los colores como señales de advertencia que indican el nivel de toxicidad. Por otro lado, es bien conocido que los pájaros, los depredadores en este caso, pueden distinguir colores [20]. Esos hechos junto con nuestros resultados, indican que el mimetismo es utilizado partiendo de la complejidad geométrica de los patrones en las alas y no de los colores. Esto también indica porque las variaciones en las tonalidades de las mariposas dentro y fuera de un anillo mimético, no resulten ser tan importantes. Esto se corrobora con el hecho de que en el caso del anillo mimético de la monarca todas las especies son desagradables para los depredadores [39].

7 CUASIPERIODICIDAD ACÚSTICA

7.1 Introducción

Recientemente ha habido un gran interés en aplicar las ideas de la dinámica no lineal, caos y bifurcaciones a una gran variedad de sistemas acústicos tales como la radiación de capas de líquidos con ondas sonoras [36], el efecto termoacústico [62], las oscilaciones de cuerdas, las guías de ondas [19], e incluso en instrumentos musicales como el clarinete [36]. Particularmente, la interacción de las ondas acústicas ha sido clasificada en dos grandes grupos [19]: la interacción entre dos haces direccionales y la interacción entre ondas acústicas dentro de un ducto. El trabajo aquí presentado pertenece al segundo caso, la interacción de dos ondas de sonido producidas por dos bocinas colocadas en los extremos de una guía de ondas.

Impulsados por la publicación de un artículo de acústica [19], en donde se reporta que la dinámica es caótica, cuyo atractor es fractal, utilizando un sistema acústico muy simple, decidimos realizar un experimento muy parecido para poder estudiar un poco más el tipo de dinámica involucrada en la formación de patrones fractales.

7.2 Análisis

Se han desarrollado muchos criterios para investigar la dinámica de un sistema [27, 1, 30, 26]. Algunos de ellos son: el mapa de retorno (normalmente conocido como la sección experimental de Poincaré), la dimensión de inmersión, el espectro de los exponentes de Lyapunov y la reconstrucción del atractor mediante el método del tiempo de retraso.

Una vez que se tiene una señal temporal, se procede a investigar la posible periodicidad del sistema usando el mapa de retorno. Para construir dicho mapa, se grafica un máximo local de la señal S_{n+1} contra el máximo local inmediato anterior, S_n , el número de puntos de esta gráfica determina, si es el caso, la periodicidad de la dinámica, el encontrar una curva cerrada, representa una dinámica cuasiperiódica. Reconstruir el atractor es uno de los métodos que puede dar información suficiente sobre el comportamiento general del sistema. Cuando en un experimento sólo se mide una de las variables involucradas, es posible reconstruir el atractor utilizando el método del tiempo de retraso. Para construir una gráfica de tiempo de retraso se usan variables defasadas en el tiempo pensando que la dinámica se realiza en

un cierto espacio de dimensión d :

$$y(k) = [x(k), x(k + T), \dots, x(k + (d - 1)T)]. \quad (9)$$

El tiempo de retraso T , es la única variable importante para obtener una buena representación del atractor al usar el método de reconstrucción. El método que se empleó para determinar el tiempo de retraso fue el de información mutua, (IF) [30, 26, 14], en donde el algoritmo busca una correlación óptima. Este valor es el primer mínimo local de la función de autocorrelación de los puntos de la serie temporal con la propia serie temporal defasada por un lapso igual a T , con el propósito de obtener vectores con la menor dependencia posible.

La dimensión de inmersión es una variable importante en el estudio de un sistema. Una mala elección de esta dimensión puede causar una mala interpretación del comportamiento del sistema dinámico. Esto debido a que un atractor inmerso en una dimensión menor a la dimensión real, podría mostrar autointersecciones o falsa periodicidad, causadas por las proyecciones de un atractor cuya dimensión de inmersión es en realidad mayor. Para encontrar la dimensión de inmersión se utilizó el método de falsos vecinos, (FV) [26, 14]. Este método calcula la distancia Euclidiana entre puntos vecinos del atractor en un rango de dimensiones de inmersión y determina la proporción de falsos vecinos en función de la dimensión de inmersión propuesta. Un vector de dimensión d

$$y(k) = [s(k), s(k + T), \dots, s(k + (d - 1)T)], \quad (10)$$

tiene un falso vecino $y^{NN}(k)$ cuya cercanía se define en el sentido de la distancia Euclidiana entre dos puntos. La distancia Euclidiana entre los puntos $y(k)$ y $y^{NN}(k)$ en un espacio de dimensión d , está dada por:

$$R_d = y(k) - y^{NN}(k) = \frac{[s(k) - s^{NN}(k)]^2 + [s(k + T) - s^{NN}(k + T)]^2 + \dots + [s(k + (d - 1)T) - s^{NN}(k + (d - 1)T)]^2}{[s(k + (d - 1)T) - s^{NN}(k + (d - 1)T)]^2}, \quad (11)$$

y al realizar el cálculo para d y para $d + 1$, posiblemente hemos “desproyectado” algunos falsos vecinos. De esta manera, la dimensión que muestre un porcentaje bajo de falsos vecinos, de preferencia cero, resulta una buena estimación de la dimensión de inmersión para el atractor reconstruido (este valor puede ser verificado con otros métodos).

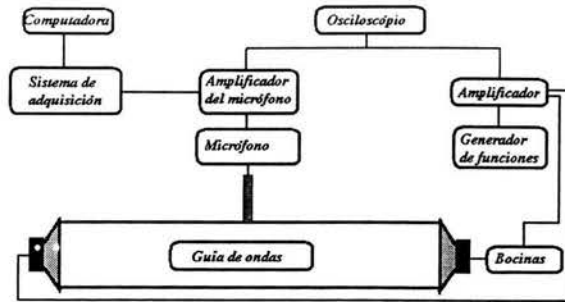


Figure 25: Esquema del sistema experimental.

Finalmente, se realizó el cálculo del máximo exponente de Lyapunov, utilizando el algoritmo desarrollado en [29], donde básicamente se mide el crecimiento de la separación entre dos trayectorias cercanas a medida que transcurre el tiempo (separación que usualmente crece en forma exponencial). Uno considera una distancia inicial entre dos puntos, como $\Delta_o = S_n - S_{n'}$, que va a crecer exponencialmente con el tiempo y como el futuro puede ser leído directamente de la serie de tiempo: $\Delta_1 = S_{n+1} - S_{n'+1}$, entonces, si se encuentra que $|\Delta_1| \approx \Delta_o e^{\lambda_1}$, λ es el valor del máximo exponente de Lyapunov; este valor constituye el método más confiable para diferenciar entre una dinámica no caótica y una caótica.

7.3 Dispositivo Experimental

El dispositivo experimental que se construyó consiste en una guía de ondas de sección transversal circular con 60 cm de longitud y 8 cm de diámetro. Para producir la onda de sonido se colocaron 2 bocinas *PROAM SPK-350* de 8Ω y $75 W$ de potencia máxima, en los extremos de la guía de ondas. Se utilizaron dos generadores de funciones *SRS DS345* y *Wavetek 29* cuya salida se amplifica mediante un amplificador *ONKYO*. La señal amplificada es utilizada para alimentar las bocinas. La medición de presión se realizó a través de un micrófono localizado a la mitad de la guía y rasante a la pared de la misma. Para visualizar el voltaje de entrada de la bocina y la señal del micrófono, se usó un osciloscopio *HP 54502A*, los datos de presión se registraron con un adquirente *HP 3206A* conectado a una computadora y

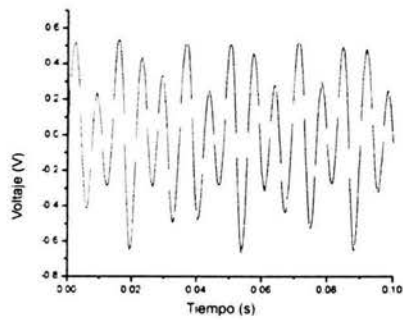
controlado con el código *HP VEE*.

En todos los experimentos se usó una señal del tipo sinusoidal. Cada bocina fue alimentada con una frecuencia diferente (88 y 145 *Hz*) y ambas con el mismo voltaje de entrada en el rango de 0.2 – 2 *V*.

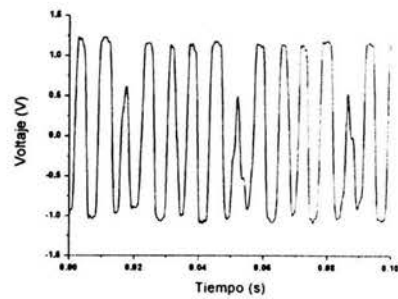
7.4 Resultados

Las series temporales obtenidas del experimento para 2 voltajes diferentes y su correspondiente espectro de frecuencias (TRF) se pueden observar en las figuras 26, 27; e igualmente, los mapas de retorno y los atractores inmersos en un espacio tridimensional para cada una de estas series, se presentan en las figuras 28, 29, 31 y 30. También se muestra una señal construida numéricamente.

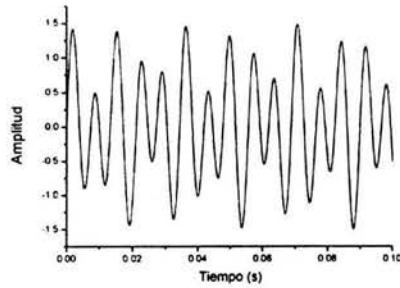
Como se puede observar, el atractor reconstruido de la figura 29, gráfica superior, corresponde a un toro. Este atractor es característico de una dinámica cuasiperiódica. A primera vista, el atractor y el mapa de retorno, para el voltaje de entrada de las bocinas con valor de 2 *V* puede ser interpretado como caótico. Un análisis de las demás variables del sistema, nos dicen más acerca de la verdadera dinámica. En primer lugar, la dimensión de inmersión da un valor de 3 (figura 30), por lo que es suficiente graficarlo en 3 dimensiones. En las gráficas de la figura 31 se muestra el resultado del cálculo del tiempo de retraso obtenido con el método de información mutua. El espectro de frecuencia de la señal con 0.2 *V* se observa lo que se espera, dos frecuencias dominantes, sin embargo, en la señal de 2 *V*, aparece un rango de frecuencias más amplio, sin embargo, todas las frecuencias son múltiplos o sumas de las dos frecuencias fundamentales, situación que no ocurre en una dinámica caótica. Las gráficas de divergencia de trayectorias cercanas, de cuyas pendientes son calculados los máximos exponente de Lyapunov, todas tienen un valor promedio igual a cero, a pesar de ser oscilatorios. La dimensión de correlación, para los dos atractores experimentales es de 1.98 ± 0.002 y 2.01 ± 0.003 , respectivamente. Estas pruebas indican que se trata de una dinámica cuasiperiódica. Para corroborar los resultados, se produjo numéricamente una señal cuasiperiódica cuyas frecuencias inconmensurables son 145 y 88 *Hz*. El resultado se puede observar en las figuras 26, 28, 29, 31, 30 y 32. Debido a la forma oscilatoria poco común mostrada en la gráfica de divergencia de trayectorias de las señales (mostradas en la figura 32), se decidió aplicarles una transformada rápida de Fourier; el resultado, para una de ellas, se puede observar en la figura 33, donde sor-



a)

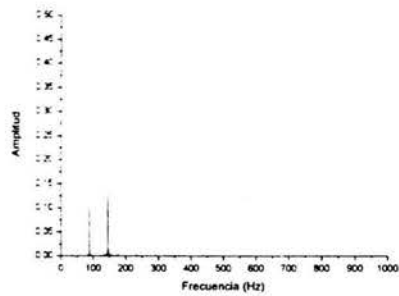


b)

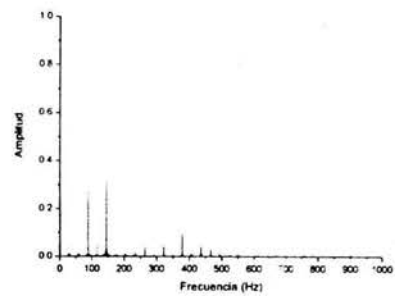


c)

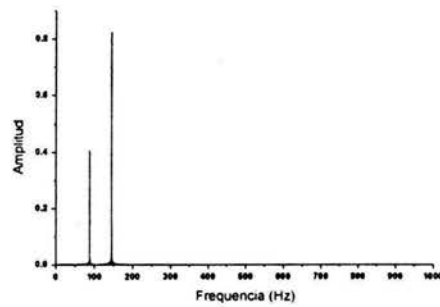
Figure 26: Señal temporal con: a) $f_1 = 88$, $f_2 = 145 \text{ Hz}$, $V_{in} = 0.2 \text{ V}$; b) con $f_1 = 88$, $f_2 = 145 \text{ Hz}$, $V_{in} = 2 \text{ V}$ y c) señal temporal numérica con $f_1 = 88$ $f_2 = 145 \text{ Hz}$.



a)



b)



c)

Figure 27: Espectro de frecuencias de la señal con: a) $f = 88, 145 \text{ Hz}$ y $V_{in} = 0.2 \text{ V}$ y b) $f = 88 \text{ y } 145 \text{ Hz}$ y $V_{in} = 2 \text{ V}$ y c) señal temporal numérica con $f_1 = 88 \text{ Hz}$ $f_2 = 145 \text{ Hz}$.

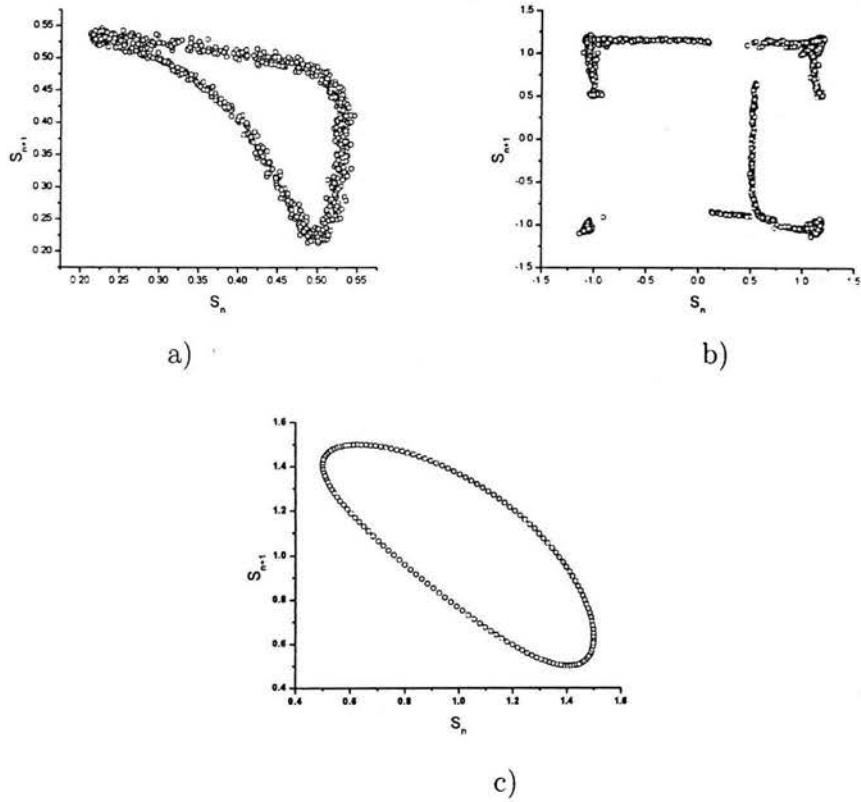


Figure 28: Mapeo de retorno de la señal temporal con: a) $f_1 = 88$, $f_2 = 145$ Hz, $V_{in} = 0.2$ V; b) $f_1 = 88$, $f_2 = 145$ Hz, $V_{in} = 2$ V y c) señal numérica con $f_1 = 88$, $f_2 = 145$ Hz.

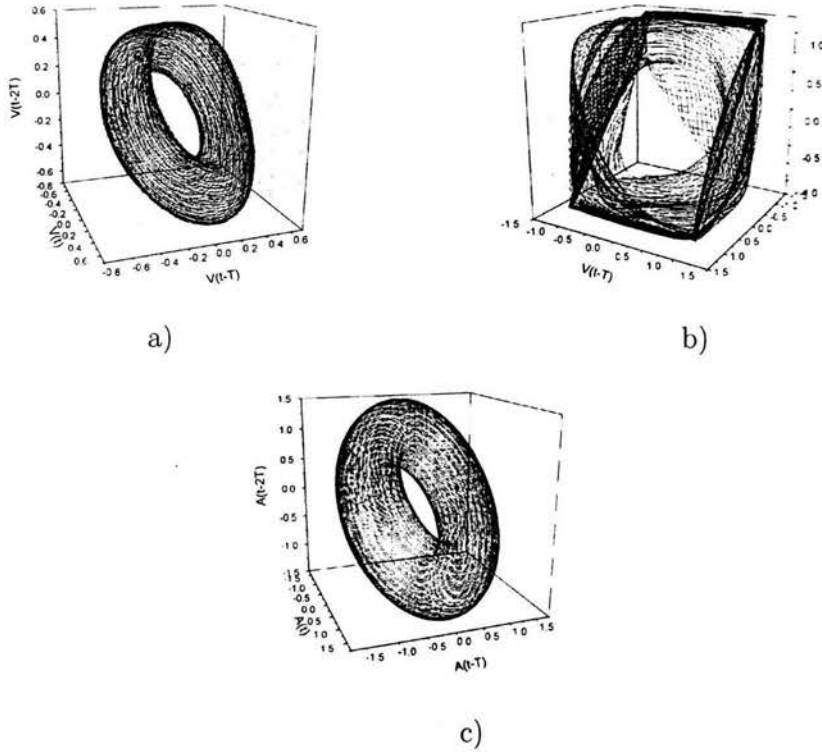
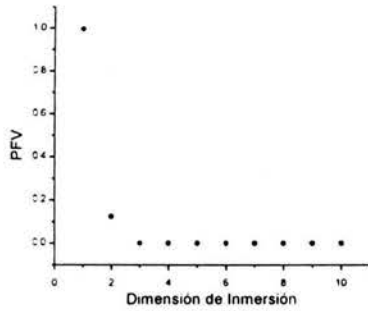
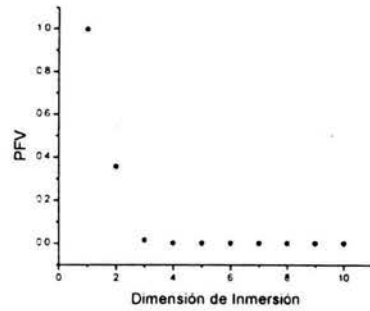


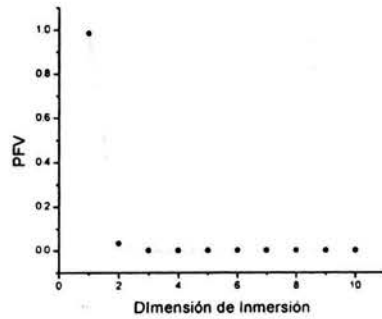
Figure 29: Atractor reconstruido con: a) $f_1 = 88$, $f_2 = 145$ Hz, $V_{in} = 0.2$ V, $T = 21$, $D_i = 3$, $FV = 0.011$ y $d = 1.982$; b) $f_1 = 88$, $f_2 = 145$ Hz, $V_{in} = 2$ V, $T = 21$, $D_i = 3$, $FV = 120$ y $d = 2.011$ y c) señal numérica con: $f_1 = 88$, $f_2 = 145$ Hz, $T = 21$, $D_i = 3$, $FV = 0$ y $d = 1.989$.



a)



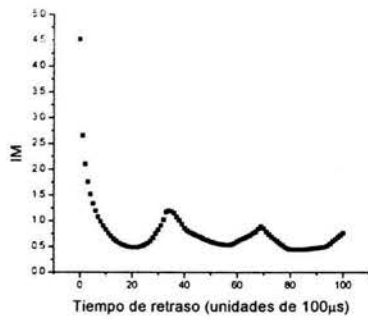
b)



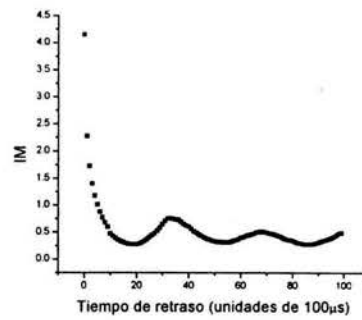
c)

Figure 30: Porcentaje de falsos vecinos para a) $f_1 = 88$, $f_2 = 145$ Hz, $V_{in} = 0.2$ V, $T = 21$, b) $f_1 = 88$, $f_2 = 145$ Hz, $V_{in} = 2$ V, $T = 21$ y c) señal numérica con: $f_1 = 88$, $f_2 = 145$ Hz, $T = 21$.

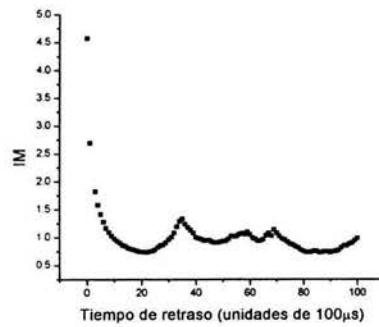
prendentemente, el valor de la frecuencia característica corresponde a la resta de las dos frecuencias utilizadas para producir la señal. El resultado en los tres casos es similar (este comportamiento se observa también en la gráfica de divergencias de la señal con $V_{in} = 2V$ con dimensión de inmersión igual a 4. Fig. 32 c), cabe destacar que se realizó el cálculo en 4 dimensiones para corroborar el resultado y comprobar que la forma oscilatoria del exponente de Lyapunov no era producto de realizar el análisis en una dimensión de inmersión inferior).



a)



b)



c)

Figure 31: Información Mutua: a) $f_1 = 88$, $f_2 = 145$ Hz, $V_{in} = 0.2$ V, $T = 21$; b) $f_1 = 88$, $f_2 = 145$ Hz, $V_{in} = 2$ V, $T = 21$ y c) señal numérica con: $f_1 = 88$, $f_2 = 145$ Hz, $T = 21$.

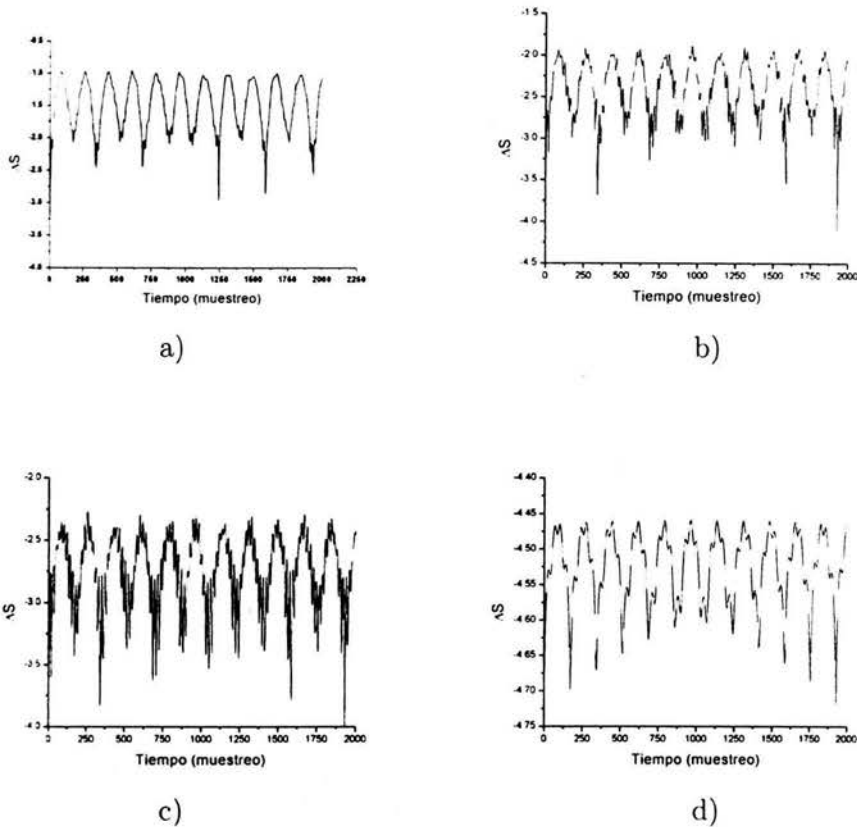


Figure 32: Gráfica de divergencia de trayectorias para obtener el máximo exponente de Lyapunov de la señal con: a) $f = 88, 145 \text{ Hz}$, $V_{in} = 0.2 \text{ V}$ y $D_{in} = 3$; b) $f = 88, 145 \text{ Hz}$, $V_{in} = 2 \text{ V}$ y $D_{in} = 3$; c) $f = 88, 145 \text{ Hz}$, $V_{in} = 2 \text{ V}$ y $D_{in} = 4$ y d) señal numérica con $f = 88, 145 \text{ Hz}$ y $D_{in} = 3$.

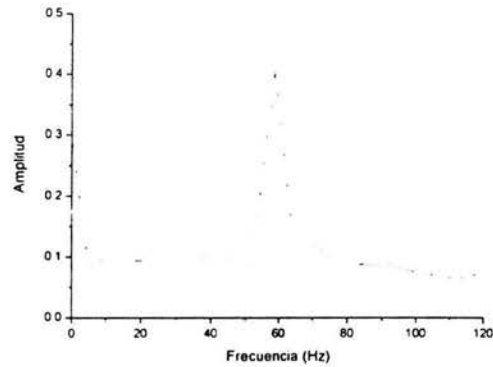


Figure 33: Espectro de frecuencias de los datos de la Fig 32. a).

Se estudiaron en detalle los datos expuestos en el artículo de referencia [19] y se encontró que la gráfica de la cual se calcula el exponente de Lyapunov, figura 34, es también oscilatoria, con una frecuencia que nuevamente es la diferencia entre las dos frecuencias importantes aplicadas en sus sistema. El error que cometen ellos es que el tiempo en el que estudian el desarrollo del atractor es demasiado corto, provocando que, por coincidencia, el valor promedio del exponente de Lyapunov que obtienen en este breve lapso (pendiente de la recta), fuese positivo. El tiempo necesario para hacer la determinación del exponente de Lyapunov debe de ser suficientemente largo para que el atractor se desarrolle completamente. El tipo de dinámica en ambos casos, es cuasiperiódica.

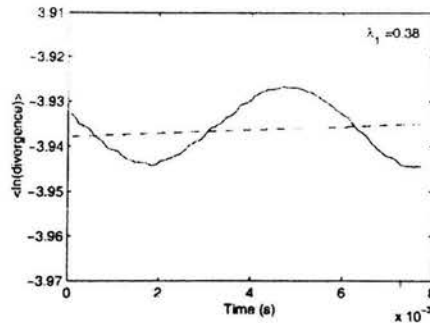


Figure 34: Gráfica de la divergencia de trayectorias cercanas obtenida del artículo referido en [19], la frecuencia de oscilación es de aproximadamente $170 \pm 4 \text{ Hz}$, igual a la resta de las frecuencias aplicadas a las bocinas de su sistema: 830 y 1000 Hz .

8 CONCLUSIONES

En esta tesis se proponen nuevas aplicaciones a la detreminación de la dimensión fractal en varios sistemas, tanto naturales como creados por el hombre.

Actualmente, el estudio de la percepción visual ha tenido mucho impulso en cuanto a discernir las preferencias visuales tanto del hombre como de los animales. Se ha encontrado que hay diferencias, en cuanto a preferencia visual, de objetos naturales o de objetos artificiales. En este contexto, se propone un orden cronológico relativo entre los geoglifos de Nasca, proposición que concuerda con la idea de la evolución artística hacia la complejidad geométrica.

En este trabajo es posible ver que cosas tan comunes, como son los aerosoles o los patrones de las alas de mariposas, pueden ser estudiados con las herramientas de la matemática actual. dando como resultado. hipótesis y predicciones que pueden ser muy útiles tanto en ingeniería como en biología. Se encontró que el Nautilus, desde que nace, conserva casi un mismo valor en su dimensión fractal cuyo valor promedio es de 1.730 ± 0.019 . Además muchas de sus características, como el área o volumen de sus cámaras tienen una dependencia exponencial con la edad o el número de cámaras formadas.

En sí, la propia concha tiene una forma de espiral equiangular.

Se construyó un sistema de fotografía de sombra de alta definición con la cual se pudo obtener imágenes de aerosoles de aceites que pudieron ser estudiadas por medio de su dimensión fractal. Se encontró que es posible determinar el diámetro promedio de las gotas formadas en el proceso de "atomización" en el aerosol a través de la dimensión fractal. Las implicaciones originadas en este estudio pueden de ser de gran interés en el campo de recubrimientos o pinturas, en donde es de suma importancia el conocer el tamaño de las gotas.

En el estudio de las figuras de Nasca se aplicó la hipótesis de R.P. Taylor con el fin de proponer un orden cronológico a las controvertidas líneas y glifos de Nasca. El ordenamiento concuerda con algunas teorías en cuyo caso también colocan a las líneas antes que los glifos y antes que los trapecios. También se presentó otro ordenamiento cronológico, en el que se hace uso de una segunda teoría en el que los objetos más complejos (y por lo tanto más modernos) son aquellos cuya dimensión es semientera.

En el caso del estudio sobre los patrones de las alas de las mariposas encontramos un hecho muy interesante, Las mariposas del anillo mimético de la Monarca-Virreyes tienen, dentro de la incertidumbre, la misma dimensión fractal. Lo mismo pasa con el anillo mimético Greta-Hypoleria cuyos valores son, nuevamente, iguales. Este hecho puede representar que el uso de la técnica de análisis fractal puede ayudar en el estudio de material genético en común en las especies de mariposas, a través de la complejidad de los patrones en las alas. Sabemos que hay mucho trabajo por hacer: para confirmar los resultados en un número mayor de especies y, si es el caso, extenderlos. Sin embargo creemos importante difundirlo y pedir a otros científicos su ayuda en la tarea, especialmente si se encuentra que realmente puede representar una herramienta nueva para identificar grupos de especies en donde el material genético básico, es una característica común.

Finalmente se presentó un experimento de donde se obtuvieron señales temporales a las que se les aplicaron las herramientas para el análisis de sistemas dinámicos; esto, con el fin de conocer un poco más del comportamiento del sistema. Se encontró que este sistema y uno muy parecido, reportado en la literatura, son cuasiperiódicos y no caóticos como los autores argumentan. Esto es debido a que consideran muy pocas iteraciones en el cálculo del exponente de Lyapunov, por lo que obtienen un resultado erróneo.

Es importante decir que los valores de dimensión fractal reportados en este trabajo son válidos dentro del rango de tamaños (rango de escalamiento) de

caja utilizados método de conteo de cajas y es que precisamente en este rango donde el patrón se desarrolla puesto que es un objeto finito no comparable a un fractal matemático o numérico, donde el rango de escalamiento puede ser infinito. Se tiene presente también que algunos patrones presentados no pueden ser reconocidos como fractales a primera vista, esto debido a que no se presenta la autosimilaridad a muchas escalas, característica de los fractales más conocidos. Debido a esto se decidió utilizar el método de conteo de cajas cuya particularidad es precisamente su aplicación en el análisis de patrones no-autosimilares formalmente en donde ha sido ampliamente usada, con excelentes resultados.

En el anexo, al final de la tesis, se muestra una tabla con valores obtenidos utilizando el conteo de cajas de objetos cuya dimensión es bien conocida, además se presentan valores de la dimensión fractal (para los mismos objetos y algunos presentados en la tesis) calculados con el método de autocorrelación en donde podemos ver que los valores son, dentro de la incertidumbre, el mismo.

Referencias

- [1] Abarbanel, H. D. I., Brown, R., Sidorowich, J. J., y Tsimring, L. Sh. 2002. *Rev. Mod. Phys.*, **65**, 4, 1331-1392.
- [2] Alligood, K. T. , Sauer, T. D., y Yorke, J. A., 1996. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, (Springer Press: New York).
- [3] Aveni, A. 1990. *Memoirs of The American Philosophical Society*, **183**, 1: 2000. *Between the Lines*, (University of Texas Press, Austin).
- [4] Baker, R. C. 2000. *Flow Measurement Handbook*, Cambridge University Press.
- [5] Beldade, P., y Brakefield, P. M., 2002. *Nature Reviews Genetics*. **3**, 442. e-site at: www.bio.leidenuniv.nl/~eew/G3/s2.html
- [6] Boyajian, G., y Lutz, T. 1992. *Geology*, **20**, 983-986.
- [7] Brombrowski, N. 1961. *J. Agric. Eng. Res.*, **23**, 37.
- [8] Bruno, S. 1982. *Guía de Moluscos*, (Ed. Grijalbo, Madrid, España, primera edición).
- [9] Campbell, N. A., 1993. *Biology*, 3^{ra} edición. (Benjamin-Cummings Publishing, California).
- [10] Carroll, S. B., Grenier, J. K., y Weatherbee, S. D., 2001. *From DNA to Diversity: Molecular Genetics and the Evolution of Animal Design*, (Blackwell Scientific, Malden, Mass.); Guss, K. A., Nelson, C. E., Hudson, A., Kraus, M. E., y Carroll, S. B., 2001. *Science*, **292**, 1164.
- [11] Castrejón García, R., Sarmiento Galán, A., Castrejón Pita, J. R., y Castrejón Pita, A. A., 2003. *Fractals*, **11**(2), 155.
- [12] Castrejón Pita, A. A., Castrejón Pita, J. R., Sarmiento Galán. A., y Castrejón García, R., 2003. *Fractals*, **11**(2), 163.
- [13] Castrejón Pita, J. R., Castrejón Pita, A. A., Sarmiento Galán. A., y Castrejón García, R., 2003. *Chaos*, **13**(3), 836.
- [14] *Chaostin*, 2002. Código desarrollado por H. González Hernández y J. Austin. LIDETEA, Universidad La Salle, México.

- [15] Curtis, H., y Barnes, N. S., 1989. *Biology*, 5^{ta} edición. (Worth Publishers Inc., New York).
- [16] Danielson, T. J., Muzzio, F. J., y Ottino, J. M., 1991. *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 3128.
- [17] de la Maza Ramírez, R. 1991. *Mariposas Mexicanas*. (Fondo de Cultura Económica, México, D. F.).
- [18] DeVries. P. J. 1987. *The Butterflies of Costa Rica and their Natural History*, Vol. 1. (Princeton University Press, Princeton, N. J.)
- [19] Dong, W. G., Huang, X. Y. y Wo, Q. L. 2001. *J. Acoust. Soc. Am.*, **110**, 120-126.
- [20] Downer, J., 1988. *Supersense: Perception in the Animal World*, (Guild Publishing: London).
- [21] Hadingham, Evan, 1988. *Lines to the Mountain Gods: Nasca and the Mysteries of Perú*, (University of Oklahoma Press).
- [22] Hahn, H. K., Evertsz, J. G., Peitgen, H. O., y Fasel, J. H. D., 2003. *Fractals*, **11**(1), 53.
- [23] Hall, P. 1997. *Pearly or Chambered Nautilus*, Journal of The Marine Life Society of South Australia Inc., <http://www.mlssa.asn.au/>
- [24] Haskell, J. P., Ritchie, M. E. y Olf, H. 2002. *Nature*, **418**, 527.
- [25] Hausdorff, F., 1919. *Mathematische Annalen*. **79**, 157.
- [26] Hegger, R., Kantz, H. y Shreiber, T. 1999. *Chaos*. **9**, 413.
- [27] Hilborn, R. C. 1994. *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press, Oxford, UK.
- [28] Jones, A. R. 1977. *A review of drop size measurement. The Application of Techniques to Dense Fuel Sprays*, Vol. **3**, Progress in Energy and Combustion Sciences.
- [29] Kantz, H. 1994. *Phys. Lett. A.*, **185**, 77.

- [30] Kantz, H. y Shreiber, T. 2002. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [31] Kapan, D. D., 2001. *Nature*, **409**, 338.
- [32] Kemp, M. 2000. *Nature*, **404**, 546.
- [33] Kimball, J. W., 1978. *Biology*, 4th ed. (Addison-Wesley, Massachusetts).
- [34] Knill, D. C., Field, D., y Kersten, D., 1990. *J. Opt. Soc. Am. A* **7**(6), 1113.
- [35] Landman, N. H., Cochran, J. K., Chamberlain Jr., J. A. y Hirschberg, D. J. 1989. *Marine Biology*, **102**, 65.
- [36] Lauterborn, W. y Holzfuss, J. 1991. *Int. J. Bif. and Chaos*, **1**(1). 13-26.
- [37] Llorente-Bousquets, J. E., Oñate-Ocaña, L., Luis-Martinez, A., y Vargas-Fernández, I. 1999. *Papilionidae y Pieridae de México: distribución geográfica e ilustración*. (Universidad Nacional Autónoma de México y CONABIO, México D. F.).
- [38] McMillan, W. O., Monteiro, A., y Kapan, D. D., 2002. *Trends in Ecology and Evolution*, **17**(3), 125. www.acsu.buffalo.edu/monteiro/ancientwings/
- [39] Mallet, J., 1999. *Evolutionary Ecology*, **13** (7-8), 777.
- [40] Mandelbrot, B. B. 1977. *The Fractal Geometry of Nature*, (W. H. Freeman: New York).
- [41] Marstrand, J. M., 1954. *London Math. Soc.*, **3**, 257.
- [42] Mattila, P., 1975. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. A I Math., **1**, 227.
- [43] Morrison, T. 1988. *Pathways to the Gods*, (Academy, Chicago).
- [44] Opler, P. A., Pavulaan, H., y Stanford, R. E. (coords.), 1995. *Butterflies of North America*. (Jamestown, ND). Northern Prairie Wildlife Research Center: www.npwrc.usgs.gov/resource/distr/lepid/bflyusa/bflyusa.htm

- [45] Parker, J. y Haswell, W. A. 1940. *A Text-book of Zoology*, (Mac Millan and Co., London, 6^{ta} edición).
- [46] Prasad, R. R., y Sreenivasan, K. R., 1990. *Phys. Fluids A*, **2**(5), 792.
- [47] Presgraves, D. C., Balagopalan, L., Abmayr, S. M., y Orr, H. A., 2003. *Nature*, **423**, 715.
- [48] Reiche, M. 1968. *Mystery on the Desert*, (Eigenverlag, Stuttgart); *Geheimnis der Wüste*, (Offizin druk: Stuttgart).
- [49] Ritland, D. B., 1998. *The American Midland Naturalist*, **140**(1), 1.
- [50] Ritland, D. B. y Brower, L. P., 1991. *Nature*, **350**, 497.
- [51] Saunders, W. B. 1987. En *Nautilus, The Biology and Paleobiology of a Living Fossil*, W. B. Saunders y N. H. Landman, eds. (Plenum Press, New York).
- [52] Selby, S. M. 1967. *Standard Mathematical Tables*, (The Chemical Rubber Company, Cleveland, 15^{ta} edición).
- [53] Stix, H., Stix, M. y Tucker Abbott, R. 1968. *The Shell, Five Hundred Million Years of Inspired Design*, (H. N. Abrams, Inc., New York).
- [54] Taylor, R. P., Micolich, A. P. y Jonas, D. 1999. *Nature*, **399**, 422.
- [55] Taylor, R. 2001. *Nature*, **410**, 18.
- [56] Taylor, R. 2002. *Nature*, **415**, 961.
- [57] Taylor, R. P., Spehar, B., Wise, J. A., Clifford, C. W. G., Newell, B. R., and Martin, T. P. 2003. Por aparecer en: *Nonlinear dynamics in life sciences*.
- [58] Taylor, Richard P. 2002. *Scientific American*, **287**(6), 116.
- [59] *The New Encyclopaedia Britannica*, 1979. (Encyclopaedia Britannica Inc. 15^{ta} edición, Chicago).
- [60] Wen-Jei, Y. 1989. *Handbook of Flow Visualization*, Taylor & Francis Ed., Michigan.

- [61] West, G. B., Brown, J. H., Enquist, B. J., 1997. *Science*, **276**. 122.
- [62] Yazaki, T., Sugioka, S., Muzitani, F. y Mamada, H. 1989. *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 2515-2518.
- [63] Zhou, W. X. y Yu, Z. H. 2000. *Phys. Rev. E*, **63**, 016302.
- [64] Zmeskal, O., Nežadák, M. y Buchníček, M. 2003. *Chaos, Solitons and Fractals*, **17**(1), 113; Nežadák, M. y Zmeskal, O. 2001. *Harmonic and Fractal Image Analyzer*: <http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci>.

ANEXO

Determinación de la dimensión con el método de conteo de cajas

Se hicieron algunas pruebas para verificar que los resultados obtenidos, para la dimensión, eran aceptables. Estas pruebas fueron 3 básicamente. Se le aplicó el método a imágenes cuya figura es de dimensión conocida, como una recta y un rectángulo, con dimensión es 1 y 2 respectivamente, además se probó con figuras fractales y con algunas reproducidas en la tesis. Además, también se muestran los valores obtenidos con otro método, el de autocorrelación o llamado también de "masa".

Figura	Dimensión Referencia	de	Dimensión Conteo de Cajas	Dimensión por método de Autocorrelación
Recta	1		0.998 ± 0.0032	0.988 ± 0.0053
Rectángulo	2		2.021 ± 0.031	1.997 ± 0.0062
Curva de Koch	1.26		1.272 ± 0.0022	1.258 ± 0.0041
	1.585		1.588 ± 0.0048	1.576 ± 0.0075
<i>Danaus plexippus</i>			1.632 ± 0.0036	1.627 ± 0.0048
<i>Basilarchia archipus obsoleta</i>			1.634 ± 0.0051	1.631 ± 0.0066
<i>Basilarchia archipus hoffmani</i>			1.628 ± 0.0059	1.626 ± 0.0071
Mono (Nasca)			1.565 ± 0.0201	1.528 ± 0.0282

THE IMPRESSIVE COMPLEXITY IN THE *NAUTILUS POMPILIUS* SHELL

A. A. CASTREJÓN PITA and J. R. CASTREJÓN PITA
Centro de Investigación en Energía, UNAM
Ap. Postal 34, 62580 Temixco, Morelos, México

A. SARMIENTO GALÁN
Instituto de Matemáticas, UNAM
Av. Universidad s/n, 62200 Chamilpa, Morelos, México
ansar@matcuer.unam.mx

R. CASTREJÓN GARCÍA
Instituto de Investigaciones Eléctricas
Av. Reforma 113, 62490 Temixco, Morelos, México

Received June 27, 2002
Accepted October 2, 2002

Abstract

The complexity of the *Nautilus pompilius* shell is analyzed in terms of its fractal dimension and its equiangular spiral form. Our findings assert that the shell is fractal from its birth and that its growth is dictated by a self-similar criterion (we obtain the fractal dimension of the shell as a function of time). The variables that have been used for the analysis show an exponential dependence on the number of chambers/age of the cephalopod, a property inherited from its form.

Keywords: Self-Similarity; Fractality; Adaptation; Nature Dynamics.

1. INTRODUCTION

Fractal analysis is being applied with increasing frequency to living organisms, trying to explain some of the complex forms found in nature. An astonishing example reveals that *Ammonites* continuously

increased their complexity up to the point in which they became extinct.¹ It is our purpose to study in this paper the amazing complexity of a close relative of the *Ammonites*, the *Nautilus pompilius*.

This pelagic species is a native of the western Indopacific ocean (30° N latitude to 30° S latitude

and 90° to 185° W longitude²), and usually lives at a depth that varies from 50 to 480 meters (temperature ranges from 24 to 8°). The *Nautilus* reaches sexual maturity at least 15 years after hatching and then produces ten to 15 eggs per year (it is not known if the female breeds more than once), and it may live for up to 20 years.

The shell is mother-of-pearl lined and pressure resistant (it implodes at approximately 800 m); its hardness has been the basis of various ornamental handicrafts.³ The vulnerability due to their slow reproduction rate, and the fact that its exploitation has increased so much at present, make it a possible new addition to the large list of endangered species. But the most striking characteristic of this thin, two-layered, and spirally coiled shell is its internal subdivision in a series of successive chambers (phragmocone), starting from the very moment of hatching when there are already seven chambers present in the shell. As the cephalopod grows and requires more space, it creates a new chamber by sealing the space behind it with a calcareous septum and moves to live at the open, bigger end of the shell. The rate at which a new chamber is created varies, at the beginning it seems to take longer for the mollusc to seal the 8th chamber but later on, the process takes from 43 to 77 days per chamber⁴ and lasts up to the completion of approximately 39 sealed chambers⁵ plus the open space where the mollusc lives;⁶ these changes in the growth rate are easily understood in terms of the food availability and other environmental variables. The sealing of the chambers however, is not complete, there is a small duct in the center of each wall, called siphuncle, that allows the living fossil to keep control of the pressure inside every previous chamber and thus to regulate its buoyancy;^{7,8} the heyday of the nautilus is estimated to be around 500 million years ago.

A transversal cut of the shell (Fig. 1) shows a perplexing spiral geometry, not found in any other natural object; this is a black and white image where the borders have been prepared to facilitate the box-counting analysis. The hemishell is 96.1×106.2 mm and 32.2 mm wide; the number of chambers is 30. Most amazing is the fact that its growth appears to be self-similar, and thus for the shell to possess a fractal dimension. We now proceed to confirm that this is indeed so.

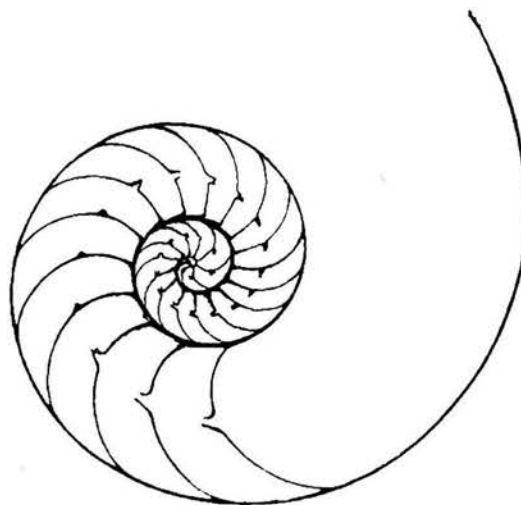


Fig. 1 Black and white image of a transversal cut of a *Nautilus pompilius* shell (see text).

2. METHOD

The digital image in Fig. 1 was obtained by placing half of the shell directly on a scanner bed; the cutting was performed going through half of the shell as accurately as possible. All measurements are performed on the digital images, in pixel units, and the conversion factor is given by the scanner resolution (72 pixels per inch). The borders of the edges in the hemishell were previously tinted to gain contrast and improve definition, and thus, making the contour threshold treatment unnecessary. It must be said that we are assuming a perfect symmetry of the shell with respect to this cut.

As usually done when applying the box-counting method, it is necessary to define a criterion for the size of the boxes, in particular for the maximum possible size of the grid. This last value is easily determined: the use of boxes bigger than the image size would produce constant values from there on and thus a breakdown of the method. The box-counting method is applied to the original image and the fractal dimension of the whole shell is obtained via a linear fit to the data.^{9,10}

The previous selection however, means that the maximum possible size of the grid will change when analyzing portions instead of the whole image; this is precisely what happens if, in order to test the observed self-similarity, we analyze the fractal

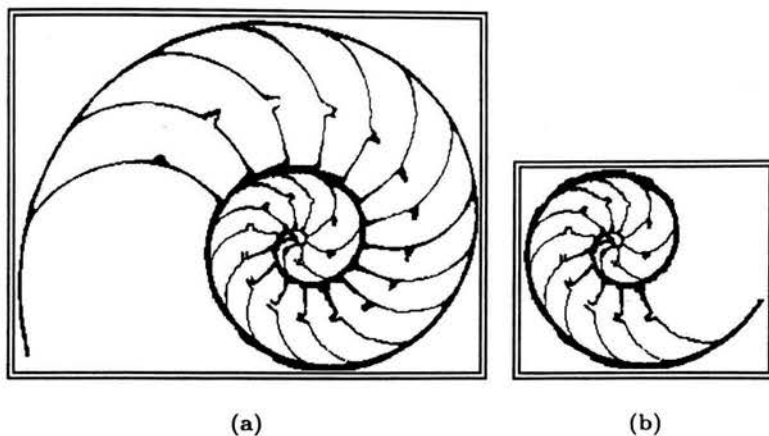


Fig. 2 Figure showing the images obtained by digitally altering the number of chambers in the shell: (a) 25 chambers and (b) 15 chambers.

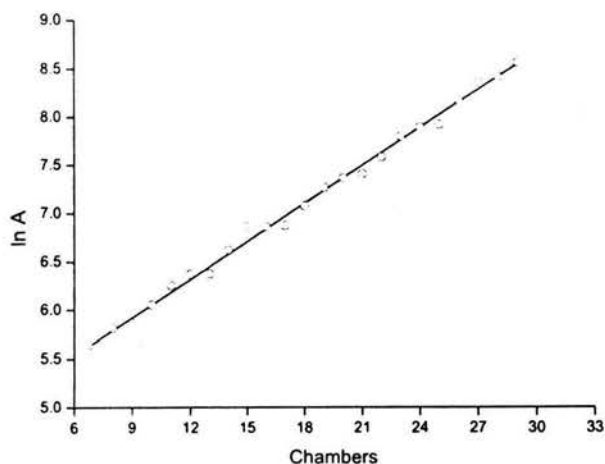


Fig. 3 Area (A) of the rectangle in which the *Nautilus* is inscribed as a function of the number of chambers in the shell.

dimension of smaller fragments of the image, i.e. if we check that its complex structure is the same regardless of the scale used to measure it. To accomplish this test, we proceeded as follows; once the box-counting method had been applied to the whole, bigger image, the last chamber was digitally eliminated from the initial image and the method re-applied to the new image after adjusting the maximum possible size to the new, smaller image size (Fig. 2). This procedure was repeated up to the point in which there were only the original seven chambers in the shell. The area of the circumscribed rectangle was calculated for each step and the results are shown in Fig. 3 in mm^2 .

From the above procedure, we can also obtain the value of the different intersections of the various straight lines with the vertical axis, i.e. the ordinates of each one of the lines obtained by the self-similar test. Since these lines correspond to a different chamber number each, the result is a function that can be used to predict the position and time of appearance of the new chamber (and thus corroborate the average time mentioned earlier).

Now, according to the well known box-counting method, the fractal dimension of an object, D , is defined as:⁹

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln 1/\epsilon} \quad (1)$$

where $N(\epsilon)$ is the number of boxes of a square grid of side-size ϵ required to cover the object in question. This definition comes from the scaling law $N(\epsilon) = C(1/\epsilon)^D$, in which our knowledge on integer-dimension objects is clearly expressed (one needs c/ϵ boxes of side-length ϵ for each one of the D dimensions of the object to be covered, where c accounts for the "length" in that dimension, and the ϵ -independent constant C is merely the product of the c 's). From this scaling law, a linear relation is obtained:

$$\ln N(\epsilon) = D \ln(1/\epsilon) + \ln C \quad (2)$$

and from it, definition (1) follows (the ϵ -independent, constant term becomes negligible as $\epsilon \rightarrow 0$). We then see that the ordinate of the linear relation (2) can be interpreted as the natural logarithm of the number of pixels of the original image

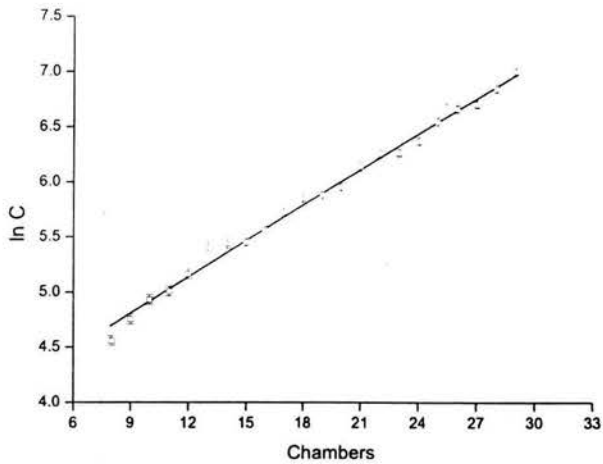


Fig. 4 Ordinates (C) of the lines obtained via the box-counting method as a function of the number of chambers.

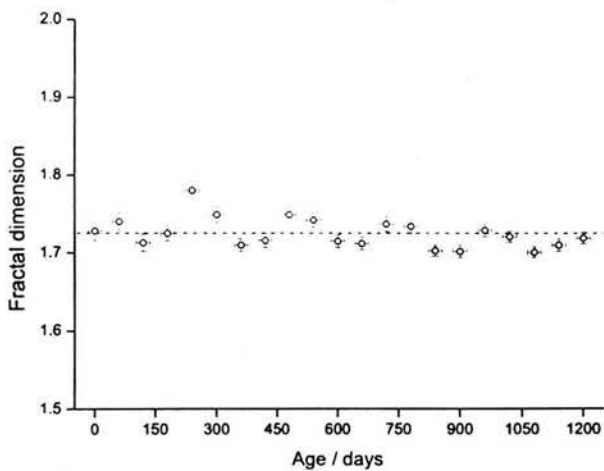


Fig. 5 Fractal dimension of the shell as a function of time, the age is measured in days after hatching, starting with the eighth chamber.

(in practice, the grid cannot be made smaller than a pixel when $\varepsilon \rightarrow 0$).

To obtain adequate images for the use of the whole relation (2) is not an easy task, most of the known fractal objects do not have well-defined features like borders or surfaces.¹¹ In this case however, we have all the images that were digitally generated to test the self-similarity of the previously tinted shell (enabling us to avoid any contour threshold analysis¹¹), and thus all the data to build the graph in Fig. 4, where we have plotted the image sizes (in mm^2) of the shell circumscribed by a rectangle up to the next sealed chamber (Fig. 2) which cor-

respond to the ordinates in the linear relation (2) (it is perhaps worth recalling that the box-counting method only takes into account the pixels associated to the contour of the shell when the size of the box is unity). We have also used an average value for the time required for the construction of a new chamber in order to obtain the fractal dimension of the shell as a function of time (Fig. 5), this average value is 60 ± 17 days per chamber.

Having corroborated the fractal dimension of the shell at various scales and the advantage of using the whole linear relation (2), we can now count the number of pixels (instead of boxes) inside each chamber; the results are plotted in: Fig. 6, where a linear relation is also clearly seen.

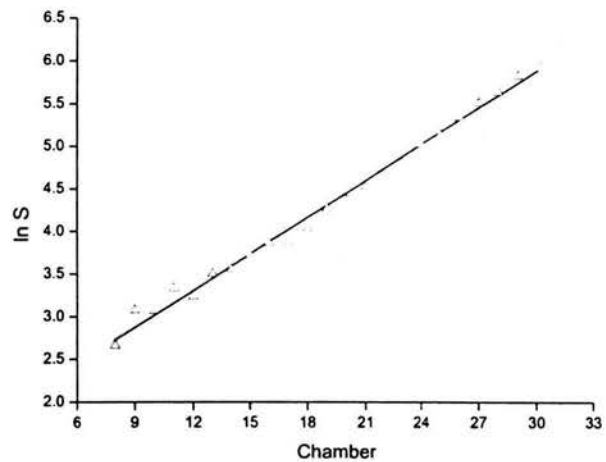


Fig. 6 Area of each chamber in pixels² (S) as a function of the number of chambers.

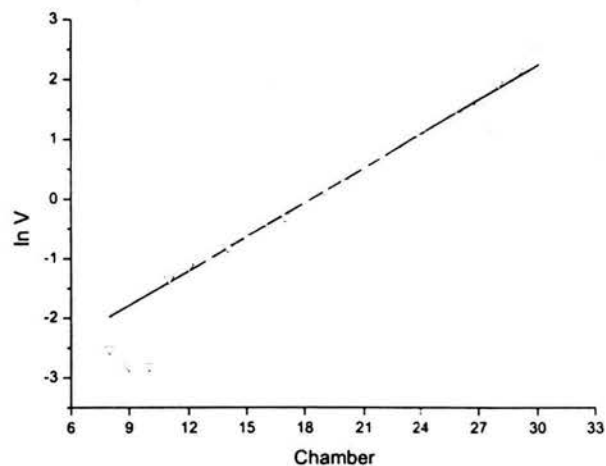


Fig. 7 Volume of each chamber in ml (V) as a function of the number of chambers.

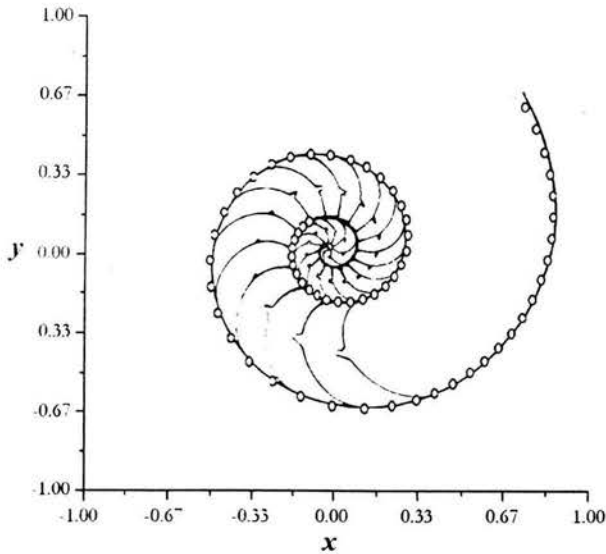


Fig. 8 Equiangular spiral (open circles) superimposed on the image of the *Nautilus* shell.

All these data enables us to predict the size of the new chambers and the time of their appearance, i.e. those chambers that would have formed in a living specimen. The easiest way is to measure the volume of each chamber and in order to achieve this, the hemishell was levelled on a Sartorius balance (5 mg precision) and each chamber was filled up with water by depositing one by one, 0.005 ml drops; the volume is then multiplied by two to account for the other half of the shell. The internal surface of the shell inhibits the formation of menisci and thus, the level of water inside each shell is a flat surface that rises uniformly. The results are shown in Fig. 7.

As a final check, we fitted an equiangular spiral to the shell.¹²

$$r = e^{\delta\theta} \quad (3)$$

where (r, θ) are the usual polar coordinates and δ is a parameter that can be determined by the quotient of the shell distance from the center in any direction and the same distance after a whole turn:

$$\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 2\pi\delta. \quad (4)$$

The value obtained from this quotient $\delta = (1 + \sqrt{5})/2$, is the well-known *golden ratio* and the resulting spiral is superimposed on the shell image and shown in Fig. 8: the spiral is represented by empty circles starting at the closing wall of the eighth chamber.

3. RESULTS AND PREDICTIONS

Applying the Intersection Theorem,¹¹ we find that the fractal (box-counting) dimension of the original *Nautilus* shell shown in Fig. 1 is 2.635 ± 0.006 , and the average of the self-similar fractal dimension of the shell (Fig. 5), obtained by the method exemplified in Fig. 2, is 2.730 ± 0.019 ; this is an average over the life of the particular *Nautilus* and clearly depends on the accuracy of the available data on the shell growth. The lower value for fractal dimension of the original shell with respect to the average, is due to the fact that the shell extension where the mollusc lives is included in the original image (Fig. 1).

The other variables used in the preceding analysis show an exponential dependence on the number of chambers or, equivalently, on the age of the cephalopod:

$$y = \alpha_i e^{\beta_i x} \quad (5)$$

where y is one of the properties described in Figs. 3, 4, 6 or 7, α_i is the exponential of the ordinate in the linear relation shown in figure i , β_i is the slope in the corresponding relation (Fig. i), and x is the number of chambers in the image under analysis (or equivalently, the age of the specimen). The relation obtained in Fig. 3 was subsequently used as the criterion for the box-counting interval. The results for the ordinates are: $\alpha_3 = 113.863 \pm 0.039 \text{ mm}^2$, $\alpha_4 = 46.016 \pm 0.039 \text{ mm}^2$, $\alpha_6 = 4.852 \pm 0.050 \text{ mm}^2$, and $\alpha_7 = 0.030 \pm 0.072 \text{ ml}$; for the slopes the values are: $\beta_3 = 0.132 \pm 0.002$, $\beta_4 = 0.109 \pm 0.002$, $\beta_6 = 0.143 \pm 0.003$, and $\beta_7 = 0.192 \pm 0.003$. The correlation factors for the linear relations in the above mentioned figures are: 0.996, 0.996, 0.992, and 0.997 (in this case the linear fit was performed from the 11th chamber onwards, see Fig. 7), respectively.

From our findings and within the shell growth accuracy, we can also predict the appearance of a new chamber, the 31st for the analyzed specimen, with a volume of $11.347 \pm 0.010 \text{ ml}$ or a transversal area of $415.71 \pm 0.005 \text{ mm}^2$ at 60 ± 17 days after the last one had been completed.

4. CONCLUSIONS

In the previous analysis, we have shown that the shell of the *Nautilus pompilius* possesses a fractal

dimension. that its value is 2.635 ± 0.006 (2.730 ± 0.019 on average). and that it does not depend on the number of chambers (or, equivalently, the age) used to calculate it. This establishes the self-similar structure of the shell at any scale/time, and how its growth follows the same self-similar criterion. Hence, we propose the measurement of the predicted appearance of the new chambers in living *Nautilus*, even if only in laboratory specimens. Recalling that the *Ammonites*, close relatives of the *Nautilus*. kept changing their structure and disappeared from the face of the earth, one could also conjecture that the preservation of the structure in the *Nautilus* meant an evolutive advantage for this species. This facet might help in the conservation of this complex living fossil.

ACKNOWLEDGMENTS

This work has been partially supported by DGAPA-UNAM (IN101100), CONACyT (32707-U), and UC-MEXUS.

REFERENCES

1. G. Boyajian and T. Lutz. *Geology* **20**, 983 (1992).
2. W. B. Saunders, in *Nautilus, The Biology and Paleobiology of a Living Fossil*. eds. W. B. Saunders and N. H. Landman (Plenum Press, New York, 1987).
3. H. Stix, M. Stix and R. Tucker Abbott, *The Shell, Five Hundred Million Years of Inspired Design* (H. N. Abrams, Inc., New York, 1968).
4. N. H. Landman, J. K. Cochran, J. A. Chamberlain Jr. and D. J. Hirschberg, *Marine Biology* **102**, 65 (1989).
5. *The New Encyclopaedia Britannica*, 15th Ed. (Encyclopaedia Britannica Inc., Chicago, 1979).
6. P. Hall, *Pearly or Chambered Nautilus*, 1997 Journal of The Marine Life Society of South Australia Inc., <http://www.mlssa.asn.au/>
7. S. Bruno, *Guía de Moluscos*, 1st Ed. (Grijalbo, Madrid, Spain, 1982).
8. J. Parker and W. A. Haswell, *A Textbook of Zoology*, 6th Ed. (MacMillan and Co., London, 1940).
9. K. T. Alligood, T. D. Sauer and J. A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems* (Springer Press, New York, 1996).
10. M. Nežadal and O. Zmeskal, *Harmonic and Fractal Image Analyzer*, webpage: <http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci>, 2001.
11. R. R. Prasad and K. R. Sreenivasan. *Phys. Fluids* **A2**(5), 792 (1990).
12. S. M. Selby, *Standard Mathematical Tables*, 15th Ed. (The Chemical Rubber Company, Cleveland, 1967).

Nasca lines: A mystery wrapped in an enigma

J. R. Castrejón-Pita, A. A. Castrejón-Pita, and A. Sarmiento-Galán^{a)}
Instituto de Matemáticas, UNAM, Ave. Universidad s/n, 62200 Chamilpa, Morelos, México

R. Castrejón-García
Instituto de Investigaciones Eléctricas, Ave. Reforma 113, 62490 Temixco, Morelos, México

(Received 5 March 2003; accepted 8 May 2003; published 7 July 2003)

We analyze the geometrical structure of the astonishing Nasca geoglyphs in terms of their fractal dimension with the idea of dating these manifestations of human cultural engagements in relation to one another. Our findings suggest that the first delineated images consist of straight, parallel lines and that having sophisticated their abilities, the Nasca artists moved on to the design of more complex structures. © 2003 American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.1587031]

Trying to gain knowledge from the diverse geometrical structure of the geoglyphs in the central Peruvian Andes, we have analyzed the biomorphic figures in terms of the dimension of each figure. A first finding shows that these glyphs have a noninteger (fractal) dimension and that its value allows a classification of the figures. This result and the reasonable hypothesis that the ability of the artists who created them increased with time, leads to a chronological ordering of the biomorphs that shows an interesting evolution from single straight lines to parallel connected lines and to curvilinear nonparallel drawings before designing whole plane trapezoids.

I. INTRODUCTION

The well-known Nasca geoglyphs in the central Andes of Perú (14°40' to 14°55' S latitude, 75°00' to 75°10' W longitude) have been one of the twentieth century rediscoveries that remain a mystery in many ways; our study of the lines that form these artistic figures shows that they may also be a riddle to modern mathematics. These geoglyphs were made by the pre-Inca inhabitants of the dry pampa by removing all the dark material (mainly stones) and revealing the clear granular substratum. Some indirect methods indicate that the geoglyphs were made before the year 600 (pottery shreds on the surfaces¹), 525±80 (radiocarbon of a wooden post found nearby²), or from 190 BC to 660 (organic material "varnish"³); but due to their constitution, it is not possible to apply the usual direct dating methods and therefore, one is forced to look for alternative ways to estimate their age. The Nasca region has been subjected to immense perturbations (ignorant tourism mainly) and some of the geoglyphs are terribly damaged; although fortunately there are some good photographs that were taken when the figures had just been rediscovered, presumably by the mathematician Reiche,² who donated her lifelong work to humankind.

Research in various and diverse fields has shown that there is a tendency for some natural systems that evolve with time to increase their complexity;⁴ animal physiology and

behavior,⁵ and human cultural manifestations not being the exception.^{6,7} Having observed that there are different degrees of simplicity in the Nasca figures, even for the subset of biomorphs with deca- and hectometric dimensions, we have tried to establish their relative ages by measuring their fractal dimension. From our present day perspective, we conclude that simpler figures would have to be older than more complex ones, in agreement with the assumption of a tendency to greater complexity as their creators perfected their activity in time.

II. METHOD

Before measuring the fractal dimension of the available figures: three birds, two whales, a dog, a monkey, a spider, a pair of hands, and a tree (some shown in Fig. 1), we applied a careful digital process that involved intensity filtering, contrast magnification, and background-noise elimination, that resulted in a significantly increased contour-definition of the photographic images; two other methods for processing the figures were also employed to confirm consistent results.

The determination of the fractal dimension for each figure was carried out by applying the widely used box-counting method.^{8,9} Briefly, the dimension of a black object over a white background or *vice versa*, and denoted by D , is defined as

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \quad (1)$$

where $N(\epsilon)$ is the number of boxes in a square grid of side-size ϵ required to cover the object in question. In our case, the side of the box was increased from one image pixel (0.32 mm) to the whole image size (72 dpi density resolution), and all images were previously scaled to a box 160 mm wide (the corresponding minimum height is 220 mm); this enabled us to avoid the loss of details when the small scales were analyzed. Figure 2 shows the fitting of two straight lines to the measurements obtained at different scales. As a uniform rule for avoiding the uncertainties due to upper and lower scale cut-offs, we discarded the three lowest and three highest points in each graph before performing the fitting; the linear correlation coefficients for the ten analyzed figures varied

^{a)}Electronic mail: ansar@matcuere.unam.mx

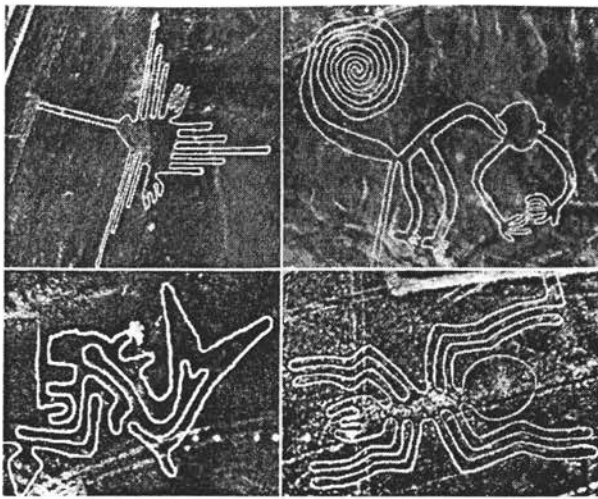


FIG. 1. Mosaic showing four of the analyzed biomorphs: humming bird, monkey, whale, and spider. The humming bird has a wingspan of 66 m, the actual size of the monkey is 135 m across, while the spider is 46 m long (Ref. 15).

from 0.995 to 0.999. Our results clearly show discernible differences in the values of the fractal dimension of distinct figures that imply an ordering of the biomorphs (Fig. 3). We will now use these differences and try to establish a chronological ordering of the figures in the following section.

III. RESULTS AND CONCLUSIONS

If one now adopts the point of view^{10,11} that complexity and richness increases steadily from dimension one to dimension two, and the hypothesis of an increasing complexity in drawing as time evolves is accepted, one then has to place lines before trapezoids in time, i.e., lines older than plane figures (Fig. 3). This result is in agreement with some recent archeological findings,^{12,13} and indicates that the Nasca art-

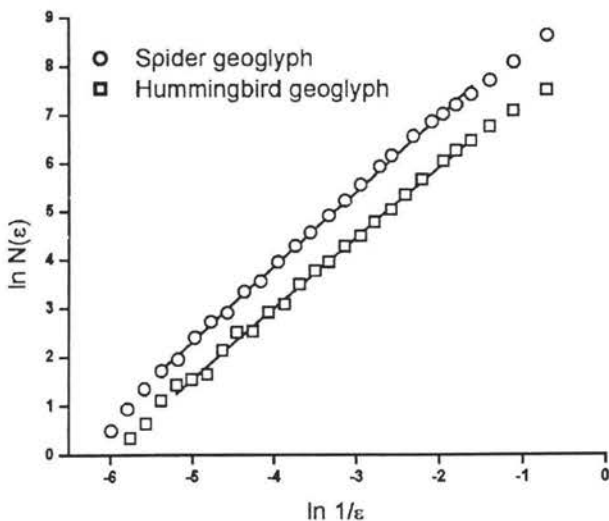


FIG. 2. Results of the box-counting method for two of the biomorphs in Fig. 1. The extension of the straight lines indicates the data used for the linear regression fittings.

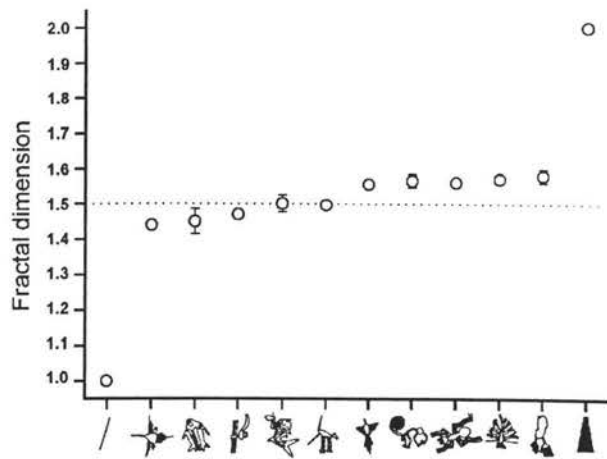


FIG. 3. Chronological order of the Nasca biomorphs according to their fractal dimension.

ists started their cultural activity with straight lines and, acquiring experience, moved on to the use of more complex geometries. The chronological order shown in Fig. 3 places the figures which essentially are combinations of straight, parallel lines before the ones that use mainly curves and nonparallel draws; the suggested relationship would then imply that the first figures are older and less sophisticated than the second set of figures, which look more complex in terms of the geometric elements just mentioned.

Although our study goes a different way when using the results—trying to establish a chronological ordering—it is similar to the analysis carried out for J. Pollock’s paintings which enabled the establishing of an initial link between the visual preference or aesthetic quality and the value of the fractal dimension of an object; it has also opened a new field of research on the physiological effects of visual perception (see Ref. 14 for a review).

We do not expect our premises to be accepted as unquestionable but await for them to be contested and challenged: all we can ascertain at present, is that the Nasca imagery thus reinflames the debate on the meaning of art, a problem which may well continue as an elusive question even for modern mathematical tools.

ACKNOWLEDGMENT

The authors sincerely acknowledge the invaluable suggestions made by R. P. Taylor.

¹H. Silverman, *Mem. Am. Philos. Soc.* **183**, 209 (1990).
²M. Reiche, *Mystery on the Desert* (Eigenverlag, Stuttgart, 1968); *Geheimnis der Wüste* (Offizin druck, Stuttgart, 1968).
³R. I. Dorn, *Am. Sci.* **79**, 542 (1990).
⁴G. Boyajian and G. T. Lutz, *Geology* **20**, 983 (1992).
⁵J. P. Haskell, M. E. Ritchie, and H. Olf, *Nature (London)* **418**, 527 (2002).
⁶R. P. Taylor, A. P. Micolich, and D. Jonas, *Nature (London)* **399**, 422 (1999).
⁷M. Kemp, *Nature (London)* **404**, 546 (2000).
⁸K. T. Alligood, T. D. Saucor, and J. A. Yorke, *Chaos: Introduction to Dynamical Systems* (Springer-Verlag, New York, 1996).

- ⁹O. Zmeskal, M. Nežadal, and M. Buchniecek, *Chaos, Solitons Fractals* **17**, 113 (2003); M. Nežadal and O. Zmeskal, *Harmonic and Fractal Image Analyzer*. <http://www.fch.vutbr.cz/lctures/imagesci> (2001).
- ¹⁰R. Taylor, *Nature* (London) **410**, 18 (2001).
- ¹¹R. Taylor, *Nature* (London) **415**, 961 (2002).
- ¹²A. Aveni, *Mem. Am. Philos. Soc.* **183**, 1 (1990); *Between the Lines* (University of Texas Press, Austin, 2000).
- ¹³T. Morrison, *Pathways to the Gods* (Academy, Chicago, 1988).
- ¹⁴R. P. Taylor, *Sci. Am.* **287**, 116 (2002).
- ¹⁵E. Haddingham, *Lines to the Mountain Gods: Nasca and the Mysteries of Perú* (University of Oklahoma Press, Norman, 1988).

THE FRACTAL DIMENSION OF AN OIL SPRAY

R. CASTREJÓN GARCÍA

*Instituto de Investigaciones Eléctricas
Av. Reforma 113, 62490 Cuernavaca, Morelos, México*

A. SARMIENTO GALÁN

*Instituto de Matemáticas, UNAM
Av. Universidad s/n, 62200 Chamilpa, Morelos, México
ansar@matcuer.unam.mx*

J. R. CASTREJÓN PITA and A. A. CASTREJÓN PITA

*Centro de Investigación en Energía, UNAM
Apdo. Postal 34, 62580 Temixco, Morelos, México*

Received September 12, 2002

Accepted October 2, 2002

Abstract

We study the fractal dimension of the contour of the liquid-gas interface in a spray. Our images include both the linking region and the break-up region, and are obtained with a high-resolution shadowgraph technique. This means that the images can then be subjected to an intensity filtering, equivalent to a threshold analysis, that enables the establishment of the fractal range.

Keywords: Fractality: Nonlinear Interactions: Interface Dynamics.

1. INTRODUCTION

The study of the geometric complexity in the break-up region of the liquid-gas interface in sprays represents a topic of special interest, due to the fact

that the physical process of atomization^a is intimately related to many commercial and technological applications.¹ The use of aerosol visualization

^aWe use here the common, albeit incorrect, sense for the word. According to its etymology, atom is an indivisible entity, and thus, to atomize really means to make indivisible, a meaning which is exactly the opposite to the intention when commonly used.

analysis includes fields as diverse as the application of pesticides and insecticides to crops, hand-held sprays for painting or drying, fuel injection in combustion engines, liquid fuel spraying in the power generation industry, spray coating of pharmaceutical products, nuclear core cooling and commercial filling processes, to mention just a few,^{2,3} and the studies are carried out with the efficient application of liquids, fuels or oils, in mind. In our study, the emphasis is set on the details of the relation between some properties of the fluid, like homogeneity or terminal speed, and the distance to the spray nozzle.

The use of shadowgraph images as a visualization tool is not new; their use in complexity studies however, has not been thoroughly exploited. Since our images are obtained with a high-resolution shadowgraph technique, they have proven specially pertinent for the implementation of the detailed analysis presented elsewhere for experiments in transport by fluids.⁴

2. EXPERIMENTAL SET-UP

Among the different optical techniques that are used for the study of particles, liquids or gases in motion, the shadowgraphy stands out as an inexpensive and powerful technique.⁵ Its main advantage is to highlight the relative refractive index of bodies, and thus to allow the visualization of objects that would be impossible to attain with the conventional photographic techniques. This is particularly useful when the objects to photograph are transparent instead of opaque, i.e. air and water, or transparent fluids with different refractive indexes.

In the shadowgraph technique, the object is illuminated from its back through an optical system designed specifically for such purposes. In this way, the light that strikes the photographic film is the one that passes through, without interacting with the object; the light that interacts with the object is absorbed or deviated aside due to a difference in its refractive index and does not influence the film. Figure 1 shows a schematic view of the shadowgraph system used for this work.

The atomization process occurs as a result of the interaction between the oil in its liquid state and the surrounding air, and involves several stages through which the oil becomes an aerosol. These stages can be clearly observed in any of the pictures. Initially, as soon as the oil is forced to leave the atomizer

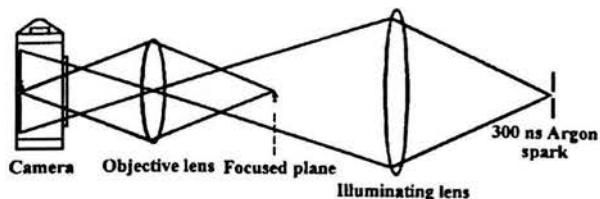


Fig. 1 Schematic view of the shadowgraph device used.

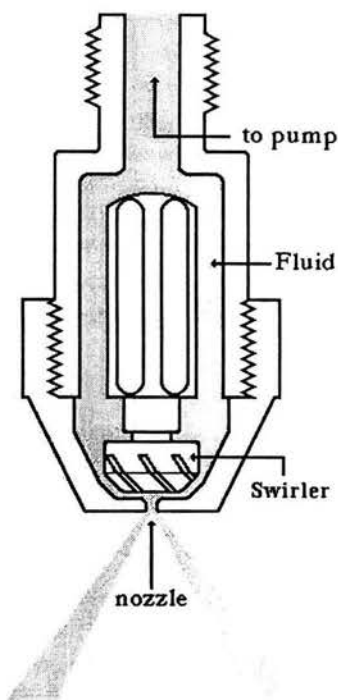


Fig. 2 Nozzle atomizer, a 1 mm ϕ orifice producing a 45° hollow cone.

nozzle with a velocity that has both axial and radial components, the fluid is turned into thin laminar waves that are gradually converted by the aerodynamic forces into thin ligaments. Downstream, these ligaments are broken up into a cloud of small droplets that continue to move with a terminal average velocity of several meters per second.

Our photographs correspond to the spray of transparent oil produced by a pressure swirl atomizer: the nozzle orifice is 1 mm in diameter and produces a hollow cone spray with an amplitude of 45° (Fig. 2). The atomization pressure, obtained with a common gear pump, is 4×10^5 Pa. The fluid is a blend of industrial oils designed to match the characteristics of diesel fuel which produces

an impressive and complex droplets formation spray.⁶

The measurement of the terminal speed was carried out with a technique preceding the Particle Image Velocimeter (PIV) based on a double photographic exposure. The break-up region is optically magnified (three times in our case) and the ISO 400 b&w professional film is imprinted by a double flash from an Argon jet stabilized spark gap which lasts for 300 ns and is shot again after 0.1 ms; this creates a double image whose characteristic and identifiable features are separated by a certain distance that, together with the time lapse between flashes and the optical magnification, allow for the determination of the droplets speed. The mean speed thus measured at the break-up region, 30 mm from the nozzle, has a value of 15.5 m/s. Although no magnification exists in the photographs used for this work, the type of film employed allows for a photographic magnification of up to 20 times without any

loss of sharpness. Finally, in order to analyze their structure, the photographs were digitalized with a resolution of 150 dpi in an eight-bit gray-scale comprising of 254 tonalities of gray.

3. MEASUREMENTS

We have used the well-known box-counting method to calculate the fractal dimension of the spray contour: a grid of size ε is superimposed on the black and white images and then, the boxes of this grid that intersect any part of the image are counted to provide the number N ; the process is repeated reducing the size of the grid and thus, the discrete function $N(\varepsilon)$ is generated. The initial size is usually a one-pixel grid⁷⁻⁹ and the number of pixels of size $1/\varepsilon$ is increased until the grid size reaches a certain previously determined value (this value is usually given by the smallest possible pixel size).

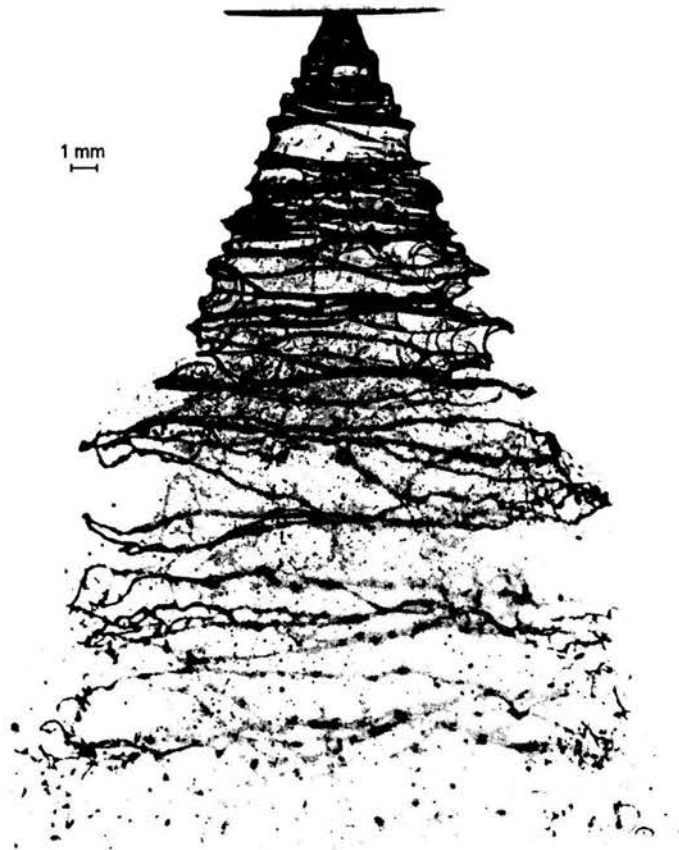


Fig. 3 Typical image obtained by the shadowgraph technique applied to an oil spray produced by the pressure swirl atomizer in Fig. 2.



Fig. 4 Another typical image of the oil spray.

Finally, one is interested in the limit

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

which defines the fractal dimension D . For the analysis of the contour of the oil aerosol, examples shown in Figs. 3 and 4, we varied the size of the grid from 1 to 1300 pixels (the longitude of the image in pixels) and 25 different images of the spray were taken under the same physical conditions; within the attainable accuracy, the corresponding results produce all the same value.

The box-counting method is designed for monochromatic images.^{8,10} and thus one has to be very careful when analyzing either color or varying intensity images. This is due to the fact that the features from the image whose intensity is below a certain value, called the threshold level, will be lost when transforming the image to a black and white one.⁴ In our case, this problem is represented by some parts of the image being less opaque than

others due to light extinction; some thin filaments are less opaque than their thicker similes. Even though every precaution was taken to adjust the depth of field to the size of the spray, some small contribution to this intensity problem may arise from a lack of perfect focusing. To avoid complications arising from this difficulty, our analysis was carried out by filtering each image at every gray tonality from the zeroth to the 254th level of the digitalized images, i.e. the first filter takes into account the black parts only, and then the intensity is diminished one digital step to incorporate the less opaque features of every image gradually. If this filtering process is not carried out, the simple transformation of the images to black and white ones produces the equivalent of filtering every image at half its maximum intensity value (Figs. 5 and 6). However, as shown in the following section, the filtering process just described reveals the rich fractal structure of the oil spray over a much wider range of intensity values or gray tonalities.



Fig. 5 Image showing the resulting contour of the spray in Fig. 3 when the filtering is done at half the maximum intensity value.

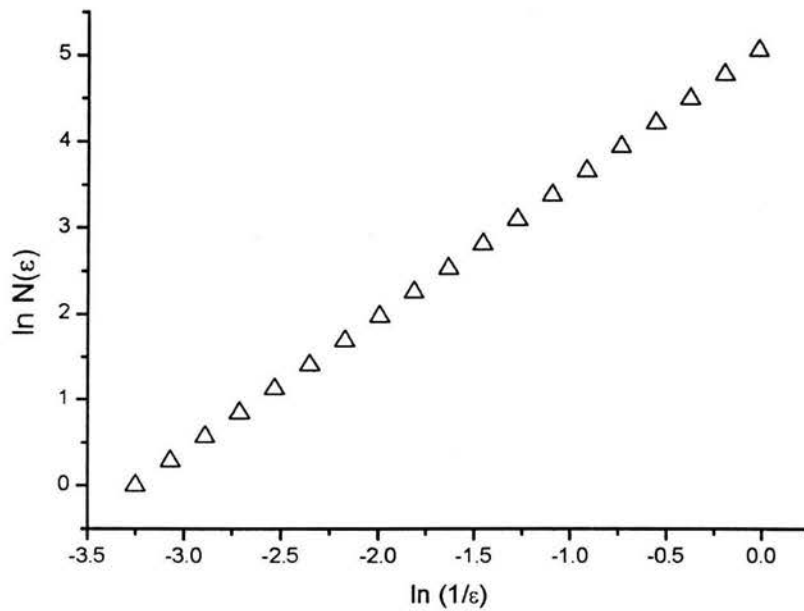


Fig. 6 Results from the box-counting method at half-intensity filtering.

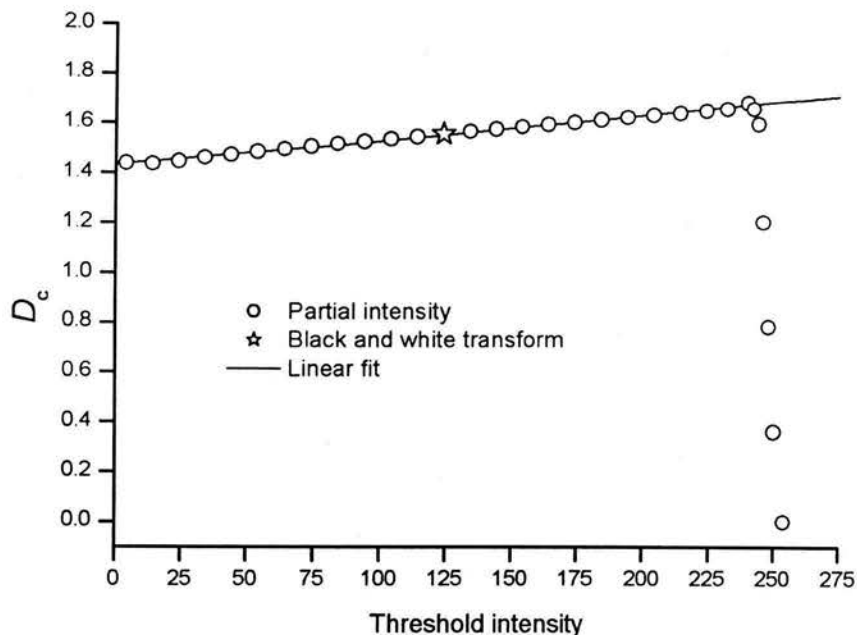


Fig. 7 Intensity threshold dependence of the fractal dimension.

4. RESULTS

Using the Intersection Theorem,⁴ we find that the fractal dimension of the contour of the oil spray when the images are only filtered at half their maximum intensity is 2.57 ± 0.03 with a linear correlation coefficient of 0.98; the result is illustrated in Fig. 6. The whole spectrum of the fractal dimension of the contour however, is shown in Fig. 7, where the diameter of the open circles indicates the uncertainty at each intensity value and corresponds to the standard deviation of the data in all the 25 analyzed photographs. To illustrate the fractal structure and the self-similarity of the contour at different intensities, the graph in Fig. 7 includes the fractal dimension value obtained from the filtering process starting at the level in which the image becomes a single black rectangle up to the level of a single white one. The graph displays the fractal structure for the whole digital intensity range: a small star indicates the already mentioned fractal dimension at half-intensity filtering (126th digital level). A linear fit with a correlation coefficient of 0.997 is also shown, the slope and ordinate are: $(9.969 \pm 0.154) \times 10^{-4}$ and 1.436 ± 0.002 , respectively. After the 249th digital level, the filtering leaves no tractable structure in the image; the gradual decay of the fractal dimension observed in Fig. 7, from the 249th to the

254th digital level of gray, is therefore due to a tenuous gray intensity present in the background of our photographs.

5. CONCLUSIONS

The shadowgraph technique allows us to obtain high-definition images of the whole oil spray, which are ideal for the analysis of the dynamics of the aerosol and even of its smallest details, since the image can be magnified several tenth times without noticeable loss of sharpness; a higher density of dots is equivalent to a smaller pixel size which enables the analysis of smaller regions in the image.

For complexity studies of similar systems through fractal dimension analysis¹⁰, it may be possible to use b&w photographs since the strong linear relation between intensity and threshold assures the existence of an interval (centered at the b&w intensity value) where the fractal dimension will remain linear in relation to the intensity. However, the analysis carried out for the contour intensity clearly indicates that, in this and similar cases, it is not suitable to directly digitalize the images in a purely black and white format, since then all the rich structural information contained in the gray tonalities is irremediably lost.

ACKNOWLEDGMENTS

This work has been partially supported by the IIE (México), and DGAPA-UNAM (project IN101100). AACP acknowledges financial support from DGEP-UNAM.

REFERENCES

1. W. X. Zhou and Z. H. Yu, *Phys. Rev.* **E63**, 016302 (2000).
2. R. C. Baker, *Flow Measurement Handbook* (Cambridge University Press, 2000).
3. Y. Wen-Jei, *Handbook of Flow Visualization* (Taylor & Francis Ed., Michigan, 1989).
4. R. R. Prasad and K. R. Sreenivasan, *Phys. Fluids*, **A2**(5), 792 (1990).
5. A. R. Jones, *A Review of Drop Size Measurement. The Application of Techniques to Dense Fuel Sprays*. Vol. 3 (Progress in Energy and Combustion Sciences, 1977).
6. N. Brombrowski, *J. Agric. Eng. Res.* **23**, 37 (1961).
7. J. R. Castrejón Pita, A. Sarmiento Galán and R. Castrejón García, *Fractals* **10**(4), 429 (2002).
8. M. Nežadal and O. Zmeskal, *Harmonic and Fractal Image Analyzer* (code) (2001), e-Archive: <http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci>
9. U. Shavit and N. Chigier, *Fractals*, **2**, 2 (1994).
10. K. T. Alligood, T. D. Sauer and J. A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems* (Springer Press, New York, 1996), pp. 172–180.