



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TEOREMAS DE SINGULARIDADES EN  
RELATIVIDAD GENERAL**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

**M A T E M A T I C O**

P R E S E N T A :

**PABLO CASTAÑEDA RIVERA**



**FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM**

DIRECTOR DE TESIS: DR. PABLO PADILLA LONGORIA



2004

**FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR**

---

---



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES Y ENSEÑANZA DE QUÍMICA  
MEXICO



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a Usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Teoremas de Singularidades en Relatividad General

realizado por Pablo Castañeda Rivera con número de cuenta 9650509-4

quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

Dr. Pablo Padilla Longoria

*Pablo Padilla L.*

Propietario

Dr. Alejandro Corichi Rodríguez Gil

*[Firma]*

Propietario

Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco

*[Firma]*

Suplente

Dra. Laura Elena Morales Guerrero

*[Firma]*

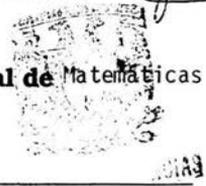
Suplente

M. en C. José Antonio González Cervera

*José Antonio González*

**Consejo Departamental de Matemáticas**

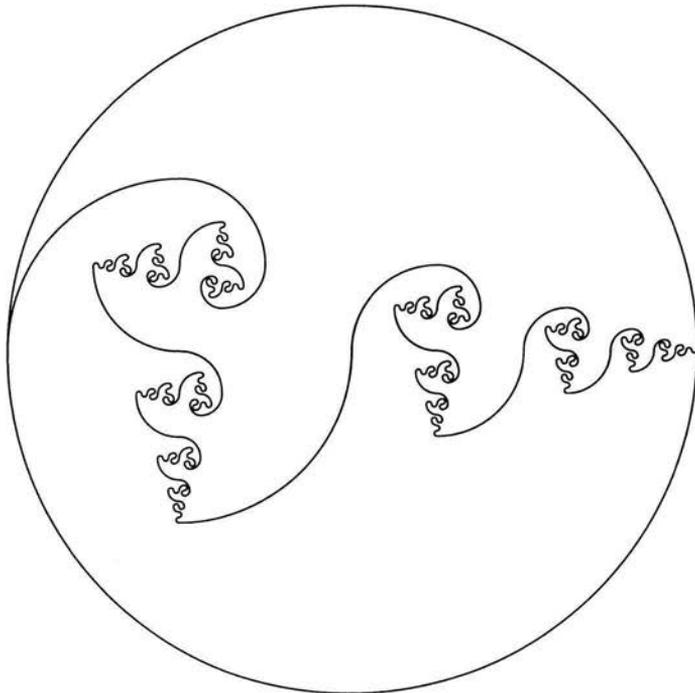
*JAG*



M. en C. José Antonio Gómez-Ortega

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

# Teoremas de Singularidades en Relatividad General



Pablo Castañeda Rivera

20 de enero de 2004

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Castañeda Rivera

Pablo

FECHA: 23. Enero 2004

FIRMA: 

# Contenido

<b>Prólogo y agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Orígenes relativos del universo</b>	<b>1</b>
1.1. Los primeros pasos . . . . .	2
1.1.1. El mundo antiguo . . . . .	2
1.1.2. La mesoamérica precolombina . . . . .	5
1.1.3. La China antigua . . . . .	9
1.1.4. El Japón ignoto . . . . .	11
1.2. De griegos y pitagóricos: Los inicios de la ciencia . . . . .	11
1.2.1. Los pitagóricos . . . . .	12
1.2.2. La herencia de Pitágoras . . . . .	14
1.2.3. Aristóteles y Platón: El dogma de la astronomía . . . . .	15
1.2.4. La Geometría de Ptolomeo . . . . .	18
1.3. La Tierra móvil: Un concepto antiguo . . . . .	20
1.3.1. De revolutionibus de Koppernigk . . . . .	22
1.3.2. Kepler, el copernicano . . . . .	24
1.3.3. Tycho Brahe: El astrónomo que perdió la nariz . . . . .	27
1.3.4. El mito tras la leyenda: Galileo Galilei . . . . .	29
1.4. Tesis, antítesis... Newton: Caminando en hombros de gigantes	30
1.4.1. De Galileo y Newton . . . . .	31

1.4.2.	La oscuridad de la noche . . . . .	34
1.4.3.	La corriente de Maxwell . . . . .	35
1.4.4.	Preludio: La Teoría de la Relatividad Especial . . . . .	36
1.5.	El gran salto hacia la física moderna . . . . .	39
1.5.1.	Einstein y sus revolucionarias ideas . . . . .	39
1.5.2.	Se generaliza la relatividad . . . . .	41
1.5.3.	<i>Gedankenexperimenten</i> . . . . .	43
1.5.4.	<i>Teoria versus praxis</i> . . . . .	46
1.6.	Los avances y destinos de la modernidad . . . . .	46
<b>2.</b>	<b>Las matemáticas detrás de todo el asunto</b>	<b>49</b>
2.1.	Nociones básicas . . . . .	49
2.2.	Álgebra tensorial . . . . .	51
2.3.	La métrica . . . . .	57
2.4.	Geodésicas y curvatura . . . . .	58
2.5.	Derivada covariante . . . . .	60
2.5.1.	Los símbolos de Christoffel $\Gamma_{ij}^k$ . . . . .	63
2.5.2.	Conexiones . . . . .	65
2.6.	Transporte paralelo . . . . .	68
2.6.1.	Geodésicas . . . . .	70
2.6.2.	Curvatura . . . . .	71
2.6.3.	Usos en métricas definidas . . . . .	73
2.7.	Transformación exponencial . . . . .	74
<b>3.</b>	<b>Ecuación de Onda: la hermana pequeña</b>	<b>77</b>
3.1.	Deducción variacional . . . . .	78
3.2.	Ecuación de onda homogénea . . . . .	82
3.3.	Unicidad de la solución en la ecuación de onda . . . . .	88
3.4.	Ecuación de onda cuasilineal . . . . .	90
3.5.	El principio de Huygens y las cáusticas . . . . .	95

---

<b>4. Las singularidades en contexto</b>	<b>103</b>
4.1. Las ecuaciones de campo . . . . .	104
4.2. La solución de Schwarzschild . . . . .	108
4.2.1. Las coordenadas de Eddington-Finkelstein . . . . .	112
4.3. Consecuencias de la solución de Schwarzschild . . . . .	113
4.3.1. El efecto Döppler relativista . . . . .	114
4.3.2. Precesión del perihelio de Mercurio . . . . .	115
4.3.3. La deflexión de los rayos de luz . . . . .	118
4.4. Colapso esférico . . . . .	123
4.5. Agujeros negros... estrellas oscuras . . . . .	126
4.6. Preliminares . . . . .	128
4.7. Teoremas de Singularidades . . . . .	132
4.8. Generalización del colapso esférico . . . . .	139
<b>5. Pensamientos aleatorios</b>	<b>147</b>
<b>A. Sutilezas matemáticas</b>	<b>151</b>
A.1. El lema fundamental del cálculo de las variaciones . . . . .	151
A.2. Solución general de las ecuaciones de tercer grado . . . . .	152
<b>B. El espacio de Minkowski</b>	<b>155</b>

A todos aquellos que alguna vez confiaron en mí,  
en especial a toda mi familia,  
desde la *legión extranjera*  
hasta cada uno de todos los *chapines*.

# Prólogo y agradecimientos

Sería bueno comenzar relatándote los sucesos que me llevaron a involucrarme en un tema tan fascinante y abrumadoramente extenso como resultan ser los *Teoremas de Singularidades en Relatividad General*.

Ya han pasado varios años desde que empecé a buscar un nuevo director de tesis; eran los días de la huelga y había perdido contacto con el anterior. Me acerqué a la gente del departamento de *Fenómenos no lineales y mecánica* (Fenomec) del IIMAS en busca de un tema que llamara mi atención; a decir verdad, creo que todos eran de gran interés. Sin embargo, no fue hasta que entré al cubículo de Pablo que supe que él me daría la respuesta.

Antes de explicar que pasó, déjame ambientarte en el mundo de los institutos, donde cada doctor, maestro o investigador se encuentra a cargo del “orden” de su propia oficina. Así, cada uno marca en el espacio de manera singular su travesía a lo largo del tiempo.

Cuando me encontré sentado frente al escritorio de Pablo sentí el *caos*, similar al que posiblemente mantendría yo mismo, fue el primer indicio. Se sentó y preguntó por mis aficiones en la ciencia: la geometría y las aplicaciones en la física, sonrió, fue la “segunda llamada”. Comenzó diciendo “Quiero proponerte un tema que me hubiera gustado desarrollar en la licenciatura...” Las palabras me envolvían llamando a escena; el telón se abrió despertándome de mi pesadilla ficticia: “La geometría es una ciencia olvidada”. Así es como se mezcló esta tesis sobre cosmología, geometría y las aplicaciones en la física moderna: la Teoría de la Relatividad General.

Abordamos en este trabajo, con nuestro papel de científicos-brujos, la enorme tarea que ha motivado al pensamiento humano desde sus inicios; intentar dar una respuesta válida a la forma, origen y funcionamiento de nuestro entorno galáctico, el Universo. Con ello daremos la vuelta atrás, mirando con incertidumbre a las estrellas y buscando un principio en el *Big bang*, con nuestros telescopios de luz alumbraremos oscuros rincones del espacio para introducirnos en la comprensión de los agujeros negros y dejare-

mos los instrumentos a la mano, para que exploradores motivados los tomen buscando más allá respuestas que complementen el conocimiento.

Quiero agradecer, como es claro, a tí Pablo, por ser un gran asesor y amigo. Por motivarme en los caminos de las más bellas ciencias, por creer y estimular la precepción geométrica, no solamente en mí si no en cada uno de tus estudiantes.

Al grupo tan completo de sinodales:

Al Dr. Alejandro Corichi por sus atinados comentarios respecto a esta tesis y por sus grandes sugerencias para mejorarla sustancialmente.

A mi *Hermano mayor*, Oscar Palmas. Gracias por toda tu ayuda a lo largo del desarrollo de esta tesis, por ser como un segundo asesor y entregarle tanto tiempo a tus "leídas a ojo de pájaro"; por ser mi amigo y mi hermano.

A la Dra. Laura Elena Morales. Gracias por todo, en verdad. Por todo el tiempo que le dedicaste a mi tesis. Espero no defraudarte y que este trabajo te agrade realmente.

Al *Gran hombre*. José Antonio, gracias por tu gran ayuda, tus consejos y el enorme apoyo que siempre me diste.

A los doctores Gustavo Cruz y Antonmaria Minzoni por sus grandes aportaciones para terminar los dos capítulos referentes a la física. También gracias, Tim, por la confianza que tuvo en que algún día comenzaría a despertar.

A todo el personal del IIMAS en general. Al Dr. Arturo Olvera, la Dra. Clara Garza y el Dr. Arturo Vargas, por permitirme ser su ayudante y formarme un poco en la docencia. A Ramiro y Ana por todo el apoyo que me han dado, las pláticas tan amenas. A Juanita que tanto nos consiente en la biblioteca.

A Paula, realmente, que tanto me has llenado de felicidad y *amorph* en estos meses, en los cuales, sin tu apoyo nunca hubiera terminado.

A todas y cada una de mis familias, sanguíneas y agregadas:

Marisa y Julio, gracias por hacernos sentir en esta tierra, en familia. Karate, por ser el primo más lejano y a la vez el que siempre está aquí.

María, Mercedes, Pilar y "la Abuela", gracias por todos esos momentos de felicidad, por el vino y todas las ocasiones juntos. Mari, en especial a tí, por el apoyo de siempre ser mi hermana.

Caro, Iñigo, Skaidra, Egle e Isabel, gracias por todas sus sonrisas y cariños.

A “La Carmela” y la abuelita Esther. Gracias por ser y estar siempre, por quererme tanto y hacerme sentir especial. Por todos sus cuidados, sin los cuales, no hubiera llegado hasta aquí.

Para la legión extranjera de las tierras frías: Sergio, Ginna, Samanta y Sebastián. Gracias por el calor que nos traen año tras año con sus sonrisas y su gran emoción. Por saber cómo a la distancia estar siempre presentes.

Gilberto, gracias por ser un gran padre, por esmerarte tanto. Ya *sabés* que te debo gran parte del orden, no solo de la tesis si no de la vida en general.

Regina, quiero darte gracias por guiarnos en el camino con mejores paisajes, donde aprendimos a ser felices.

A mis hermanos Alejandro y Rodrigo, por ser *ellos* y hacerme a *mí*, por ser las otras caras del dado y aunque no deberían, por quererme tanto.

A mis grandes amigos: Adhara, Isabel, Aline, Mayani y Sant8; por ser siempre los que me levantan el ánimo, por tan buenos momentos.

A todos mis maestros, por su dedicación diaria, por educarme un poco. En especial, a Martín Cañas por darme la pista de las matemáticas. A toda la gente que conocí en *Logos*: alumnos, compañeros de trabajo, Sam, la gente que tanto me apoyó, gracias. Perdón por no mencionarlos a cada uno, pero muchas gracias a todos mis compañeros de la carrera. También, a todos los que hayan cruzado una sonrisa.

# Introducción

Esta tesis, que tienes en tus manos, es un intento para acercar los teoremas de singularidades al público no especializado en el área. Queremos dar con ella un programa general del transcurso de las ideas en la cosmología, es decir, el estado de nuestro Universo, mostrando cómo las ideas son recurrentes; vienen, van y cambian en el tiempo con una gran rapidez, la comprobación que nos permite aplicar en nuestros descubrimientos, el método y la ciencia.

La tesis se desarrolló en cuatro capítulos centrales, unas pequeñas conclusiones y dos apéndices. La estructura tal vez no sea la más apropiada o inclusive no se asemeje a una tesis de licenciatura tradicional; se ha incluido mucho material que probablemente cualquier otro estudiante hubiera obviado. Sin embargo, lo he hecho pensando un poco en los posibles lectores.

El capítulo uno es demasiado extenso, probablemente, pero me parecía interesante incluir las cosmologías antiguas para observar algunas semejanzas no obvias con nuestras ideas actuales, así como también introducir el desarrollo histórico de la ciencia para la culminación de la herramienta tan grandiosa que nos ha permitido imaginar de otra forma el Cosmos, la Teoría de la Relatividad General. Este capítulo es además una de las pocas llamadas a que gente que no se interesa en los números comprenda la fascinación que nos producen.

El capítulo dos hubiera sido removido posiblemente por mucha gente. En palabras despectivas, es simplemente la herramienta matemática que emplearemos más adelante para desentrañar las ecuaciones de campo y comprender el origen de las singularidades. Empero, es una herramienta poco conocida, no es de acceso a todos los estudiantes de la carrera de matemáticas, y por ello sentía la necesidad de no sólo hacer referencia a ella sino dar una introducción aceptable para que esta tesis sea completa.

En el capítulo tres estudiamos algunas singularidades que se originan en fenómenos más cercanos a la experiencia cotidiana, con esto quiero decir, a escala humana. Con esta introducción a las singularidades será más sencillo

interpretar las singularidades que queremos discutir.

Así, finalmente en el capítulo cuatro entramos en la relatividad general, deduciendo las ecuaciones de las que haremos uso, algunos cambios de coordenadas que servirán mejor y finalmente enunciamos y probamos a dos de los teoremas de singularidades. Además, hacemos referencia al teorema de Hawking-Penrose y discutimos su significado.

En las conclusiones, capítulo cinco, tenemos poco que mencionar ya; todo lo hemos ido discutiendo a lo largo del texto. Sin embargo, me permito divagar un poco y mostrar lo que desde mi punto de vista la teoría no termina por explicar.

Por último, se encuentran dos apéndices. Uno referente a las matemáticas, donde se mencionan y prueban el lema fundamental del cálculo de variaciones y la solución general de las ecuaciones de tercer grado. El otro a la física, donde se explica brevemente el espacio-tiempo de Minkowski para entrar en noción de lo que es la causalidad y los diferentes tipos de vectores (nulos, tipo tiempo y tipo espacio). Éstos existen dado que era poco pertinente incluir los temas en medio del texto.

# Capítulo 1

## Orígenes relativos del universo

*Dios todavía no ha creado el mundo,  
sólo está imaginándolo, como entre sueños.  
Por eso el mundo es perfecto, pero confuso.*

MOVIMIENTO PERPETUO, AUGUSTO MONTERROSO.

El hombre, desde sus primeros tiempos, se ha preguntado el lugar del mundo y el suyo en el Universo. En la actualidad, la pregunta sigue siendo válida, aunque el enfoque ha cambiado; ahora la distinción entre el Universo y el mundo es casi tajante. En los orígenes de la civilización, esto no era así, eran lo mismo: el Cosmos. La cosmología, generalmente, consideraba a la Tierra como el centro del Universo y el mundo abarcaba desde las estrellas lejanas hasta los confines de cada inframundo.

Para el hombre antiguo, al igual que para nosotros, las preguntas ¿de dónde venimos?, ¿qué hacemos aquí?, ¿cuál es nuestro fin? –si hay alguno–, ¿hay algún ser supremo que nos haya puesto en este tiempo y lugar?, al igual que toda la colección de incógnitas imaginables fueron y son uno de los grandes ejes del pensamiento. La diferencia entre nuestro pasado y la actualidad es que con el surgimiento del pensamiento científico hubo un cambio de calidad: Hoy asumimos que podemos conocer el Cosmos y comprenderlo con mayor objetividad. ¡Vana ilusión!, al menos hasta ahora.

Por eso, en este capítulo intentamos dar una pincelada de cómo nuestra respuesta, al no poder ser completa, no es única. Su objetivo es presentar el surgimiento de la Teoría de la Relatividad General, por lo que, necesitaremos hablar de Galileo, Newton, Kepler, Copérnico e inclusive de Aristóteles. Sin embargo, nos interesa mostrar los cambios sustantivos ocurridos a lo largo del tiempo. Por eso comenzaremos pues, desde mucho atrás, desde el

comienzo de las primeras civilizaciones, mostrando algunas ideas de antaño y así seguiremos *vagabundeando* un poco en la historia. Concluiremos con los avances de la revolucionaria Teoría de la Relatividad General, mostrando al mismo tiempo algunos ejemplos de la utilidad y validez de la misma.

## 1.1. Los primeros pasos

El hombre ha visto el despertar del Sol en la mañana por el oriente y su despedida al atardecer por el oeste. Ha observado los cambios de clima, la llegada de las estaciones y con ellas, también, que los días y las noches no cambian drásticamente, sino paulatinamente. Muchos historiadores piensan que estas regularidades comenzaron a intrigarle al hombre antiguo, quien empezó a darles *explicaciones*, nombrando las fuerzas de la Naturaleza con apelativos para deidades plenas de poderes.

Estos entes superiores recibieron lugares en el Universo, en los cielos nocturnos, casi invariantes, donde encontraron la armonía de esos puntos luminosos, las estrellas. Con ellas, el hombre formó patrones relacionados con sus vivencias cotidianas, inventaron constelaciones como la de *Atenea* o la *Osa Mayor*, *Orión* e inclusive *Quetzalcóatl*. En muchos casos dotaron a estas imágenes con poderes tales que regirían sus vidas desde el nacimiento. Los babilonios y los egipcios, cerca de 3000 años a.C., creían que las constelaciones influían en las cosechas, la lluvia, la vida y la muerte.

Según la cultura misma y su entorno, los seres supremos cambiaban. A veces eran a semejanza de sus creadores, los hombres. En otros casos adoptaban formas fitomórficas, monstruosas o simplemente, la forma de los animales de la región. Pero, en algunos casos, el hombre ni siquiera se preocupó de sus características físicas. Sin embargo, le preocupó la forma del Universo, el lugar donde habitaban, intentó ser representada desde el momento en que se tuvo conciencia de la existencia de su espacio. Así, las ideas de una cultura a otra son tan diferentes que le dan a nuestros ojos una riqueza fascinante.

### 1.1.1. El mundo antiguo

El ingenio del hombre ha sido siempre la característica primordial de nuestra especie; así lo muestra desde la antigüedad más remota. Por ejemplo, en la concepción de los egipcios, babilonios y hebreos el mundo era como una gran ostra, rodeada enteramente por agua, donde el sólido firmamento impedía que la Tierra quedara sumergida. Con un marco tan rígido parecería

difícil tener cosmovisiones distintas, pero no era así.

La ostra de los babilonios era más como una esfera, donde la Tierra era solamente un monte hueco colocado en su centro, que reposaba en las aguas inferiores. El cielo se extendía como la bóveda que nos cubría de las aguas superiores, las cuales a veces se filtraban en forma de lluvia. Las aguas inferiores también brotaban al mundo en forma de manantiales y fuentes. Los astros, por su parte, avanzaban en lentas danzas a través de la bóveda, entrando por puertas ubicadas en el este, para salir de escena por las que se encontraban en el poniente.

Los egipcios tenían una concepción más rectangular. La Tierra es el piso, éste sostiene las cuatro patas de una vaca o a una mujer que se soporta en sus rodillas y codos, siendo en ambos casos esos cuatro puntos de apoyo, las cuatro esquinas de la Tierra. Dentro de aquel conjunto, las divinidades del Sol y la Luna surcaban el firmamento en barcos que entraban al mundo por puertas diversas, las estrellas eran las luces que pendían de la bóveda o estaban sujetas por distintos dioses, los planetas eran naves que recorrían los canales de la Vía Láctea, el gemelo celeste del Nilo.

Dentro de su cosmogonía, los egipcios mostraban afinidad por los ciclos. Decían que cerca del día quince de cada mes comenzaba la agonía de la Luna, la cual era devorada durante dos semanas por una descomunal marrana; ésta, en ocasiones lo lograba por completo, provocando así una luna nueva. El Sol a veces también era comido por una serpiente, provocando un eclipse solar.

Es interesante observar cómo el pensamiento humano, en sus distintas modalidades, puede llegar a ser a veces recurrente. Por ejemplo, en Sudamérica, los indios Bacairí tenían una creencia similar a la de los egipcios para las facetas lunares. Ellos creían que la disminución de la Luna se debía a que un lagarto o un armadillo la devoraban.

Las tragedias tenían características tanto de la realidad como de fuera de ella, dando así un sentimiento fatuo de tranquilidad. La regularidad de la vida de los astros —el escenario de las deidades— permitía determinar las estaciones y las lluvias, con ello, las siembras y las cosechas, en un movimiento cíclico perpetuo. De alguna manera, la vida y su devenir estaban prestablecidas.

Algunas culturas indígenas del sur de América respresentaban fenómenos naturales mediante leyendas o mitos. Se cuenta que *Tuminikar* y *Duid*, dos gemelos, son educados por los animales que mataron a su madre en el parto. Cuando los hermanos se enteran de la verdad, acaban con sus padres putativos y se dedican a buscar a su verdadero padre. En la búsqueda del progenitor, ambos mueren varias veces, siendo primero Duid, el cual es re-

sucitado por su hermano. La historia se repite y siempre uno de ellos regresa a su hermano caído al mundo de los vivos. Tuminikar es relacionado, entonces, con el Sol y sus muertes con los eclipses solares; Duid con la Luna y sus muertes con los eclipses lunares.

No obstante, empezaban a darse avances importantes en cuanto a la comprensión cuantitativa de la realidad. Aproximadamente en el año 4,000 a.C., los caldeos comenzaron el arte de la medición de los cielos y de los fenómenos astrológicos. Escudriñaron la noche, hicieron mapas de los movimientos de las estrellas y crearon tablas cronológicas de sus trayectorias grabadas en tablillas de arcilla con signos cuneiformes.

Los cuadros cronológicos exhiben regularidades, más allá de lo que día a día se podía observar. Establecen, por primera vez, una tradición astronómica, que se fomentó en ceremonias religiosas. Muestran, en contraparte, una ciencia exacta de mediciones precisas que, a diferencia del presente, representaba los lazos simbióticos entre los mitos y los datos; así, la mitología ayuda al observador a recabar la información, mientras ésta le dice cuáles fueron los orígenes de sus creencias. El conocimiento llegará después a Grecia y la ciencia surgirá en forma de Jano, el dios bifronte, guardián de las puertas y portones del firmamento por los cuales entran y salen los astros.

Los griegos fijaron la vista y sus mediciones en los planetas o astros *vagabundos*<sup>1</sup>, de los que sólo se conocían siete: el Sol, la Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Todos los demás puntos luminosos del cielo eran astros fijos que recorrían en conjunto la bóveda celeste, una vez por día, sin cambiar su formación general. Los vagabundos viajaban con ellos, pero, dotados de movimiento propio, se desplazaban dentro de una banda con un ángulo de 23° a ambos lados del Ecuador. Esta cinta se dividía en doce partes, representada cada una por una constelación, la llamaban el *Zodiaco* o calle de los amantes, a lo largo de la cual “vagabundeaban” los planetas. La astronomía y la astrología eran las caras complementarias de Jano: los movimientos de los planetas a lo largo del Zodiaco suministraban cifras para el observador cronológico, así como mensajes simbólicos del drama mitológico.

Cuando las observaciones cronológicas permitieron cierta predicción, el drama del escenario de las deidades fue también anticipable y con ello (supongo) comenzó a perder validez. Pero antes de ver esta ruptura, viajemos en el tiempo y el espacio a Mesoamérica.

---

<sup>1</sup>Precisamente el vocablo planeta en griego significa “errante” y ellos consideraban al Sol entre éstos.

### 1.1.2. La mesoamérica precolombina

Los pueblos mesoamericanos, que vivieron desde México hasta Nicaragua, disfrutaron de un maravilloso calendario que mezclaba el tiempo de los dioses con el de los hombres. Esta forma de medir e interpretar el tiempo se sabe anterior al año 1,200 a.C. El sistema que medía el tiempo más que un calendario, se funda en la combinación de, al menos, dos calendarios distintos, donde cada uno se integra a la cuenta de los días como un engrane de distinto tamaño.

El primero (*tzolkin* en maya, *tonalpohualli* en náhuatl) se componía de 260 días, formados por trece números y veinte glifos o símbolos de seres naturales o artificiales; era el calendario que regía las adivinaciones. El segundo (*ha'ab* en maya, *xiuhpohualli* en náhuatl) se formaba de 365 días, dispuestos en 18 meses de 20 días, a los que se le añaden 5 días inútiles, en los cuales no existe una deidad regente; era el calendario agrícola.



Figura 1.1: El calendario *xiuhpohualli*.

La combinación del ciclo agrícola y el adivinatorio se lograba con el movimiento diario de cada uno de los calendarios; así, cada día estaba regido por dos instancias de índole diferente. Para que volviera a darse la combinación de un día particular se necesitaban 18,980 días; es decir, 73 giros del ciclo adivinatorio o 52 del agrícola.

El calendario prehispánico –fundado en la numerología y los mitos– tiene una precisión mayor que el gregoriano que usamos actualmente. Los mayas marcaron el punto de partida de la cuenta del tiempo como el día 4-*ahau* (señor), en el tzolkin y el octavo día del mes *cumkú*, en el ha'ab, aproximadamente en el 3113 a.C. cuando ni los mayas ni el calendario existían.

La cosmovisión maya partía de que el orden calendárico nacía de la creación. El mundo del hombre se debía a que en el mundo de los dioses las aventuras divinas se encontraban en un estado de perpetua presencia. Allá no hay transcurso; en el ámbito de las deidades existen simultáneamente todas las posibilidades de existencia.

El tiempo de los mayas nació y tuvo nombre cuando no existía el cielo ni había despertado todavía la tierra.

Los días partieron del oriente y se echaron a caminar.

El primer día sacó de sus entrañas al cielo y a la tierra.

El segundo día hizo la escalera por donde baja la lluvia.

Obras del tercero fueron los ciclos de la mar y de la tierra y la muchedumbre de las cosas.

Por voluntad del cuarto día, la tierra y el cielo se inclinaron y pudieron encontrarse.

El quinto día decidió que todos trabajaran.

Del sexto salió la primera luz.

En los lugares donde no había nada, el séptimo día puso tierra.

El octavo clavó en la tierra sus manos y sus pies.

El noveno día creó los mundos inferiores. El décimo día destinó los mundos inferiores a quienes tienen veneno en el alma.

Dentro del sol, el undécimo día modeló la piedra y el árbol.

Fue el duodécimo quien hizo el viento. Sopló viento y lo llamó espíritu, porque no había muerte dentro de él.

El décimotercer día mojó la tierra y con barro amasó un cuerpo como el nuestro. [Galeano, 1982]

El espacio divino está dividido en dos grandes mitades y cada una de ellas en nueve y trece pisos. Una de las leyendas cuenta que *Itzam Na*, un monstruo marino, de género femenino, el dios primordial, formado por dos

dioses convertidos en serpiente (dragón de dos cabezas) fue cortado por la mitad. Con una de esas mitades hicieron los cielos superiores, con la otra, el inframundo. Como ambas partes tendían a juntarse, los dioses crearon cinco postes para separarlas: cuatro para las esquinas de la tierra y el quinto para el centro; el espacio generado por las columnas, es donde el tiempo transita, fue el mundo del hombre. Los cuatro pisos inmediatamente superiores, donde viajan las estrellas y los cuerpos celestes.

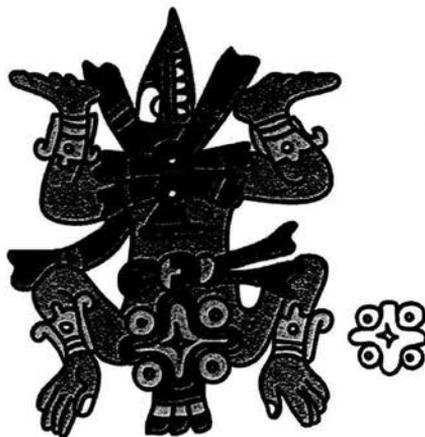


Figura 1.2: El dragón de dos cabezas, *Itzam Na*.

De los cuatro postes o árboles fluían las sustancias divinas, de corrientes cálidas las del cielo y frías las del inframundo. Con un movimiento levógiro se representaba la lucha en la que los contendientes pasaban el poder al otro para recibirlo nuevamente en cada ciclo. Del árbol del sur provenían los flujos divinos que llegaban al mundo, para luego ser relevados por los flujos divinos del árbol del este, después tocaba su turno al árbol del norte y finalmente al del este para volver a los flujos del sur, en un giro en espiral interminable.

Los mesoamericanos tenían fundamentalmente la misma cosmogonía, diferían generalmente sólo en los nombres y en alguna que otra actitud de los dioses. *Quetzalcóatl* era conocido entre los mayas como *Q'uj'Kumatz*, *Itzam Na* era *Cipáctli* para los nahuas. Creían que el mundo no era el primero, tampoco el hombre.

Es la época del quinto Sol. Los dioses lo han creado después de cuatro experimentos y destrucciones. Es este quinto Sol el del tiempo de los hombres de maíz, el Sol del movimiento.

Ésta es la historia que hoy conocemos del origen del Sol y la Luna:

Al primer sol, el sol del agua, se lo llevó la inundación. Todos los que en el mundo moraban se convirtieron en peces.

Al segundo sol lo devoraron los tigres.

Al tercero lo arrasó una lluvia de fuego, que incendió a las gentes.

Al cuarto sol, el sol del viento, lo borró la tempestad. Las personas se volvieron monos y por los montes se esparcieron.

Pensativos, los dioses se reunieron en Teotihuacán.

— ¿Quién se ocupará de traer el alba?

El Señor de los Caracoles, famoso por su fuerza y su hermosura, dio un paso adelante.

— Yo seré el sol —dijo.

— ¿Quién más?

Silencio.

Todos miraron al Pequeño Dios Sifilítico, el más feo y desgraciado de los dioses, y decidieron:

— Tú.

El Señor de los Caracoles y el Pequeño Dios Sifilítico se retiraron a los cerros que ahora son las pirámides del sol y de la luna.

Allí, en ayunas, meditaron.

Después los dioses juntaron leña, armaron una hoguera enorme y los llamaron.

El Pequeño Dios Sifilítico tomó impulso y se arrojó a las llamas. En seguida emergió incandescente, en el cielo.

El Señor de los Caracoles miró la fogata con el ceño fruncido. Avanzó, retrocedió, se detuvo. Dio un par de vueltas. Como no se decidía, tuvieron que empujarlo. Con mucha demora se alzó en el cielo. Los dioses, furiosos, lo abofetearon. Le golpearon la cara con un conejo, una y otra vez, hasta que le mataron el brillo. Así, el arrogante Señor de los Caracoles se convirtió en la luna. Las manchas en la luna son las cicatrices de aquel castigo.

Pero el sol resplandeciente no se movía. El gavián de obsidiana voló hacia el Pequeño Dios Sifilítico:

— ¿Por qué no andas?

Y respondió el despreciado, el purulento, el jorobado, el cojo:

— Porque quiero la sangre y el reino.

Este quinto sol, el sol del movimiento, alumbró a los toltecas, alumbró a los aztecas. Tiene garras y se alimenta de corazones humanos. [Galeano, 1982]

Los incas tenían una historia diferente para explicar los cráteres de la Luna, que para ellos era un joven; había tenido una noche de pasión con el Sol (considerado mujer), quien razgó su rostro en el éxtasis.

Estas similitudes no conocen fronteras. Tal es el caso del lejano oriente donde había leyendas similares a las del nuevo continente, si bien, en ocasiones, ciertos pueblos cercanos podían tener cosmologías radicalmente opuestas.

### 1.1.3. La China antigua

Similarmente a los mayas, los chinos antiguos creían que el cielo estaba separado de la Tierra por una, cuatro u ocho columnas. Además, pensaban que el cielo estaba dividido en nueve regiones celestiales representativas de cada región de la Tierra. No se sabe si estaban acomodadas horizontalmente o en posición vertical como las concebían los prehispánicos, sólo se sabe que éstas estaban separadas por estancias infestadas de fieras.

En la China antigua se creía que todo venía del caos; éste, en forma de huevo, se abrió para darle vida a *P'an-ku*, el primer hombre. La coraza del huevo formó la Tierra, el *yin*, y los elementos puros formaron el cielo, el *yang*.

Durante 18,000 años la Tierra creció por debajo diez pies por día y el cielo por arriba en la misma razón. *P'an-ku* crecía en la misma proporción diaria entre el *yin* y el *yang*, separándolos cada vez más por esta enorme cantidad de tiempo.

A su muerte, *P'an-ku* formó las regiones del mundo que nos rodea. Entre las grandes controversias de qué pedazo de su cuerpo originó qué cosa, se cree desde que sus ojos son el Sol y la Luna, que son el relámpago o simplemente, que el clima depende del humor del primer hombre. El historiador M. Soy-mié cree que podría decirse que su aliento fue el primer viento y las nubes; su voz, el relámpago y el trueno; su ojo izquierdo el Sol y el derecho la Luna; su cuerpo, los cuatro puntos cardinales y las cinco grandes montañas; los ríos y remolinos provienen de su sangre y de su humor; sus nervios y venas forman las capas de la Tierra; su piel y su carne se transformaron en los campos y valles; su cabello y cejas son las estrellas y planetas que nos circundan; sus dientes y huesos, los metales y las piedras; su semilla y su médula, las perlas y el jade; la lluvia y los pantanos se originaron de su sudor y, finalmente, los parásitos en él fueron los hombres.

Otra leyenda cuenta que el dragón rojo de cara humana, llamado *Li Long*, vivía en el desierto del noroeste y controlaba el clima; cuando soplabla era



invierno y su aliento provocaba el verano.

La estructura del mundo era muy importante para los chinos, de hecho, contaban con tres escuelas distintas para explicarla. De la tradición *siuan-ye* sólo se recuerda que el cielo no era sólido, sino que en él se movían libremente la Luna, el Sol y las estrellas.

Para la escuela *t'ien-kai* o *chou-pei*, el cielo es un tazón que gira en su eje desde el punto más alto, la estrella polar, llevando así con él las estrellas fijas pegadas a su superficie. Un poco en la manera que los griegos lo pensarían, la Tierra era una superficie plana o mejor aún, una pirámide cuadrangular troncada, rodeada por sus cuatro lados por los cuatro mares.

Por el otro lado, la teoría que tenía por nombre *hun-t'ien* era similar a la ostra de los babilonios, sólo que en este caso la representación es un huevo de gallina. Con el largo como eje vertical, las estrellas recorrían el cielo en el interior, mientras la Tierra flotaba plácidamente en el océano primigenio.

### 1.1.4. El Japón ignoto

La cosmología japonesa es compleja de definir. Por una parte, las leyendas y mitos se contradicen y tienen poca congruencia temporal. Por otra, los dioses al principio no tenían forma definida o no se conoce si la tenían; no es si no hasta el periodo del 700 al 800 d.C. cuando los chinos escriben la mitología japonesa y la dotan de consistencia. Es posible que el primer problema se deba también a que no hubo una preocupación por escribir los relatos; éstos eran transmitidos por tradición oral.

La leyenda cuenta la historia de dos hermanos, *Izanagi*, el complaciente, e *Izanami*, la complaciente. Los dos juntos van al caos, un fluido encapsulado en la nada; ahí el hermano con su lanza corta un pedazo de este líquido, el cual comienza a endurecerse formando una costra, la cual dará origen a las ocho islas del Japón. Después, para poblar el mundo recién creado, los hermanos procrean a diversos seres que debido a que *Izanami* rompe con el principio de que la mujer no puede hablar antes que el hombre, se convierten en malignos. Es por ello que los hermanos tienen que repetir el ritual para corregir el error, dando a luz seres del bien.

El relato continúa con la muerte de *Izanami* y la batalla entre hermanos. Ésta concluye cuando pactan el divorcio, así, *Izanagi* retorna del inframundo—donde se había refugiado en la contienda— y de manera semejante con la tradición de P'an-ku, genera al Sol y la Luna de sus ojos, el viento de su nariz y el resto de los elementos de la Tierra a partir de las regiones de su cuerpo.

Hasta aquí, la cosmología antigua está dominada por la religión y el pensamiento mágico. No obstante, se inicia ya el proceso que llevará a una creciente cuantificación del mundo observable y a la consolidación del pensamiento científico. El punto culminante de dicho proceso tendrá como epicentro a la Grecia clásica.

## 1.2. De griegos y pitagóricos: Los inicios de la ciencia

Con el despertar de Grecia, Occidente hereda la cosmología babilónica y egipcia. La ostra adquiere en estos días un colorido mayor. Homero concibe a la Tierra como un gran disco rodeado por el oceano; otros lo contradecían con cambios radicales o sutiles.

Comienza el siglo VI a.C. con una revolución del pensamiento; es la época de Buda, Confucio, Lao-Tsé y los jónicos con Pitágoras. “A través del planeta parecía soplar, desde China hasta Samos, un viento primaveral que despertaba la conciencia de los hombres” [Koestler, 1981]. A principios de este siglo, la filosofía jónica y su escuela comienzan a surgir y con ellas, el pensamiento racional, con base en el mundo de los sueños mitológicos.

Tales de Mileto trae con él la geometría a Grecia y así predice un eclipse de Sol. Piensa, como Homero, que el mundo es un disco. Cree también que absolutamente todo proviene del agua; la vida, por ejemplo, así como el aire que resulta de la evaporación de aquella.

Con Anaximandro la cosmología cambia radicalmente. El Sol deja de ser la carroza de Helios para inscribir su movimiento en un complicado sistema dinámico, un reloj astral con reglas que explican cómo se comportan los astros y las estrellas. Anaximandro cree que el Universo es infinito y que todo en él es la manifestación de una materia desconocida, la cual sólo tiene la propiedad de ser eterna. El mundo que habita no es el primero ni el último; todo volverá algún día a esta substancia primigenia y un nuevo universo se originará.

Para Anaximandro, la Tierra es un disco –Homero–, el cual flota inerte y equilibrado en el centro de un cilindro. Este último tiene en su interior una serie de esferas concéntricas, las cuales son los astros, con sus matices particulares. El Sol es un agujero en una de dichas esferas, la cual permite, cuando gira alrededor de la Tierra, ver el fuego que se encuentra detrás de la esfera. La Luna tiene una representación similar y las estrellas son pequeños hoyos en una esfera negra, los cuales permiten ver la luz exterior.

En esta época cada filósofo tiene su propia concepción del mundo. A diferencia de Tales y Anaximandro, Jenofantes de Colofón piensa que hay un Sol por día y que éste se crea a partir de la Tierra, como todo. La Luna es una nube condensada que se va disolviendo poco a poco y que del mismo modo, se regenera. Todo es un caos de ideas, ningún filósofo tiene realmente muchos discípulos, pero sí muchas ideas. Llega entonces Pitágoras de Samos, uno de los grandes personajes de la historia y a su alrededor habrá un creciente número de seguidores.

### 1.2.1. Los pitagóricos

La Fraternidad Pitagórica fue la fundadora de una nueva filosofía religiosa y de la ciencia misma; era guiada por el *Maestro*. La comunión de ideas a

su interior era tal que se duda de cuáles de sus desarrollos eran en verdad originales de Pitágoras, ya sea en detalles o por completo; de lo que no cabe duda es que todos los elementos básicos fueron obra de una sola mente.

Pitágoras es uno de los pocos personajes de la historia que tiene un recorrido tan asombroso. Se cuenta que en Samos fue educado por grandes maestros de distintas corrientes, desde los místicos hasta los ateos. Parece ser que Polícrates, el tirano ilustrado que gobernaba la isla, el cual promovía el comercio, la piratería y la ingeniería, así como las bellas artes y el pensamiento humano, tomó tal apego al maestro que en varias ocasiones le encargó misiones diplomáticas, por las cuales Pitágoras tuvo la oportunidad de viajar por el mundo y enriquecer sus conocimientos.

La fama que tenía el filósofo y científico era inmensa. Cerca del año 530 a.C., decidió establecerse en Crotona, con la suerte de que la Fraternidad Pitagórica que fundó pronto gobernó la ciudad, logrando de esta forma una supremacía en la Magna Grecia.

Los pitagóricos saltaron del mundo sensible a la filosofía y las matemáticas, para caer en una nueva descripción unificadora del Universo. Creían que absolutamente todo estaba conectado: la religión y la ciencia, la música y las matemáticas, la medicina y la cosmología, el cuerpo, la mente y el espíritu. De esta forma, la esencia y el poder se unificaban en una luminosa e inspiradora síntesis; en esta filosofía, el todo se encontraba entretejido en una especie de superficie homogénea con la apariencia de una esfera.

Con el descubrimiento o creación de los tonos musicales, los pitagóricos encontraron la mejor manera de acercarse y penetrar en el conocimiento. Las escalas se deben a simples proporciones numéricas; según Arthur Koestler, fue "...el primer paso que se dio hacia la matematización de la experiencia humana y, por lo tanto, el conocimiento de la ciencia".

Lo más importante de Pitágoras y de la fraternidad es la herencia que nos han dejado en Occidente. El método deductivo que se emplea desde las escuelas primarias, el inicio en el uso de palabras representativas como armonía o filosofía en sí mismas son parte de esta herencia. La creencia antigua de que todo son figuras geométricas, que éstas pueden ser representadas con números y que por lo tanto, las matemáticas deben describir el mundo son algunas de las ideas más utilizadas de los Pitagóricos. Al contemplar que los números nos dan relaciones maravillosas, entonces, ¿por qué no creer que pronto todos los secretos del Universo serían revelados a través de estas formas numéricas?

En esta armonía maravillosa, Pitágoras y su fraternidad mezclaban la creencia en los números y la geometría, la música y el Universo para ponderar

un nuevo modelo del mundo en el que los dioses geómetras y músicos habían formado un gigantesco sistema que, desde la Tierra hasta las estrellas fijas, resonaba en la quietud de la noche conforme a la escala pitagórica.<sup>2</sup>

Ahora la Tierra ha perdido su forma de disco rodeado de agua y la ostra ha tomado dimensiones astronómicas. El mundo es redondo y flota inerte en el centro, mientras que Luna, Mercurio, Venus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno y las estrellas fijas danzan rítmicamente en esferas concéntricas formando tonos, semitonos y terceras menores.

La explicación del mundo sigue basándose en la observación, pero ahora la fraternidad involucra un nuevo método: la contemplación lleva al hombre a filosofar y así, comparando los alrededores, las formas y las matemáticas llegamos a la mejor explicación. Esta es la herencia, pues, que tiene todo Occidente, la cual, a lo largo de los siglos nos llevará a conformar nuestra cosmología actual.

### 1.2.2. La herencia de Pitágoras

A la muerte del maestro, algunos de los alumnos tomaron nuevos rumbos, entre ellos Filolao. Este filósofo dio un vuelco, no sólo a la ideología, si no también al mismo modelo heliocéntrico. El centro del Universo lo caracterizaba la *Torre de Zeus*, un fuego central que no tenía nada que ver con el Sol; ésta yacía inerte en el espacio, mientras la Tierra giraba alrededor de ella, siempre mostrando su cara oculta al fuego, lo cual explicaba la repetición diaria de los movimientos del Cosmos y el por qué las estrellas fijas obtienen esta connotación. La Luna, los planetas y el mismo Sol giraban en torno a la torre, que la desplazaba un poco más allá del centro de nuestro sistema.

Este modelo revolucionario cambió constantemente a lo largo de los años. Al principio se creyó que no era posible que el Universo fuera tan irregular y de esta manera inventaron una *Antitierra* que giraba como antípoda de la original, con lo cual se logró un equilibrio. Poco después los mismos pitagóricos decidieron que la Torre de Zeus, con el fuego central, estaba realmente en el centro de la Tierra, la cual ya tiene para entonces forma esférica. Así, la Antitierra empieza a perder sentido, aunque lo retoma cuando la *vox populi* comienza a relacionarla con la Luna.

Por su parte, Heráclides de Ponto construye un modelo más similar al actual, teniendo a la Tierra fuera del centro del Universo. Olvidándose del fuego central y el concepto de la Antitierra, retoma a la Tierra como el

---

<sup>2</sup>Algunos autores creen que ésta es: si, do, re bemol, fa, sol, la bemol, sol.

centro absoluto; la Luna es el cuerpo celeste inmediato que gira a razón de poco más de una vuelta en un día, después, el Sol gira un poco más lento, dotándonos de un día y una noche en cada uno de sus ciclos. Curiosamente, ahora Venus y Mercurio dejan estos giros concéntricos para dar vueltas en torno al Sol. Después Marte, Jupiter, Saturno y las estrellas fijas rodean a la Tierra con sus propios movimientos. Sin embargo, nuestro suelo no es inerte, éste también gira lentamente con un ángulo distinto al de los caminantes de los cielos nocturnos y de los diurnos. Herodoto, ya en esos tiempos, relata el cuento de lugares alejados de Grecia donde existen pueblos que duermen seis meses en la ausencia de luz.

En la otra mano de la herencia clásica tenemos a Aristarco de Samos, pitagórico del mismo pueblo que el maestro. Él supone que el Sol está en el centro, que las estrellas fijas son inmóviles y que la Tierra gira en torno a nuestro astro en una órbita oblicua. Además, rota en su propio eje permitiendo ver en el movimiento el cielo estrellado.

Pese a esta herencia, algunos de los discípulos no dejan nuevos adeptos y con ellos sus teorías terminan. Así es la historia de Aristarco y de alguna forma la de los demás pitagóricos hasta que Platón y Aristóteles llegan al juego. Estos dos nuevos filósofos, con sus adelantos y atrasos, nos dejarán una tradición en Occidente que será difícil de olvidar.

### 1.2.3. Aristóteles y Platón: El dogma de la astronomía

Posiblemente Platón y Aristóteles echaron un sortilegio maligno sobre la astronomía que duró casi dos milenios. Platón se desgastaba en su afán de entender el Universo; por ello, tal vez, llegó a la conclusión de que el cuerpo perfecto era la esfera y que el movimiento idóneo era la rotación. Describió entonces el mundo en términos de esferas lisas y semejantes en toda dirección: la Tierra al centro y todas las demás esferas rotando a velocidades constantes a su alrededor, daban el movimiento planetario y estelar. El esbozo platónico fue llevado por el mismo Aristóteles a la condición de dogma astronómico, en la idea de que el movimiento circular es el movimiento perfecto.

La tarea de tratar de hacer que las tortuosas e irregulares trayectorias que muestran los cuerpos celestes encajen en un sistema de esferas no fue un trabajo fácil. No sólo consumió mucho tiempo de las mentes de grandes científicos de la época, sino también de sus seguidores, durante casi dos mil años, intentando sin éxito modelar todo el movimiento del Universo.

Tendremos que remontarnos mucho en el tiempo y volver otra vez a Platón para recoger la pista de alguna otra concepción particular posterior. Por ahora tengamos presente sólo esta clave esencial de la cosmología platónica: el terror al cambio, el desprecio y la aversión por los conceptos de evolución y mutabilidad. Este rasgo esencial reverberará a través de toda la Edad Media, junto con el comitante anhelo de un mundo de perfección eterna, inmutable. [Koestler, 1981]

Eudoxo, discípulo de Platón, realizó el primer intento. Fue superado tiempo después por su propio alumno, Calipo. La idea del primero fue dejar de pensar que cada esfera gobernaba el movimiento biunívocamente de un único astro, ésto se lograba con la combinación de varias esferas que ubicaban sus centros en las órbitas de las esferas concéntricas. Así, Eudoxo logró aproximar de mejor manera los retrasos y avances que sorprendentemente hacían los planetas. Este modelo ingenioso necesitaba de un juego de tres esferas para describir el movimiento del Sol y otro idéntico para el de la Luna. Para describir el movimiento de los otros planetas era necesario un juego con cuatro esferas cada uno; finalmente, el modesto sistema de estrellas fijas requería únicamente de una. El modelo completo constaba de 27 esferas que se movían individualmente; Calipo lo perfeccionó, haciendo uso de un total de 34 esferas.

Sin embargo, Aristóteles no estuvo de acuerdo con estos modelos matemáticos, añadiendo 21 esferas al modelo establecido. En la impresionante maquinaria, las 34 esferas operantes eran coordinadas por estas 21 neutralizadoras. Este monstruo no logró, sin embargo, progreso alguno, solamente complicaciones en los cálculos. En este modelo, la Tierra al centro tenía a la Luna girando en torno a ella; después aparecía el Sol y el resto de los astros; más allá el primer motor del Universo: Dios. La Tierra era entonces lo más lejano al ser supremo, junto con la esfera sublunar; nos encontrábamos, pues, en lo más bajo, el lugar de las mutaciones y los cambios, más allá de la Luna el mundo era perfecto y regulado, pues estaba cerca del Creador.

Además, en estos modelos existían errores más graves. Aunque explicaban el fenómeno de los paseos de los vagabundos por la *calzada de los enamorados*, no daban información alguna de por qué se daban cambios tan aparentes en los tamaños y luminosidades de Venus y Marte, por ejemplo. Tampoco indicaba si un eclipse solar sería total o anular. Ésto lo sabían aún Eudoxo y Aristóteles, pero la huella platónica no les dejaba discurrir en contra de tal dogma.

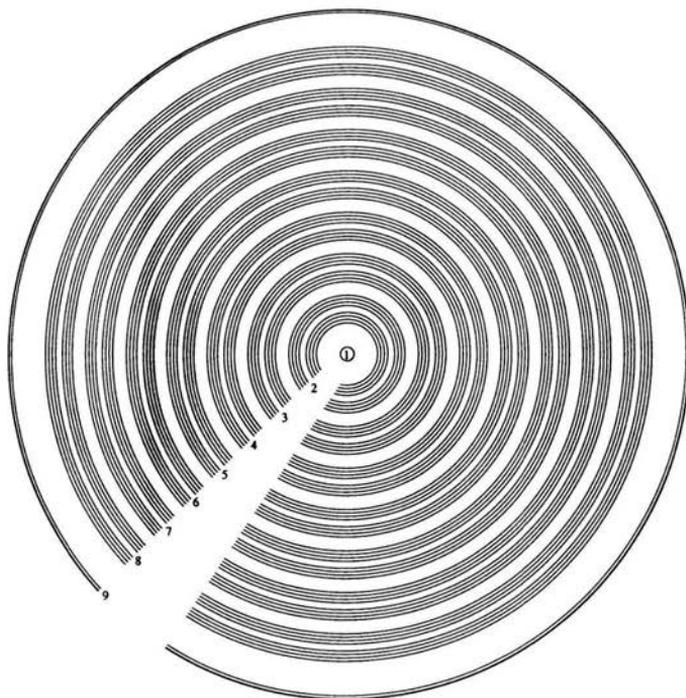


Figura 1.3: El modelo de Aristóteles: se trataba de un sistema extremadamente ingenioso y completamente insensato. 1: Tierra; 2: Luna; 3: Sol; 4: Venus; 5: Mercurio; 6: Marte; 7: Júpiter; 8: Saturno; 9: Estrellas fijas. Las primeras cuatro esferas (círcunferencias) de cada planeta son los antiguos, mientras, las siguientes cuatro sus giros respectivos.

Ni a Eudoxo ni a Calipo les interesaba construir un modelo que fuera físicamente posible. No tenían interés en el mecanismo real de los cielos; construyeron un dispositivo puramente geométrico que, como ellos sabían muy bien, solo existía en el papel. Aristóteles deseaba algo mejor y transformó el esquema en un verdadero modelo físico. [Koestler, 1981]

Estas insatisfacciones dieron nacimiento al modelo de Heráclides y Aristarco, que eliminaba los dos escándalos más llamativos de aquella maquinaria. Por una parte, el nuevo modelo explicaba por qué Venus brillaba más en sus recorridos de regreso que en los de ida; por la otra el por qué de los cambios aparentes en la distancia de la Tierra a Venus y Mercurio. Así, cuando se “echó a andar” a los planetas y la misma Tierra alrededor del Sol, la ciencia griega rectificó el camino. Pero, al ser descartado el sistema por extravagante,

la ciencia académica quedó atrapada en el dogma platónico y “avanzó triunfante” con Platón, Eudoxo y las 55 esferas de Aristóteles, hasta llegar al ingenioso e improbable artefacto de Claudio Ptolomeo, el laberinto ideado por los egipcios.

### 1.2.4. La Geometría de Ptolomeo

En el juego de organizar geoméricamente el Universo mediante circunferencias, aparecieron ideas geniales desde el punto de vista matemático, pero que poco tenían que ver con la realidad. Un ejemplo, Apolonio de Pérgamo quien, en el siglo III a.C. introduce la *excéntrica* y el *epiciclo sobre deferente*, un artificio muy refinado con el que buscaba resolver los problemas que planteaba el dogma platónico-aristotélico.

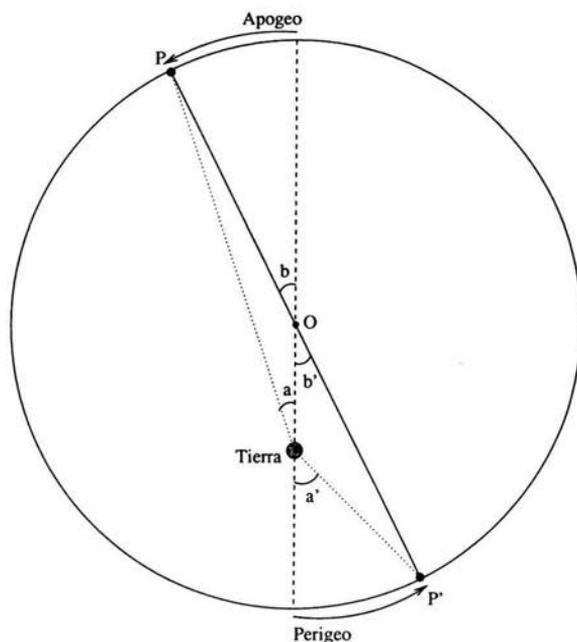


Figura 1.4: Excéntrica. El planeta se mueve a velocidad constante a lo largo de la circunferencia, creando así la impresión de un movimiento a mayor velocidad cuando se encuentra en el perigeo. El ángulo  $a'$  es mucho mayor que el ángulo  $a$ , mientras  $b'=b$ .

En ese entonces, sin hablar de los complicados movimientos realizados por los planetas superiores, se sabía ya que el Sol se mueve a velocidades

distintas en diferentes épocas del año. Al emplear seis días más del lapso del equinoccio de primavera al de otoño que a su regreso de otoño a primavera, nuestro astro es más rápido en su movimiento en invierno que en verano. Con el traslado de la Tierra fuera del centro de las órbitas, la *excéntrica*, Apolonio intentaba describir este retraso. Su otro método empleaba dos circunferencias, la deferente con centro en nuestro mundo y el epiciclo con centro en ésta, en la cual se localizaba el astro en su movimiento.

Casi un siglo después, Hiparco de Rodas combinaría los dos artilugios geométricos. Con ello, el epiciclo sobre deferente permitía explicar las idas y venidas de los planetas por el Zodiaco, así como la variación de sus brillos. La excéntrica le ayudaría con el problema de los cambios de la velocidad aparente de los planetas.

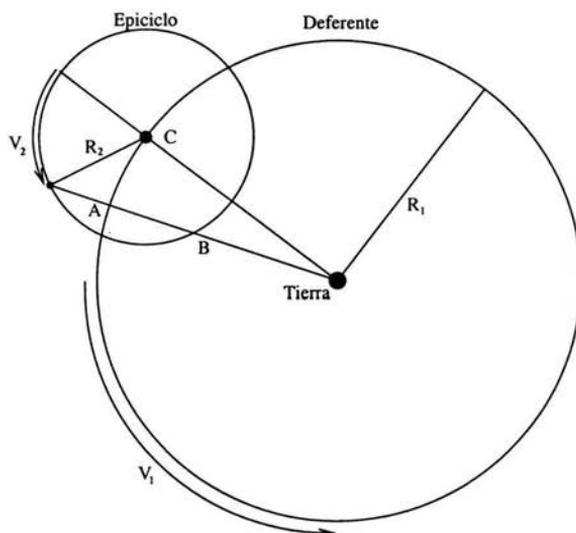


Figura 1.5: Epiciclo sobre deferente. La Tierra se encuentra en el centro de la deferente, mientras el centro del epiciclo se encuentra en esta circunferencia. Las velocidades  $V_1$  y  $V_2$  son constantes. El punto A es la referencia posicional del planeta en el cielo.

Ptolomeo de Alejandría complementó el sistema de Apolonio e Hiparco en el siglo II a.C. En su libro, el *Almagesto*, recopila la parte central de los logros de la astronomía antigua y da una explicación detallada, completa y cualitativa de los movimientos celestes. El sistema ptolomaico completo consistía de epiciclos mayores, con los cuales se lograba explicar los movimientos retrógrados de las órbitas planetarias; epiciclos menores que explicaban los cambios de brillos y las diferencias de velocidades de los astros; las exétri-

cas ayudaban también en este aspecto, mientras la *ecuante* –una invención de Ptolomeo– terminaría por explicar los complejos movimientos de los astros. Este nuevo método estipulaba que el centro del epiciclo describía ángulos iguales en tiempos iguales con respecto al punto ecuanter, no al centro del deferente.

La importancia de este nuevo modelo radica en que con él, Ptolomeo reta el dogma platónico de los movimientos circulares uniformes. Por ejemplo, al explicar el movimiento de los planetas superiores combina epiciclos con excéntricas y ecuanter, con lo cual el centro del epiciclo no se mueve uniformemente con respecto al centro del mundo ni en relación con el centro geométrico de su órbita, el centro del deferente. Sin embargo, todas estas irregularidades sirven para describir todos los desfases del movimiento planetario, por lo que serán la piedra angular sobre las que se soportará la construcción copernicana.

### 1.3. La Tierra móvil: Un concepto antiguo

Hemos relatado a lo largo de nuestra cambiante o más simbólicamente, saltante historia, que la idea de un Universo con una Tierra móvil no es original de Copérnico. Por ejemplo, recordemos a Filolao en el siglo V a.C., con su Antitierra, girando opuesta al mundo, en torno al fuego central, la Torre de Zeus.

Omitimos a Ecfanto, otro pitagórico, quien defendía que la Tierra se trasladaba en lugar del Sol y las estrellas, rompiendo de este modo el geocentrismo. Pero, es más importante la incursión de Heráclides de Ponto, en el siglo IV a.C. quien dió por hecho la rotación de la Tierra en torno a su propio eje, contraviniendo así la geostacia; sólo Venus y Mercurio giraban alrededor del Sol quien con todos los planetas y las estrellas circundaban nuestro mundo.

La importancia de todo ello radica en que la vida cotidiana no nos conduce a concebir que la Tierra se encuentra en movimiento. El estudio del *paralaje* o movimiento paraláctico no era capaz de hacerse con los instrumentos de la época, incluso hemos llamado un sinnúmero de veces al sistema de las estrellas “fijas”; no había datos que reflejaran que la diferencia de sus distancias a la Tierra era muy diferente o que se sujetaran a cambios aparentes entre los desplazamientos de una con otras.

Ni siquiera Tycho Brahe, años después de la muerte de Copérnico, logró registrar el movimiento paraláctico con los instrumentos de mayor precisión de la época. Es por ello que el modelo ptolemaico fue aceptado e

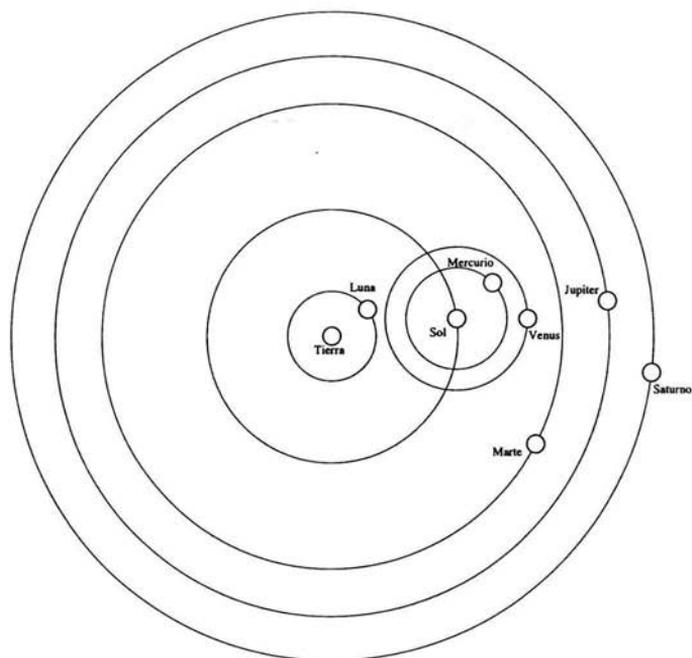


Figura 1.6: Modelo cosmológico de Heráclides de Ponto.

incluso, promovido por el cristianismo con la traducción del *Almagesto*. Las razones de peso para mantener el sistema se deben a la descripción suficientemente precisa que proporcionaba para la época, por ejemplo, sobre la predicción de trayectorias planetarias futuras, aunque fue necesario llevar a cabo cálculos tremendamente laboriosos; además, permitía flexibilidad en la corrección al reajustar las “ruedas” del mecanismo, así como la explicación natural del no-paralaje de las estrellas fijas y la apariencia común de que es el Sol, los planetas y las estrellas los que giran en torno a la Tierra. Finalmente, tenemos la significación teológica que se le daba y a la que se hicieron adeptos los europeos con la reintroducción del sistema en la Edad Media.

Hay que mencionar por último los intentos de los filósofos escolásticos, a inicios del segundo milenio de nuestra era, por desechar el dogma aristotélico. Un ejemplo es Jean Buridan, quien a principios del año 1300 expone la dinámica del *impetus* que será un símil de lo que posteriormente será la 1ª ley de Newton. Conforme a ello, explica el hecho de que al lanzar objetos al aire, éstos no queden relegados en el movimiento terrestre, sino que sigan el impulso en la dirección que la Tierra en su rotación les ha dado.

### 1.3.1. De revolutionibus de Koppernigk

Nicolás Copérnico nace en Torun, Polonia, el 19 de febrero de 1473, pero no es hasta 1543, año de su muerte, que se publica su libro intitulado *De revolutionibus orbium celestium*<sup>3</sup>, donde propone su sistema del mundo sobre la nueva base de una Tierra en movimiento. La idea no es original de Copérnico, incluso se sabe que conocía los manuscritos de Aristarco de Samos. En el mismo *De revolutionibus* aparece su nombre, curiosamente tachado con tinta, respecto a lo cual J. I. Del Barrio se atreve a mencionar “parece ser que era costumbre de Copérnico confundir el rastro...”. También es importante destacar que la mayoría de los elementos en los que critica a Aristóteles y a su teoría del movimiento, habían aparecido ya en los textos del escolástico Nicolás de Oresme, discípulo de Buridan.

El mérito de Copérnico no es, entonces, la idea de negar la geostacia, sino la construcción de un nuevo sistema integral del Universo, dotado de la misma capacidad de predicción que el sistema de Ptolomeo, sólo que la Tierra tiene movimiento como cualquier otro planeta. La revolución copernicana es la culminación de una larga trayectoria, en la cual el camino se había abierto con conceptos desarrollados en París y Oxford a través del siglo XIV y en Padua en los siglos XV y XVI, ciudad donde Copérnico estudió. Asimismo, las ideas habían surgido en la dinámica, invalidando las objeciones clásicas del movimiento terrestre.

Algunos historiadores y filósofos de la ciencia ven a Copérnico como un neoplatónico impulsado por la estética del Universo, por lo cual las ecuantes y parafernalias como las deferentes o el complejo sistema de Ptolomeo no encajaban en su pensamiento y concepción. Así, Copérnico menciona que un cuerpo celeste simple es incapaz de tener un movimiento desigual, dado que esto necesariamente se efectúa con la interacción de un factor extra, como podría ser la rotación del cuerpo. Continúa: “los cuerpos constituidos de una ordenación óptima, no puede producir tales efectos, es consecuente admitir que sus movimientos regulares nos parecen irregulares”.

Las ventajas estéticas en el sistema copernicano tienen que ver con lo cualitativo, no tanto con lo cuantitativo. Para Copérnico la idea de la ecuante representaba romper el ideal platónico de los movimientos circulares y uniformes, es por ello que la desaparece de su sistema, debiendo agregar epiciclos a los epiciclos para salvar la belleza. Sin embargo, se queda con un modelo complejo de 30 círculos con epiciclos, deferentes y excéntricas, haciéndolo cuantitativamente tan difícil como el sistema de Ptolomeo.

<sup>3</sup>“De las revoluciones de las esferas en movimiento”.

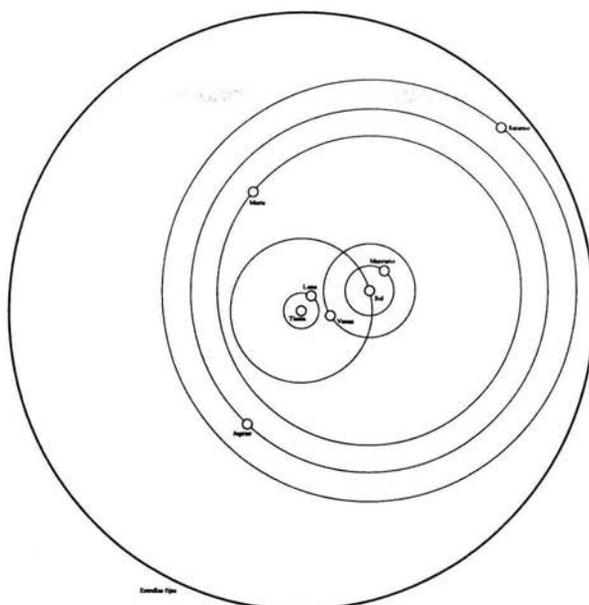


Figura 1.7: El modelo cosmológico de Copérnico. En él no se muestran los epiciclos y excéntricas; modelamos solamente el conjunto de planetas y la Tierra.

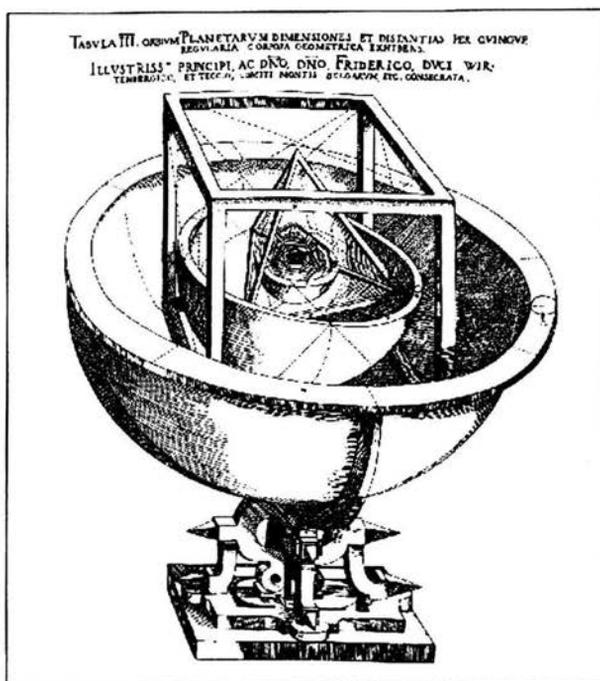
Desde el ángulo cualitativo, el movimiento planetario es explicado más claramente. Por ejemplo, se comprenden mejor las retrogradaciones, es más sencillo y natural la explicación del movimiento de los planetas inferiores y pueden estimarse las distancias a los demás vagabundos, calculando sus distancias al Sol. Hay que constatar que Copérnico no impone realmente el heliocentrismo, pues, aunque en su concepción la Tierra no es el centro de nuestro mundo, tampoco lo es el Sol, sino la misma órbita terrestre. Todavía recuerdo a Pepe Marquina con el dibujo en el pizarrón mostrando cómo todas las órbitas giran en torno al Sol, mientras éste gira alrededor de nuestro mundo en un desequilibrio motriz impresionante.

Copérnico rompe con la tradición sólo en lo que toca a la posición y el movimiento de la Tierra. El marco cosmológico y las herramientas matemáticas empleadas pertenecen a las expresadas y comprendidas por los científicos de la antigüedad. Del mismo modo, Galileo estará sumergido aún en el movimiento circular uniforme del platonismo. No será hasta la aparición de Kepler, liberado completamente del geocentrismo, astrónomo medieval y moderno, a la vez, el primer copernicano que esta revolución mostrará su fertilidad.

### 1.3.2. Kepler, el copernicano

Cinco años después de la muerte de Copérnico aparece el primer libro de Kepler, *Mysterium cosmographicum*. Con él se da el primer paso hacia el reconocimiento del modelo copernicano en cuanto a la revolución heliocéntrica; Kepler no confiará en la artificialidad de los epiciclos, deferentes y excéntricas que dicho modelo conserva de los modelos antiguos.

La obra de Kepler será única en la historia. Sus manuscritos muestran el desarrollo y conceptualización de sus propias ideas, las idas y venidas paradójicas del quehacer científico. Es notable cómo algunos errores lo llevaron finalmente a resultados verdaderos o de manera similar, cómo el misticismo que lo caracterizaba lo condujo a lo que sería una idea fija en su pensamiento, en la cual siempre creyó: cada órbita se encuentra inscrita y circunscribiendo uno de los sólidos platónicos. Aunque negó la posibilidad del sistema con los sólidos platónicos, aún así, la idea la mantuvo fija, con algunas modificaciones que pasaron desapercibidas en su tiempo, al grado de concederle más importancia como realidad física que a las abstracciones de sus tres leyes.

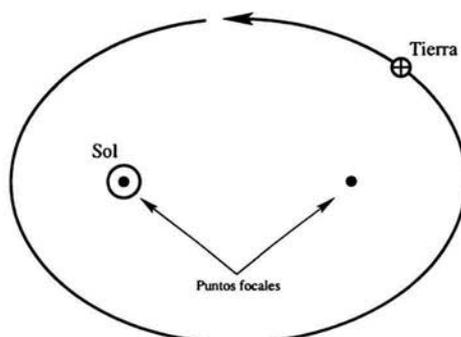


Los historiadores normalmente enfatizan una de sus características primordiales: Kepler es un personaje donde coexisten perfectamente el místico con el científico empírico, siendo estas dos facetas determinantes desde su juventud hasta sus últimos días. Él mismo explicaba los misterios de los cielos mediante deducciones *a priori*, derivadas directamente de lo que consideraba los pensamientos secretos del Creador. En palabras de A. Koyré, “Kepler está mucho más cerca de Aristóteles y el medievo que de Galileo y Descartes”.

Historias tan fantásticas son poco creíbles en la boca de uno de los fundadores de la ciencia moderna. Sin embargo, es gracias a este misticismo que, paradójicamente, es capaz de liberarse del dogma aristotélico, el primer dogma de la astronomía antigua, el movimiento uniforme y circular.

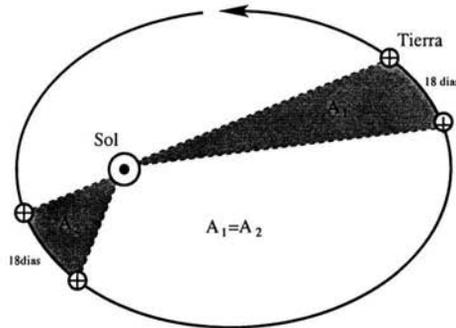
Al romper con el dogma del movimiento uniforme, Kepler se deshizo de los epiciclos. El paso fue difícil pues, al terminar con las órbitas circulares, la búsqueda de las curvas geométricas que coincidieran con los datos no fue simple. El óvalo fue el primer intento; tras realizar múltiples cálculos y ensayos llegó finalmente a las elipses. Por este camino terminó formulando tres leyes fundamentales. Su primera ley sería corroborada con los datos del observatorio de Tycho Brahe.

**Primera ley.** Las órbitas de los planetas son elipses y el Sol se encuentra en uno de sus focos.



Es una sorpresa que Kepler diera primero con la segunda ley y no con la primera. Sin embargo, es más curioso aún que en el desarrollo de ésta cometiera tres errores que milagrosamente se anulan entre sí. Sin ser suficiente esto, cuando Kepler los descubre, intenta explicarlos llevándolo a un cuarto error, que no tiene consecuencias para sus teorías.

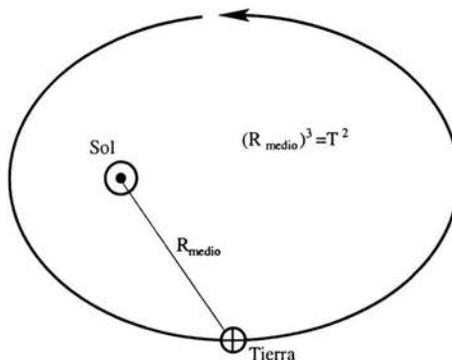
**Segunda ley.** La línea que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.



Con la primera ley deshace los movimientos circulares –son elípticos–, con la segunda ley rechaza el movimiento uniforme –los planetas se mueven más rápido en la cercanía del Sol–. Estas dos leyes aparecerán por primera vez en *Astronomia nova*, en 1609, cuando trabajaba como matemático imperial de Rodolfo II de Praga. Con ello Kepler comienza la nueva era de la astronomía, los cálculos empleados en su modelo son la técnica más simple propuesta desde los días de Hiparco, con la ventaja superior de una precisión nunca antes realizada.

Finalmente la tercera ley aparece hasta 1619 en *Harmonices mundi*, texto en el cual intenta unificar armónicamente el pensamiento, la música, la geometría y demás artes o virtudes de su época.

**Tercera ley.** El cuadrado del periodo de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.



Con frecuencia hemos tomado a Kepler como un copernicano sin igual, pero es mucho más que eso. Su pensamiento heliocentrista y su afinidad a Copérnico son claros, pero sus tres leyes no tienen antecedente en la obra de éste, el *De revolutionibus*. En su libro *De motibus stellae Martis* y en el *Epítome de astronomía copernicana* muestra cómo ha desenlazado toda la maraña matemática, teórica y observacional que caracteriza a la conjetura copernicana. Con el *De revolutionibus* existían dudas de si se trataba de una imagen física del Universo, sin embargo, con Kepler no hay duda que trata de explicar la geometría física de nuestro sistema planetario.

Copérnico, en su modelo, no formula ninguna hipótesis sobre la naturaleza física del Universo, en cambio, Kepler desarrolla una nueva astronomía al intentar explicar los movimientos planetarios en términos de fuerzas heliocéntricas. Así, una de sus grandes aportaciones es la de unificar nuevamente la física y la astronomía. Hay que recalcar que este avance es consumado como resultado de la *mística* convicción que Kepler tenía desde la juventud sobre la estrecha relación entre el periodo de los planetas y su distancia al Sol. Así, introduce, gracias a esta idea, la causalidad física en la geometría formal.

Sin embargo, Kepler detendrá el camino al no comprender que la fuerza que une a los planetas y el Sol es la gravedad –lo que Newton comprendió muchos años después–. Comienza a explicar este fenómeno en términos de una fuerza solar que, en lugar de atraer perpetuamente a los planetas, los empuja o “guía” en sus trayectorias cósmicas. Así, al no actuar como la inercia, si esta fuerza se detuviera, el planeta en lugar de seguir de largo –cómo sucedería en realidad–, detendría su curso. Las leyes de Kepler cobran un sentido más real cuando son observadas bajo la luz que aporta la mecánica newtoniana, si bien para Newton el movimiento elíptico será uno de las consecuencias comunes de su teoría, para Kepler, este movimiento podría ser dado por cualquier otra curva. No será hasta las últimas décadas del siglo XVII cuando los mejores astrónomos europeos tomen en cuenta sus leyes para la realización de los cálculos.

### 1.3.3. Tycho Brahe: El astrónomo que perdió la nariz

La historia de Tycho Brahe es un poco fuera de lo común, incluida la manera en que perdió la nariz<sup>4</sup>. Nació en Dinamarca, en el año 1546, en la cuna de una familia acaudalada de la nobleza danesa. A corta edad observó un eclipse total de Sol, el cual había sido anunciado con anterioridad; el hecho

<sup>4</sup>El título de la sección es en recuerdo al libro de [Schmidt, 1994], de nombre similar.

de predecir fenómenos astronómicos le llamó mucho más la atención.

Aunque en esa época no era bien visto que un noble se dedicara a la astronomía, nadie logró disuadirlo. Es así como a la edad de 17 años descubre que en las predicciones de las tablas alfonsinas, el eclipse planetario entre Saturno y Júpiter tiene casi un mes de error y de varios días en las copernicanas. A partir de entonces, Tycho Brahe entrará en la historia de la astronomía. Enseñará al mundo la importancia de las observaciones constantes y de gran precisión; su aportación se deberá a su trabajo científico, realizado con el rigor y la disciplina necesaria.

En la isla de *Hven*, cedida a él por el rey Federico II de Dinamarca, el noble astrónomo mandó construir un observatorio: *Uraniburg*. Compró y construyó los mejores y más precisos aparatos de la época, con los cuales hizo mediciones tan exactas que no fallan en más de cuatro minutos de arco. Sin embargo, lo más importante de su contribución es la constancia con la cual registró noche a noche cada una de sus observaciones.

Tycho Brahe fue el maestro de Kepler; juntos comprendían la necesidad de las observaciones precisas para la corroboración de los diversos sistemas, siguiendo una tradición de larga data. El debate entre Ptolomeo y Copérnico, por ejemplo, no se desarrollaba sobre argumentos únicamente teóricos. Un elemento importante fueron los registros hechos hasta aquella época; por ejemplo, en el *De revolutionibus* solamente aparecen 27 mediciones de Copérnico, las restantes fueron extraídas de los imprecisos datos de Hiparco y Ptolomeo, principalmente.

Un hecho importante fue que con las observaciones hechas en Uraniburg fue imposible encontrar movimientos paralácticos, con lo cual, Tycho rechazó la idea del movimiento terrestre. Propuso un nuevo sistema, geoheliocéntrico llamado *ticónico*, un híbrido entre el ptolomaico y el heliocéntrico puro. En éste, los cinco planetas conocidos giran en torno al Sol, mientras éste circunda la Tierra poco más allá de la Luna.

En estricto rigor matemático, el sistema ticónico y el copernicano son el mismo, solamente que los argumentos en contra del segundo se desvanecen al mantener a la Tierra inmóvil en el centro del Universo. Sin embargo, al dejar de ser la Tierra el centro geométrico del Universo, la mayoría de los movimientos planetarios tienen su base en el Sol y por ello, el sistema ticónico no atrae muchos adeptos.

Desde luego, Kepler encuentra el sistema copernicano más atractivo, dada la simetría que implica. Además, supone que la ausencia de paralaje puede deberse a la distancia enorme a la que se encuentran las estrellas fijas com-

parada con la órbita terrestre. Así, a Tycho Brahe no lo recordamos por su audacia en la concepción de un nuevo sistema planetario, sino por sus observaciones constantes, disciplinadas y precisas, herramientas esenciales que Kepler utilizó para dar con el principio de solución del rompecabezas de los cielos.

#### 1.3.4. El mito tras la leyenda: Galileo Galilei

Galileo Galilei nació en Pisa en el año de 1564. En él la historia y la leyenda convergen. En palabras de Arthur Koestler:

En las obras de corte teológico, Galileo aparece como una figura altamente sospechosa; en la mitografía racionalista, como la Doncella de Orleáns de la ciencia, como San Jorge matando al dragón de la Inquisición. Por eso no debe sorprendernos que la fama de su descollante genio repose principalmente en descubrimientos que él nunca hizo y en hazañas que nunca llevó a cabo (...) Galileo no inventó el telescopio, el microscopio, el termómetro ni el reloj de péndulo. No descubrió la ley de la inercia ni el paralelogramo de fuerzas o movimientos, tampoco las manchas solares. No hizo ninguna contribución a la astronomía teórica; no tiró pesas desde la torre inclinada de Pisa y no demostró la verdad del sistema copernicano. No fue torturado por la Inquisición ni se pudrió en sus calabozos, no dijo: *Eppur si muove* y no fue un mártir de la ciencia.

Lo que sí *hizo* fue fundar la ciencia moderna de la dinámica, lo cual lo coloca entre los hombres que modelaron el destino humano. Esta ciencia significó el complemento indispensable de las leyes de Kepler para el universo de Newton.

La carta que Galileo envió a Kepler en 1597 muestra que aquel es copernicano, hecho que hará público hasta 1613. Durante el periodo intermedio siguió enseñando en clase la antigua astronomía de Ptolomeo. Sin embargo, las aportaciones de Galileo comenzarán cuando, por su interés por la astronomía, construye un telescopio perfeccionado.

Galileo publica en 1610 *El mensajero de las estrellas*, donde hace público su descubrimiento de los *astros mediceos*, es decir, las lunas de Júpiter que descubrió con sus observaciones telescópicas. Luego, en *Cartas sobre las*

*manchas solares*, mostrará que éstas no son pequeños planetas que circundan el astro, sino vapores, exhalaciones, nubes o fumarolas localizadas en la superficie del Sol que giran con él.

Los descubrimientos hechos por el italiano muestran que no todos los cuerpos celestes giran en torno a la Tierra y contradicen la inmutabilidad de los cielos. De esta manera evidenciaron errores manifiestos en las premisas tradicionales; lo cual estaba en favor del sistema copernicano. En realidad, sus observaciones, incluyendo las fases de Venus, eran compatibles con el sistema ortodoxo de Copérnico, el ticomónico e incluso con el de Heráclides. No probaban, como Galileo suponía, la validez del complejo sistema copernicano.

Sin embargo, Galileo siembra la duda sobre el sistema ptolomaico y populariza el copernicano, a tal grado que persistirá hasta el final de su vida tratando de convencer al mundo de que el monstruoso aparato de 48 epiciclos era una realidad física demostrada. Es claro que ignoró las leyes de Kepler, dada la controversia que mantuvo con la iglesia en defensa del copernicanismo.

Por otro lado, lo más importante de Galileo es su pensamiento moderno y sus contribuciones a la dinámica que contribuirá a la síntesis newtoniana. Sin embargo, en el ámbito astronómico fue simplemente un curioso explorador.

## 1.4. Tesis, antítesis... Newton: Caminando en hombros de gigantes

Con Kepler y sus leyes había culminado la revolución copernicana en el campo de la astronomía. Pero es hasta la aparición de *Philosophæ Naturalis Principia Mathematica* (Principios matemáticos de la filosofía natural) de Newton que la cosmología se transformará en una ciencia disciplinada y coherente. A diferencia de los textos de Copérnico, *los Principia* son bien recibidos y tienen un gran impacto en la comunidad científica de la época. Las leyes de la dinámica y la ley universal de la gravitación contenidas en el libro, explicaban finalmente el movimiento de los cielos; desde Aristóteles no se había creado ninguna visión del mundo que abarcara tanto. Existe, entonces, una teoría mecánica unificada que describe desde los aspectos mundanos a nivel terrenal hasta los de las esferas celestes.

En esta gran obra, Newton mismo no se da el crédito total, haciendo alusión a grandes figuras como Kepler, Galileo y Descartes, los cuales le proporcionaron herramientas y estudios para sus formulaciones. Hace mención

a ellos diciendo que no hubiera visto tan lejos de no haber estado parado en hombros de gigantes. Curiosamente no da crédito a otros, por ejemplo a Hooke, quien probablemente fuera el que formuló la ley de la gravitación universal, si bien tenía antecedentes en la antigüedad. Aún así, es gracias a Newton que enmarcamos todo este conocimiento en lo que ahora llamamos la mecánica clásica.

A Newton nunca le pareció del todo correcto pensar en la gravedad como un principio innato de atracción que actúa a distancia y no es hasta la aparición de la teoría de Einstein que ésta y algunas otras incógnitas serán resueltas. Las leyes plasmadas en *los Principia* contribuyeron al descubrimiento de Neptuno, en 1846, cuando J. Galle lo localizó donde U.J.J. Le Verrier y J.C. Adams habían predicho que debía hallarse un nuevo planeta, responsable de las irregularidades observadas en los movimientos de Urano. Pese a ello, no contribuyeron al descubrimiento de Urano (1781) ni al de Plutón (1930).

### 1.4.1. De Galileo y Newton

Hemos enfatizado en la revisión histórica que nos ha llevado a nuestros tiempos, los avances y retrocesos de la humanidad en su afán por comprender el Universo. Hemos dado ya una pincelada a nuestro pasado confrontando teorías y fascinaciones cosmológicas. Es claro, ahora, que los avances en la medición de la realidad cambiaron nuestra capacidad de observación; no sólo Tycho Brahe nos lo mostró claramente, sino también Kepler, Ptolomeo, Pitágoras y muchos más, todo ello a pesar de que desde Aristóteles se pensaba que las observaciones no eran necesarias si el pensamiento puro producía resultados lógicos.

Sin embargo, sólo hemos dado referencias de los modelos geométricos y matemáticos propuestos, sin abordarlos como tales. Es justo aquí donde iniciaremos el análisis de algunas propiedades que alteraron la forma en que el hombre vislumbra el Cosmos. Por ejemplo, Galileo desmitificó entre otras cosas la teoría de los cuerpos cadentes de Aristóteles, la cual estipulaba que un objeto con dos veces el peso que otro, tenía que caer más rápido, incluso, se creía que sería al doble de rapidez.

Considérese el siguiente caso: Tómese un ladrillo con cierto peso y arrójese desde un décimo piso, midiendo entonces el tiempo que tarda en caer. Si se sigue haciendo lo mismo con ladrillos del mismo peso se encontrará que el tiempo es el mismo, inclusive, si se arrojan varios al mismo tiempo y separadamente. Pero, ¿qué sucede si un cabello une dos ladrillos distantes mien-

tras éstos caen? Según los aristotélicos, el conjunto, al pesar más, caerá más rápido –poco menos de la mitad del tiempo–, lo cual es un absurdo, aún tomando en cuenta el peso del cabello.

El experimento realizado por Galileo se basaba en la observación, usando de manera ingeniosa un sistema de rampas y esferas metálicas de diversos pesos, comprobando de esta forma que el tiempo de caída es independiente del peso. Estas mediciones sirvieron de base a Newton para la obtención de sus leyes del movimiento. Cuando un cuerpo cae rodando, la fuerza (su peso) que actúa sobre él, es la misma y el efecto resultante es una aceleración constante.

La idea aristotélica sobre el reposo como estado natural de un cuerpo cambiaría: siempre que sobre un cuerpo no actúe ninguna fuerza, éste seguirá moviéndose en línea recta con la misma velocidad, de manera que ésta puede ser nula. Esta idea aparecería en *los Principia* como lo que hoy se conoce como **la primera ley de Newton**. Su segunda y tercera ley también describen el movimiento, pero Newton descubrió además una ley que explicaba la fuerza de la gravedad: todos los cuerpos se atraen con una fuerza proporcional a la masa de cada uno de ellos, pero dicha atracción disminuye en proporción del cuadrado de la distancia entre los mismos.

En la cosmovisión científica, Newton da un paso en otra dimensión al desprendernos de la existencia de un único estándar de reposo. Es decir, cuando andamos en bicicleta a una velocidad definida, las interacciones del mundo son las mismas para nosotros que para un sujeto sentado en una banca, pese a que con nuestro pedaleo dotamos de movimiento al mundo.

El principio de relatividad de Galileo, adoptado por Newton, tiene un significado más relevante que nuestra bicicleta. Cuando diversos observadores se mueven, unos con respecto de otros en movimiento y sin cambios de velocidad o de dirección, observan los mismos fenómenos con efectos “idénticos”. Debemos observar que no nos referimos a una identidad en toda la extensión de la palabra. Para explicarnos debemos entender primero las transformaciones de Galileo y su uso en la dinámica newtoniana.

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}$$

siendo  $x$ ,  $y$  y  $z$  las coordenadas cartesianas del espacio,  $t$  el tiempo y el sistema primado el que se mueve con velocidad constante  $v$  con respecto al

no primado. Hay que notar que la única coordenada que difiere en los dos sistemas es  $x$ , mientras  $y$ ,  $z$  y el tiempo  $t$  no tienen alteración alguna.

Podríamos enunciar el *principio de relatividad de Galileo* como: si las leyes de la mecánica son válidas en un sistema cerrado, entonces también se cumplen en cualquier sistema cerrado que se mueva uniformemente con respecto al primero.

De esta forma, el espacio deja de ser absoluto. Veamos un ejemplo al montarnos nuevamente en nuestra bicicleta (Figura 1.8). Un perro camina de la posición  $A_o$  a la posición  $A_1$  para nuestro amigo  $B_o$  que está sentado en una banca en el parque; mientras tanto, nosotros avanzamos de  $C_o$  a  $C_1$ . Para  $B_o$  el perro recorre una distancia  $A_1 - A_o$  y nosotros  $C_1 - C_o$ ; en consecuencia, para  $B_o$ , el perro tiene un recorrido “positivo” y nosotros uno “negativo”.

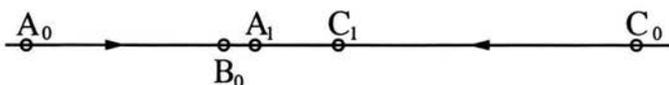


Figura 1.8: Sistema de referencia del sujeto  $B$ .

Tomemos ahora un marco de referencia que nos dé preferencia a nosotros en el que, aún cuando seguimos en la bicicleta, no tenemos movimiento (Figura 1.9). En este caso veremos al perro acercarse a nosotros desde  $A'_o$  mucho más rápido que al sujeto de la banca desde  $B'_o$ . En el instante inicial, tanto las posiciones arriba citadas como las primadas serán iguales. Según nuestras observaciones nuestro amigo recorrerá una distancia  $B'_1 - B'_o$  igual a la que él ha medido, en el caso anterior, como  $C_1 - C_o$  y el perro recorre una distancia  $A'_1 - A'_o$  claramente mayor a  $A_1 - A_o$ .



Figura 1.9: Sistema de referencia de la bicicleta  $C$ .

Al comparar las observaciones registradas por el sujeto sentado en la banca y por nosotros mismos, notaremos que diferimos en varios aspectos, todos ellos relativos a la distancia que cada uno de los tres sujetos recorrió. Sin embargo, estaremos de acuerdo en muchos fenómenos: tanto el perro como él y nosotros teníamos separadamente una velocidad constante; al principio de la medición las posiciones relativas tomaban a nuestro amigo sentado en

la banca entre el perro y nosotros y al finalizar sería el perro el que ocuparía la posición intermedia a ambos.

Así, los efectos “idénticos” se refieren a esta congruencia. Esto sucede de igual forma si un objeto se acelera, en cuyo caso los tres observadores estarán de acuerdo con ello, aunque seguramente no con la trayectoria descrita ni la cantidad que determina dicha aceleración. Las cantidades físicas, como la masa, la temperatura, el tiempo e incluso los instantes no tendrán diferencia en las transformaciones de Galileo, solamente los movimientos efectuados por distintos objetos.

### 1.4.2. La obscuridad de la noche

En este contexto, con la llegada de la teoría de Newton, el panorama cosmológico cambió radicalmente. Las estrellas fijas empezaron a tomarse como soles lejanos y con ello se produjo un nuevo problema. Si la ley de la gravitación es válida a toda escala ¿por qué las estrellas no se aglomeran al atraerse unas a otras? Newton escribió a Richard Bentley –otro destacado pensador– que sólo sucedería si existiera un número finito de estrellas en un espacio finito y que, por el contrario, si fueran ambas cantidades infinitas y el acomodo fuera más o menos uniforme, entonces no habría un punto central en el agrupamiento.

La idea no fue muy popular, posiblemente por cuestiones religiosas, ya que no dejaba nada para la intervención del Señor y otros personajes celestiales. Por ello se intentó modificar la teoría con la consideración de la existencia de fuerzas repulsivas a gran distancia y con otro tipo de invalidaciones lejanas. Sin embargo, es curioso que nadie tuvo la idea de tomar un Universo dinámico; siempre se trató con universos estáticos.

El filósofo alemán Heinrich Olbers objetó el modelo de Newton en 1823 y planteó la problemática del Universo infinito. En un sistema de este estilo, argumentaba, prácticamente cada línea de visión se enfrentaría con una estrella, lo cual implicaría que la noche sería más brillante que nuestros días actuales. ¿Por qué es entonces la noche oscura?

En la vía de disolver el dilema de Olbers aparecieron diferentes ideas. El mismo filósofo se inclinaba a pensar que cierta materia intermedia era la causante de que se absorbiera la mayor parte de esa luz. Sin embargo, el problema solamente cambió de matiz; de ser así, dicha materia se calentaría hasta llegar a un grado que irradiaría luz propia, el calor. Una respuesta a esta problemática era pensar que las estrellas no habían estado allí el tiempo sufi-

ciente para calentar estas regiones del Cosmos. Entonces, ¿qué sucedió para que éstas se originaran? y si siempre estuvieron ahí ¿qué las iluminó por vez primera?

Ahora sabemos un poco más. En 1929, el astrónomo Edwin Hubble hizo una observación crucial al notar que todas las estrellas se alejan unas de otras, con lo cual, sabemos que el cosmos es dinámico, se encuentra en expansión. De hecho, parece ser que hubo un tiempo, hace diez o veinte millones de años, en el cual el todo se encontraba concentrado en un mismo lugar. Hubble llegaría a la suposición de la existencia de un principio, el *Big bang* o Gran explosión<sup>5</sup>, en el que el Universo era infinitamente pequeño e infinitamente denso.

### 1.4.3. La corriente de Maxwell

En paralelo, corriendo por otra de las vertientes de la ciencia aparece en escena James Clerk Maxwell. En 1865 surge, gracias a él, una verdadera teoría de la propagación de la luz. Al unificar con éxito las teorías parciales, hasta entonces existentes, para definir las fuerzas de la electricidad y el magnetismo, se conformó una nueva teoría, el electromagnetismo.

Con las ecuaciones de Maxwell se predice que pueden existir perturbaciones ondulatorias en el campo electromagnético, viajando estas ondas a una velocidad constante. Así, al unificar el magnetismo con la electricidad, “las ecuaciones de Maxwell son leyes que representan *la estructura* del campo”<sup>6</sup>. Con esto nos referimos a la concepción de campo como algo real; el campo electromagnético existe, actúa y varía según las leyes de Maxwell, su validez se extiende a todo el espacio, a diferencia de las leyes de la mecánica.

Si las ondas predichas por la teoría existen, entonces han de tener una longitud de onda característica para cada tipo. Con esto encontramos las que hoy llamamos microondas en longitudes que son medidas en centímetros; cuando esta longitud es del orden de diezmilésimas de centímetro nos encontramos con ondas infrarrojas. Tenemos, así, el espectro visible, la luz, con longitudes que varían entre cuarenta y ochenta millonésimas de centímetro. Cuando dicha medida es menor se hallan la radiación ultravioleta –o rayos UV–, los rayos X y los rayos gama ( $\gamma$ ).

Es justo aquí donde esta rama nueva de la ciencia nos llevará de nuevo al camino emprendido varios siglos atrás. Si con la teoría de Newton nos

---

<sup>5</sup> Generalmente se usa el término en inglés por su repercusión onomatopéyica.

<sup>6</sup> Véase [Einstein e Infeld, 1993]

desprendimos de los sistemas de referencia absolutos, con las leyes de Maxwell observaremos que las velocidades empleadas por las ondas de radio hasta los rayos  $\gamma$  tienen una velocidad fija determinada, pero la cuestión es ¿respecto a quién?

Para darle sentido a esto, los científicos inventaron una sustancia llamada *éter* que se encontraba en el Universo, incluso en el “vacío”. Las ondas de luz deberían viajar a través del éter, así como las ondas sonoras lo hacen en el aire. Sus velocidades deberían ser entonces relativas al éter. Diferentes observadores moviéndose en el éter verían la luz acercándose a distintas velocidades. En particular, la Tierra debería tener en su movimiento (rotación y traslación) una velocidad relativa a este sistema de referencia que tomaríamos por absoluto.

#### 1.4.4. Preludio: La Teoría de la Relatividad Especial

Gracias a Newton y a Maxwell, el siglo XIX se caracterizó por los avances realizados en la mecánica clásica y la electrodinámica. Los físicos de esa época creían que a partir de ese momento en adelante solamente se trataría de encontrar y resolver los pequeños detalles de la teoría, según afirmaba Lord Kelvin. No fue así, pero lo cierto es que estas dos ramas de la física aportaron la mayoría de los conceptos que utilizamos actualmente. Por ejemplo, de las ecuaciones de Maxwell es posible deducir la ecuación de onda y de ahí, el cálculo en el vacío predice que  $c = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ , siendo  $c$  justamente la velocidad de propagación,  $\mu_0$  y  $\epsilon_0$  la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica del vacío; estas cantidades pueden ser medidas y  $c$  coincide con la velocidad de la luz.

Claro está, uno de los grandes detalles de dichas teorías es que no son compatibles, es decir, predicen con exactitud los fenómenos relacionados con cada una de ellas, pero no es posible hacer predicciones de lo que sucedería si se toman partículas cargadas en movimiento. Esta dificultad llevó a gente como Poincaré a estudiar lo que pasaría si hay o no un límite en la transmisión de las señales físicas.

Frente a dichas disonancias, los caminos que se tomaron fueron varios; así, los científicos de la época tomaban las ideas más importantes de una u otra teoría buscando unificarlas. Uno de estos enfoques se basaba en las predicciones y confirmaciones tanto de la mecánica como de la electrodinámica. Las leyes de Maxwell, por ejemplo, predecían una velocidad de la luz constante en el vacío; así, si el éter existiera, la mecánica clásica mostraría una corrección en la velocidad luminosa según la dirección en la que se midiera y de esta

forma se podría encontrar el movimiento que tenemos en el éter, así como el marco de referencia en el cual todo tendría que ser medido.

En 1887 el físico experimental polaco Albert Michelson y su amigo, el químico estadounidense Edward Morley, intentaron medir la velocidad que tenemos con respecto al éter. Crearon entonces aparatos capaces de medir dicha velocidad, los llamaron *interferómetros*. Al inicio midieron la velocidad de la luz en direcciones distintas, tomando como ayuda la velocidad tanto de rotación como de traslación de la tierra. Aunque las velocidades conjuntas de ambos movimientos no son muy elevadas servían para medir alguna diferencia, pero no se detectó ninguna. Pensaron que el problema podía ser que los rayos de luz, al entrar en la atmósfera terrestre, adoptaban la misma velocidad dado el medio, ya fuera por la homogeneidad o por su densidad, llevando la Tierra con ella una porción del éter.

Decidieron entonces dotar al aparato con espejos semireflejantes; éstos permitían el paso de la luz y al mismo tiempo la reflejaban, de este modo, moviendo los espejos lograban que la señal recorriera distancias iguales con movimientos distintos. El experimento resultó ser, en aquella época, un nuevo fracaso: las mediciones no tenían diferencia alguna entre ellas; ¡la velocidad de la luz era constante!

Este resultado había sido mostrado por el astrónomo danés Christensen Roemer en 1676, pero al parecer sólo el experimento de Michelson y Morley logró un impacto en el ámbito del pensamiento científico<sup>7</sup>. Para responder cómo era posible que esto fuera así, los físicos y matemáticos de finales del siglo XX inventaban teorías que justificaban por qué la Tierra o la atmósfera alteraban al éter o cómo la geometría del entorno ajustaba los datos. No fue hasta que Hendrik Lorentz encontró las transformaciones que llevan su nombre, que esto siguió siendo un punto negro en la ciencia. Pero, antes de revisar su trabajo veamos otras rutas seguidas en aquel entonces.

Una de ellas fue la que siguió el físico inglés Voigt, quien en 1887 mencionó por primera vez un parapeto geométrico, en el cual se observa la ecuación de onda y sus cambios a través del tiempo en un conjunto espacio-temporal. Posiblemente la idea del espacio-tiempo de Minkowski<sup>8</sup>, en 1907, se originó de esta invención. Minkowski supone un espacio tetradimensional, en el cual tres coordenadas son espaciales y la otra temporal. Esta forma geométrica es de gran utilidad en el estudio del espacio-tiempo para objetos que se mueven a velocidades cercanas a la de la luz y por ende representa un modelo visual de lo que ocurre en el mundo real o al menos, en el de

---

<sup>7</sup>La velocidad propuesta por Roemer era de 225,000 km/s

<sup>8</sup>Veáse apéndice B.

la relatividad especial. También había gente como J. J. Larmor, que en el contexto del éter y la materia trataba de mostrar la incompatibilidad entre la mecánica clásica y la electrodinámica, pero aquí no discutiremos a fondo sus ideas<sup>9</sup>.

La idea del espacio-tiempo no hubiera sido posible sin las transformaciones de Lorentz. Éstas remplazarían a las de Galileo, dándole sustento a la *invariancia del electromagnetismo maxwelliano*. Lorentz las encontró buscando justamente un sistema en el cual se diera dicha invariancia.

Con el experimento de Michelson y Morley se mostraba que la velocidad de la luz era constante sin importar el movimiento del medio en el cual se midiera. La dificultad aparece en cuanto a la posibilidad de creer que esto puede ser verdad, pues contradice los supuestos cotidianos.

- ¿Cómo es posible que yo mida la velocidad de la luz en todas direcciones y ésta sea la misma?
- Porque estás en un lugar privilegiado.
- Pero entonces, ¿qué pasa si yo me muevo a una velocidad constante cercana a la de la luz? Es más lento el rayo de luz que me alcanza en el movimiento que la velocidad del que me confronta cara a cara.
- No, el experimento muestra que esto no es así, ¡su velocidad es igual no importa el ángulo de incidencia!

Intentemos comprender ésto. Si nos movemos y la velocidad de la luz es la misma no importa de donde provenga; entonces, algo ha de estar pasando con los parámetros que nos permiten medir la velocidad. Es decir, dado que  $v = d/t$ , los tiempos o las distancias que medimos están cambiando, siendo posible que se alteren los dos simultáneamente. Cuando la luz viaja en una dirección dada, entonces recorre una distancia  $d_{luz} = ct$ , si nosotros tenemos un movimiento en la misma dirección a velocidad  $v$ , entonces recorreremos una distancia  $d_v = vt$ . De este modo, la distancia real recorrida por el rayo de luz sería  $d_{luz} - d_v$  respecto a nosotros, lo cual es menor que el resultado  $ct$ , es decir, la distancia tendría que ser mayor o dado que esa distancia es  $(c - v)t$  sería posible que el tiempo se dilatara. Lorentz encontró que ambas cosas sucedían formulando sus transformaciones como:

<sup>9</sup>Puede verse el libro de [Auffrey, 1999] para revisar éstas.

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

donde el sistema primado es el que lleva la velocidad  $v$  o de modo inverso, el no primado tiene la velocidad  $-v$  respecto al primero. Hay que notar que, cuando las velocidades con las que se mueven los marcos de referencia son muy pequeñas, se obtiene una aproximación de las transformaciones de Galileo.

Lorentz no buscaba entender el cambio de las distancias o de los tiempos, no le importaba lo que esto significaba realmente. Lo que él quería era únicamente encontrar el cambio de coordenadas bajo el cual las leyes de Maxwell permanecerían invariantes al relacionarlas en marcos de referencia distintos. Aquí es donde Albert Einstein aparece.

## 1.5. El gran salto hacia la física moderna

Repitémoslo: aunque las teorías de Newton y de Maxwell aportaron la mayoría de conceptos que hoy utilizamos, no eran compatibles entre sí. Las ideas fluían, la presencia mítica del éter con su ruido, la incomprensión de la estructura espacio-temporal del mundo físico y con ella las correcciones a una teoría con las manos en la otra se sucedían entre sí. Pero, no funcionaban, faltaba algo que diera un vuelco radical. Ese momento llegó con el empuje revolucionario de Einstein.

### 1.5.1. Einstein y sus revolucionarias ideas

Einstein fue un joven diplomado en física que no logró conseguir una plaza como asistente en alguna universidad. Se mantuvo dando clases particulares hasta que consigue el puesto de perito de tercera clase en el departamento de patentes de la capital de Suiza. Después de resolver los problemas técnicos aprende a tener tiempo para sus estudios y reflexiones sobre física teórica. En este periodo (1901-1905), sin acceso a bibliotecas y otras facilidades universitarias, comienza a publicar artículos en los *Annalen der Physik* sobre cinética, termodinámica y partículas.

En 1905 escribe tres artículos, siendo uno de ellos un engrane revolucionador de la ciencia. Así Einstein entra en la escena de la física al interpretar las transformaciones de Lorentz en su artículo intitulado *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*<sup>10</sup>, donde no solamente explica lo que sucede con partículas cargadas, sino también lo que sucede al tomar velocidades casi tan grandes como la velocidad de la luz. Analiza el hecho de que la luz es un límite en la transmisión de señales y por ello, el tiempo deja de ser absoluto; no es posible sincronizar relojes para dos sistemas de referencia distintos.

Es curioso que Lorentz, en 1892, hubiese publicado un tratado de nombre semejante: *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants*, es decir, la teoría electromagnética de Maxwell y sus aplicaciones a los cuerpos en movimiento. De hecho, éste es un trabajo fundamental para el artículo de Einstein, pues en él aparecerán las transformaciones de Lorentz.

Así, en 1905, hay un vuelco en la física. La teoría de la relatividad especial ha sido formulada, pero aún así, la historia no acaba. Esta nueva teoría, además de poner en claro algunas de las cuestiones que no habían sido resueltas aún, dio lugar a que se perdiera el concepto de simultaneidad y cómo las cosas se ven en el tiempo. Por ejemplo, cuando un astrónomo observa a *Alpha Centauri* sólo entiende lo que pasó hace cuatro años; si el Sol llegará a explotar, nos enteraríamos de esto ocho minutos después. Todos estos retrasos pasan a cualquier escala, parafraseando a Adler... “La gente vive el pasado de su entorno”.

La teoría era novedosa y los resultados que refleja son muy valiosos, aunque a veces requiere de correcciones mínimas. Por ejemplo, no es difícil encontrar la relación relativista para el cambio de masa como:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Con esta relación, si se toma un satélite que gira en torno a la Tierra con una velocidad de 8 km/s, su masa requiere una corrección de dos a tres mil millonésimas partes por ciento de su peso.

El “pero” que Einstein ponía a la relatividad especial es el mismo que tenía la mecánica clásica: aunque todos los marcos de referencia que se mueven unos con respecto de otros, mediante movimientos uniformemente rectilíneos, tienen un cambio de coordenadas dado por las transformaciones

<sup>10</sup>Über die Elektrodynamik der Bewegten Körper.

de Lorentz, ya no hay necesidad de un marco de referencia absoluto, todos tienen la misma validez. Sin embargo, esto no funciona para marcos de referencia que se muevan con movimientos distintos.

### 1.5.2. Se generaliza la relatividad

A partir de estos avances, el nuevo fin en el trabajo de la gente de ciencia es la unificación de las distintas teorías. Poincaré, por ejemplo, comienza a estudiar la incompatibilidad de la Teoría de la Relatividad Especial con la Teoría de la Gravitación Universal. Así, en 1907, Einstein trata de tomar el concepto de la gravitación de la manera que ya lo ha hecho Laplace, en el intento de responder la pregunta de Poincaré. Aunque no encuentra resultados satisfactorios con estos trabajos, le dan la idea o más precisamente, la esperanza de encontrar la forma de resolver el problema que plantea el perihelio de Mercurio, así como la intuición de que la luz ha de curvarse en presencia de gravedad y que el efecto Döppler ha de ser extendido de las ondas sonoras a las de la luz. En esta línea se trabaja en las teorías escalares.

Es curioso cómo las ideas vienen y van. Por ejemplo, unos años antes, Gauss había intentado medir desde tres picos en los Alpes, los rayos de luz y su deflexión, para comprender la curvatura del Universo. Él se preguntaba por qué el espacio ha de ser euclideo. Claro, la respuesta reafirmaría sus dudas, pero su solución no sería tan sencilla.

Es también en el año de 1907 cuando se genera el principio de equivalencia en su forma general.

**Principio de Equivalencia.** Para cualesquier y cada uno de los marcos de referencia de Lorentz, sin importar dónde o cuándo, todas las leyes de la física –no incluyendo las relativas a la gravitación– deben de ser invariantes y tomar su forma familiar en la Teoría de la Relatividad Especial.

Los trabajos siguen y los frutos no se dan. Es así como, hasta 1912, Grossman y Einstein intentan resolver el problema de la unificación con base en la geometría riemanniana<sup>11</sup>. Para esto se dan cuenta que, para incluir la gravitación en la Teoría de la Relatividad Especial, hay que notar que el tensor de energía-momento del espacio-tiempo está relacionado con el tensor

---

<sup>11</sup>Ésta es el fruto de la obra del gran matemático Bernhard Riemann y representa como tal uno de los logros más prominentes del siglo XIX. En su forma moderna, revolucionada por Elie Cartan, la geometría diferencial de los espacios de Riemann representa uno de los capítulos más sofisticados de las matemáticas modernas.

métrico de la curvatura, es decir, en sus propios símbolos:

$$T_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}.$$

En este mismo año, Einstein trabaja con Nordström en las teorías escalares. No se alcanza una teoría gravitatoria satisfactoria, pues las ecuaciones encontradas no se transforman de manera covariante, es decir, sin que cambien bajo transformaciones de coordenadas. Sin embargo, con estas fórmulas imprecisas Einstein es capaz de calcular y predecir cualitativamente algunos resultados.

Dos años más tarde, empieza a trabajar con Focker en la misma teoría escalar, sólo que ahora buscan expresiones que relacionen la métrica de Minkowski  $\eta_{ij}$  –del espacio tetradimensional en la relatividad especial– con la métrica del espacio-tiempo, sugiriendo que ésta primera ha de tener un factor que cambia en el tiempo y el espacio, es decir, de la forma:

$$g_{ij} = \varphi(x)\eta_{ij}.$$

Otra vez, esto no da resultado. Regresan a la idea que se tenía con Grossman.

Comienza poco después a trabajar el efecto de Haas, con su autor, pero los resultados son vagos nuevamente. Einstein comienza a desilusionarse, pero una conferencia que él dicta en Göttingen, en 1915, es escuchada por un gran matemático, Hilbert, quién se interesa por la gravitación y pone sus engranes a trabajar en el mismo problema.

En octubre del mismo año, un conocido en común le comenta a Einstein que Hilbert está convencido que la teoría que él y Grossman han creado, no tiene fundamentos ni esperanzas. Einstein retoma el camino y con el mismo entusiasmo manda sus resultados a la Academia de Prusia. Cuatro cartas en total, cada una con una separación de una semana únicamente. La primera, el jueves 4 de noviembre de 1915, descarta la teoría de Einstein-Grossman, dando claramente, una nueva ecuación. En la segunda carta rectifica, la nueva ecuación no sirve, entonces, propone un principio. Reafirmando y dando más volumen de información, la tercera carta, pondera nuevamente dicho principio. Finalmente, en la cuarta y última carta, el 25 de noviembre, Einstein descarta totalmente todas sus afirmaciones en las tres anteriores y publica las ecuaciones del campo gravitatorio que considera correctas:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right).$$

La historia es un poco confusa. Parece ser que en el lapso entre las cartas enviadas a la Academia de Prusia, Einstein mantenía contacto escrito con

Hilbert. Al menos existen cuatro cartas de uno para el otro con sus cuatro respuestas. En la del 14 de noviembre, Hilbert le comenta que ya sabe cuál es la inconsistencia y que, de hecho la ha resuelto, por lo que invita a Einstein a ir a Göttingen. Se cree que en el interludio de las cuatro cartas enviadas a la Academia, Hilbert obtiene las ecuaciones de campo. Si se observa con detalle los hechos, dos semanas antes de que Einstein mandara la cuarta carta, es cuando Hilbert le dice a Einstein que tiene las ecuaciones correctas. El 20 de noviembre Hilbert presenta dichas ecuaciones, deducidas de un principio variacional para un tensor de energía particular. Éste último se refiere a la materia denotado de forma no muy física, pero aún así, las publica dado crédito a Einstein y se presentando las cuatro comunicaciones con él.

A finales de este año, los dos se pelean. Einstein publica finalmente en marzo de 1916 un trabajo en el cual las cartas con Hilbert son citadas. Es así como la Teoría de la Relatividad General es desarrollada por dos mentes geniales. La historia termina con un final asombroso y a la vez doloroso. Ese mismo año, un alemán llamado Karl Schwarzschild regresa del frente de batalla, lee en algún sitio las ecuaciones de campo y da la primera solución a ellas. Poco después, muere.

### 1.5.3. *Gedankenexperimenten*

*Einstein enseñó a los hombres a pensar con audacia  
pero siempre dentro de los cánones de la racionalidad.  
A los sueños grandiosos de los matemáticos del s. XIX  
les dio importancia física.*

CONFERENCIA, CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ.

La teoría de la relatividad dio paso, también, a lo que Einstein llamó los “experimentos mentales”. Con ellos, sobre todo por parte del creador de la relatividad especial, se generaron ideas y problemas que eran resolubles en la mente.

Se trata de instrumentos que, de alguna manera, significan el regreso a la idea aristotélica, según la cual puede llegarse a conclusiones válidas con base en el pensamiento puro. El cambio fundamental respecto a las ideas de los griegos, comparadas con la genialidad de la física en su aspecto más teórico, es el hecho de que hoy en día nos plantamos con los pies en la teoría y la mente en la imaginación.

Recorramos entonces algunas de las *sinapsis* einstenianas que dieron origen a las ideas más relevantes en su época; asimismo, observemos como algunas de éstas tuvieron trascendencia, mucho tiempo después de haber sido concebidas. El primer punto importante es la equivalencia entre gravedad y aceleración. Tenemos que partir de un hecho importante: el principio de equivalencia establece que para todo observador las leyes de la física se comportan de igual manera no importa el sistema de referencia que tenga respecto a otros; es decir, a diferencia del principio de relatividad de Galileo, esto se cumple sin importar si los movimientos entre unos y otros no son del tipo uniformemente rectilíneos. Bien, supongamos que nos encontramos en una estación espacial, entonces no sentimos los efectos gravitatorios y flotamos en el interior en conjunto del resto de los objetos que se encuentran con nosotros, entre ellos la luz es un haz que atraviesa en distintas direcciones a velocidad  $c$  constante. Ahora, ¿qué pasa si nos encontramos en el interior de un elevador y por coincidencia este se desprende y se produce una caída libre? Dado que tanto nuestro contenedor como nosotros caemos con la misma aceleración, los objetos a nuestro alrededor parecerán flotar al igual que nosotros.

Imaginémonos de vuelta a la estación espacial. Ésta es acelerada por fuerzas exteriores, entonces solamente nuestro vehículo es impulsado, pero nosotros no, por lo tanto sentiremos que nos pegamos a una de las paredes junto con los objetos alrededor. Este sentimiento es el mismo que sentimos cuando el elevador se encuentra detenido en alguno de los pisos. Por lo tanto, la gravedad y la aceleración producen los mismos efectos.

Si nos propusiéramos hacer un viaje espacial veríamos o realmente sólo comprobaríamos varios fenómenos. Por ejemplo, si la nave se encuentra sin movimiento los rayos de luz que entran por las ventanas correrían en direcciones rectas de un lado a otro, si el vehículo estuviera provisto de alguna velocidad constante con respecto al marco de referencia del objeto que los emite, entonces los rayos solamente cambiarían de inclinación, pero siguiendo aún trayectorias rectilíneas. Sin embargo, si nuestro crucero espacial comenzara a acelerarse, además de los efectos sentidos de retraso de nuestros cuerpos, pegándonos al suelo y comparándolos con los efectos gravitatorios, veríamos algunos fenómenos interesantes:

Cada fotón o rayo de luz que entrara por una de las ventanas, al sentir el mismo retraso que nosotros, se movería a través de una curva parecida a la parábola que se observa en los tiros de cañón. Esto lo identificó Einstein como *la deflexión de la luz* y dado que sucede en un objeto acelerado, los cuerpos con campos gravitatorios intensos curvarán los rayos de luz.

Sigamos ahora una imagen un poco más compleja. Hemos dicho que la luz es una onda y todo mundo ha visto esto de alguna manera; pero, imagínese simplemente al fotón zigzageando a través del espacio como una repetición en tiempo y movimiento. Si dicho fotón atraviesa desde el suelo de nuestra nave, entonces, la longitud de la onda se medirá verticalmente. Tendremos que recordar también el hecho de que la velocidad es constante; de esta forma, si avanzamos en nuestro vehículo parecerá que la longitud de la onda se alarga, pero esto es sólo una ilusión al ver el objetivo desde fuera, porque al movernos con cierta velocidad las distancias serán más largas con lo cual al medirla veremos que tenemos el mismo tipo de fotón<sup>12</sup>.

Sin embargo, si existe un cambio radical al ser acelerado nuestro transporte, sucederá algo similar. Las ondas se elongarán, pero cada vez más, de manera que al tomar en cuenta el cambio en las mediciones espaciales, esta onda cambia y es menos energética –tiene menor movimiento a lo largo del espacio–; de esta forma habremos convertido colores azules en rojos, o en algún intermedio de este cambio. Este hecho es conocido como *el efecto döppler relativista*, el cual es similar al döppler que generan las ondas de sonido, siendo el causante de que el sonido de los automóviles sea más grave cuando se acercan y se haga más agudo cuando se alejan. Regresando a nuestras analogías, significa que cada rayo de luz que se aleje de un cuerpo masivo como la Tierra tendrá un “corrimiento al rojo” en el espectro.

Hemos analizado algunos de los *gedankenexperimenten*, sin embargo, la cantidad de ellos es ilimitada. Con ellos se crearon paradojas famosas en el mundo científico; por ejemplo la de los gemelos, en la que al ser separados dos gemelos por un viaje a velocidades cercanas a la de la luz, se generará la dificultad de saber cuál será más joven al momento del reencuentro. Otro ejemplo: montados en una bicicleta atravesando los parajes verdes de algún lugar del mundo, con velocidades rapidísimas, al pasar por un túnel con las dimensiones exactas de la bicicleta se generará la paradoja siguiente: si nos encontramos en algún momento completamente en el interior del túnel o de si esto no es posible. Lo que usualmente sucede es culpa de la simultaneidad, que ya no existe y por lo tanto no podemos hablar de ninguno de los dos fenómenos. Otro caso es justo la imposibilidad de sincronizar relojes de dos personajes que se mueven a velocidades diversas en movimientos diferentes.

---

<sup>12</sup>El tipo de cálculos empleados no son difíciles; en el capítulo 4 veremos cómo realmente se hacen.

#### 1.5.4. *Teoría versus praxis*

Con su teoría, Einstein dio un golpe con una espada templada al dragón de muchas de nuestras ilusiones, al comenzar a predecir fenómenos nunca antes registrados, algunos porque no se habían identificado y otros por la falta de instrumentos que los registraran. Hemos hablado del corrimiento al rojo, que fue verificado muchos años después de su predicción. Por otra parte, se encuentra la deflexión de la luz, la cual pudo ser medida pocos meses después de su publicación. Eddington parte al África a registrar justo esta desviación en un eclipse total de Sol, en el cual algunas estrellas que se encuentran detrás de nuestro astro, presentarán una pequeña aberración de unos cuantos segundos de grado. No obstante, la historia parece ser confusa, y no es del todo cierto que Eddington haya demostrado dicho efecto con las fotografías borrosas que obtuvo por culpa de las nubes.

Sin embargo, un avance científico de gran importancia es la corrección que realiza la relatividad general acerca de las predicciones de la órbita de Mercurio. La ley de la gravitación universal tenía errores en relación del desplazamiento de este planeta; de hecho se había llegado a creer que existía un planeta más cercano al Sol, al cual denominaron *Vulcano*, que según esta idea provocaba dichos retrasos y adelantos en el perihelio de Mercurio. Empero, al calcular relativistamente la trayectoria, ésta checaba impresionantemente, con lo cual la relatividad ganó frente a la mecánica clásica.

Otro tema que abordaremos en el desarrollo de este trabajo es la formación de los agujeros negros que la teoría de la relatividad predijo varias décadas antes de que los astrónomos los registraran en sus almanaques. Es así, entonces, como la relatividad general se consolidó como el primer sistema que nos presentaba el mundo antes de que siquiera se hubiera registrado. Sin embargo, hay que ser justos también en la historia, Laplace ya se había preguntado en 1796 si existiría algo tan masivo que ni la luz pudiera escapar. El alemán Johan Georg von Soldner, en 1801, había calculado la deflexión newtoniana de un corpúsculo de luz pasando cerca de una estrella. En 1920, Anderson había dicho que si el volumen del Sol se condensara en un radio de 1.47 km, entonces el índice de refracción iría al infinito y sería una *estrella negra*.

## 1.6. Los avances y destinos de la modernidad

Desde los años 60, del siglo XX, el estudio de los agujeros negros ha ofrecido avances sorprendentes. Entre otros, respecto a la estructura global de éstos

en equilibrio, sobre la teoría de perturbaciones lineales y la termodinámica en ellos y también se ha incorporado el estudio de nuevos modelos tomando en cuenta la materia a través de campos escalares. De modo que se ha llegado a los desarrollos más recientes en colisiones y en la interacción de agujeros negros no aislados.

Los agujeros negros son regiones del espacio donde la gravedad ejerce tal fuerza, que ni siquiera la luz es capaz de escapar. Estos pueden formarse cuando una estrella –de pocas masas solares– se colapsa al agotar su combustible nuclear o simplemente por la aglomeración de materia en las regiones interiores de las galaxias. A la fecha se tiene un catálogo de agujeros negros que en teoría contienen solamente cargas electromagnéticas y gravedad, éstos son Schwarzschild (con masa), Reissner-Nordström (con masa y carga), Kerr (con masa y momento angular) y Kerr-Newman (con masa, carga y momento angular).

Asimismo, es de suma importancia no sólo conocer los resultados aislados de los agujeros negros, sino también la forma en que interactúan con un “fondo” –llamado generalmente *background*–. Se hacen aproximaciones asintóticas suponiendo que la fuerza de atracción del agujero será (casi) nula a distancias muy grandes y de modo similar con el fondo. Empero, el estudio de dos agujeros negros tiene relevancia astrofísica para comprender qué sucede cuando se encuentran estos en el interior de una galaxia.

El estudio con el reino cuántico es reciente. De la misma forma, se estudia la pérdida de masa en la colisión de agujeros negros, como la conversión de energía-masa en radiación o generación de ondas gravitacionales. En el estudio de los cuasares, la relatividad general tiene un gran peso, dado que estos cuerpos “cuasi-estelares” aparecen en las cercanías de galaxias o cuerpos masivos que curvan la luz, produciendo varias imágenes del mismo objeto en lo que se conoce como *lentes gravitacionales*.

De esta manera, entonces, observamos a la fecha importantes cambios y nuevos enriquecimientos en relación a nuestra concepción del Universo y estamos ciertos que nuevas y posiblemente más profundas modificaciones están por venir. Por ello, la importancia de subrayar lo relativo de dicha concepción y la certeza de que los nuevos descubrimientos, uno a uno, habrán de resolver muchas incógnitas pero vendrán –casi inexorablemente– preñadas a la vez de nuevas. Como afirmó en su tiempo Heráclito: “Lo único permanente es el cambio”.

# Capítulo 2

## Las matemáticas detrás de todo el asunto

*A menudo resulta que, cuando descendemos a los fundamentos y desarrollamos una teoría más exacta, las matemáticas resultan ser más sencillas, incluso si la apariencia formal es más complicada en primera instancia.*

LO GRANDE, LO PEQUEÑO Y LA MENTE HUMANA, SIR ROGER PENROSE.

Hemos visto en el capítulo anterior cómo la relatividad especial surge ante la necesidad de entender la incompatibilidad del electromagnetismo y la mecánica clásica. Por eso, es ahora necesario expresar estas ideas en un lenguaje matemático preciso que nos permita trabajar con ellas. Además, se ha comprendido que la relatividad general es una teoría geométrica que tiene su origen al tratar de incluir el efecto de la gravedad en la relatividad especial, por lo cual será importante aclarar algunos puntos clave antes de proseguir.

Dado que las ecuaciones de Einstein se refieren a una variedad pseudo-riemanniana, será necesario estudiar y entender conceptos tales como métrica, geodésicas y derivadas covariantes, entre otros.

### 2.1. Nociones básicas

La métrica se puede definir de modo sencillo: la forma en que medimos distancias en un lugar determinado. Es la regla, entonces, que determina a qué distancia se encuentra un objeto de otro, o que dimensiones tienen dichos

objetos.

Las geodésicas, por otra parte, se definen como las curvas de longitud mínima que unen los puntos del espacio o la variedad. Por lo tanto la métrica y las geodésicas tienen una estrecha relación: claramente la primera restringe la manera de medir las segundas.

Tomemos el ejemplo clásico, el de la geometría euclídeana para un espacio cartesiano de  $n$  dimensiones de números reales, es decir  $\mathbb{R}^n$ :

Los puntos los tomaremos como las puntas de las flechas, los llamaremos vectores y los denotaremos como  $\hat{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde las  $n$  componentes  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ; se dice que  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ .

La norma de un vector, o la distancia del punto al origen se define de la manera siguiente:

$$\|\hat{\mathbf{x}}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

y de modo similar se define la distancia entre dos puntos como

$$d(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = \|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|,$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$  son vectores de  $\mathbb{R}^n$ .

Veamos que la norma también puede representarse como una forma cuadrática, es decir, un producto de vectores y matrices, de modo tal que:

$$\|\hat{\mathbf{x}}\| = (\hat{\mathbf{x}} A \hat{\mathbf{x}}^T)^{\frac{1}{2}}$$

donde  $A$  es una matriz cuadrada de  $n \times n$ , que denota la métrica. En el caso euclídeano, las componentes  $a_{ij}$  de esta matriz son justamente  $\delta_{ij}$ , es decir, la delta de Kronecker, donde  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  y  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ . De este modo tenemos que la matriz  $A$  es justamente la matriz identidad de  $n \times n$ . Podemos expresar a la norma euclídeana en forma matricial, como:

$$\|\hat{\mathbf{x}}\| = (\hat{\mathbf{x}} I \hat{\mathbf{x}}^T)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} x_i x_j \right)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

lo cual nos muestra que las dos representaciones son equivalentes.

Ahora podemos medir la longitud de un vector, utilizaremos ésta para medir la longitud de una curva. Es necesario tomar para una curva parametrizada  $\alpha(t)$  el intervalo  $t$  de los extremos a medir.

En libros de cálculo de las variaciones o de geometría diferencial<sup>1</sup>, el argumento empleado es medir secantes de la curva que se aproximan en el

<sup>1</sup> Puede tomarse como referencia [Do Carmo, 1989]

límite a la curva en cuestión. De esta forma, la *longitud de arco*  $S(t)$  es dada por la forma:

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$$

donde  $\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t)\right)$ . Se ve claramente, que si  $A$  es otra vez la matriz identidad, se obtiene la fórmula inicial:

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{t_0}^t [\alpha'(t) I (\alpha'(t))^T]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{t_0}^t \left[ \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{d\alpha_i}{dt}(t)\right) \delta_{ij} \left(\frac{d\alpha_j}{dt}(t)\right) \right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{t_0}^t \left[ \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dt}(t)\right)^2 + \dots + \left(\frac{d\alpha_n}{dt}(t)\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt. \end{aligned}$$

La geometría riemanniana en la relatividad general introduce fundamentos en los que el tipo de matrices presentadas, describen la métrica del espacio-tiempo en sí mismo. Éstas, escritas generalmente en la forma  $g_{ij}$ , definen la manera en que la superficie o el espacio cambian punto a punto. De este modo, pueden describir entonces, la curvatura de dicho lugar. Este tipo de matrices tendrá un sentido lógico después de trabajar con ellas. Será claro por qué cuando una variedad es equivalente a un espacio euclideo en un punto, su métrica será equivalente a la matriz identidad, pero de igual manera, si en algún punto es similar a una esfera, será entonces, una matriz distinta que refleje la curvatura positiva de este sitio en particular.

La idea de encontrar una matriz que describa la métrica en cada punto del espacio parece difícil, pero en el capítulo 4 construiremos, con base en las ecuaciones de Einstein, el tensor que simulará el cambio de la curvatura de nuestro espacio-tiempo. Es por eso que en esta sección nos preocuparemos únicamente por cómo se debe trabajar con este nuevo lenguaje. Comencemos con las nociones básicas del álgebra tensorial.

## 2.2. Álgebra tensorial

Tomemos primero dos sistemas de coordenadas para el mismo espacio, sean  $\{x^1, x^2, x^3\}$  y  $\{z^1, z^2, z^3\}$ , relacionados mediante una transformación

biyectiva, es decir,

$$x^i = x^i(z^1, z^2, z^3)$$

$$z^j = z^j(x^1, x^2, x^3)$$

con  $i, j = 1, 2, 3$ . Tomemos una curva cualquiera en dicho espacio, de manera que los vectores tangentes en cada sistema de coordenadas coinciden al tiempo  $t = t_0$ , de forma tal que sean:

$$\left( \frac{dz^1}{dt}, \frac{dz^2}{dt}, \frac{dz^3}{dt} \right)_{t=t_0} = (\eta^1, \eta^2, \eta^3),$$

$$\left( \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right)_{t=t_0} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3).$$

Así podemos hacer uso de la regla de la cadena para determinar cómo cambian estos vectores de uno de los sistemas al otro,

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{\partial z^j}{\partial t}$$

donde  $i = 1, 2, 3$ . Podemos escribir explícitamente como:

$$\xi^i = \sum_{j=1}^3 \eta^j \frac{\partial x^i}{\partial z^j}. \quad (2.1)$$

De modo similar, ahora podemos tomar una función escalar  $f(x^1, x^2, x^3)$  que cambie diferencialmente en la variedad, de esta manera podemos tomar el gradiente en cada punto. Obtenemos así:

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right)_{t=t_0} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

y bajo cambios de coordenadas, de  $x^i$  a  $z^j$ , se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial z^i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^i}.$$

Escribiéndolo también como:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^3 \xi_j \frac{\partial x^j}{\partial z^i}, \quad (2.2)$$

donde  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  y  $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$  son las componentes del gradiente respectivas en términos de los sistemas coordenados  $\{x^1, x^2, x^3\}$  y  $\{z^1, z^2, z^3\}$ .

Formalizando llamaremos a los vectores  $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  y  $\eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3)$  simplemente *vectores*, mientras los vectores  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  y  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  serán llamados *covectores*<sup>2</sup>.

Hemos obtenido ya las fórmulas (2.1) y (2.2); si ahora introducimos la matriz jacobiana del cambio de coordenadas  $A = (a_j^i)$  con cada  $a_j^i = \partial x^i / \partial z^j$  y su transpuesta  $A^t = (b_j^i)$ , donde  $b_j^i = a_i^j$ , podemos escribir estas reglas de transformaciones, como:

$$\begin{aligned}\xi &= A\eta, & \text{para vectores tangentes,} \\ \eta &= A^t\xi, & \text{para covectores (gradientes).}\end{aligned}$$

Es fácil ver que  $AA^t = I$ , es decir, que la matriz transpuesta es también la inversa de  $A$ . Este argumento muestra otro hecho fundamental; si se observan las ecuaciones (2.1) y (2.2), es claro que:

$$\xi^i \xi_j = \delta_j^i.$$

Para los vectores definiremos una forma cuadrática en  $\mathbb{R}^n$ : la norma o la longitud de un vector  $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$  anclada al punto  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  será:

$$|\xi|^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \xi^i \xi^j, \quad (2.3)$$

donde  $g_{ij} = g_{ij}(x)$  está definida para cada punto  $x$ .

De este modo, la regla que nos dará la transformación de los coeficientes  $g_{ij}(x(t))$  bajo el cambio de coordenadas  $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$  es:

$$\hat{g}_{ij}(z) = \sum_{k,l=1}^n g_{kl}(x) \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}. \quad (2.4)$$

Más adelante, la demostración de esta invariancia será evidente gracias a la notación que emplearemos.

Hemos visto ya el caso en el que tomamos la norma cuando el vector es tangente. Debemos de ser capaces entonces de encontrar una forma cuadrática (o más precisamente una *2-forma*) que nos permita medir el tamaño de los vectores gradientes (covectores). Los comentarios puestos bajo las ecuaciones (2.1) y (2.2) muestran que no es difícil pensar que esta nueva expresión  $G$  tiene que satisfacer  $Gg_{ij} = \lambda I = g_{ij}G$ , es decir, su

<sup>2</sup>El nombre de los vectores se remonta a la geometría diferencial, en la cual la dirección en la que se derivaba era –como lo sigue siendo– muy importante.

transformación bajo cambios de coordenadas, es de la forma:

$$\hat{G}(z) = \sum_{k,l=1}^n G(x) \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^l},$$

para ser congruentes con la herramienta presentada tomaremos  $G = g^{ij}$ , es decir:

$$\hat{g}^{ij}(z) = \sum_{k,l=1}^n g^{kl}(x) \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^l},$$

la cual mantendrá invariante las longitudes para un covector. Es decir

$$|\xi|^2 = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \xi_i \xi_j. \quad (2.5)$$

siendo  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Hemos mostrado varios ejemplos de vectores, covectores y formas cuadráticas, a todos los llamaremos *tensores*, clasificaremos éstos de la manera siguiente:

- *Escalares*. Invariantes bajo el cambio de coordenadas, son tensores de rango cero.
- *Vectores*  $\xi = (\xi^i)$ . Como los vectores tangentes a una curva, son de rango uno y se transforman de acuerdo a:

$$\hat{\xi}^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial z^j}{\partial x^i}.$$

- *Covectores*  $\xi = (\xi_i)$ . Como el gradiente a una función, son de rango uno y se transforman de acuerdo a:

$$\hat{\xi}_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial z^j}.$$

- Los coeficientes  $g_{ij}$  del producto escalar de vectores, son de rango dos y se transforman como:

$$\hat{g}_{ij}(z) = \sum_{k,l=1}^n g_{kl}(x) \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}.$$

- Los coeficientes  $g^{ij}$  del producto escalar de covectores, son de rango dos y se transforman como:

$$\hat{g}^{ij}(z) = \sum_{k,l=1}^n g^{kl}(x) \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^l}.$$

- Operadores lineales  $A = (a_j^i)$  en vectores (o covectores), son de rango dos y se transforman como:

$$\hat{a}_j^i = \sum_{k,l=1}^n a_l^k(x) \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}.$$

Siendo en todos los casos anteriores:

$$x^i = x^i(z^1, \dots, z^n), \quad z^j = z^j(x^1, \dots, x^n)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \delta_j^i.$$

para  $i, j = 1, \dots, n$ .

Con los ejemplos vistos, lo único que resta por el momento es generalizar la forma en que se presentan los tensores.

**Definición.** Un tensor del tipo  $(p, q)$  y rango  $p+q$  es una familia de números  $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  dados para cada punto del espacio en las coordenadas  $\{x^1, \dots, x^n\}$ . Estas componentes, bajo un cambio de coordenadas  $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$ , se transforman de acuerdo a la fórmula:

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \sum_{(k)(l)} \hat{T}_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{k_p}} \frac{\partial z^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial z^{l_q}}{\partial x^{j_q}} \quad (2.6)$$

con  $\hat{T}_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}$  las componentes del tensor relativo a las coordenadas  $\{z^1, \dots, z^n\}$ ; y donde los índices  $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q$  toman los valores naturales desde el 1 hasta  $n$ .

Hay que notar que si  $S$  y  $T$  son dos tensores del tipo  $(p, q)$ , anclados en el mismo punto  $x$  en las mismas coordenadas, entonces éstos se comportan como matrices; es decir,  $\lambda S + \mu T = U$ , donde  $U$  es nuevamente un tensor del tipo  $(p, q)$ , que se encuentra en el mismo sitio.

Las combinaciones de tensores del mismo tipo pueden verse justamente como combinaciones lineales, es decir, pueden generarse bases, denotar tensores unitarios y ortogonales y demás nociones de álgebra lineal. La dimensión del espacio vectorial de tensores del tipo  $(p, q)$  es en cada punto  $n^{p+q}$ .

Podemos introducir una forma más conveniente para escribir la regla de transformación de los tensores. Se llama *convención de Einstein* a la supresión del símbolo de suma cuando el índice respecto al cual se suma, se repite dos veces en la expresión; siendo siempre una como supraíndice (o en el numerador de una parcial) y la otra como subíndice (o en el denominador de una parcial). Por ejemplo: si se tiene el cambio de coordenadas

$$x^k = x^k(z^1, \dots, z^n), \quad k = 1, \dots, n,$$

cuando tomemos de manera implícita la suma, podemos escribir la regla (2.6) y su análoga como:

$$T_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} = \hat{T}_{l_1 \dots l_n}^{k_1 \dots k_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial z^{k_n}} \frac{\partial z^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial z^{l_n}}{\partial x^{j_n}}$$

y

$$\hat{T}_{l_1 \dots l_n}^{k_1 \dots k_n} = T_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_n}}{\partial x^{i_n}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_n}}{\partial z^{l_n}}.$$

Veamos ahora tres tipos de operaciones con tensores que serán útiles en el futuro:

i) Permutación de índices. Una permutación  $\sigma$  de enteros  $1, \dots, q$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & q \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(q) \end{pmatrix},$$

se define como  $\sigma(j_1, \dots, j_q) = (j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(q)})$  la acción sobre la  $n$ -ada ordenada  $(j_1, \dots, j_q)$ . Entonces, el tensor  $\hat{T}_{(j)}^{(i)}$  se obtiene del tensor  $T_{(j)}^{(i)}$  si:

$$\hat{T}_{(j)}^{(i)} = T_{\sigma(j)}^{(i)}.$$

De forma análoga, se puede enunciar esta operación para los supraíndices. Además, para tensores de rango dos, será equivalente a la transposición de matrices, como  $\hat{T}_{ij} = T_{ji}$  es justamente  $\hat{T}_{ij} = (T_{ij})^t$ .

Hay que notar también que la permutación no es posible entre supraíndices y subíndices dado que la operación no es invariante bajo cambios de coordenadas. Los supraíndices provienen del cambio de los espacios tangentes mientras los subíndices del cambio de un campo en el espacio.

ii) Contracción de índices (o toma de trazas). Un tensor  $T$ , del tipo  $(p, q)$  se contrae

$$\hat{T}_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = T_{j_1 \dots j_{i_{q-1}} i_{q-1} \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{k-1} i_{k-1} \dots i_{p-1}}$$

en un tensor  $\hat{T}$  del tipo  $(p-1, q-1)$  cuando uno de los índices superiores es igual a uno de los inferiores. En matrices el tensor  $T_j^i$  del tipo  $(1, 1)$ , lleva al escalar  $T_j^i$ , la traza de  $T$ .

iii) Producto de tensores. Dos tensores  $T$  y  $S$  del tipo  $(p, q)$  y  $(r, s)$  respectivamente, definen su producto  $U = T \otimes S$  del tipo  $(p+r, q+s)$  con los componentes:

$$U_{j_1 \dots j_{q+s}}^{i_1 \dots i_{p+r}} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} S_{j_{q+1} \dots j_{q+s}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}}.$$

Notemos que como en matrices el producto no es necesariamente conmutativo, dado que  $i_1 \dots i_{p+r}$  y  $j_1 \dots j_{q+s}$  quedarían en desorden.

Observemos como la operación *ii*) genera un nuevo concepto de subir y bajar índices en los tensores, y con estos podemos ver algunas propiedades no mencionadas en los párrafos anteriores. Conjuntamente con la operación *iii*) obtenemos  $g_{ik}g^{ij} = \delta_k^j$ , por ejemplo.

Tomemos dos vectores  $\xi = (\xi^i)$  y  $\eta = (\eta^j)$  en el mismo punto. Habíamos dicho que la norma de cada uno de ellos se escribe como:

$$|\xi|^2 = g_{ij}\xi^i\xi^j.$$

Y dado que  $\langle \xi, \xi \rangle = |\xi|^2$ , entonces el producto escalar es:

$$\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}\xi^i\eta^j.$$

Es claro que la contracción de índices nos da como resultado un escalar. Si ahora multiplicamos este tensor del tipo  $(0, 2)$ , por sólo un vector, la operación *ii*) nos dice que el resultante debe de ser un covector:

$$g_{ij}\xi^i = \xi_j,$$

el cual decimos que está asociado al vector original.

Notemos ahora cómo el tensor  $g_{ij}$ , que llamaremos métrica, nos ayuda en la contracción de índices en tensores de cualquier rango; de igual manera da la posibilidad de cambiar uno de tipo  $(p, q)$  por otro de tipo  $(p-1, q+1)$ , es decir,

$$g_{ij}T_{j_1, \dots, j_q}^{i, i_2, \dots, i_p} = T_{j, j_1, \dots, j_q}^{i_2, \dots, i_p}.$$

No es difícil ver que si bajamos un índice que volvemos a subir, obtendremos el mismo tensor de origen.

## 2.3. La métrica

En geometría riemanniana con el uso del álgebra tensorial tomaremos la métrica como una 2-forma, es decir un tensor del tipo  $(0, 2)$ , que denotará la manera en que la variedad en cuestión cambia en cada dirección.

De forma oculta estas ideas se encuentran en la sección anterior, las ecuaciones (2.3) y (2.5) nos muestran cómo a partir de la métrica  $g_{ij}$  podemos medir el tamaño de cada vector o covector, la ecuación (2.4) nos da la regla con la que variaremos la métrica dada una pareja de cambio de base.

Ahora podemos medir la longitud de arco de cualquier curva en la variedad, tomando la idea diferencial, tenemos:

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{t_0}^t \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{g_{ij} \xi^i \xi^j} dt \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{\hat{g}_{kl} \frac{dz^k}{dx^i} \frac{dz^l}{dx^j} \xi^i \xi^j} dt \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{\hat{g}_{kl} \eta^k \eta^l} dt, \end{aligned}$$

lo cual muestra que la longitud de arco de una curva es invariante bajo los sistemas de coordenadas que usemos. De manera análoga podemos emplear la métrica para medir la longitud en los covectores, tomando:

$$S(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{g^{ij} \xi_i \xi_j} dt.$$

Con un desarrollo similar se muestra que  $S(t)$  es invariante bajo cambios de coordenadas.

## 2.4. Geodésicas y curvatura

Nuestra idea intuitiva de curvatura proviene de las superficies dos dimensionales que están inmersas en un espacio ordinario de tres dimensiones euclideo. Normalmente, se piensa en una superficie curvada por la forma en que se dobla en  $\mathbb{R}^3$ . El interés que tendremos es de investigar la curvatura del espacio-tiempo. Hasta donde sabemos no existe una inmersión natural de esta variedad (nuestro espacio-tiempo) en un espacio de dimensión mayor<sup>3</sup>. Por lo tanto, nuestra meta es desarrollar una noción de curvatura “intrínseca” sin importar donde esté inmersa.

<sup>3</sup>Esto no implica que desconozcamos que esto tiene un límite, lo único es que no sabemos aún cómo es dicha variedad, sólo sabemos que es 4-dimensional.

Dado que la métrica cambiará la manera de medir distancias punto a punto y la longitud de arco entre dos puntos dependerá de la curva en cuestión, entonces, será plausible unir los conceptos para hallar la trayectoria que nos lleve de  $A$  a  $B$  en el recorrido más corto. Hemos dicho que estas curvas son conocidas como *geodésicas*.

Bien, ¿y qué relación tiene con la curvatura todo esto? Realmente es la culpable de que estas trayectorias ya no sean la línea recta como sucedía en nuestra experiencia euclideana. Los casos de superficies son estudiados en libros de geometría diferencial<sup>4</sup>.

En nuestro contexto cotidiano es fácil considerar la Tierra como una esfera regular. Si a ésta le pegamos en un punto un plano –el cual por lo tanto será tangente–, veremos que toda la superficie de la esfera se queda de un solo lado de este plano. Es decir, en cualesquiera dos direcciones que se genere el plano (digamos el eje  $x$  y el eje  $y$ ), la superficie “dobla” en la misma dirección, lo cual, determinaremos como una curvatura de signo positivo,  $K > 0$ .

En caso de que el plano no pueda colocarse de manera tal que toque un sólo punto, entonces tenemos dos casos genéricos: cuando aún así la superficie queda de un solo lado del plano,  $K = 0$ , como el caso de los cilindros; y cuando la superficie se encuentra a ambos lados del plano, en cuyo caso, tomaremos esta curvatura como negativa,  $K < 0$ .

Estos casos son las ideas intuitivas y generales, dado que solo tomaremos en cuenta estas referencias para vecindades cercanas al punto donde hemos colocado el plano tangente. Asimismo, ha de mencionarse que esta  $K$  se conoce como la curvatura gaussiana y se encuentra como el producto de la curvatura en las dos direcciones principales, es decir, las más extremas.

Parándonos nuevamente sobre la Tierra nos preguntamos cómo encontrar estas geodésicas dada la superficie. Es más fácil de lo que aparenta. Si caminamos en “línea recta” (lo cual no es posible pues estamos en una superficie curva, pero la sensación si la obtenemos), lo hacemos en una geodésica, en un movimiento perpendicular al radio, pero sobre éste.

Agrandemos la imagen. Seguimos caminando en nuestra línea recta, sin cambiar de dirección y justamente con el radio que nos une al centro girando en una única dirección. Así, la intersección del plano de los radios y la esfera será la geodésica: un círculo de radio máximo de la esfera. Es decir, tanto el Ecuador como los meridianos son geodésicas, pero los paralelos no.

Necesitaremos seguir elaborando los conceptos del álgebra tensorial para

---

<sup>4</sup>Puede tomarse [Do Carmo, 1989] como referencia.

llevar estas ideas a la geometría riemanniana. Será necesario comprender cómo derivar los vectores y covectores, para lo cual abordaremos el tema de la derivada covariante. Luego podremos entonces hablar del *transporte en paralelo*, es decir, de nuestra caminata por la Tierra.

## 2.5. Derivada covariante

Tenemos ya las reglas básicas del álgebra tensorial, con ellas podremos construir un nuevo concepto que nos servirá para comprender las implicaciones de trasladar diferencialmente estos elementos matemáticos. Con la *derivada covariante* estaremos en condiciones de mover los vectores y tensores de manera “paralela” en una variedad, por lo cual ésta define un *transporte en paralelo*.

Para dos sistemas coordenados  $\{x^1, \dots, x^n\}$  y  $\{z^1, \dots, z^n\}$  podemos tomar el cambio de base lineal como:

$$x^i = a_j^i z^j \quad y \quad z^j = b_i^j x^i$$

con  $i, j = 1, \dots, n$ , de tal forma que  $a_j^i$  y  $b_i^j$  sean constantes y cumplan que  $a_k^i b_j^k = \delta_j^i$ . De la definición (ecuación 2.6) tenemos:

$$\hat{T}_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{j_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial z^{l_p}} = T_{(j)}^{(i)} b_{(i)}^{(k)} a_{(l)}^{(j)},$$

dado que  $\partial x^i / \partial z^j = a_j^i$  y  $\partial z^i / \partial x^j = b_j^i$ . Y donde, de aquí en adelante,  $(i) = i_1 \dots i_p$  al igual que los otros paréntesis.

Teniendo en cuenta que tanto  $a_i^j$  como  $b_i^k$  son constantes, al derivar  $T_{(l)}^{(k)}$  respecto a  $z^r$  obtendremos:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{(l);r}^{(k)} &= \frac{\partial \hat{T}_{(l)}^{(k)}}{\partial z^r} \\ &= \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial z^r} b_{(i)}^{(k)} a_{(l)}^{(j)} \\ &= \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial z^r} b_{(i)}^{(k)} a_{(l)}^{(j)} \\ &= T_{(j);s}^{(i)} a_r^s a_{(l)}^{(j)} b_{(i)}^{(k)}, \end{aligned}$$

lo cual, muestra que un tensor del tipo  $(p, q)$  al derivarlo *covariantemente* se transforma en un tensor del tipo  $(p, q + 1)$  bajo el cambio de coordenadas lineal que tomamos.

De este modo, la derivada covariante de un vector y un covector es:

$$\frac{\partial T^i}{\partial x^k} = T^i{}_{;k} \quad y \quad \frac{\partial T_i}{\partial x^k} = T_{i;k}.$$

Generalizando con cambios de base tales que  $a_j^i$  y  $b_j^i$  no sean constantes, tendremos:

$$\begin{aligned} \hat{T}^k{}_{;r} &= \frac{\partial \hat{T}^k}{\partial z^r} = \frac{\partial}{\partial z^r} \left( T^i \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \right) \\ &= \frac{\partial T^i}{\partial z^r} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} + T^i \frac{\partial}{\partial z^r} \left( \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \right) \\ &= \frac{\partial T^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial z^r} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} + T^i \frac{\partial}{\partial x^q} \left( \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial x^q}{\partial z^r} \\ &= \frac{\partial T^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial z^r} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} + T^i \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^q \partial x^i} \frac{\partial x^q}{\partial z^r} \end{aligned}$$

para vectores y para covectores:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{l;r} &= \frac{\partial \hat{T}_l}{\partial z^r} = \frac{\partial}{\partial z^r} \left( T_j \frac{\partial x^j}{\partial z^l} \right) \\ &= \frac{\partial T_j}{\partial z^r} \frac{\partial x^j}{\partial z^l} + T_j \frac{\partial}{\partial z^r} \left( \frac{\partial x^j}{\partial z^l} \right) \\ &= \frac{\partial T_j}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial z^r} \frac{\partial x^j}{\partial z^l} + T_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial z^r \partial z^l}. \end{aligned}$$

Con lo cual se puede observar que en ninguno de los dos casos obtenemos un nuevo tensor, dado que  $(\partial^2 z^k / \partial x^q \partial x^i)$  o  $(\partial^2 x^j / \partial z^r \partial z^l)$  no son componentes tensoriales como las que definimos.

Queremos entonces poder tomar un “gradiente generalizado” y encontrar el modo en que se transformarán los tensores bajo cambios de coordenadas; después analizaremos lo que estos términos no tensoriales significan.

Primero, tomemos un tensor  $T$  en el espacio en términos euclidianos  $\{x^1, \dots, x^n\}$  y veamos el efecto de esta operación, para luego, transformar el resultado obtenido en un sistema de coordenadas distintas  $\{z^1, \dots, z^n\}$ , de esta forma:

$$T_{(j);s}^{(i)} = \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial x^s},$$

es decir,

$$\hat{T}_{(l);r}^{(k)} = T_{(j);s}^{(i)} \frac{\partial z^{(k)}}{\partial x^{(i)}} \frac{\partial x^{(j)}}{\partial z^{(l)}} \frac{\partial x^s}{\partial z^r}.$$

Tomemos nuevamente primero el caso en el que el tensor es del tipo (1, 0):

$$\begin{aligned}\hat{T}^k{}_{;r} &= T^i{}_{;s} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^s}{\partial z^r} \\ &= \frac{\partial T^i}{\partial x^s} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^s}{\partial z^r} \\ &= \frac{\partial T^i}{\partial z^r} \frac{\partial z^k}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

Dado que  $T^i$  es un vector, tenemos  $\hat{T}^k = T^i(\partial z^k/\partial x^i)$ , con lo cual:

$$\hat{T}^k{}_{;r} = \frac{\partial T^i}{\partial z^r} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial z^r} (\hat{T}^k) - T^i \frac{\partial}{\partial z^r} \left( \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \right),$$

y usando  $T^i = \hat{T}^k(\partial x^i/\partial z^k)$ , obtenemos:

$$\hat{T}^k{}_{;r} = \frac{\partial \hat{T}^k}{\partial z^r} - \hat{T}^l \frac{\partial x^i}{\partial z^l} \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial z^r}.$$

Si escribimos:

$$\Gamma_{lr}^k = - \frac{\partial x^i}{\partial z^l} \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial z^r},$$

la ecuación queda simplemente como:

$$\hat{T}^k{}_{;r} = \frac{\partial \hat{T}^k}{\partial z^r} + \hat{T}^l \Gamma_{lr}^k.$$

De manera análoga podemos calcular un resultado similar cuando tomamos un tensor del tipo (0, 1).  $\hat{T}_{i,r}$  será dado en términos de un campo de covectores  $T_j$ .

$$\begin{aligned}\hat{T}_{i,r} &= T_{j;s} \frac{\partial x^j}{\partial z^l} \frac{\partial x^s}{\partial z^r} \\ &= \frac{\partial T_j}{\partial x^s} \frac{\partial x^j}{\partial z^l} \frac{\partial x^s}{\partial z^r} \\ &= \frac{\partial T_j}{\partial z^r} \frac{\partial x^j}{\partial z^l} \\ &= \frac{\partial}{\partial z^r} \left( \hat{T}_k \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial x^j}{\partial z^l} \\ &= \frac{\partial \hat{T}_k}{\partial z^r} \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^l} + \hat{T}_k \frac{\partial}{\partial z^r} \left( \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial x^j}{\partial z^l} \\ &= \frac{\partial \hat{T}_k}{\partial z^r} + \hat{T}_k \frac{\partial x^p}{\partial z^r} \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^p \partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^l} \\ &= \frac{\partial \hat{T}_k}{\partial z^r} - \hat{T}_k \Gamma_{rl}^k.\end{aligned}$$

Lo enunciaremos como teorema sin demostración<sup>5</sup>.

**Teorema.** Sean  $T_{(j)}^{(i)}$  las componentes de un tensor del tipo  $(p, q)$ , y  $T_{(j);s}^{(i)}$  un tensor (con respecto a un cambio de coordenadas euclidianas  $\{x^1, \dots, x^n\}$ ), dado por la fórmula:

$$T_{(j);s}^{(i)} = \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial x^s}.$$

Entonces, en términos de coordenadas arbitrarias  $\{z^1, \dots, z^n\}$  las componentes transformadas  $\hat{T}_{(l);r}^{(k)}$  estarán dadas por:

$$\hat{T}_{(l);r}^{(k)} = \frac{\hat{T}_{(l)}^{(k)}}{\partial z^r} + \sum_{n=1}^p \hat{T}_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots (k_n \rightarrow i) \dots k_p} \Gamma_{ir}^{k_n} - \sum_{n=1}^q \hat{T}_{l_1 \dots (l_n \rightarrow i) \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \Gamma_{l_n r}^i$$

con las familias  $\Gamma_{ij}^k$  como las describimos con anterioridad y donde la notación  $k_1 \dots (k_n \rightarrow i) \dots k_p$  significa que en la  $p$ -tupla el término  $k_n$  se reemplaza por  $i$ , de manera análoga en  $l_1 \dots (l_n \rightarrow i) \dots l_q$ , si la  $q$ -tupla se reemplaza  $l_n$  por  $i$ .

Los resultados más importantes serán para tensores de rango 2:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{j;k}^i &= \frac{\partial \hat{T}_j^i}{\partial z^k} + \hat{T}_j^p \Gamma_{pk}^i - \hat{T}_p^i \Gamma_{ik}^p \\ \hat{T}_{ij;k} &= \frac{\partial \hat{T}_{ij}}{\partial z^k} - \hat{T}_{pj} \Gamma_{ik}^p - \hat{T}_{ip} \Gamma_{jk}^p \\ \hat{T}^{ij}_{;k} &= \frac{\partial \hat{T}^{ij}}{\partial z^k} + \hat{T}^{pj} \Gamma_{pk}^i + \hat{T}^{ip} \Gamma_{pk}^j \end{aligned}$$

### 2.5.1. Los símbolos de Christoffel $\Gamma_{ij}^k$

Se introdujeron los símbolos de Christoffel en la derivada covariante como:

$$\Gamma_{lr}^k = - \frac{\partial x^i}{\partial z^l} \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial z^r}.$$

Ahora, usaremos las ecuaciones de Euler-Lagrange en las geodésicas para mostrar que los podemos escribir como

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ij} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

<sup>5</sup>Véase [Dubrovin *et al.*, 1992].

Haciendo así una relación directa entre la derivada covariante y la métrica de una variedad. Para ello hay que recordar que hemos mencionado que las geodésicas son  $\nabla_T T = 0$ , o bien

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0,$$

dado que se quiere que las trayectorias no tengan aceleración.

Sobre una curva  $\gamma$  se tiene la acción

$$S[\gamma] = \int_P^Q L(x, \dot{x}) dt,$$

tomando  $L(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}$ , entonces, se busca minimizar la acción

$$S[\gamma] = \int_P^Q \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt$$

cuyo resultado nos dará la trayectoria de las geodésicas.

**Teorema.** Si  $S[\gamma]$  alcanza su mínimo en una curva suave  $\gamma_0$ , entonces se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0.$$

Tomaremos  $L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$  al parametrizar por longitud de arco en la ecuación anterior, conocida como lagrangiano. Así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^i} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} &= g_{ij} \dot{x}^j, \end{aligned}$$

y por lo tanto, sutituyendo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^j + g_{ij} \ddot{x}^j \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^j \right) + g_{ij} \ddot{x}^j \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) + g_{ij} \ddot{x}^j. \end{aligned}$$

Haciendo en la tercera igualdad el cambio de nombres  $k \rightarrow j \rightarrow i \rightarrow k$  para el primer término y  $k \leftrightarrow i$  simplemente para el segundo. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \\ &= \ddot{x}^j g_{ij} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) \\ &= \ddot{x}^j g_{ij} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j \end{aligned}$$

Multiplicando, entonces, por  $g^{ij}$  de ambos lados de la igualdad se tiene

$$\ddot{x}^j + \frac{1}{2} g^{ij} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0,$$

siendo esta la ecuación de las geodésicas, las cuales habíamos dicho que tenían que cumplir la ecuación:

$$\ddot{x}^j + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0,$$

es decir, identificando términos, necesitamos que el símbolo de Christoffel sea:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ij} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (2.7)$$

Lo cual demuestra nuestra hipótesis.

### 2.5.2. Conexiones

En las secciones anteriores hemos mencionado y trabajado ya con conexiones de manera implícita. Una *conexión*, o en términos más específicos una *conexión geométrico-diferencial*, es simplemente la operación de la diferenciación covariante. Para la cual había sido necesario el uso de los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ .

Habíamos dicho que dadas las componentes  $T_{(j)}^{(i)}$  de un tensor del tipo  $(p, q)$ ; los elementos  $T_{(j);k}^{(i)}$  de la diferenciación covariante dada en términos de coordenadas euclidianas  $x^1, \dots, x^n$  está dada por la fórmula

$$T_{(j);k}^{(i)} = \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial x^k} \quad (2.8)$$

mientras en términos de coordenadas arbitrarias  $z^1, \dots, z^n$  las componentes transformadas de  $\hat{T}_{(s);i}^{(r)}$  están dadas por

$$\hat{T}_{(l);r}^{(k)} = \frac{\hat{T}_{(l)}^{(k)}}{\partial z^r} + \sum_{n=1}^p \hat{T}_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots (k_n \rightarrow i) \dots k_p} \Gamma_{ir}^{k_n} - \sum_{n=1}^q \hat{T}^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots (l_n \rightarrow i) \dots l_q} \Gamma_{l_n r}^i$$

donde la notación  $k_1 \dots (k_n \rightarrow i) \dots k_p$  indica que en la  $p$ -tupla el término  $k_n$  se reemplaza por  $i$ .

Aquí justamente es donde empezaremos a profundizar en el concepto de conexión:

Si una conexión dada en coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  de tal forma que  $\Gamma_{pq}^k \equiv 0$ , entonces diremos que ésta es *euclídeana* (o afín) y se transformará bajo la forma de la ecuación (2.8).

Además, ahora estamos en posibilidades de entender cómo las cantidades  $\Gamma_{pq}^k$  se transforman bajo un cambio de coordenadas arbitrario  $z^i = z^i(x)$  para  $i = 1, \dots, n$ . Dejemos como antes que  $x^1, \dots, x^n$  denoten las coordenadas euclídeanas; entonces, en primera instancia tenemos que

$$\frac{\partial^2 z^k(x(z))}{\partial z^p \partial z^q} = 0$$

pero

$$\frac{\partial^2 z^k}{\partial z^p \partial z^q} = \frac{\partial}{\partial z^p} \left( \frac{\partial z^k}{\partial z^q} \right) = \frac{\partial}{\partial z^p} \left( \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^q} \right)$$

y por regla de la cadena

$$0 = \frac{\partial}{\partial z^p} \left( \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial x^j}{\partial z^q} + \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial z^p \partial z^q}$$

o mejor aún

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial z^p \partial z^q} \frac{\partial z^k}{\partial x^j} = - \frac{\partial x^i}{\partial z^p} \frac{\partial x^j}{\partial z^q} \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^j}$$

Entonces, podemos escribir:

$$\Gamma_{pq}^k = - \frac{\partial x^i}{\partial z^p} \frac{\partial x^j}{\partial z^q} \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial z^p \partial z^q} \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \quad (2.9)$$

$$\Gamma_{p'q'}^{k'} = - \frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}} \frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}} \frac{\partial^2 z^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} \frac{\partial z^{k'}}{\partial x^m} \quad (2.10)$$

A continuación, tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{pq}^k \frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}} \frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} &= -\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}} \frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}} \frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}} \frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} \\ &= -\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}} \frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}} \\ &= -\frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} + \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}}\end{aligned}$$

donde la última igualdad la obtenemos de que

$$\frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} = \frac{\partial}{\partial z^{p'}} \left( \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial z^{q'}} \right) = \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}} \frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}}.$$

De esta forma

$$\Gamma_{pq}^k \frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}} \frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} = \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}}.$$

Si multiplicamos el miembro del lado derecho por  $\partial z^{k'}/\partial z^k$  obtenemos:

$$\frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k} \left( \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} \right) = \frac{\partial z^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} = \Gamma_{p'q'}^{k'},$$

con lo cual, tenemos que la regla de transformaciones para nuestras conexiones es simplemente:

$$\Gamma_{p'q'}^{k'} = \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k} \left( \Gamma_{pq}^k \frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}} \frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} \right). \quad (2.11)$$

Con esto, tenemos la forma en la que se transforman los símbolos de Christoffel bajo cambios de coordenadas arbitrarios. Así, podemos hacer algunas observaciones:

**Observación 1.** Las funciones  $\Gamma_{pq}^k$  que determinan la diferenciación covariante de tensores se transforman como tales únicamente si el cambio de coordenadas es afín, es decir, si se compone de transformaciones lineales y traslaciones.

Esto es fácil de ver, dado que necesitamos necesariamente que para el cambio de coordenadas  $z^i = z^i(z^{1'}, \dots, z^{n'})$  se cumpla que  $\partial^2 z^k / \partial z^{p'} \partial z^{q'} \equiv 0$  y así, la ecuación (2.11) es únicamente

$$\Gamma_{p'q'}^{k'} = \Gamma_{pq}^k \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k} \frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}} \frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}}$$

**Observación 2.** La regla de transformación (2.11) difiere de un tensor del tipo (1, 2) únicamente por el sumando  $(\partial z^{k'}/\partial z^k)(\partial^2 z^k/\partial z^{p'}\partial z^{q'})$ . Dado que suponemos que es suave, tenemos que es simétrico en los índices  $p'$  y  $q'$ . Lo cual cancela los términos en  $\Gamma_{p'q'}^k - \Gamma_{q'p'}^k$ , y da lugar a:

$$T_{pq}^k = \Gamma_{pq}^k - \Gamma_{qp}^k = \Gamma_{[pq]}^k$$

el tensor de torsión.

Más aún, diremos que una conexión  $\Gamma_{pq}^k$  es simétrica o libre de torsión si el tensor de torsión  $T_{pq}^k = \Gamma_{[pq]}^k$  es idénticamente cero; es decir si  $\Gamma_{pq}^k = \Gamma_{qp}^k$ .

Debemos hacer mención que en otro tipo de literatura la notación es diferente. En ocasiones es más cómoda, por ejemplo, la derivada covariante se escribe también como:

$$T_{(q);k}^{(p)} = \nabla_k T_{(q)}^{(p)}.$$

Con lo cual es fácil ver que la regla de Leibniz se cumple para la derivad del producto de tensores:

$$\nabla_k T_{(j)(m)}^{(i)(n)} = \nabla_k \left( R_{(j)}^{(i)} S_{(m)}^{(n)} \right) = \nabla_k \left( R_{(j)}^{(i)} \right) S_{(m)}^{(n)} + R_{(j)}^{(i)} \nabla_k \left( S_{(m)}^{(n)} \right).$$

## 2.6. Transporte paralelo

En esta sección hablaremos de un nuevo concepto que nos servirá para describir algunas de las nociones geométricas desde el punto de vista de las ecuaciones matemáticas. Comenzaremos con el *transporte en paralelo* o *derivada direccional*, con el que podremos construir las ya denominadas geodésicas y entender un poco más a fondo el concepto de curvatura.

Asimismo, comprenderemos cómo estos dos conceptos están (como hemos mencionado) íntimamente relacionados. Con el uso de una métrica definida, veremos que el espacio o la variedad se encuentra restringida a este concepto.

Comencemos con un vector  $\xi^k = dx^k/dt$  situado en un punto arbitrario  $P$ , y dejemos que  $T \left( = T_{(j)}^{(i)} \right)$  sea un tensor del tipo  $(p, q)$ . Definiremos la *derivada direccional* de  $T$  en  $P$  a lo largo de  $\xi$  simplemente como:

$$\nabla_{\xi} T_{(j)}^{(i)} = \xi^k \nabla_k T_{(j)}^{(i)}.$$

Claramente, por la contracción del índice  $k$ , el resultado será nuevamente un tensor del tipo  $(p, q)$ . Empero, si tomamos un tensor de rango cero, una función  $f$ , entonces la derivada direccional es

$$\nabla_{\xi} f = \xi^k \nabla_k f = \xi^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = \partial_{\xi} f,$$

que es justamente el concepto que coincide con nuestra idea tradicional de derivar en dirección del vector  $\xi$ . Es fácil ver que si

$$\nabla_{\xi} f(x^1, \dots, x^n) = 0,$$

entonces, la función  $f(x^1, \dots, x^n)$  es constante a lo largo de la curva definida por  $\xi$  como vector tangente, es decir:

$$\frac{dx^k}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} f(x^1, \dots, x^n) = 0$$

implica nuestra afirmación.

Para entender la analogía con tensores en general, haremos uso de las conexiones descritas en la sección anterior. Así, la derivada covariante, inmersa en este nuevo concepto, nos dotará de una estructura adicional en el espacio para comprender (o tal vez, más específico sería, definir) el significado de que dos campos tensoriales sean o no paralelos en dos puntos distintos de nuestra variedad.

Diremos que para toda conexión  $\Gamma_{ij}^k$  definida en el espacio, dado el sistema de coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ , y para una curva arbitraria  $x^i(t)$ , con  $t \in [0, 1]$ ; un campo tensorial  $T$  es *covariantemente constante* o *paralelo* si la derivada covariante en dirección del vector tangente  $\xi$  de la curva a lo largo de todo el segmento es cero:

$$\nabla_{\xi} T = \xi^k \nabla_k T = 0.$$

Que dada la conexión tomará la forma común:

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi} T_{(j)}^{(i)} &= \xi^k \nabla_k T_{(j)}^{(i)} \\ &= \xi^k \left( \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial x^k} + \sum_{n=1}^p T_{(j)}^{i_1 \dots i_n \rightarrow i \dots i_p} \Gamma_{ik}^{i_n} - \sum_{n=1}^q T_{j_1 \dots j_n \rightarrow j \dots i_q} \Gamma_{jn}^j \right) = 0. \end{aligned}$$

Donde nuevamente  $i_n \rightarrow i$  implica que en la p-tupla se cambia el término  $i_n$  por  $i$ , y de manera similar para la  $j$ .

Con esto queda claro que el concepto de paralelismo está totalmente definido por la elección de la curva  $x^i(t)$ . Un ejemplo sencillo de imaginar es situarnos en nuestra conocida Tierra, digamos en un punto  $P$  en el ecuador. Tomemos un vector que apunta al polo norte y viajemos por una curva que nos lleve a él. Al llegar, nuestro vector tangente que apuntaba al norte no lo hará más, éste apuntará realmente en el plano tangente en este punto. Ahora viajemos con el mismo vector a lo largo del ecuador, desde nuestro punto  $P$ , doce husos horarios; entonces, al estar del otro lado de la Tierra (en la

antípoda), el vector continuará apuntando hacia el norte. Viajemos nuevamente en dirección norte hasta el polo, al llegar ahí, veremos que nuestro vector paralelamente transportado se mantiene tangente al polo, pero esta vez ¡en dirección opuesta!

Asimismo, pudimos elegir distintas configuraciones de forma tal que apuntara en cualquier dirección; del mismo modo, pudimos hacer la elección de alguna curva suave que nos diera el mismo resultado.

Hay que notar que para vectores, y únicamente vectores en  $\mathbb{R}^3$ , el transporte en paralelo mantiene invariante el producto cruz del tangente de la curva con el vector a transportar en cuestión.

### 2.6.1. Geodésicas

Estamos ahora en condiciones de comprender cómo es que definiremos las *geodésicas*. Diremos que una curva  $x^i = x^i(t)$  es una geodésica, si dada una conexión  $\Gamma_{ij}^k$ , el campo vectorial generado por su vector tangente  $\xi^i = dx^i/dt$  es paralelo a lo largo de toda la curva. Es decir, si la curva transporta paralelamente su propio vector tangente. Así

$$\nabla_{\xi}\xi = 0.$$

Hay que notar que, en nuestra última imagen, el viaje de  $P$  al polo norte lo hicimos a lo largo de una geodésica.

Bien, podemos reescribir nuestra ecuación y obtener:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\xi}\xi \\ &= \frac{dx^j}{dt} \nabla_j \frac{dx^k}{dt} \\ &= \frac{dx^j}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{dx^k}{dt} \right) + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \right) \\ &= \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}. \end{aligned}$$

Esta última expresión nos proporciona las ecuaciones para las geodésicas:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad \text{con } k = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

Además notemos que si la conexión es euclideana ( $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ ), entonces obtenemos, como debemos, líneas rectas como solución.

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = 0$$

implica que  $x^i(t) = ax^i + b$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $i = 1, \dots, n$ .

Dadas las condiciones iniciales

$$x^k \Big|_{t=0} = x_0^k, \quad \frac{dx^k}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{x}_0^k, \quad k = 1, \dots, n$$

donde denotamos el punto de partida y la dirección, podemos asegurar la existencia y unicidad, pues (2.12) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo grado.

Si se observa el segundo término de (2.12) es claro que dada la permutación de los índices  $i$  y  $j$ , las geodésicas dependen, únicamente de la parte simétrica  $\Gamma_{(ij)}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k)$ , dada una conexión.

## 2.6.2. Curvatura

Sin embargo, hemos visto que el transporte en paralelo depende de la curva en cuestión que tomemos. Además, tanto para encontrar las geodésicas como para transportar tensores (o vectores) paralelamente nos lleva a resolver ecuaciones diferenciales. Buscaremos en esta sección una forma de entender cómo es que el espacio determina estas condiciones.

Lo que queremos mostrar es alguna manera de saber qué tanto una conexión  $\Gamma_{ij}^k$  se aleja de ser euclideana. Por ejemplo, si ésta fuera afín, entonces es claro que al movernos a lo largo de un vector  $\xi$  y luego uno  $\eta$ , será el mismo punto de llegada que si primero tomamos  $\eta$  y luego  $\xi$ . Pensemos otra vez en la Tierra; si caminamos una distancia grande —digamos unos 10,000  $km$ — y luego rotamos  $90^\circ$  a la derecha y recorremos otro tanto, no será el mismo lugar que si inicialmente hubiéramos rotado los  $90^\circ$ , luego de caminar el trecho, dar vuelta  $90^\circ$  a la izquierda y caminar nuevamente; sí, los lugares estarán relativamente cercanos, pero no serán el mismo.

Construiremos, ahora, una guía que nos ayude a medir cómo es que esto sucede. Para ello haremos uso de la igualdad en las derivadas parciales mixtas; es decir, si  $f$  es lo suficientemente suave, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$$

De esta forma, si existen coordenadas euclidianas para una conexión, que por tanto será simétrica, entonces en términos de estas coordenadas, la derivada covariante es simplemente una derivada parcial.

$$\nabla_k T_{(j)}^{(i)} = \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial x^k},$$

y así, la igualdad en las derivadas parciales mixtas cumplirá que:

$$\nabla_k \nabla_l T_{(j)}^{(i)} = 0.$$

Veamos entonces el caso general cuando la conexión  $\Gamma_{ij}^k$  no es afín, es decir, es una transformación diferencial cualquiera. Para un campo vectorial  $(T^i)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_l T^i &= \nabla_k \left( \frac{\partial T^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^i T^q \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial T^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^i T^q \right) + \Gamma_{pk}^i \left( \frac{\partial T^p}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^p T^q \right) - \Gamma_{lk}^p \left( \frac{\partial T^i}{\partial x^p} + \Gamma_{qp}^i T^q \right) \\ &= \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} T^q + \Gamma_{ql}^i \frac{\partial T^q}{\partial x^k} + \Gamma_{pk}^i \frac{\partial T^p}{\partial x^l} + \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p T^q \\ &\quad - \Gamma_{lk}^p \frac{\partial T^i}{\partial x^p} - \Gamma_{lk}^p \Gamma_{qp}^i T^q. \end{aligned}$$

Y de manera análoga obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_l \nabla_k T^i &= \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^l \partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} T^q + \Gamma_{qk}^i \frac{\partial T^q}{\partial x^l} + \Gamma_{pl}^i \frac{\partial T^p}{\partial x^k} + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p T^q \\ &\quad - \Gamma_{kl}^p \frac{\partial T^i}{\partial x^p} - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{qp}^i T^q. \end{aligned}$$

Cambiando  $p \rightarrow q$  en los terceros sumandos de cada igualdad y restando las expresiones anteriores, se consigue la siguiente identidad:

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i = \left( \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} \right) T^q + (\Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p - \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p) T^q - (\Gamma_{lk}^p - \Gamma_{kl}^p) \frac{\partial T^i}{\partial x^p}.$$

Dado que la derivada covariante sólo aumenta el rango al tensor, el resultado de la doble derivada covariante es también un tensor. Asimismo la suma y producto de tensores es un tensor. Por lo tanto, si introducimos

$$-R_{qkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p - \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p,$$

es fácil ver que  $R_{qkl}^i$  es un tensor, llamado el *Tensor de Curvatura de Riemann*.

Y podemos escribir

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i = -R_{qkl}^i T^q + T_{kl}^p \frac{\partial T^i}{\partial x^p}, \quad (2.13)$$

donde  $T_{kl}^p = \Gamma_{kl}^p - \Gamma_{lk}^p$  es el tensor de torsión.

Para una conexión simétrica, tenemos simplemente

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i = -R_{qkl}^i T^q,$$

ya que  $T_{kl}^p \equiv 0$ . Pero además, si la conexión fuera euclideana ( $\Gamma_{kl}^p \equiv 0$ ), tendríamos que  $R_{qkl}^i \equiv 0$ ; lo cual, nos denota la falta de curvatura, es decir, el espacio es plano.

Además, tenemos que la curvatura de Riemann cumple las siguientes cuatro propiedades:

(i)  $R_{qkl}^i = -R_{qlk}^i$ .

(ii) Si la conexión es simétrica,

$$R_{qkl}^i + R_{kll}^i + R_{lqk}^i = 0.$$

(iii) Sea una métrica  $g_{ij}$  compatible con la conexión. Definimos entonces, al bajar el índice,  $R_{iqkl} = g_{ip} R_{qkl}^p$ , entonces

$$R_{iqkl} = -R_{qikl}.$$

(iv) Si la conexión es simétrica y compatible con la métrica  $g_{ij}$ , entonces

$$R_{iqkl} = R_{klij}.$$

Estas propiedades están enunciadas como teorema en [Dubrovin *et al.*, 1992].

### 2.6.3. Usos en métricas definidas

En las dos últimas propiedades dadas en la subsección anterior hemos introducido un hecho sin explicación, el que una conexión sea compatible con una métrica. Esto lo describiremos entre otras cosas en este rubro.

**Definición.** Una conexión  $\Gamma_{ij}^k$  se dice que es *compatible con una métrica*  $g_{ij}$  si la derivada covariante del tensor métrico es idénticamente cero:

$$\nabla_k g_{ij} \equiv 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto, se cumple para un tensor que:

$$\nabla_k (g_{lm} T_{(j)}^{(i)}) = \nabla_k (g_{lm}) T_{(j)}^{(i)} + g_{lm} \nabla_k T_{(j)}^{(i)} = g_{lm} \nabla_k T_{(j)}^{(i)}.$$

Además, si los campos vectoriales  $T^i(t)$  y  $S^i(t)$  son paralelos a lo largo de una curva  $x^i = x^i(t)$ , entonces el producto escalar entre ambos campos se mantiene constante a lo largo de toda la curva. Con lo cual, podemos transportar bases de un espacio vectorial en un punto  $P$  a bases vectoriales en un punto  $Q$ .

**Teorema.** *Si la métrica  $g_{ij}$  es no singular –es decir, si su determinante no es cero– en una región del espacio, entonces, existe una única conexión simétrica compatible con la métrica. Y ésta es dada por la “Fórmula de Christoffel” (2.7):*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

La demostración se sigue de lo señalado en la subsección 2.5.1, donde construimos la Fórmula de Christoffel. Y con esto, podemos terminar esta sección enunciando un corolario.

**Corolario.** *Sea  $\Gamma_{ij}^k$  una conexión simétrica compatible con la métrica. Si las coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  son tales que en un punto todas las primeras derivadas parciales de las componentes  $g_{ij}$  de la métrica son cero, entonces en ese punto los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  son cero.*

## 2.7. Transformación exponencial

Para finalizar con la descripción de la matemática que emplearemos en el capítulo 4, con la que enunciaremos los teoremas de singularidades, necesitamos hablar de la *transformación exponencial*; también conocido como el *transformación esférico normal* o como el *transformación de Gauss*. Para ello usaremos algunas de las definiciones de la geometría diferencial. Y así, tendremos una manera natural de identificar la forma de la curvatura con lo que llamaremos el *elemento de volumen* que usaremos al integrar.

Recordemos entonces algunas cosas. Si en un espacio euclideo de dimensión tres tenemos una función  $z = f(x, y)$ , supongamos que tenemos un punto  $(x_0, y_0)$  de tal forma que el plano tangente a la superficie sea paralelo al plano  $xy$ . Esta especificación no es necesaria, pero así será más fácil imaginar los conceptos con los que trabajaremos a continuación. Tomemos  $(a_{ij})$  como la matriz *hessiana* de  $f(x, y)$ , es decir  $a_{ij} = \partial^2 f / (\partial x^i \partial x^j) = f_{x^i x^j}$ , con  $x^1 = x$  y  $x^2 = y$ . Hay que notar que la hessiana es una matriz simétrica dado que  $f_{xy} = f_{yx}$ .

Entonces, para la superficie  $z = f(x, y)$  en un punto  $(x_0, y_0)$  donde el

gradiente de  $f$  es cero, definimos la *curvatura principal* de la superficie como el producto de los valores propios de  $(a_{ij})$  evaluados en ese punto. Denotaremos por  $K = \det(a_{ij})$ , en cada punto, a la *curvatura gaussiana* y  $\text{tr}(a_{ij})$  será la *curvatura media* de la superficie en  $(x_o, y_o)$ .

Ahora, supongamos que en un espacio euclideo  $n$ -dimensional con coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  tenemos una hipersuperficie  $M^{n-1}$  definida por:

$$F(x^1, \dots, x^n) = 0,$$

con  $\text{grad}(F) \neq 0$ , localmente tomemos  $x^i = x^i(y^1, \dots, y^{n-1})$ . Consideremos además la forma:

$$K d\sigma = K \sqrt{|g|} dy^1 \dots dy^{n-1},$$

en la superficie<sup>6</sup>. En esta forma, cuando  $n = 2$ ,  $K$  nos denota la curvatura de la curva  $F$  y para  $n = 3$  la curvatura gaussiana. Los casos para  $n > 3$  no serán de nuestro interés.

Sea  $S^{n-1}$  la esfera de dimensión  $(n-1)$ , y denotemos por  $\Omega_{n-1}$  el elemento de volumen en ella. Éste será invariante bajo transformaciones ortogonales y estará dado por:

$$\begin{aligned} \Omega_{n-1} &= d\theta, & \text{para } n = 2; \\ \Omega_{n-1} &= \sin\theta d\theta d\phi, & \text{para } n = 3. \end{aligned}$$

con  $\theta$  el ángulo en coordenadas polares y  $\phi$  el segundo ángulo de las coordenadas esféricas.

Entonces, definimos el *transformación de Gauss*  $\psi$  de la superficie  $M^{n-1}$  a la esfera  $S^{n-1}$  como la transformación que manda el punto  $P$  de la superficie al vector ortonormal a  $T_P M$  en la esfera.

$$\psi : M^{n-1} \rightarrow S^{n-1}.$$

Ahora sí, con el siguiente teorema tendremos la manera natural de relacionar la forma de la curvatura  $K d\sigma$  con el elemento de volumen  $\Omega_{n-1}$ .

**Teorema.** Si  $x^i = x^i(y^1, \dots, y^{n-1})$  es una hipersuperficie en un espacio  $n$ -dimensional euclideo con coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ , entonces, para  $n > 1$

$$K d\sigma = \psi^*(\Omega_{n-1}).$$

Donde  $\psi^*$  es el "pullback" de  $\psi$ .

En los casos en los que nos interesa, tenemos:

<sup>6</sup>El producto de las  $dy^i$  debería de estar dado con el producto *cuña*, pero para no meter más notación, lo dejaremos de esta forma que nos servirá bien.

$n = 2$   $K dl = \psi^*(d\phi)$ , donde  $K$  es la curvatura de la curva.

$n = 3$   $K \sqrt{|g|} dy^1 dy^2 = \psi^*(\Omega)$ , donde  $K$  es la curvatura gaussiana de la superficie y  $\Omega = \text{sen}\theta d\theta d\phi$ .

Dado que para demostrar el teorema necesitamos hacer uso del producto cuña que no hemos mencionado, lo dejaremos sin demostración. Se puede buscar referencias al respecto en [Do Carmo, 1989], [Dubrovin *et al.*, 1992] o en [Stoker, 1969].

Con esto, damos por concluida esta introducción al álgebra tensorial, esperando que sea suficiente para comprender las ecuaciones y desarrollos que emplearemos más adelante.

## Capítulo 3

# Ecuación de Onda: la hermana pequeña

El estudio de la ecuación de onda no lineal y en general de algunas ecuaciones hiperbólicas será de gran utilidad en el resto de este trabajo. Sus soluciones pueden desarrollar singularidades, en un contexto más sencillo que el de algunas de las análogas resultantes de las ecuaciones de Einstein, las cuales, constituyen el tema principal de este trabajo. Es entonces esta ecuación, por así decirlo, el caso reducido o *pequeño* de las ecuaciones con las que trabajaremos más adelante.

La ecuación de onda es una ecuación diferencial parcial que describe distintos procesos ondulatorios. Las variables independientes son únicamente la posición y el tiempo, es decir, son  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $t$ . La ecuación de onda unidimensional –el caso estudiado en este trabajo– representa los movimientos ondulatorios de una cuerda vibrante; en dimensión igual a dos, los de una membrana delgada que oscila y en el caso tridimensional, los de sólidos elásticos.

Sin embargo, debemos observar que la ecuación de onda y en general los movimientos ondulatorios aparecen en una multitud de contextos; cuando hay olas en la superficie de un líquido o un resorte vibrando, si le pegamos a una varilla desde su base o si dejamos sonar un diapasón, obtenemos ondas que viajan en el tiempo y en algún medio, el espacio. Así, a distintas velocidades o frecuencias, encontramos que un fenómeno físico tiene una gama de particularidades. La luz azul y la roja son dos manifestaciones diferentes del mismo efecto, resultando un color diferente para distintas energías.

### 3.1. Deducción variacional

La ecuación de onda se puede deducir variacionalmente de la mecánica clásica a partir del principio de mínima acción. Primero recordaremos algunos aspectos de la mecánica clásica de una partícula, antes de abordar la deducción de la ecuación de onda en sí misma. Para este caso encontraremos variacionalmente la segunda ley de Newton, la cual afirma que la fuerza y la aceleración satisfacen:

$$m\ddot{x} = f(x),$$

con  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ , donde  $x$  es la posición y depende claramente del tiempo, es decir,  $x = x(t)$ . Además sabemos que  $f(x) = -\nabla U(x)$ , en donde  $U(x)$  es una función escalar que representa la energía potencial del sistema<sup>1</sup>. Si tomamos el caso de dimensión uno, entonces  $f(x) = -U'(x)$ .

Veamos qué pasa cuando consideramos la acción de una partícula  $x(t)$  al viajar de la posición  $x_o$  al tiempo  $t_o$  a la  $x_1$  al tiempo  $t_1$ . Esta acción está dada por:

$$S(x(t)) = \int_{t_o}^{t_1} \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - U(x(t)) dt,$$

donde el integrando dado por la energía cinética  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)$  menos la energía potencial  $U(x(t))$  es llamado el Lagrangiano  $L(x, \dot{x})$  del sistema.

Tomando el principio de la mínima acción<sup>2</sup> lo que queremos es justamente que  $S(x(t))$  sea mínimo. Para encontrar la trayectoria  $\hat{x}(t)$  que minimiza la acción utilizaremos una idea original de Lagrange:

Supongamos que tenemos la trayectoria  $\hat{x}(t)$ , una función de clase  $C^1$  que minimiza la acción, es decir, tal que:

$$S(\hat{x}(t)) \leq S(x(t)),$$

para cualquier trayectoria  $x(t)$ . Dado esto, lo que necesitamos es considerar todas las curvas que pasan por  $x_o$  y  $x_1$  en los tiempos correspondientes,  $t_o$  y  $t_1$ . Podemos entonces considerar las variaciones de  $\hat{x}(t)$ , es decir, una familia de trayectorias de la forma  $x(t, \varepsilon) = \hat{x}(t) + \varepsilon\varphi(t)$ , donde las funciones  $\varphi(t)$

<sup>1</sup>Se puede revisar el libro de [Marion y Thornton, 1988] donde se discute un poco la historia de los Lagrangianos y Hamiltonianos, capítulo 6, o si se quiere un texto más técnico, el libro de [Arnold, 1989] en el capítulo 4.

<sup>2</sup>Con el estudio de las variaciones, es posible encontrar casos en los que el sistema en cuestión no necesita cambiar, es decir, que se encuentra un punto crítico el cual se ha denominado como *acción estacionaria* dada su naturaleza.

son de clase  $C^1$  cualesquiera que cumplen:

$$\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = 0, \quad (3.1)$$

lo cual es claro ya que todas las trayectorias deben de coincidir con  $\hat{x}(t)$  en los puntos extremos  $x_0$  y  $x_1$ .

Además tenemos, de esta forma un mínimo cuando  $\varepsilon = 0$ , dado que en este caso  $x(t, 0) = \hat{x}(t)$ , justo la trayectoria que minimiza la acción. Ahora, si fijamos  $\hat{x}(t)$  y  $\varphi(t)$ , entonces la acción depende únicamente del escalar  $\varepsilon$ , y la denotaremos como:

$$S(\varepsilon) = S(\hat{x}(t) + \varepsilon\varphi(t)),$$

donde,

$$S'(0) = \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (3.2)$$

Tenemos de este modo, tomando  $\hat{x} = \hat{x}(t)$  y  $\varphi = \varphi(t)$  que:

$$\begin{aligned} S(\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} m \left[ \frac{d}{dt} (\hat{x} + \varepsilon\varphi) \right]^2 - U(\hat{x} + \varepsilon\varphi) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} m [\dot{\hat{x}} + \varepsilon\dot{\varphi}]^2 - U(\hat{x} + \varepsilon\varphi) dt. \end{aligned}$$

Con  $\dot{\hat{x}} = d\hat{x}/dt$  y  $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ . Hemos tomado a  $\varphi(t)$  como una función fija, por lo tanto, se comporta de forma escalar en la ecuación. Así, para corroborar la condición (3.2), calculando  $S'(\varepsilon)$  tenemos el siguiente desarrollo:

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2} [\dot{\hat{x}} + \varepsilon\dot{\varphi}]^2 - U(\hat{x} + \varepsilon\varphi) dt$$

y tomando la regla de Leibnitz, podemos intercambiar de orden la integral y la derivada dado que  $\hat{x}(t)$  y  $\varphi(t)$  son funciones de clase  $C^1$ , obteniendo de este modo:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\varepsilon} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{m}{2} [\dot{\hat{x}} + \varepsilon\dot{\varphi}]^2 - U(\hat{x} + \varepsilon\varphi) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} m(\dot{\hat{x}} + \varepsilon\dot{\varphi})\dot{\varphi} - U'(\hat{x} + \varepsilon\varphi)\varphi dt. \end{aligned}$$

Si integramos por partes el primer término, el que representa a la energía cinética  $E_c$ , tomando  $v = \dot{\hat{x}} + \varepsilon\dot{\varphi}$  y  $du/dt = \dot{\varphi}$ , llegamos a

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} -m(\ddot{\hat{x}} + \varepsilon\ddot{\varphi})\varphi - U'(\hat{x} + \varepsilon\varphi)\varphi dt + \left[ (\dot{\hat{x}} + \varepsilon\dot{\varphi})\varphi \right]_{t_0}^{t_1},$$

pero por la condición (3.1), el último sumando se anula. De este modo, si tomamos  $\varepsilon = 0$ , por la condición (3.2) tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} -m\ddot{\hat{x}}\varphi - U'(\hat{x})\varphi dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ -m\ddot{\hat{x}} - U'(\hat{x}) \right] \varphi dt. \end{aligned}$$

Al tomar  $\varphi(t)$  arbitrariamente, tenemos que, el primer factor del integrando es idénticamente cero, lo cual se conoce como el Lema fundamental del Cálculo de las Variaciones<sup>3</sup>. Escribiendo, de este modo:

$$-m\ddot{\hat{x}} - U'(\hat{x}) = 0,$$

o simplemente:

$$m\ddot{\hat{x}} = -U'(\hat{x}),$$

la ecuación de Euler-Lagrange. Dado que la derivada del potencial es la fuerza, entonces, recuperamos la segunda ley de Newton.

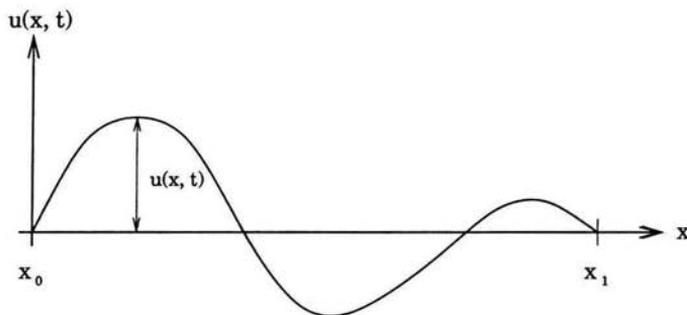


Figura 3.1: Cuerda onduladora.

Ahora queremos ver lo que sucede no con un sólo punto en el espacio, sino con una colección de ellos unidos de manera que generen una cuerda. Lo que tenemos es que la acción está dada por:

$$S(u) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} (u_t^2 - c^2 u_x^2) dt,$$

con  $u_t = \partial u / \partial t$  y  $u_x = \partial u / \partial x$ , donde  $u = u(x, t)$  representa el desplazamiento vertical de cada partícula de la cuerda al tiempo  $t$  y posición  $x$ , a partir de

<sup>3</sup>En el apéndice A se da una demostración del lema.

su posición de equilibrio. Por último se tiene  $c$  (Fig. 3.1), una constante que se relaciona con la velocidad<sup>4</sup>.

Usando la idea de Lagrange, suponemos que conocemos  $\hat{u}(x, t)$ , donde la acción es mínima. Haciendo de la misma manera el desarrollo, tomamos  $u(x, t) = \hat{u}(x, t) + \varepsilon\varphi(x, t)$  para cualquier trayectoria  $u(x, t)$  siempre que  $\varphi(x, t)$  sea de clase  $C^2$ , y satisfaga las condiciones en la frontera:

$$\begin{aligned}\varphi(x, t_0) &= \varphi(x, t_1) = 0, \\ \varphi(x_0, t) &= \varphi(x_1, t) = 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Si tomamos nuevamente que la acción depende únicamente del escalar  $\varepsilon$ , volvemos a tener un mínimo cuando  $\varepsilon = 0$ , es decir,

$$S(\varepsilon) = S(\hat{u}(x, t) + \varepsilon\varphi(x, t)),$$

entonces,

$$S'(0) = 0.$$

Tomemos nuevamente a  $\varphi$  como una función dada, entonces:

$$\begin{aligned}S(\varepsilon) &= \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} (\hat{u} + \varepsilon\varphi) \right)^2 - c^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} (\hat{u} + \varepsilon\varphi) \right)^2 \right] dt dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \left[ (\hat{u}_t + \varepsilon\varphi_t)^2 - c^2 (\hat{u}_x + \varepsilon\varphi_x)^2 \right] dt dx.\end{aligned}$$

Donde  $\varphi_t = \partial\varphi/\partial t$  y  $\varphi_x = \partial\varphi/\partial x$ .

Análogamente al caso de una partícula, calculamos la derivada con respecto a  $\varepsilon$ , y de este modo obtenemos:

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \left[ (\hat{u}_t + \varepsilon\varphi_t)^2 - c^2 (\hat{u}_x + \varepsilon\varphi_x)^2 \right] dt dx$$

Usamos la regla de Leibnitz nuevamente para intercambiar la derivada parcial con la doble integral, lo cual es posible, pues las funciones son de clase  $C^2$ .

De este modo

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\varepsilon} &= \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{1}{2} \left[ (\hat{u}_t + \varepsilon\varphi_t)^2 - c^2 (\hat{u}_x + \varepsilon\varphi_x)^2 \right] dt dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} (\hat{u}_t + \varepsilon\varphi_t)\varphi_t - c^2 (\hat{u}_x + \varepsilon\varphi_x)\varphi_x dt dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} (\hat{u}_t + \varepsilon\varphi_t)\varphi_t dt dx - c^2 \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} (\hat{u}_x + \varepsilon\varphi_x)\varphi_x dt dx.\end{aligned}$$

<sup>4</sup>El libro de [Goldstein, 1950] presenta en el capítulo 11 sección 1 la forma de encontrar  $E_c$  como  $\frac{1}{2}u_i^2$  y  $U$  como  $-\frac{1}{2}c^2u_x^2$ , al tomar el límite de un sistema formado por masas pequeñas, unidas en pares por resortes, formando así una cadena elástica.

Integrando ahora por partes: en la primera integral tomamos  $v = \hat{u}_t + \varepsilon\varphi_t$  y  $w_t = \varphi_t$  y en la segunda tomamos  $v = \hat{u}_x + \varepsilon\varphi_x$  y  $w_x = \varphi_x$ . Tomaremos por comodidad  $\partial^2 u / \partial t^2 = u_{tt}$  y  $\partial^2 u / \partial x^2 = u_{xx}$ , lo mismo con las parciales de  $\varphi$ , así obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\varepsilon} &= \int_{x_0}^{x_1} \left[ (\hat{u}_t + \varepsilon\varphi_t)\varphi \right]_{t_0}^{t_1} dx - \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} (\hat{u}_{tt} + \varepsilon\varphi_{tt})\varphi dt dx \\ &\quad - c^2 \int_{t_0}^{t_1} \left[ (\hat{u}_x + \varepsilon\varphi_x)\varphi \right]_{x_0}^{x_1} dt + c^2 \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} (\hat{u}_{xx} + \varepsilon\varphi_{xx})\varphi dt dx. \end{aligned}$$

Observemos que las integrales simples incluyen a  $\varphi$ , la que será evaluada en la frontera. Dado que la condición (3.3) dice que  $\varphi$  se anula en la frontera, tales integrales se anulan y se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\varepsilon} &= c^2 \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} (\hat{u}_{xx} + \varepsilon\varphi_{xx}) \varphi dt dx - \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} (\hat{u}_{tt} + \varepsilon\varphi_{tt})\varphi dt dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} [c^2(\hat{u}_{xx} + \varepsilon\varphi_{xx}) - (\hat{u}_{tt} + \varepsilon\varphi_{tt})]\varphi dt dx, \end{aligned}$$

usando de nuevo la condición  $S'(0) = 0$ , obtenemos:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} (c^2\hat{u}_{xx} - \hat{u}_{tt})\varphi dt dx.$$

Concluimos gracias al Lema fundamental del Cálculo de las Variaciones que el interior del paréntesis es cero, dado que esto se cumple para cualquier elección de  $\varphi(x, t)$ , la cual solamente tiene que ser de clase  $C^2$  y cumplir las condiciones de frontera. Tenemos de este modo que:

$$c^2\hat{u}_{xx} - \hat{u}_{tt} = 0$$

que se conoce como la ecuación de onda y se escribe normalmente como:

$$\hat{u}_{tt} - c^2\hat{u}_{xx} = 0$$

### 3.2. Ecuación de onda homogénea

Consideremos la ecuación de onda junto con sus condiciones de frontera

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0 \tag{3.4}$$

$$u(x, 0) = f(x) \tag{3.5}$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \tag{3.6}$$

donde  $f(x)$  es la condición inicial que representa la posición y  $g(x)$  es la velocidad inicial del movimiento de cada punto de la cuerda. Nótese además que ambas funciones dependen únicamente de la posición.

También podríamos escribir la ecuación (3.4) en forma operacional, escribiendo ésta como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = 0.$$

Factorizando,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0. \quad (3.7)$$

Ahora podemos resolver:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0 \quad (3.8)$$

o

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \quad (3.9)$$

y usar las soluciones para la ecuación (3.7). Usaremos la ecuación (3.8), buscaremos su solución y en el desarrollo será claro porque resolver ésta o la ecuación (3.9) tendrá un tratamiento similar.

Si tomamos

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix},$$

entonces (3.8) puede escribirse como:

$$\nabla u \cdot \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Es decir, lo que necesitamos, es que el gradiente de la solución sea ortogonal al vector  $(c, 1)^t$ . Esto se puede expresar como la necesidad de que la derivada en la dirección de este vector se anule, es decir, las soluciones en direcciones paralelas a  $(c, 1)^t$  deben mantenerse constantes.

Se ha mencionado que la solución es constante a lo largo de ciertas rectas, en las cuales, los valores iniciales son transportados sin cambio. A estas curvas se les llama las *características* de la ecuación. En este caso particular, tienen un desplazamiento a velocidad constante a través de rectas paralelas (ver Figura 3.2). Además en el caso que hemos considerado, éstas sólo dependen de la ecuación y no de la condición inicial  $f(x)$ .

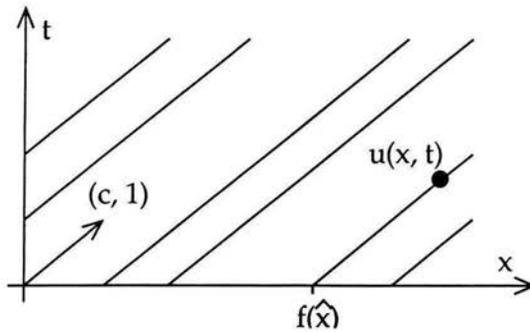


Figura 3.2: Solución constante. Características.

La existencia y análisis de las características es una herramienta importante. Hemos dicho que a lo largo de las rectas  $\hat{x} = x - ct$ , la ecuación de onda es constante.

Por lo tanto, conocemos con exactitud la altura en un punto para cada recta, esto es, cuando  $t = 0$ .

Dado que  $u(x, 0) = f(x)$  representa esta altura, podemos tomar  $\hat{x} = x$  como el punto de inicio de la característica, es decir que  $f(\hat{x}) = f(x)$  para cada  $x$  fija. Podemos entonces, considerar a  $u(x, t) = f(\hat{x}) = f(x - ct)$  como una solución. Obsérvese la Figura 3.2. Comprobemos que efectivamente es solución, como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c f'$$

sustituyendo en la ecuación (3.8), obtenemos claramente una identidad, lo cual nos indica que  $u(x, t)$  es una solución de la ecuación.<sup>5</sup>

Con un razonamiento similar se llega a la solución de la ecuación (3.9), la cual está dada por  $u(x, t) = f(x + ct)$ . Como se ve en la Figura 3.3 ahora las características son paralelas a un vector diferente  $(-c, 1)^t$  y por lo tanto, las curvas son distintas.

Dada la linealidad de la ecuación y los dos tipos de soluciones que hemos encontrado, es entonces razonable tomar una solución al problema (3.4-3.6),

<sup>5</sup>Si escribiéramos las rectas características como  $\hat{x} = x/c - t$ , el resultado sería exactamente el mismo, lo que quiere decir que no es de importancia la forma en que se parametricen las rectas.

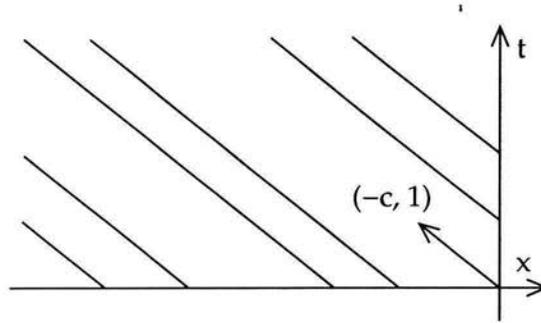


Figura 3.3: Características de  $u_t - cu_x = 0$ .

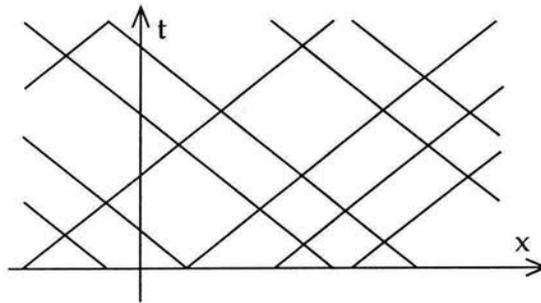


Figura 3.4: Características de la ecuación homogénea.

como una combinación de ambos resultados: el que encontramos al resolver la ecuación (3.8) y el de su ecuación análoga (3.9). Estas soluciones son ondas que viajan en direcciones paralelas al vector  $(c, 1)^t$ , que se obtubieron como resultado de la primera ecuación (3.8) y las ondas que nos dieron la solución del segundo operador (3.9), las cuales, son paralelas al vector  $(-c, 1)^t$ . El resultado del movimiento es entonces la suma de ambas soluciones, es decir, de ondas que se desplazan en dos direcciones distintas, de la forma:

$$u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct).$$

Usando las condiciones iniciales, vemos que:

$$u(x, 0) = v(x) + w(x) = f(x) \quad (3.10)$$

y

$$u_t(x, 0) = cv'(x) - cw'(x) = g(x). \quad (3.11)$$

Integrando la ecuación (3.11):

$$c(v(x) - w(x)) = \int_0^x g(s) ds,$$

es decir:

$$v(x) = w(x) + \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds,$$

donde a  $g(x)$  solamente se le pide ser integrable. Si usamos esta igualdad en la ecuación (3.10) obtenemos que:

$$2w(x) + \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds = f(x),$$

es decir,

$$w(x) = \frac{1}{2} \left( f(x) - \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds \right).$$

Análogamente se tiene:

$$v(x) = \frac{1}{2} \left( f(x) + \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds \right).$$

Así, la forma de la solución general está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v(x + ct) + w(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} \left( f(x + ct) + \frac{1}{c} \int_0^{x+ct} g(s) ds \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( f(x - ct) - \frac{1}{c} \int_0^{x-ct} g(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( f(x + ct) + f(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Esta expresión es conocida como la *fórmula de D'Alembert* y claramente cumple con las condiciones iniciales.

Antes de seguir, es de interés examinar la estructura de dicha fórmula. Los rangos de dominio estudian el cambio de la solución en general; ya sea cuando se cambia un único punto en la condición inicial por ejemplo, o toda la función original. Además nos da información precisa de que rango o intervalo afectan directa o indirectamente a un punto de la onda en un tiempo dado.

Para un punto dado  $p = p(x, t)$ , se puede conocer exactamente su valor; éste puede calcularse en la fórmula de D'Alembert. Obsérvese que si hacemos  $g(x) \equiv 0$ , entonces, solamente el valor de la condición inicial en  $x - ct$  y  $x + ct$

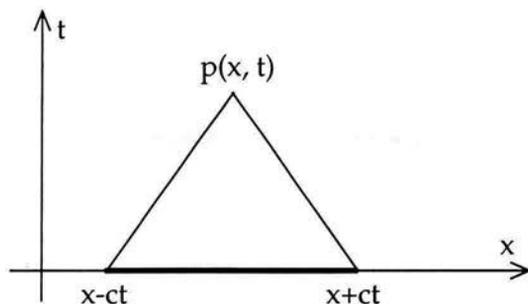


Figura 3.5: El intervalo  $(x - ct, x + ct)$  tiene influencia sobre el valor resultante en  $p(x, t)$ .

son responsables del valor de  $u(x, t)$  en  $p$  (ver Figura 3.5 y la fórmula (3.12)), por lo cual, si se alterara la función  $f(x)$  en cualesquiera otros puntos, el resultado en el punto observado sería el mismo.

Nótese también, que si ahora hacemos  $f(x) \equiv 0$  y  $g(x)$  es una función integrable, entonces la fórmula de D'Alembert (3.12) dice que el resultado en  $p$  depende de todo el intervalo  $I = \{y \mid x - ct \leq y \leq x + ct\}$ , aunque únicamente de estos puntos; es decir, si alteramos  $g(x)$  fuera del intervalo  $I$ , la solución en  $p$  no cambia.

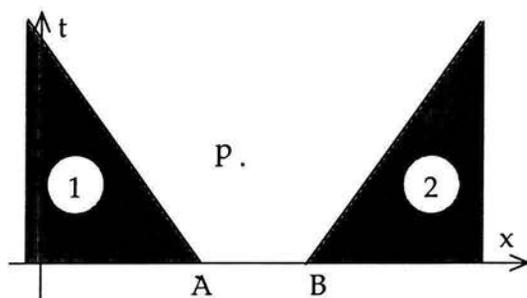


Figura 3.6: Las zonas sombreadas (1 y 2) no son alteradas por cambios en la condición inicial, si estos se efectúan entre A y B.

Las dos propiedades vistas en los párrafos anteriores serán conceptos de utilidad para la geometría en la Teoría de la Relatividad General, donde haremos referencia a estas regiones y su influencia en los conos de luz. Sin embargo, solamente hemos visto la información que viene de tiempos anteriores. ¿Qué pasa en el futuro de la ecuación si perturbamos un punto o un intervalo? ¿En qué difiere de la solución original?

En la Figura 3.6 se marcan los puntos  $A$  y  $B$  en el eje  $x$ , por lo visto anteriormente, sabemos que las zonas sombreadas no son alteradas por cambios o perturbaciones a la izquierda de  $A$  o a la derecha de  $B$  (respectivamente a las zonas sombreadas 1 y 2). Además las rectas características nos acotan un espacio de acción, donde es claro que para cualquier punto  $p$  si en el intervalo entre  $A$  y  $B$ ,  $g(x)$  es modificada, entonces su valor se alterará. Es también cierto que si alguna característica une al punto  $p$  con el eje  $x$ , entonces al modificar la condición inicial  $f(x)$  en ese punto cambiará también el resultado en el punto  $p$ .

### 3.3. Unicidad de la solución en la ecuación de onda

Dado que hemos mostrado la existencia de una solución de la ecuación de onda, solamente falta mostrar que dicha solución es única.

Supongamos que existen dos soluciones  $u(x, t)$  y  $\tilde{u}(x, t)$  del problema (3.4-3.6), entonces, si consideramos:

$$w(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t),$$

esta nueva función tiene que cumplir:

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \quad (3.13)$$

$$w(x, 0) = 0 \quad (3.14)$$

$$w_t(x, 0) = 0 \quad (3.15)$$

Ahora, multiplicamos la ecuación (3.13) por la parcial de  $w$  respecto a  $t$ :

$$w_t(w_{tt} - c^2 w_{xx}) = 0.$$

Con base a esta nueva ecuación se sigue el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b w_t(w_{tt} - c^2 w_{xx}) dx \\ &= \int_a^b w_t w_{tt} - c^2 w_t w_{xx} dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} w_t^2 \right] - c^2 w_t w_{xx} dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} w_t^2 \right] + c^2 w_x w_{xt} dx - w_x w_t \Big|_a^b, \end{aligned}$$

siendo la última identidad el resultado de la integración por partes del segundo término de la integral, donde  $v = w_{xx}$  y  $\tilde{v}_x = w_t$ . Además, dado que  $u(x, t)$  y  $\tilde{u}(x, t)$  son soluciones deben de cumplir las condiciones en la frontera:

$$u(a, t) = k(t) = \tilde{u}(a, t) \quad \text{y} \quad u(b, t) = l(t) = \tilde{u}(b, t)$$

o bien,

$$u_x(a, t) = k(t) = \tilde{u}_x(a, t) \quad \text{y} \quad u_x(b, t) = l(t) = \tilde{u}_x(b, t)$$

es claro entonces que  $w$  cumple:

$$w(a, t) = w(b, t) = 0$$

y por lo tanto:

$$w_t(a, t) = w_t(b, t) = 0$$

o simplemente:

$$w_x(a, t) = w_x(b, t) = 0$$

logrando así que el término *libre* desaparezca.

Y de esta forma, lo que tenemos es:

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} (w_t^2 + c^2 w_x^2) \right] dx = 0$$

usando la regla de Leibnitz podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \frac{1}{2} (w_t^2 + c^2 w_x^2) dx = 0$$

y como ya hemos mencionado,  $E_c = \frac{1}{2} w_t^2$  y  $U = \frac{1}{2} c^2 w_x^2$ ; por tanto, la energía total  $e(t)$  del sistema es justamente:

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_a^b w_t^2 + c^2 w_x^2 dx.$$

Esta función depende únicamente del tiempo, pues ya hemos integrado con respecto de la variable espacial. Entonces, tenemos que

$$\dot{e}(t) = \frac{d}{dt} e(t) = 0$$

lo cual nos dice que la energía es constante. Pero ésta al tiempo cero es nula, dado que:

$$\begin{aligned} e(0) &= \frac{1}{2} \int_a^b w_t(x, 0)^2 + c^2 w_x(x, 0)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b 0^2 + c^2 \left[ \frac{\partial}{\partial t} w(x, 0) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b c^2 \left[ \frac{\partial}{\partial t} 0 \right]^2 dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

y esto nos muestra que:

$$\frac{1}{2} \int_a^b w_t^2 + c^2 w_x^2 dx = 0.$$

Como  $w_t$  y  $w_x$  están elevadas al cuadrado, deben de anularse idénticamente. En otras palabras:

$$w(x, t) = cte.$$

y dado que  $w(x, 0) \equiv 0$ , entonces se tiene:

$$w(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t) \equiv 0$$

o simplemente:

$$u(x, t) \equiv \tilde{u}(x, t)$$

lo que significa que la solución es única, dado que  $u(x, t)$  y  $\tilde{u}(x, t)$  eran dos soluciones arbitrarias.

### 3.4. Ecuación de onda cuasilineal

Si en la ecuación (3.4) tomamos a la velocidad  $c$  como función de la solución misma, es decir  $c(u)$ , entonces la ecuación deja de ser lineal. Esto tiene muchas implicaciones físicas ya que la velocidad será distinta para posiciones y tiempos distintos; además ésta tendrá una velocidad de propagación distinta dependiendo de la amplitud de  $u(x, t)$ . Lo cual puede explicar de mejor manera algunos fenómenos, como las ondas en el agua; que cambian de velocidad según su profundidad, o bien las ondas acústicas que cambian de medio.

Probemos entonces si la antigua solución funciona –la que toma a  $c$  como constante– de este modo, tenemos:

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

Haciendo la diferenciación implícita vemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f' \left( 1 - c't \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

y despejando,

$$u_x = \frac{f'}{1 + c'f't}, \quad (3.16)$$

con el mismo método, obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f' \left( -c - c't \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

y

$$u_t = c \left( \frac{-f'c}{1 + c'f't} \right). \quad (3.17)$$

Se tiene con estas igualdades el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= c \left( \frac{-f'c}{1 + c'f't} \right) - c \left( \frac{f'}{1 - c'f't} \right) \\ &= \frac{-f'c + cf'}{1 + c'f't} = 0 \end{aligned}$$

Lo cual nos dice, que cuando la velocidad  $c$  depende de la solución misma, el resultado es el mismo que cuando la velocidad es constante.

Se había intuido también, en el desarrollo anterior, que la solución de la otra parte,  $(\partial/\partial t - c\partial/\partial x)u = 0$  estaba dada por  $u(x, t) = f(x + ct)$ , y de la misma manera podemos tomar aquí esta solución, lo cual nos dará una muestra análoga a la expresada en el párrafo anterior. De este modo, se puede tener una representación implícita de la solución de la ecuación de onda cuasilineal.

Nótese sin embargo que hemos supuesto que podemos derivar implícitamente. Además en las expresiones para  $u_t$  (3.16) y  $u_x$  (3.17) se tiene  $1 + c'f't$  como término en el denominador, el cual puede hacerse cero cuando  $f'$  o  $c'$  se hacen negativas, pero no al mismo tiempo. En tal caso se generan singularidades conocidas como ondas de choque o *shocks* en inglés, a continuación veremos cuándo y de qué forma son.

Dado que mostramos que la ecuación de onda puede ponerse en forma operacional y trabajar con cada uno de las partes por separado (véase (3.7-3.9)), será más fácil trabajar solamente con una de ellas, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= 0 \\u(x, 0) &= f(x)\end{aligned}$$

Este problema es conocido como la ecuación de Burgers con condición inicial, que es el caso cuasilineal más simple de la ecuación de onda, cuando  $c(u) = u$ . Sabemos ya que la solución es

$$u(x, t) = f(x - ut). \quad (3.18)$$

Derivando implícitamente encontramos,

$$u_t = \frac{-f'u}{1 + f't}$$

y del mismo modo,

$$u_x = \frac{-f'}{1 + f't}.$$

Ya hemos dicho que el denominador no puede anularse, es decir,  $f'(x)$  no puede ser negativa ( $t$  es para tiempos futuros); en otras palabras,  $f(x)$  ha sido restringida a una función monótona no decreciente. Formalmente

$$u(x_1, t) \leq u(x_2, t) \text{ para } x_1 < x_2.$$

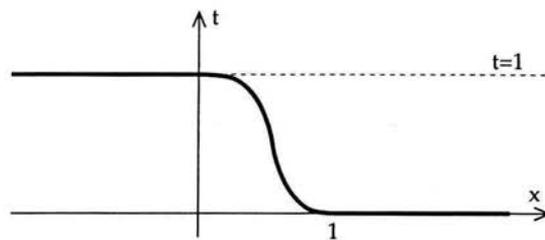
De otra forma, las características chocarán para algún  $t > 0$ . Veamos qué pasa cuando  $f(x)$  es no creciente, dada por una función de un escalón que baja suavemente.

Tomemos a  $f(x)$  en las funciones de clase  $C^\infty$ , de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 & x \leq 0 \\f(x) &= 0 & x \geq 1\end{aligned}$$

y  $f(x)$  cae suavemente entre  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$  como muestra la gráfica de la Figura 3.7. Revisando el caso lineal, es claro que las características que salen del dominio son rectas con pendiente uno para  $x \leq 0$ . Cuando  $x \geq 1$  no hay movimiento, al resolver  $u_t = 0$ , las curvas características donde la solución es constante, son rectas verticales<sup>6</sup>, paralelas al eje  $y$ .

<sup>6</sup>En el caso completo de la ecuación de onda es resolver  $u_{tt} = 0$ , donde el resultado es el mismo.

Figura 3.7: Dominio para generar *shocks*.

Ahora veamos cómo son las características hasta el tiempo  $t = 1$ , hemos dicho que las que surgen de  $x$  negativas tienen pendiente uno, mientras las que están después de uno en el eje espacial son verticales. Entonces, solamente falta ver qué sucede con las curvas correspondientes  $0 < x < 1$ . En la ecuación (3.18) se observa que al igual que el análisis hecho para la ecuación de onda homogénea, las características resultantes son rectas, pero con un cambio de pendiente relativo a la derivada de  $f(x)$  en el punto inicial.

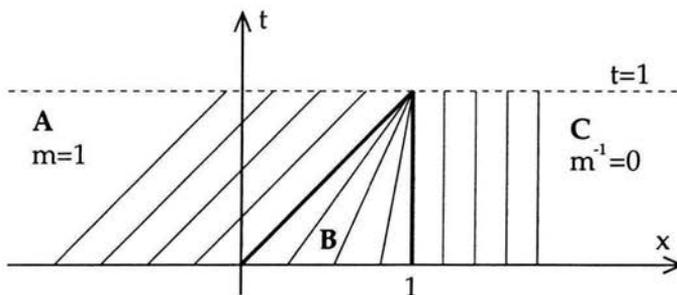


Figura 3.8: Análisis de las características.

Es claro que las características se cruzan en el punto  $(1, 1)$ , por lo menos hay dos de ellas que llegan a éste: la recta que sale de  $(0, 0)$  tiene pendiente uno y llega a  $(1, 1)$ , del mismo modo que la vertical que sale de  $(1, 0)$  (Figura 3.8). En este lugar la solución es inconsistente, porque tiene dos valores distintos, al menos. Ahora, si la elección de  $f(x)$  es tal que la pendiente de todas las rectas que parten del intervalo  $[0, 1]$  terminan en  $(1, 1)$ , es decir, las pendientes de todas las características en la zona  $B$  de la Figura 3.8, entonces tenemos una incongruencia, porque hay una infinidad de valores para la función solución al tiempo  $t = 1$  en la posición  $x = 1$ , a esto se le conoce como un *shock*. A continuación veremos qué significa.

Dado que es más fácil entender desde el punto de vista físico, pensemos que la ecuación de Burgers muestra la manera en que se mueve una cuerda vibrante únicamente en direcciones positivas, pero a distintas velocidades; así, los diagramas siguientes muestran la diámica en cuatro tiempos distintos  $0 < t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = 1$ :

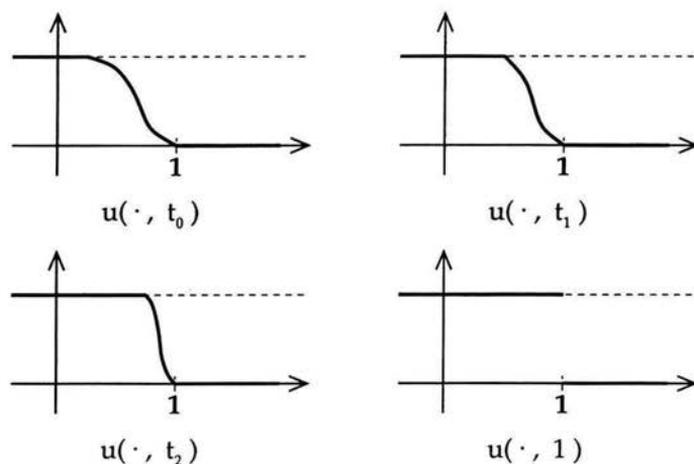


Figura 3.9: Formación de *shocks*.

Véase en la Figura 3.9 que para el tiempo  $t = t_0$  la solución es similar a la curva original (Figura 3.7), solamente ha cambiado en un trecho pequeño avanzando el frente de la onda que se encuentra a altura constante 1. En el tiempo  $t = t_1$  el recorrido constante uno ya es mayor, comienza a verse la curva que va de la altura uno a cero con un menor intervalo en el dominio. Así, para tiempos cercanos a 1, como es el caso cuando  $t = t_2$ , el dominio de la solución que cambia de altura ya es muy reducido, llevando finalmente para el tiempo  $t = 1$  a un brinco en la solución, es decir una singularidad del tipo escalón.

Hemos logrado mostrar entonces, que la ecuación de onda cuasilineal presenta singularidades. Dijimos antes de introducir la ecuación de Burgers que será equivalente tomar la ecuación de transporte con el signo positivo o negativo, esto es porque si se observan las ecuaciones (3.16, 3.17) el denominador siempre es de la forma  $1 + c'f't$  o en el caso de Burgers será  $1 + f't$ .

Obsérvese también, que si hubiéramos tomado a  $t$  negativa, el desarrollo planteado sería casi el mismo a excepción de que  $f(x)$  ya no tendría que ser absolutamente no decreciente; sino, por el contrario, ahora esta función

estaría obligada a ser negativa o cero. Haciendo caso omiso a la restricción de  $f(x)$  se encontrarían shocks para tiempos pasados.

### 3.5. El principio de Huygens y las cáusticas

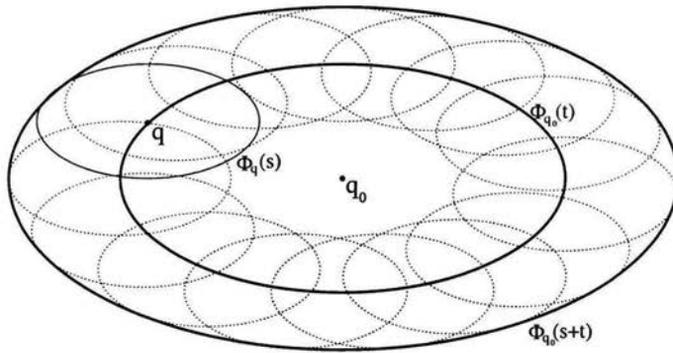
Estudiemos ahora la propagación de ondas desde un punto de vista más geométrico. Como en la formación de singularidades en la ecuación de onda, con este nuevo enfoque, será posible entender la relación entre diversos aspectos físicos y matemáticos. Los casos presentados a continuación son de óptica geométrica, es decir, gracias a la geometría podremos encontrar un tipo de puntos a partir del enfoque de los rayos luminosos. El estudio de este tipo de singularidades nos llevará en relatividad general al caso del colapso gravitacional en los agujeros negros. Comenzaremos enunciando el principio de Huygens y usaremos algunos elementos básicos de curvas planas para ver los efectos que producen los rayos de luz en presencia de la geometría del espacio. Para ello, será necesario comprender lo que significa un frente de onda.

Cuando creamos un *shock* en la ecuación de Burgers, la representación de la Figura 3.7 es el frente de la onda que vamos a observar en el transcurso del tiempo. De manera similar, los frentes de onda en el estudio de la óptica geométrica serán curvas –o superficies en dimensiones mayores– que indicarán el avance, en este caso, de la luz, el cual envolverá o dejará atrás de él el recorrido que las ondas han tomado. Este frente dependerá del tipo de medio en el cual la luz viaje; para nuestro estudio tomaremos únicamente medios homogéneos, es decir, las ondas luminosas tendrán la misma velocidad en todas las direcciones.

Podemos decir, en términos más técnicos, que un frente de onda es el movimiento de la frontera de una onda. Así, mientras el tiempo sea mayor, el movimiento de este irá en una dirección con cierta velocidad, el cual, denotará el desplazamiento del frente mismo.

**Principio de Huygens.** Sea  $\Phi_{q_0}(t)$  el frente de onda del punto  $q_0$  pasado el tiempo  $t$ . Para cada punto  $q$  en este frente, considere el frente de onda después del tiempo  $s$ ,  $\Phi_q(s)$ . Entonces el frente de onda del punto  $q_0$  transcurrido el tiempo  $s + t$ ,  $\Phi_{q_0}(s + t)$ , es la envolvente de los frentes  $\Phi_q(s)$ ,  $q \in \Phi_{q_0}(t)$ .

Simplifiquemos un poco las cosas tomando un medio homogéneo, en este caso los frentes de onda para una fuente luminosa puntual son únicamente las esferas con centro en ella. Claramente estamos suponiendo, dada la homogeneidad del medio, que la luz se propaga a velocidad constante en todas las



direcciones. Veamos también que la *envolvente* es, como su nombre lo indica, la curva que envuelve los frentes de todos los puntos que estamos analizando. Finalmente estudiemos únicamente la situación en la cual la dimensión del medio es dos.

El caso más simple es el punto que emite un pulso luminoso al tiempo cero. Después de cierto tiempo  $t = t_1$ , todos los rayos de luz que han viajado en todas direcciones generan un frente, el cual es una circunferencia de radio  $r$  (la luz se propaga a velocidad constante). Si transcurre otra cantidad de tiempo igual ( $t = 2t_1 = t_2$ ), todos los rayos seguirán su trayectoria duplicando la distancia al punto de origen, es decir, el radio de la circunferencia será  $2r$ . Del mismo modo el radio aumentará linealmente en proporción al tiempo transcurrido.

Tomemos ahora un segmento de recta, observando que, cada uno de los puntos en la recta se comportará como el del ejemplo anterior. Cuando  $t = t_1$ , cada punto de la línea ha formado una circunferencia de radio  $r$ . En la Figura (3.10, a) se observa que éstas generan un frente marcado por la recta punteada, la cual se encuentra a distancia  $r$  de la original. El frente en este caso seguirá viajando con una velocidad constante igual a la de la propagación de la luz.

Del mismo modo, si hacemos el caso  $t = 2t_1 = t_2$  obtenemos un nuevo frente equivalente, por el principio de Huygens, a tomar circunferencias de radio  $r$  a partir del frente anterior (Figura (3.10, c)). Podemos notar que sería lo mismo que tomar la recta original y encontrar el frente para circunferencias de radio  $2r$  (Figura (3.10, b)).

Obsérvese que podemos, también, utilizar los vectores normales a la recta e incrementar su norma proporcionalmente. De esta forma, encontraremos el nuevo frente en términos del anterior. En la circunferencia, en el caso de

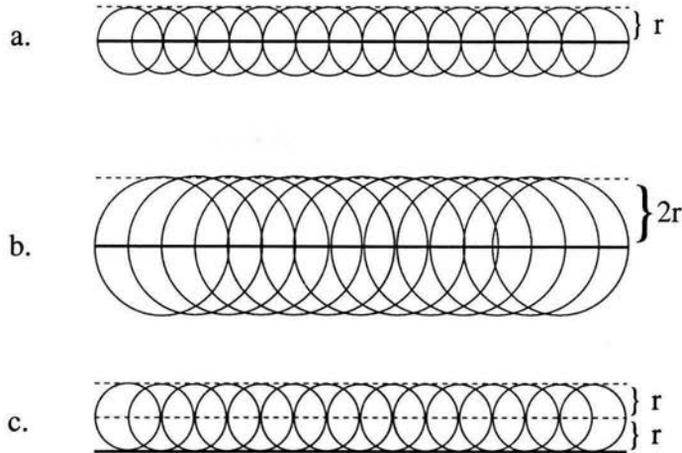


Figura 3.10: Frente de una recta.

tomar un primer frente en la fuente que emite un pulso luminoso, se da la misma situación.

Busquemos una curva donde las circunferencias se *enfrenten* unas a otras, digamos una parábola. Observémos que a tiempos pequeños el frente es similar a la curva misma (Figura (3.11, a)), sin ser ahora una parábola. Cuando el radio de la circunferencia es igual al doble de la distancia que hay entre el foco y el vértice, se genera un punto donde la curva no es diferenciable. Éste tiene dos límites distintos para su tangente, formando un ángulo entre ellas, dado su aspecto visual, lo llamaremos un *pico*, la primera singularidad, ver el inciso (b) en la Figura (3.11). Para tiempos mayores los frentes se cruzan y la irregularidad en el foco se separa en dos nuevas singularidades del tipo de *picos*, además de que se genera un punto de intersección en los frentes, que llamaremos simplemente *punto de contacto*. Gracias a la simetría de la curva en cuestión esta intersección de los frentes siempre se encuentra sobre el eje vertical. En la Figura (3.11, c) se observa que tanto los dos picos como el punto de contacto surgen de la primera singularidad, puesto que un dibujo no es ninguna prueba, mostraremos más adelante la validez de estos argumentos. Estudiemos con más detalle la situación:

Tomemos la parábola parametrizada por:

$$\gamma(x) = (x, x^2),$$

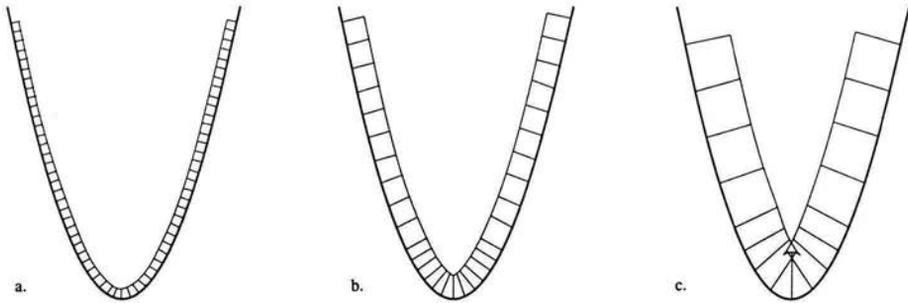


Figura 3.11: Frente de una parábola. a. El tiempo es menor al necesario para que el frente toque el foco de la curva. b. El frente ha avanzado de tal forma que su vértice inferior se encuentra pasado el foco, se genera la primer singularidad,  $r = \frac{1}{2}$ . c. Para tiempo mayores, una singularidad de contacto y dos no diferenciables se separan de la original (inciso anterior).

entonces, la tangente está dada por:

$$\gamma'(x) = (1, 2x)$$

y por lo tanto el vector normal unitario:

$$\hat{n}(x) = \frac{(-2x, 1)}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$$

De este modo podemos tomar una función dependiente del tiempo<sup>7</sup>  $\xi$ , así, a cada punto en la parábola le asignaremos su vector normal y el parámetro del tiempo solamente incrementará, de forma homogénea, la norma de todos estos vectores, formando el frente

$$k_\xi(x) = \gamma(x) + \xi\hat{n}(x),$$

es decir,

$$k_\xi(x) = \left( x - \frac{2x\xi}{\sqrt{4x^2 + 1}}, x^2 + \frac{\xi}{\sqrt{4x^2 + 1}} \right). \quad (3.19)$$

Para encontrar las singularidades de tipo *picos*, necesitamos encontrar cuando la curva deja de avanzar, es ahí donde derivada de nuestro frente se anula. Esto significaría que hay un cambio brusco de dirección. Es decir, queremos

<sup>7</sup>Tomaremos este parámetro únicamente para denotar en qué tiempo estamos tomando el frente de onda, es decir, las funciones a estudiar seguirán dependiendo de  $x$ .

que  $k'_\xi(x) = (0, 0)$ , veamos:

$$\begin{aligned} k'_\xi(x) &= \left( 1 - \frac{2\xi(4x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - 2x\xi(4x)(4x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}{4x^2 + 1}, 2x - \frac{4x\xi(4x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}{4x^2 + 1} \right) \\ &= \left( \frac{(4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 2\xi(4x^2 + 1) + 8x^2\xi}{(4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2x(4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 4x\xi}{(4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \left( \frac{(4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 2\xi}{(4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, 2x \frac{(4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 2\xi}{(4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Busquemos entonces la primera singularidad que, dada la simetría, se origina de la normal al origen (Figura (3.11)). Así, tomando  $x = 0$ , tratamos de encontrar la  $\xi$  que resuelva  $k'_\xi(0) = (0, 0)$ :

$$k'_\xi(0) = (1 - 2\xi, 0),$$

es decir que ésta se encuentra cuando  $\xi = \frac{1}{2}$ , el doble de la distancia del origen al foco, lo cual indica que éste no es la singularidad.

Habíamos dicho que después de este punto el frente presenta dos singularidades no diferenciables (también llamados *picos*) y un punto de contacto. Comencemos por encontrar el punto de contacto.

Tomemos ventaja de la simetría en la función (3.19). Ésta se debe a que si  $k_\xi(x) = (a, b)$  entonces  $k_\xi(-x) = (-a, b)$  para la misma  $\xi$ . Notemos que la segunda coordenada no influye. Buscamos ahora el valor de  $x$  para el cual  $k_\xi(x) = k_\xi(-x)$ . Por simetría, buscamos la coordenada  $x$  donde  $a = 0$  para  $k_\xi(x)$ .

$$\begin{aligned} x - \xi \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} &= 0 \\ \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{2} &= \xi \\ 4x^2 + 1 &= 4\xi^2 \\ x &= \pm \frac{\sqrt{4\xi^2 - 1}}{2} \end{aligned}$$

de este modo, si consideramos tales  $x$  cuando  $\xi = \frac{1}{2}$ , obtenemos,

$$x = \pm \frac{\sqrt{4(\frac{1}{2})^2 - 1}}{2} = \pm 0,$$

es decir, se confirma el hecho de que  $k_{\frac{1}{2}}(0)$  es un punto de contacto y el origen de donde surgen los dos picos. Para  $\xi < \frac{1}{2}$  la raíz se vuelve imaginaria y no

permite encontrar singularidades en el plano, mientras que para  $\frac{1}{2} < \xi \ll 1$  éstas son cercanas a  $k_{\frac{1}{2}}(0)$ .

Solamente nos falta estudiar los dos picos que parten de la singularidad original. Lo que queremos es que en (3.20) las dos coordenadas se anulen simultáneamente, de manera que se elimine la continuidad en la derivada formando un cambio brusco de direcciones en dicho punto, produciendo así un pico. La única diferencia es el término  $2x$  que multiplica la segunda coordenada. Si

$$(4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 2\xi = 0,$$

entonces,

$$\begin{aligned} (4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} &= 2\xi \\ 4x^2 + 1 &= (2\xi)^{\frac{2}{3}} \\ x^2 &= \frac{(2\xi)^{\frac{2}{3}} - 1}{4} \\ x &= \pm \frac{\left((2\xi)^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{2}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Observemos que si  $\xi = \frac{1}{2}$ , entonces se obtiene nuevamente la singularidad original. Es decir que se comprueba la hipótesis de que este punto singular es el punto que dará origen tanto al punto de contacto como a los dos picos.

Veamos ahora un caso similar, donde la luz también juega un papel importante. Todo mundo ha observado las curvas de mayor luminosidad que aparecen en las tazas de café. Éstas, se deben a que los rayos de luz se reflejan en el recipiente y, de esta manera, se intersectan en el líquido del mismo. Un análisis geométrico muestra que lo que se observa, en algunos casos, es el reflejo **continuo** de los rayos de la luz que chocan en una parábola. Entonces estudiaremos un caso que tiene un punto visual diferente a los frentes que encontramos con el principio de Huygens.

Notemos que la única diferencia radica que en el ejemplo anterior la luz se toma como un pulso simultáneo en toda la parábola, mientras en este caso, lo que buscamos es la intersección de los rayos continuos de luz. Buscamos así el lugar geométrico de los puntos donde la luz es más intensa.

Tomamos la fuente reflejante de la forma:

$$f(x) = x^2,$$

entonces,  $f'(x) = 2x$ . Las rectas normales a cada punto fijo  $\xi$ , son entonces de la forma:

$$y - \xi^2 = -\frac{1}{2\xi}(x - \xi).$$

Tomemos ahora estas rectas como curvas de nivel en términos del parámetro  $\xi$ , es decir,

$$G(\xi) = \xi^2 - \frac{x}{2\xi} + \frac{1}{2} - y = 0,$$

de este modo, la intersección de dos de estas rectas se da cuando:

$$G(\xi) - G(\xi + h) = 0.$$

Normalicemos y tomemos el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , así, para puntos cercanos de la parábola,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(\xi) - G(\xi + h)}{\xi - \xi + h} = 0$$

pero el lado izquierdo es justamente la derivada de  $G(\xi)$ , es decir:

$$G'(\xi) = 0$$

y

$$G'(\xi) = 2\xi + \frac{2x}{4} = 0$$

con lo cual se tiene que las intersecciones que buscamos de las rectas reflejadas por la curva se dan cuando:

$$x = -4\xi^3 \quad \text{o} \quad \xi = \left(-\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Así, el lugar geométrico de las intersecciones cercanas está dado por:

$$G\left(\left(-\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \left(-\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{4\xi^3}{2\xi} + \frac{1}{2} - y = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(-\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 2\left(-\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \\ &= 3\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

El signo negativo en el paréntesis no influye, dada la potencia  $\frac{2}{3}$ . Sin embargo, esta información nos muestra que las componentes de la cáustica provienen de puntos de la parábola al otro lado del eje vertical.

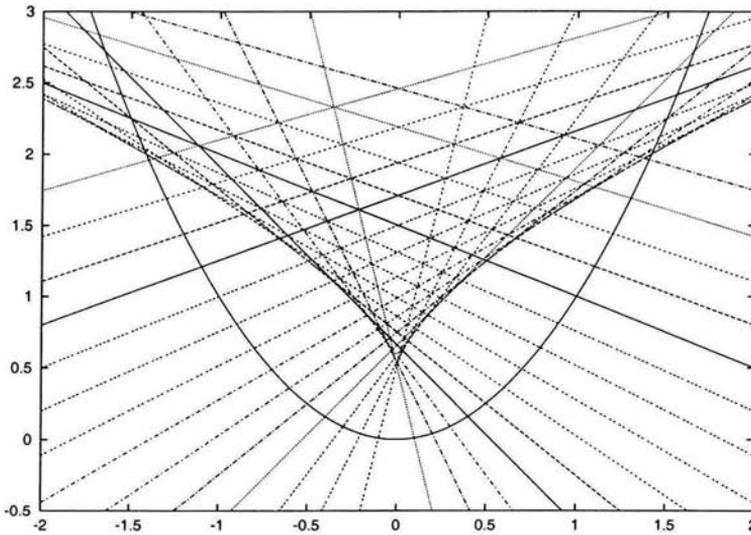


Figura 3.12: Caústica generada por el reflejo de luz continuo sobre una parábola.

También hay que notar que la curva obtenida es localmente difeomorfa a  $x^{\frac{2}{3}}$  cerca del vértice. Los puntos pico del ejemplo (3.21) presentan también este tipo de singularidades. Además por las propiedades de la parábola, nuevamente se tiene que el punto más cercano al vértice está a una distancia de un medio.

Con esto hemos encontrado dos tipos de singularidades de enfoque, parecidas a las que encontraremos en el capítulo siguiente para los teoremas de singularidades de Roger Penrose y Stephen Hawking.

# Capítulo 4

## Las singularidades en contexto

*Make tomorrow, make tomorrow  
Where the dreamer's dream is dared.*

OVO, PETER GABRIEL.

En este capítulo finalmente abordamos el estudio de las singularidades en relatividad general. En este contexto, el de la Teoría de la Relatividad General, las singularidades estudiadas serán de naturaleza distinta a las encontradas en la ecuación de onda (véase capítulo 3), aunque mantendrán algunas similitudes. En la ecuación de onda nos enfrentamos a singularidades para las que una cantidad física (o su derivada) no están bien definidas. Sin embargo en la Teoría de la Relatividad General es el espacio-tiempo, o mejor dicho, la curvatura del mismo la que deja de estar bien definida. Al encontrarlas veremos que su principal importancia no reside en el hecho de pertenecer o no al espacio-tiempo, sino por el contrario, nos llamará la atención que en las ecuaciones de Einstein la incógnita se refiere a la métrica, así, las singularidades que aparecen son parte del mismo espacio-tiempo. Es decir, en términos un poco vanos, la “curvatura” en un punto *explota*.

Las singularidades son en matemáticas y en física, puntos especiales donde en una función las propiedades de diferenciabilidad cambian. En el capítulo 3 mostramos cómo puede aparecer una discontinuidad en un fenómeno continuo. El problema en relatividad general es un poco diferente, estas singularidades serán puntos en el espacio-tiempo donde la curvatura es tan grande que no son concebibles los eventos físicos en esa región; por ello será difícil dar una definición que satisfaga completamente.

Matemáticamente la noción no es del todo complicada y es de aquí de donde nos afianzaremos para estudiarlas. Desde el punto de vista físico, la

cuestión requiere un análisis más cuidadoso. A diferencia del resto de las teorías físicas, la relatividad general no tendrá solamente el problema de singularidades en el espacio-tiempo, sino, en ocasiones no podremos siquiera *hablar* de un evento dado. Habrá regiones en las que no tendrá sentido un tiempo y un lugar determinado –no sabemos cómo se comportan–, de alguna manera, el espacio-tiempo es inaccesible.

Al obtener singularidades en el espacio-tiempo, tendremos que tener cuidado, ya que éstas pueden ser producto de nuestra imaginación: como veremos en la solución de Schwarzschild la mala elección de un sistema de coordenadas puede hacernos creer en la existencia de singularidades físicas. Buscaremos entonces en los “lugares” de la variedad donde la manera de medir, es decir la métrica  $g_{ij}$ , se haga singular sin importar nuestra elección de coordenadas. Por ejemplo, cuando  $r \rightarrow 0$  en la solución de Schwarzschild se produce una singularidad física, pero no cuando  $r = 2M$ , donde sólo hay una singularidad de coordenadas.

La curvatura será descrita por el tensor de Riemann-Christoffel  $R^a_{bcd}$ , el cual nos indicará las regiones donde es probable que existan singularidades. Tomando en cuenta que es posible que encontremos –dada la mala elección de un sistema de coordenadas– eventos que parezcan singularidades, dado los criterios en las componentes y derivadas del tensor, será importante analizar los escalares formados con la curvatura riemanniana, es decir: la curvatura escalar  $R$ , la contracción del tensor de Ricci  $R_{ab}^{ab}$ , la dada en el tensor de Riemann  $R_{abcd}^{abcd}$ , e inclusive escalares formados por expresiones polinomiales de las derivadas de la curvatura. Veremos después el tipo de complicaciones.

## 4.1. Las ecuaciones de campo

Tomaremos una métrica  $g_{ij}$  pseudo-riemanniana (es decir, con determinante negativo) del tipo (1, 3), la conexión  $\Gamma^k_{ij}$  compatible con la métrica y  $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$  como el elemento de longitud identificado con el campo gravitacional. Además,  $d\Omega = \sqrt{-g}d^4x$  será el elemento de volumen donde  $g = \det(g_{ij}) < 0$ .

Se define el tensor de curvatura de Riemann, en forma totalmente covariante, como  $R_{iklm} = g_{ij}R^j_{klm}$ :

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + g_{np} (\Gamma^n_{kl} \Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km} \Gamma^p_{il}),$$

el tensor de Ricci es:

$$R_{ik} = R_{iqk}^q = g^{lm} R_{likm}$$

o si se desea:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l \quad (4.1)$$

y la curvatura escalar  $R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}$ .

De manera análoga a la deducción de la ecuación de onda, para las ecuaciones del campo gravitatorio necesitaremos definir la acción, que en este caso será

$$S = S_g + S_m,$$

donde la contribución del campo en ausencia de materia  $S_g$ , llamada la acción de Hilbert, está dada por:

$$S_g = \int R d\Omega$$

y  $S_m$  es la contribución dada por la materia descrita por la expresión:

$$S_m = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d^4 x,$$

con  $\Lambda$  una función determinada por la materia. Ambas se definen en  $\mathbb{R}^4$ , para variaciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange que deduciremos a continuación.

**Teorema.** La variación  $\delta S_g / \delta g^{ij}$  está dada por <sup>1</sup>:

$$\frac{\delta S_g}{\delta g^{ij}} = \frac{\delta \int R \sqrt{-g} d^4 x}{\delta g^{ij}} = (R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}) \sqrt{-g},$$

es decir,

$$\delta S_g = \int (R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}) \delta g^{ij} \sqrt{-g} d^4 x. \quad (4.2)$$

Generalmente esta expresión se normaliza:

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int (R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d^4 x.$$

<sup>1</sup>Donde, como vimos en el capítulo 3, la variación  $\delta$  de un funcional  $F$  que depende de una función  $y$ , es decir  $F(y)$ , se define de la siguiente manera

$$\delta F(y)\phi = \left. \frac{d}{d\varepsilon} F(y + \varepsilon\phi) \right|_{\varepsilon=0},$$

donde  $\phi$  es una función que se anula en los extremos de la variación.

Se obtiene análogamente  $\delta S_m / \delta g^{ik}$ :

$$\frac{1}{\lambda\sqrt{-g}} \frac{\delta S_g}{\delta g^{ik}} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{-16\pi G}{c^4} \frac{\delta S_m}{\delta g^{ik}} \frac{1}{\sqrt{-g}}. \quad (4.3)$$

Con  $\lambda$  constante. De las dos ecuaciones encontraremos la variación total.

*Demostración.* Tenemos que:

$$\delta \int R\sqrt{-g} d^4x = \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g} d^4x$$

dado que  $R$  es la curvatura escalar. Además,  $\delta\sqrt{-g}$  podemos tomarlo como  $\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{rs}} \delta g^{rs}$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \delta \int R\sqrt{-g} d^4x &= \int (g^{ik} \sqrt{-g} (\delta R_{ik}) + R_{ik} \sqrt{-g} \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int (R_{ik} \sqrt{-g} \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{rs}} \delta g^{rs}) d^4x + \int g^{ik} \sqrt{-g} (\delta R_{ik}) d^4x. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Donde  $\delta R_{ik}$  son los cambios de  $R_{ik}$  resultantes de los cambios de  $\delta g^{ik}$  en  $g^{rs}$ .

Dado que el cofactor  $C_{ij}$  de la matriz  $(g^{rs})$  no involucra a  $g_{ij}$ , y como  $g^{ik} C_{ij} = \delta_j^k g$ , se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial g^{rs}} = C_{rs}$$

al escribir  $g = g^{rs} C_{rs}$  (cuidado, en las últimas tres líneas no estamos usando la convención de suma de Einstein). Si multiplicamos ambos lados por  $g_{rs}$ , obtenemos que  $C_{rs} = g g_{rs}$ . Entonces  $\partial g / \partial g^{rs} = g g_{rs}$ .

Así:

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{rs}} = \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g^{rs}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{rs}$$

sustituyendo en la ecuación (4.4), obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta \int R\sqrt{-g} d^4x &= \int (R_{ik} \sqrt{-g} \delta g^{ik} - R_{ik} g^{ik} \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{rs} \delta g^{rs}) d^4x \\ &\quad + \int g^{ik} \sqrt{-g} (\delta R_{ik}) d^4x, \end{aligned}$$

es decir, contrayendo la curvatura escalar y cambiando los índices  $rs \rightarrow ik$ :

$$\int (R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d^4x + \int g^{ik} \sqrt{-g} (\delta R_{ik}) d^4x.$$

Habremos encontrado la primera parte de la ecuación, la que describe la variación  $\delta S_g$ , si podemos ver que la segunda integral se anula. Se puede mostrar que<sup>2</sup>:

$$g^{ik}(\delta R_{ik}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g} W^l),$$

con  $W^l$  un vector dado por la expresión

$$W^l = g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l - g^{il} \delta \Gamma_{ik}^k.$$

Entonces, queremos que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \int \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g} W^l) \sqrt{-g} d^4x$$

sea igual a cero.

Así, por la fórmula de Stokes<sup>3</sup> y la forma en que está construido el vector  $W^l$  esta integral se anula. Dando de esta manera

$$\int g^{ik} \sqrt{-g} (\delta R_{ik}) d^4x = 0,$$

lo que termina la prueba de nuestro teorema.  $\square$

Dado que la ecuación (4.2) es válida para toda variación  $\delta g^{ij}$ , al minimizar la acción (véase capítulo 3) se tiene que:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 0.$$

En relatividad general se define el tensor de energía momento  $T_{ik}$  como  $-(2/\sqrt{-g})(\delta S_m/\delta g^{ik})$ . Con éste, podemos escribir, de la segunda igualdad de la ecuación (4.3), la expresión:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}. \quad (4.5)$$

Multiplicando por  $g^{i\alpha}$  se tiene

$$R_k^\alpha - \frac{1}{2} R \delta_k^\alpha = \frac{8\pi G}{c^4} T_k^\alpha$$

y al contraer los índices

$$R - 2R = (8\pi G/c^4)T,$$

<sup>2</sup>Véase [Dubrovin *et al.*, 1979].

<sup>3</sup>Puede consultarse el desarrollo de esta fórmula en [Courant *et al.*, 1996].

es decir:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T.$$

Al tomar  $R = g^{ik}R_{ik}$  y despejar se obtiene:

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T \right). \quad (4.6)$$

Las dos últimas ecuaciones son diferentes formas de escribir las ecuaciones de campo gravitatorio de Einstein, y nos dicen que si tomamos un espacio sin energía ni momento, es decir,  $T_{ik} = 0$ , entonces  $R_{ik} = 0$ . Si  $R_{ik} \equiv 0$  para un espacio vacío, entonces es claro que la métrica riemanniana del espacio de Minkowski<sup>4</sup> es solución para dichas ecuaciones.

## 4.2. La solución de Schwarzschild

Karl Schwarzschild (1916) propone unos meses después de la publicación de las ecuaciones de campo en el vacío de Einstein, lo que es sin lugar a dudas, una de las soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein más importantes y conocidas, por ser la más sencilla.

Describe el campo gravitacional exterior a un cuerpo esférico de masa  $M$  en reposo en el origen de un sistema de coordenadas; asimismo, verifica correcciones importantes a la teoría newtoniana sobre el movimiento planetario en nuestro sistema solar. La deflexión de los rayos de luz y el corrimiento al rojo, así como los efectos de dilatación del tiempo en presencia de campos gravitacionales intensos son sólo algunas de las características de esta solución.

Empero, la predicción de mayor relevancia se refiere a la posibilidad de que una estrella implote, colapsándose en una singularidad. El lineamiento de esta sección será el mostrar uno de los caminos para encontrar dicha solución y dar un vistazo a algunas de sus implicaciones para continuar con nuestro cometido, el estudio de la dinámica de los agujeros negros, sin carga y sin rotación.

Tomaremos un espacio-tiempo tetradimensional con métrica  $(M^4, g)$ . Consideraremos una simetría especial: un *campo vectorial de Killing tipo tiempo*.

Primero, definiremos una *isometría* como una función biyectiva entre dos espacios métricos que preserva distancias. Es decir, cumple para todo punto

---

<sup>4</sup>Véase apéndice B.

$p \in M$

$$\langle \eta(p), \zeta(p) \rangle = \langle d\phi_t \eta(p), d\phi_t \zeta(p) \rangle,$$

donde abusamos un poco de la notación y  $\eta(p)$ ,  $\zeta(p)$  significan vectores tangentes en el punto  $p$ ;  $d\phi_t \eta(p)$ ,  $d\phi_t \zeta(p)$  los tangentes correspondientes en el punto  $\phi_t(p)$  y  $\langle , \rangle$  denota el producto interior.

Así, si  $\phi_t : M \rightarrow M$  es un grupo monoparamétrico de isometrías, entonces el campo vectorial  $\xi^a$  que genera a  $\phi_t$  es llamado un *campo vectorial de Killing*.

En el *campo vectorial de Killing tipo tiempo* los vectores  $\xi^a$  son tipo tiempo y cumplen que  $\langle \xi^a, \xi^a \rangle < 0$ . Además  $\phi_t$  manda las hipersuperficies 3-dimensionales en la dirección temporal, designada por el campo vectorial, en hipersuperficies 3-dimensionales. Esta serie de isometrías o "cortes" transversales al campo vectorial en el espacio-tiempo se conoce como una *foliación*.

Asimismo, haremos uso de algunas convenciones para simplificar las sumas de Einstein, de esta forma, usaremos índices latinos ( $i, j$ ) para los valores de 0 a 3 y los griegos ( $\mu, \nu$ ) para valores únicamente espaciales, de 1 a 3.

La métrica  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$  puede ser separada en tiempo y espacio gracias a la simetría dada por el campo de Killing, de forma tal que

$$ds^2 = -v^2(x^1, x^2, x^3) dt^2 + h_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3) dx^\mu dx^\nu,$$

donde  $-v^2(x^1, x^2, x^3)$  es una función que depende solamente de las coordenadas espaciales y que tiene por condición signo negativo, mientras que  $h_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3)$  es la componente espacial de la métrica, es decir

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -v^2 & 0 \\ 0 & h_{\mu\nu} \end{pmatrix}.$$

Haciendo un cambio de coordenadas del sistema cartesiano al esférico ya que se busca una solución con simetría esférica, obtenemos

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + h(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad (4.7)$$

de modo tal que

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix},$$

lo cual, claramente, tendrá una interpretación más sencilla de entender y manejar. Hay que notar que el jacobiano  $r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2)$  es también la longitud de arco esférico.

Con este cambio hemos simplificado el problema de encontrar diez funciones ( $v$  y cada componente  $h_{\mu\nu}$ ) en tres variables, a solamente encontrar  $f(r)$  y  $h(r)$ ; dos funciones en una sola variable (véase la formulación en (4.7)).

Nuestro problema radica en comprender la geometría del espacio-tiempo en presencia de una masa  $M$  localizada en el origen de nuestro sistema. Es decir, la solución de Schwarzschild que encontraremos, será la métrica que emplearemos cuando “acomodemos” un cuerpo masivo (como podría ser el Sol o inclusive la Tierra) en el origen de nuestro sistema de coordenadas.

Esperaremos que el espacio-tiempo sea, por lo tanto, “plano” lejos del origen. Es por ello que tomaremos  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = 1$ .

Al sustituir la métrica (4.7) en las ecuaciones de Einstein (4.6) en el vacío, es decir, con  $T = 0$  y  $T_{ij} = 0$ , obtenemos expresiones para las componentes del tensor de Ricci<sup>5</sup>. Es decir,  $R_{ij} = 0$  describe un campo gravitacional físico en el espacio vacío. Se hace uso del teorema en la sección 2.6.3 y del hecho que Ricci cumple la igualdad de la ecuación (4.1). Así, calculando los símbolos de Christoffel a partir de la métrica (4.7) y sustituyendo en la identidad (4.1), obtenemos:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2}(fh)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} [(fh)^{-\frac{1}{2}} f'] + (rfh)^{-1} f' \\ R_{11} &= -\frac{1}{2}(fh)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} [(fh)^{-\frac{1}{2}} f'] + (rh^2)^{-1} h' \\ R_{22} &= -\frac{1}{2}(rfh)^{-1} f' + \frac{1}{2}(rh^2)^{-1} h' + r^{-2}(1 - h^{-1}) \\ R_{33} &= \left[ -\frac{1}{2}(rfh)^{-1} f' + \frac{1}{2}(rh^2)^{-1} h' + r^{-2}(1 - h^{-1}) \right] \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

donde la prima se refiere a una derivación respecto a  $r$  y los exponentes negativos a los recíprocos de las funciones y no a sus inversas.

Es de notar que tanto la métrica como las componentes del tensor de Ricci son una matriz diagonal, lo que habla de un sistema de coordenadas privilegiado. Las diez componentes –dado que es simétrico– del tensor de Ricci desaparecen.

Sumando  $R_{00}$  con  $R_{11}$  obtenemos:

$$(rfh)^{-1} f' + (rh^2)^{-1} h' = 0$$

y acomodando en fracciones después de multiplicar por  $r$ , se tiene

$$\frac{1}{fh} f' + \frac{1}{h^2} h' = 0.$$

<sup>5</sup>Para un desarrollo detallado puede verse [Wald, 1984] o [Dubrovín *et al.*, 1979].

Con lo cual, al multiplicar por  $h$  y resolver la ecuación diferencial. Se observa la dependencia entre  $f$  y  $h$  como

$$f(r) = K[h(r)]^{-1},$$

donde  $K$  es una constante. Al re-escalar la coordenada del tiempo por  $t \rightarrow K^{1/2}t$  se puede tomar  $K = 1$ . Así, al tomar la componente para  $R_{22}$  e intercambiar  $h$  por  $f^{-1}$ , tenemos:

$$-\frac{1}{2}(rff^{-1})^{-1}f' + \frac{1}{2}(rf^{-2})^{-1}(f^{-1})' + r^{-2}(1-f) = 0,$$

es decir,

$$-\frac{1}{2}r^{-1}f' + \frac{1}{2}r^{-1}f^2(-f^{-2}f') + r^{-2}(1-f) = 0.$$

Escribiendo más claramente, al multiplicar por  $r^2$ , tenemos:

$$-rf' + (1-f) = 0.$$

Reordenando términos

$$1 = f + rf',$$

esto es

$$1 = \frac{d}{dr}(rf).$$

Integrando y depejando, obtenemos  $f$  en términos de  $r$ :

$$f(r) = 1 - \frac{C}{r},$$

con  $C$  constante.

Para encontrar cuál es el valor de  $C$ , suponemos que los cuerpos de prueba deben comportarse, para  $r \gg 0$ , de manera similar a los que se estudian en mecánica clásica. Así, lejos del origen el potencial relativista debe ser equivalente al newtoniano. Entonces  $C$  sería igual a  $2GM/c^2$ ; pero, dado que utilizaremos las unidades geométricas, tomaremos  $C = 2M$ .

Recordando que

$$h(r) = f^{-1}(r)$$

encontramos también que

$$h(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}.$$

Con lo cual obtenemos la solución presentada por Karl Schwarzschild, en 1916, al problema planteadado en las ecuaciones del campo gravitatorio, válidas fuera del objeto masivo:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (4.8)$$

El espacio-tiempo de Schwarzschild es la puerta de entrada para entender la teoría del campo gravitatorio. En tanto, la geometría que describe éste es trivial desde el punto de vista computacional. Sin embargo, la comprensión de la estructura completa del espacio-tiempo para las ecuaciones de Einstein llegó casi 50 años después de su derivación original a través de los descubrimientos casi simultáneos de Kruskal y Szekeres.

#### 4.2.1. Las coordenadas de Eddington-Finkelstein

Hemos encontrado ya la solución de Schwarzschild. Asimismo, se ha mencionado los problemas que se generan en  $r = 0$  y en  $r = 2M$ . El primer caso es una singularidad esencial que se identificará con los agujeros negros, mientras el segundo radio produce una singularidad relacionada únicamente con la elección del sistema de coordenadas. Más adelante trabajaremos con esta región del espacio tiempo.

Observaremos cómo las coordenadas de Eddington-Finkelstein para la geometría de Schwarzschild eliminan este problema. Hay que notar que el término  $(1 - 2M/r)$  no aparece en las componentes angulares, por lo tanto, la componente  $v$  que introduciremos se basará en cantidades radiales y temporales únicamente, explícitamente,

$$v = t + r + 2M \ln(r - 2M),$$

con lo cual la variación es

$$\begin{aligned} dv &= dt + dr + \frac{2M}{r - 2M} dr \\ &= dt + \frac{r - 2M + 2M}{r - 2M} dr \\ &= dt + \frac{r}{r - 2M} dr \\ &= dt + \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}. \end{aligned}$$

De tal forma tenemos

$$dt = dv - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr$$

y así

$$dt^2 = dv^2 - 2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dvd r + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} dr^2.$$

o, lo que es lo mismo

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvd r - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2.$$

Sustituyendo lo anterior en la solución de Schwarzschild (4.8) obtenemos la métrica en las coordenadas de Eddington-Finkelstein:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvd r + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.9)$$

En ellas es claro, que cuando  $r = 2M$  ya no se produce una irregularidad, solamente se anula el primer término. Desde luego, esto no implica que el tiempo se detiene, hay que recordar que el segundo término tiene un componente  $dv$  que contiene direcciones temporales.

### 4.3. Consecuencias fundamentales a través de la solución de Schwarzschild

El análisis del comportamiento para los cuerpos de prueba –objetos con masa– y los rayos de luz en  $r > 2M$  es de gran importancia. Esta región de la geometría de Schwarzschild es justamente lo que se encuentra fuera del horizonte<sup>6</sup> y describe cómo reaccionan estos objetos cerca de las estrellas con altas densidades y de objetos totalmente colapsados.

Los resultados para la región donde el campo es débil ( $r \gg 2M$ ) serán análogos a los que se obtienen en el exterior de las estrellas usuales, como la nuestra, el Sol.

<sup>6</sup>Se describe a la esfera de radio  $r = 2M$  como el *horizonte*. Esta cáscara divide al espacio-tiempo en dos regiones, la interior y la exterior, siendo imposible pasar objetos de prueba o inclusive fotones a través de ella desde el interior al exterior. Es por ello que este “escudo negro” (casualmente, la traducción de *Schwarzschild*) denomina el nombre de los agujeros negros.

### 4.3.1. El efecto Döppler relativista

Para el efecto *Döppler relativista* o *corrimiento al rojo* tomemos dos objetos en órbitas  $O_1$  y  $O_2$  con radios  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que  $r_1 < r_2$ . En cierto evento  $E_1$  hay una emisión luminosa desde el objeto en la órbita  $O_1$  que será recibida en el evento  $E_2$  en la órbita  $O_2$ , por el objeto que se encuentra en ella.

El objeto emisor en  $E_1$  llevará una velocidad  $u_1^a$  tangente a la órbita  $O_1$  mientras el receptor llevará una velocidad tangente a la órbita  $O_2$ , que denotaremos con  $u_2^a$  en  $E_2$ . Asimismo, el rayo particular que irá de un evento al otro tendrá un vector tangente  $k^a$  a través de una geodésica nula.

La frecuencia de emisión está dada por:

$$\omega_1 = -(k_a u_1^a)|_{E_1},$$

y la de recepción será

$$\omega_2 = -(k_a u_2^a)|_{E_2}.$$

Además  $u_1^a$  y  $u_2^a$  son vectores que apuntan en la dirección tipo temporal del campo de Killing  $\xi^a$  y podemos tomarlos unitariamente, así:

$$u_1^a = [\xi^a / (-\xi^b \xi_b)^{\frac{1}{2}}]|_{E_1}$$

y de forma análoga

$$u_2^a = [\xi^a / (-\xi^b \xi_b)^{\frac{1}{2}}]|_{E_2}.$$

Por las propiedades del campo de Killing  $\xi^a$  y dado que  $k^a$  es un vector tipo luz (es tangente a una geodésica nula), entonces  $k_a \xi^a$  es constante para todo evento<sup>7</sup>, así:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1}{\omega_2} &= \frac{-[k_a \xi^a / (-\xi^b \xi_b)^{\frac{1}{2}}]|_{E_1}}{-[k_a \xi^a / (-\xi^b \xi_b)^{\frac{1}{2}}]|_{E_2}} \\ &= \frac{(-\xi^b \xi_b)^{\frac{1}{2}}|_{E_2}}{(-\xi^b \xi_b)^{\frac{1}{2}}|_{E_1}} \end{aligned}$$

donde de forma explícita podemos escribir  $(-\xi^b \xi_b)^{\frac{1}{2}} = g_{tt} = -(1 - 2M/r)^{\frac{1}{2}}$ , es decir:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{(1 - 2M/r)^{\frac{1}{2}}|_{E_2}}{(1 - 2M/r)^{\frac{1}{2}}|_{E_1}} = \left( \frac{1 - 2M/r_2}{1 - 2M/r_1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

<sup>7</sup>Donde  $k_a$  es el covector asociado al vector  $k^a$  (véase capítulo 2). Para ver esta propiedad de los campos de Killing y otras, puede referirse a [Wald, 1984].

De esta ecuación observamos que si tomamos  $r_1 < r_2$ , entonces,  $\omega_2 < \omega_1$ . Es decir, la frecuencia del rayo de luz decrece (corrimiento al rojo) desde el evento  $E_1$  al evento  $E_2$ .

Esta predicción no pudo corroborarse en la década de los 10's. Sin embargo, en 1960 Pound y Rebka lograron medir este efecto con un 1% de incertidumbre. Tiempo después (1980) se confirmó con un 0.01% de error por Levine, Vessot *et al.* publicado en "Test of Relativistic Gravitation with a Space-borne Hydrogen Maser" en *Physics Review Letters* 45.

### 4.3.2. Precesión del perihelio de Mercurio

Al observar la solución de Schwarzschild (4.8) es fácil notar la simetría que existe en torno al "plano ecuatorial"  $\theta = \pi/2$ , dado que la ecuación no cambia si se reemplaza  $\theta$  por  $\pi - \theta$ . Por lo tanto, una geodésica cuyo vector tangente esté en dicho plano debe mantenerse en él. Tomando en cuenta además la simetría rotacional de la solución podemos centrar el siguiente análisis en las geodésicas que yacen en la región ecuatorial.

Tenemos que la solución (4.1) en  $\theta = \pi/2$  es de la forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

y ahí, tomando las componentes tangentes  $u^a$  de una curva  $x$  parametrizada por  $\tau$  ( $u^a = dx^a/d\tau = \dot{x}^a$ ), obtenemos:

$$-K = g_{ab}u^a u^b = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2, \quad (4.10)$$

donde tomamos  $K = 1$  para geodésicas tipo tiempo y  $\tau$  es el tiempo propio; mientras que para  $K = 0$  son geodésicas nulas y  $\tau$  es un parámetro afín<sup>8</sup>.

Tomando  $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$  como el campo de Killing estático, tenemos que la expresión

$$E = -g_{ab}\xi^a u^b = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}$$

debe mantenerse constante. De manera análoga tomando  $\phi^a = (\partial/\partial \phi)^a$  como el campo de Killing rotacional, tenemos que

$$L = g_{ab}\phi^a u^b = r^2 \dot{\phi}$$

<sup>8</sup>El término  $-K$  es la norma lorentziana de los vectores tangentes parametrizados por longitud de arco, donde el *tiempo propio* es justamente el que se emplea para los vectores tipo tiempo (véase apéndice B).

es constante.

Podemos considerar a  $E$  y  $L$  como la energía total y el momento angular, respectivamente, de una partícula a lo largo de una geodésica tipo tiempo. Al introducir estas dos condiciones en la ecuación (4.10) tenemos:

$$-K = -\frac{E^2}{1-2M/r} + \frac{\dot{r}^2}{1-2M/r} + \frac{L^2}{r^2},$$

es decir,

$$\frac{1}{2}E^2 = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} + K\right). \quad (4.11)$$

Esta notación es más común, dado que  $E^2$  se relaciona con el potencial efectivo que resulta ser el mismo para el caso unidimensional no relativista. Entonces, podemos escribir:

$$V = \frac{1}{2}K - K\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}. \quad (4.12)$$

Donde hay que notar que el término  $-ML^2/r^3$  domina los restantes para  $r \ll 2M$ .

Analicemos el caso de las geodésicas tipo tiempo,  $K = 1$ . Estudiemos entonces los máximos y mínimos de  $V$ , al derivar tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dr} &= \frac{M}{r^2} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3ML^2}{r^4} \\ &= r^{-4}(Mr^2 - L^2r + 3ML^2). \end{aligned}$$

Las raíces del término entre paréntesis son:

$$R_{\pm} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12M^2L^2}}{2M}.$$

Para  $L^2 < 12M^2$  no tenemos solución y por tanto, no hay puntos críticos; con lo cual toda partícula caerá indefinidamente atravesando la barrera en  $r = 2M$  hasta llegar a  $r = 0$ .

Son entonces más interesantes los casos donde  $L^2 > 12M^2$ . No es difícil probar, tomando la segunda derivada de  $V$ , que  $R_+$  es un mínimo, mientras  $R_-$  es un máximo.

Entonces tenemos una órbita circular estable ( $\dot{r} = 0$ ) cuando  $r = R_+$  y una órbita circular inestable en  $r = R_-$ . Dada la condición  $L^2 > 12M^2$ ,

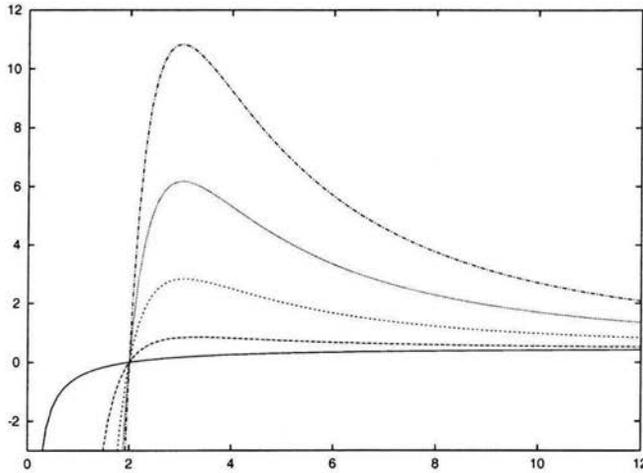


Figura 4.1: Potenciales para  $L^2 = 0M^2, 6M^2, 12M^2, 18M^2, 24M^2$ . En el eje horizontal los valores de  $r$  se representan en magnitudes de  $M^2$ .

tenemos:

$$\begin{aligned}
 R_+ &= \frac{L^2 + \sqrt{L^4 - 12M^2L^2}}{2M} \\
 &> \frac{12M^2 + \sqrt{(12M^2)^2 - 12M^2(12M^2)}}{2M} \\
 &= 6M,
 \end{aligned}$$

es decir, en relatividad general no existen órbitas estables para radios menores a  $6M$ , es más, las órbitas inestables están restringidas a

$$3M < R_- < 6M$$

dado el límite cuando  $L \rightarrow \infty$  en la expresión para  $R_-$ .

En el caso de nuestro Sol tenemos que  $6M_\odot \cong 8.8598 \times 10^5 \text{ cm}$  (en unidades relativistas, es decir, tomando  $c = 1$ ). La distancia del Sol a Mercurio es aproximadamente  $6.6672 \times 10^{12} \text{ cm}$ . Mencionamos en el capítulo 1 que las variaciones de la órbita de Mercurio hicieron creer a los astrónomos que éstas se debían a la presencia de un planeta más cercano al Sol, *Vulcano*, el cual existió solamente en la mente de esos científicos, dado que el radio de la órbita de éste debía ser menor que  $6M_\odot$ , pero esto, ¡es en el interior del Sol!

En el caso específico de Mercurio, la relatividad general predice una

rotación del eje principal de la elipse en la cual orbita, esto se conoce como la *precesión en el perihelio*. Este cálculo<sup>9</sup> se realiza, con:

$$\omega_p \cong \frac{3(GM)^{\frac{3}{2}}}{c^2(1-e^2)a^{\frac{5}{2}}},$$

donde  $e$  es la excentricidad de la órbita,  $a$  el semieje mayor,  $c$  la velocidad de la luz y  $\omega_p$  es la variación del ángulo en el cual se sustenta los ejes de la elipse. Así, para Mercurio es de ¡43 segundos de arco por siglo!

En 1975 Hulse y Taylor registraron la pulsación de un sistema binario. Con base en datos más precisos, Taylor y McCulloch verificaron en 1980 estos resultados y encontraron una precesión de los dos astros en sus órbitas, del uno en el otro, de 4° por año.

### 4.3.3. La deflexión de los rayos de luz

Tomemos ahora el caso en que las geodésicas sean nulas ( $K = 0$  en las ecuaciones (4.11-4.12)), es decir, nuestros objetos de prueba serán ahora rayos de luz y no cuerpos con masa. La ecuación (4.12) se transforma simplemente en:

$$V = \frac{L^2}{2r^3}(r - 2M) \quad (4.13)$$

y encontramos los puntos críticos con  $\frac{dV}{dr} = 0$ , es decir:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dr} &= \frac{L^2[2r^3 - 6r^2(r - 2M)]}{4r^6} \\ &= \frac{L^2[12Mr^2 - 4r^3]}{4r^6} \\ &= \frac{L^2[3M - r]}{r^4}, \end{aligned}$$

entonces, existe un único punto crítico en  $r = 3M$  y es máximo. Con ello sabemos que la relatividad general predice órbitas inestables de fotones en este radio. Sabemos que físicamente la gravedad tiene efectos significativos en los rayos de luz a distancia  $3M$  de nuestro origen en el sistema de coordenadas de Schwarzschild.

De esta forma el mínimo de energía  $E$  que se necesita para “remontar” la sima de la barrera potencial está dada por:

$$\frac{1}{2}E^2 = \frac{L^2M}{2(3M)^3},$$

<sup>9</sup>Para mayores referencias véase [Wald, 1984, p.142].

si identificamos nuevamente  $V = E^2/2$  en la ecuación (4.13) y calculamos en  $r = 3M$ , tenemos

$$\frac{L^2}{E^2} = 27M^2,$$

tomando  $L$  como el momento angular por unidad de masa en reposo para las trayectorias tipo tiempo y  $\hbar L$  para el recorrido de un fotón.  $E$  es la energía por unidad de masa en reposo para objetos en viajes tipo temporales y  $\hbar E$  es la correspondiente para los fotones. Identificamos  $L/E$  como un parámetro de impacto que será la distancia de mayor aproximación al origen  $r = 0$ .

Entonces, en la geometría de Schwarzschild se capturarán los fotones enviados a través de geodésicas nulas con un *parámetro de impacto aparente* menor al valor crítico  $b_c$  dado por:

$$b_c = 3^{\frac{3}{2}}M.$$

Ya que nos encontramos en el análisis de la región ecuatorial, la región circular en la cual el fotón es capturado es

$$\sigma = \pi b_c^2 = 27\pi M^2.$$

Para el estudio de la deflexión de los rayos de luz no capturados en la geometría de Schwarzschild necesitaremos observar cómo varía el radio en términos del ángulo  $\phi$ . De la ecuación (4.11) con  $K = 0$ , despejaremos  $\dot{r}$ , así

$$\dot{r} = \sqrt{E^2 - \frac{L^2}{r^3}(r - 2M)}$$

y de la definición de  $L$ , obtenemos que

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}.$$

Es decir:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} = \frac{L}{r^2} \left[ E^2 - \frac{L^2}{r^3}(r - 2M) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.14)$$

Estamos interesados en encontrar la variación del ángulo  $\phi$  del lugar del que proviene ( $\phi_{-\infty}$ ) al lugar al que se dirige ( $\phi_{+\infty}$ ), es decir,

$$\Delta\phi = \phi_{+\infty} - \phi_{-\infty}.$$

Para que un fotón no sea capturado, el parámetro de impacto ( $L/E$ ) debe ser mayor al valor crítico  $3^{\frac{3}{2}}M$ . En tal caso, la trayectoria del rayo de luz debe

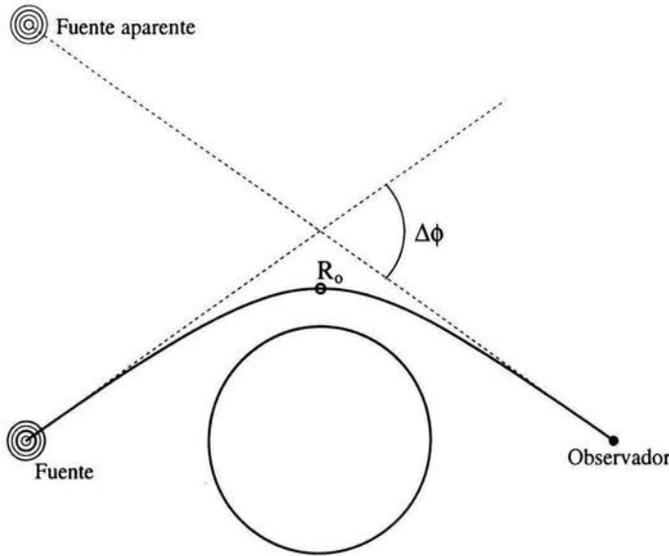


Figura 4.2: La deflexión de la luz. Al prolongar la trayectoria del rayo luminoso en la dirección de la fuente encontraremos  $\phi_{-\infty}$  y en la del observador,  $\phi_{+\infty}$ .  $R_o$  es el punto de mayor cercanía al centro del objeto masivo.

tener un “punto de regreso”  $R_o$ . El potencial, es decir, la fuerza de atracción que siente el rayo, en el punto  $R_o$  debe cumplir

$$V(R_o) = \frac{L^2}{2R_o^3}(R_o - 2M),$$

o si se quiere, al tomar nuevamente  $V = E^2/2$ , la raíz más grande de:

$$\frac{E^2}{2} - \frac{L^2}{2R_o^3}(R_o - 2M) = 0.$$

Multiplicando por  $2R_o^3/E^2$  tenemos

$$R_o^3 - \frac{L^2}{E^2}(R_o - 2M) = 0. \quad (4.15)$$

Siendo una de sus soluciones<sup>10</sup>:

$$R_o = \frac{2L}{\sqrt{3}E} \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1} \left( \frac{-3^{\frac{3}{2}}ME}{L} \right) \right].$$

<sup>10</sup>Véase la solución general de ecuaciones de tercer grado en el apéndice A.

Por lo tanto, resolviendo la ecuación (4.14) para nuestros límites, tenemos

$$\Delta\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{\left[r^4 \frac{E^2}{L^2} - r(r-2M)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Aprovechando la simetría que existe a partir de  $R_o$  hacia ambas direcciones podemos simplificar la integral de manera tal que:

$$\Delta\phi = 2 \int_{R_o}^{\infty} \frac{dr}{\left[r^4 \frac{E^2}{L^2} - r(r-2M)\right]^{\frac{1}{2}}},$$

y cambiar de variables con  $u = r^{-1}$ ,

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{1/R_o} \frac{du}{\left[\frac{E^2}{L^2} - u^2 + 2Mu^3\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.16)$$

Observemos ahora qué sucede en un “espacio plano”, es decir, sin objetos en él, con  $M = 0$ . La integral anterior se transforma simplemente en

$$\begin{aligned} \Delta\phi|_{M=0} &= 2 \int_0^{1/R_o} \frac{du}{\left(\frac{E^2}{L^2} - u^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= 2 \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{L}{ER_o} \right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Este resultado confirma nuestra hipótesis al mostrar que no hay tal deflexión en ausencia de materia, la trayectoria del rayo de luz es rectilínea. Falta entonces entender el comportamiento de  $\Delta\phi$  cuando  $M \neq 0$ . Tomemos la formulación (4.16) y cambiemos  $E^2/L^2$  por su equivalente dado en la ecuación (4.15), así:

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{1/R_o} \frac{du}{\left[R_o^{-2} \left(1 - \frac{2M}{R_o}\right) - u^2 + 2Mu^3\right]^{\frac{1}{2}}},$$

obteniéndose una expresión más simple dada la cantidad de variables involucradas. Ahora podemos cuantificar la contribución de  $M$  a la “deflexión de la luz” válida hasta primer orden. Sabemos que

$$\Delta\phi = \Delta\phi|_{M=0} + M \left. \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial M} \right|_{M=0} + O(M^2) \quad (4.17)$$

y además, se tiene que

$$\delta\phi = \Delta\phi - \Delta\phi|_{M=0}$$

pues queremos encontrar la variación del ángulo partiendo del caso límite. Dado que  $\Delta\phi|_{M=0} = \pi$ , entonces:

$$\delta\phi = \Delta\phi - \pi,$$

pero por otro lado, utilizando la formulación de  $\Delta\phi$  a primer orden de  $M$  (ecuación (4.17)) tenemos

$$\begin{aligned}\delta\phi &\approx \Delta\phi|_{M=0} + M \left. \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial M} \right|_{M=0} - \Delta\phi|_{M=0} \\ &= M \left. \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial M} \right|_{M=0}.\end{aligned}$$

Con lo cual sólo necesitamos obtener el cambio de  $\Delta\phi$  respecto de  $M$  y evaluarlo en  $M = 0$ . Calculando tenemos:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial M} \right|_{M=0} &= 2 \int_0^{1/R_o} \frac{(R_o^{-3} - u^3)du}{[R_o^{-2} \left(1 - \frac{2M}{R_o}\right) - u^2 + 2Mu^3]^{\frac{1}{2}}} \Big|_{M=0} \\ &= 2 \int_0^{1/R_o} \frac{(R_o^{-3} - u^3)du}{[R_o^{-2} - u^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= 4R_o\end{aligned}$$

y así<sup>11</sup>:

$$\delta\phi \approx 4MR_o$$

que es directamente proporcional a la cantidad de materia.

Para un rayo de luz que roce la superficie solar la predicción de la deflexión es de solamente 1.75" de arco. En 1919 Eddington fue al África a medir este fenómeno durante un eclipse total de Sol, obteniendo un 10 % de precisión. Con esta predicción la relatividad general se consolidó como una teoría fértil.

Recientemente las predicciones se han confirmado en otros eclipses, como el de 1976, en el que Fomalont y Smarek se acercaron a la predicción teórica de la ecuación en un 1 % de certeza midiendo un cuasar.

Sin embargo, actualmente las mediciones no necesitan la presencia de un eclipse pues el resultado es idéntico con las ondas de radio. Anualmente se realizan medidas en el tiempo en que QSO 3C 279 se oculta tras el Sol. Los registros varían desde 1.57" hasta 2.37" teniendo su media en 1.73", una pequeña diferencia con el valor encontrado en relatividad general (1.75"), pero con una precisión mucho mayor a la aproximación newtoniana de 0.875", de más del doble<sup>12</sup>.

<sup>11</sup>Si se reinsertan  $G$  y  $c$  [Wald, 1984, p.146], los cálculos no están normalizados.

<sup>12</sup>Véase [Berry, 1989, p.87].

## 4.4. Colapso esférico

Analicemos el caso más sencillo en el cual puede provocarse el colapso de una *estrella* que pensemos como una bola de gas o polvo homogéneo. Este análisis se lo debemos en principio a Oppenheimer y Snyder en 1939. Para ello, necesitaremos tomar algún modelo cosmológico donde podamos situar dicha materia.

Es preciso primero idealizar nuestro Universo bajo algunos supuestos aceptables. Dadas las observaciones a gran escala –mayores a  $10^8$  años luz–, suponemos que es *homogéneo e isotrópico*, es decir, en cualquier lugar se ve más o menos igual; esto quiere decir también que la densidad de materia debe ser uniforme en cada una de sus partes; finalmente, pedimos la *condición de cerradura de Einstein*, la cual estipula que deben cumplirse las ecuaciones del campo gravitatorio (4.5) y además debe ser finito.

Es fácil notar que  $S^3$  cumple con todos nuestros requerimientos, al menos, para las componentes espaciales. Así, si tomamos

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

tenemos que el cambio de coordenadas está dado por:

$$\begin{aligned} x &= R \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ y &= R \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ z &= R \operatorname{sen} \chi \cos \theta \\ w &= R \cos \theta. \end{aligned}$$

Tomando, entonces, la sección de volumen  $dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$ , con sus equivalentes con el cambio de coordenadas, y agregando la componente temporal  $-d\tau^2$  encontramos que la geometría del espacio-tiempo está descrita por la métrica:

$$ds^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau)[d\chi^2 + \operatorname{sen}^2 \chi(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2)]. \quad (4.18)$$

La cual nos denota los modelos cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker de un universo estático<sup>13</sup>.

Tomaremos un polvo de densidad uniforme en un momento de simetría temporal, es decir, es lo mismo para nosotros el pasado que el futuro. El tensor de energía-momento lo tomaremos como:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b,$$

<sup>13</sup>Nos referimos a estático dado que, por construcción, estamos tomando los cortes espaciales isomorfos entre sí.

con  $\rho$  la densidad y  $u^a$  una tétrada *-cuadri vector-* que refleja la velocidad de la materia en un evento dado que será normalizada por  $u^a u_a = -1$ . Tomaremos la conservación bariónica, es decir,

$$(\rho u^a)_{;a} = 0,$$

lo cual indica que la densidad no cambia en la dirección geodésica. También será necesario tomar la conservación del tensor de energía-momento

$$(T_{ab})_{;b} = 0$$

mostrando que el polvo se mueve a través de geodésicas. La solución dentro de la materia ( $0 \leq \chi \leq \chi_s$ , con  $\chi$  una coordenada radial) estará contenida en el modelo. Así, tomemos el modelo (4.18) con

$$\rho = \frac{3 R_o}{8\pi R^3(\tau)}, \quad u^a = \delta_\tau^a, \quad (4.19)$$

donde  $R_o$  es una constante y  $R(\tau)$  es dado paraméricamente por:

$$\begin{aligned} R(\eta) &= \frac{1}{2} R_o (1 + \cos \eta) \\ \tau(\eta) &= \frac{1}{2} R_o (\eta + \cos \eta). \end{aligned}$$

Obtendremos la ecuación diferencial que relaciona el tiempo  $\tau$  con el radio  $R$ :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\eta} &= \frac{1}{2} R_o (-\operatorname{sen} \eta) \\ \frac{d\tau}{d\eta} &= \frac{1}{2} R_o (1 + \cos \eta) \\ &= R(\eta). \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{R_o}{R} (-\operatorname{sen} \eta)$$

lo cual implica:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 &= \frac{1}{4} \frac{R_o^2}{R^2} (\operatorname{sen}^2 \eta) \\ &= \frac{1}{4} \frac{R_o^2}{R^2} (1 - \cos^2 \eta) \\ &= \frac{1}{4} \frac{R_o^2}{R^2} (1 - \cos \eta) (1 + \cos \eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{R_o}{R} (1 - \cos \eta) \frac{1}{2} \frac{R_o}{R} (1 + \cos \eta) \\
&= \frac{1}{2} \frac{R_o}{R} (1 - \cos \eta) \frac{1}{R} \\
&= \frac{1}{2} \frac{R_o}{R} (1 - \cos \eta) \\
&= \frac{1}{2} \frac{R_o}{R} (2 - (1 + \cos \eta)) \\
&= \frac{R_o}{R} - \frac{1}{2} \frac{R_o}{R} (1 + \cos \eta) \\
&= \frac{R_o}{R} - 1
\end{aligned}$$

o, si se quiere, con (4.19), se tiene:

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho R^2 - 1$$

que se conoce como la ecuación de Friedmann.

Hay que notar que gracias al tensor de energía-momento, la densidad de materia y la curvatura escalar  $R_a^a$  son proporcionales por las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R_c^c = 8\pi T_{ab}.$$

Veamos que si en (4.19)  $R \rightarrow 0$ , entonces la densidad va a infinito, lo cual nos indica que en la curvatura se provoca una singularidad. Bien,

$$R(\eta) = 0$$

si  $\eta = \pm\pi$ . Tomando el signo positivo, dado que queremos los eventos futuros, obtenemos:

$$\tau(\pi) = \frac{1}{2} R_o (\pi + \text{sen } \pi) = \frac{\pi}{2} R_o,$$

alcanzando así la curvatura valores infinitos para un tiempo finito ( $\frac{\pi}{2} R_o$ ) medido a lo largo de las geodésicas de las partículas. Es decir, las geodésicas tipo-tiempo que siguen las partículas de polvo son incompletas. Como puede observarse la incompletez usualmente representa la presencia de una singularidad espacio-temporal ([Penrose, 1968], [Hawking y Ellis, 1973]), en este caso particular, es claro. No podemos continuar la geodésica dado que hemos llegado a un punto de la variedad donde la densidad no puede medirse.

## 4.5. Agujeros negros... estrellas oscuras

Hemos mencionado en el capítulo 1 que es posible que un agujero negro se forme a partir de aglomeraciones y por “falta de combustible” que evite el colapso gravitacional. En la sección anterior hemos estudiado un caso sencillo. Consideremos ahora el caso general.

Carter (1972)<sup>14</sup> sugiere la inevitabilidad del colapso gravitacional de esferas de materia con masa un poco mayor a la masa de Chandrasekhar, de 1.4 masas solares. Cuando una estrella quema todo su combustible nuclear tenderá a generar hierro, lo cual le dará un estado energéticamente más favorable.

Si la presión es grande (en densidades  $\rho > 10^5 g/cm^3$ ), entonces se tiene degeneración en fermiones, primero de los electrones y luego de los neutrones, así, la presión puede estimarse directamente. Si se tienen  $n$  fermiones por  $cm^3$  y cada uno tiene masa  $m$ , entonces, la degeneración implica que el momento de un fermión es aproximadamente  $\hbar n^{1/3}$  y su velocidad es de aproximadamente  $\hbar n^{1/3}/m$  para el caso no relativista. Para el caso relativista la velocidad es  $\sim 1$ , con unidades geométricas  $c = G = 1$ .

La presión ( $(momento) \times (velocidad) \times (densidad)$ ) en el caso no relativista y con  $\hbar n^{1/3} < m$ , es  $\sim \hbar^2 n^{5/3}/m$ . En el relativista ( $\hbar n^{1/3} > m$ ) es  $\sim \hbar n^{4/3}$ . Se han calculado cuatro regiones ( $\rho$  medida en  $g/cm^3$ ): se tiene para  $10^5 < \rho < 10^7$  donde los electrones de manera no relativista ejercen la mayor presión, para  $10^7 < \rho < 4 \times 10^9$ , se tienen electrones relativistas (las estrellas con degeneración electrónica, se conocen como *enanas blancas*), para  $4 \times 10^9 < \rho < 10^{13}$  se tienen neutrones relativistas que se forman con altas energías por un decaimiento inverso beta, en el cual, un electrón y un protón se unen para formar un neutrón y un neutrino. Finalmente para  $\rho > 10^{13}$  la fuente mayor de densidad es la degeneración relativista de neutrones y las interacciones fuertes, lo cual ocurre en las llamadas *estrellas de neutrones*.

Se puede estimar el radio para cada caso de estrella con la densidad de masa dada en órdenes de magnitud

$$R \sim M^{1/3} n^{-1/3} m_n^{-1/3},$$

donde  $R$  es el radio de la estrella y  $M$  la masa estelar. Así la presión puede aproximarse por la expresión newtoniana

$$P = \frac{M^2}{R^4} \cong M^{2/3} n^{4/3} m_n^{4/3}.$$

<sup>14</sup>Véase [D'Eath, 1996]

Para los cuatro casos que hemos enumerado arriba, se tienen los siguientes cálculos:

- o Electrones no relativistas,  $n < m_e^3 \hbar^{-3}$ , entonces

$$P = \hbar^2 n^{\frac{5}{3}} m_e^{-1} = M^{\frac{2}{3}} n^{\frac{4}{3}} m_n^{\frac{4}{3}}$$

que implica

$$n = M^2 m_n^4 m_e^3 \hbar^{-6},$$

es decir

$$\begin{aligned} M &\lesssim M_L \cong \hbar^{\frac{3}{2}} m_n^{-2} \\ &\cong 1,5 \text{ masas solares.} \end{aligned}$$

- o Electrones relativistas,  $n > m_e^3 \hbar^{-3}$ , así

$$P = \hbar n^{\frac{4}{3}} = M^{\frac{2}{3}} n^{\frac{4}{3}} m_n^{\frac{4}{3}}.$$

Entonces

$$M = M_L,$$

con  $n$  indeterminada.

- o Neutrones no relativistas,  $n < m_n^3 \hbar^{-3}$ , en donde

$$n = M^2 m_n^7 \hbar^{-6},$$

obteniendo nuevamente

$$M < M_L.$$

- o Neutrones relativistas,  $n > m_n^3 \hbar^{-3}$ , se tiene

$$M = M_L.$$

Los cálculos relativistas difieren muy poco de los clásicos. Por ejemplo, con los electrones tenemos que la masa límite  $M_L$  debe ser aproximadamente 1.5 veces la masa solar  $M_\odot$ , de manera similar en el caso de los neutrones el resultado newtoniano dice que es menor a esta cota; sin embargo, en los casos relativistas tenemos que el límite es precisamente  $1.5M_\odot$ . Este valor se considera como la masa límite de Chandrasekhar (1939) y muestra hasta dónde es capaz una estrella de soportar su propia materia sin colapsarse.

## 4.6. Preliminares

En el camino hacia entender los teoremas de singularidades necesitamos algunos elementos que nos permitan comprender su formulación. En esta sección estudiaremos definiciones que se emplean en el manejo de los elementos del espacio tiempo dinámico. Asimismo, encontraremos algunos teoremas sobre variedades que representan el Universo y algunas proposiciones que emplearemos en las demostraciones de los teoremas de singularidades.

Tomemos nuestro espacio-tiempo como la variedad  $M$  y, en él, un abierto  $O \subset M$ ; denotaremos como *congruencia* la familia de curvas que tienen la siguiente propiedad: para cada punto  $p \in O$  existe una única curva de la familia que pasa por él. Es claro que el conjunto de todos los vectores tangentes a la familia en cada uno de sus puntos forman en el abierto un campo vectorial en  $O$ ; asimismo, no es difícil de probar que cada campo vectorial continuo genera al menos una congruencia.

Diremos también que una congruencia es suave (o de clase  $C^n$ ) si toda curva de la familia es suave (o de clase  $C^n$ ).

Para un abierto  $O$  tomemos una congruencia suave de geodésicas tipo tiempo. Sin pérdida de generalidad, parametrizadas por el tiempo propio  $\tau$  (i.e., longitud de arco,  $\xi^a \xi_a = -1$ ). Escogeremos un campo tensorial  $B_{ab}$  definido por

$$B_{ab} = \nabla_b \xi_a,$$

donde  $\xi$  es tipo tiempo y se cumple que  $B_{ab} \xi^a = B_{ab} \xi^b = 0$ ; por lo que se dirá que el campo tensorial es *puramente espacial* y mide la aceleración orthogonal a las velocidades de las curvas tipo tiempo.

Tomaremos una subfamilia  $\gamma_s(x)$  de geodésicas en la congruencia y una *desviación ortonormal*  $\eta^a$  de  $\gamma_o$ , que es, en analogía a la formulación de la ecuación de onda, la función  $\varphi(t)$  (véase sección 3.1); solamente que aquí será una geodésica infinitesimalmente distinta, en la dirección espacial, a  $\gamma_o$  y cumplirá:

$$L_\xi \eta^a = 0,$$

donde  $L_\xi$  es la derivada de Lie en la dirección  $\xi$ ; para nuestros fines<sup>15</sup>, como  $\eta$  es orthogonal a  $\xi$ , el cambio en esta dirección es cero. Además:

<sup>15</sup>Puede encontrarse la definición completa de la derivada de Lie en la sección 23.2 de [Dubrovin *et al.*, 1992]

$$L_\xi \eta^a = \xi^b \nabla_b \eta^a - \eta^b \nabla_b \xi^a$$

y

$$L_\xi \eta_a = \xi^b \nabla_b \eta_a + \eta^b \nabla_b \xi_a.$$

Entonces

$$\xi^b \nabla_b \eta^a = \eta^b \nabla_b \xi^a = B^a_b \eta^b,$$

donde  $B^a_b$  mide la “falla” del transporte paralelo.

Definimos la *métrica espacial* como

$$h_{ab} = g_{ab} + \xi_a \xi_b$$

dado que  $\xi_a$  es tipo tiempo y contrarrestará en la métrica  $g_{ab}$  la contribución en la dirección temporal.

Tomemos  $h^a_b = g^{ac} h_{cb}$  (la métrica sólo intercambia los índices) y apliquémosla a un vector  $\xi^b$  para comprobar que es la proyección en el subespacio ortogonal. Así:

$$\begin{aligned} h^a_b \xi^b &= g^{ac} (g_{cb} + \xi_c \xi_b) \xi^b \\ &= (g^{ac} g_{cb} + g^{ac} \xi_c \xi_b) \xi^b \\ &= (g^a_b + \xi^a \xi_b) \xi^b \\ &= g^a_b \xi^b + \xi^a \xi_b \xi^b \\ &= \xi^a + \xi^a (-1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

con lo cual al hacer el producto interior, *i.e.* multiplicar por  $\xi_a$ , obtendremos que es cero; pues son ortogonales.

Definiremos ahora la *expansión*  $\theta$ , el *tangente*  $\sigma_{ab}$  y la *torsión*  $\omega_{ab}$  de la convergencia como:

$$\begin{aligned} \theta &= B^{ab} h_{ab} \\ \sigma_{ab} &= B_{(ab)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab} \\ \omega_{ab} &= B_{[ab]}, \end{aligned}$$

donde  $B_{(ab)} = \frac{1}{2}(B_{ab} + B_{ba})$  y  $B_{[ab]} = \frac{1}{2}[B_{ab} - B_{ba}]$ .

Con esto podemos tomar

$$B_{ab} = \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}, \quad (4.20)$$

dato que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} &= \frac{1}{3}(B^{ab}h_{ab})h_{ab} + B_{(ab)} - \frac{1}{3}(B^{ab}h_{ab})h_{ab} + B_{[ab]} \\
 &= \frac{1}{2}(B_{ab} + B_{ba}) + \frac{1}{2}[B_{ab} - B_{ba}] \\
 &= B_{ab}.
 \end{aligned}$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ab}\xi^b &= (B_{(ab)} - \frac{1}{3}\theta h_{ab})\xi^b \\
 &= \frac{1}{2}B_{ab}\xi^b + \frac{1}{2}B_{ba}\xi^b - \frac{1}{3}\theta(g_{ab} + \xi_a\xi_b)\xi^b \\
 &= 0 + 0 - \frac{1}{3}\theta(g_{ab}\xi^b + \xi_a\xi_b\xi^b) \\
 &= -\frac{1}{3}\theta(\xi_a - \xi_a) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \omega_{ab}\xi^b &= \frac{1}{2}B_{ab}\xi^b - \frac{1}{2}B_{ba}\xi^b \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

donde  $\xi^b$  es tipo tiempo, y por lo tanto,  $\sigma_{ab}$  y  $\omega_{ab}$  son puramente espaciales.

A través de la congruencia, tomado una esfera en el tangente al ser transportada en dirección  $\xi^a$  y distorsionarse,  $\theta$  mide el desplazamiento de expansión (separación) de las geodésicas que rodean  $\gamma_o$  o el crecimiento de dicha esfera;  $\omega_{ab}$  (antisimétrico) mide la rotación de ésta; y  $\sigma_{ab}$  (simétrico) mide qué tanto cambió en un elipsoide.

Así, al derivar  $B_{ab}$  en dirección de los vectores tipo tiempo  $\xi^b$ , tendremos las contribuciones de cada uno de estos tres operadores:

$$\nabla_{\xi} B_{ab} = \xi^c \nabla_c B_{ab} = \xi^c \nabla_c \nabla_b \xi_a \quad (4.21)$$

y por la definición de la curvatura de Riemann tenemos que

$$R_{abc}{}^d \xi^c \xi_d = \xi^c \nabla_c \nabla_b \xi_a - \xi^c \nabla_b \nabla_c \xi_a$$

y de la derivada covariante

$$\nabla_b(\xi^c \nabla_c \xi_a) = (\nabla_b \xi^c)(\nabla_c \xi_a) + \xi^c \nabla_b \nabla_c \xi_a.$$

Entonces, cambiando estas dos últimas y utilizándolas en la ecuación (4.21) se sigue que

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\xi} B_{ab} &= \xi^c \nabla_b \nabla_c \xi_a + R_{abc}{}^d \xi^c \xi_d \\
 &= \nabla_b (\xi^c \nabla_c \xi_a) - (\nabla_b \xi^c) (\nabla_c \xi_a) + R_{abc}{}^d \xi^c \xi_d \\
 &= \nabla_b (B_{ac} \xi^c) - B^c{}_b B_{ac} + R_{abc}{}^d \xi^c \xi_d \\
 &= -B^c{}_b B_{ac} + R_{abc}{}^d \xi^c \xi_d.
 \end{aligned}$$

La última identidad se da al cancelar el primer término por la condición de que  $B_{ab}$  es puramente espacial. Tomando la traza, es decir utilizando esta última formulación y la descomposición (4.20) de  $B_{ab}$ , obtenemos

$$\xi^c \nabla_c \theta = -\frac{1}{3} \theta^2 - \sigma_{ab} \sigma^{ab} + \omega_{ab} \omega^{ab} - R_{cd} \xi^c \xi^d, \quad (4.22)$$

que se conoce como la ecuación de Raychaudhuri; ésta será una de las claves en la demostración de los teoremas de singularidades.

Si nos fijamos en el último término, observamos que, por la ecuación de Einstein, tenemos:

$$R_{ab} \xi^a \xi^b = 8\pi [T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab}] \xi^a \xi^b = 8\pi [T_{ab} \xi^a \xi^b + \frac{1}{2} T].$$

Físicamente  $T_{ab} \xi^a \xi^b$  representa la densidad de energía de la materia medida por un observador cuya velocidad sea  $\xi^a$ . Es razonable considerar que en el caso clásico esta densidad no sea negativa, es decir,

$$T_{ab} \xi^a \xi^b \geq 0,$$

para todo vector  $\xi^a$  tipo tiempo. Esto se conoce como la *condición débil de energía*. Por otra parte tendremos la *condición fuerte de energía* cuando

$$T_{ab} \xi^a \xi^b \geq -\frac{1}{2} T$$

para todo vector unitario  $\xi^a$  tipo tiempo. Esta condición se pide cuando no queremos que este término sea tan negativo que altere el signo en la ecuación (4.22). Matemáticamente parece incorrecta la elección de los nombres “fuerte” y “débil” de las dos condiciones anteriores; es más fuerte pedir que la densidad no sea negativa a que esta pueda serlo un poco. La elección proviene entonces de la idea física. La condición débil es el estatuto de la física clásica, no hay densidades negativas, por eso es la condición fuerte la que permite que en relatividad general existan densidades por debajo de cero, pero no tan negativas como para alterar el signo de  $8\pi [T_{ab} \xi^a \xi^b + T/2]$ .

Necesitamos también algunas definiciones de carácter geométrico para la variedad con la que trabajaremos.

Tendremos el concepto de *superficie acronal*<sup>16</sup>, una subvariedad de  $M$  de dimensión  $n - 1$ , que denotará, por así decirlo, una región del espacio en un tiempo dado. La idea es un poco más general; estas superficies se caracterizarán de manera tal que, dados dos puntos cualesquiera en ella, la geodésica que los une es necesariamente tipo espacio. Si pedimos que esta superficie sea suave, entonces, podemos decir que todos los vectores tangentes a cualquiera de sus puntos son tipo espacio.

Una *superficie de Cauchy*  $\Sigma$  es una superficie suave acronal completa; es decir, para cada geodésica nula existe un único punto en  $\Sigma$  que también pertenece a la geodésica. Hay que notar que la unicidad del punto es meramente una condición necesaria para que  $\Sigma$  sea acronal.

Definiremos la *curvatura extrínseca*  $K_{ab}$  de  $\Sigma$  así: sea  $\xi^a$  el vector tangente y unitario de las geodésicas tipo tiempo ortogonales a  $\Sigma$ , entonces

$$K_{ab} = \nabla_a \xi_b.$$

## 4.7. Teoremas de Singularidades

Es esta sección –la central– nos encontramos ya en posibilidades de entender el significado de los teoremas de singularidades. Como hemos relatado, éstos le dieron una vuelta a nuestra imagen del Cosmos. Hasta antes de su aparición, sus implicaciones eran creíbles sólo en historias de ciencia ficción.

A diferencia de las cosmologías antiguas tenemos la metodología para corroborar nuestras hipótesis; en este caso, el *Big bang* y los *agujeros negros*.

En esta vía enunciaremos primero dos teoremas de singularidades. Veremos sus implicaciones en la existencia de un punto primigenio del Universo donde todo se originó y la posibilidad de que una región del espacio se colapse con el tiempo en un punto. Daremos la prueba de estos dos teoremas. Continuaremos con el teorema de Hawking-Penrose en singularidades sin dar aquí su demostración; pero eso sí, veremos algunas posibilidades que éste sugiere para nuestro Universo circundante. Finalizaremos con un estudio en el colapso de una cáscara de materia que nos mostrará el significado de lo que definiremos como una superficie atrapada.

<sup>16</sup>Probablemente podría llamarse también una *superficie espacial*.

En 1965 Roger Penrose probó el teorema pionero en singularidades, en su trabajo titulado *Conformal treatment of infinity*, con el cual introdujo también las técnicas globales para el estudio del espacio-tiempo<sup>17</sup>. Entre 1966 y 1967, Stephen Hawking se interesó en cómo el trabajo de Penrose llevaba al colapso gravitacional; así, desarrolló técnicas nuevas en la serie de artículos de la Royal Society de Londres.

Sin embargo, hay que remontarse tiempo atrás; George Gamow, en 1946, piensa sobre el origen del Universo, en el cual supone que la densidad y el calor eran suficientemente grandes para generar rápidamente reacciones termonucleares; Lemaître, en 1950, argumenta que la expansión del *Big bang* se aproximaría rápidamente al Universo estático planteado por Einstein en 1917. Finalmente, en 1968 y 1969, el trabajo de Hawking, Ellis y Penrose muestra que un Universo en expansión, lleno de materia y radiación, tiene que obedecer una ecuación físicamente aceptable, la cual debe haber sido singular en un pasado medible.

Para examinar los teoremas de singularidades necesitamos primero una definición precisa de singularidad. Como hemos mencionado, esto no es fácil; el mismo Geroch, en su artículo “¿Qué es una singularidad en Relatividad General?”, lo enfatiza<sup>18</sup>. Empero es necesario el trabajo de mucha gente para lograr que, hasta en 1970, Schmidt de una definición aceptable, aunque llena de tecnicismos: en una variedad espacio-temporal considere todas las geodésicas tipo espacio (camino de “taquiones”), todas las geodésicas nulas (camino de fotones), todas las geodésicas tipo tiempo (observadores en caída libre) y todas las curvas tipo tiempo con aceleraciones suaves (camino en que los observadores, en principio, pueden moverse). Suponga que una de estas trayectorias termina en un lapso de tiempo propio (o parámetro afín finito para el caso de las geodésicas nulas). Suponga, además, que es imposible extender el espacio-tiempo más allá del punto de terminación, dado que la curvatura se hace infinita ahí. Entonces el punto de terminación junto con los puntos de terminación adyacentes se identifican con una singularidad.

Misner pregunta al respecto: “¿Qué puede ser más singular que cesar la existencia de un pobre *taquión*, fotón o un observador que se mueve a lo largo de una curva terminada?” Veamos entonces algunos de los teoremas de singularidades.

**Teorema 1.** *Sea  $(M, g_{ij})$  un espacio-tiempo globalmente hiperbólico con  $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$  para todo vector tipo tiempo  $\xi^a$ , que será el caso si las ecuaciones de Einstein se satisfacen con la condición fuerte de energía en pre-*

<sup>17</sup>Puede revisarse [Penrose, 1972].

<sup>18</sup>[Geroch, 1968].

sencia de materia. Suponga que existe una superficie suave (o, al menos  $C^2$ ) de Cauchy  $\Sigma$ , para la cual la traza de la curvatura extrínseca (para la congruencia geodésica normal dirigida al pasado) satisface  $K \leq C < 0$  para todo evento, donde  $C$  es una constante. Entonces, ninguna curva tipo tiempo dirigida al pasado de  $\Sigma$  tiene una longitud mayor que  $3/|C|$ . En particular, todas las geodésicas tipo tiempo dirigidas al pasado son incompletas.

Antes de dar prueba al teorema leámoslo en términos más mortales:

- (1) Pedimos que el Universo  $(M, g_{ab})$  sea globalmente hiperbólico, es decir, que posea al menos una superficie de Cauchy. Podemos de alguna manera tener un “instante en el tiempo” de todo el Universo.
- (2) Asimismo, pedimos que se satisfaga la condición fuerte de energía; es decir, que esta no sea menor a  $-T/2$  para todo observador. En la ecuación de Raychaudhuri (4.22), el cambio de la expansión  $\theta$  en la dirección temporal, se pide que no se altere el signo del último término; con ello, que no se altere significativamente la propia expansión.
- (3) Queremos también que el Universo en un “instante” —el análogo a nuestra superficie de Cauchy  $\Sigma$ — se encuentre en expansión distinta de cero ( $K < 0$ ). Es un supuesto aceptable dadas las observaciones realizadas por Hubble.
- (4) Así, podemos decir que existió un tiempo finito anterior (no mayor a  $3/|C|$ ) en el cual el Universo se encontraba en un estado singular, todo lo que hoy conocemos (falta por conocer) se encontraba ahí, en un punto.

Este tiempo inicial es lo que denominamos el *Big bang*. Sin embargo, en la formulación del teorema pedimos que el Universo sea globalmente hiperbólico; lo cual es una hipótesis muy fuerte. Podemos sacrificar la existencia de una superficie de Cauchy y tener en contraposición una conclusión más débil; en lugar de que cada geodésica tipo tiempo dirigida al pasado sea incompleta se tiene que al menos una de ellas lo es. Véase el teorema 9.5.2 en [Wald, 1984, 238]. Ahora que hemos comprendido un poco el significado demos una prueba del teorema:

*Demostración.* Supongamos que existe una curva tipo tiempo  $\lambda$  dirigida al pasado desde  $\Sigma$  con una longitud mayor a  $3/|C|$ . Sea  $p \in \lambda$  un punto después de la longitud  $3/|C|$ . Sabemos que existe una curva  $\gamma$  de longitud máxima de  $\Sigma$  a  $p$ , ésta debe tener una longitud mayor a  $3/|C|$ . Por definición,  $\gamma$  debe ser una geodésica.

Para encontrar una contradicción a este argumento, necesitaremos hacer uso de un teorema y una proposición. No daremos su prueba aquí, pero sí una idea intuitiva de su validez<sup>19</sup>.

**Teorema.** Sea  $(M, g_{ab})$  un espacio-tiempo fuertemente causal<sup>20</sup>. Sea  $p \in M$  y  $\Sigma$  una superficie de Cauchy. Considérese a  $\tau$  la función que mide la longitud de las curvas que unen  $p$  con  $\Sigma$ . La condición necesaria para que  $\tau$  encuentre su máximo en  $\gamma$  (una curva), es que ésta sea una geodésica ortogonal a  $\Sigma$  que no contenga puntos conjugados entre  $\Sigma$  y  $p$ .

Veamos lo que significa que un punto sea conjugado a otro. Tomemos como ejemplo nuestra conocida esfera  $S^2$ . Localicemos un punto fijo,  $S$ , en el polo sur y tomemos un punto  $p$  cualquiera en  $S^2$ . Ya sabemos que la geodésica que minimiza (en este caso, no con una pseudométrica) la distancia de  $S$  a  $p$  es la circunferencia de radio máximo. Ahora, si  $p = N$ , el polo norte, entonces la geodésica no es única.  $N$  se conoce como el punto conjugado de  $S$ . Bien, si tomamos  $p \neq N$ , tenemos no sólo la geodésica, sino el camino más corto de  $S$  a  $p$ ; si prolongamos esta curva llegaremos a  $N$  y, al prolongarla un poco más, a puntos que están más lejos de  $S$  por este camino que por la misma circunferencia de radio máximo al recorrerla en el sentido contrario.

El análogo en el Teorema 1 es decir que, dada la causalidad, existe una única geodésica ortogonal a  $\Sigma$  que minimiza el trayecto a  $p$  que no tiene puntos conjugados.

Por otra parte, tenemos la siguiente

**Proposición.** Sea  $(M, g_{ab})$  un espacio-tiempo que satisface  $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$  para todo  $\xi^a$  tipo tiempo. Sea  $\Sigma$  una superficie de Cauchy con  $K = \theta < 0$  en un punto  $q \in \Sigma$ . Entonces, en un tiempo propio  $\tau \leq 3/|\theta|$ , existe un punto  $p$  conjugado a  $q$  a lo largo de la geodésica  $\gamma$  ortogonal a  $\Sigma$  (si es que  $\gamma$  puede extenderse tanto).

De vuelta en  $S^2$  podemos imaginar que nuestra superficie de Cauchy es un meridiano; así, la curvatura tendrá un valor distinto de cero al medirla sobre la esfera y no el espacio. De este modo es fácil ver que el punto conjugado a  $\Sigma$  es exactamente  $S$  o  $N$ , dependiendo cuál esté más próximo.

Seamos justos, no dimos el concepto del punto conjugado a una curva. Sin embargo el concepto es similar al descrito unos párrafos antes. El punto conjugado es, en este caso, el que puede alcanzarse desde la curva en cuestión por al menos dos geodésicas ortogonales que tienen la misma longitud.

<sup>19</sup>Puede verse [Wald, 1984].

<sup>20</sup>Véase apéndice B.

De esta manera, por el teorema, tenemos que  $\lambda$  no puede albergar puntos conjugados entre  $p$  y  $\Sigma$ ; sin embargo, esto contradice la proposición que asevera que  $\gamma$  debe de tener al menos un punto conjugado. Entonces la curva original  $\lambda$  no puede existir. Es decir, no existe curva alguna dirigida al pasado que tenga una longitud mayor a  $3/|C|$ .  $\square$

El teorema anterior muestra la incompletitud geodésica en el contexto global, el cosmológico. El siguiente teorema es de índole diferente, prueba esta incompletitud en las geodésicas nulas, dando relevancia al colapso gravitacional.

Definiremos el término de una superficie atrapada. Tomaremos una región puramente espacial; en este caso será una subvariedad bidimensional compacta tipo espacio, cumpliendo que el término que mide la expansión  $\theta$  sea negativo en ambos sentidos, tanto para las geodésicas nulas dirigidas al futuro como para las dirigidas al pasado que salen ortogonalmente de ésta, la *superficie atrapada*. Éste es el teorema pionero que Penrose demostró en 1965; muestra que, después de la formación de una superficie atrapada, la singularidad es inminente como fin de la primera.

**Teorema 2.** *Sea  $(M, g_{ij})$  un espacio-tiempo conexo, globalmente hiperbólico con una superficie  $\Sigma$  de Cauchy no compacta. Suponga que  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  para todo vector nulo  $k^a$ , que es el caso cuando  $(M, g_{ij})$  es una solución de las ecuaciones de Einstein con materia que satisface la condición débil o fuerte de energía. Suponga, por ahora, que  $M$  contiene una superficie atrapada  $T$ . Sea  $\theta_o < 0$  el valor máximo de  $\theta$  para ambos conjuntos de geodésicas ortogonales en  $T$  (futuras y pasadas). Entonces, al menos existe una geodésica ortogonal nula dirigida al futuro, que es inextendible desde  $T$  y tiene una longitud afín no mayor a  $2/|\theta_o|$ .*

*Demostración.* Supongamos que todas las geodésicas nulas dirigidas al futuro provenientes de  $T$  tienen una longitud afín  $a \geq 2/|\theta_o|$ . Podemos definir una transformación

$$f_+ : T \times \left[0, \frac{2}{|\theta_o|}\right] \rightarrow M,$$

donde  $f_+(q, a)$  dará como resultado un punto en la variedad  $M$  proveniente de  $q \in T$  a una longitud afín  $a$  sobre una geodésica nula dirigida al futuro. Del mismo modo, podemos tomar

$$f_- : T \times \left[0, \frac{2}{|\theta_o|}\right] \rightarrow M,$$

como el punto en la variedad proveniente de  $q \in T$ , pero dirigido al pasado.

Dado que  $T$  es compacto y tanto  $f_+$  como  $f_-$  son continuas, entonces, las imágenes de éstas ( $I^+(T)$  y  $I^-(T)$ ) serán compactas también. Del mismo

modo, el conjunto  $A$  de las uniones lo será.

Si tomamos

$$H^+ = \left\{ x \in M \mid x = f_+ \left( q, \frac{2}{|\theta_o|} \right), q \in T \right\}$$

y

$$H^- = \left\{ x \in M \mid x = f_- \left( q, \frac{2}{|\theta_o|} \right), q \in T \right\}$$

es fácil ver que ambos conjuntos son compactos.

Escojamos un campo vectorial  $t^a$  tipo tiempo en  $M$  que sea suave. Por construcción  $H^+(T)$  es acronal; y por tanto cada curva integral de  $t^a$  lo interseca a lo más en un punto, mientras  $\Sigma$  es intersecada en cada punto por una sola curva integral.

Podemos definir la transformación  $\Psi : H^+(T) \rightarrow \Sigma$  mediante las curvas integrales  $t^a$  que unen el primer conjunto con el segundo. Tomemos  $S \subset \Sigma$  como la imagen de  $H^+(T)$  en  $\Sigma$ ; por lo cual  $\Psi : H^+(T) \rightarrow S$  es un homeomorfismo. Entonces,  $S$  es un compacto, entre otras cosas,  $S$  es cerrado.

Por otro lado,  $H^+(T)$  debe ser una subvariedad continua, entonces, cada punto en ella tiene una vecindad homeomorfa a una bola abierta en  $\mathbb{R}^3$ . Dado que  $\Psi$  es un homeomorfismo la misma propiedad se cumple para  $S$ . Vista como un subconjunto de  $\Sigma$ ,  $S$  debe ser un abierto. Dado que  $M$  es conexa,  $\Sigma$  debe serlo; además  $H^+(T) \neq \emptyset$ , entonces  $S = \Sigma$ . Sin embargo esto es imposible, pues  $S$  es compacto, pero  $\Sigma$  no lo es.  $\square$

Nuevamente tenemos la hipótesis no deseada de un espacio tiempo globalmente hiperbólico. Ésta puede quitarse en sacrificio de algunas otras; estos argumentos fueron dados por Hawking y Penrose en 1969, con este teorema que es el más poderoso en su clase:

**Teorema de Hawking-Penrose en singularidades.** *Un espacio-tiempo  $(M, g_{ij})$  necesariamente contiene geodésicas incompletas tipo tiempo o nulas si, además de las ecuaciones de Einstein, las cuatro condiciones siguientes se satisfacen:*

- (1) *No existen curvas tipo tiempo cerradas (condición razonable de causalidad).*
- (2) *Para cada vector unitario  $\xi^a$  tipo tiempo se cumple la condición débil de energía:*

$$R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$$

*(condición razonable de energía).*

- (3)  $M$  es una variedad general (no es altamente simétrica) en el sentido que cada geodésica tipo tiempo o nula, con vector unitario  $v^a$ , contiene un evento donde la curvatura de Riemann cumple:

$$R_{abcd}v^av^d \neq 0.$$

- (4) La variedad  $M$  contiene una superficie atrapada.

Hay que notar que todas las condiciones, a excepción de la cuarta, parecen ser físicamente posibles para un espacio tiempo; no queremos que el espacio tiempo tenga un tiempo cíclico, la energía que mide todo observador (o la luz) es positiva y el Universo no tiene por qué ser simétrico. Sin embargo, para salvaguardar la inconformidad que pueda existir con la cuarta condición existen dos variantes de este teorema. Se pide en (2) que se cumpla para vectores  $v^a$  tipo tiempo o nulos en lugar de solamente  $\xi^a$ ; (4) se intercambia por alguna de las dos condiciones siguientes:

- (4') El espacio tiempo  $(M, g_{ij})$  posee un conjunto compacto acronal sin frontera. Es decir, es un Universo cerrado.
- (4'') Existe un punto  $p \in M$  tal que la expansión geodésica nula dirigida al futuro (o al pasado) proveniente de  $p$  se transforma en negativa. Similarmente a lo que ocurre cuando al traspasar el horizonte en las coordenadas de Schwarzschild.

Estas dos variantes, sin embargo, también piden casos específicos; en la primera un Universo cerrado y en la segunda, de algún modo, se está pidiendo ya la existencia de una singularidad.

Veamos, sin juzgar, algunas de las conclusiones o posibilidades que este teorema produce. Respecto al colapso gravitacional, nos deja la expectativa que en el Universo real antes de la formación de una singularidad y de todo horizonte existió una superficie atrapada (véase Teorema 2).

*Posibilidad 1.* La singularidad al punto final de un colapso es una región con curvatura infinita (fuerzas gravitacionales infinitas) que se genera en el colapso de materia con densidad infinita. Los ejemplos son como el visto en la sección 4.4 donde estudiamos el colapso esférico homogéneo dado por Oppenheimer y Snyder. Casos más completos son los no homogéneos propuestos por Podurets en 1966 y el "tipo Kasner" dado por Lifschitz y Khalatnikov

en 1963<sup>21</sup>. Posiblemente el más importante sea el aplastamiento “Mixmaster” dado por Misner y por Belinsky y Khalatnikov para el caso homogéneo, para luego seguir con casos no homogéneos<sup>22</sup>, donde la propiedad más importante es que si un Universo tiene una singularidad de este tipo, entonces, al perturbarse ligeramente las condiciones iniciales del espacio tiempo, éste mantendrá la singularidad del tipo “mixmaster”.

*Posibilidad 2.* Un poco más curiosa es la posibilidad de una singularidad dada por la terminación de geodésicas nulas o tipo tiempo; no a causa de una curvatura infinita o de la aglomeración de materia, sino por patologías extrañas que llevan por ello el nombre de *espacios locos de Taub*<sup>23</sup>.

*Posibilidad 3.* Una singularidad está limitada por su “tamaño” (no tiene tal, es un punto). Así, la materia que se colapsa no le proporciona dimensión y no puede expandirse dado que el horizonte es una subvariedad de una sola dirección, permite únicamente el movimiento en una dirección, la interior. Sin embargo, la materia puede alcanzar un estado máximo (y finito) de contracción provocando una re-expansión; éste debe por lo tanto hacerlo en una región distinta del espacio sin atravesar físicamente el horizonte, así, busca un camino saltando en otra dimensión (ninguna de las cuatro consideradas). En este proceso se genera un camino alterno que conecta al Universo y cambia su topología inicial, este trayecto es conocido como *hoyo de gusano*. Empero, el cambio de la topología del espacio tiempo es para algunos imposible, se dice que éste debió de haber sido creado con materia y momento angular en las condiciones iniciales del Universo. Misner asevera que esto resulta físicamente imposible.

Con estas posibilidades y las implicaciones de los teoremas leídos en palabras más comprensibles damos como terminado el propósito del trabajo. En el siguiente capítulo discutiremos algunas ideas personales y afianzaremos los nudos que pudieron quedar sueltos.

## 4.8. Generalización del colapso esférico

Este desarrollo, con el que terminamos el capítulo referente a las singularidades en relatividad general, se lo debemos al Dr. Antonmaria Minzoni.

<sup>21</sup>Podurets, “El carácter de una singularidad en el colapso gravitacional de una estrella” en la revista soviética *Doklady Akad. Nauk SSSR* y en la traducción al inglés en *Advances in Physics 12* Lifschitz y Khalatnikov, “Investigations in relativistic cosmology”.

<sup>22</sup>Puede verse [Misner *et al.*, 1970, 800] para una introducción al tema.

<sup>23</sup>De la traducción de *Taub-NUT spaces*. Véase [Geroch, 1968]

En él haremos una referencia al teorema 2 al tomar una cáscara de materia específica y ver que, en ciertas circunstancias, lleva al colapso gravitacional y con él a una singularidad.

Tomaremos nuevamente las ecuaciones de Einstein en el vacío y pondremos en el espacio-tiempo, no una esfera, sino solamente una cáscara esférica de masa  $M$  y radio  $R(t)$ ; suponemos de antemano que este radio puede variar con el tiempo.

Es claro que por la simetría esférica obtendremos una métrica como la que nos dió pie a la solución de Schwarzschild en las ecuaciones del campo gravitatorio. Es decir, la ecuación (4.7):

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2).$$

De igual forma, se encuentra que  $h(r)$  es el recíproco de  $f(r)$  y ésta, debe ser nuevamente

$$f(r) = 1 - \frac{C}{r},$$

con  $C$  constante. Ahora, como hemos cambiado las condiciones del problema, entonces las condiciones de esta constante deben variar también.

Así, para radios  $r > R(t)$ , el espacio fuera de la cáscara, tenemos el límite usual en el que la masa del objeto la podemos tomar puntualmente en el origen. Entonces, recobramos la solución de Schwarzschild, es decir,

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad r > R(t).$$

En el interior de la cáscara tenemos, por analogía a la mecánica clásica, el ejercicio en el que se demuestra que el objeto de prueba ahí no siente la masa circundante. Por tanto, el espacio es "plano", es decir, la geometría es idéntica a la de Minkowski. Entonces,

$$f(r) = 1, \quad r < R(t).$$

Bien, parece que tenemos el problema resuelto,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$$

con

$$f(r) = \begin{cases} 1 & r < R(t) \\ 1 - \frac{2M}{r} & r > R(t) \end{cases}.$$

Pero, ¿qué pasa en la transición, cuando  $r = R(t)$ ? Es claro que necesitamos una métrica para la superficie de la cáscara, y ésta debe ser

$$ds^2 = -N(R(t))dt^2 + \frac{dr^2}{N(R(t))} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2),$$

con  $N(R(t))$  una función que dependa del radio de la cáscara al tiempo  $t$ . Entonces, podemos escribir esta última métrica simplemente como

$$ds^2 = -N(t)dt^2 + \frac{dr^2}{N(t)} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2).$$

Si definimos  $f_i(r, t) = f(r)$  para el interior de la cáscara y  $f_e(r, t) = f(r)$  esperamos que  $N(t)$  cumpla la propiedad

$$f_i(R(t), t) = N(t) = f_e(R(t), t)$$

para poder unir ambas soluciones de una manera continua.

Finalmente, en el pegado, como  $f_i(r, t) = 1$  y  $f_e(r, t) = 1 - 2M/r$ , entonces, no puede ser continua esta unión. Por lo tanto, tomaremos la cáscara con cierto grosor  $2\omega$ . Conservamos entonces  $f_i(r, t)$  y  $f_e(r, t)$  pero ahora para  $r < R(t) - \omega$  y para  $r > R(t) + \omega$  respectivamente.

Por la ecuación que cumple  $f(r)$ , es decir, dado que

$$f(r) = 1 - \frac{C}{r},$$

observaremos al graficar este último sumando para toda  $r$  que cualitativamente, si permitimos que  $C$  dependa de  $r$  para “pegar” continuamente las dos soluciones en el interior y en el exterior de la cáscara, obtenemos la figura siguiente.

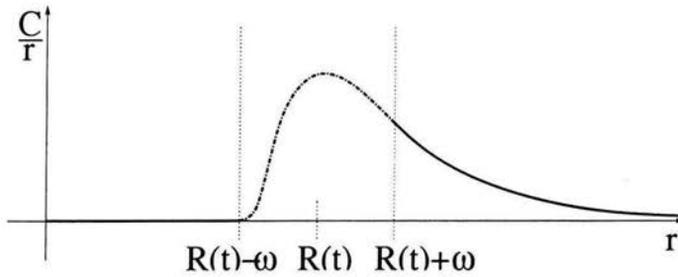
Sólo nos falta entonces comprender cómo es el término  $C/r$  para el intervalo  $(R(t) - \omega, R(t) + \omega)$ . En la figura (4.3) hemos trazado un aproximación de la curva que buscamos.

Hay que recordar que en el desarrollo para encontrar la solución de Schwarzschild llegamos a una ecuación diferencial para la  $f(r)$ , ahora, tomaremos esa como

$$f'(r) - \frac{1}{r}(1 - f(r)) + H_{cm}(r, t) = 0,$$

donde la responsable de la presencia de la materia en la cáscara será el campo de materia  $H_{cm}$ , y estará dada por:

$$H_{cm} = 4\pi r \frac{Q(t)}{r^2} H\left(\frac{r - R(t)}{\omega}\right).$$

Figura 4.3: El sumando  $C/r$  contra  $r$ .

Tendremos  $Q(t)/r^2$  relacionado con la densidad de materia en la cáscara, veremos luego cómo se comporta esta expresión. Despreciaremos el término  $-(1 - f(r))/r$  para evitar el cálculo numérico hecho por Choptuik y veremos que no perderemos consistencia en la solución. Así, comprobaremos que fuera de  $(R(t) - \omega, R(t) + \omega)$  se sigue teniendo Minkowski y Schwarzschild. Bien, queremos resolver, entonces

$$f'(r) = -4\pi r \frac{Q(t)}{r^2} H\left(\frac{r - R(t)}{\omega}\right)$$

Integrando de  $R(t) - \omega$  a  $r$  —con lo cual, el pegado con Minkowski está dado—, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{R(t)-\omega}^r f'(\eta) d\eta &= -4\pi Q(t) \int_{R(t)-\omega}^r \frac{1}{\eta} H\left(\frac{\eta - R(t)}{\omega}\right) d\eta \\ f(\eta) \Big|_{R(t)-\omega}^r &= -4\pi Q(t) \int_{R(t)-\omega}^r \frac{1}{\eta} H\left(\frac{\eta - R(t)}{\omega}\right) d\eta \\ f(r) - f(R(t) - \omega) &= -4\pi Q(t) \int_{R(t)-\omega}^r \frac{1}{\eta} H\left(\frac{\eta - R(t)}{\omega}\right) d\eta \end{aligned}$$

y dado que  $f(R(t) - \omega) \equiv 1$ , despejando, obtenemos:

$$f(r) = 1 - 4\pi Q(t) \int_{R(t)-\omega}^r \frac{1}{\eta} H\left(\frac{\eta - R(t)}{\omega}\right) d\eta.$$

Para simplificar la integral tomaremos la aproximación

$$H\left(\frac{r - R(t)}{\omega}\right) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{r - R(t)}{\omega}\right),$$

que es una función apropiada, pues, estamos concentrando la aportación de la materia de la cáscara alrededor de  $R(t)$ . Por otra parte, la elección de esta forma para  $H$  puede justificarse considerando la ecuación de *sine-Gordon*.

Así, en el caso especial de polvo, con  $Q(t) = \omega\rho = \text{cte.}$ , pero con  $\omega$  tendiendo a cero, obtenemos que

$$f(r) = 1 - \frac{4\pi\rho}{R(t)}$$

que concuerda con la solución de Schwarzschild con materia constante, de esta forma tenemos que  $2M = 4\pi\rho$ .

Calculando la integral, tenemos

$$\int_{R(t)-\omega}^r \frac{1}{\eta} H\left(\frac{\eta - R(t)}{\omega}\right) d\eta = \int_{R(t)-\omega}^r \frac{1}{\eta} \text{sech}^2\left(\frac{\eta - R(t)}{\omega}\right) d\eta.$$

Pero como  $\omega$  es pequeño e integramos al rededor de  $R(t)$ , podemos intercambiar el factor  $1/\eta$  por  $1/R(t)$  y para compensar un poco esta pérdida, tomaremos la integral desde 0 hasta  $r$  –dado que el decrecimiento de  $\text{sech}^2$  es exponencialmente pequeño, y así la contribución será despreciable–; de esta manera,

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{1}{\eta} \text{sech}^2\left(\frac{\eta - R(t)}{\omega}\right) d\eta &= \frac{1}{R(t)} \int_0^r \text{sech}^2\left(\frac{\eta - R(t)}{\omega}\right) d\eta \\ &= \frac{1}{R(t)} \left[ \omega \tanh\left(\frac{\eta - R(t)}{\omega}\right) \right]_0^r \\ &= \frac{\omega}{R(t)} \left[ \tanh\left(\frac{r - R(t)}{\omega}\right) - \tanh\left(\frac{-R(t)}{\omega}\right) \right] \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos

$$f(R(t)) = 1 - 4\pi Q(t) \left[ \frac{\omega}{R(t)} \tanh\left(\frac{R(t)}{\omega}\right) \right].$$

Y ésta, no será singular para  $h(r) = f^{-1}(r)$  cuando  $4\pi\omega Q(t)$  sea suficientemente pequeño, pues, cuando  $R(t) \rightarrow 0$ , el factor  $R^{-1}(t)\tanh(R(t)/\omega)$  tiene un límite finito.

Al principio de la construcción de la función  $f(r)$  omitimos un término en la ecuación diferencial, mostremos entonces que realmente era despreciable:

$$\frac{1}{r}(1 - f(r)) = \frac{4\pi\omega Q(t)}{r R(t)} \left[ \tanh\left(\frac{r - R(t)}{\omega}\right) + \tanh\left(\frac{R(t)}{\omega}\right) \right].$$

Bien, como el interior del paréntesis cuadrado es siempre menor a 2,  $\omega$  logrará que el término sea muy pequeño. Sin embargo, si  $r \rightarrow 0$  podríamos tener

problemas, pero después de pasar  $R(t) - \omega$  nos encontramos en Minkowski, con lo cual tomaremos todo el término como cero. Aún nos queda la disyuntiva si es  $R(t)$  quien tiende a cero, pero esto ya vimos en el párrafo anterior que no nos produce ningún problema pues, al ser  $h(r)$  no singular, el término  $1 - f(r)$  tendrá un límite finito y sigue siendo controlado por  $\omega$ .

Entonces, solamente nos falta describir correctamente  $Q(t)$  y comprender el comportamiento de nuestra solución. Es decir, si  $f(r)$  es cero en algún punto, con lo cual la razón de la masa  $C/r$  en la figura (4.3) pasará el *umbral* al ser mayor a 1; tendremos, así, un horizonte (en realidad dos, pero nos preocuparemos únicamente del exterior).

Tenemos que comprender que nuestras aproximaciones nos alejan en el sentido *cuantitativo* de una solución real a nuestro problema, sin embargo, sigue siendo fiel en el ámbito *cualitativo*. Es precisamente éste el análisis que haremos en nuestra métrica para la cáscara esférica.

El umbral dará origen a lo que conocemos como una superficie atrapada. Si el término  $4\pi Q(t)[\omega \tanh(R(t)/\omega)]/R(t) = 1$  tenemos que la función  $f(r) = 0$  y por lo tanto  $h(r) = f^{-1}(r)$  está indeterminada. Con ello la métrica no tiene sentido en esta región del espacio-tiempo. Bien, veamos que según la construcción de  $f(r)$  tendremos una cúspide en  $r = R(t)$ ; no es exactamente la función suave que trazamos en la figura (4.3). De esta forma, tenemos varios casos para nuestra función:

- En el caso en el que nunca se llega al umbral tendremos, entonces, a la cáscara encogiéndose de radio por la gravedad. Siendo ésta visible para todo observador.
- El caso en que la cúspide es el único punto que toca el umbral, se complica un poco la situación. Tendríamos una superficie atrapada, pero dado que nuestra solución solamente es confiable cualitativamente, este caso, no se sabe dónde ocurre.
- El último caso sería además el más probable en caso de tener una superficie atrapada, esto es cuando dicho término fuera mayor a 1, teniendo de esta manera dos intersecciones con el umbral; una en la región comprendida para  $r \in (R(t) - \omega, R(t))$  y la otra para radios mayores a  $R(t)$ . La primera, además de encontrarse en el interior de la cáscara plantea problemáticas cosmológicas que no discutiremos en este trabajo.

Como para  $r = R(t)$  se cumple que tanto la función que hemos construido, así como, la solución Schwarzschild tienen el mismo valor; entonces, tenemos una superficie atrapada. Desde el exterior de la cáscara estare-

mos en el caso usual del colapso esférico, observando la condensación de nuestro objeto de prueba, “el astro hueco”.

Recordando las discusiones al respecto, necesitamos que la masa sea suficientemente grande a comparación con el radio. Si tuvieramos una masa como la del Sol, sería indispensable que  $R(t) + \omega$  en el colapso, alcanzara una magnitud menor a  $3 km$ . Lo cual implica de hecho una densidad en la cáscara muy elevada.

Así, para la intersección con el umbral fuera del radio  $R(t)$  tenemos dos nuevas conclusiones. Si ésta se encuentra en el intervalo  $(R(t), R(t) + \omega)$  tenemos en analogía al punto anterior, una superficie atrapada que en el colapso nos llevará nuevamente a la formación de un agujero negro. Sin embargo, es posible que dicha intersección se encuentre inicialmente fuera de la cáscara. Logrando de esta manera que no sólo encontremos inicialmente una superficie atrapada, sino de hecho, un agujero negro.

Con estas implicaciones, al reafirmar el colapso esférico, damos como concluido el trabajo en esta tesis. El capítulo siguiente solamente son algunas conclusiones e ideas referentes a la relatividad general.

# Capítulo 5

## Pensamientos aleatorios

*Las teorías no son verdaderas o falsas,  
son fértiles o estériles.*

CLAUDE BERNARD.

Más que a manera de conclusiones, presentamos estos *Pensamientos aleatorios*. En ellos solamente quiero mostrar las inquietudes que genera el estudiar una teoría tan asombrosa como es la relatividad general y el desarrollo obtenido con sus teoremas de singularidades.

El planteamiento central de esta tesis ha sido mostrar y entender los teoremas de singularidades en relatividad general; para ello mostramos cómo la cosmología ha variado desde los días antiguos hasta el presente.

Es fácil mirar atrás y comprender que el cielo no es un gran caparazón o el torso de una mujer. Asimismo, no es difícil considerar que el Sol tiene un papel central dentro de nuestro sistema planetario. Sin embargo, aunque las predicciones relativistas tengan una validez tan eficaz, existen pequeños detalles que la teoría no termina por explicar. Y es aquí, donde otras teorías y hechos completan los desarrollos.

Como matemático es sencillo –o tal vez no tan complicado– comprender que un espacio pueda *colapsarse* en un punto originando una singularidad, pero, desde el punto de vista físico, resulta increíble que toda la materia de una estrella pueda reducirse a un objeto matemático que carece de dimensión.

La pregunta de cómo ha de ocurrir esto realmente será difícil de responder: Por un lado la observación actualmente es imposible; el horizonte no permite a los astrónomos describir lo que pasa en las cercanías de la singularidad.

Además tenemos a mano la *Conjetura de la Censura Cósmica* que nos dice que no existen singularidades desnudas, es decir, sin horizonte; por lo cual, la teoría afirma que éstas no se podrán observar.

Por otro lado, poco se conoce de las interacciones nucleares cuando se combinan con la gravedad, y es por ello, que hay grandes intentos por conocer este aspecto.

Me inclino a creer que la materia ha de tener una densidad máxima, por lo tanto, el espacio-tiempo tendrá una curvatura máxima también. Es decir, si no es posible que la masa se condense hasta un punto, entonces, no tendrá un potencial infinito que curve el espacio-tiempo de tal forma que se quiebre en una singularidad. Esto no quiere decir que el radio de Schwarzschild, es decir, el horizonte, cubra completamente el colapso. Conocemos al menos un límite en la naturaleza:  $c$ ; es probable entonces que existan algunas otras cotas que nos ayuden explicar las deficiencias en este sentido.

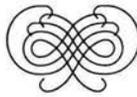
Con el primer teorema de singularidad hemos mencionado el *Big bang*, pero si leemos con cuidado los resultados de este teorema observaremos que este corolario no se encuentra presente. En él se afirma que no es posible encontrar geodésicas dirigidas al pasado con longitudes mayores a  $3/|C|$ , pero de ninguna manera que estas curvas provengan todas de un mismo punto. Es posible entonces que el Universo como lo conocemos se haya originado en dos o más *Big bangs* y que éstos hayan mezclado su "material" en algún lugar entre los sucesos de explosión y nuestros eventos cotidianos. Empero, existen otras pruebas experimentales que aunadas a este teorema nos dan certeza de esta explosión.

Además, esta última divagación es muy extraña. Habría que entender entonces cómo es posible que dicha materia se combinó. Así plantearía preguntas topológicas de la forma que tuvieron las variedades que crearon el espacio-tiempo; lo cual, sería posiblemente más complicado de entender que el interior mismo de los agujeros negros. ¿Cómo podríamos entender los entes separados antes de la unificación si sólo tenemos a mano el producto?

Casi para finalizar, quisiera hacer notar una gran diferencia entre las cosmologías antiguas y las actuales. Cuando hablamos de *Cipáctli*, *P'an-ku*, de Homero o Ptolomeo, hablamos de Universos y mundos completos. Es decir, la ostra de los babilonios nos describe la imagen del todo, lo mismo sucede si tomamos la *Torre de Zeus* con todas sus implicaciones.

Esto lo hemos "perdido" con el avance de la ciencia. La Teoría de la Relatividad General nos marca localmente el comportamiento del Universo,

la interacción de unas cuantas componentes de él; pero, no es posible saber cómo es en su totalidad, dada la complejidad de las ecuaciones que esto involucraría. Hay muchas de las respuestas intermedias que han empezado a resolverse: la expansión del Universo, la formación de galaxias, los cuasares entre otras. Sin embargo, todavía queda un camino largo y espero que esta tesis sirva como motivación al estudio de objetos como son las lentes gravitacionales, las ondas gravitatorias o el colapso entre agujeros negros.



# Apéndice A

## Sutilezas matemáticas

Hemos creado este apéndice con el fin de mostrar algunas pruebas a los teoremas y lemas utilizados en el trabajo y para no entorpecer la exposición de los capítulos. Explícitamente elaboramos los resultados que consideramos no tan conocidos por la mayoría de los lectores potenciales y que, comparten simultáneamente, la ventaja de tener una simple demostración.

### A.1. El lema fundamental del cálculo de las variaciones

**Lema 1** *Sea una función continua  $f(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfice:*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t) dt = 0$$

*para cualquier función continua  $h(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  y tal que  $h(t_0) = h(t_1) = 0$ . Entonces  $f(t) \equiv 0$ .*

**Demostración.** Si  $f(\tau) > 0$  para algún  $\tau \in [t_0, t_1]$ , entonces, dado que  $f(t)$  es continua,  $\exists c, d > 0$  tales que  $f(t) > c$  en alguna vecindad  $I$  de  $\tau$  con  $I = [\tau - d, \tau + d] \subset [t_0, t_1]$ . Ahora, tomemos  $h(t)$  de tal forma que  $h(t) = 1$  si  $t \in [\tau - \frac{1}{2}d, \tau + \frac{1}{2}d]$  y  $h(t)$  se anule fuera de  $I$ . Así, es claro que:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t) dt \geq cd > 0$$

Esta contradicción muestra que  $f(t) \equiv 0$  para toda  $t \in [t_0, t_1]$ . □

## A.2. Solución general de las ecuaciones de tercer grado

El desarrollo aquí presentado es originario de Cardano en el siglo XVI.

Queremos encontrar los valores de  $x$  que satisfagan la ecuación

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

con  $a, b, c, d$  números reales (aunque estos pueden ser complejos, el desarrollo es el mismo) y con  $a \neq 0$ .

Primeramente, usaremos que las raíces cúbicas de 1 son exactamente 1,  $w = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$  y  $w^2 = \frac{1}{2}(-1 - 3\sqrt{3}i)$ . Además tenemos que

$$(A+B+C)(A+Bw+Cw^2)(A+Bw^2+Cw) = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC. \quad (\text{A.1})$$

Ahora, regresemos a nuestra ecuación original y multipliquémosla por  $27a^2$ ; así obtenemos

$$27a^3x^3 + 27a^2bx^2 + 27a^2cx + 27a^2d = 0$$

que fácilmente podemos reescribir como

$$(3ax + b)^3 - 9ax(-3ac + b^2) + 27a^2d - b^3 = 0,$$

o si se quiere, como

$$(3ax + b)^3 + (27a^2d - 9abc + 2b^3) - 3(3ax + b)(-3ac + b^2) = 0.$$

Si tomamos  $A = 3ax + b$ , para obtener un símil del segundo miembro de la ecuación (A.1) necesitamos, entonces que:

$$\begin{aligned} B^3 + C^3 &= 27a^2d - 9abc + 2b^3 \\ B^3C^3 &= (-3ac + b^2)^3 \end{aligned}$$

Podemos, multiplicando la primera ecuación por  $B^3$  (respectivamente  $C^3$ ) y restarle la segunda, observar que tanto  $B^3$  como  $C^3$  son las soluciones de  $t$  en la ecuación

$$t^2 - (27a^2d - 9abc + 2b^3)t + (-3ac + b^2)^3 = 0$$

que ya sabemos resolver.

Dado que con esto  $B$  y  $C$  se encuentran fijos y que de algún modo hemos escrito

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (A+B+C)(A+Bw+Cw^2)(A+Bw^2+Cw) = 0, \quad (\text{A.2})$$

aunado a que  $A = 3ax + b$ . Entonces nuestro problema se reduce a resolver

$$x = \frac{A - b}{3a}.$$

Para cada factor de segundo miembro de la fórmula (A.2) tenemos la condición de que debe de hacerse cero, así, los valores que resuelven la ecuación de tercer grado son:

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{-B - c - b}{3a} \\x_1 &= \frac{-Bw - Cw^2 - b}{3a} \\x_2 &= \frac{-Bw^2 - Cw - b}{3a}.\end{aligned}$$

Con lo cual, hemos encontrado los tres únicos valores que satisfacen nuestra ecuación original.

# Apéndice B

## El espacio de Minkowski

Poco después de la formulación de la Teoría de la Relatividad Especial, Minkowski, en 1907, desarrolló una forma intuitiva de entender el espacio-tiempo. Para llegar a esta descripción hay muchos caminos. Por ejemplo, se puede partir de las transformaciones de Lorentz, de la pseudonorma que se contruye al trabajar con los denominados *n-espacios lorentzianos* o de la imagen de lo que sucede al dejar que un impulso luminoso comience como un evento en el origen.

Empecemos entonces con la visión física. Supongamos que en nuestro marco de referencia –nosotros en el origen de él– se desprende un pulso luminoso, en todas direcciones. Así, veremos que la luz se expande a la misma velocidad, generando una esfera de luz que crece con el tiempo. De esta forma dividimos el espacio en tres regiones distintas: el interior, la cáscara y el exterior de la esfera. O si se quiere, físicamente, estas tres regiones determinan los lugares por los cuales la luz ya pasó, está pasando y las regiones en que no se han enterado de esta luminosidad.

Alteremos un poco esta visión. Imaginemos por un instante que el espacio es de dos dimensiones y repetimos el fenómeno; entonces, veremos cómo la esfera se ha transformado en su análoga, una circunferencia cuyo radio aumenta. Ahora, montemos varias fotografías consecutivamente en un espacio de tres dimensiones (Fig. B.1), de esta forma, observamos que las “cáscaras” forman en el diagrama un cono, el cual será llamado el *cono de luz futuro*<sup>1</sup>.

Bien, el eje del que nos hemos ayudado para sobreponer las instantáneas es justamente el tiempo. El plano subyacente era nuestro análogo al espacio físico de tres dimensiones. Entonces, tomemos los planos paralelos al plano

---

<sup>1</sup>El nombre proviene de una razón geométrica, sin embargo, esta noción nos servirá.

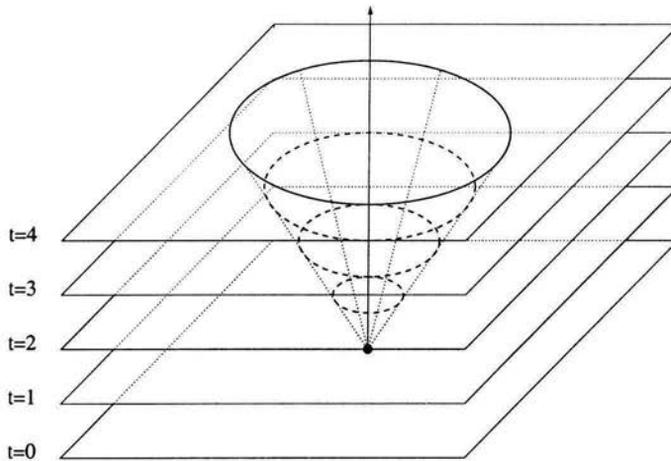


Figura B.1: Fotografías del pulso luminoso a diferentes tiempos.

horizontal como un espacio euclideo de tres dimensiones –que no podemos dibujar correctamente por nuestra falta de visualización de objetos en cuatro dimensiones–. Ahora, veamos que seguimos conservando las regiones físicas de las que hablamos antes. Para tiempos positivos, el interior del cono es justamente el interior de la esfera, es decir, para todo punto en algún tiempo anterior la luz cruzó dicha posición espacial. Sobre el cono tenemos justamente los rayos de luz, es decir, es el diagrama del paso de la esfera de luz a lo largo del tiempo. Y por último, en el exterior del cono tenemos los lugares donde la luz no ha llegado para cierto tiempo, pero si extendemos una línea vertical en la dirección del avance del tiempo tocaremos el cono, con lo cual, tenemos la idea de que en un futuro la luz llegará a dichas zonas del espacio.

Antes de continuar, es necesario hacer referencia a lo que llamaremos un *evento*. En el párrafo anterior es confuso el tener que marcar posiciones espaciales en tiempos dados. Así, llamaremos un evento a un punto en este espacio-tiempo, es decir, la posición espacial puede estar dada por  $(x, y, z)$  mientras que en un evento necesitaremos denotar en qué tiempo es que sucede, lo denotaremos con  $(t, x, y, z)$ . Es decir, si nos encontramos en un evento en el origen al tiempo  $t = 0$  y dejamos que pase un lapso de 1 unidad de tiempo, nos encontraremos en el evento  $(1, 0, 0, 0)$ . Así, como ya es claro, denotaremos que de  $t_0$  a  $t_1$  hay un transcurso de tiempo al futuro si  $t_0 < t_1$ .

Finalmente, dibujemos el espacio de Minkowski completo (Fig. B.2). El plano horizontal es equivalente al espacio, el eje perpendicular a él es la

dirección del tiempo, positiva para arriba, por lo cual el *cono de luz futuro* es el que tenemos sobre el plano horizontal y el *cono de luz pasado* al que tenemos por debajo de este. A la unión de estas dos secciones de un cono le llamaremos simplemente el *cono de luz*.

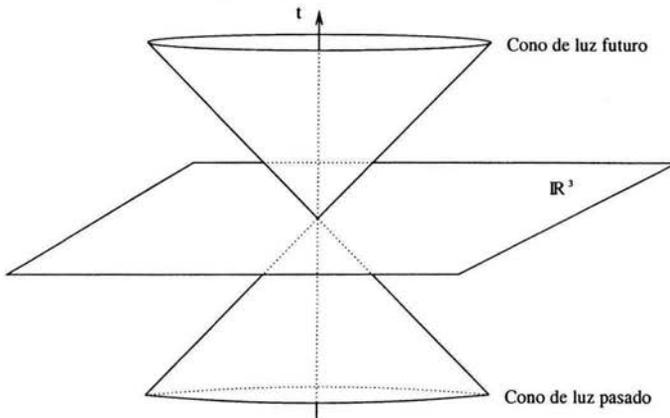


Figura B.2: Representación del cono de luz.

Para comprender más claramente la diferencia de las posiciones de los eventos en el espacio tiempo de Minkowski, podemos definir la *pseudonorma lorentziana* –llamada también *intervalo*– como sigue

$$\|\hat{x}\|^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

para un evento  $\hat{x} = (t, x, y, z)$ . Y ahora, a diferencia de la norma euclídeana regular –que no puede ser negativa–, tenemos tres posibles casos.  $\|\hat{x}\|^2$  puede darnos números negativos, positivos o cero; lo cual emplearemos para determinar en qué región del espacio se encuentran los eventos.

No es difícil ver que la norma nos da cero en los eventos sobre el cono de luz y es por ello que diremos que estos eventos son *tipo luz* o simplemente *nulos*. En realidad, el nombre del cono de luz proviene de esta relación.

Hay que recalcar que los eventos en el interior del cono futuro son aquellos en los cuales el impulso luminoso ya ha sido visto. Por lo tanto –suponiendo que dicho cono es el límite de transmisión de señales y de recorridos menores a la velocidad de la luz– se encuentran en esta región los eventos en los cuales el pulso puede influir, de ello que a esta región del futuro se la llame el *dominio de influencia del origen*. Y de manera análoga, los eventos fuera del cono son aquellos con los que el observador inicial no ha tenido posibilidad

de interactuar. Así, si vemos que  $\|\hat{x}\|^2 < 0$  para los eventos en el interior del cono y mayor que cero para los exteriores, diremos que son *tipo tiempo* y *tipo espacio* respectivamente.

Observamos que los eventos en el interior del cono de luz futuro son aquellos en los que se puede influir desde el origen, *dominio de influencia del origen*; los que se encuentran en el interior del cono de luz pasado son los que pudieron influir en nuestro evento actual (el origen) de manera particular, pero, que en conjunto son los responsables del estado presente, de ahí que se le llame *dominio de dependencia del origen*. Hay que notar también que a partir de cada punto en el espacio tiempo de Minkowski podemos formar el cono de luz –tanto futuro como pasado– relevante a ese evento que delimitará sus respectivos dominios de influencia y dependencia..

No debe ser difícil de comprender que el recorrido de un objeto a lo largo del espacio tiempo es una curva continua, llamada *línea de mundo*. Si esta es diferenciable, entonces, los vectores tangentes a ella deben de ser tipo tiempo en el caso de objetos con masa (Fig. B.3), sin embargo, si son tipo luz o nulas se tratarán de fotones y partículas sin masa. No existe la posibilidad de viajar a velocidades mayores a las de la luz. Sin embargo, matemáticamente es posible construir curvas con tangentes tipo espacio, para ello los físicos llamaron *taquiones* a las partículas hipotéticas que se comportan de esta manera.

Si observamos la notación que empleamos con el álgebra tensorial en el capítulo dos, podemos definir nuestra pseudométrica como la matriz

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, la norma para un vector  $x$ , en el espacio de Minkowski, es simplemente

$$\|x\|^2 = \eta_{ab}x^ax^b.$$

Además, el determinante de  $\eta_{ab}$  es igual a  $-1$ , por lo cual diremos que la *signatura* de la métrica es negativa. En la Teoría de la Relatividad General se trabaja con métricas que tienen esta última propiedad. Entonces, los conceptos de causalidad de influencia y dependencia, como los de la clasificación de vectores serán importantes en los desarrollos del capítulo cuatro; donde el cono de luz solamente se deforma localmente por transformaciones lineales.

Estos temas son referetes a la relatividad especial, por lo cual, si se quiere profundizar en ellos puede referirse a [Einstein, 1921] o [Hawking, 1988].

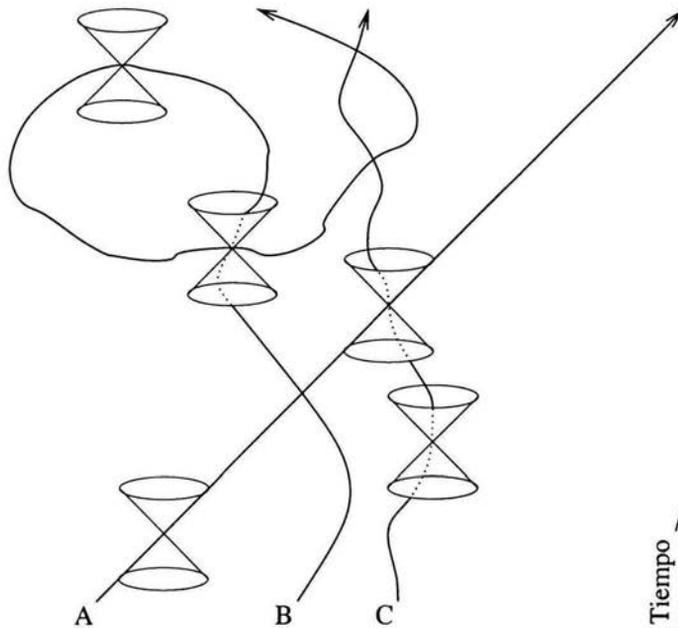


Figura B.3: Tres partículas en el espacio-tiempo. A representa un fotón moviéndose a la velocidad de la luz. B es la línea de mundo de una partícula que no puede existir, dado que inicialmente empieza con velocidades menores a la de la luz, pero a partir de cierto momento su movimiento se hace errático, inclusive regresando en el tiempo. C es una partícula con masa y cada punto en la curva tiene asociado un tiempo distinto.

# Bibliografía

- [1] Adler, R.; Bazin, M.; Schiffer, M. (1975). *Introduction to General Relativity*. International Series in Pure and Applied Physics, McGraw Hill.
- [2] Auffrey, Jean-Paul (1999). *Einstein et Poincaré. Sur les traces de la relativité*. Le Pommier-Fayard
- [3] Arellano Hernández, Alfonso (1992). “Notas sobre un dragón maya” en *CIENCIAS 28*, p. 41.
- [4] Arnold, V. I. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Text in Mathematics vol. 60, Springer-Verlag, 2nd Edition.
- [5] Berry, M. V. (1976). *Principles of Cosmology and Gravitation*. Adam Hilger.
- [6] Broda, Johanna (1990). “Calendarios y astronomía en Mesoamérica, su función social” en *CIENCIAS 18*, p.36.
- [7] Choptuik, M. W. (1993). “Universality and Scaling in Gravitational Collapse of a Massless Scalar Field” en *Physical Review Letters 70*, Number 1, p. 9.
- [8] Courant, Richard; John, Fritz (1996). *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Vol. 2, Noriega Ed.
- [9] De la Garza, Mercedes (1990). “Cosmovisión de los mayas antiguos” en *CIENCIAS 18*, p. 33.
- [10] Del Barrio Barrero, José I. (1998). *El universo*. Santillana.
- [11] Do Carmo, Manfredo P. (1989). *Geometria Riemanniana*. IMPA, Projeto Euclides.

- [12] Dubrovin, B.A.; Fomenko, A.T.; Novikov, S.R. (1992). *Modern Geometry- Methods and Applications. Part I.* Graduate Text in Mathematics vol. 93, Springer-Verlag, 2nd Edition.
- [13] D'Eath, P. D. (1996). *Black Holes: Gravitational Interactions.* Oxford Press.
- [14] Einstein, Albert (1921). *El significado de la relatividad.* Planeta-Agostini, 1993.
- [15] Einstein, A; Infeld, L. (1993). *La evolución de la física.* Salvat editores.
- [16] Evans, L.C. (1998). *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society.
- [17] Geroch, R.P. (1968). "What is a singularity in general relativity?" en *Annals of Physics* 48. pp. 526-540.
- [18] Goldstein, H. (1950). *Classical Mechanics.* Addison-Wesley Series in Advanced Physics, Addison-Wesley.
- [19] Hawking, Stephen (1988). *Historia del tiempo.* Ed. Crítica.
- [20] Hawking, S. W.; Ellis, G. F. R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [21] Iwaniszewski, Stanislaw (1992). "El tiempo y la numerología en Mesoamérica" en *CIENCIAS* 54, p.28.
- [22] John, F. (1978). *Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, Springer-Verlag.
- [23] Koestler, Arthur (1981). *Los sonámbulos.* Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.
- [24] López Austin, Alfredo (1990). "El tiempo en Mesoamérica" en *CIENCIAS* 18, p.28.
- [25] López Austin, Alfredo (2000). "Fray Bernardino de Sahagún frente a los mitos indígenas" en *CIENCIAS* 60-61, p.4.
- [26] Marion, R.; Thornton, M. (1988). *Classical Dynamics of Particles and Systems.* HBJ College Publishers, 3rd Edition.
- [27] Minzoni, A. (1978). *Tópicos en Ecuaciones Diferenciales Parciales.* Serie Verde: Notas, IIMAS.

- [28] Misner, C. W.; Thorne, K. S.; Wheeler, J. A. (1970). *Gravitation*. W. H. Freeman and Company.
- [29] Penrose, Roger (1972). *Techniques of Differential Topology in Relativity*. University of London.
- [30] Rindler, W. (1977). *Essential Relativity. Special, General and Cosmological*. Text and Monographs in Physics, Springer-Verlag, 2nd Edition.
- [31] Sagan, Carl (1980). *Cosmos*. Ed. Planeta.
- [32] Schmidt, Alejandro (1994). *El astrónomo que perdió la nariz. Tycho Brahe*. Pange ed.
- [33] Smoller, J. (1983). *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 258, Springer-Verlag.
- [34] Stoker, J.J. (1969). *Differential Geometry*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XX, Wiley-Interscience.
- [35] Torres Rodríguez, Alfonso (2002). "La observación astronómica en Mesoamérica" en *CIENCIAS 54*, p.16.
- [36] Wald, R. (1984). *General Relativity*. The University of Chicago Press.