



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

AUTOMORFISMOS EN GRAFICAS REGULARES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
MATEMATICA

PRESENTA:

ANA PAULINA FIGUEROA GUTIERREZ



DIRECTOR DE TESIS
VICTOR NEUMANN LARA

2004





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Alonso
Alfonso

Alfonso

Alfonso

Alfonso

Alfonso

Alfonso

Alfonso



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Ana Paulina Figueroa Gutiérrez
FECHA: 28 de enero de 2004
FIRMA: Paula

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "Automorfismos en gráficas regulares"

realizado por Ana Paulina Figueroa Gutiérrez

con número de cuenta 9954277-1, quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dr. Víctor Neumann Lara

V. Neumann

Propietario

Dra. Hortensia Galeana Sánchez

H. Galeana

Propietario

Dr. Francisco Larrión Riveroll

F. Larrión

Suplente

Dr. Juan José Montellano Ballesteros

J. Montellano B

Suplente

Dr. Miguel Angel Pizaña López

Miguel Angel Pizaña L

Consejo Departamental de

JAG

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

*A mis queridos padres
y a mi hermanita*

Agradecimientos

Quiero agradecer infinitamente a la **U.N.A.M.** por haber sido mi casa a lo largo de estos años. Agradezco también :

A mis profesores : J.Arocha, J. Bracho, J.A Gómez, C. Hernández, J. Paez, O. Palmas, C. Prieto, B. Puga, R. San Agustín por sus clases. En especial a A. Carrillo sin sus cursos probablemente habría desertado de la carrera.

A mis sinodales: H. Galeana, P. Larrión, J.J. Montellano y M.A. Pizaña por su infinita paciencia y apoyo.

A mi asesor de tesis por inculcarme el gusto por la Teoría de las Gráficas, por ser mi amigo y mi asesor de vida.

A mi amigo de la infancia: Orlando

A mis amigos de la prepa: Mayda, Denisse, Fernanda, Emiliano, Mac, Alexandra.

A mi querida amiga Elena que siempre tiene un momento para escuchar mis triunfos y mis penas.

A mis amigos de la Fac: Los chiapas, mis amigos de la cafe, Abelardo, Daniel P., Miguelito, Ramito , Mauricio y Ariet con los que he platicado largas horas de mi vida.

A mi querido Vic - gran compañero de batalla- que en esta tesis , como en muchas otras ocasiones, me brindó apoyo moral, sentimental y técnico.

A mis compañeros del IMATE que me han visto emocionada y preocupada por esta tesis y que se han vuelto entrañables amigos: Seline, Yesenia, Cleotilde ,Gabriela, José, Daniel, Preiser, Abraham y Chávez.

A todos mis tíos y primos , viejos amigos que me han visto crecer.

Finalmente, a los que dedico esta tesis y a los que tengo más que agradecerles. A mis padres: que siempre han estado conmigo en las buenas y en las malas, que gozan mis triunfos y padecen mis errores, mis preocupones natos que me han dado tanto y a los que adoro. A mi hermanita: que siempre he querido muchísimo, mi compañera de juegos infantiles y de travesuras a la que admiro por su gran vocación y carácter.

Índice general

| | |
|--|------------|
| Introducción | VII |
| 1. Preliminares | 1 |
| 1.1. Teoría de Grupos | 1 |
| 1.2. Teoría de Gráficas | 5 |
| 2. Automorfismos | 13 |
| 2.1. Acciones de grupos en conjuntos | 13 |
| 2.2. Automorfismos de gráficas | 19 |
| 2.3. Transitividad | 21 |
| 2.4. Gráficas de Acción y gráficas de Cayley | 25 |

| | |
|---|-----------|
| 3. Subafinaciones y afinaciones | 27 |
| 3.1. Primeras definiciones y resultados | 27 |
| 3.2. Transitividad | 31 |
| 3.3. Gráficas de vecindad constante | 38 |
| 4. Automorfismos subafines | 47 |
| 4.1. Gráficas subafín transitivas | 47 |
| 4.2. Gráficas cúbicas subafín-transitivas | 49 |
| 4.3. Gráficas 4-regulares subafín-transitivas | 52 |
| 5. Afinaciones | 65 |
| 5.1. Producto cartesiano y automorfismos afines | 65 |
| 5.2. Gráficas univocamente afin-transitivas | 71 |

Introducción

El objetivo de este trabajo es introducir ciertos tipos especiales de automorfismos de gráficas que tienen propiedades interesantes: los automorfismos afines y subafines, así como analizar los grupos generados por ellos y estudiar cuando actúan transitivamente en una gráfica.

Estos automorfismos han sido estudiados recientemente por B. Zgrablić, T. Pisanski y T.W. Tucker en los artículos: **Strongly adjacency-transitive graphs and uniquely shift-transitive graphs**, *Discrete Math.* 224 (2002) 389 – 398 (T. Pisanski, T.W. Tucker, B. Zgrablić) y en **On adjacency-transitive graphs**, *Discrete Math.* 182 (1998), 321 – 332 (B. Zgrablić). Así como su relación con las gráficas de Cayley en : **On quasiabelian Cayley graphs and graphical doubly regular representations**, *Discrete Math.* 224 (2002) 495–519 (B. Zgrablić). Conceptos afines (coafinaciones) fueron utilizados antes (1976 -1978) en [[8] [9]] para estudiar las gráficas de clanes divergentes.

El material que se expone en esta tesis corresponde esencialmente a los artículos [[7] [6]]. Algunas de las demostraciones están solamente

bosquejadas allí y en este trabajo se desarrollan en detalle.

A lo largo de la tesis exponemos algunos conceptos nuevos, entre ellos el de aristas subafinmente (*resp.* afinmente) recorribles, el de gráfica de recorribilidad, así como algunos resultados sobre la conexidad de las gráficas afín-transitivas. Ellos nos ayudan a exponer pruebas más claras en algunos casos.

Finalmente incluimos una sección dedicada a las gráficas de vecindad constante tres y cuatro regulares para organizar de una manera más sistemática las pruebas que se dan en el capítulo 4.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Teoría de Grupos

Una *partición* de un conjunto X es una descomposición de X en conjuntos dos a dos disjuntos y cuya union es X . Cuando dos elementos están en el mismo miembro de la partición decimos que están relacionados. Esta relación es claramente de equivalencia.

Empezaremos pues con el concepto de grupo. Un *grupo* es una pareja (\mathcal{G}, \cdot) donde \mathcal{G} es un conjunto y \cdot es una operación binaria que cumplen con las siguientes propiedades:

\mathcal{P}_1 la operación es asociativa, lo que significa que $(xy)z = x(yz)$ para cualquier tercia de elementos no necesariamente distintos de \mathcal{G} .

\mathcal{P}_2 Existe un elemento $e \in \mathcal{G}$, llamado neutro, tal que $ex = x$
 $\forall x \in \mathcal{G}$.

\mathcal{P}_3 Para cada elemento $x \in \mathcal{G}$ existe un elemento x^{-1} tal que
 $xx^{-1} = e$.

Si además un grupo cumple con la siguiente propiedad:

\mathcal{P}_4 Para todo par de elementos $x, y \in \mathcal{G}$ se cumple que $xy = yx$.

Entonces se dice que dicho grupo es *conmutativo*.

La mayoría de las veces diremos que \mathcal{G} es un grupo sin señalar quién es la operación siempre y cuando las propiedades a mencionar se cumplan para cualquier operación que junto con el conjunto \mathcal{G} forme un grupo o si se sobrentiende la operación con la que se está tratando.

Un *subgrupo* \mathcal{S} de un grupo \mathcal{G} ($\mathcal{S} \leq \mathcal{G}$) es un subconjunto de \mathcal{G} que forma en si mismo un grupo con la operación de \mathcal{G} .

Un subconjunto de es el *centro* que se describe como

$$Z(\mathcal{G}) = \{g : gh = hg \text{ para toda } h \in \mathcal{G}\}$$

Dicho conjunto es un subgrupo de \mathcal{G} pues cumple que e conmuta con todos sus elementos, si g y g' están en $Z(\mathcal{G})$ entonces $gg'h = ghg' = hgg'$ por lo tanto es cerrado bajo la operación, asociativo pues estamos multiplicando elementos de \mathcal{G} y para cada elemento g en $Z(\mathcal{G})$ tenemos que $g^{-1}h = g^{-1}hgg^{-1} = hg^{-1}$ por lo tanto g^{-1} está en $Z(\mathcal{G})$.

Sea H un subgrupo de \mathcal{G} para cada $g \in \mathcal{G}$ definimos la *clase lateral izquierda* gH al conjunto

$$\{gh : h \in H\}$$

y similarmente la *clase lateral derecha* Hg como el conjunto

$$\{hg : h \in H\}$$

Es claro que la descomposición de \mathcal{G} en las clases laterales izquierdas (*resp.* derechas) forman una partición de \mathcal{G} pues si un elemento x cumple $x = gh_1 = g'h_2$ (*resp.* $x = h_1g = h_2g'$) entonces $g = g'h_2h_1^{-1}$ (*resp.* $g = h_1^{-1}h_2g'$) por lo que g está en la misma clase que g' lo que implica que las clases laterales son disjuntas y además si $z \in \mathcal{G}$ entonces $z \in zH$ (*resp.* $H z$).

Otro ejemplo importante de una partición de \mathcal{G} es la partición en *clases de conjugación*. Dos elementos x e y de \mathcal{G} están en la misma clase si $x = gxg^{-1}$ para alguna $g \in \mathcal{G}$. En este caso se puede decir también que x está *conjugado* a y .

Es claro que dichas clases forman una partición pues si un elemento x se pudiese escribir como

$$x = gyg^{-1} = g'zg'^{-1}$$

para g y g' elementos de \mathcal{G} entonces

$$y = g^{-1}g'zg'^{-1}g = g^{-1}g'z(g^{-1}g')^{-1}$$

por lo que y está conjugado a z , es decir, las clases de equivalencia son disjuntas dos a dos. Además cada elemento $g \in \mathcal{G}$ está conjugado consigo mismo pues $g = ege^{-1}$ por lo que cada elemento está en una clase de conjugación.

Es evidente que si un grupo es abeliano entonces sus clases de conjugación constan de un solo punto pues si x está conjugado a y $x = gyg^{-1}$ entonces $x = gg^{-1}y = y$. Es por esto que toda clase de conjugación consta de un sólo punto si y solamente si es clase de conjugación el centro de \mathcal{G} .

Dos grupos \mathcal{G} y \mathcal{G}' son *isomorfos* si existe una biyección

$$\Psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$$

que satisface que $\Psi(xy) = \Psi(x) \cdot \Psi(y)$ para toda $x, y \in \mathcal{G}$. A dicha biyección se le llama isomorfismo de grupos.

Una operación de grupos que utilizaremos más adelante es el *producto directo*. Sean \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 dos grupos. El producto directo $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ es un grupo que tiene como elementos a las parejas ordenadas (g, h) donde $g \in \mathcal{G}_1$ y $h \in \mathcal{G}_2$ y definimos la siguiente operación entre sus elementos

$$(g, h)(g', h') = (gg', hh')$$

Es clara que en la primera entrada utilizamos la multiplicación de \mathcal{G}_1 y en la segunda la de \mathcal{G}_2 . Dicha operación es binaria y efectivamente $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ es un grupo pues hereda las propiedades para serlo de \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 de hecho el inverso de cada elemento (g, h) es (g^{-1}, h^{-1}) la pareja de los inversos de g y h y la identidad (e_1, e_2) es la pareja de las identidades de cada uno de los grupos.

La función de $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ en $\mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_1$ que a cada elemento (g, h) lo manda a (h, g) es claramente un isomorfismo de grupos.

$\mathcal{G}' \trianglelefteq \mathcal{G}$ es un *subgrupo maximal* de \mathcal{G} si dado $\mathcal{G}'' \trianglelefteq \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{G}' \triangleleft \mathcal{G}''$ entonces $\mathcal{G}'' = \mathcal{G}$.

1.2. Teoría de Gráficas

Una *gráfica* G consiste en un conjunto $V(G)$ a cuyos elementos llamamos *vértices* y un conjunto $A(G)$ de pares no ordenados de vértices, a los cuales llamamos *aristas*. Al número de vértices en una gráfica se le dice *orden* y el número de aristas es el *tamaño*. Si $\{u, v\}$ es una arista de G que se denotará por uv diremos que u es *adyacente* a v o que u es un *vecino* de v en símbolos $u \text{ ady}_G v$ y que u y v son sus *vértices terminales*. Si $A, B \subseteq V(G)$ una *AB-arista* (*resp.* *AB-par*) tiene un vértice en A y en B . Cuando existe una *AB-arista* diremos que A y B son *adyacentes*. Una arista cuyos vértices terminales coinciden es un *lazo*. A lo largo de esta tesis trataremos con gráficas sin lazos.

Decimos que $X \subseteq V(G)$ es un *conjunto independiente* de G si no existen en G *XX-aristas*. Un conjunto independiente es *maximal* si al agregarle cualquier otro vértice de la gráfica deja de ser independiente. Una gráfica G es *bipartita* si tiene una bipartición $\{X, Y\}$ en conjuntos. Si además todos los *XY-pares* son aristas de G decimos que G es una *gráfica bipartita completa*. Cuando G es bipartita completa con bipartición $\{X, Y\}$ y tal que $|X| = n$ y $|Y| = m$ se escribirá $K_{n,m}$.

La *vecindad* de un vértice v es el conjunto $\mathcal{N}_v^G = \{w \in V(G) : vw \in A(G)\}$ que será denotado simplemente por \mathcal{N}_v cuando se entienda cuál es la gráfica que estamos tratando. La *valencia* o el *grado* $d(v)$ de un vértice v es la cardinalidad de su vecindad.

Una gráfica es *regular* si todos sus vértices tienen la misma valencia .

El grado mínimo de G (*resp. grado máximo*) se denota por $\delta(G)$ (*resp. $\Delta(G)$*) y es la mínima (*resp. la máxima*) valencia entre todos los vértices de la gráfica.

Un *isomorfismo* entre dos gráficas G y H es una biyección Ψ de los vértices de G en los vértices de H tal que $uv \in A(G)$ si y solamente si $\Psi(u)\Psi(v) \in A(H)$. Cuando existe un isomorfismo entre G y H decimos que son *isomorfas* y escribimos $G \simeq H$. Generalmente trataremos a las gráficas isomorfas como iguales. Un *automorfismo* es un isomorfismo de una gráfica en si misma y el conjunto de automorfismos forma un grupo con la composición de funciones.

Sean G y H dos gráficas, un homomorfismo (reflexivo) $\Phi : G \longrightarrow H$ es una función de $V(G)$ en $V(H)$ tal que si $uv \in A(G)$ entonces $\Phi(u)\Phi(v) \in A(H)$ ó $\Phi(u) = \Phi(v)$.

Una subclase de homomorfismos particularmente importante es la de los homomorfismos *irreflexivos* que son aquellos que no aplastan aristas. Es decir, si u *ady* $_G$ v entonces $\Phi(u) \neq \Phi(v)$

Es importante notar que los isomorfismos son homomorfismos biyectivos que cumplen que la inversa también es homomorfismo.

En el Capítulo 4 trataremos con ciertos homomorfismos llamados *homomorfismos cubrientes* ó *isomorfismos locales* ó *cubrimiento*. $\Theta : H \longrightarrow H_0$ es un homomorfismo cubriente si:

- i) Θ es un homomorfismo suprayectivo en vértices y aristas
- ii) $\Theta|_{\mathcal{N}_x^H} : \mathcal{N}_x^H \longrightarrow \mathcal{N}_{x_0}^{H_0}$ es una biyección.

Decimos que H es una gráfica cubriente de H_0 y que H_0 es una gráfica cubierta por H si existe un cubrimiento de H en H_0 . Como vemos un cubrimiento Θ no necesariamente es inyectivo. En el caso de que para cada $x_0 \in V(H_0)$ existan exactamente r vértices de H , x_1^0, \dots, x_r^0 , tales que $\Theta(x_i^0) = x_0$ para toda $0 \leq i \leq r$ entonces decimos que Θ es un r -cubrimiento ó que H es una gráfica r -cubriente.

Una gráfica es completa si cada dos de sus vértices son adyacentes. A la gráfica completa de n vértices la denotamos por K_n . El complemento G^c de una gráfica G se define de la siguiente manera: $V(G^c) = V(G)$ y dos vértices u, v son adyacentes en G^c si y solamente si $uv \notin A(G)$ y $u \neq v$.

H es una subgráfica de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

La subgráfica H de G es :

- *generadora* Si $V(H) = V(G)$
- *inducida* si arista de G cuyos extremos son vértices de H es arista de H .

Sea $B \subseteq V(G)$, denotaremos por $G[B]$ a la subgráfica inducida de G cuyo conjunto de vértices es B .

Sea $V_0 \subseteq V(G)$, $G - V_0$ denotará a $G[V(G) - V_0]$.

De la misma manera, si $A_0 \subseteq A(G)$ a la subgráfica generadora de G cuyo conjunto de aristas en $A(G) - A_0$ se denotará por $G - A_0$.

Una r -factorización de G es una descomposición de G en gráficas conexas generadoras r -regulares (llamadas r -factores) ajenas dos a dos en aristas, de manera que la unión de todos los factores sea G .

Sea G una gráfica. Un camino en G es una sucesión alternante $(v_0, a_1, v_1, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n)$ de vértices y aristas de G donde v_0, v_1, \dots, v_n los vértices y a_1, \dots, a_n son las aristas y cada arista a_i tiene por extremos al vértice v_{i-1} que le precede y al que le sigue (v_i).

Si Γ es un camino, la *longitud de Γ* es el número de aristas no necesariamente distintos que figuran en Γ . Si el camino tiene un sólo vértice entonces se dice que es *nulo* y tiene longitud cero. Se dice además que el camino Γ es un v_0v_n -camino pues empieza en v_0 y termina en v_n y dichos vértices son sus extremos. Cuando un camino comienza y termina en un mismo vértice se le llama *camino cerrado*.

Un camino que no repite aristas (*resp.* vértices) se llama *paseo* (*resp.* *trayectoria*) Observemos que todo uv -camino contiene una uv -trayectoria.

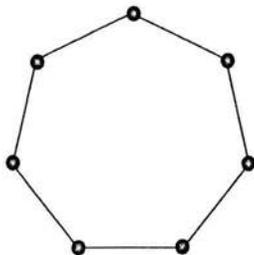


Figura 1.1: C_7

Un paseo cuyos extremos son iguales y que no repite otros vértices además de los extremos es un *ciclo* y se denota por C_n si n es el orden del ciclo.

El siguiente resultado es básico.

Proposición 1.1. *Si $\delta(G) \geq 2$, G contiene algún ciclo.*

Si G contiene ciclos, el cuello de G , $c(G)$ es la mínima de las longitudes de los ciclos de G . Se usa también la expresión de cuello de G para los ciclos de longitud mínima de G .

Sea G una gráfica. Definimos en $V(G)$ la siguiente relación de equivalencia: $v \equiv w$ si y solamente si G contiene un vw -camino. Decimos que una gráfica es *conexa* si todos sus vértices son equivalentes. A las clases de equivalencia correspondientes a \equiv se les llaman *componentes conexas* de G . En otras palabras G es conexa cuando tiene una única componente conexa.

El siguiente Teorema es inmediato de la definición de conexidad y será sumamente utilizado en este trabajo.

Teorema 1.1. *Una gráfica G es conexa si y solamente si para toda partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$, G contiene V_1V_2 -aristas.*

Una gráfica G es r -conexa en aristas si para todo conjunto $A \subseteq A(G)$ con $|A| < r$ $G - A$ es conexa.

Si G es una gráfica conexa $u, v \in V(G)$, $d_G(u, v)$ se define como la mínima de las longitudes correspondientes a los uv -caminos. Esta función satisface:

- i) $d_G(u, v) \geq 0 \forall u, v \in V(G)$ y $d_G(u, v) = 0$ si y solamente si $u = v$.
- ii) $d_G(u, v) = d_G(v, u)$ (simetría)
- iii) $d_G(u, w) + d_G(w, v) \geq d_G(u, v) \quad w \in V(G)$

Entonces d_G es una distancia en $V(G)$.

A pesar de que existen varios tipos de productos de gráficas, en este trabajo trataremos solamente con el *producto cartesiano* o el producto cuadro de dos gráficas (\square). Sean G y H dos gráficas. El producto cartesiano de G y H denotado por $G \square H$ es la gráfica donde $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ y $(u, v)(u', v')$ es una arista de $G \square H$ si y solamente se $uu' \in A(G)$ y $v = v'$ ó $vv' \in A(H)$ y $u = u'$. Decimos además que G y H son factores cartesianos de $G \square H$.

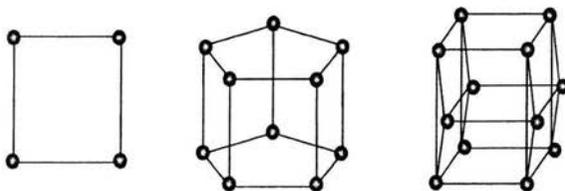


Figura 1.2: $K_2 \square K_2, C_5 \square K_2$ y $C_4 \square C_3$

Las funciones $p_1 : V(G \square H) \longrightarrow V(G)$ (resp. $p_2 : V(G \square H) \longrightarrow V(H)$) tal que $p_1(u, v) = u$ (resp. $p_2(u, v) = v$). Tanto p_1 como p_2 son homomorfismos reflexivos del producto sus factores cartesianos y les llamamos proyecciones.

Proposición 1.2. *El producto cartesiano de dos gráficas es conexo si y solamente ambos factores cartesianos son conexos*

Demostración. Sea $G \square H$ el producto de dos gráficas conexas y $(u, v), (u', v')$ dos vértices de $G \square H$. Como las dos gráficas son conexas existen $T_{u,u'}$ y $T_{v,v'}$ una uu' -trayectoria en G y una vv' -trayectoria en H respectivamente. Entonces $(T_{u,u'}, v)$ es una $(u, v)(u', v)$ -trayectoria y $(u', T_{v,v'})$ una $(u', v)(u', v')$ -trayectoria de $G \square H$. Al unir dichas trayectorias conseguimos un $(u, v)(u', v')$ -camino y por lo tanto $G \square H$ es conexa.

Por otra parte, supongamos que $G \square H$ es conexa. Sean $u, u' \in V(G)$ y $v \in V(H)$. Sabemos que existe una $(u, v)(u', v)$ -trayectoria que al proyectarla a G con p_1 claramente forma un uu' -camino. Se sigue que G es conexa. De igual manera, utilizando p_2 , se prueba la conexidad de H . \square

Corolario 1.1. *Sea $(u, v), (u', v') \in V(G \square H)$. Entonces*

$$d_{G \square H}((u, v), (u', v')) = d_G(u, u') + d_H(v, v')$$

Proposición 1.3. *El producto cartesiano es asociativo*

Demostración. Mostraremos que dadas tres gráficas, G_1, G_2 y G_3 , $(G_1 \square G_2) \square G_3$ es isomorfa a $G_1 \square (G_2 \square G_3)$.

Claramente $\Psi : V((G_1 \square G_2) \square G_3) \longrightarrow V(G_1 \square (G_2 \square G_3))$, tal que $\Psi((u_1, u_2), u_3) = (u_1, (u_2, u_3))$ para u_1, u_2 y $u_3 \in V(G_1), V(G_2)$ y $V(G_3)$ respectivamente, es un isomorfismo.

\square

Por la Proposición anterior podemos definir el producto cartesiano para más de dos factores de la siguiente manera. Sean G_1, \dots, G_n gráficas. $G_1 \square \dots \square G_n$ es la gráfica cuyos vértices son de la forma (v_1, \dots, v_n) donde $v_i \in V(G_i)$ para toda i entre 1 y n . Dos vértices son adyacentes si todas las proyecciones son iguales excepto una en la que son adyacentes.

Claramente $G_1 \square \dots \square G_n$ es conexa si y solamente si todos sus factores son conexos.

Decimos que una gráfica G es *prima* con respecto al producto cartesiano si G no es isomorfa al producto de dos gráficas no triviales.

Proposición 1.4. *Toda gráfica G tiene una descomposición en primos con respecto a el producto cartesiano.*

La factorización respecto al producto cartesiano no es única, pero si nos restringimos a la clase de las gráficas conexas si lo es [5]

Capítulo 2

Automorfismos

A pesar de que no todos los conceptos que se desarrollarán en este capítulo son parte de la teoría de las gráficas son verdaderamente importantes para el desarrollo de algunos temas de la materia y en particular los necesitaré para el desarrollo de esta tesis.

2.1. Acciones de grupos en conjuntos

Sea un conjunto no vacío X a cuyos elementos llamaremos puntos. Una *permutación* de X si es una biyección de X en X .

El conjunto de todas las permutaciones de X forman un grupo bajo la composición de funciones, el *grupo simétrico* de X que denotaremos por \mathcal{S}_X . Los subgrupos de \mathcal{S}_X se denominan *grupos de permutaciones* de X . Si $X = \{1, \dots, n\}$ entonces escribiremos \mathcal{S}_n en lugar de \mathcal{S}_X .

Es bien conocido el siguiente Teorema debido a Cayley :

Teorema 2.1. *Todo grupo finito es isomorfo a un grupo de permutaciones.*

Una *acción* de \mathcal{G} sobre X es un homomorfismo de grupos

$$\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{S}_X$$

es decir, una función que a cada elemento $\gamma \in \mathcal{G}$ le hace corresponder una permutación $\phi(\gamma)$ de X de manera que $\phi(\gamma\gamma') = \phi(\gamma)\phi(\gamma')$. Frecuentemente escribiremos γ en lugar de $\phi(\gamma)$. Así , a lo largo del texto, $\gamma(x)$ denotará el valor en el punto x de la permutación asociada a γ por la acción. Al referirnos a un grupo de permutaciones de X sobreentenderemos que actúa de manera obvia sobre X , es decir con ϕ como la identidad.

Sea \mathcal{G} un grupo que actúa sobre un conjunto X y $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{S}_X$ la acción. Para cada punto x en X podemos definir los siguientes conjuntos:

- El *estabilizador* de un elemento x , en símbolos \mathcal{G}_x , se define por $\mathcal{G}_x = \{\gamma : \gamma(x) = x\}$
- La *órbita* de x que se denota $x^{\mathcal{G}}$ y se define como $x^{\mathcal{G}} = \{\gamma(x) : \gamma \in \mathcal{G}\}$

Se dice que la acción ϕ es

- *Fiel* si el núcleo de la acción ϕ es la identidad o equivalentemente si la acción es inyectiva.
- *Regular* si para todo $x \in X$ $\mathcal{G}_x = 1$.
- *Transitiva* (o que actúa transitivamente en X) cuando existe una única órbita. Esto ocurre si y solamente si para cada par de puntos x e $y \in X$ existe un $\gamma \in \mathcal{G}$ tal que $x = \gamma(y)$. En caso contrario se dice que \mathcal{G} actúa *intransitivamente* o que la acción es intransitiva.

Proposición 2.1. *Las órbitas correspondientes a una acción sobre X forman una partición de X .*

Demostración. Supongamos que $x^{\mathcal{G}} \cap y^{\mathcal{G}} \neq \emptyset$. Probaremos que $x^{\mathcal{G}} = y^{\mathcal{G}}$.

Sabemos que existen γ_1 y γ_2 en \mathcal{G} tales que $\gamma_1(x) = \gamma_2(y)$. Entonces se tiene que $\gamma(x) = \gamma_1^{-1}\gamma_2(y)$ para toda $\gamma \in \mathcal{G}$. Se sigue que $y^{\mathcal{G}} \subseteq x^{\mathcal{G}}$.

Análogamente $x^{\mathcal{G}} \subseteq y^{\mathcal{G}}$. Como cada elemento de X está en una órbita, las órbitas forman una partición.

□

Proposición 2.2. *Dos puntos en una misma órbita tienen estabilizadores conjugados.*

Demostración. Supongamos que x e y están en la misma órbita y sea $\gamma \in \mathcal{G}$ tal que $\gamma(x) = y$ se tiene $\gamma^{-1}(y) = x$.

Si $\gamma' \in \mathcal{G}_x$ entonces $\gamma\gamma'\gamma^{-1}(y) = \gamma\gamma'\gamma^{-1}\gamma(x) = y$, lo que implica que, $\gamma\mathcal{G}_x\gamma^{-1} \subseteq \mathcal{G}_y$.

Análogamente $\gamma^{-1}\mathcal{G}_y\gamma \subseteq \mathcal{G}_x$ y de allí $\mathcal{G}_y \subseteq \gamma\mathcal{G}_x\gamma^{-1}$, por lo tanto, $\mathcal{G}_y = \gamma\mathcal{G}_x\gamma^{-1}$.

□

Teorema 2.2. *Para cada $x \in X$, existe una biyección entre $x^{\mathcal{G}}$ y el conjunto de las clases laterales izquierdas de \mathcal{G}_x .*

Demostración. Para cada $z \in x^{\mathcal{G}}$ elegimos γ_z tal que $z = \gamma_z(x)$ y definimos $\psi(z) = \gamma_z\mathcal{G}_x$. Observemos que dicha función no depende de la elección de la γ_z . Si γ'_z es tal que $z = \gamma'_z(x)$ demostraremos que $\gamma'_z\mathcal{G}_x = \gamma_z\mathcal{G}_x$. Es fácil ver que $\gamma_z^{-1}\gamma'_z(x) = x$ entonces $\gamma_z^{-1}\gamma'_z \in \mathcal{G}_x$. Si $\bar{y} \in \gamma'_z\mathcal{G}_x$ entonces existe $y \in \mathcal{G}_x$ tal que $\bar{y} = \gamma'_zy = \gamma_z\gamma_z^{-1}\gamma'_zy$. Se sigue que $\bar{y} \in \gamma_z\mathcal{G}_x$ y con esto probamos que $\gamma'_z\mathcal{G}_x \subseteq \gamma_z\mathcal{G}_x$.

Análogamente como $(\gamma'_z)^{-1}\gamma_z \in \mathcal{G}_x$ entonces $\gamma_z\mathcal{G}_x \subseteq \gamma'_z\mathcal{G}_x$.

- ψ es suprayectiva por que cada clase lateral es de la forma $\gamma\mathcal{G}_x$ para alguna $\gamma \in \mathcal{G}$.
- ψ es inyectiva ya que si $\gamma_z\mathcal{G}_x = \gamma_{z'}\mathcal{G}_x$ entonces $\gamma_z^{-1}\gamma_{z'} \in \mathcal{G}_x$ es decir $\gamma_z^{-1}\gamma_{z'}(x) = x$. Por lo tanto $z = \gamma_z(x) = \gamma_{z'}(x) = z'$

□

Corolario 2.1. *Si \mathcal{G} es finito el tamaño de cada órbita es un divisor del orden de \mathcal{G} .*

Demostración. Por el Teorema anterior sabemos que $|x^{\mathcal{G}}| = |\mathcal{G}|/|\mathcal{G}_x|$ entonces

$$|\mathcal{G}| = |\mathcal{G}_x| \cdot |x^{\mathcal{G}}|$$

□

Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}$. Para contar las órbitas distintas de X nos ayudará definir al conjunto de puntos fijos de \mathcal{S} denotado por $fix(\mathcal{S})$ como

$$fix(\mathcal{S}) = \{x \in X : \gamma(x) = x \text{ p.a. } \gamma \in \mathcal{S}\}$$

Cuando \mathcal{S} está formado por un solo elemento del grupo entonces lo denotamos como $fix(\gamma)$.

Teorema 2.3. *Si \mathcal{G} un grupo finito que actúa sobre un conjunto finito X entonces el número de órbitas distintas es*

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \cdot \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} fix(\gamma)$$

Demostración. Consideremos el conjunto $\mathcal{F} = \{(x, \gamma) \in X \times \mathcal{G} : \gamma(x) = x\}$. Sean X_1, X_2, \dots, X_m las órbitas de \mathcal{G} entonces por el Corolario 2.1

$$|\mathcal{F}| = \sum_{i=1}^m \sum_{x \in X_i} |\mathcal{G}_x| = \sum_{i=1}^m \sum_{x \in X_i} \frac{|\mathcal{G}|}{|X_i|} = \sum_{i=1}^m |\mathcal{G}| = m \cdot |\mathcal{G}|$$

Pero por la definición de $fix(\gamma)$

$$|\mathcal{F}| = \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} fix(\gamma)$$

□

Sea \mathcal{G} un grupo que actúa transitivamente en un conjunto X .

- Un subconjunto S de X es un *bloque de imprimitividad* de \mathcal{G} si para todo elemento $\gamma \in \mathcal{G}$ $\gamma S = S$ o $\gamma S \cap S = \emptyset$. Como \mathcal{G} actúa transitivamente es claro que los trasladados de S , es decir los conjuntos de la forma γS con $\gamma \in \mathcal{G}$, forman una partición de X . A una tal partición se le llama *sistema de imprimitividad* de \mathcal{G} . Por construcción se tiene que \mathcal{G} actúa en dicha partición de manera natural. Si \mathcal{G} tiene un sistema de imprimitividad en X entonces se dice que \mathcal{G} es un grupo *imprimitivo* sobre X .
- Si la partición de X no está formada por un solo conjunto ni por conjuntos de un solo elemento se dice que el sistema es no trivial. Si \mathcal{G} no tiene sistemas no triviales de imprimitividad se dice que es *primitivo* sobre X .

Teorema 2.4. *Sea \mathcal{G} un grupo que actúa transitivamente sobre X . \mathcal{G} es primitivo sobre X si y solo si \mathcal{G}_x es un subgrupo maximal de \mathcal{G} para todo $x \in X$*

Demostración. Supongamos que \mathcal{G} tiene un subgrupo propio \mathcal{H} que contiene propiamente a \mathcal{G}_x .

Sea $S = x^{\mathcal{H}}$ la órbita de x dada por \mathcal{H} . Sea $\gamma \in \mathcal{G}$ y supongamos que $S \cap \gamma S \neq \emptyset$. Sea $y \in S \cap \gamma S$, como $y \in S$ se tiene que $y = \eta(x)$ para alguna $\eta \in \mathcal{H}$ y como $y \in \gamma S$ entonces existe $\eta' \in \mathcal{H}$ tal que $y = \gamma\eta'(x)$. Se sigue que $x = \eta^{-1}(y) = \eta^{-1}\gamma\eta'(x)$ por lo que $\eta^{-1}\gamma\eta' \in \mathcal{G}_x \triangleleft H$ por lo que $\gamma \in \mathcal{H}$ y por lo tanto $S = \gamma S$. Se sigue que S es un bloque de imprimitividad para \mathcal{G} sobre X .

Como \mathcal{G}_x está contenido propiamente en \mathcal{H} entonces S contiene más de un punto. Sea $\gamma \in \mathcal{G} - \mathcal{H}$, se sigue que $\gamma(x) \notin S$ pues de lo contrario existiría $\eta \in \mathcal{H}$ tal que $\gamma(x) = \eta(x)$ y de allí se tendría que $\eta^{-1}\gamma(x) = x$ y por lo tanto $\eta^{-1}\gamma \in \mathcal{G}_x$, lo que es imposible.

Recíprocamente supongamos que \mathcal{G} posee un sistema de imprimitividad no trivial en X . Si S el bloque que contiene a x . Claramente $\mathcal{G}_S = \{\gamma : \gamma S = S\} \neq \mathcal{G}$. Sea $\gamma \in \mathcal{G}_x$, se tiene $S \cap \gamma S \neq \emptyset$ ya que $x \in S \cap \gamma S$ y entonces $\gamma S = S$. Así $\gamma \in \mathcal{G}_S$ y de allí que $\mathcal{G}_x \triangleleft \mathcal{G}_S$. Como S no es trivial existe $y \neq x$ y ya que \mathcal{G} actúa transitivamente en X existe $\gamma \in \mathcal{G}$ tal que $\gamma(x) = y$. Como $\gamma \in \mathcal{G}_S$ y $\gamma \notin \mathcal{G}_x$ entonces $\mathcal{G}_x \triangleleft \mathcal{G}_S$ y así \mathcal{G}_x no es maximal.

□

2.2. Automorfismos de gráficas

Un isomorfismo de una gráfica G en sí misma es un *automorfismo*. De otra forma, un automorfismo es una permutación de los vértices de G que manda vértices adyacentes en vértices adyacentes y vértices no adyacentes en vértices no adyacentes. Claramente la identidad es un

automorfismo, la composición de automorfismos es un automorfismo y para cada automorfismo σ la función inversa σ^{-1} también es un automorfismo. Así el conjunto de automorfismos de una gráfica G forma un grupo, con la composición como operación, que se denota por $Aut(G)$.

En la sección anterior definimos cuándo un grupo \mathcal{G} actúa sobre un conjunto. Ahora diremos que una *acción* de \mathcal{G} sobre una gráfica G es un homomorfismo de grupos

$$\phi : \mathcal{G} \longrightarrow Aut(G)$$

es decir, una función que a cada elemento $\gamma \in \mathcal{G}$ le hace corresponder un automorfismo $\phi(\gamma)$ de G de manera que $\phi(\gamma\gamma') = \phi(\gamma)\phi(\gamma')$. Como antes escribiremos γ en lugar de $\phi(\gamma)$.

Notemos que $Aut(G)$ actúa en los vértices de la gráfica de una manera muy natural, pero también actúa en las aristas de la siguiente manera: $\sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v)$ para toda $\sigma \in Aut(G)$. $Aut(G)$ actúa sobre subconjuntos de n elementos de $V(G)$ tomando $\sigma\{u_1, \dots, u_n\} = \{\sigma(u_1), \dots, \sigma(u_n)\}$ y sobre el conjunto de subgráficas de G . En particular $Aut(G)$ actúa sobre el conjunto de triángulos, de cuadrados etc., y en general sobre el conjunto de subgráficas isomorfas a una dada.

El problema de decidir cuándo dos gráficas son isomorfas o cuándo alguna gráfica tiene un automorfismo distinto de la identidad es muy complicado. La determinación de $Aut(G)$ es igualmente difícil en

general, sin embargo, en algunos casos es simple. Por ejemplo, cada permutación de los vértices de K_n es un automorfismo, es decir $\text{Aut}(K_n) \simeq \mathcal{S}_n$.

A continuación listaremos ciertas observaciones que utilizaré de manera frecuente.

Observación 2.1. *i) Si u es un vértice de una gráfica G y σ es un automorfismo de G entonces el vértice $v = \sigma(u)$ tiene la misma valencia que u .*

ii) Si u e v son vértices de G y $\sigma \in \text{Aut}(G)$, entonces

$$d(u, v) = d(\sigma(u), \sigma(v)).$$

iii) El grupo de automorfismos de una gráfica es igual al de su complemento.

Notemos que la observación *i)* muestra que el grupo de automorfismos de una gráfica permuta a los vértices de igual valencia.

Las observaciones anteriores simplemente se heredan del hecho de que las adyacencias se mantienen bajo el automorfismo y no se crean nuevas.

2.3. Transitividad

Diremos que una gráfica G es *transitiva en vértices* o simplemente transitiva si $\text{Aut}(G)$ actúa transitivamente en el conjunto de los

vértices, esto es cuando para todo par de vértices u y v de G existe $\sigma_{uv} \in \text{Aut}(G)$ tal que $\sigma_{uv}(u) = v$. Es equivalente decir que solo hay una órbita de los vértices de G .

Las siguientes propiedades interesantes que tienen las gráficas transitivas en vértices saltan a la vista.

Observación 2.2. *Toda gráfica transitiva en vértice es regular*

Esto se sigue de de la observación 2.1*i*) y de la definición anterior

Observación 2.3. *Sea G una gráfica transitiva en vértices, H una subgráfica de G y $v \in V(G)$. Si existen exactamente n subgráficas de G isomorfas a H que contienen a v entonces todo vértice w de G está contenido en exactamente n subgráficas isomorfas a H .*

Ejemplos de gráficas transitivas en vértices son los sólidos platónicos, la gráfica de Petersen, los cubos, los octaedros etc.

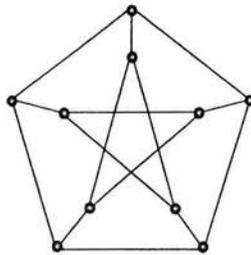


Figura 2.1: La gráfica de Petersen

El siguiente ejemplo ilustra como se traduce el concepto de imprimitividad que vimos anteriormente, tomando al grupo como $Aut(G)$. Sea Q un cubo, es fácil notar que $Aut(Q)$ actúa transitivamente sobre sus vértices. Notemos que para cada vértice v de Q existe un único vértice v' a distancia tres, los demás vértices están a distancia a lo más dos. Si $\gamma \in Aut(Q)$ y $S = \{v, v'\}$ entonces $\gamma(S) = S$ o $\gamma S \cap S = \emptyset$. Así que S es un bloque de imprimitividad de $Aut(Q)$. La partición dada por S está formada por cuatro conjuntos disjuntos, señalados en la figura 2.2 y $Aut(G)$ actúa sobre ellos.

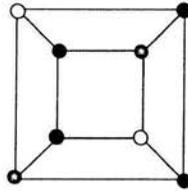
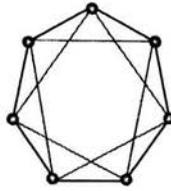


Figura 2.2: El cubo (Q_3)

Como dijimos anteriormente, el grupo de automorfismos de una gráfica actúa de manera natural en sus aristas. Una gráfica G es *transitiva en aristas* si $Aut(G)$ actúa transitivamente en el conjunto de aristas de G , es decir, si existe una sola órbita de aristas.

Que una gráfica sea vértice transitiva no implica que sea transitiva en aristas, por ejemplo, el circulante $C_7(1, 2)$ es vértice transitiva pero tiene dos órbitas de aristas. Notemos que las aristas negras están en una órbita diferente a las grises ya que las primeras están en dos triángulos y las segundas solo están en uno.

Sin embargo el que una gráfica sea transitiva en aristas tampoco implica que sea transitiva en vértices. Por ejemplo, las gráficas bi-

Figura 2.3: $C_7(1,2)$

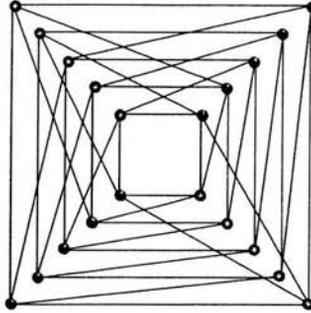
partitas $K_{n,m}$ completas son transitivas en aristas pero no son vértice transitivas a menos que $n = m$ ya que de lo contrario $K_{n,m}$ no es regular.

Proposición 2.3. *Sea G una gráfica transitiva en aristas sin vértices aislados. Si X no es vértice transitiva entonces $\text{Aut}(G)$ tiene exactamente dos órbitas y dichas órbitas forman una bipartición de G .*

Demostración. Supongamos que G es una gráfica transitiva en aristas pero no transitiva en vértices. Fijemos una arista uv de G y sea $w \in V(G)$. Si a es una arista que incide con w tomando un automorfismo que manda a uv en a se observa que w está en la órbita de x o en la de y . Se sigue que existen a lo más dos órbitas y ya que G no es transitiva en vértices hay exactamente dos órbitas. Por otra parte, una arista que contiene dos vértices que están en una misma órbita no puede ser enviada por un automorfismo a una arista cuyos extremos pertenecen a distintas órbitas. Luego las órbitas forman una bipartición de los vértices.

□

La siguiente gráfica muestra una gráfica regular que es transitiva en aristas pero no es vértice transitiva.



2.4. Gráficas de Acción y gráficas de Cayley

Una *gráfica de acción* $A(\mathcal{G}, X, \mathcal{S})$ de un grupo \mathcal{G} actuando en el conjunto X relativa a un subconjunto \mathcal{S} de \mathcal{G} distinto del vacío y cerrado por inversos $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}$ se define de la siguiente manera. Los vértices son los elementos del conjunto X y dos vértices u y v son adyacentes si y solamente si $u = \sigma x$ para alguna $\sigma \in \mathcal{S}$

Otra gráfica parecida a esta es la *gráfica de Cayley* $Cay(\mathcal{G}, \mathcal{S})$, donde \mathcal{G} es un grupo y \mathcal{S} es un subconjunto de G tal que \mathcal{S} no contiene a la identidad del grupo y si $\sigma \in \mathcal{S}$ entonces $\sigma^{-1} \in \mathcal{S}$. Los vértices de la gráfica son los elementos de \mathcal{G} y las aristas son de la forma $v(rv)$ donde $v \in \mathcal{G}$ y $r \in \mathcal{S}$.

Al pedir que la identidad no esté en \mathcal{S} impedimos que se formen lazos en la gráfica y si no se cumpliera que \mathcal{S} es cerrado bajo inversos

entonces el resultado sería una digráfica.

Notemos las dos gráficas antes mencionadas nos brindan información sobre los grupos pero también cómo actúa el grupo en dichas gráficas enriquece el conocimiento sobre su estructura.

Una gráfica es *cayliana* si es isomorfa a una gráfica de *Cayley*

Proposición 2.4. *Toda gráfica de Cayley $G = \text{Cay}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ es vértice transitiva.*

Demostración. Sean $\gamma \in \mathcal{G}$ y φ_γ la función que cumple que para todo $\eta \in V(G)$ se cumple que $\varphi_\gamma(\eta) = \eta\gamma$. Esta es una permutación de los vértices de G que si $\eta' \in V(G)$

$$(\eta'\gamma)(\eta\gamma)^{-1} = \eta'\gamma\gamma^{-1}\eta^{-1} = \eta'\eta^{-1}$$

Entonces $\eta\gamma \text{ ady}_G \eta'\gamma$ si y solamente si $\eta \text{ ady}_G \eta'$ y por lo tanto φ_γ es un automorfismo de G . Entonces todas estas permutaciones forman un subgrupo de $\text{Aut}(G)$ isomorfo a \mathcal{G} . Este grupo actúa transitivamente en los vértices de G ya que para dos vértices cualquiera γ y η existe un automorfismo $\varphi_{\gamma^{-1}\eta}$ que manda a γ en η .

□

Sin embargo existen gráficas vértice transitivas que no son gráficas de Cayley. Un ejemplo de estas es Petersen ya que \mathbb{Z}_{10} y D_{10} son los únicos dos grupos de orden 10 y sus gráficas de Cayley son isomorfas a M_5 o a $C_5 \square P_2$.

Capítulo 3

Subafinaciones y afinaciones

El conocimiento de la forma en que actúa el grupo de automorfismos en una gráfica proporciona a menudo una información de su estructura. Esta información puede ampliarse de manera relevante si se consideran las acciones de algunos subgrupos de $Aut(G)$ en G . En este capítulo estudiaremos cierta clase de automorfismos que sólo existen en gráficas con mucha estructura y veremos que esta estructura tiene que ser mucho más rígida cuando el grupo generado por dichos automorfismos actúa transitivamente en la gráfica.

3.1. Primeras definiciones y resultados

Sea $G = (V, A)$ una gráfica, σ un automorfismo de G y b un entero positivo decimos que:

- σ es *b-subafín* de G (*b-subafinación* de G) si para todo vértice

v de G

$$d(v, \sigma(v)) \leq b$$

- σ es b -*superafín* de G (b -superafinación de G) si para todo vértice v de G

$$d(v, \sigma(v)) \geq b$$

- σ es b -*afín* de G (b -afinación de G) si es una b -subafinación y una b -superafinación, es decir si para todo vértice v de G

$$d(v, \sigma(v)) = b$$

Cuando $b = 1$ diremos simplemente que σ es un automorfismo subafín (ó subafinación); un automorfismo superafín (ó superafinación) y un automorfismo afín (ó afinación) respectivamente. Notemos que las afinaciones son precisamente las subafinaciones que no dejan vértices fijos. A las 2-superafinaciones se les ha llamado coafinaciones pues una afinación de G induce una coafinación en su complemento. Estas gráficas fueron utilizadas en [8] y [9] en el estudio de gráficas iteradas de clanes.

Denotaremos por $\underline{S}^b(G)$ (*resp.* $\overline{S}^b(G)$, *resp.* $S^b(G)$) al conjunto de subafinaciones (*resp.* superafinaciones, *resp.* afinaciones) de G . El subgrupo de $\text{Aut}(G)$ generado por $\underline{S}^b(G)$ (*resp.* $\overline{S}^b(G)$, *resp.* $S^b(G)$) será denotado por $\underline{\text{Aut}}^b(G)$ (*resp.* $\overline{\text{Aut}}^b(G)$, *resp.* $\text{Aut}^b(G)$).

Proposición 3.1. *Los conjuntos $\underline{S}^b(G)$, $\overline{S}^b(G)$ y $S^b(G)$ son cerrados bajo conjugaciones y por tanto $\underline{\text{Aut}}^b(G)$, $\overline{\text{Aut}}^b(G)$ y $\text{Aut}^b(G)$ son subgrupos normales del grupo de automorfismos de G .*

Demostración. Supongamos que σ y γ son automorfismos de G , $\sigma \in \underline{S}^b(G)$ (resp. $\overline{S}^b(G)$, resp. $S^b(G)$) y $\rho = \tau\sigma\tau^{-1}$. Sea x un vértice de G y tómesese y tal que $x = \tau(y)$ p.a. $y \in V(G)$. Se tiene que

$$\rho(x) = \rho(\tau(y)) = \tau\sigma\tau^{-1}\tau(y) = \tau\sigma(y)$$

y como τ preserva distancias

$$d(x, \rho(x)) = d(\tau(y), \tau(\sigma(y))) = d(y, \sigma(y)) \quad (\text{resp. } \geq b, \text{ resp. } = b).$$

□

Proposición 3.2. *Sea G una gráfica conexa de orden al menos 3 que tiene un automorfismo subafín (resp. afín) distinto de la identidad. Si G no es un ciclo, entonces tiene cuello 3 o 4 (resp. tiene cuadrados).*

Demostración. Sea $\sigma \in \underline{S}^1(G)$ no trivial y $u_0 \in V(G)$ con $\sigma(u_0) \neq u_0$ y $\mathcal{C} = \{u_0, \dots, u_m\}$ donde $u_{i+1} = \sigma(u_i)$ y $u_m = u_0$ la órbita de u_0 bajo σ .

Caso 1. $m = 2$

Existe $z \in V(G) \setminus \mathcal{C}$ vecino de $u_i \in \mathcal{C}$. Entonces $G[\{z, u_i, \sigma(u_i), \sigma(x)\}]$ es un triángulo o un cuadrado dependiendo de que $\sigma(z) = z$ o $\sigma(z) \neq z$.

Caso 2. $m \geq 3$

Si $\mathcal{C} = V(G)$ entonces existe una arista $u_i u_j$ de G con $j \neq i - 1, i + 1$ y $G[\{u_i, u_{i+1}, u_{j+1}, u_j\}]$ es un cuadrado. Por último si $\mathcal{C} \neq V(G)$ existe $z \in V(G) \setminus \mathcal{C}$ vecino de $u_i \in \mathcal{C}$ que cumple con que $G[\{z, u_i, \sigma(u_i), \sigma(z)\}]$ es un triángulo o un cuadrado dependiendo de que $\sigma(z) = z$ o $\sigma(z) \neq z$.

□

Proposición 3.3. *Si G es una gráfica conexa sin triángulos y σ un automorfismo subafín de G distinto del trivial entonces σ es afín.*

Demostración. Supongamos que la afirmación no es cierta, que en verdad existe una gráfica G sin triángulos con un automorfismo σ no afín y distinto del trivial. Entonces definimos la siguiente coloración de los vértices:

$$t(x) = \begin{cases} \text{rojo} & \text{si } x \text{ } \text{ady}_G \sigma(x) \\ \text{azul} & \text{si } x = \sigma(x) \end{cases}$$

Esta coloración representa una bipartición de los vértices de G conexa. Entonces existe uv arista de G con u rojo y v azul. Por ser σ automorfismo subafín

$$v \text{ } \text{ady}_G \sigma(v) \text{ y } \sigma(v) \text{ } \text{ady}_G \sigma(u) = u$$

Por lo tanto G contiene el triángulo $u, v, \sigma(v)$ lo cual contradice la hipótesis.

□

3.2. Transitividad

Una arista de G es *subafinmente recorrible* (*resp. afinmente recorrible*) si existe algún automorfismo subafín (*resp. afín*) que mande uno sus extremos en el otro.

La gráfica de *recorribilidad subafín* $SR(G)$ (*resp. recorribilidad afín* $AR(G)$) es la subgráfica generadora de G cuyas aristas son las subafinmente recorribles (*resp. afinmente recorribles*).

Entonces decimos que G es *subafín-transitiva* (*resp. afín-transitiva*) si para todo par de vértices en la gráfica u y v existe una sucesión de automorfismos subafines (*resp. afines*) $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ tal que $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k(u) = v$. Es claro que una gráfica es subafín-transitiva (*resp. afín-transitiva*) si $\underline{Aut}^1(G)$ (*resp. $Aut^1(G)$*) actúa transitivamente en los vértices de la gráfica.

Debe notarse que si un subgrupo de $Aut(G)$ actúa transitivamente en G , entonces $Aut(G)$ también actúa transitivamente. Esto es, si una gráfica es subafín-transitiva (*resp. afín-transitiva*) entonces en particular también es vértice transitiva, lo cual implica que las gráficas vértice transitivas contienen a las subafín-transitivas (*resp. afín-transitivas.*) y dicha contención es propia. Se ha demostrado por ejemplo que la gráfica conexa más pequeña vértice transitiva que no es subafín-transitiva ni afín-transitiva es Petersen.

Proposición 3.4. G es subafín-transitiva (*resp. afín-transitiva*) si y solo si $SR(G)$ (*resp. $AR(G)$*) es conexa.

Demostración. Si G es subafín-transitiva (*resp.* afín-transitiva) para cada par de vértices u y v de G existen k automorfismos subafines de G (*resp.* afines) que cumplen que $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k(u) = v$ para alguna $k \geq 2$.

Entonces $\{u, \sigma_k(u), \sigma_{k-1}\sigma_k(u), \dots, \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k(u) = v\}$ es un uv -camino en $SR(G)$ (*resp.* $AR(G)$).

Recíprocamente si $SR(G)$ (*resp.* $AR(G)$) es conexa entonces para todo par de vértices u y v de $SR(G)$ (*resp.* $AR(G)$), que también son vértices de G , existe una uv trayectoria $u = x_0, x_1, \dots, x_s = v$ en $SR(G)$ (*resp.* $AR(G)$). Sea σ_i subafinación (*resp.* afinación) tal que $\sigma_i(x_i) = x_{i+1}$. Se tiene que $\sigma_s\dots\sigma_1(u) = v$ y por lo tanto G es subafín-transitiva (*resp.* afín-transitiva).

□

Teorema 3.1. Sean G y G_0 dos gráficas. Si $p : G \rightarrow G_0$ es un cubrimiento y δ una subafinación (*resp.* afinación) de G_0 . Entonces la función $\hat{\delta}$ (*resp.* afín) de G definido por $p \circ \hat{\delta} = \delta \circ p$ es una subafinación de G siempre que para cada cuadrado C_0 de G_0 $p^{-1}(C_0)$ sea también un cuadrado.

Demostración. Si $xy \in A(G)$ entonces $p(x)p(y) \in A(G_0)$. Se sigue que $\delta p(x)\delta p(y) \in A(G_0)$. Se tiene que $\{p(x), p(y), \delta p(x), \delta p(y)\}$ forma un cuadrado por lo que $\{x, y, \hat{\delta}(x), \hat{\delta}(y)\}$ es un cuadrado. Entonces $\hat{\delta}(x) \text{ ady}_G \hat{\delta}(y)$.

□

Observación 3.1. *Si uv es una arista subafinmente recorrible (resp. afinmente recorrible) entonces existe un apareamiento entre \mathcal{N}_u y \mathcal{N}_v .*

Sea G una gráfica finita no isomorfa a P_2 entonces se tienen los siguientes resultados sobre la estructura de G

Proposición 3.5. *Si uv es un puente de G entonces uv no es subafinmente recorrible (resp. afinmente recorrible).*

Demostración. Sea uv un puente de G . Si uv fuera subafinmente recorrible existiría $\sigma \in \underline{\text{Aut}}(G)$ tal que $\sigma(u) = v$. Ya que $G - uv$ tiene dos componentes conexas y como G no es isomorfa a P_2 , alguna de esas dos componente que denotaremos por H tiene cardinal al menos dos y sea H' la otra componente. Podemos asumir que $u \in V(H)$, de donde $\sigma(H - \{u\}) \subset H$, puesto que σ es subafín. Como $\sigma(w) = u$ cuando w es un vecino de u en $G - uv$ entonces $u \in \sigma(H - \{u\})$. Sea $w' \in V(H) - \sigma(H - \{u\})$ claramente $w' \notin \sigma(G)$ ya que $\sigma(H') \subseteq H'$, lo cual contradice que σ es una biyección.

□

Corolario 3.1. *Si G tiene un puente entonces no es subafín-transitiva.*

Demostración. Sea uv un puente de G . Entonces $SR(G) \subseteq G - uv$ entonces $SR(G)$ no es conexas.

□

Proposición 3.6. *Si G tiene un vértice v de corte entonces para todo automorfismo subafín σ de G se tiene que $\sigma(v) = v$.*

Demostración. Sea $w = \sigma(v)$ y supongamos que $w \neq v$. Sea H la componente de $G - \{v\}$ que no contenga a w . Si z es un vecino de v en H entonces $\sigma(z) = v$ por lo que $\sigma(H) \subset H$ y como en la demostración de la Proposición 3.5, H contiene un vértice que no está en la imagen de G bajo σ , lo que es imposible. \square

Corolario 3.2. *Si G es subafín-transitiva entonces G no tiene vértices de corte.*

Observación 3.2. *Si una gráfica tiene vértices de corte entonces no tiene afinaciones y por lo tanto no puede ser afín transitiva.*

Proposición 3.7. *Sea G una gráfica y H una subgráfica de G r -conexa en aristas. Si el número de aristas de G con un vértice en (H) y el otro en $V(G) - V(H)$ es a lo más r , entonces G no es subafín-transitiva.*

Demostración. Supongamos que G es subafín-transitiva, entonces existe uv subafín recorrible tal que $u \in V(H)$ y $v \notin V(H)$. Entonces $\sigma(V(H)) \cap V(H) \neq \emptyset$ y $\sigma(V(H)) \cap V(G) - V(H) \neq \emptyset$. Entonces el conjunto de aristas con un vértice en H y el otro en $G - H$ es de corte de $G[\sigma(V(H))] \simeq H$ y su cardinalidad es menor que r . Se sigue que H no es r -conexa, lo que contradice la hipótesis. \square

Notemos que así como definimos la subafín-transitividad podemos definir la b -subafín transitividad cuando $\underline{Aut}^b(G)$ actúa transitivamente en G . Es decir, G es b -subafín-transitiva si para todo par de vértices u y v existe una sucesión $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ de automorfismos b -subafines tales que $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k(u) = v$.

Proposición 3.8. *Si G tiene un grupo de automorfismos primitivo y un automorfismo b -subafín distinto del trivial entonces G es b -subafín-transitiva.*

Demostración. Sabemos por (3.1) que $\underline{Aut}^b(G)$ es un subgrupo no trivial y normal de $Aut(G)$. Como $Aut(G)$ actúa primitivamente en G por la Proposición 2.4 $\underline{Aut}^b(G)$, actúa transitivamente en G y por lo tanto G es b -subafín-transitiva.

□

Es interesante observar que si G y H son dos gráficas entonces $Aut(G)$ y $Aut(H)$ actúan en $G \square H$ como sigue

Sean $\sigma \in Aut(G)$ y $\gamma \in Aut(H)$. Definimos

$$\sigma \square id_H \text{ y } id_G \square \gamma \in Aut(G \square H)$$

de modo que $(\sigma \square id_H)(u, v) = (\sigma(u), v)$ y $(id_G \square \gamma)(u, v) = (u, \gamma(v))$ para todo $(u, v) \in V(G \square H)$. Para abreviar, escribiremos σ_1 en lugar de $\sigma \square id_H$ y γ_2 en lugar de $id_G \square \gamma$. Entonces la acción ϕ_1 (resp. ϕ_2) de $Aut(G)$ (resp. $Aut(H)$) sobre $G \square H$ es aquella que cumple que $\phi_1(\sigma) = \sigma_1$ (resp. $\phi_2(\gamma) = \gamma_2$).

Sea $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G \square H$ un isomorfismo. Diremos que un automorfismo $\delta \in Aut(\tilde{G})$ es cartesiano con respecto a φ , G y H si $\varphi \delta \varphi^{-1} = \sigma_1$ o $\varphi \delta \varphi^{-1} = \gamma_2$ para alguna $\sigma \in Aut(G)$ o $\gamma \in Aut(H)$. Si δ no cumple con lo anterior, diremos que dicho automorfismo no es cartesiano con respecto a φ , G y H .

La demostración de la siguiente Proposición es directa.

Proposición 3.9. *Si σ es una subafinación (resp. afinación) de G y γ es una subafinación (resp. afinación) de H entonces σ_1 y γ_2 son subafinaciones (resp. afinaciones) de $G \square H$.*

Proposición 3.10. $SR(G) \square SR(H) \subseteq SR(G \square H)$

Demostración. Sea $(u, v)(u', v') \in A(SR(G) \square SR(H))$ entonces

Caso 1. Si uu' es una arista de $SR(G)$ y $v = v'$ entonces uu' es una arista de G y existe un automorfismo σ subafín de G tal que $\sigma(u) = u'$. Por lo tanto $(u, v)(u', v')$ es una arista en $G \square H$ y $\sigma_1(u, v) = (u', v')$

Caso 2. Si $u = u'$ y vv' es una arista de $SR(H)$ entonces vv' es una arista de H tal que existe un automorfismo γ subafín de H tal que $\gamma(v) = v'$. Por lo tanto $(u, v)(u', v')$ es una arista de $G \square H$ y $\gamma_2(u, v) = (u', v')$

□

Si en la demostración anterior sustituimos AR por SR entonces demostramos también que

Proposición 3.11. $AR(G) \square AR(H) \subseteq AR(G \square H)$

Proposición 3.12. *Si G y H son subafín-transitivas (resp. afín-transitivas) entonces $G \square H$ es subafín-transitivo (resp. afín-transitivo.)*

Demostración. $SR(G)$ y $SR(H)$ son conexas por la Proposición 3.4. Entonces $SR(G) \square SR(H)$ es conexa y ya que

$$SR(G) \square SR(H) \subseteq SR(G \square H) \quad (\text{prop. 3.10})$$

$SR(G \square H)$ es conexa y por lo tanto $G \square H$ es subafín-transitivo. Procediendo análogamente y con el auxilio de las proposiciones (3.4 y 3.11) se obtiene que $G \square H$ es afín-transitivo.

□

A continuación introduciremos otros conceptos de transitividad más fuertes que la subafín-transitividad y la afín-transitividad.

Diremos que G es *fuertemente subafín-transitiva* (resp. *fuertemente afín-transitiva*) si para cada par de vértices adyacentes u y v en G existe al menos un automorfismo subafín (resp. afín) σ_{uv} tal que $\sigma_{uv}(u) = v$.

Observemos que $SR(G)$ (resp. $AR(G)$) es G si y solamente si G es fuertemente subafín-transitiva (resp. fuertemente afín-transitiva).

Diremos que G es *unívocamente subafín-transitiva* (resp. *unívocamente afín-transitiva*) si para cada par de vértices u y v adyacentes en G existe un único automorfismo σ subafín (resp. afín) tal que $\sigma(u) = v$. Observemos que toda gráfica *unívocamente subafín-transitiva* (resp. *unívocamente afín-transitiva*) es fuertemente

subafín-transitiva (*resp.* fuertemente afín-transitiva).

3.3. Gráficas de vecindad constante

Una gráfica G es localmente H si la gráfica inducida por los vecinos de cada vértice es isomorfa a H . Como ejemplo de estas gráficas tenemos a las gráficas completas K_n que son localmente K_{n-1} ; al octaedro, O_3 , que es localmente C_4 ; al cubo que es localmente tres copias de K_1 .

Se dice que una gráfica es de vecindad constante si es localmente H para alguna H dada.

En lo que sigue supondremos siempre que las gráficas mencionadas son conexas.

Notemos que si $|V(H)| = n$ entonces G es una gráfica regular de grado n . Una subclase de las gráficas de vecindad constante es el de las gráficas transitivas en vértices. Esta última contención es propia: la siguiente gráfica es localmente tres copias de K_1 y no es vértice transitiva pues los vértices grises están en tres pentágonos y los demás en dos.

Como hemos visto a lo largo de este capítulo las gráficas subafín-transitivas (y por lo tanto las afín-transitivas) son transitivas en vértices. Por ello las gráficas de vecindad constante son de interés para el estudio de las subafín-transitivas .

Para los fines de esta tesis estudiaremos son las gráficas de vecindad

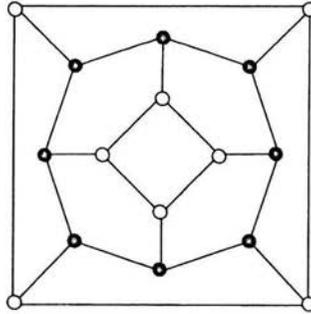
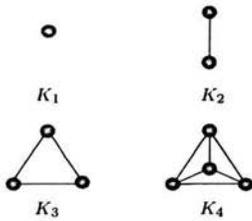


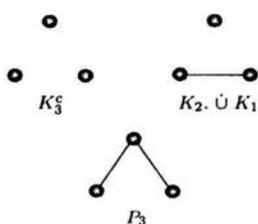
Figura 3.1: Gráfica de v. c. no transitiva

constante de grado a lo más cuatro que utilizaremos para clasificar las gráficas subafín-transitivas cúbicas y 4-regulares.



Observación 3.3. *La única gráfica localmente K_n es K_{n+1} . Sea G una gráfica localmente K_n , luego, para todo vértice v de G $G[\mathcal{N}_v \cup \{v\}] \simeq K_{n+1}$ y como K_{n+1} es localmente K_n se tiene que $G \simeq K_{n+1}$*

- K_2 es la única gráfica regular de grado 1 y por lo tanto la única gráfica localmente K_1 . Para que una gráfica sea de vecindad constante de grado 2 tiene que ser localmente K_2 ó localmente K_2^c . En el primer caso, G es un triángulo. En el segundo caso, G es un ciclo C_n de longitud $n \geq 4$.



Ahora empezaremos a estudiar las gráficas de vecindad constante de grado 3. Hay cuatro gráficas no isomorfas de grado 3 : K_3 , K_3^c , P_3 y $K_2 \dot{\cup} K_1$. Por la observación 3.3, la única gráfica localmente K_3 es K_4 . Existen muchos ejemplos de gráficas localmente K_3^c , entre ellos, esté el cubo (Q_3) (figura 2.2), la gráfica de Petersen (figura 2.1) y el dodecaedro (3.2), entre otras. Más adelante probaremos que no existen gráficas localmente P_3 . Finalmente $K_3 \square K_2$ (3.3) es localmente $K_2 \dot{\cup} K_1$. De hecho, es bien conocido el siguiente resultado:

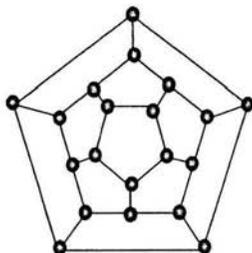
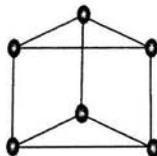


Figura 3.2: El Dodecaedro

Figura 3.3: $K_3 \square K_2$

Proposición 3.13. *Sean G y G' gráficas localmente H y H' respectivamente. Entonces $G \square G'$ es una gráfica localmente $H \dot{\cup} H'$.*

Demostración. La vecindad de un vértice (u, v) en $G \square G'$ es la unión disjunta de los siguientes conjuntos de vértices: $A = \{(u', v) : u' \text{ ady}_{G'} u\}$ y $B = \{(u, v') : v' \text{ ady}_G v\}$. Se sigue de la definición de producto cartesiano, que no hay aristas entre A y B y es fácil ver que $(G \square H)[A] \simeq G[N_u] \simeq H$ y que $(G \square H)[B] \simeq G[N_v] \simeq H'$.

□

Proposición 3.14. *No existen gráficas localmente P_3 .*

Demostración. Sea G una gráfica localmente P_3 . Sea $v \in V(G)$ y $w \in N_v$ tal que w tiene valencia 1 en $G[N_v]$. Como G es cúbica entonces w tiene un vecino w' que no está en la vecindad de v . Sea u el único vértice adyacente a v que tiene valencia dos en $G[N_v]$. Notemos que para que w tenga una vecindad isomorfa a P_3 entonces w' es adyacente a v o a u , lo cual es imposible pues dichos vértices ya tienen la valencia completa.

□

Ahora analizaremos a las gráficas de vecindad constante de grado 4.



Proposición 3.15. *La única gráfica localmente C_4 es O_3*

Demostración. Sean G una gráfica localmente C_4 , $v \in V(G)$ y $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ el cuadrado inducido por $\mathcal{N}_v = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$. Sea w el otro vértice de v_0 . Debido a que $G[v, v_1, v_3, w] \simeq C_4$ entonces w es adyacente a v_1 y a v_3 . De la misma forma v, v_0, v_2, w que son adyacentes a v_3 tienen que inducir un cuadrado en G . Así, v_2 es adyacente a w . Por lo tanto $G \simeq O_3$ \square



Proposición 3.16. *Si G es localmente P_4 entonces $G \simeq C_n(1, 2)$ para $n \geq 7$.*

Demostración. Sean G una gráfica localmente P_4 y v un vértice de G . Diremos que $w \in \mathcal{N}_v$ es un vértice central (*resp.* extremo) para v si w tiene valencia 2 (*resp.* 1) en $G[\mathcal{N}_v]$. Podemos ver en la figura 3.3 que los vértices extremos de un vértice no pueden ser adyacentes. Es inmediato que si w es un vértice central de v entonces v es vértice central de w . Para probar esto, sean w_1 y w_2 los vértices adyacentes a w y a v (véase en la figura). Entonces v tiene valencia 2 en $G[\mathcal{N}_v]$.

Sea H la subgráfica generadora en G tal que $uv \in A(H)$ si y solamente si u y v son vértices centrales el uno para el otro. H es una gráfica regular de grado 2 puesto que cada vértice tiene dos vértices centrales y por lo tanto es una unión disjunta de ciclos.

Caso 1. Existe $C = (c_0, \dots, c_n, c_0)$ un ciclo de H de longitud por lo menos 4.

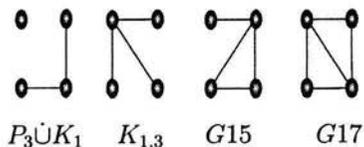
Para cada vértice c_i , $c_{i-1}c_i \in A(G)$ (tomando i módulo n), pues son vértices centrales para c_i . Luego C induce en G una gráfica regular de grado 4. Como G es conexa entonces $G \simeq C_n(1, 2)$ para $n \geq 7$

Caso 2. Todos los ciclos de H tienen longitud 3.

Sean T_v y T_w dos triángulos adyacentes en G , es decir, $vw \in A(G)$ para alguna $v \in T_v$ y $w \in T_w$. Como w es un vértice extremo para v entonces, existe $c(v)$ un vértice central para v adyacente a w . Notemos que tanto v como w son vértices extremos para w y son adyacentes, lo cual es imposible.

□

Finalmente, como en el caso de las gráficas cúbicas, existen ciertas gráficas H regulares de grado 3 con las que no se pueden obtener gráficas localmente H . Se probó en [4] que el problema de dada una gráfica H saber cuando existe una gráfica localmente H en la familia de todas las gráficas es idecidible.



Proposición 3.17. *No existen gráficas localmente H donde*

$$i) H \simeq P_3 \dot{\cup} K_1$$

$$ii) H \simeq K_{1,3}$$

$$iii) H \simeq G15$$

$$iv) H \simeq G17$$

Demostración. *i)* Sea G una gráfica localmente $P_3 \dot{\cup} K_1$. Sea $\{w, u, z\}$ los vértices de la vecindad de $v \in V(G)$ que forman un P_3 en $G[\mathcal{N}_v]$ y tales que $wu, wz \in A(G)$. Sea u' el otro vértice de \mathcal{N}_u que no es su vértice aislado. No puede ser u' el vértice aislado de v pues u es vecino de v . Así que $\{v, w, u'\}$ forman una trayectoria de orden 3 en $G[\mathcal{N}_u]$. Lo cual no es posible pues los vértices u', u, v, z forman una trayectoria del orden 4 en la vecindad de w .

Para demostrar *ii)* supongamos que existe una gráfica G localmente $K_{1,3}$. Sean v un vértice de G y u el único adyacente a v con valencia 3 en $G[\mathcal{N}_v]$ y $w \in V(G)$ alguno de los vértices adyacentes a u y a v , w tiene dos vértices adyacentes w_1 y w_2 tales que $G[\{v, u, w_1, w_2\}] \simeq K_{1,3}$ así que tanto w_1 como w_2 son adyacentes a u , lo cual es imposible pues u ya tenía valencia 4.

iii) Sean G una gráfica localmente $G15$, $v \in V(G)$ y w y u los vértices de valencia 3 y 1 respectivamente en $G[\mathcal{N}_v]$. Sean u_1 y u_2 los vecinos de u distintos de v y w . Entonces $G[\{u_1, u_2, w\}] \simeq K_3$, lo cual es imposible pues w tiene completa su vecindad.

Finalmente demostraremos *iv)* suponiendo que hay una gráfica G que es localmente $G17$. Sean u y w los vértices de valencia 3 en $G[\mathcal{N}_v]$ y z un vértice de valencia 2 en $G[\mathcal{N}_v]$.

El triángulo $G[\{u, v, w\}]$ está contenido en $G[\mathcal{N}_z]$ y no puede extenderse a una copia de $G17$ pues las valencias de u y w están completas.

□

Capítulo 4

Automorfismos subafines

4.1. Gráficas subafín transitivas

Proposición 4.1. *Toda gráfica G transitiva en aristas que tiene una subafinación no trivial es fuertemente subafín-transitiva.*

Demostración. Si G tiene un automorfismo σ subafín no trivial entonces existe un vértice v adyacente a su imagen $\sigma(v)$. Sea uw una arista de G arbitraria; ya que G es transitivo en aristas, existe un automorfismo ρ que manda la arista $v\sigma(v)$ en uw . Podemos suponer que $\rho(v) = u$ y $\rho\sigma(v) = w$. El automorfismo $\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$ manda u en v . Sea x un vértice de G como σ es subafín se tiene

$$\rho^{-1}(x) = \sigma\rho^{-1}(x) \text{ o } \rho^{-1}(x) \text{ ady}_G \sigma\rho^{-1}(x)$$

Se sigue que

$$x = \tau(x) \text{ o } x \text{ ady}_G \tau(x)$$

Y por lo tanto τ es una subafinación.

□

Teorema 4.1. *Una gráfica G es fuertemente subafin-transitiva si y solamente si es isomorfa a una gráfica de acción $A(\mathcal{G}, X, \mathcal{S})$ donde \mathcal{G} actúa transitiva y fielmente en el conjunto X y \mathcal{S} genera \mathcal{G} y es union de clases de conjugación en \mathcal{G} .*

Demostración. Supongamos que G es fuertemente subafin-transitiva. Si X es el conjunto de vértices de G , $\mathcal{S} = \underline{S}^1(G)$, $\mathcal{G} = \underline{Aut}^1(G)$. Entonces $A(\mathcal{G}, X, \mathcal{S})$ cumple que:

1. \mathcal{G} actúa transitivamente en X pues en particular G es subafin-transitiva y actúa fielmente pues dos automorfismos distintos actúan de forma distinta.
2. Por construcción \mathcal{S} genera a \mathcal{G}
3. Sabemos que si σ es una automorfismo subafin de G entonces σ^{-1} también lo es. Por lo que \mathcal{S} es cerrado bajo inversos.
4. \mathcal{S} es union de clases de conjugación por la Proposición 3.1.

Recíprocamente. Sea $G = A(\mathcal{G}, X, \mathcal{S})$. Si \mathcal{G} es un grupo que actúa fiel y transitivamente en los vértices de G entonces (por el Capítulo 2) es isomorfo a un subgrupo de automorfismos de G . Además si $\sigma \in \mathcal{S}$ y

$x \in X$ entonces cuando $\sigma(x) \neq x$ y por definición de gráfica de acción $\sigma(x)$ $ady_G x$ se sigue que \mathcal{S} es isomorfo al conjunto de subafinaciones de G . Como \mathcal{G} es el generado por \mathcal{S} y actúa transitivamente en X entonces G es subafín-transitiva.

□

4.2. Gráficas cúbicas subafín-transitivas

En esta pequeña sección lo único que demostraremos es el Teorema que caracteriza a las gráficas cúbicas subafín-transitivas. Recordaremos que M_n denota a una banda de Möebius, la cual, se obtiene del ciclo C_{2n} agregando una arista entre cada par de vértices opuestos.

Teorema 4.2. *Si G es una gráfica cúbica y subafín-transitiva entonces*

$$i) G \simeq M_n \text{ con } n \geq 2 \text{ ó}$$

$$ii) G \simeq C_n \square P_2 \text{ con } n \geq 3$$

Demostración. Como G es subafín-transitiva y no es un ciclo, entonces por la Proposición 3.2 G tiene cuello 3 ó 4

Caso 1. G tiene cuello 3

Supongamos que existe un vértice v que está en dos triángulos. Como G es cúbica entonces los dos triángulos deben compartir una arista y así G es localmente C_3 ó localmente P_3 . En

la Proposición 3.14 demostramos que no existen gráficas localmente P_3 . Por otra parte, si G es localmente C_3 entonces $G \simeq K_4 \simeq M_2$. Supongamos que todo vértice v está en un único triángulo T_v . Sea T un triángulo en G . Como G es subafín-transitiva existe una arista vw subafínmente recorrible con v en T y w fuera de T (luego $T = T_v$). Sea σ un automorfismo subafín tal que $\sigma(v) = w$. Por ser automorfismo tiene que ocurrir que $\sigma(T_v) = T_w$. Sean v_1, v_2 los otros vértices de T_v , $w_1 = \sigma(v_1)$, $w_2 = \sigma(v_2)$. Como σ es subafín $w_1v_1, w_2, v_2 \in A(G)$. Por lo tanto $G \simeq C_3 \square P_2$.

Caso 2. G tiene cuello 4

2.1 Cada vértice de G está en un único cuadrado.

Sea \mathcal{C} un cuadrado de G . Como G es subafín-transitiva entonces $SR(G)$ es conexa. Luego existe $vw \in A(SR(G))$ tal que $v \in \mathcal{C}$ y $w \notin \mathcal{C}$. Sea σ un automorfismo subafín tal que $\sigma(w) = v$ y sean w_1 y w_2 los otros vecinos de w . Ya que G no tiene triángulos, w_1 y w_2 no son vecinos de v así que $\sigma(w_1)$ y $\sigma(w_2)$ son vecinos de v y al menos uno de ellos, digamos $\sigma(w_1)$ es vecino de v . Así $\{v, w, w_1, \sigma(w_1)\}$ induce otro cuadrado que contiene a v , lo cual contradice la hipótesis.

2.2 Cada vértice está en exactamente dos cuadrados.

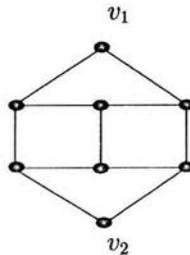
Para cada vértice v de G existe un único vértice $v' \in \mathcal{N}_v$ tal que la arista vv' está en exactamente dos cuadrados. Las aristas de la forma vv' forman un 1-factor de G cuyo complemento en G es un 2-factor $\simeq H$. Si H es un ciclo (obviamente hamiltoniano) entonces alguna de las aristas de H (y en consecuencia todas) tiene que ser subafínmente recorrible. Se sigue que G es un circulante de grado 3 y por lo tanto, $G \simeq M_n$. Si H es

union disjunta de ciclos, al menos dos, sea $\mathcal{C} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ uno de ellos. Ya que $SR(G)$ es conexa existe una arista vv' subafín recorrible con $v \in \mathcal{C}$ y $v' \notin \mathcal{C}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $v = v_0$. Por construcción v_0, v'_0 está en dos cuadrados ($v' = v'_0$). Si σ es una subafinación con $\sigma(v_0) = v'_0$, σ manda \mathcal{C} en $\mathcal{C}' = \{v'_0, v'_1, \dots, v'_n\}$ de H y se satisface que $\sigma(v_i) = v'_i$. Se sigue que $G \simeq C_n \square K_2$.

2.3 Todos los vértices están en exactamente tres cuadrados.

En este caso G contiene a una subgráfica H isomorfa a las gráfica de la figura siguiente. En H todos los vértices salvo v_1 y v_2 tienen la valencia completa. Si $v_1v_2 \in A(G)$, entonces $G \simeq C_4 \square K_2$. De lo contrario, como la gráfica de recorribilidad subafín es conexa, existe una arista subafínmente recorrible v_iv' con $v' \notin V(H)$ $i \in \{1, 2\}$ lo que es imposible por la observación 3.1.

□



4.3. Gráficas 4-regulares subafín-transitivas

Lema 4.1. *La única gráfica subafín-transitiva y localmente $2K_2$ es $C_3 \square C_3$*

Demostración. Sea G una gráfica localmente $2K_2$ subafín-transitiva y T uno de sus triángulos. Existe una subafinación σ de G tal que $\sigma(T) \neq T$. supongamos que $\sigma(T) \cap T \neq \emptyset$ y sea $x_0 \in V(G)$ tal que $\sigma(x_0) = y_0 \notin T$, $\sigma(w) \text{ ady}_G y_0$ para todo $w \in V(G)$ vecino de x_0 . Además $\sigma(w) \neq w$ pues de otro modo, $G[\mathcal{N}_{x_0}]$ contendría una trayectoria de orden 3.

Se sigue que $\sigma(w) = x_0$ ó $\sigma(w) \notin T$. Sean $x_1, x_2 \in T$ tales que $\sigma x_1 = x_0$ y $\sigma(x_2) = y_2 \notin T$. Como $x_1 \text{ ady}_G x_2$ entonces $x_0 \text{ ady}_G y_2$, lo cual es imposible pues $G[\mathcal{N}_{x_0}]$ tiene una trayectoria de longitud 3.

Así que $\sigma(T) \cap T = \emptyset$. Sea $y_i = \sigma(x_i)$ $i = 0, 1, 2$. Ya que un automorfismo manda triángulos en triángulos $G[\{y_0, y_1, y_2\}] \simeq C_3$. Entonces $T \cup \sigma(T)$ induce en G una subgráfica H isomorfa a $C_3 \square K_2$.

Además existen los vértices z_0, z_1 y z_2 tales que $G[\{z_i, y_i, x_i\}]$ es un triángulo y además $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$ pues de otra forma $G[\mathcal{N}_{z_i}] \simeq C_4$. Existe un automorfismo subafín σ' que manda un vértice de H en un vértice de $G - H$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\sigma'(x_1) = z_1$. Procediendo como al principio y tomando en cuenta que las vecindades de y_i está completa para $i = 0, 1, 2$, se sigue que $G[\{z_0, z_1, z_2\}] \simeq C_3$ y por lo tanto $G \simeq C_3 \square C_3$

□

Lema 4.2. *Si una gráfica subafín-transitiva G contiene como gráfica inducida a una copia de $K_{3,3}$ entonces*

$$i) G \simeq M_n \square K_2 \text{ ó}$$

$$ii) G \simeq K_{4,4}$$

Demostración. Supongamos que G tiene una subgráfica inducida H isomorfa a $K_{3,3}$. Como H es una gráfica bipartita, entonces existen dos subconjuntos X e Y independientes maximales tales que $X \cup Y = V(H)$. Sea σ una subafinación tal que $\sigma(V(H)) \neq V(H)$. Sea $s = |\sigma(V(H)) \cap V(H)|$.

Es inmediato ver que $s < 6$ ya que $\sigma(V(H)) \neq V(H)$

Afirmación 1. *Si $s > 0$ entonces $s \geq 4$*

Demostración. Si $s > 0$, existe $x_0 \in V(H)$ tal que $\sigma(x_0) \in V(H)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_0 \in X$ y que por lo tanto $\mathcal{N}_{x_0} \cap V(H) = Y$.

Caso 1. $\sigma(x_0) = x_0$.

Se tiene que $\sigma(\mathcal{N}_{x_0}) = \mathcal{N}_{x_0}$. Como $G[\mathcal{N}_{x_0}]$ es acíclico, las órbitas de σ en $G[\mathcal{N}_{x_0}]$ son de longitud a lo más 2 y ya que Y es un conjunto independiente, existen $y_0, y_1 \in Y$ tales que $\sigma(y_0) = y_0$ y $\sigma(y_1) = y_1$. Además $G[\mathcal{N}_{y_0} \cap \mathcal{N}_{y_1}]$ es acíclica e invariante bajo σ y como antes, se sigue que existe $x_1 \in X$ distinto de x_0 tal que $\sigma(x_1) = x_1$.

Caso 2. $\sigma(x_0) = y_0 \in Y$.

$\sigma(Y) \subseteq X$ como y_0 tiene un sólo vecino fuera de H se sigue que $|\sigma(Y)| \geq 2$ es decir, existen dos vértices $y', y'' \in Y$ tales que $\sigma(y'), \sigma(y'') \in V(H)$. Sustituyendo x_0 por y' se tiene que $|\sigma(X)| \geq 2$ entonces por lo menos existe $x' \in X$ distinto de x_0 tal que $\sigma(x') = x'$.

□

Afirmación 2. Si $s = 0$ entonces $G \simeq M_3 \square K_2$

Demostración. Si $s = 0$ entonces $\sigma(H) \cap H = \emptyset$ y como $\sigma(H) \simeq H$ por la observación 3.1 $G \simeq K_{3,3} \square K_2 \simeq M_3 \square K_2$ □

Afirmación 3. Si $s = 4$ entonces $G \simeq K_{4,4}$

Demostración. Supongamos que $X = \{x, x_1, x_2\}$ y $Y = \{y, y_1, y_2\}$ Si $\sigma(x), \sigma(x_1) \notin V(H)$ entonces $\sigma(y)$ es adyacente a todos los vértices de Y , a $\sigma(x)$ y a $\sigma(x_1)$ y por lo tanto tiene valencia 5, lo que contradice que G sea regular de grado 4.

Entonces podemos suponer que existen $x \in X$ e $y \in Y$ tales que $\sigma(x), \sigma(y) \notin V(H)$.

Naturalmente $\sigma(x)\sigma(y) \in A(G)$, $G[\sigma(V(H))] \simeq K_{3,3}$ y $\sigma(V(H)) \cap V(H) = 4$. Sean X' y Y' los conjuntos independientes maximales de $\sigma(V(H))$.

Caso 1. $\sigma(V(H)) = \{\sigma(x), \sigma(y), x, y, x_1, y_1\}$

En este caso tenemos que $X' = \{x, \sigma(y), x_1\}$ y $Y' = \{y, \sigma(x), y_1\}$. Como $x_1\sigma(x) \in A(G)$ se tiene que $\sigma^2(x)\sigma(x_1) \in A(G)$. Sabemos que $\sigma(x_1) \in \{y, y_1\}$ y que y e y_1 tienen valencia 4 en $H \cup G[\sigma(V(H))]$. Se sigue que $\sigma^2(x) \in V(H)$ y procediendo de la misma manera se tiene que $\sigma^2(y) \in V(H) - V(\sigma(H))$. Entonces $\sigma^2(x) = y_2$ y $\sigma^2(y) = x_2$ y $G \simeq K_{4,4}$.

Caso 2. $x \in \sigma(V(H))$ y $y \notin \sigma(V(H))$

$x, \sigma(y) \in X'$ y $y \in Y'$ entonces los otros dos vértices de Y' son y_1 y y_2 . Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\sigma(V(H)) = \{\sigma(x), \sigma(y), x, y_1, y_2, x_1\}$.

Notemos que $H \cup G[\sigma(V(H))] = H'$ es 3-conexa en aristas y solo existen a lo más 2 $H'(H')^c$ -aristas. Por la Proposición 3.7 G no es subafín-transitiva ó $G \simeq K_{4,4}$.

Caso 3. x e y no están en $\sigma(V(H))$ En este caso como $\sigma(\{x_1, x_2\}) = \{y_1, y_2\}$ y $\sigma(\{y_1, y_2\}) = \{x_1, x_2\}$ entonces $G \simeq K_{4,4}$.

□

Afirmación 4. Si $s = 5$ entonces $G \simeq K_{4,4}$

Demostración. Sea $x \in V(H)$ tal que $\sigma(x) \notin V(H)$. Podemos suponer que $x \in X$. Como xw es una arista de H para todo vértice w de Y y $\sigma(Y) = X$ entonces $\sigma(x)v \in A(G)$ para todo $v \in X$. Sea $y \in Y$ tal que $y \notin \sigma(V(H))$.

$\sigma^2(x) \neq y$, de lo contrario, como $\sigma(X) - \{x\} \subseteq Y$ existiría una yY -arista. Así que $\sigma^{-1}(y) \notin \{V(H) \cup \{\sigma(x)\}\}$. Como todos los vértices

de X son adyacentes a Y entonces todos los vértices de $\sigma^{-1}(X)$, que sabemos que es el conjunto Y , son adyacentes a $\sigma^{-1}(y)$. Sea H'' la gráfica generada por $\{\sigma(x)\} \cup X \cup Y \cup \{\sigma^{-1}(y)\}$. Si $H'' \not\cong K_{4,4}$ entonces $\sigma(x)$ y $\sigma^{-1}(y)$ son los únicos vértices de valencia menor que 4 en H'' entonces existen exactamente 2 aristas de H'' a su complemento y H'' es tres conexa en aristas, se sigue de la Proposición 3.7 que G no es subafín-transitiva, lo que contradice la hipótesis. \square

\square

Lema 4.3. *Sea G una gráfica subafín transitiva y \mathcal{G} un subgrupo de $\underline{\text{Aut}}^1(G)$ que actúa transitivamente en G y contiene una subafinación σ cuyas órbitas son todas de orden 2 y forman un sistema de imprimitividad de \mathcal{G} , entonces*

i) $G \simeq M_n \square K_2$ con $n \geq 2$

ii) $G \simeq C_n \square C_4$ con $n \geq 3$

iii) G tiene la siguiente estructura:

$$V(G) = \{x_{i,j} : 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq 3\},$$

$$A(G) = \{x_{i,j}x_{i,j+1} : \forall i, \forall j\}$$

$$\cup \{x_{i,j}x_{i+1,j} : 0 \leq i \leq m-2, 0 \leq j \leq 3\}$$

$$\cup \{x_{m-1,j}x_{0,j+2} : 0 \leq j \leq 3\}$$

donde $m \geq 2$ y los índices de la última estructura están tomados módulo m y 4 respectivamente. Nota. Si $m = 2$ entonces $G \simeq K_{4,4}$.

Demostración. Supongamos que G contiene una subgráfica H isomorfa a K_4 . Si G es localmente H entonces $G \simeq K_5$ lo que es imposible pues $|V(G)|$ es impar y no puede tener dicha subafinación σ .

Entonces si G contiene tetraedros por la Proposición 3.17 G es localmente $K_3 \dot{\cup} K_1$. Sea σ' una subafinación tal que $\sigma'(V(H)) \neq V(H)$ y $\sigma'(x) \notin V(H)$. Como $\sigma'(x)$ no tiene vecinos en $G[\mathcal{N}_x]$ se sigue que $\sigma'(V(H)) \cap V(H) = \emptyset$ y $G \simeq K_4 \square K_2$.

Supongamos que G no tiene tetraedros. Para cada $x \in V(G)$ sea $x' = \sigma(x)$ y \mathcal{F} el 1-factor formado por las aristas xx' de G .

Afirmación 1. *Si \mathcal{C} es una componente de $G-F$ entonces $\sigma(\mathcal{C})$ también es componente.*

Demostración. $\sigma(\mathcal{C})$ es una subgráfica conexa de $G - F$. Supongamos que $\sigma(\mathcal{C})$ no es componente. Existe \mathcal{C}' una componente conexa de $G - F$ tal que $\mathcal{C}' \supset \sigma(\mathcal{C})$. Entonces existiría en $G - F$ una $\sigma(\mathcal{C})(\mathcal{C}' - \sigma(\mathcal{C}))$ -arista, cuya imagen bajo σ sería una $\mathcal{C}(G - F - \mathcal{C})$ -arista lo que es imposible \square

Afirmación 2. *$G-F$ tiene a lo más dos componentes.*

Demostración. Sea \mathcal{C} una componente de $G - F$. La subgráfica de G generada por los vértices de $\mathcal{C} \cup \sigma(\mathcal{C})$ es conexa y regular de grado 4. Por lo tanto $\mathcal{C} \cup \sigma(\mathcal{C}) = V(G)$. \square

Sea G_0 la gráfica obtenida a partir de $G - F$ al identificar cada vértice v con v' y p la proyección natural de $G - F$ en G_0 . Puede verificarse fácilmente que p es un 2-cubrimiento debido a que G no tiene tetraedros. La gráfica cubierta, $G_0 \simeq G / \sim$, es una gráfica

regular de grado 3. Como cada $\{v, v'\}$ es un bloque de imprimitividad de \mathcal{G} , entonces \mathcal{G} actúa transitivamente en G_0 .

Por el Teorema 4.2, G_0 es isomorfo a M_n , $n \geq 2$ ó a $C_n \square P_2$, $n \geq 3$.

Caso 1. $G_0 \simeq M_n$, $n \geq 2$.

(El caso en que $n = 2$ ya está visto pues $M_2 \simeq K_4$)

1.1 $G - F$ tiene dos componentes.

En este caso cada una de las componentes de $G - F$ es isomorfa a M_n y $G \simeq M_n \square P_2$.

1.2 $G-F$ es conexa

1.2.1 $n > 2$

Sea $C = \{c_0, \dots, c_{2n-1}\}$ el ciclo de longitud $2n$ en M_n . Las aristas de la forma $c_i c_{i+1}$ están en un sólo cuadrado, mientras que las de la forma $c_i c_{i+n}$ están en 2. Luego todo automorfismo de G_0 deja invariante a C . Como \mathcal{G} actúa transitivamente en G_0 , entonces existe una subafinación δ e induce una subafinación $\hat{\delta}$ de G . Entonces $\delta(v_i) = v_{i+1}$ para toda $0 \leq i \leq n - 1$. Si C se levantara a un ciclo de $4n$ entonces $G - F$ sería un circulante 3 regular y por lo tanto $G - F \simeq C_{4n}(1, 2n)$ lo cual no es posible pues los saltos de longitud $2n$ están en F . Si C se levanta a ciclos disjuntos de longitud $2n$ es fácil ver que G es del tipo *iii*)

1.2.2 $n = 3$. En este caso $G_0 \simeq M_3 \simeq K_{3,3}$

Supongamos que cada hexágono se levanta a dos hexágonos y que el hexágono $\mathbf{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0)$ se levanta a los hexágonos $\mathbf{w} = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_0)$ y

$\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_0)$ donde $p(w_i) = p(u_i) = v_i$. Como $G - F$ es conexa entonces existe una vw -arista. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que es la w_0u_3 es esa arista. Si levantamos el hexágono \mathbf{v} a partir de w_0 se obtiene el hexágono $(w_0, u_3, u_4, u_5, w_2, w_1, w_0)$. Así, $u_2w_5 \in A(G)$ y como G es subafín transitiva entonces G es del tipo *iii*).

Supongamos ahora que \mathbf{v} se levanta a un ciclo de longitud 12. Las aristas restantes de G_0 forman un 1-factor de G_0 el cual se levanta a un 1-factor de $G - F$. Es fácil ver que $G - F$ es isomorfo a una de las siguientes gráficas:

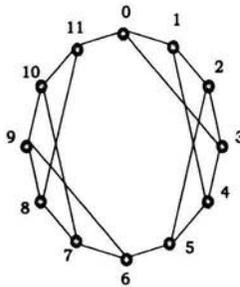


figura a)

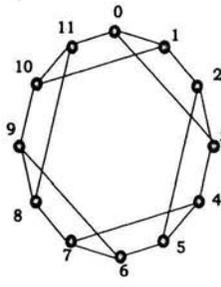


figura b)

En el primer caso, figura a), las aristas entre $[0, 11]$, $[5, 6]$, son las únicas que están en un sólo cuadrado de G . Luego el conjunto $\{0, 11, 5, 6\}$ es invariante bajo $Aut(G)$ lo que es imposible ya que G es subafín transitiva.

Si $G - F$ es isomorfa a la gráfica de la figura b), también puede dibujarse como se ve en la figura c). De allí se sigue que G es del tipo *iii*)

Caso 2 $G_0 \simeq C_n \square P_2$, $n \geq 3$

2.1 $G - F$ tiene dos componentes.

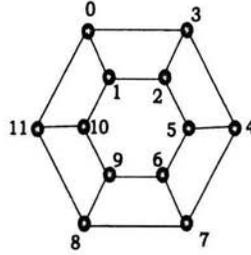


Figura c)

En este caso $G - F$ es la union disjunta de dos copias isomorfas de $C_n \square P_2$ entonces $G \simeq C_n \square P_2 \square P_2 \simeq C_n \square C_4$ entonces G es del tipo *ii*)

2.2 $G - F$ tiene una componente

2.2.1 $n > 4$ Sean $C_0 = \{x_{0,0}, \dots, x_{n-1,0}\}$ y $C_1 = \{x_{0,1}, \dots, x_{n-1,1}\}$ las dos copias isomorfas a C_n en G_0 entonces $x_{i,0}x_{i,1} \in A(G_0)$. El único automorfismo δ que manda a C_0 en C_1 esta definido por $\delta(x_{i,0}) = x_{i,1}$ y $\delta(x_{i,1}) = x_{i,0}$. Además el único automorfismo γ que manda a C_0 en C_0 es tal que $\gamma(x_{i,0}) = x_{i+1,0}$ y $\gamma(x_{i,1}) = x_{i+1,1}$. Así que tanto $\hat{\gamma} = p^{-1}\gamma$ como $\hat{\delta} = p^{-1}\delta$ están en \mathcal{G} . Ya que $\hat{\delta} \in \text{Aut}(G - F)$, C_0 y C_1 se levantan a ciclos de igual longitud la cual debe ser $2n$ de otro modo, $G - F$ sería disconexa. Considerando el automorfismo $\hat{\gamma}$ se concluye que $G - F$ es un cilindro y G es del tipo *iii*).

2.2.2 $n = 4$: En este caso G_0 es el cubo.

Si todos los cuadrados se levantan a cuadrados entonces, por el Teorema 3.1, se tiene que todos los automorfismos de G_0 son levantables a $G - F$. Procediendo como en el caso 2.2.1 concluimos que G es del tipo *iii*)

Sea C un cuadrado que se levanta a un octágono en $G - F$.

Supongamos que el cuadrado C' opuesto a C en G_0 se levanta a dos cuadrados en $G - F$. Notemos que C (*resp.* C') se levanta en \mathbf{G} a una copia de H (*resp.* H') de M_4 (*resp.* Q_3). Por la conexidad de $G - F$, debe existir una HH' -arista vw . Como v está en exactamente dos cuadrados de H y w está en exactamente tres cuadrados de H' , se sigue que v y w están en un número distinto de cuadrados en G lo que es imposible.

Luego C' se levanta también a un octágono. C y C' se levantan a dos octágonos que inducen en G dos gráficas H y H' isomorfas a M_4 (notese que G no tiene triángulos). Las restantes aristas de G (las cuales son HH' -aristas) forman un 1-factor de G . Como G es subafín-transitiva, no es difícil ver que G es del tipo *ii*)

2.2.3 $n = 3$.

En este caso se trabaja análogamente al caso anterior y G es del tipo *ii*)

□

Teorema 4.3. *Sea G una gráfica subafín-transitiva regular de grado 4, entonces:*

i) G es un circulante

ii) $G \simeq M_n \square P_2$, $n \geq 2$

iii) G tiene la forma:

$$V(G) = \{x_{i,j} : 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1\},$$

$$A(G) = \{x_{i,j}x_{i,j+1} : \forall i, \forall j\}$$

$$\cup \{x_{i,j}x_{i+1,j} : 0 \leq i \leq m-2, 0 \leq j \leq n-1\}$$

$$\cup \{x_{m-1,j}x_{0,j+t} : 0 \leq j \leq n-1\}$$

donde $m \geq 3$, $0 \leq t \leq n-1$ y los índices de la última estructura están tomados módulo m y n respectivamente.

Demostración. Sea G una subgráfica subafín transitiva de grado 4. Supongamos que G tiene una subgráfica $H \simeq K_4$. Si G es localmente H entonces $G \simeq K_5$ que es un circulante, de otra forma sabemos por el capítulo 3 que G es localmente $K_3 \dot{\cup} K_1$ y es fácil ver que en este caso $G \simeq K_4 \square P_2$ que es del tipo *ii*). Así que asumiremos que G no tiene subgráficas isomorfas a K_4 . G es una gráfica localmente H , sabemos que la única gráfica localmente C_4 es el octaedro (tipo *i*)); si G es localmente P_4 es in circulante con saltos de 1 y 2; por último, si es localmente $2K_2$ por el Lema 4.1 $G \simeq C_3 \square C_3$ que es del tipo *iii*). Si G es localmente $H \simeq K_2 \cup K_2^c$ entonces cada vértice está en un sólo triángulo y el conjunto de triángulos forma un sistema de imprimitividad.

G no tiene triángulos.

Sea σ una subafinación no trivial de G . Si el número de órbitas de σ en $V(G)$ es una sola, entonces por definición G es un circulante.

Tenemos los siguientes casos:

Caso 1 Todas las órbitas de σ son de orden 2.

Si $u \in V(G)$, denotamos por u' al vértice que está en la misma órbita que u . Si para alguna afinación γ de G $v' \neq w$ donde $v = \sigma(x)$ y $w = \sigma(x')$ entonces $vw \in A(G)$, $v'w' \in A(G)$ y $xw', x'v' \in A(G)$. Se sigue que $G[x, x', v, v', w, w'] \simeq K_{3,3}$ y por el Lema 4.2 $G \simeq M_n \square P_2$ ó $K_{4,4}$.

Si no existe tal afinación, las órbitas de σ forman un sistema de bloques de imprimitividad de $\text{Aut}^1(G)$ en $V(G)$ y por el Lema anterior G es $M_n \square P_2$ ó un circulante o tiene la forma *iii*).

Caso 2 Existen σ -órbitas son de orden 2 pero existe alguna de estas órbitas de orden mayor que 2.

Como G es conexa entonces existe una órbita de longitud 2 adyacente a otra de longitud mayor.

a) Si $\{x, x'\}$ y $\{y, \sigma(y), \sigma^2(y), \sigma^3y\}$ son dos órbitas adyacentes con $xy \in A(G)$. Entonces $x'\sigma^n(y) \in A(G)$ si n es impar y $x\sigma^n(y) \in A(G)$ si n es par. Así se tiene que $G \simeq K_{4,4}$.

b) Si $\{x, x'\}$ y $C = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ son dos órbitas adyacentes donde $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ (i módulo 6), y $xx_0 \in A(G)$. Se tiene que $xx_i \in A(G)$ si i es par y $x'x_i \in A(G)$ si i es impar.

Sea \vec{C} la orientación de C donde $x_i\sigma(x_i) \in F(\vec{C})$. Sea y_i el otro vecino de x_i y $\vec{Y} = \{y_i\}$. Ya que $y_{i+1} = \sigma(y_i)$, $y_iy_{i+1} \in A(G)$. Ya que es σ -órbita de y_0 determina un ciclo dirigido \vec{Y} que tiene a las parejas ordenadas y_iy_{i+1} como flechas. La función f de \vec{C} en

\vec{Y} tal que $f(x_i) = y_i$ es un epimorfismo entre ciclos dirigidos lo que implica que \vec{Y} es isomorfo a \vec{C}_0 , \vec{C}_3 ó \vec{C}_6 . El segundo caso es imposible pues G no tiene triángulos.

Si $\vec{Y} \simeq \vec{C}_0$ G es el complemento de un 1-factor en $K_{5,5}$ y se verifica fácilmente que $G \simeq C_{10}(1, 3)$.

Si $\vec{Y} \simeq \vec{C}_6$. Probaremos que x y x_0 no pertenecen al mismo número de cuadrados de G (9 y 7 respectivamente) lo que es imposible.

Notemos que $C \cup \{x, x'\}$ inducen en G a una gráfica H isomorfa a un cubo donde dos de sus vértices opuestos x e y son los únicos que son adyacentes. Para contar en cuantos cuadrados está x en G basta contar cuantas trayectorias de longitud 3 hay de x a x' , que son 6, y los cuadrados del cubo que contienen a x , que son 3. Es decir, x está en 9 cuadrados en G . Para contar los cuadrados en los que está x_0 hay que contar los que pertenecen al cubo que son 3, los que pasan por la arista xx' que son 2 y los contengan vértices de \vec{Y} que son 2.

Caso 3 Todas las órbitas son de orden al menos 4

Sea v un vértice de G . Si sus vecinos están en la órbita de σ que lo contiene entonces G es un circulante.

Si tres de los vértices adyacentes a v están en su órbita, entonces la órbita de v induce una subgráfica H' isomorfa a M_n y como G es subafín transitiva existe un vértice en H' que es extremo de una arista subafín recorrible hacia el complemento de H . Se sigue que $G \simeq M_n \square K_2$.

□

Capítulo 5

Afinaciones

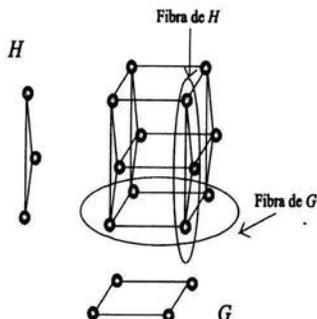
5.1. Producto cartesiano y automorfismos afines

En esta sección estudiaremos las relaciones que existen entre el grupo generado por los automorfismos afines que actúan en las gráficas G y H con los que actúan correspondientemente en $G \square H$.

Sean G y H dos gráficas conexas. La *fibra* de G (*resp.* H) sobre el vértice $d \in V(H)$ (*resp.* $c \in V(G)$) es la subgráfica de $G \square H$ inducida por los vértices de la forma (x, d) (*resp.* (c, x)) donde x es un vértice de G (*resp.* H). A esta fibra la denotaremos por G_d (*resp.* H_c).

Observación 5.1. *Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ son dos vértices de $G \square H$ que no están en una misma fibra de G o de H y existe algún vértice (x_3, y_3) de $G \square H$ tal que*

$$(x_3, y_3) \text{ ady}_{G \square H} (x_1, y_1) \quad \text{y} \quad (x_3, y_3) \text{ ady}_{G \square H} (x_2, y_2)$$



entonces

$$(x_3, y_3) = (x_1, y_2) \quad \text{o} \quad (x_3, y_3) = (x_2, y_1)$$

En las siguientes proposiciones σ es una afinación de $G \square H$.

Proposición 5.1. Si $\sigma(H_{\tilde{c}}) = H_{\tilde{c}}$ para algún vértice \tilde{c} de G entonces

i) $\sigma(H_c) = H_c$ para toda $c \in V(G)$

ii) $\sigma = id_G \square \delta$ para alguna afinación δ de H

Demostración. Para demostrar i), basta probar que $\sigma(H_u) = H_u$ siempre que $\sigma(H_{\tilde{c}}) = H_{\tilde{c}}$ y $\tilde{c} \text{ ady}_{G \square H} u$, ya que G es conexa. Sea \tilde{c} un vértice de G tal que $\sigma(H_{\tilde{c}}) = H_{\tilde{c}}$ y tomemos $\tilde{u} \in V(G)$ tal que $\tilde{c} \text{ ady}_G \tilde{u}$. Si $d \in V(H)$ entonces tenemos que

$$(\tilde{c}, d) \text{ ady}_{G \square H} (\tilde{u}, d)$$

Como σ es una afinación de $G \square H$ entonces

$$(\tilde{c}, d) \text{ ady}_{G \square H} \sigma(\tilde{c}, d)$$

Debido a que $(\tilde{c}, d) \in H_{\tilde{c}}$ se tiene que $\sigma(\tilde{c}, d) = (\tilde{c}, d')$ para algún d' adyacente a d en H . Ya que (\tilde{c}, d) y (\tilde{u}, d) son adyacentes en $G \square H$ se sigue que

$$\sigma(\tilde{c}, d) \text{ ady}_{G \square H} \sigma(\tilde{u}, d)$$

y como $\sigma(\tilde{u}, d) \neq (\tilde{c}, d)$ obtenemos $\sigma(\tilde{u}, d) = (\tilde{u}, d')$ (observación 5.1), lo que implica que $\sigma(H_{\tilde{u}}) = H_{\tilde{u}}$.

Para *ii*) solo hay que notar que si $(c, d) \in V(G \square H)$ entonces $\sigma(c, d) = (c, d')$ para algún d' adyacente a d . Sea $\delta : V(H) \rightarrow V(H)$ definida de modo que $\sigma(c, d) = (c, \delta(d))$. Claramente $\delta \in \text{Aut}(H)$, más aún, δ es una afinación.

□

Proposición 5.2. *Si $\sigma(H_{\tilde{c}}) \cap H_{\tilde{c}} = \emptyset$ para algún vértice \tilde{c} de G entonces*

i) $\sigma(G_d) = G_d$ para todo vértice d de H

ii) $\sigma = \gamma \square id_H$ para alguna afinación γ de G .

Demostración. Sea $F = \{c \in G : H_c \cap \sigma(H_c) = \emptyset\}$. Este conjunto es distinto del vacío pues por lo menos $\tilde{c} \in F$. Probaré que $F = V(G)$.

Supongamos que $V(G) \setminus F \neq \emptyset$. Como G es conexa existen c' y c'' tales que $c' \in F$, $c'' \in V(G) \setminus F$ y $c \text{ ady}_G c'$. Luego existen los vértices $d', d'' \in V(H)$ tales que $\sigma(c'', d') = (c'', d'')$ además $d' \text{ ady}_H d''$ ya que σ es una subafinación. Como c' y c'' son adyacentes en G entonces

$$(c', d') \text{ ady}_{G \square H} (c'', d')$$

lo cual implica que

$$\sigma(c', d') \text{ ady}_{G \square H} \sigma(c'', d')$$

es decir

$$\sigma(c', d') \text{ ady}_{G \square H} (c'', d'')$$

Por la observación 5.1 se tiene que $\sigma(c', d') = (c'', d')$. Sin embargo, si nos fijamos en el vértice (c', d'') que es adyacente en $G \square H$ a (c', d') tenemos que

$$(c'', d') \text{ ady}_{G \square H} \sigma(c', d'') \text{ ady}_{G \square H} (c', d'')$$

Obtenemos que $\sigma(c', d'') = (c'', d'')$ y por lo tanto

$$\sigma(c'', d') = (c'', d'') = \sigma(c', d'')$$

lo cual, no es posible y por lo tanto $F = V(H)$.

Para demostrar *i*) basta probar que $\sigma(G_d) = G_d$ para alguna $d \in V(H)$. Sea $(c, d) \in G_d$ entonces por lo anterior $\sigma(c, d) = (c', d)$ para algún vértice c' adyacente a c en G . Por lo tanto $G_d \subseteq \sigma(G_d)$ pero como G es finita entonces se cumple la igualdad.

Finalmente, *ii*) se sigue de la Proposición 5.1.

□

Proposición 5.3. *Si existe algún vértice u de $G \square H$ tal que $u, \sigma(u), \sigma^2(u) \in H_{\tilde{c}}$ para algún vértice \tilde{c} de G entonces $\sigma = id_{G \square H}$ para alguna afinación δ de H .*

Demostración. Sea $u = (\tilde{c}, d)$ tal que $\sigma(u) = (\tilde{c}, d')$ y $\sigma^2(u) = (\tilde{c}, d'')$ con d' adyacente a d y d'' en H . Demostraremos que $\sigma(G'_d) \cap G'_d = \emptyset$.

Sea c' adyacente a \tilde{c} como (c', d') $ady_{G \square H}(\tilde{c}, d')$ se tiene que

$$\sigma(c', d') \text{ } ady_{G \square H} \sigma(\tilde{c}, d') = (\tilde{c}, d'')$$

y por ser σ una afinación

$$\sigma(c', d') \text{ } ady_{G \square H} (c', d')$$

Por la observación 5.1 ya que $\sigma(u) = (\tilde{c}, d')$ sigue que

$$\sigma(c', d') = (c', d'')$$

y análogamente, usando σ^{-1} en lugar de σ obtenemos que

$$\sigma(c', d) = (c', d')$$

Como G es conexa $\sigma(G'_d) \cap G'_d = \emptyset$. El resultado se sigue ahora de la Proposición 5.2.

□

Teorema 5.1. Sean G y H dos gráficas conexas tales que existe un automorfismo afín σ de $\tilde{G} = G \square H$ que no es cartesiano con respecto a G y H entonces existen las gráficas conexas G' y H' tales que $G \cong G' \square K_2$ y $H \cong H' \square K_2$.

Demostración. Supongamos que σ es un automorfismo afín que no es cartesiano con respecto a G y H . Entonces G y H tienen por lo menos dos vértices. Sean $c \in V(G)$ y

$$A_c = \{ u \in H_c : \sigma(u) \in H_c \}$$

Por las proposiciones 5.1 y 5.2 tenemos que $A_c \neq \emptyset$ y $A_c \neq H_c$. Sea

$$B_c = H_c \setminus A_c = \{ u \in H_c : \sigma(u) \neq H_c \}$$

Por la Proposición 5.3 $\sigma(A_c) \subseteq B_c$. Supongamos que $\sigma(A_c)$ está contenido propiamente en B_c . Entonces por la conexidad de H existe un vértice $w \in B_c \setminus \sigma(A_c)$ adyacente a un vértice v que está en A_c o en $\sigma(A_c)$. Si $w = (c, d)$ y $v = (c, d')$

- 1) Si $v \in A$ se tiene que $\sigma(w) = (c', d)$ y $\sigma(v) = (c, d'')$ por lo que $\sigma(w)$ no es adyacente a $\sigma(v)$ lo cual no es posible.
- 2) $v \in \sigma(A_c)$ entonces por la Proposición 5.3 $\sigma^{-1}(w) \notin \sigma(A_c)$ y $\sigma^{-1}(w) \notin A$ pero $\sigma^{-1}(v) \in A_c$ entonces $\sigma^{-1}(w)$ no es adyacente a $\sigma^{-1}(v)$ lo cual es imposible.

Como $B_c = \sigma(A_c)$ dos vértices son adyacentes en B_c si y solamente si son adyacentes en A_c . Entonces, sea G' la gráfica inducida por los vértices de A_c $H \simeq G' \square K_2$. De igual manera se prueba que $G \simeq G' \square K_2$.

□

Observemos que la Proposición anterior implica que C_4 es un factor de \tilde{G} , es decir que $G \square H \simeq (G' \square H') \square C_4$

Proposición 5.4. *El producto cartesiano $G \square H$ de dos gráficas es afín-transitiva si y solamente si G y H son afín transitivo*

Demostración. Supongamos que $G \square H$ es afín-transitiva. Notemos que $H \simeq (P_2)^s \square H'$ para alguna $s \geq 0$ donde H' es una gráfica que no tiene como factor a P_2 . Sea $G' \simeq G \square (P_2)^s$ se tiene que

$$G \square H \simeq G' \square H' = W.$$

Si H' no fuese afín-transitiva entonces W tiene una afinación que no es cartesiana respecto a φ, G' y H' donde φ es el isomorfismo entre $G' \square H'$ y W . Entonces por el Teorema 5.1 $H' \simeq P_2 \square H''$ lo que no es posible y por lo tanto H' es afín transitiva y por la Proposición 3.12 también H lo es. Análogamente se demuestra que G es afín transitiva.

Recíprocamente, supongamos que G y H son afín-transitivas. Sean $(u, v), (u', v') \in V(G \square H)$, $\{u = u_0, u_1, \dots, u_n = u'\}$ una uu' -trayectoria de aristas afín recorribles de G con σ^i el automorfismo afín que manda a u_{i-1} a u_i , $\{v = v_0, v_1, \dots, v_m = v'\}$ una vv' -trayectoria de aristas afínmente recorribles de H con γ^j la afinación tal que $\gamma^j(v_{j-1}, v_j)$. Formamos una $(u, v)(u', v')$ trayectoria de $G \square H$:

$$T = \{(u_0, v_0), (u_1, v_0), \dots, (u_n, v_0), (u_n, v_1), \dots, (u_n, v_m)\}$$

tal que $\sigma_1^i(u_{i-1}, v_0) = (u_i, v_0)$ y $\sigma_2^j(u_n, v_{j-1}) = (u_n, v_j)$. Es decir T es una $(u, v)(u', v')$ -trayectoria en $AR(G \square H)$

□

5.2. Gráficas unívocamente afín-transitivas

Proposición 5.5. *Sean G y H dos gráficas afín-transitivas. $G \square H$ es unívocamente afín-transitivo entonces G y H son unívocamente afín-transitivas.*

Demostración. Supongamos la hipótesis se cumple y que G no es

unívocamente afín-transitiva.

Caso 1 Si G es fuertemente afín transitiva entonces existen un par de vértices adyacentes c y c' en G y dos automorfismos afines distintos de G σ y γ tales que $\sigma(c) = c'$ y $\gamma(c) = c'$ entonces σ_1 y γ_1 son dos automorfismos de $G \square H$ tales que $\sigma_1(c, d) = (c', d)$ y $\gamma_1(c, d) = (c', d)$ para todo $d \in V(H)$ lo que contradice que $G \square H$ sea unívocamente afín-transitiva.

Caso 2 Si G no es fuertemente afín-transitiva entonces existen $c, c' \in V(G)$ adyacentes tales que no existe un automorfismo afín que mande uno en el otro. Como G es afín-transitiva sea $\{c = c_0, c_1, \dots, c_n = c'\}$ una trayectoria en $AR(G)$ σ^i es el automorfismo afín tal que $\sigma_i(c_{i-1}) = c_i$. Si nos fijamos en la fibra $G_d(c, d)$ $ady_{G \square H}(c', d)$, por hipótesis existe un único automorfismo afín σ el cual no puede ser cartesiano. Así, por la Proposición 5.3 $\sigma(c', d) = (c', d')$ donde $d' ady_H d$. Ahora bien, $\sigma(c_{n-1}, d) = (c_{n-1}, d')$ pues $\sigma(c_{n-1}, d)$ tiene que ser adyacente a (c', d') y no puede ser (c', d) pues los automorfismos afines distintos σ y σ_1^n mandarían a (c_{n-1}, d) en (c', d) . Entonces siguiendo con el proceso $\sigma(c_{i-1}, d) = (c_{i-1}, d')$ para toda i , en particular $\sigma(c, d) = (c, d')$ lo cual da una contradicción.

□

Teorema 5.2. *Una gráfica G es unívocamente afín-transitiva si y solamente si en la factorización cartesiana en primos de G todos los factores son unívocamente afín transitivos y a lo más un factor es isomorfo a P_2*

Demostración. Sea G_1, \dots, G_n los factores cartesianos primos de G . Supongamos que G es unívocamente afín-transitiva y sea G^i el producto de los factores de G distintos de G_i . Se sigue que $G \simeq G_i \square G^i$. Se tiene de la Proposición 5.4 G_i y G^i son afín transitivas y de la Proposición 5.5 que G_i es unívocamente afín-transitiva. Por otro lado, si dos de los factores de G son isomorfos a P_2 entonces $G \simeq C_4 \square G''$ donde G'' es isomorfa al producto de los demás factores cartesianos de G . Como C_4 es afín transitiva pero no unívocamente afín transitiva G no es unívocamente afín-transitiva.

Recíprocamente, supongamos que todos los factores de G son unívocamente afín transitivos y a lo más uno de ellos es isomorfo a P_2 por la Proposición 3.14, G es fuertemente afín transitiva, más aún todas las aristas de G son recorribles por automorfismos cartesianos. Además si dos los automorfismos afines cartesianos σ y σ' satisfacen que $\sigma(u) = \sigma'(u)$ entonces $\sigma = \sigma'$. Finalmente, por el Teorema 5.1 todos los automorfismos de G son cartesianos, se sigue que G es unívocamente afín-transitiva. \square

Corolario 5.1. *El producto cartesiano de ciclos $C_{n_1} \square C_{n_2} \square \dots \square C_{n_k}$ es unívocamente afín transitivo si y solamente si no hay ciclos de tamaño 4 involucrados*

Corolario 5.2. *Todo grupo abeliano finito de orden no divisible entre 4 admite una gráfica de Cayley unívocamente afín-transitiva.*

Demostración. Sea \mathcal{G} un grupo abeliano finito de orden no divisible entre 4. \mathcal{G} se puede escribir como producto \mathbb{Z}_p . Como no es divisible entre cuatro a lo más existe en esta expresión una copia isomorfa al grupo \mathbb{Z}_2 . Cada uno de estos grupos tiene una gráfica de Cayley

isomorfa a un ciclo de longitud p . Por el Teorema anterior el producto de todos esos ciclos es unívocamente afin-transitivo. \square

Bibliografía

- [1] M.A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Springer-Verlang, New York, 1988
- [2] J.D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation Groups*, Springer-Verlang, New York, 1996
- [3] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer-Verlang, New York, 2001
- [4] P. Hell, Graphs with given neighborhood, I. In Proc. Colloque Int. CNRS (Orsay, 1976), (1978)
- [5] W. Imrich, S. Klárzar, *Product Graphs. Structure and Recognition*, Jhon Wiley & Sons INC., 2000
- [6] T. Pisanski, T.W. Tucker, B. Zgrablić, Strongly adjacency-transitive graphs and uniquely shift-transitive graphs, *Discrete Math.* 224 (2002) 389 – 398
- [7] B. Zgrablić, On adjacency-transitive graphs, *Discrete Math.* 182 (1998), 321 – 332
- [8] V. Neumann-Lara, Clique Divergence in graphs *Coloquia Mathematica Societatis János Bolyai* 25(1978)563 – 169

- [9] V. Neumann-Lara, On Clique-Divergent graphs *Colloques internationaux C.N.R.S* 226(1976)113 – 115