00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

ACCIONES DE GRUPOS EN SISTEMAS DINAMICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

P R E S E N T A

M. EN C. MANUEL CRUZ LOPEZ

DIRECTORES DE TESIS: DR. XAVIER GOMEZ-MONT AVALOS
DR. SANTIAGO ALBERTO VERJOVSKY SOLA

MÉXICO, D. F. ENERO, 2004

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

A Casandra:

Principio y fin de mi existir.

Agradezco profundamente a:

Mis padres: Rosalino y Francisca, por el apoyo incondicional que me han brindado durante toda mi vida.

Mis hermanos: Moisés, Rodolfo, Rosalino y Rosa Gisela, por todo lo que han significado en mi vida.

Rosalba: Por la paciencia y confianza que siempre ha tenido.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: MANUEL CRUZ LÓPEZ
FECHA: 20 ENERO 2004
FIRMA:

Agradecimientos

Quisiera aprovechar este espacio para manifestar mi agradecimiento a las personas e instituciones que han estado involucradas en este largo andar.

Por principio de cuentas, quiero agradecer al Instituto de Matemáticas de la UNAM, por brindarme un espacio propicio para desarrollar parte del trabajo. A la Facultad de Matemáticas, de la Universidad de Guanajuato, por el apoyo y las facilidades otorgadas durante el último año y al Centro de Investigación en Matemáticas, por el espacio y el ambiente adecuados para realizar la parte final del trabajo.

A mis asesores: Dr. Xavier Gómez-Mont Ávalos y Dr. Alberto Verjovsky, con quienes he aprendido que la disciplina, la pasión y el esfuerzo son los ingredientes esenciales en el quehacer matemático.

A mis asesores no-oficiales: Dra. Laura Hidalgo Solís, quien me acompañó y orientó durante los arduos dias de la Maestría y al Dr. José Antonio Seade Kuri, quien me brindó su apoyo abierto durante el Doctorado y me ha brindado desde entonces su amistad.

A los sinodales: Dr. Santiago López de Medrano, Dr. Ernesto Rosales González, Dr. Guillermo Sienra Loera y Dr. Pedro Luis Del Angel Rodríguez por los comentarios siempre interesantes y sus sugerencias para mejorar esta presentación.

Finalmente quiero agradecer a mis cuates, sin los cuales, este habría sido un camino verdaderamente dantesco. Los imateños: El Mitolín, El Armandín, Gloria, Montserrat, Ivette, Elsa, Araceli, Gaby, Jorge Luis, Luis, Edgar, Cruz, Elhoim, Eratóstenes, El Pañales, Herbert, Juan Pablo, Pablo, Octavio. Los cimateños: Claudia, Matilde, Patricia, El Vicas, Abel, Carlos, Elifalet, Mirabal.

Índice general

Introducción general

El objetivo básico de este trabajo es presentar dos instancias importantes de acciones de grupos en Sistemas Dinámicos.

En general, un Sistema Dinámico está determinado al especificar los siguientes datos:

1. Un espacio de fase X;

2. Un grupo G que actúa en el espacio y cuyos elementos parametrizan el 'tiempo'; y

3. Un grupo de transformaciones del espacio de fase.

En la Teoría Clásica de Sistema Dinámicos el grupo puede ser el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, en cuyo caso, hablamos de Sistemas Dinámicos Discretos, o bien, este grupo puede ser el conjunto de números reales $\mathbb{R}$, y en este caso, hablamos de Sistemas Dinámicos Continuos. En contextos más amplios, pueden aparecer grupos topológicos abstractos más generales. En cualquier caso, lo que interesa es describir el comportamiento de las 'órbitas' de los elementos de X bajo la acción del grupo correspondiente.

En este trabajo presentaremos dos instancias que ilustran este tipo de acciones. En la primera parte, el grupo que aparece es $\mathbb{Z}$ y las transformaciones que ocurren son transformaciones conformes por pedazos definidas en la esfera de Riemann. En este caso probamos un Teorema de Clasificación de Órbitas Periódicas, el cual nos permite describir completamente el comportamiento dinámico de este tipo de transformaciones.

En la segunda parte, el grupo que aparece es el grupo de Adèles de $\mathbb{Q}$, el cual es un grupo topológico, abeliano, localmente compacto, pero no-localmente conexo. Estudiando la acción de este grupo en el espacio de funciones continuas definidas de este grupo en si mismo, daremos una generalización de la teoría de funciones casi-periódicas de Bohr-von Neumann y de la noción de promedio invariante de von Neumann.

En las introducciones de las partes correspondientes haremos la descripción detallada de estas acciones.

Parte I

ACCIONES DE GRUPOS DISCRETOS:

ITERACIÓN DE FUNCIONES CONFORMES DISCONTINUAS EN LA ESFERA DE RIEMANN

INTRODUCCIÓN

El objetivo básico de esta primera parte de la tesis es describir la dinámica de una familia de funciones a dos parámetros, cuyos elementos son automorfismos conformes por pedazos de la esfera de Riemann.

En la siguiente figura 'simétrica', observamos las regiones de atracción de atractores periódicos. De hecho, probamos que los únicos conjuntos ω-límites son ciclos periódicos. Esto nos muestra que la conformalidad de las funciones es más 'fuerte' que las discontinuidades.

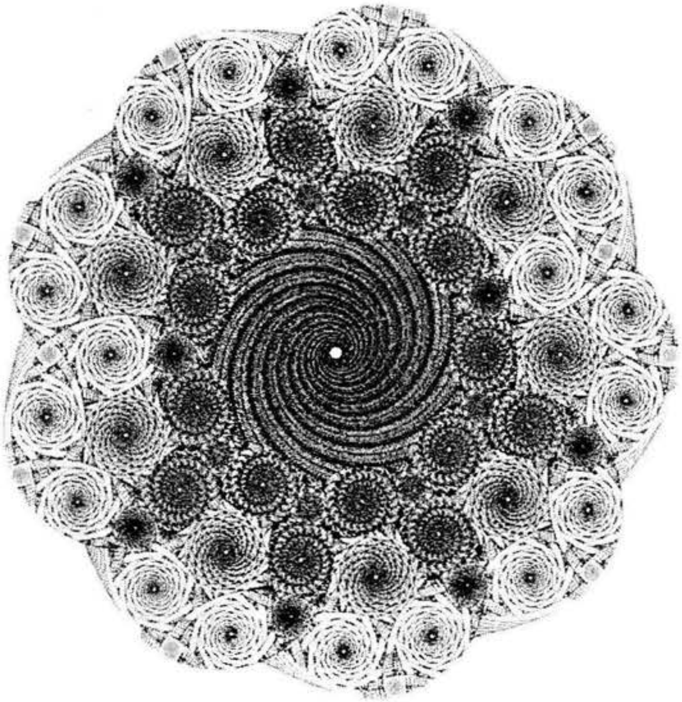

Figure 1: Dinámica de $F_{\alpha,\theta}$.

Como se muestra en Ilyashenko [Ily], el estudio de las ecuaciones diferenciales polinomiales en el plano complejo se ha desarrollado desde inicios del siglo XX en el intento de resolver el problema 16 de Hilbert, que pregunta por el número y la localización de los ciclos límite de campos vectoriales polinomiales reales de grado n. La complexificación de estos campos vectoriales reales determina una ecuación diferencial polinomial de la forma

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)}, \qquad P, Q \in \mathbb{C}[z,w], \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

En el estudio de estas ecuaciones diferenciales polinomiales una idea es restringir $z \in \mathbb{C}$ a moverse sólo a lo largo de una trayectoria cerrada γ, que no contenga a la imagen de un punto singular $P = Q = 0$. Las soluciones son entonces funciones $w(\widetilde{z}), \widetilde{z} \in \widetilde{\gamma}$, donde $\widetilde{\gamma}$ es un levantamiento de γ. La aplicación de monodromía será, en este caso, una función que es holomorfa en ciertos dominios con frontera 'regular' $D_1, D_2, ..., D_n$. Esta función admite una extensión continua a la frontera ∂D_i y estas extensiones son distintas en $\partial D_i \cap \partial D_j$, si $i \neq j$, dando origen a una discontinuidad.

Denotemos por $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ al disco unitario en el plano complejo y por $D = \overline{D(2,1)}$ al disco cerrado con centro en 2 y radio 1. Estamos interesados en estudiar la dinámica de la siguiente aplicación conforme por pedazos:

$$F_{\alpha,\theta}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \notin D \\ g(z) & \text{si } z \in D \end{cases},$$

donde

$$f(z) = \alpha z \qquad \text{y} \qquad g(z) = \alpha(\exp(i\theta)z + 2(1 - \exp(i\theta))),$$

con $\alpha \in \mathbb{D}$ y $\theta \in S^1$. Por definición, $F_{\alpha,\theta} : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es conforme y biyectiva en $D \cup (\widehat{\mathbb{C}} \setminus D)$, pero discontinua en ∂D. Esta aplicación primero rota al disco D por un ángulo θ alrededor de 2 y luego aplica una contracción via multiplicación por α.

Asociamos a esta aplicación los siguientes dominios de 'irregularidad' y 'regularidad', que llamamos, respectivamente, la *telaraña* y el conjunto *regular*

$$Spid(F_{\alpha,\theta}) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} F_{\alpha,\theta}^{-n}(\partial D)} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}(F_{\alpha,\theta}) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus Spid(F_{\alpha,\theta}).$$

El primer análisis importante que se debe hacer es el de estudiar el conjunto de acumulación de la telaraña asociada a $F_{\alpha,\theta}$. En este caso contractante, sucede que este conjunto de acumulación consiste sólo del punto al infinito. Esto es consecuencia del siguiente:

Teorema 1.4.4 Para toda $\alpha \in \mathbb{D}$, la función $\theta \longrightarrow Spid(F_{\alpha,\theta})$ es uniformemente continua de S^1 en $H(\widehat{\mathbb{C}})$.

Aquí, $H(\widehat{\mathbb{C}})$ es el espacio métrico compacto que consiste de todos los subconjuntos cerrados de la esfera con la topología de Hausdorff.

Definición. Decimos que la telaraña asociada a $F_{\alpha,\theta}$ es *discreta* en $\mathbb{C}$ si el punto al infinito $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ es el único punto de acumulación de sucesiones de la forma $\{z_n\} \in F_{\alpha,\theta}^{-n}(\partial D)$.

Teorema 1.5.6 Si $(\alpha, \theta) \in \mathbb{D} \times S^1$, entonces $Spid(F_{\alpha,\theta})$ es discreta en $\mathbb{C}$.

Similar al Teorema de Dennis Sullivan de No Existencia de Componentes Errantes para funciones racionales definidas en la esfera de Riemann (ver Sullivan [Sul]), tenemos, como consecuencia del Teorema de Discretitud, el correspondiente Teorema de Componentes No Errantes para esta clase de transformaciones conformes por pedazos, el cual implica el Teorema de Clasificación de Órbitas Periódicas:

Teorema 1.5.11 Sea $(\alpha, \theta) \in \mathbb{D} \times S^1$. Entonces, para cada $z \in \mathbb{C}$, existe un ciclo periódico $\{z_0, ..., z_{N-1}\}$ tal que $F_{\alpha,\theta}^n(z)$ converge a $\{z_i\}$ cuando n tiende a ∞.

Finalmente queremos comentar que en Boshernitzan and Goetz [BG] se estudian transformaciones por pedazos similares definidas en el plano complejo. Ellos consideran un sistema de dos rotaciones en el plano complejo con un ángulo común de rotación. Este tipo de transformaciones generalizan a las llamadas tranformaciones de intercambio de intervalo y aparecen en diferentes contextos.

Capítulo 1

Funciones Conformes por Pedazos

1.1 Conceptos Básicos

1.1.1 Definiciones Generales

Por principio de cuentas queremos fijar la siguiente notación: Por $D(z_0, r)$ denotaremos al disco abierto con centro en z_0 y radio r. A la cerradura del disco $D(2,1)$ la denotaremos simplemente por D y al disco unitario $D(0,1)$ lo denotaremos por $\mathbb{D}$. Finalmente, a la frontera de D la denotaremos por C.

Antes de definir nuestras funciones de estudio, damos unas definiciones generales:

Definición 1.1.1. *Decimos que* $F : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ *es una* transformación conforme por pedazos *si existe una familia de subconjuntos abiertos conexos de* $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathcal{D} = \{D_n\}_{n\geq 1}$, *llamada la* región de conformalidad *de* F, *tal que*

1. $\bigcup_{n\geq 1} \overline{D_n} = \widehat{\mathbb{C}}$,

2. $F : D_n \longrightarrow F(D_n)$ *es conforme para cada* n,

3. *Para cada* $D_n \in \mathcal{D}$, F *se extiende conformemente en una vecindad de* $\overline{D_n}$ *y* $F : \overline{D_n} \longrightarrow \overline{F(D_n)}$ *es biyectiva, y*

4. ∂D_n *y* $\partial(F(D_n))$ *son curvas diferenciables por pedazos.*

Definición 1.1.2. *Sea* $F : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ *una aplicación conforme por pedazos.*

1. *Decimos que* $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ *es un* punto periódico de periodo n *de* F *si* z_0 *está en la región de conformalidad de* F *y* $F^n(z_0) = z_0$. *En este caso,*

llamamos a la órbita de z_0 bajo F, $\{z_0, F(z_0), ..., F^{n-1}(z_0)\}$, un ciclo periódico *de longitud n. Si $n = 1$, diremos simplemente que z_0 es un* punto fijo *de F.*

2. *Si z_0 es un punto fijo de F, la* componente inmediata *de atracción del punto fijo $\Omega^*(z_0)$, es la componente conexa de z_0 en la región de conformalidad de F, y consiste de todos los puntos z tales que $F^n(z) \to z_0$ cuando $z \to \infty$. La* componente completa *de atracción de z_0 es el conjunto*
$$\Omega(z_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{-n}(\Omega^*(z_0)).$$

Estamos interesados en estudiar la dinámica de la siguiente función conforme por pedazos:

$$F_{\alpha,\theta}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \notin D \\ g(z) & \text{si } z \in D \end{cases},$$

donde
$$f(z) = \alpha z, \qquad \text{y} \qquad g(z) = \alpha e^{i\theta} z + 2\alpha(1 - e^{i\theta}),$$
con $\alpha \in \mathbb{D}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Por definición, $F_{\alpha,\theta} : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es conforme y biyectiva en $\bar{D} \cup (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bar{D})$ pero es discontinua a lo largo de $C = \partial D$.

Tenemos también definida a la función inversa por pedazos de $F_{\alpha,\theta}$:

$$F^{-1}_{\alpha,\theta}(z) = \begin{cases} f^{-1}(z) & \text{si } z \notin F_{\alpha,\theta}(D) \\ g^{-1}(z) & \text{si } z \in F_{\alpha,\theta}(D) \end{cases},$$

donde

$$f^{-1}(z) = \alpha^{-1} z \qquad \text{y} \qquad g(z) = \alpha^{-1} e^{-i\theta}(z - 2\alpha(1 - e^{i\theta})).$$

1.1.2 La Partición asociada a $F_{\alpha,\theta}$

Estudiamos ahora la partición de $\widehat{\mathbb{C}}$ generada por el proceso de iteración, usando la aplicación de *itinerario* $I : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \Sigma_2$. Esta aplicación asigna a cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, un punto $I(z)$ en el espacio de sucesiones en dos símbolos $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Si $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, entonces el *itinerario* de z está dado por

$$I(z) = (a_0 a_1 \cdots),$$

donde $a_i = 1$ si $F^i_{\alpha,\theta}(z) \in D$ y $a_i = 0$ si $F^i_{\alpha,\theta}(z) \notin D$.

Si $\sigma : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2$ es el *corrimiento unilateral de Bernoulli*:

$$a = (a_0 a_1 a_2 \cdots) \mapsto \sigma(a) = (a_1 a_2 \cdots),$$

entonces, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{C}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma_2 & \longrightarrow & \Sigma_2 \end{array},$$

conmuta. Esto es,

$$I(F_{\alpha,\theta}(z)) = \sigma(I(z)), \qquad \text{para toda} \qquad z \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Escribamos ahora $P_1^0 = \widehat{\mathbb{C}} \backslash D$ y $P_2^0 = D$. Si $a_0 \in \{0,1\}$, definamos los siguientes subconjuntos de $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$I_{a_0} = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : I(z) = (a_0 * \cdots)\}.$$

Claramente, tenemos dos subconjuntos ajenos de $\widehat{\mathbb{C}}$ con frontera regular $\Lambda_0 = C$, los cuales determinan una partición Ω_0 de $\widehat{\mathbb{C}}$. Esto es,

$$\Omega_0 = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : I(z) = (0 * \cdots)\} \cup \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : I(z) = (1 * \cdots)\} = P_1^0 \cup P_2^0.$$

Por inducción en n, para cada sucesión finita de longitud $n+1$, $(a_0 a_1 \cdots a_n)$ con $a_i \in \{0,1\}$ definimos

$$P_j^n = I_{a_0 a_1 \cdots a_n} = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : I(z) = (a_0 a_1 \cdots a_n * \cdots)\}, \qquad j = 1, ..., 2^{n+1}.$$

Podemos describir este conjunto de la siguiente manera:

$$P_j^n = I_{a_0} \cap F^{-1}_{\alpha,\theta}(I_{a_1 \cdots a_n}) = I_{a_0} \cap F^{-1}_{\alpha,\theta}(I_{a_1}) \cap \cdots \cap F^{-n}_{\alpha,\theta}(I_{a_n}).$$

Luego, para cada $n \geq 1$, tenemos definida una partición Ω_n de $\widehat{\mathbb{C}}$, la cual consiste de 2^{n+1} subconjuntos ajenos como los definidos anteriormente. Por construcción, P_j^n tiene frontera regular y $P_j^n \cap P_k^n = \emptyset$ para cada $j \neq k$. También,

$$F_{\alpha,\theta | P_j^n} : P_j^n \longrightarrow F_{\alpha,\theta}(P_j^n),$$

es conforme, biyectiva y se extiende conformemente a la frontera ∂P_j^n, pero las extensiones no coinciden en $\partial P_j^n \cap \partial P_k^n$ si $j \neq k$.

Observemos que cada componente en Ω_n, contiene a alguna componente de Ω_{n+1}, de modo que Ω_{n+1} es un refinamiento de Ω_n. Denotemos por $\Omega(F_{\alpha,\theta})$ a la partición generada por esos refinamientos, i.e., intersecciones de la forma $\cap V_n$ con $V_n \in \Omega_n$. Las componentes en $\Omega(F_{\alpha,\theta})$ están formadas por puntos que tienen los mismos itinerarios. Esto es, $\Omega(F_{\alpha,\theta})$ está determinada por la relación de equivalencia: $z \sim w$ si y sólo si $I(z) = I(w)$.

De aquí vemos que la aplicación de itinerario induce una aplicación bien definida $\widetilde{I} : \Omega(F_{\alpha,\theta}) \longrightarrow \Sigma_2$ dada por $\widetilde{I}(P) = I(z)$, donde P es el átomo que contiene a z.

Si hacemos $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \cup \Lambda'_n$, donde $\Lambda'_n = \overline{F^{-n}_{\alpha,\theta}(C)}$, entonces

$$\partial\Omega_n = \Lambda_n.$$

Observemos que $\{\Lambda_n\}$ es una sucesión creciente de subconjuntos cerrados de $\widehat{\mathbb{C}}$ y que

$$\bigcup_{n\geq 0} \Lambda_n = \partial\Omega(F_{\alpha,\theta}).$$

1.2 LA TELARAÑA ASOCIADA A $F_{\alpha,\theta}$

Definimos la *telaraña* asociada a $F_{\alpha,\theta}$ por

$$Spid(F_{\alpha,\theta}) = \overline{\bigcup_{n\geq 0} F^{-n}_{\alpha,\theta}(C)}.$$

Claramente tenemos

$$Spid(F_{\alpha,\theta}) = \bigcup_{n\geq 0} \Lambda_n.$$

Definimos también el *conjunto regular* de $F_{\alpha,\theta}$ por $\mathcal{F}(F_{\alpha,\theta}) = \widehat{\mathbb{C}} \backslash Spid(F_{\alpha,\theta})$. Entonces, $\mathcal{F}(F_{\alpha,\theta}) \subset \Omega(F_{\alpha,\theta})$ consiste de los elementos de la partición que tienen interior distinto del vacío.

Observación 1.2.1. *De la definición, tenemos las siguientes propiedades:*

1. *$Spid(F_{\alpha,\theta})$ es invariante hacia atrás y $\mathcal{F}(F_{\alpha,\theta})$ es invariante hacia adelante, i.e., $F^{-1}_{\alpha,\theta}(Spid(F_{\alpha,\theta})) \subset Spid(F_{\alpha,\theta})$ y $F_{\alpha,\theta}(\mathcal{F}(F_{\alpha,\theta})) \subset \mathcal{F}(F_{\alpha,\theta})$.*

2. *Las componentes conexas de $\mathcal{F}(F_{\alpha,\theta})$ son dominios de normalidad de $\{F^n_{\alpha,\theta}\}$. Esto es, $\{F_n = F^n_{\alpha,\theta|U}\}$ es una familia normal de aplicaciones holomorfas para cada $U \in \mathcal{F}(F_{\alpha,\theta})$; en otras palabras, la familia de funciones contiene subsucesiones que convergen uniformemente con respecto a la métrica esférica, en subconjuntos compactos de U (ver Ahlfors [Ahl])*

3. *Los itinerarios son localmente constantes en el conjunto regular.*

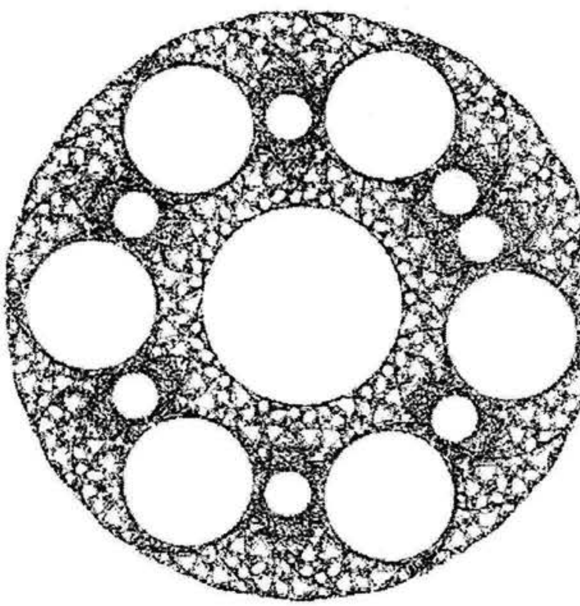

Figure 1.1: La telaraña asociada a $F_{\alpha,\theta}$.

1.3 ALGUNOS EJEMPLOS

Si $F = f$, entonces $Fix(F) = \{0, \infty\}$. Si $F = g$, entonces $Dom(F) = D$ y

$$F(z) = z \qquad \Leftrightarrow \qquad g(z) = z \qquad \Leftrightarrow \qquad z_{fix} = \frac{2\alpha(1 - e^{i\theta})}{1 - \alpha e^{i\theta}}.$$

Para qué valores de $(\alpha, \theta) \in \mathbb{D} \times S^1$ se tiene que $z_{fix} \in D$? Esto sucede si y sólo si $|z_{fix} - 2| \leq 1$ si y sólo si $|T_\theta(\alpha)| \leq 1$, donde

$$T_\theta(\alpha) = 2\frac{\alpha - 1}{1 - \alpha e^{i\theta}}.$$

La inversa de esta transformación de Möbius está dada por $\mathbb{S}(\alpha) = \dfrac{\alpha + 2}{\alpha e^{i\theta} + 2}$, y manda el disco unitario en el disco D_θ. Esto significa que, para cada $0 < \theta < 2\pi$ y $\alpha \in D_\theta$, $F_{\alpha,\theta}$ tiene un punto fijo en D.

En lo que resta de esta sección **fijaremos** $\theta = \pi$. Entonces,

$$F_{\alpha,\pi}(z) = \begin{cases} \alpha z & \text{si } z \notin D \\ \alpha(4 - z) & \text{si } z \in D \end{cases}.$$

El conjunto de puntos fijos de $F_{\alpha,\pi}$ en D está dado por

$$Fix(F_{\alpha,\pi}) = \left\{ z \in D : z = \frac{4\alpha}{\alpha + 1} \right\}.$$

En este caso, T_θ y $\mathbb{S}$ están dadas por

$$T_\theta(\alpha) = 2\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, \qquad \mathbb{S}(\alpha) = -\frac{\alpha + 2}{\alpha - 2},$$

y, $D_\theta = \{\alpha \in \widehat{\mathbb{C}} : |\alpha - 5/3| \leq 4/3\}$.

Ejemplo 1.3.1. *Si $\alpha = 1/3$, entonces 0 es un punto fijo atractor de $F_{\alpha,\pi}$, 1 es un punto fijo aislado e ∞ es un punto fijo repulsor de $F_{\alpha,\pi}$. Ahora bien, si $\zeta \in C$, i.e., si $\zeta = 2 + e^{it}$, con $0 \leq t < 2\pi$, entonces*

$$F_{\alpha,\pi}(\zeta) = \frac{1}{3}(2 - e^{it}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{it},$$

el cual pertenece al círculo $\{z : |z - 2/3| = 1/3\}$. Esto es,

$$F_{\alpha,\pi}(D) = D(2/3, 1/3) \subset \mathbb{D}.$$

Luego, si $z \in D$, $F_{\alpha,\pi}(z) \in \mathbb{D}$ y, por lo tanto $F^n_{\alpha,\pi}(z) \to 0$ si $n \to \infty$. Más aún, para toda $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, tenemos que $F^n_{\alpha,\theta}(z) \to 0$ si $n \to \infty$. Esto es, la componente completa de atracción de 0 es $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y $\Omega(\{1\}) = \{1\}$.

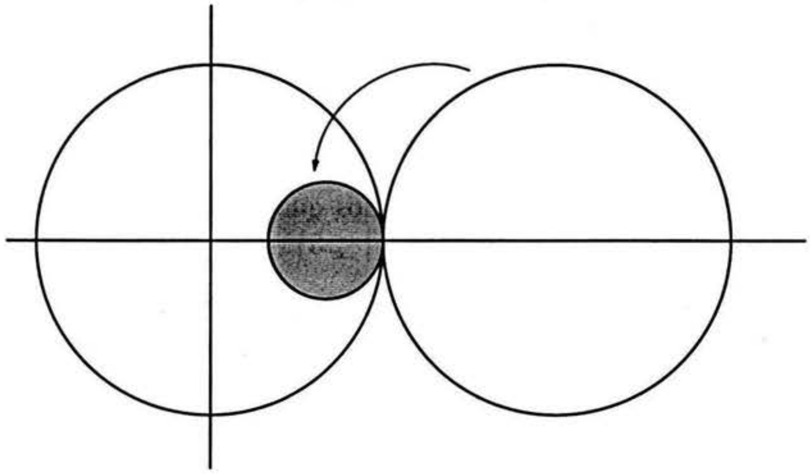

Figure 1.2: Dinámica de $F_{1/3,\pi}$

Ejemplo 1.3.2. *Si $F = f \circ g$ entonces $Dom(F) = I_{10}$ y, en este caso,*

$$T_2(\alpha) = 2\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}.$$

Observemos que T_2 es la composición de la aplicación $\alpha \to \alpha^2$ seguida de T_θ y, en este caso, la inversa de T_2 no es univaluada y manda $\overline{\mathbb{D}}$ en el conjunto que consta de dos componentes conexas $D_2 = D_2^1 \cup D_2^2$.

Entonces $D_2 \cap \mathbb{R} = (-1, -1/\sqrt{3}] \cup [1/\sqrt{3}, 1)$. Notemos que la segunda componente está contenida en $[1/3, 1)$, y, por el ejemplo anterior, la dinámica de $F_{\alpha,\pi}$ es simple. Si $\alpha = -1/\sqrt{3}$, entonces $\{-\sqrt{3}, 1\}$ es un ciclo periódico de longitud 2 y, en este caso,

$$\Omega(0) = \mathbb{C} \setminus \{-\sqrt{3}, 1\} \qquad y \qquad \Omega(\{-\sqrt{3}, 1\}) = \{-\sqrt{3}, 1\}.$$

1.4 RESULTADOS

Observación 1.4.1. *Sea $(\alpha, \theta) \in \mathbb{D} \times S^1$.*

1. *En general, tenemos que 0 e ∞ son puntos fijos de $F_{\alpha,\theta}$ e, independientemente de θ, si $|\alpha| < 1/3$, entonces la órbita positiva de cualquier punto $z \in \mathbb{C}^*$ converge a 0 bajo iteraciones de $F_{\alpha,\theta}$ (ver la proposición siguiente).*

2. *Si $|z| < 1$, entonces la órbita positiva de z converge a 0 bajo iteraciones de $F_{\alpha,\theta}$. Esto significa que el disco unitario está contenido en el valle inmediato de atracción de 0. También, si $|z| > 3$, la órbita positiva de z eventualmente entra en el disco $D(0,3)$.*

De las observaciones anteriores, vemos que la dinámica 'interesante' de $F_{\alpha,\theta}$ aparece en el anillo $A = \{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$.

Definición 1.4.2. *Decimos que la telaraña es* discreta *en $\mathbb{C}$ si el punto al infinito es el único punto de acumulación de sucesiones $\{z_n\} \in F_{\alpha,\theta}^{-n}(\partial D)$.*

Proposición 1.4.3. *Si $0 < |\alpha| < 1/3$, entonces $Spid(F_{\alpha,\theta})$ es discreta en $\mathbb{C}$ y $F_{\alpha,\theta}^{n}(z)$ converge a 0 cuando $n \to \infty$, para toda $z \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Sea V_∞ una vecindad de infinito de la forma $\{|z| > M\}$, con $M >> 1$. Como $|\alpha| < 1/3$, entonces $F_{\alpha,\theta}(D) \subset \mathbb{D}$ y $F_{\alpha,\theta}^{-1}(D) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D(0,3)$. Luego, es posible encontrar un entero positivo N tal que $F_{\alpha,\theta}^{-n}(C) \subset V_\infty$ para toda $n \geq N$. Como $F_{\alpha,\theta|V_\infty}^{-1} = \alpha^{-1}z$, tenemos que $\overline{\bigcup_{n\geq N} F_{\alpha,\theta}^{-n}(C)} \subset V_\infty$ y el único punto de acumulación de $Spid(F_{\alpha,\theta})$ es ∞. Esto es, $Spid(F_{\alpha,\theta})$ es discreta en $\mathbb{C}$.

Ahora bien, el conjunto regular consiste de una unión numerable de discos ajenos de la forma $F_{\alpha,\theta}^{-j}(D)$ y del complemento $\mathbb{C}\setminus\overline{\bigcup_{j\geq 0} F_{\alpha,\theta}^{-j}(D)}$. Luego, si U es cualquier componente del conjunto regular, entonces, ó U coincide con D después de alguna iteración, ó sus imágenes son ajenas con D. En ambos casos, $F^n(U) \to 0$ cuando n tiende a ∞. □

Proposición 1.4.4. *Sea $(\alpha,\theta) \in \mathbb{D} \times S^1$. Si z_0, z_1 son cualesquiera dos puntos en la misma componente conexa de $\mathcal{F}(F_{\alpha,\theta})$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} |F_{\alpha,\theta}^{n}(z_0) - F_{\alpha,\theta}^{n}(z_1)| = 0.$$

Demostración. Se sigue por inducción en n, ya que $|F'_{\alpha,\theta}| = |\alpha| < 1$. □

Sea $H(\widehat{\mathbb{C}})$ el espacio que consta de todos los subconjuntos cerrados de $\widehat{\mathbb{C}}$. En McMullen [Mc], la *topología de Hausdorff* en $H(\widehat{\mathbb{C}})$ está caracterizada de la siguiente manera. Decimos que $S_k \longrightarrow S$ si

(a) toda vecindad de un punto $z \in S$ intersecta a todos, salvo un número finito, de los elementos de la sucesión S_k; y

(b) si toda vecindad de z intersecta a un número infinito de elementos S_k, entonces $z \in S$.

Dada una sucesión arbitraria de subconjuntos cerrados $\{S_k\}$ de $\widehat{\mathbb{C}}$, definimos $\liminf S_k$ como el conjunto más grande que satisface la condición (a), y $\limsup S_k$ como el conjunto más pequeño que satisface la condición (b). Tanto $\liminf S_k$ como $\limsup S_k$ son cerrados y $\liminf S_k \subset \limsup S_k$. Tenemos entonces que, $S_k \longrightarrow S$ si y sólo si $\liminf S_k = \limsup S_k$.

También se establece que $H(\widehat{\mathbb{C}})$ es un espacio métrico compacto en la topología de Hausdorff; (ver también, Nadler [Nad]).

Teorema 1.4.5. *Para toda $\alpha \in \mathbb{D}$, la función $\theta \longrightarrow Spid(F_{\alpha,\theta})$ es uniformemente continua de S^1 en $H(\widehat{\mathbb{C}})$.*

Demostración. Probamos primero que $\theta \longrightarrow Spid(F_{\alpha,\theta})$ es continua. Fijemos $\theta_0 \in S^1$ y denotemos por S a la telaraña asociada a F_{α,θ_0}. Probaremos primero que la función es continua. Si $\{\theta_k\} \subset S^1$ es una sucesión de argumentos que converge a θ_0, necesitamos probar que la sucesión de conjuntos cerrados S_k converge a S, donde S_k es la telaraña asociada a F_{α,θ_k}. Por definición de la telaraña, para probar esto, es suficiente probar que para cada $n \geq 1$,

$$\Gamma_n^k = \overline{F_{\alpha,\theta_k}^{-n}(C)} \longrightarrow \Lambda_n = \overline{F_{\alpha,\theta_0}^{-n}(C)}.$$

Como cada uno de estos conjuntos es la unión de arcos cerrados, si z es cualquier punto en Λ_n, entonces z está contenido en una arco, digamos, a_0. Si U es cualquier vecindad de z, por la convergencia de θ_k a θ_0, existe una infinidad de valores de k tales que θ_k está cerca de θ_0. Esto implica que, para una infinidad de valores de k, existe un arco $A_k \in \Gamma_n^k$ tal que

$$A_k \cap U \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $\Gamma_n^k \longrightarrow \Lambda_n$, y $S_k \longrightarrow S$. Por lo tanto, la función $S^1 \longrightarrow H(\widehat{\mathbb{C}})$ es continua. Finalmente, como $H(\widehat{\mathbb{C}})$ es un espacio topológico compacto, existe una única estructura uniforme compatible con su topología (ver Bourbaki [Bou]). Como S^1 es compacto y $S^1 \longrightarrow H(\widehat{\mathbb{C}})$ es continua, se sigue que $S^1 \longrightarrow H(\widehat{\mathbb{C}})$ es uniformemente continua. □

Este teorema tiene como consecuencia importante el siguiente:

Teorema 1.4.6. *Si $(\alpha, \theta) \in \mathbb{D} \times S^1$, entonces $Spid(F_{\alpha,\theta})$ es discreta en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Fijemos cualquier $\alpha \in \mathbb{D}$.

Si $\theta = 0$, $F_{\alpha,0}^{-1} \equiv \alpha^{-1}z$, y la telaraña asociada a $F_{\alpha,0}$ es una unión de círculos que convergen a ∞ bajo iteraciones de $F_{\alpha,0}^{-1}$. Por lo tanto, $Spid(F_{\alpha,0})$ es discreta en $\mathbb{C}$.

Sea

$$A = \{\theta \in [0, 2\pi) : Spid(F_{\alpha,\theta}) \,\text{es discreta en}\, \mathbb{C}\}.$$

Claramente, $A \neq \emptyset$ ya que $0 \in A$. Probaremos primero que A es cerrado. Sea θ_0 un punto de acumulación de A y supongamos que la telaraña asociada a F_{α,θ_0} no es discreta en $\mathbb{C}$. Esto significa que existe al menos un punto de acumulación $z \neq \infty$ de $Spid(F_{\alpha,\theta_0})$. Esto es, existe un entero positivo $N >> 0$ y una sucesión de arcos cerrados $\{a_n\} \subset \Lambda_n$ tales que $z \in a_n$, para cada $n \geq N$.

Sea $\{\theta_k\} \subset A$ una sucesión de argumentos tales que $\theta_k \longrightarrow \theta_0$. Como $\theta_k \in A$, la telaraña correspondiente $S_k = Spid(F_{\alpha,\theta_k})$ es discreta en $\mathbb{C}$, para toda k.

Por continuidad, la sucesión S_k converge a la telaraña S, asociada a F_{α,θ_0}. Luego, dada cualquier vecindad U de z, para cada $n \geq 1$, existe una sucesión de arcos $A_k \subset \Gamma_n^k$ tales que

$$A_k \cap U \neq \emptyset,$$

para una infinidad de valores de k. Fijemos un valor de k arbitrariamente grande y para cada $n \geq N$, elijamos una arco $A_{k,n} \subset \Gamma_n^k$ tal que $A_{k,n} \cap U \neq \emptyset$. Esto significa que z es también un punto de acumulación de $Spid(F_{\alpha,\theta_k})$, lo cual es imposible, ya que $S_k = Spid(F_{\alpha,\theta_k})$ es discreta en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, $Spid(F_{\alpha,\theta_0})$ es discreta en $\mathbb{C}$ y A es cerrado.

Nuevamente por continuidad, A es abierto, y por lo tanto, $A = [0, 2\pi)$.

Finalmente, como $\alpha \in \mathbb{D}$ era arbitrario, tenemos que, si $(\alpha, \theta) \in \mathbb{D} \times S^1$, entonces $Spid(F_{\alpha,\theta})$ es discreta en $\mathbb{C}$. □

Este teorema implica que en cualquier punto z de la esfera, el número máximo de componentes regulares para los cuales z es un punto de cerradura, es acotado. Esto nos permite dar la siguiente:

Definición 1.4.7. *Si $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, la* multiplicidad *de z es el número máximo de componentes regulares para los cuales z es un punto de cerradura. En este caso decimos que z es un* punto múltiple *de $F_{\alpha,\theta}$.*

Definición 1.4.8. *Si $\{z_0, z_1 = F(z_0), ..., z_{N-1} = F(z_{N-2})\}$ es un ciclo periódico de $F_{\alpha,\theta}$ tal que $\Omega(\{z_i\}) = \{z_i\}$, con $i = 0, 1, ..., N-1$, entonces decimos que $\{z_i\}$ es un* ciclo periódico aislado.

Ejemplo 1.4.9. *1. Por el ejemplo 1 de la sección anterior se tiene que $\{1\}$ es un punto fijo aislado y múltiple de multiplicidad 2 de $F_{\alpha,\theta}$.*

2. Por el ejemplo 3 anterior se tiene que $\{-\sqrt{3}, 1\}$ es un ciclo periódico aislado y múltiple de multiplicidad 2 de $F_{\alpha,\theta}$.

Lema 1.4.10. *Si $\{z_0, z_1, ..., z_{N-1}\} \subset Spid(F_{\alpha,\theta})$ es un ciclo periódico de longitud N, entonces $\{z_i\}$ es un ciclo periódico aislado.*

Teorema 1.4.11. *Sean $(\alpha, \theta) \in \mathbb{D} \times S^1$. Entonces, para toda $z \in \mathbb{C}$, existe un ciclo periódico $\{z_0, ..., z_{N-1}\}$ tal que $F^n_{\alpha,\theta}(z)$ converge a $\{z_i\}$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Sea $U_0 \neq \emptyset$ cualquier componente acotada del conjunto regular y definamos

$$U_n = F^n_{\alpha,\theta}(U_0), \qquad n \geq 1.$$

Entonces, $diam(U_n) \to 0$ y $|(F^n_{\alpha,\theta})'| = |\alpha|^n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Si $U_n \cap U_m = \emptyset$, para cada $n \neq m$, entonces $\{U_n\}$ tiene un punto de acumulación en $Spid(F_{\alpha,\theta}) \cap (\widehat{\mathbb{C}} \setminus V_\infty)$, donde V_∞ es una componente conexa de ∞ distinta de U_n. Por la discretitud de $Spid(F_{\alpha,\theta})$ y el lema anterior, esto no es posible. Por lo tanto, $U_n \cap U_m \neq \emptyset$, para alguna $n \neq m$.

Después de renombrar a las componentes si es necesario, tenemos que existe $N > 0$ tal que $U_N \subset U_n$. Si $k \geq N$, $\{F_k = F^k_{\alpha,\theta|U_N}\}$ es una familia normal por la proposición 1.4.4 aplicada a $z_{k+1} = F_{\alpha,\theta}(z_k)$ y z_k, $k \geq 1$. Los únicos límites son funciones constantes. Por la normalidad de las funciones y el lema anterior, estas funciones constantes están en el interior de U_N, y corresponden a puntos periódicos de $F_{\alpha,\theta}$. $\square$

Bibliografía

[Ahl] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw Hill, 1978.

[BG] M. Boshernitzan and A. Goetz, *A dichotomy for a two parameter piecewise rotation*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **23** (2003), 759-770.

[Bou] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics: General Topology, Part I*, Addison-Wesley, 1966.

[KH] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1985.

[Ily] Y. Ilyashenko, *Centennial history of Hilbert's 16th problem*, Bulletin AMS **39**, no. 3 (2002), 301-354.

[Mc] C. McMullen, *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle*, Annals of Mathematics Studies **142**, Princeton University Press, 1996.

[Nad] S. Nadler, *Hyperspaces of sets*, Marcel Decker, 1978.

[Sul] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Annals of Math. **122** (1985), 401-418.

Parte II

ACCIONES DE GRUPOS NO-LOCALMENTE CONEXOS:

FUNCIONES CASI-PERIÓDICAS Y PROMEDIOS INVARIANTES GENERALIZADOS

INTRODUCCIÓN

En esta segunda parte de la tesis presentamos una generalización de la teoría de funciones casi-periódicas de Bohr-von Neumann y de la noción de promedio invariante de von Neumann.

Las funciones casi-periódicas fueron originalmente introducidas por H. Bohr en 1925 (ver [Boh]), y más tarde generalizadas por J. von Neumann en 1934 (ver [Neu]). En 1938, A. Weil, en su importante monografía [Wei], hace una descripción de funciones casi-periódicas desde un punto de vista muy general, para grupos de transformaciones actuando en espacios topológicos muy generales.

Usaremos algunas de estas ideas para dar una generalización de la teoría de Bohr-von Neumann, para funciones definidas en el grupo de Adèles de $\mathbb{Q}$ que son adèle-valuadas. Este grupo se puede describir como el producto directo restringido de todas las completaciones $\mathbb{Q}_p$ (Arquimedeanas y No-Arquimedeanas) de $\mathbb{Q}$ con respecto de los subgrupos abiertos y compactos $\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Q}_p$; i.e.,

$$\mathbb{A} = \prod_{p \in \mathbf{P}^\infty} \mathbb{Q}_p = \{(x_p) \in \prod \mathbb{Q}_p : x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para casi toda } p\}.$$

Dotamos a $\mathbb{A}$ de una topología que lo hace un grupo topológico, abeliano y localmente compacto que admite una inclusión de los racionales como subgrupo discreto cocompacto. Adicionalmente definiremos en $\mathbb{A}$ una estructura uniforme que lo convertirá en un espacio uniforme completo. Esta estructura uniforme nos permitirá definir una estructura uniforme en el espacio de funciones continuas $C(\mathbb{A}, \mathbb{A})$, el cual resultará ser también un espacio uniforme completo. Definimos la acción de $\mathbb{A}$ por traslaciones en este espacio de funciones y daremos, usando esta acción, una caracterización de esta nueva clase de funciones. Entre otras cosas, esta noción generalizada nos permitirá caracterizar a una clase muy especial de funciones en $\mathbb{A}$: las funciones adèle-valuadas que son invariantes por la acción de $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.3.4 Sea $\Phi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una función casi-periódica. Entonces, $\mathcal{O}(\Phi)$ es compacta si y sólo si existe un grupo abeliano uniforme compacto Γ, un homomorfismo continuo suprayectivo $\rho : \mathbb{A} \longrightarrow \Gamma$, y una función continua $\Phi_0 : \Gamma \longrightarrow \mathbb{A}$ tales que $\Phi = \Phi_0 \circ \rho$.

Finalmente, presentamos una generalización del Teorema de von Neumann que establece la existencia de un único funcional lineal invariante bajo traslaciones, $M : AP(G) \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $AP(G)$ es el espacio de funciones real-valuadas y casi-periódicas definidas en un grupo topológico G.

Teorema 3.2.1 Existe un único promedio invariante con valores adélicos $M : AP(\mathbb{A}, \mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{A}$ definido en el espacio de funciones casi-periódicas definidas en $\mathbb{A}$.

Capítulo 2

El Solenoide Universal Unidimensional

En este capítulo haremos la construcción del *Solenoide Universal Unidimensional* desde dos puntos de vista distintos.

En la primera sección haremos la construcción topológica de este solenoide universal como el espacio cubriente universal algebraico del círculo S^1. Este es un espacio foliado de dimensión uno, cuyas hojas típicas son homeomorfas a $\mathbb{R}$, el cubriente universal topológico de S^1, y las fibras típicas son homeomorfas al conjunto de Cantor. Este espacio tiene también estructura de grupo topológico abeliano, compacto y conexo, lo que nos permitirá establecer algunas relaciones entre la teoría de espacios foliados y el análisis armónico clásico. En la primera parte de esta sección construiremos la completación profinita de $\mathbb{Z}$. Este es un grupo topológico, abeliano, compacto y totalmente disconexo (i.e., isomorfo a un conjunto de Cantor), en donde $\mathbb{Z}$ se puede des-cribir como un subconjunto denso. La teoría general de estos grupos puede consultarse en A. Wilson [Wil]. Nosotros haremos las construcciones generales de manera explícita en $\mathbb{Z}$.

En la segunda sección construimos el grupo de clases de Adèles de $\mathbb{Q}$. Este es un grupo topológico, abeliano, compacto y conexo, que es isomorfo, como grupo topológico, al solenoide universal unidimensional que construimos en la primera sección. Este isomorfismo nos permitirá unificar las construcciones y propiedades topológicas del solenoide universal, con las propiedades aritméticas y algebraicas del mismo. La primera parte de esta sección está basada en N. Koblitz [Kob] y las restantes secciones están adaptadas de las cons-trucciones generales en D. Ramakhrisnan y R. Valenza [RV].

2.1 El Cubriente Universal Algebraico de S^1

2.1.1 La completación profinita de $\mathbb{Z}$

En $\mathbb{Z}$, consideremos el conjunto $I(\mathbb{Z})$, que consiste de todos los subgrupos normales de índice finito de $\mathbb{Z}$. Podemos definir un orden parcial en este conjunto por inclusión: si $H, K \in I(\mathbb{Z})$, entonces $H \leq K$ si y sólo si $K \subset H$. $I(\mathbb{Z})$ es entonces un conjunto parcialmente ordenado que resulta ser también un *filtro base*, i.e., si $H, K \in I(\mathbb{Z})$, entonces existe $L \in I(\mathbb{Z})$ tal que $L \subset H \cap K$.

Si $H, K \in I(\mathbb{Z})$ con $H \leq K$, entonces tenemos bien definida una proyección canónica

$$\rho_{HK} : \mathbb{Z}/K \longrightarrow \mathbb{Z}/H, \qquad gK \mapsto gH.$$

Esto determina un sistema dirigido inverso, cuyo límite inverso se llama la *completación profinita* de $\mathbb{Z}$ y se denota por $\widehat{\mathbb{Z}}$. Esto es,

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/H.$$

Como $\mathbb{Z}$ es también *residualmente finito* (i.e., $\bigcap_{H \in I(\mathbb{Z})} H = 0$), entonces tenemos un homomorfismo inyectivo $\mathbb{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ inducido por la proyecciones en los factores $\mathbb{Z}/H$ cuya imagen es densa. $\widehat{\mathbb{Z}}$, dotada de la topología profinita, resulta ser un grupo topológico, abeliano, compacto y totalmente disconexo, homeomorfo a un conjunto de Cantor. También, usando Teoría de Sylow para grupos profinitos, se puede probar que existe un isomorfismo de grupos profinitos

$$\widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p \in \mathbf{P}} \mathbb{Z}_p,$$

donde $\mathbf{P}$ es el conjunto que consta de todos los números primos y $\mathbb{Z}_p$ es el anillo de enteros p-ádicos (ver 1.2).

Definimos ahora una estructura uniforme y una métrica compatible con esta estructura en $\widehat{\mathbb{Z}}$. En el Apéndice A1, hacemos una descripción de las definiciones y resultados relevantes de la teoría de espacios uniformes. Aquí lo haremos directamente, exhibiendo un *sistema fundamental de entornos* para esta estructura.

Si $n \geq 1$, definamos los conjuntos $U_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \mod n\}$. Entonces, la familia de conjuntos $\mathfrak{U} = \{U_n : n \geq 1\}$ es un sistema fundamental de entornos de una estructura uniforme aditiva en $\mathbb{Z}$. Si $x \in \mathbb{Z}$, $U_n(x) = \{y \in \mathbb{Z} : x \equiv y \mod n\}$ es una vecindad de x. Luego, si $x = 0$, los subgrupos $U_n(0) = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \mod n\} = n\mathbb{Z}$, $n \geq 1$, forman un sistema fundamental de vecindades de 0. Entonces, dos enteros están cercanos si y sólo si su diferencia es divisible por un entero mayor.

Podemos entonces completar a $\mathbb{Z}$. Decimos que una sucesión $\{a_j\} \subset \mathbb{Z}$ es de *Cauchy* si para toda $n \geq 1$ existe N tal que $a_j \equiv a_k \mod n$, para toda $j, k \geq N$. Una sucesión de Cauchy $\{a_j\}$ es trivial si $a_j \to 0$ cuando $j \to \infty$; i.e., si para toda $n \geq 1$, existe N tal que $a_j \equiv 0 \mod n$, para $j \geq N$. El conjunto que consta de todas las sucesiones de Cauchy forma un grupo conmutativo y las sucesiones de Cauchy triviales forman un subgrupo. El cociente de este grupo módulo el subgrupo de sucesiones de Cauchy triviales, es $\widehat{\mathbb{Z}}$. Podemos ver que con esta construcción, $\widehat{\mathbb{Z}}$ es un grupo abeliano uniforme completo y la aplicación que manda n en la sucesión $\{n\}$, nos permite identificar a $\mathbb{Z}$ con un subgrupo denso de $\widehat{\mathbb{Z}}$.

2.1.2 El espacio cubriente universal algebraico de S^1

Recordemos que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, el grupo fundamental del círculo S^1, lo podemos identificar con el grupo de transformaciones de cubierta del cubriente universal $\mathbb{R} \to S^1$.

Por la teoría de espacios cubrientes, a cada $H \in I(\mathbb{Z})$, le podemos asociar un espacio cubriente no-ramificado de grado n, $p_H : X_H \longrightarrow S^1$. Aquí, identificamos canónicamente X_H con $\mathbb{R}/H$. Luego, para cualesquiera $H, K \in I(\mathbb{Z})$ con $H \leq K$, tenemos asociadas las correspondientes aplicaciones cubrientes $p_H : X_H \longrightarrow S^1$ y $p_K : X_K \longrightarrow S^1$. Entonces, existe una única aplicación cubriente $p_{HK} : X_K \longrightarrow X_H$ tal que $p_H \circ p_{HK} = p_K$. Esto determina un sistema dirigido inverso $\{X_H, p_H\}_{H \in I(\mathbb{Z})}$ cuyo límite inverso es el *Solenoide Universal Unidimensional*

$$\mathbb{S} = \varprojlim X_H,$$

con proyección canónica $\pi : \mathbb{S} \longrightarrow S^1$, determinada por proyección de coordenadas, la cual determina una estructura de $\widehat{\mathbb{Z}}$-haz principal.

$\mathbb{S}$ es un grupo topológico abeliano, compacto, conexo y cada "hoja" de esta laminación unidimensional es una variedad simplemente conexa de dimensión uno, homeomorfa al espacio cubriente universal $\mathbb{R}$ de S^1. Una fibra típica de esta proyección es isomorfa a la completación profinita de $\mathbb{Z}$, el cual es un grupo topológico, abeliano, compacto y totalmente disconexo, homeomorfo al conjunto de Cantor.

La estructura foliada está dada por un atlas máximo que se puede obtener de la siguiente manera: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $A = \{(\varphi_z, I, U_z)\}_{z \in S^1}$ un atlas de variedad de S^1, i.e., $U_z \subset S^1$ es un intervalo abierto que contiene a $z \in S^1$ y $\varphi_z : I \longrightarrow U_z$ es un homeomorfismo. Podemos elegir el intervalo U_z suficientemente pequeño de manera que sea plenamente cubierto con respecto a cualquier aplicación cubriente $p_{H_i} : X_{H_i} \longrightarrow S^1$ en el sistema proyectivo que define a $\mathbb{S}$. Usaremos A para construir un atlas $\widehat{A}$ para $\mathbb{S}$.

Dada $(\varphi_z, I, U_z) \in A$, sea $T_z = p_\infty^{-1}(z)$, la cual es homeomorfa a

$$\prod \{0, 1, ..., deg(p_{H_i H_{i+1}}) - 1\}.$$

Haciendo $\widehat{U_z} = p_\infty^{-1}(U_z)$, podemos definir una carta $\widehat{\varphi}_z : I \times T_z \longrightarrow \widehat{U_z}$. Un punto $t \in T_z$ es, por definición, un elemento $(z_0, z_1, ..., z_i, ...)$ tal que $z_i \in H_i$ y $p_{H_i H_{i+1}}(z_{i+1}) = z_i$. Como U_z está plenamente cubierto por todos los cubrientes del sistema, podemos levantar φ_z con respecto de p_{H_i} a $\varphi_{z_i} : I \longrightarrow U_{z_i}$, donde U_{z_i} es la componente de $p_{H_i}^{-1}(U_z)$ que contiene a z_i. Por la Propiedad Universal de los Límites Inversos, existe un homeomorfismo $\widehat{\varphi_z}^t : I \longrightarrow U_z^t$, donde U_z^t es el intervalo abierto así definido alrededor de $t \in \mathbb{S}$. Hemos obtenido entonces un homeomorfismo $\widehat{\varphi_z} : I \times T_z \longrightarrow \widehat{U_z}$, para cada $z \in S^1$, y un atlas $\widehat{A}$ para $\mathbb{S}$.

2.1.3 La estructura de $\mathbb{Z}$-haz principal

Como $\mathbb{Z}$ es un subgrupo discreto del grupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}$ actúa propiamente discontinuamente y libre de puntos fijos en $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$, entonces tenemos la proyección natural de $\mathbb{Z}$-haz principal

$$\Pi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Aquí, $\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}$ por transformaciones de cubierta y en $\widehat{\mathbb{Z}}$ por traslaciones izquierdas inducidas por el homomorfismo inyectivo $\mathbb{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$. De aquí, tenemos la identificación canónica $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$. La componente por trayectorias del elemento identidad $e \in \mathbb{S}$, la cual llamamos *hoja base* y la denotamos por L_e, es la imagen de $\mathbb{R} \times \{0\}$ bajo $\Pi_{\mathbb{Z}}$. Esta hoja es claramente homeomorfa a $\mathbb{R}$.

2.1.4 La estructura métrica uniforme

En $\mathbb{S}$ podemos poner una estructura uniforme. En el capítulo 2 explicaremos cómo proceder en general para poner una estructura uniforme en un grupo topológico. En esta sección definimos una métrica en $\mathbb{S}$ que nos permitirá entender la estructura métrica uniforme y, como $\mathbb{S}$ es compacto, entonces esta estructura es la única estructura uniforme compatible con la topología proyectiva de $\mathbb{S}$ (ver [Bou]).

De acuerdo con la última parte de la sección 1.1, en $\widehat{\mathbb{Z}}$ tenemos definida una métrica d. En $\mathbb{R}$ tenemos la métrica euclideana usual d_∞, que es invariante bajo traslaciones enteras. Podemos poner la métrica $\sigma_\infty = d_\infty \times d$ en $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$, que define, bajo proyección, la métrica σ en $\mathbb{S}$.

2.1.5 La medida de Haar

Como $\mathbb{S}$ es un grupo topológico abeliano, compacto, entonces existe una única medida en $\mathbb{S}$ que es invariante bajo traslaciones izquierdas y derechas. Esta es la *medida de Haar*, que denotaremos por μ.

Por otro lado, tenemos dos construcciones interesantes y diferentes de ciertas medidas en este solenoide universal, de la manera siguiente:

- Sea $\widetilde{\mu}$ la medida producto en $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$. Si tomamos cualquier abierto U en $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ sobre el cual $\Pi_{\mathbf{Z}} : \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R} \times_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$ es inyectiva, entonces definimos $meas(\Pi_{\mathbf{Z}}(U))$ como $\widetilde{\mu}(U)$. Como la acción de $\mathbb{Z}$ preserva $\widetilde{\mu}$, entonces, esta elección no depende de U. Por lo tanto, existe una única medida de Borel μ en $\mathbb{R} \times_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$ tal que
$$\mu_{|\Pi_{\mathbf{Z}}(U)} = \widetilde{\mu}(U).$$

- Si λ es la medida de Haar en S^1, entonces, para cada $p_H : X_H \longrightarrow S^1$ de grado d, $\frac{1}{d}\lambda_{X_H}$ es una medida en X_H. Por lo tanto, para cada conjunto de Borel U en S^1, tenemos que
$$\lambda(U) = \frac{1}{d}\lambda_{X_H}(p^{-1}(U)).$$

  Luego, $\mathbb{R} \times_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$ tiene una medida ν que es absolutamente continua con respecto a λ.

2.2 El Grupo de Clases de Adèles de $\mathbb{Q}$

2.2.1 Las completaciones de $\mathbb{Q}$

Denotemos por $\mathbb{Q}$ al conjunto de números racionales y por $\mathbf{P}$ al conjunto que consta de todos los números primos $\{2, 3, 5, ...\}$.

En $\mathbb{Q}$ tenemos definido el valor absoluto ordinario, el cual denotaremos por $|\cdot|$ ó por $|\cdot|_\infty$. Con este valor absoluto, tenemos la completación "métrica" conocida $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. Decribiremos ahora otro valor absoluto definido sobre $\mathbb{Q}$, el cual nos permitirá obtener una completación diferente de $\mathbb{Q}$.

Sea $p \in \mathbf{P}$. Para cualquier número entero a, definimos el *orden* de a con respecto a p, como

$$\mathrm{ord}_p(a) = \max\{n : a \equiv 0 \mod p^n\}.$$

Esto es, $\mathrm{ord}_p(a)$ es la mayor potencia de p que divide a a. Si $a = 0$ escribimos $\mathrm{ord}_p(a) = \infty$. Notemos que si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathrm{ord}_p(ab) = \mathrm{ord}_p(a) + \mathrm{ord}_p(b)$. Extendemos ahora esta definición a todo $\mathbb{Q}$:

$$\mathrm{ord}_p(x) = \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b) \qquad \text{si } x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}.$$

Esto nos permite definir un *valor absoluto* ó *norma* $|\cdot|_p$ en $\mathbb{Q}$:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\mathrm{ord}_p(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Es fácil ver que $|\cdot|_p$ satisface las siguientes propiedades:

1. $|x|_p = 0$ si y sólo si $x = 0$.
2. $|xy|_p = |x|_p|y|_p$ para toda $x, y \in \mathbb{Q}$.
3. $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$ para toda $x, y \in \mathbb{Q}$.

Debido a la propiedad (3), a $|\cdot|_p$ se le llama un *valor absoluto no-Arquimedeano* ó *norma no-Arquimedeana*. Al valor absoluto usual le llamamos *Arquimedeano*. Podemos verificar, de (3), que $|\cdot|_p$ satisface la Desigualdad del Triángulo Usual:

$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p, \qquad \text{para toda} \qquad x, y \in \mathbb{Q}.$$

Este valor absoluto no-Arquimedeano definido en $\mathbb{Q}$ define una función no-negativa $d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$d_p(x, y) = |x - y|_p,$$

la cual define una métrica sobre $\mathbb{Q}$. Como esta métrica es inducida por el valor absoluto $|\cdot|_p$, la llamamos una *métrica no-Arquimedeana.* La Propiedad (3) se escribe en la forma

$$d_p(x, y) \leq \max(d_p(x, z), d_p(z, y)), \qquad \text{para toda} \qquad x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

Esta métrica induce una topología en $\mathbb{Q}$; una base para esta topología consiste de bolas abiertas relativas a d_p; esta topología no es discreta si y sólo si el valor absoluto es no-trivial; i.e., no es cierto que $|x|_p = 1$ para toda $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Esta es la llamada *métrica p-ádica.*

Se tiene el siguiente teorema importante, cuya demostración puede consultarse en [Kob], que caracteriza a los valores absolutos no-triviales definidos sobre $\mathbb{Q}$:

Teorema 2.2.1. ***(Ostrowski)****: Toda norma no-trivial $|\cdot|$ definida sobre $\mathbb{Q}$ es equivalente a $|\cdot|_p$, para algún número primo $p \in \mathbf{P}$ ó para $p = \infty$.*

Aquí, dos valores absolutos $|\cdot|$ y $|\cdot|'$ definidos sobre $\mathbb{Q}$ son equivalentes sobre $\mathbb{Q}$ si existe una constante positiva t tal que $|x|' = |x|^t$, para toda $x \in \mathbb{Q}$. Una clase de equivalencia de valores absolutos no-triviales se llama un *lugar* definido sobre $\mathbb{Q}$.

En el caso Arquimedeano, definimos a $\mathbb{R}$ como el conjunto de "clases de equivalencia" de sucesiones de Cauchy de números racionales y sabemos que $\mathbb{R}$ es un campo con las correspondientes operaciones de suma y multiplicación de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy.

Análogamente, si fijamos $p \in \mathbf{P}$ podemos considerar al conjunto de sucesiones de Cauchy p-ádicas S, definidas sobre $\mathbb{Q}$. Decimos que dos sucesiones de Cauchy $(x_n), (y_n) \in S$ son equivalentes si

$$|x_n - y_n|_p \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty.$$

Definimos el conjunto $\mathbb{Q}_p$ como el conjunto que consta de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy. Si $x \in \mathbb{Q}$, denotamos por (x) a la sucesión de Cauchy constante. La clase de equivalencia del (0) la denotaremos simplemente por 0.

Definimos la norma $|\cdot|_p$ de una clase de equivalencia x como: $\lim_{n\to\infty} |x_n|_p$, donde (x_n) es cualquier representante de x. Este límite existe, ya que

- Si $x = 0$, entonces, por definición, $\lim_{n\to\infty} |x_n|_p = 0$.
- Si $x \neq 0$, entonces para alguna $\varepsilon > 0$ y para cada N, existe $n_N > N$ tal que $|x_{n_N}|_p > \varepsilon$.

Si elegimos N suficientemente grande de manera que $|x_n - x_m|_p < \varepsilon$ cuando $n, m > N$, tenemos que

$$|x_n - x_{n_N}|_p < \varepsilon, \qquad \text{para toda} \qquad n > N.$$

Como $|x_{n_N}| > \varepsilon$, se sigue, del 'Principio del Triángulo Isóseles' que

$$|x_n|_p = |x_{n_N}|_p.$$

Entonces, para toda $n > N$, $|x_{n_N}|_p = |x_n|_p$. Este valor constante es entonces $\lim_{n\to\infty} |x_n|_p$.

Podemos definir la adición y multiplicación de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy; si definimos, cuidadosamente, los inversos aditivos y multiplicativos, podemos probar que $\mathbb{Q}_p$ es un campo. $\mathbb{Q}$ se identifica entonces con el subcampo de $\mathbb{Q}_p$ que consta de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy constantes. Podemos probar también que $\mathbb{Q}_p$ es completo; i.e., toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}_p$ es convergente.

2.2.2 EL ANILLO DE ENTEROS P-ÁDICOS $\mathbb{Z}_p$

Fijemos $p \in \mathbf{P}$. El conjunto que consta de todos los elementos en $\mathbb{Q}_p$ cuya norma es menor ó igual que 1, se llaman los *enteros p-ádicos* y se denotan por $\mathbb{Z}_p$. Esto es, $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$. La suma y el producto de dos elementos de $\mathbb{Z}_p$ es otro elemento de $\mathbb{Z}_p$, de modo que $\mathbb{Z}_p$ es una anillo conmutativo con elemento unitario y le llamamos *el anillo de enteros p-ádicos.*

Podemos también caracterizar a este anillo de la siguiente manera: Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \leq m$, consideremos la aplicación

$$\rho_{nm} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},$$

dada por $x + p^m\mathbb{Z} \longmapsto x + p^n\mathbb{Z}$, para cada $x \in \mathbb{Z}$. Entonces, $\{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \rho_{nm}\}$ determina un sistema dirigido inverso de anillos. El correspondiente límite inverso es el anillo de enteros p-ádicos $\mathbb{Z}_p = \lim_{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Para ver esto, consideremos a $\mathbb{Z}_p$ como el conjunto de series de potencias formales $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ con $0 \leq a_k < p$ para cada k. Definimos las aplicaciones:

$$\rho_n : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad \varphi : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},$$

por

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k \longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k + p^n\mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad z \longmapsto (\rho_n(z) : n \geq 1).$$

Entonces, podemos probar que φ es un isomorfismo de anillos topológicos, y podemos identificar a $\mathbb{Z}$ con el subconjunto de $\mathbb{Z}_p$ que consiste de las series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$, con $a_k = 0$ para todos, excepto un número finito de valores de k. Con esta realización de $\mathbb{Z}_p$, le llamamos a $\mathbb{Z}_p$ la *pro-p completación* de $\mathbb{Z}$.

2.2.3 La medida de Haar en $\mathbb{Q}_p$

Como $\mathbb{Q}_p$ es un grupo (aditivo) topológico abeliano y localmente compacto, existe una única medida (salvo múltiplos escalares) invariante bajo traslaciones en $\mathbb{Q}_p$; esta es la medida de Haar, que denotaremos por μ_p. Fijemos la normalización

$$\mu(\mathbb{Z}_p) = \int_{\mathbb{Z}_p} d\mu_p = 1.$$

Si $a \in \mathbb{Q}_p$, la bola cerrada con centro en a y radio 1 es el conjunto $B(a,1) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |a - x| \leq 1\} = a + \mathbb{Z}_p$. Entonces, $\mu_p(B(a,1)) = 1$. Si $n > 0$, una bola de radio p^n es una unión ajena de p^n bolas de radio 1, y una bola de radio 1 es la unión ajena de p^n bolas de radio p^{-n}. Luego, $\mu(B(x,p^k)) = p^k$, para toda $k \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{Q}_p$.

2.2.4 El grupo de Adèles de $\mathbb{Q}$

Sea J un subconjunto finito de $\mathbf{P}^\infty = \mathbf{P} \cup \{\infty\}$. Para cada índice p asignamos el grupo abeliano localmente compacto $(\mathbb{Q}_p, +)$, y para todo $p \notin J$ asociamos el subgrupo compacto-abierto $\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Q}_p$.

Definición 2.2.2. *El* ***grupo de Adèles*** $\mathbb{A}$ *de* $\mathbb{Q}$ *es el producto directo restringido de* $\mathbb{Q}_p$ *con respecto a* $\mathbb{Z}_p$. *Esto es,*

$$\mathbb{A} = \prod_{p \in \mathbf{P}^\infty} \mathbb{Q}_p = \left\{ (x_p) \in \prod_p \mathbb{Q}_p : x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para casi toda } p \right\}.$$

Claramente, $\mathbb{A}$ es un subconjunto del producto directo de los $\mathbb{Q}_p$.

Definimos una topología en $\mathbb{A}$, especificando una base de vecindades de la identidad que consiste en conjuntos de la forma $\prod_p N_p$, donde N_p es una vecindad de 1 en $\mathbb{Q}_p$ y $N_p = \mathbb{Z}_p$, para todos, excepto un número finito de p.

Si S es cualquier subconjunto finito de $\mathbf{P}^\infty$ que contiene a J, consideremos el subgrupo $\mathbb{A}_S$ de $\mathbb{A}$ definido por

$$\mathbb{A}_S = \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p.$$

Entonces, $\mathbb{A}_S$ es el producto directo de una familia finita de grupos abelianos localmente compactos con un grupo abeliano compacto. Luego, $\mathbb{A}_S$ es un grupo abeliano localmente compacto en la topología producto. La topología producto en $\mathbb{A}$ es idéntica a la topología inducida por la topología descrita antes. De aquí se sigue que $\mathbb{A}$ es un grupo topológico abeliano localmente compacto.

Notemos que para cada p tenemos el encaje topológico

$$\mathbb{Q}_p \hookrightarrow \mathbb{A}, \qquad x \mapsto (\ldots, 1, 1, x, 1, 1, \ldots).$$

Luego, podemos identificar a $\mathbb{Q}_p$ con un subgrupo cerrado de $\mathbb{A}$.

2.2.5 El grupo de clases de Adèles de $\mathbb{Q}$

Como $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_p \mathbb{Z}_p$, el teorema de Aproximación nos permite describir al grupo de Adèles $\mathbb{A}$ de $\mathbb{Q}$ como:

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q} + \mathbb{A}_\infty = \mathbb{Q} + (\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}}).$$

Más aún, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{A}_\infty = \mathbb{Z}$.

Un dominio fundamental compacto para la acción de $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{A}$ es

$$D = \{x \in \mathbb{A} : |x_\infty|_\infty \leq 1/2 \text{ y } |x_p|_p \leq 1 \text{ para toda } p < \infty\} = [-1/2, 1/2] \times \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Podemos entonces probar que $D \cap \mathbb{Q} = \{0\}$ y que $\mathbb{A} = \mathbb{Q} + D$. De aquí tenemos que

Teorema 2.2.3. *$\mathbb{Q}$ es un subgrupo discreto y cocompacto de $\mathbb{A}$.*

Definición 2.2.4. *El **grupo de clases de Adèles** de $\mathbb{Q}$ es el grupo compacto $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$.*

El siguiente teorema nos da una bella descripción de este grupo:

Teorema 2.2.5. *Existe un isomorfismo de grupos topológicos*

$$\mathbb{A}/\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{S}.$$

Observación 2.2.6. *A partir de este teorema vemos que $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ es un límite proyectivo cuya n-ésima componente corresponde al único cubriente de grado $n \geq 1$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Como $\pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ tiene a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ como su único cociente de orden n, para cada $n \geq 1$, cada cubriente finito de S^1 se obtiene de $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$. Luego, $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ corresponde al Cubriente Universal Algebraico de S^1. El grupo de Galois del cubriente, $\widehat{\mathbb{Z}}$ es el "Grupo Fundamental Algebraico" de S^1.*

2.2.6 LA MEDIDA DE HAAR EN $\mathbb{A}$

Denotemos por dx_p a la medida de Haar (izquierda) definida sobre $\mathbb{Q}_p$, normalizada de manera que

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx_p = 1,$$

para casi toda $p \in J$. Entonces, existe una única medida de Haar dx en $\mathbb{A}$ tal que, para cada conjunto finito de índices S que contenga a J, la restricción dx_S de dx a $\mathbb{A}_S$ es precisamente la medida producto.

De aquí escribimos

$$dx = \prod_p dx_p,$$

para denotar a la medida de Haar (izquierda) definida sobre $\mathbb{A}$.

Proposición 2.2.7. *(a) Sea f una función integrable en $\mathbb{A}$. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{A}} f(x)dx = lim_S \int_{\mathbb{A}_S} f(x_S)dx_S.$$

(b) Sea S_0 un conjunto finito de índices que contenga a J y a aquellos p para los cuales $Vol(\mathbb{Z}_p, dx_p) \neq 1$, y supongamos que para cada índice p, damos una función continua integrable f_p sobre $\mathbb{Q}_p$ tal que $f_{p|\mathbb{Z}_p} = 1$ para toda $p \notin S_0$. Si $x = (x_p) \in \mathbb{A}$, definimos

$$f(x) = \prod_p f_p(x_p).$$

Entonces, f está bien-definida y es continua en $\mathbb{A}$. Si S es cualquier conjunto finito de índices que contenga a S_0, entonces

$$\int_{\mathbb{A}_S} f(x_S)dx_S = \prod_{p\in S}\left(\int_{\mathbb{Q}_p} f_p(x_p)dx_p\right).$$

Más aún,

$$\int_{\mathbb{A}} f(x)dx = \prod_{p}\left(\int_{\mathbb{Q}_p} f_p(x_p)dx_p\right),$$

y $f \in L^1(\mathbb{A})$, dado que el producto de la derecha es finito.

(c) Sean (f_p) y f como en (b), con la condición adicional de que f_p es la función característica de $\mathbb{Z}_p$ para casi toda p. Entonces, f es integrable.

Observación 2.2.8. *Toda función $\mathbb{Q}$-invariante f definida en $\mathbb{A}$ induce una función f en $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$. Sea $\overline{dx}$ la medida cociente definida en $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ e inducida por la medida dx de $\mathbb{A}$. Esta medida cociente está caracterizada por la relación*

$$\int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \widetilde{f}(x)\overline{dx} = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}\left(\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma+x)\right)\overline{dx} = \int_{\mathbb{A}} f(x)dx,$$

para toda función continua invariante f definida en $\mathbb{A}$.

Capítulo 3

Teoría de Funciones en $\mathbb{A}$

En este capítulo presentamos una generalización de la teoría de funciones casi-periódicas, originalmente introducidas por Harald Bohr en 1925 (ver [Boh]), y más tarde generalizadas por John von Neumann en 1934 (ver [Neu]). En 1938, André Weil, en su importante monografía [Wei], hace una descripción de funciones casi-periódicas desde un punto de vista muy general, para grupos de transformaciones actuando en espacios topológicos muy generales.

En esta parte de la tesis presentamos una generalización de la teoría de Bohr-von Neumann, para funciones definidas en el grupo de Adèles de $\mathbb{Q}$ que son adèle-valuadas. Usaremos una caracterización que presenta A. Weil de estas funciones, usando el hecho de que todo grupo topológico admite una representación continua en un grupo compacto, cuya imagen es densa. Entre otras cosas, esta noción generalizada nos permitirá caracterizar a una clase muy especial de funciones en $\mathbb{A}$: las funciones adèle-valuadas que son invariantes por la acción de $\mathbb{Q}$.

En la primera sección definimos estructuras uniformes en $\mathbb{A}$ y sus espacios de funciones relevantes. En el Apéndice A1 describimos los conceptos y resultados relevantes de estas estructuras. En las secciones siguientes hacemos la descripción de las funciones adèle-valuadas definidas en $\mathbb{A}$.

3.1 Estructuras uniformes

Estructura uniforme en $\mathbb{A}$: Una *estructura uniforme* en $\mathbb{A}$ está determinada al especificar una familia de subconjuntos de $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$, llamados *entornos*, que satisfacen ciertos axiomas. En el caso concreto que nos interesa, exhibiremos un *sistema fundamental de entornos* de dicha estructura. Para construir este sistema, usaremos los conjuntos U_u definidos de la siguiente manera. A cada vecindad U_0 de 0 en $\mathbb{A}$ le asociamos el conjunto $U_u = \{(x,y) \in \mathbb{A}\times\mathbb{A} : y-x \in U_0\}$. Sea $\mathfrak{U}$ la familia que consta de todos los conjuntos U_u, donde U_0 varía en un sistema fundamental de vecindades de 0.

Verificamos directamente que esta familia de conjuntos satisface los axiomas de un sistema fundamental de entornos de una uniformidad (i.e., una estructura uniforme) en $\mathbb{A}$. Esto es,

- Cada U_u contiene a la diagonal $\Delta \subset \mathbb{A} \times \mathbb{A}$, ya que $0 = x - x \in U_0$.
- Como $y-x \in U_0$ si y sólo si $x-y \in -U_0$, entonces $-U_u = (-U_0)_u \in \mathfrak{U}$.
- Si $z-x \in U_0$ y $y-z \in U_0$, entonces, $y-x = (y-z)+(z-x) \in U_0+U_0$ y por lo tanto, $U_u + U_u \subset (U_0 + U_0)_u \in \mathfrak{U}$.

Tenemos entonces que $\mathfrak{U}$ es un sistema fundamental de entornos de una uniformidad en $\mathbb{A}$. Esta uniformidad es también compatible con la topología de $\mathbb{A}$, ya que, si $U_u(x) = \{y \in \mathbb{A} : y - x \in U_0\}$, entonces $y \in U_u(x)$ es equivalente a $y \in x + U_0$. Esto es, $U_u(x) = x + U_0$, la cual es una vecindad de $x \in \mathbb{A}$. Se tiene además que, con esta estructura uniforme, $\mathbb{A}$ es un grupo uniforme *completo.*

Una propiedad importante de estas estructuras es que nos permiten hablar de 'cercanía' en un grupo topológico abstracto. Esto es, $x, y \in \mathbb{A}$ son 'cercanos', ó, x y y están *U_u-cercanos* si existe un entorno U_u de $\mathbb{A}$ tal que $y \in U_u(x)$. En este caso, escribiremos simplemente $x \sim_U y$ ó, $x \sim y$.

Estructura uniforme en $C(\mathbb{A},\mathbb{A})$: Usaremos la estructura uniforme en $\mathbb{A}$ definida anteriormente, para definir una estructura uniforme en $Map(\mathbb{A},\mathbb{A})$, el conjunto de todas las aplicaciones de $\mathbb{A}$ en si mismo. Denotaremos simplemente por U a los entornos de la uniformidad en $\mathbb{A}$ y, como antes, U_0 denotará a una vecindad de la identidad.

Para cada entorno U de $\mathbb{A}$, definimos $W(U)$ por:

$$
\begin{aligned}
W(U) &= \{(\Phi,\Psi) : (\Phi(x),\Psi(x)) \in U \text{ para toda } x \in \mathbb{A}\} \\
&= \{(\Phi,\Psi) : \Psi(x) - \Phi(x) \in U_0 \text{ para toda } x \in \mathbb{A}\}.
\end{aligned}
$$

Si U varía en la familia de entornos de $\mathbb{A}$, la familia de conjuntos $\mathfrak{W} = \{W(U) : U \in \mathfrak{U}\}$ forma un sistema fundamental de entornos de una uniformidad en $Map(\mathbb{A},\mathbb{A})$:

- Cada $W(U)$ contiene a la diagonal en $Map(\mathbb{A},\mathbb{A}) \times Map(\mathbb{A},\mathbb{A})$, ya que U contiene a la diagonal en $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$.

- $-W(U) = W(-U) \in \mathfrak{W}$, ya que $\Psi(x) - \Phi(x) \in U_0$ si y sólo si $\Phi(x) - \Psi(x) \in -U_0$.

- $W(U) + W(U) \subset W(U + U) \in \mathfrak{W}$, ya que si $\Psi(x) - \Phi(x) \in U_0$ y $\Sigma(x) - \Psi(x) \in U_0$, entonces $\Sigma(x) - \Phi(x) \in U_0 + U_0$.

Si $W_U(\Phi) = \{\Psi \in Map(\mathbb{A},\mathbb{A}) : \Psi(x) - \Phi(x) \in U_0\}$, entonces $\Psi \in W_U(\Phi)$ implica que $\Psi(x) \in \Phi(x) + U_0$, para toda $x \in \mathbb{A}$.

Definición 3.1.1. *La uniformidad en $Map(\mathbb{A},\mathbb{A})$ que tiene como sistema fundamental de entornos al conjunto $\mathfrak{W}$ se llama la* uniformidad de la convergencia uniforme. *La topología que induce se llama la* topología de la convergencia uniforme. *Si un filtro $\mathcal{F}$ en $Map(\mathbb{A},\mathbb{A})$ converge a un elemento Φ con respecto a esta topología, decimos que $\mathcal{F}$ converge uniformemente a Φ.*

Al espacio uniforme que se obtiene al dotar a $Map(\mathbb{A},\mathbb{A})$ con la uniformidad de la convergencia uniforme lo denotaremos por $Map_u(\mathbb{A},\mathbb{A})$. Como $\mathbb{A}$ es completo, el espacio uniforme $Map_u(\mathbb{A},\mathbb{A})$ es también completo.

Denotemos por $C(\mathbb{A},\mathbb{A})$ al conjunto que consta de todas las aplicaciones continuas de $\mathbb{A}$ en si mismo y por $C_u(\mathbb{A},\mathbb{A})$ al conjunto $C(\mathbb{A},\mathbb{A})$ provisto de la topología de la convergencia uniforme.

Observación 3.1.2. *1. $C(\mathbb{A},\mathbb{A})$ es un subconjunto cerrado de $Map(\mathbb{A},\mathbb{A})$ dotado de la topología de la convergencia uniforme. Esto es, límites uniformes de funciones continuas son continuas.*

2. $C_u(\mathbb{A},\mathbb{A})$ es completo ya que es un subespacio uniforme cerrado del espacio uniforme cerrado $Map_u(\mathbb{A},\mathbb{A})$.

Definición 3.1.3. *(a) Decimos que un subconjunto H de $Map(\mathbb{A},\mathbb{A})$ es* equicontinuo *en un punto $x_0 \in \mathbb{A}$ si, para cada entorno U de $\mathbb{A}$, existe una vecindad U_0 de x_0 en $\mathbb{A}$ tal que $(f(x), f(x_0)) \in U$ para toda $x \in U_0$ y toda $f \in H$. Decimos que H es equicontinuo si es equicontinuo en todo punto de $\mathbb{A}$.*

(b) Decimos que un subconjunto H de $Map(\mathbb{A},\mathbb{A})$ es uniformemente equicontinuo *si, para cada entorno V de $\mathbb{A}$, existe un entorno U de $\mathbb{A}$ tal que $(f(x), f(y)) \in V$ siempre que $(x,y) \in U$ y $f \in H$.*

Ejemplo 3.1.4. *Si* $\Phi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ *es uniformemente continua, entonces el conjunto de aplicaciones* $\{\Phi_s : s \in \mathbb{A}\}$ *es uniformemente equicontinuo ya que la relación* $y - x \in U_0$ *es equivalente a* $(s + y) - (s + x) \in U_0$. *Esto es, para todo entorno* V *de* $\mathbb{A}$, *existe un entorno* U *de* $\mathbb{A}$ *tal que* $(\Phi_s(x), \Phi_s(y)) \in V$ *para toda* $(x, y) \in U$ *y toda* $s \in \mathbb{A}$.

3.2 Funciones casi-periódicas en $\mathbb{A}$

Si $\Phi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ es uniformemente continua, la familia de trasladados de Φ, $\{L_s\Phi : s \in \mathbb{A}\}$ es uniformemente equicontinua, y por lo tanto, $C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ es un subespacio invariante por traslaciones. Luego, identificando $\mathbb{A}$ con el grupo de traslaciones $\{s \to L_s\}$ actuando como un grupo de homeomorfismos de $C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A})$, podemos considerar la $\mathbb{A}$-acción por traslaciones en $C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A})$:

$$\mathbb{A} \times C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A}) \longrightarrow C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A}), \qquad (s, \Phi) \longmapsto L_s\Phi = \Phi_s.$$

La representación $s \longrightarrow L_s$ es continua, ya que, para cada vecindad V_0 de la identidad en $\mathbb{A}$, existe, por continuidad uniforme de Φ, una vecindad U_0 de 0 tal que, si $t - s \in U_0$, entonces $\Phi(t) - \Phi(s) \in V_0$. Luego, $(t+x) - (s+x) \in U_0$, y por lo tanto $\Phi_t(x) - \Phi_s(x) \in V_0$, para toda $x \in \mathbb{A}$. Esto es, si $s \sim t$, entonces $\Phi_s \sim \Phi_t$, para toda $s, t \in \mathbb{A}$.

También, si $\Psi \in W_U(\Phi)$, entonces $\Psi(y) \in \Phi(y) + U_0$, para toda $y \in \mathbb{A}$. Esto es, $\Psi(y) - \Phi(y) \in U_0$, para toda $y \in \mathbb{A}$. Haciendo $y = s + x$, se cumple que, si $s \in \mathbb{A}$, entonces $\Psi_s(x) - \Phi_s(x) \in U_0$, para toda $x \in \mathbb{A}$. Luego, $\Psi_s \in W_U(\Phi_s)$, para toda $s \in \mathbb{A}$, y por lo tanto la familia $\{s \to L_s\}$ es uniformemente equicontinua.

Si $\Phi \in C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A})$, la *órbita* de Φ bajo la $\mathbb{A}$-acción es el conjunto

$$\mathcal{O}(\Phi) := \{\Phi_s : s \in \mathbb{A}\} \subset C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A}).$$

Definición 3.2.1. *Decimos que $\Phi \in C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ es* casi-periódica en $\mathbb{A}$ *si $\mathcal{O}(\Phi)$ es relativamente compacta en $C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A})$.*

Denotemos por $AP(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ al conjunto que consta de todas las funciones casi-periódicas en $\mathbb{A}$. La siguiente proposición nos proporciona un criterio para caracterizar a esta clase de funciones.

Proposición 3.2.2. *$\Phi \in C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ es casi-periódica en $\mathbb{A}$ si y sólo si para cada vecindad $W(\Phi)$ de Φ en $C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A})$, existen $s_1, ..., s_n \in \mathbb{A}$ tales que, para toda $s \in \mathbb{A}$, $L_{-s_j}(L_s\Phi) \in W(\Phi)$, para al menos una j, $1 \leq j \leq n$. Esto es, $\Phi \in C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ es casi-periódica en $\mathbb{A}$ si y sólo si para cada vecindad U_0 de la identidad $0 \in \mathbb{A}$, existen $s_1, ..., s_n \in \mathbb{A}$ tales que, para toda $s \in \mathbb{A}$, existe al menos una j, $1 \leq j \leq n$ tal que*

$$\Phi_s(x) - \Phi_{-s_j}(x) \in U_0, \qquad \textit{para toda } x \in \mathbb{A}.$$

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{O}(\Phi)$ es relativamente compacta en $C_u(\mathbb{A},\mathbb{A})$. Sea $W_U(\Phi) \subset C_u(\mathbb{A},\mathbb{A})$ una vecindad (uniforme) de Φ. Por compacidad de $\overline{\mathcal{O}(\Phi)}$, existe un número finito de elementos $s_1,\dots,s_n \in \mathbb{A}$, tales que

$$\overline{\mathcal{O}(\Phi)} \subset \bigcup_{j=1}^{n} L_{s_j}(W_U(\Phi)).$$

Esto es, para toda $s \in \mathbb{A}$, se cumple que $L_s\Phi \in L_{s_j}(W_U(\Phi))$, para alguna j. Por lo tanto, para toda $s \in \mathbb{A}$, $L_{-s_j}(L_s\Phi) \in W_U(\Phi)$, para alguna j.

Recíprocamente, supongamos que para cada vecindad $W_U(\Phi)$ de $\Phi \in C_u(\mathbb{A},\mathbb{A})$, existen $s_1,\dots,s_n \in \mathbb{A}$ tales que, para toda $s \in \mathbb{A}$, $L_{-s_j}(L_s\Phi) \in W(\Phi)$, para al menos una j, $1 \leq j \leq n$. Esto es, para toda $s \in \mathbb{A}$ se tiene que

$$L_s\Phi(x) \in \bigcup_{j=1}^{n}(L_{s_j}\Phi(x) + U_0), \qquad \text{para toda } x \in \mathbb{A}.$$

Esto es, el conjunto $\mathcal{O}(\Phi)(x) = \{L_s\Phi(x) : s \in \mathbb{A}\}$ es un conjunto relativamente compacto en $\mathbb{A}$ para toda $x \in \mathbb{A}$. Como $\mathcal{O}(\Phi)$ es también un conjunto uniformemente equicontinuo y $C_u(\mathbb{A},\mathbb{A})$ es completo, por el Teorema de Azcoli concluimos que $\mathcal{O}(\Phi)$ es relativamente compacta en $C_u(\mathbb{A},\mathbb{A})$. □

Corolario 3.2.3. *$AP(\mathbb{A},\mathbb{A})$ es un subgrupo uniforme cerrado de $C_u(\mathbb{A},\mathbb{A})$.*

3.3 FUNCIONES INVARIANTES EN $\mathbb{A}$

En adelante supondremos que $\mathbb{R}$ está dotado de su estructura uniforme, cuyo sistema fundamental de entornos está dado por la familia de conjuntos $\{(x,y) : |y-x| < \alpha\}$, para toda $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Observemos primero que cualquier función continua con soporte compacto $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ determina una función continua invariante ($\mathbb{Q}$-periódica)

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \varphi(\gamma + x),$$

y recíprocamente, cualquier función continua real-valuada $\mathbb{Q}$-periódica en $\mathbb{A}$ se puede escribir en la forma anterior con φ continua y de soporte compacto.

El conjunto $C_{\mathbb{Q}}(\mathbb{A})$, que consiste de todas estas funciones continuas, reales e invariantes representan la totalidad de funciones reales continuas definidas en $\mathbb{S}$.

Si $\Phi \in C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A})$, entonces

$$\varphi \circ \Phi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R},$$

es continua para cada $\varphi \in C_{\mathbb{Q}}(\mathbb{A})$. Luego, Φ determina un homomorfismo de espacios vectoriales

$$\Phi^* : C_{\mathbb{Q}}(\mathbb{A}_S) \longrightarrow C_{\mathbb{Q}}(\Phi^{-1}\mathbb{A}_S),$$

dado por

$$\varphi \longmapsto \Phi^*\varphi = \varphi \circ \Phi,$$

donde $\mathbb{A}_S = \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p$ con S un conjunto finito de índices.

Definición 3.3.1. *Decimos que una función continua adèle-valuada* $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *es* invariante bajo $\mathbb{Q}$ *ó* $\mathbb{Q}$-invariante *ó, simplemente* invariante *si*

$$\Phi(\gamma + x) = \Phi(x),$$

para toda $\gamma \in \mathbb{Q}$ *y* $x \in \mathbb{A}$.

Denotemos por $C_{inv}(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ al subespacio de $C_u(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ que consiste de todas las funciones invariantes. Observemos que, si $\Phi \in C_{inv}(\mathbb{A}, \mathbb{A})$, entonces $\Phi^*\varphi$ es también invariante, para toda $\varphi \in C_{\mathbb{Q}}(\mathbb{A})$.

Ejemplo 3.3.2. *Si* $\sigma : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{A}$ *es el subgrupo a un parámetro en* $\mathbb{A}$, *y* φ *es cualquier función real-valuada invariante en* $\mathbb{A}$, *entonces* $\Phi := \sigma \circ \varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ *es una función invariante adèle-valuada en* $\mathbb{A}$.

Ejemplo 3.3.3. *Sea* $u : \mathbb{R} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ *el flujo de traslación en* $\mathbb{A}$:

$$u(t, x) = \sigma(t) + x.$$

Para cada $x \in \mathbb{A}$ *tenemos una aplicación de traslación continua* $u_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{A}$ *dada por* $u_x = R_x \circ \sigma$; *i.e.,*

$$u_x(t) = \sigma(t) + x.$$

Si $\varphi \in C_{\mathbb{Q}}(\mathbb{A})$, *obtenemos una función continua adèle-valuada con soporte compacto* $\Phi := u_x \circ \varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *dada por*

$$\Phi(y) = (u_x \circ \varphi)(y) = \sigma(\varphi(y)) + x.$$

Luego, Φ *es* $\mathbb{Q}$*-invariante:* $\Phi(\gamma + y) = \Phi(y)$ *para toda* $\gamma \in \mathbb{Q}$.

Teorema 3.3.4. *Sea $\Phi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una función casi-periódica. Entonces, $\mathcal{O}(\Phi)$ es compacta si y sólo si existe un grupo abeliano uniforme compacto Γ, un homomorfismo continuo suprayectivo $\rho : \mathbb{A} \longrightarrow \Gamma$, y una función continua $\Phi_0 : \Gamma \longrightarrow \mathbb{A}$ tales que $\Phi = \Phi_0 \circ \rho$.*

Demostración. Supongamos primero que la órbita de Φ es compacta. Podemos definir una estructura de grupo en $\mathcal{O}(\Phi)$ de la siguiente manera: Si $\Phi_s, \Phi_t \in \mathcal{O}(\Phi)$ definimos

$$\Phi_s \oplus \Phi_t = \Phi_{s+t}.$$

Entonces,

- $\oplus$ está bien definida: Si $\Phi_s = \Phi_{s'}$ y $\Phi_t = \Phi_{t'}$, entonces

  $$\Phi_{s+t}(x) = \Phi(s+t+x) = \Phi(s'+t+x) = \Phi(t'+s'+x) = \Phi_{s'+t'}(x).$$

  Por lo tanto, $\Phi_{s+t} = \Phi_{s'+t'}$.

- $\oplus$ es asociativa, conmutativa. El elemento neutro es Φ y el inverso de Φ_s es Φ_{-s}.

- $\oplus$ es continua en la topología uniforme de $\mathcal{O}(\Phi)$: Si $\Phi_s(x) - \Phi_{s'}(x) \in U_0$ y $\Phi_t(x) - \Phi_{t'}(x) \in U_0$, entonces

  $$\begin{aligned}&\Phi_{s+t}(x) - \Phi_{s'+t'}(x) = \\ &\quad \Phi_s(t+x) - \Phi_{s'}(t+x) + \Phi_t(s'+x) - \Phi_{t'}(s'+x) \in U_0 + U_0 \subset U_0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{O}(\Phi)$ es un grupo abeliano uniforme compacto. La aplicación $\rho : \mathbb{A} \longrightarrow \mathcal{O}(\Phi)$ dada por $s \mapsto L_s\Phi$ es un homomorfismo continuo y suprayectivo. Definamos $\Phi_0 : \mathcal{O}(\Phi) \longrightarrow \mathbb{A}$ por

$$\Phi_0(\Phi_x) = \Phi(x).$$

Entonces, $\Phi_0 : \mathcal{O}(\Phi) \longrightarrow \mathbb{A}$ es continua y $\Phi = \Phi_0 \circ \rho$.

Recíprocamente, supongamos que $\Phi_0 : \Gamma \longrightarrow \mathbb{A}$ es una función continua adèle-valuada tal que $\Phi = \Phi_0 \circ \rho$. Como $s \longrightarrow L_s\Phi_0$ es continua y Γ es compacto, entonces $\mathcal{O}(\Phi_0) = \{L_s\Phi_0 : s \in \Gamma\}$ es compacta. Si $s \in \mathbb{A}$, entonces

$$L_s(\Phi_0 \circ \rho)(x) = \Phi_0 \circ \rho(s+x) = \Phi_0(\rho(s) + \rho(x)) = (L_{\rho(s)}\Phi_0 \circ \rho)(x).$$

Por lo tanto, la órbita de $\Phi_0 \circ \rho$ se manda sobre la órbita de Φ_0, la cual es compacta. Por lo tanto, $\mathcal{O}(\Phi)$ es compacta. □

Observación 3.3.5. *Toda función invariante en $\mathbb{A}$ es casi-periódica: Esto es claro, ya que, para toda $s \in \mathbb{A}$ se cumple que $\Phi_s = \Phi_{s+\gamma}$, para toda $\gamma \in \mathbb{Q}$. Por la proposición 2.2.2 se tiene que Φ es casi-periódica.*

La proposición anterior aplicada a una función invariante se transforma de la siguiente manera: Si $\Phi \in C_{inv}(\mathbb{A}, \mathbb{A})$, la aplicación $\rho : \mathbb{A} \longrightarrow \mathcal{O}(\Phi)$ dada por $s \mapsto L_s\Phi$ es un homomorfismo continuo y suprayectivo. Como Φ es invariante, el kernel de esta aplicación es $\mathbb{Q}$, y por lo tanto, $\mathcal{O}(\Phi) \cong \mathbb{A}/\mathbb{Q} \cong \mathbb{S}$. Consecuentemente, la aplicación ρ coincide con la proyección canónica $\Pi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{S}$. Luego, existe una correspondencia uno a uno entre

$$\{\text{Funciones invariantes } \Phi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}\} \longleftrightarrow \{\text{Funciones continuas } \Phi_0 : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{A}\}.$$

3.4 HOMEOMORFISMOS DE $\mathbb{A}$

Si $\alpha \in \mathbb{A}$, entonces la función constante $\Phi \equiv \alpha$ es invariante y el homeomorfismo de traslación en $\mathbb{A}$ está dado por $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$. Claramente este homeomorfismo está bien definido sobre $\mathbb{A}$ y toma valores adélicos. Luego, induce una rotación bien-definida en $\mathbb{S}$:

$$R_\rho : z \mapsto \rho \cdot z,$$

donde $\rho = \Pi_{\mathbb{Q}}(\alpha)$.

Si $F = id + \Phi$, con $\Phi \in C_{inv}(\mathbb{A}, \mathbb{A})$, es un homeomorfismo de $\mathbb{A}$, entonces

$$F \circ R_\alpha(x) = F(x + \alpha) = x + \alpha + \Phi(x + \alpha).$$

Como Φ es una función invariante, si $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces $\Phi(x + \alpha) = \Phi(x)$ y

$$F \circ R_\alpha(x) = x + \alpha + \Phi(x) = R_\alpha \circ F(x),$$

para toda $x \in \mathbb{A}$. Luego, cualquier homeomorfismo de $\mathbb{A}$ de la forma $F = id + \Phi$, con $\Phi \in C_{inv}(\mathbb{A}, \mathbb{A})$, conmuta con R_α si $\alpha \in \mathbb{Q}$. Además, F induce un homeomorfismo bien-definido $f : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}$ dado por

$$f = \Pi_{\mathbb{Q}} \circ F \circ \Pi_{\mathbb{Q}}^{-1}.$$

Denotemos por $\widetilde{Homeo}(\mathbb{S})$ al conjunto de todos los homeomorfismos de $\mathbb{A}$ que se escriben en la forma $F = id + \Phi$, con $\Phi \in C_{inv}(\mathbb{A}, \mathbb{A})$. De acuerdo con la discusión anterior, tenemos definida una proyección

$$\widetilde{Homeo}(\mathbb{S}) \longrightarrow Homeo(\mathbb{S}), \qquad F \mapsto f \mod \mathbb{Q}.$$

El kernel de esta proyección es $\{R_\gamma : \gamma \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q}$. Entonces,

$$Homeo(\mathbb{S}) \cong \widetilde{Homeo}(\mathbb{S})/\mathbb{Q},$$

y tenemos la siguiente sucesión exacta de grupos (topológicos)

$$1 \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \widetilde{Homeo}(\mathbb{S}) \xrightarrow{\pi} Homeo(\mathbb{S}).$$

Capítulo 4

Promedios Invariantes Generalizados

En este capítulo presentamos una generalización de la noción de promedio invariante de Bohr-von Neumann.

4.1 Promedios invariantes de Bohr y von Neumann

Promedios invariantes de Bohr: Si $\mathbb{A}_f$ denota al conjunto de *adeles finitos*, esto es, $\mathbb{A}_f$ es el producto directo restringido de $\mathbb{Q}_p$ con respecto de $\mathbb{Z}_p$, para todo $p < \infty$, entonces $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$. Denotemos por $0 = (0,0)$ al elemento idéntico en $\mathbb{A}$. La hoja base que pasa por 0, $L_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ es homeomorfa a $\mathbb{R}$ y la podemos identificar (via la proyección $\Pi_{\mathbb{Q}}$) con la hoja base L_e en $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$.

Si $\Phi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ es cualquier función casi-periódica que preserva la hoja base L_0, entonces

$$\Phi_{|L_0} := \Phi_0$$

es una función casi-periódica en $\mathbb{R}$. Esto es, $\Phi_{|L_0}$ se identifica de manera canónica con un elemento de $AP(\mathbb{R})$, el conjunto de funciones casi-periódicas de Bohr. De hecho, el *valor promedio* $M(\Phi_0)$ de Φ_0 coincide con el valor promedio (de Bohr) usual. Esto es,

$$M(\Phi_0) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Phi_0(t)dt.$$

Promedios invariantes de von Neumann: Supongamos ahora que $\Phi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ es cualquier función casi-periódica en $\mathbb{A}$ y consideremos el espacio de funciones $AP(\mathbb{A})$, que consiste de todas las funciones casi-periódicas real-valuadas de von Neumann definidas en $\mathbb{A}$. Entonces, $\Phi^*\varphi = \varphi \circ \Phi$ es también una función casi-periódica para cada $\varphi \in AP(\mathbb{A})$. Entonces, el *promedio invariante* (de von Neumann) de $\Psi = \Phi^*\varphi$, $M(\Psi)$ está dado por

$$M(\Psi) := \int \Phi^*\varphi d\mu = \int (\varphi \circ \Phi) d\mu,$$

donde μ es la medida de Haar normalizada en $\mathbb{A}$ descrita en el capítulo 1. Luego, si Γ es el grupo compacto asociado a $\mathbb{A}$, se tiene que existe una extensión continua $\Psi_0 : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ de Ψ, tal que

$$\Psi = \Psi_0 \circ \rho.$$

Por otro lado tenemos que $\mathbb{A}$ es σ-compacto; esto es, si $B(a, p^n) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |a - x|_p \leq p^n\}$ es la bola cerrada con centro en a y radio p^n en $\mathbb{Q}_p$, y μ_p es la medida de Haar normalizada en $\mathbb{Q}_p$, entonces $\mu_p(B(a, p^n)) = p^n$. Luego, si hacemos

$$H_n = B(a, p_1^n) \times B(a, p_2^{n-1}) \times \cdots \times B(a, p_n^0) \times \mathbb{Z}_{p_{n+1}} \times \cdots,$$

entonces $\mathbb{A} = \bigcup_{n \geq 1} H_n$. Por un teorema de Hewitt-Ross (ver [HR], Cap. X), se tiene que el valor promedio (de von Neumann) de Ψ_0, está dado por

$$\int_\Gamma \Psi_0 d\Lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu(H_n)} \int_{H_n} (\Psi_0 \circ \rho) d\mu = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu(H_n)} \int_{H_n} (\varphi \circ \Phi) d\mu,$$

donde Λ es la medida de Haar normalizada en Γ. Además, si $U \subset \Gamma$ es un abierto tal que $\Lambda(U) = \Lambda(\overline{U})$, entonces

$$\Lambda(U) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu(H_n)} \int_{H_n} (\psi_U \circ \rho) d\mu,$$

donde ψ_U es la función característica de U.

4.2 Promedios invariantes generalizados

Sea $\sigma : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{A}$ el subgrupo a un parámetro en $\mathbb{A}$. Si $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua en $\mathbb{A}$, entonces la función $\Phi_\sigma : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ dada por

$$\Phi_\sigma(x) = \sigma(\varphi(x)),$$

es uniformemente continua en $\mathbb{A}$. El conjunto de funciones adèle-valuadas definidas de esta manera es invariante por la $\mathbb{A}$-acción: para toda $s \in \mathbb{A}$, $L_s\Phi_\sigma$ es uniformemente continua. Si $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ es casi-periódica, entonces $L_s\Phi_\sigma(x) = \sigma \circ \varphi_s(x)$. Luego, $\overline{\mathcal{O}(\Phi_\sigma)}$ es compacta y por lo tanto, Φ_σ es casi-periódica.

Denotemos por $AP_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ al conjunto que consta de todas estas funciones casi-periódicas definidas en $\mathbb{A}$. Esto es,

$$AP_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{A}) = \{\Phi_\sigma \in AP(\mathbb{A}, \mathbb{A}) : \Phi_\sigma = \sigma \circ \varphi, \ \varphi \in AP(\mathbb{A})\}.$$

Claramente $AP_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ es un subgrupo de $AP(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ y, si φ es invariante, entonces también Φ_σ es invariante.

Teorema 4.2.1. *Si $M : AP(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es el promedio invariante de von Neumann definido en $\mathbb{A}$, entonces existe un promedio invariante con valores adélicos definido en $\mathbb{A}$*

$$\mathbb{M} : AP_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{A},$$

dado por

$$\mathbb{M}(\Phi_\sigma) = \sigma \circ M(\varphi),$$

donde $\Phi_\sigma = \sigma \circ \varphi$ y $\varphi \in AP(\mathbb{A})$.

Demostración. Para cada $\varphi \in AP(\mathbb{A})$, existe un único promedio invariante $M(\varphi)$. Si $\Phi_\sigma = \sigma \circ \varphi$ es cualquier función casi-periódica en $AP_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{A})$, entonces tenemos un único adèle $\mathbb{M}(\Phi_\sigma)$ dado por

$$\mathbb{M}(\Phi_\sigma) = \sigma \circ M(\varphi).$$

Este valor $\mathbb{M}(\Phi_\sigma)$ así definido, satisface:

- $\mathbb{M}(\Phi_\sigma) := \sigma(M(\varphi)) \in \mathbb{A}$, para toda $\Phi_\sigma \in AP_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{A})$.
- $\mathbb{M}$ es lineal: $\mathbb{M}(\Phi_\sigma + \Psi_\sigma) = \sigma(M(\varphi + \psi)) = \sigma(M(\varphi)) + \sigma(M(\psi)) = \mathbb{M}(\Phi_\sigma) + \mathbb{M}(\Psi_\sigma)$, para cualesquiera $\Phi_\sigma = \sigma \circ \varphi, \Psi_\sigma = \sigma \circ \psi \in AP_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{A})$.

- $\mathbb{M}$ es invariante bajo traslaciones (izquierdas): $\mathbb{M}(L_s\Phi_\sigma) = \sigma \circ M(L_s\varphi) = \sigma \circ M(\varphi) = \mathbb{M}(\Phi_\sigma)$, para toda $\Phi_\sigma \in AP_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ y $s \in \mathbb{A}$.

- $\mathbb{M}(1_\sigma) = 1_\sigma$: Si 1_σ es la función idénticamente igual a $\sigma(1) \in \mathbb{A}$, entonces $\mathbb{M}(1_\sigma) = \sigma \circ M(1) = \sigma(1) = 1_\sigma$.

Por lo tanto, $\mathbb{M}$ es un promedio invariante con valores adélicos definido en $\mathbb{A}$. □

Observación 4.2.2. *Si μ es la medida de Haar (izquierda) definida en $\mathbb{A}$, por el Teorema de Representación de Riesz,*

$$M(\varphi) = \int_{\mathbb{A}} \varphi d\mu.$$

De acuerdo con el teorema anterior, tenemos que

$$\mathbb{M}(\Phi_\sigma) = \sigma(\int_{\mathbb{A}} \varphi d\mu).$$

Apéndice

En este apéndice haremos un recuento de los conceptos y resultados topológicos importantes que se necesitan en este trabajo. Las demostraciones y extensiones de los conceptos y resultados pueden encontrarse en el libro de N. Bourbaki [Bou], Capítulos I, III, IV y X.

Espacios uniformes

En adelante X denotará a un espacio topológico.

Filtros

Definición 1. *Un* filtro $\mathcal{F}$ *en* X *es una familia de subconjuntos de* X *que satisface los siguientes axiomas:*

(F_I) *Si* $V \in \mathcal{F}$ *y* $U \supset V$, *entonces* $U \in \mathcal{F}$.

(F_{II}) *Si* $V_1, ..., V_n \in \mathcal{F}$, *entonces* $\bigcap_{j=1}^{n} V_j \in \mathcal{F}$.

(F_{III}) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Ejemplo 2. *El conjunto que consta de todas las vecindades de un subconjunto* A *de* X, *diferente del vacío, es un filtro, llamado el filtro de vecindades de* A. *En particular, si* $A = \{x\}$, *entonces tenemos el filtro de vecindades del punto* x.

Definición 3. *Sea* $\mathcal{B}$ *una familia de subconjuntos de* X. *Entonces la familia de subconjuntos de* X *que contiene a un elemento de* $\mathcal{B}$ *es un filtro en* X *si y sólo si* $\mathcal{B}$ *satisface las siguientes dos propiedades:*

(B_I) *Si* $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$, *entonces* $V_1 \cap V_2 \supset U \in \mathcal{B}$.

(B_{II}) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ *y* $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

Definición 4. *Una familia de subconjuntos* $\mathcal{B}$ *de* X *es un* filtro base *si* $\mathcal{B}$ *satisface los axiomas* B_I *y* B_{II}.

Ejemplo 5. *1. Las bases de filtros de vecindades de un punto* x *son los sistemas fundamentales de vecindades (SFV) de* x.

2. Si $\mathcal{B}$ *es un filtro base en* X *y* $f : X \longrightarrow Y$ *es cualquier aplicación continua, entonces* $f(X)$ *es un filtro base en* Y, *ya que* $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$.

Definición 6. *Sea* $\{x_n\} \subset X$ *una sucesión en* X. *El* filtro elemental *asociado a* $\{x_n\}$ *consiste de todos los subconjuntos* V *de* X *tales que* $x_n \in V$ *para toda* n, *excepto un número finito. Si* $V_n = \{x_p : p \geq n\}$, *entonces* $\{V_n\}$ *es una base del filtro elemental asociado a* $\{x_n\}$.

Límites

Definición 7. *Sea* $\mathcal{F}$ *un filtro en* X. *Decimos que* $x \in X$ *es un* punto límite *de* $\mathcal{F}$ *si* $\mathcal{F}$ *es más fino que el filtro de vecindades* $\mathcal{B}(x)$ *de* x. *Decimos también que* $\mathcal{F}$ *converge a* x.

Observación 8. *Un filtro base* $\mathcal{B}$ *converge a* x *si y sólo si cada elemento de un sistema fundamental de vecindades de* x *contiene a un elemento de* $\mathcal{B}$. *En otras palabras,* $\mathcal{B}$ *converge a* x *si y sólo si hay elemntos de* $\mathcal{B}$ *tan cerca como queramos de* x.

Definición 9. *Decimos que* $x \in X$ *es un* punto de acumulación *de un filtro base* $\mathcal{B}$ *si* x *está en la cerradura de todo elemento de* $\mathcal{B}$.

Proposición 10. *(a)* $x \in X$ *es un punto de acumulación de un filtro base* $\mathcal{B}$ *si y sólo si cada elemento de un SFV de* x *intersecta a todo elemento de* $\mathcal{B}$.

(b) $x \in X$ *es un punto de acumulación de un filtro* $\mathcal{F}$ *si y sólo si existe un filtro más fino que* $\mathcal{F}$ *que converge a* x.

(c) El conjunto de puntos de acumulación de un filtro base es cerrado.

(d) *Si $\mathcal{B}$ es un filtro base en $A \subset X$, entonces el conjunto de puntos de acumulación de $\mathcal{B}$ coincide con $\overline{A}$.*

Definición 11. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Decimos que $y \in Y$ es un* punto límite (acumulación) *de f con respecto de $\mathcal{F}$ si y es un punto límite (acumulación) de $f(\mathcal{F})$.*

Observación 12. *$y \in Y$ es un punto límite de f con respecto de $\mathcal{F}$ si y sólo si para toda vecindad $V \subset Y$ de y, existe $U \in \mathcal{F}$ tal que $f(U) \subset V$ (i.e., $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$ para toda $V \in \mathcal{B}(y)$) si y sólo si para toda vecindad V de y en Y, y para toda $U \in \mathcal{F}$, existe $x \in U$ tal que $f(x) \in V$.*

ESTRUCTURAS UNIFORMES

Definición 13. *Una* estructura uniforme ó uniformidad *en X es una estructura dada por una familia $\mathfrak{U}$ de subconjuntos de $X \times X$ que satisface los axiomas $(F_I), (F_{II})$ y:*

(U_I) *Todo elemento $U \in \mathfrak{U}$ contiene a la diagonal $\Delta \subset X \times X$.*

(U_{II}) *Si $U \in \mathfrak{U}$, entonces $U^{-1} \in \mathfrak{U}$.*

(U_{III}) *Para todo $U \in \mathfrak{U}$, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $V \circ V \subset U$.*

Los elementos de $\mathfrak{U}$ se llaman *entornos* de la uniformidad en X definida por $\mathfrak{U}$. Un espacio X dotado de una uniformidad se llama un *espacio uniforme.* Si U es un entorno de X decimos que x y y están *U-cercanos* si $(x, y) \in U$. En adelante, X **denotará a un espacio uniforme.**

Definición 14. *Un* sistema fundamental de entornos (SFE) *de una uniformidad es cualquier conjunto de entornos $\mathcal{B}$ tal que cada entorno de X contiene a un elemento de $\mathcal{B}$.*

Observación 15. *Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X \times X$ es un SFE de una uniformidad en X si y sólo si la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ contiene a un elemento de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ satisface:*

(U'_I) *Todo elemento $U \in \mathcal{B}$ contiene a la diagonal $\Delta \subset X \times X$.*

(U'_{II}) *Si $U \in \mathcal{B}$, entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset U^{-1}$.*

(U'_{III}) *Para todo* $U \in \mathcal{B}$, *existe* $V \in \mathcal{B}$ *tal que* $V \circ V \subset U$.

Ejemplo 16. *Un SFE de una estructura uniforme en* X *es una base del filtro determinado por los entornos de esta estructura.*

Observación 17. *Para cada* $x \in X$, *sea* $\mathcal{B}(x) = \{V(x) : V \in \mathfrak{U}\}$, *donde* $V(x) = \{y \in X : (x,y) \in V\}$. *Entonces, existe una única topología en* X *tal que, para toda* $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ *es un filtro de vecindades de* x *en esta topología. Esta topología se llama la topología inducida por la estructura uniforme* $\mathfrak{U}$.

Definición 18. *Sea* Y *un espacio uniforme y* $f : X \longrightarrow Y$ *una aplicación. Entonces,* f *es uniformemente continua si y sólo si para todo entorno* V *de* Y, *existe un entorno* U *de* X *tal que si* $(x,y) \in U$, *entonces* $(f(x), f(y)) \in V$.

Ejemplo 19. *(a) La función identidad en* X *es uniformemente continua.*

(b) Toda función constante en X *es uniformemente continua.*

(c) Si X *es discreto y* Y *es un espacio uniforme, entonces* $f : X \longrightarrow Y$ *es uniformemente continua.*

(d) La composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

ESPACIOS COMPLETOS

Definición 20. *Sea* U *un entorno de* X. *Decimos que* $A \subset X$ *es* U-pequeño *si todo par de puntos* x, y *de* A *están* U*-cercanos. (i.e.,* $A \times A \subset U$.*)*

Definición 21. *(a) Un filtro* $\mathcal{F}$ *en* X *es un* filtro de Cauchy *si para todo entorno* U *de* X, *existe* $V \subset X$ *tal que* V *es* U*-pequeño y* $V \in \mathcal{F}$.

(b) Una sucesión $\{x_n\} \subset X$ *es de Cauchy si para todo entorno* U *de* X, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $(x_n, x_m) \in U$, *para toda* $n, m \geq N$.

(c) Un espacio uniforme es completo *si todo filtro de Cauchy converge.*

Proposición 22. *(a) Todo filtro convergente en* X *es de Cauchy.*

(b) Sea Y *un espacio uniforme y* $f : X \longrightarrow Y$ *una función uniformemente continua. Si* $\mathcal{F}$ *es un filtro base de Cauchy en* X, *entonces* $f(\mathcal{F})$ *es un filtro base de Cauchy en* Y.

(c) Todo subespacio cerrado de un espacio uniforme completo es completo.

COMPACIDAD Y COMPLETEZ

Definición 23. *Una uniformidad en X es* compatible *con su topología si la topología de X coincide con la topología inducida por la uniformidad.*

Proposición 24. *En un espacio compacto X existe exactamente una uniformidad compatible con la topología de X; los entornos de esta uniformidad son todas las vecindades de la diagonal $\Delta \subset X \times X$. Más aún, con esta uniformidad, X es un espacio uniforme completo.*

Ejemplo 25. *Toda aplicación continua de un espacio compacto en un espacio uniforme es uniformemente continua.*

Proposición 26. *(a) Un espacio uniforme X es precompacto si y sólo si para todo entorno U de X, existe una cubierta finita de X por conjuntos U-pequeños.*

(b) Un espacio uniforme X es compacto si y sólo si X es Hausdorff, completo y se puede cubrir por un número finito de conjuntos U-pequeños, donde U es cualquier entorno de X.

(c) En un espacio uniforme, los subconjuntos de un conjunto precompacto son precompactos; la unión finita de conjuntos precompactos es precompacta; la cerradura de cualquier conjunto precompacto es precompacta.

(d) En un espacio uniforme, un subconjunto relativamente compacto es precompacto.

GRUPOS TOPOLÓGICOS

Definición 27. *Un* grupo topológico abeliano *es un conjunto G que admite una estructura de grupo abeliano, una estructura de espacio topológico y que satisface los siguientes axiomas:*

(GT_I) La aplicación $G \times G \longrightarrow G$ dada por $(x, y) \mapsto x + y$ es continua.

(GT_{II}) La aplicación $G \longrightarrow G$ dada por $x \mapsto -x$ es continua.

Definición 28. *(a) Todo grupo topológico abeliano admite una estructura uniforme que es compatible con su estructura de grupo topológico.*

(b) Todo grupo topológico abeliano y localmente compacto es completo.

ESPACIOS DE FUNCIONES

ESTRUCTURA UNIFORME

En adelante, Y **denotará un espacio uniforme completo.**

Denotemos por $Map(X,Y)$ al conjunto de todas las aplicaciones de X en Y. Para cada entorno V de Y, definamos $W(V)$ por:

$$W(V) = \{(\Phi, \Psi) : (\Phi(x), \Psi(x)) \in V \text{para toda } x \in X\}.$$

Si V varía en un conjunto de entornos de Y, los conjuntos $W(V)$ forman un sistema fundamental de entornos de una uniformidad en $Map(X,Y)$.

Definición 29. *La uniformidad en $Map(X,Y)$ que tiene como sistema fundamental de entornos al conjuntos que consta de todos los conjuntos de la forma $W(V)$, donde V varía en un conjunto de entornos de Y, se llama la* uniformidad de la convergencia uniforme. *La topología que induce se llama la* topología de la convergencia uniforme. *Si un filtro $\mathcal{F}$ en $Map(X,Y)$ converge a un elemento Φ con respecto a esta topología, decimos que $\mathcal{F}$ converge uniformemente a Φ.*

Al espacio uniforme que se obtiene al dotar a $Map(X,Y)$ con la uniformidad de la convergencia uniforme lo denotaremos por $Map_u(X,Y)$. Como Y es completo, el espacio uniforme $Map_u(X,Y)$ es también completo.

Denotemos por $C(X,Y)$ al conjunto que consta de todas las aplicaciones continuas de X en Y, y por $C_u(X,Y)$ al conjunto $C(X,Y)$ provisto de la topología de la convergencia uniforme.

Proposición 30. *(a) Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, entonces el conjunto H de aplicaciones $\Phi : X \longrightarrow Y$ tales que $\Phi(\mathcal{F})$ es un filtro base de Cauchy en Y, es cerrado en $Map_u(X,Y)$.*

(b) El conjunto de aplicaciones $\Phi : X \longrightarrow Y$ que son continuas en $x_0 \in X$ es cerrado en $Map_u(X,Y)$.

(c) $C(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $Map(X,Y)$ dotado de la topología de la convergencia uniforme. Esto es, límites uniformes de funciones continuas son continuas.

(d) $C_u(X,Y)$ es completo ya que es un subespacio uniforme cerrado del espacio uniforme completo $Map_u(X,Y)$.

CONJUNTOS EQUICONTINUOS

Definición 31. *(a) Decimos que un subconjunto H de $Map(X,Y)$ es* equicontinuo *en un punto $x_0 \in X$ si, para cada entorno V de Y, existe una vecindad U de x_0 en X tal que $(\Phi(x), \Phi(x_0)) \in V$ para toda $x \in U$ y toda $\Phi \in H$. Decimos que H es equicontinuo si es equicontinuo en todo punto de X.*

(b) Decimos que un subconjunto H de $Map(X,Y)$ es uniformemente equicontinuo *si, para cada entorno V de Y, existe una vecindad U de X tal que $(\Phi(x), \Phi(y)) \in V$ siempre que $(x,y) \in U$ y $\Phi \in H$.*

Proposición 32. *(a) Sea T un conjunto y $f : T \times X \longrightarrow Y$ una aplicación. Sea $H \subset Map_u(X,Y)$ el conjunto de aplicaciones $x \to f(t,x)$, para cada $t \in T$. Entonces, la aplicación $x \to f(\cdot,x)$ de X en $Map_u(T,Y)$ es uniformemente continua si y sólo si H es uniformemente equicontinuo.*

(b) Sea H un subconjunto de $Map(X,Y)$. Para cada $x \in X$, sea $\widetilde{x}$ la aplicación $h \to h(x)$ de H en Y. Entonces, H es uniformemente equicontinuo si y sólo si la aplicación $x \to \widetilde{x}$ de X en $Map_u(X,Y)$ es uniformemente continua. En particular, si X es compacto, toda función continua de X en $Map_u(X,Y)$ es uniformemente continua.

(c) Si T es también un espacio uniforme y $f : T \times X \longrightarrow Y$ es cualquier aplicación, entonces, f es uniformemente continua si y sólo si

- *La familia de aplicaciones $x \to f(t,x)$ $(t \in T)$ es uniformemente equicontinua en $Map(X,Y)$.*
- *La familia de aplicaciones $t \to f(t,x)$ $(x \in X)$ es uniformemente equicontinua en $Map(T,Y)$.*

(d) Sea $H \subset Map(X,Y)$. Entonces, H es uniformemente equicontinua si y sólo si la aplicación $(h,x) \to h(x)$ de $H \times X \longrightarrow Y$ es uniformemente equicontinua.

Proposición 33. *(a)* Teorema de Azcoli: *Sea $\mathcal{C}$ una cubierta de X. Sea $H \subset Map(X,Y)$ un subconjunto tal que, para cada $A \in \mathcal{C}$ y $\Phi \in H$, la restricción de Φ a A es continua (uniformemente continua). Entonces, H es precompacto con respecto a la $\mathcal{C}$-convergencia si y sólo si $A \in \mathcal{C}$ es compacto (precompacto) y*

- *Para cada $A \in \mathcal{C}$, el conjunto de restricciones $H_{|A} \subset Map(A, Y)$ es equicontinuo (uniformemente equicontinuo).*
- *Para cada $x \in X$, $H(x) = \{h(x) : h \in H\} \subset Y$ es precompacto.*

(b) $H \subset Map(X, Y)$ es uniformemente equicontinuo si y sólo si $\overline{H} \subset Map_{pre}(X, Y)$ es uniformemente equicontinuo.

(c) Sea H un subconjunto (uniformemente) equicontinuo de $C(X, Y)$. Si $H(x)$ es relativamente compacto en Y para cada $x \in X$, entonces H es relativamente compacto en $C(X, Y)$ con respecto a la topología de la convergencia (precompacta) compacta.

(d) Supongamos que X es localmente compacto y sea H un subconjunto de $C(X, Y)$. Entonces, H es relativamente compacto en $C_c(X, Y)$ si y sólo si $H(x)$ es equicontinuo y relativamente compacto en Y para toda $x \in X$.

Proposición 34. *Supongamos que X es localmente compacto y sea G el grupo de homeomorfismos de X. Si $\overline{G} \subset C_c(X, X)$ es compacta, entonces $\overline{G}$ es un grupo de homeomorfimos de X y la topología de convergencia compacta es compatible con la estructura de grupo de $\overline{G}$, el cual es por lo tanto, un grupo topológico compacto.*

Bibliografía

[Boh] H. Bohr, *Almost Periodic Functions*, Chelsea, 1947.

[Bou] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics: General Topology, Vol. I, II*, Addison-Wesley, 1966.

[HR] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis, Vol. I, II*, Springer Verlag, 1970.

[Kob] N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta Functions*, Springer Verlag, 1977.

[Neu] J. von Neumann, *Almost periodic functions in a group I*, Transactions AMS **36**, no. 3 (1934), 445-554.

[RV] D. Ramakhrisnan and R. Valenza, *Fourier Analysis on Number Fields*, Springer Verlag, 1999.

[Wei] A. Weil, *L'Intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, 1938.

[Wil] J.S. Wilson, *Profinite groups*, Oxford University Press, 1995.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA