



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"NUCLEOS EN DIGRAFICAS B1 Y
B2 ORIENTADAS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

VILLAR LEAL JOSE ANTONIO



DIRECTOR DE TESIS DRA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ

2004



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: José Antonio Villar Leal

FECHA: 6-enero-2004

FIRMA: [Signature]

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

“Núcleos en digráficas B1 y B2-orientadas”

realizado por **Villar Leal José Antonio**

con número de cuenta **07022538-9** , quien cubrió los créditos de la carrera de:
Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dra. Hortensia Galeana Sánchez [Signature]

Propietario

Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía [Signature]

Propietario

Lic. Laura Pastrana Ramírez Laura Pastrana R.

Suplente

M. en C. Patricia Cortés Flores [Signature]

Suplente

M. en C. Pilar Valencia Saravia [Signature]

Consejo Departamental de **Matemáticas**



[Signature]

M. en C. José Antonio Flores Díaz
Coordinador de la Carrera de **Actuaría**
FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL

Agradecimientos

A mis padres:

José Antonio Villar Molina

María Petra Leal García

A mis hermanos:

Víctor Manuel, Maribel, Alfonso,

Jesús Carlos, Lucila Soledad,

Alejandra y Efrén

A mi esposa e hijos:

Sofía González García

Diego Villar González

Sandra Villar González

A mis sobrinos

A mis maestros

Gracias

ÍNDICE

1	Introducción y conceptos generales	
1.1	Introducción	2
	1.1.1 Objetivo	2
	1.1.2 Antecedentes Históricos	3
1.2	Gráficas	6
1.3	Digráficas	12
1.4	Conexidad en digráficas	20
2	Teoría de núcleos	
2.1	Definiciones y resultados fundamentales	31
2.2	Aplicaciones	39
3	Una caracterización alternativa de Gráficas Perfectas	
3.1	Definiciones	51
3.2	Gráficas que son normalmente orientables y B_1 -orientables	54
4	Digráficas B_1 -orientadas y B_2 -orientadas	
4.1	Definiciones	64
4.2	Núcleos en Digráficas B_1 -orientadas	67
4.3	Núcleos en Digráficas B_2 -orientadas	75
4.4	Conclusiones	90
5	Referencias	92

1 Introducción y conceptos generales

1.1 Introducción.

1.1.1 Objetivo.

El objetivo del presente trabajo, es realizar una revisión sobre trabajos realizados en teoría de núcleos en digráficas B_1 -orientadas y B_2 -orientadas. Este Trabajo consta de cuatro capítulos.

En el primero, se presentan antecedentes históricos, definiciones básicas de gráficas y digráficas. Para finalizar el capítulo se presenta una sección de conexidad en digráficas. En ésta se presentan las definiciones (ilustrando la mayoría de ellas para su mejor comprensión), necesarias para entender los conceptos, resultados y teoremas utilizados en los capítulos siguientes.

El segundo está dedicado a Teoría de Núcleos, en él se presentan definiciones, digráficas, resultados fundamentales y aplicaciones de la misma.

En el tercer capítulo analiza una caracterización alternativa de Gráficas Perfectas, presentada por Claude Berge y P. Duchet (1982):

“Una gráfica G , es perfecta si y sólo si, cualquier orientación normal de G es núcleo perfecta”.

Y se prueba la validez de una versión de esta conjetura para gráficas que aceptan una orientación normal y una B_1 -orientación.

En el cuarto capítulo, se prueba que las digráficas B_1 -orientadas y las B_2 -orientadas satisfacen la siguiente conjetura propuesta por Meyniel (1980):

“Si cada ciclo dirigido de longitud impar en una digráfica D , tiene al menos dosseudodiagonales, entonces D tiene un núcleo”.

En [5] Meyniel conjetura que si D es una digráfica tal que todo ciclo dirigido impar posee dosseudodiagonales, entonces D es una digráfica núcleo-perfecta.

Esta conjetura fue refutada por Galeana [7]. No obstante, existen clases especiales de digráficas para las cuales la conjetura es válida (Duchet y Meyniel [6], Galeana[8]).

En el **Teorema 4.3.2** se prueba la validez de la conjetura para las digráficas que son localmente B_1 -orientadas ó B_2 -orientadas

Al final de este capítulo se presentan las conclusiones del presente trabajo.

1.1.2 Antecedentes Históricos

Teoría de Gráficas

El primer documento de Teoría de Gráficas fue escrito por el famoso matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), y éste apareció en 1736, en un volumen de publicaciones de la Academia de Ciencia en San Petersburgo (Leningrado). Euler empezó su documento de Teoría de Gráficas, con una discusión sobre un acertijo denominado “El problema de los puentes de Königsberg”.

Desde un punto de vista matemático, el nacimiento de la Teoría de Gráficas fue poco notable y se limitaba a la solución de acertijos. Pero los desarrollos recientes en matemáticas y sus aplicaciones han dado un fuerte ímpetu a la Teoría de Gráficas.

En el siglo XIX las gráficas fueron usadas en otros campos como son: circuitos eléctricos y diagramas moleculares. Más tarde las gráficas aparecen en la ingeniería eléctrica, en química, psicología y economía.

Los primeros matemáticos en trabajar en teoría de gráficas, consideraron principalmente gráficas no dirigidas, y esto llevó a los estudiantes a la creencia de que había dos teorías de gráficas, una para gráficas dirigidas y otra para gráficas no dirigidas.

Un resultado para una gráfica no dirigida, puede ser interpretado como un resultado para una gráfica dirigida en la que la dirección de sus flechas no importa. Recíprocamente un resultado de una gráfica dirigida puede ser interpretado como un resultado para una gráfica no dirigida, reemplazando cada arista de la gráfica no dirigida con dos flechas de direcciones opuestas y con los mismos puntos finales. Desde este punto de vista, es razonable pensar en que sólo hay una Teoría de Gráficas.

En la actualidad existen temas en matemáticas puras, por ejemplo, la teoría de las relaciones matemáticas, donde la teoría de gráficas es una herramienta natural, pero existen numerosos usos en conexión con cuestiones muy prácticas como: juegos, problemas de transportación, el flujo de la conducción en redes, y lo comúnmente denominado "Programación".

En matemáticas, la Teoría de Gráficas es clasificada como una rama de la topología, pero también está fuertemente relacionada con el álgebra moderna y con la teoría de matrices y hay un amplio campo de aplicaciones en problemas combinatorios y en problemas de álgebra clásica.

Teoría de Núcleos

El concepto de núcleo de una digráfica fue considerado primeramente por Von Neumann, en Teoría de Juegos donde lo llamó "solución de un juego por cooperación entre n personas". Posteriormente Claude Berge notó que el mismo concepto resultaba de utilidad en otros contextos y propuso llamarlo "el núcleo de una digráfica" y demostró teoremas de existencia.

Digráficas B_1 -orientadas y B_2 -orientadas

El concepto de B_1 -orientación fue introducido por Skrien [14] y una caracterización de las digráficas B_1 -orientadas, en el caso que en el que D no tiene flechas simétricas fue obtenida por Graviil y Urrutia [11]; ellos también probaron que las gráficas de intervalos, las gráficas trianguladas y las gráficas de arcos circulares son todas gráficas B_1 -orientables.

Muchas propiedades de las digráficas B_1 -orientables fueron obtenidas por J. Bang-Jensen [1]. Una clase de gráficas normalmente B_1 -orientables fueron estudiadas por Graviil y Toledano [10], quienes encontraron un algoritmo en tiempo polinomial para encontrar un núcleo en una clase de gráficas normalmente B_1 -orientables.

1.2 Gráficas

Una gráfica se define de la siguiente manera: Sean V un conjunto finito no vacío, y $A \subseteq V \times V$, una colección de pares de distintos elementos de V , una gráfica G está determinada por V y A , donde V es el conjunto de vértices de G , es cual se denotará como $V(G)$, y A es el conjunto de aristas de G , denotado por $A(G)$.

Una gráfica es un conjunto de puntos junto con un conjunto de aristas, de tal manera que cada arista une a un punto con otro. En este trabajo, la posición de los vértices en el trazado de una gráfica no es importante, lo que importa, es la manera en que las aristas unen a los vértices.

Sean G y H gráficas, se dice que G es una subgráfica de H si:

$$V(G) \subseteq V(H) \text{ y } A(G) \subseteq A(H).$$

En la figura 1.2.1 se pueden observar las gráficas H , G_1 y G_2 , donde:

$$V(H) = \{ a, b, c, d, e, f, g \}; V(G_1) = \{ a, b, c, d, e, f, g \}; V(G_2) = \{ a, b, c, d, e, f \}$$

$$A(H) = \{ (a, b), (a, f), (b, c), (b, d), (c, e), (d, e), (e, g), (f, g) \}$$

$$A(G_1) = \{ (a, b), (a, f), (b, c), (b, d), (c, e), (d, e), (e, g) \}$$

$$A(G_2) = \{ (a, b), (a, f), (b, c), (b, d), (c, e), (d, e) \}$$

Claramente $V(G_1) \subseteq V(H)$ y $A(G_1) \subseteq A(H)$ y

$$V(G_2) \subseteq V(H) \text{ y } A(G_2) \subseteq A(H);$$

por lo que G_1 y G_2 son subgráficas de H .

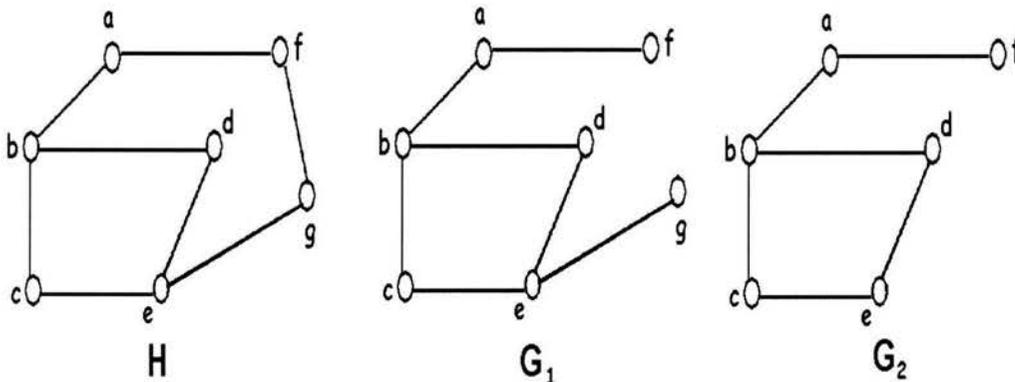


Figura 1.2.1

Sea G una gráfica. Un subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ se denomina conjunto independiente siempre que no haya dos vértices en S que sean adyacentes. El número de vértices en un conjunto independiente de mayor tamaño se denota por $\alpha(G)$.

Conjuntos independientes de la gráfica de la figura 1.2.2 son: $\{a, c, e\}$, $\{a, c, f\}$, $\{a, c\}$, $\{a, e\}$, $\{a, f\}$, $\{b, d\}$, $\{b, f\}$, $\{c, d\}$, $\{c, d, e\}$, $\{c, e\}$, $\{c, f\}$ y $\{d, e\}$ de los cuales, el de mayor cardinalidad es $\{a, c, e\}$ cuya cardinalidad es 3, por lo que $\alpha(G) = 3$.

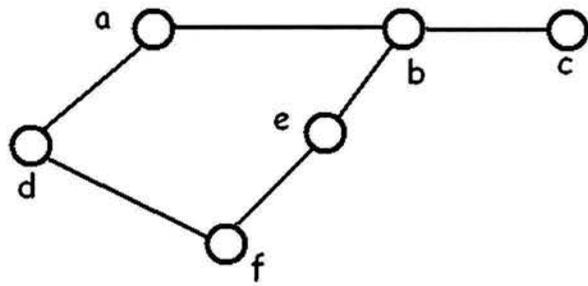


Figura 1.2.2

Una componente de G es una subgráfica cuyos vértices son independientes de cualquier otra componente. En la figura 1.2.3, se observa una gráfica con tres componentes:

$$\{1, 2, 3, 4\} \quad \{5, 6\} \quad \text{y} \quad \{7\}$$

la primer componente tiene cuatro vértices y cuatro aristas, la segunda componente tiene dos vértices y una arista y la tercer componente tiene un vértice sin aristas.

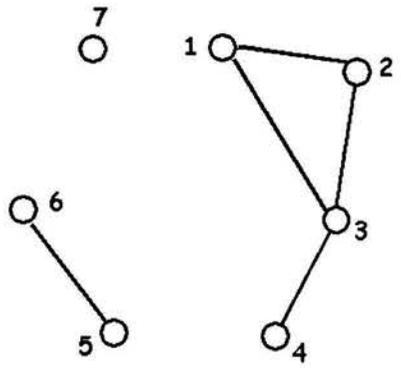


Figura 1.2.3

Si la gráfica no tiene aristas, entonces cada uno de sus vértices forma una componente.

Sea G una Gráfica, el complemento de G , denotado por G^c , es la gráfica en la cual $V(G) = V(G^c)$ y u_1 es adyacente a u_2 en G^c si y sólo si u_1 no es adyacente a u_2 en G .

En la figura 1.2.4 se muestran dos gráficas (G) y sus gráficas complemento(G^c).

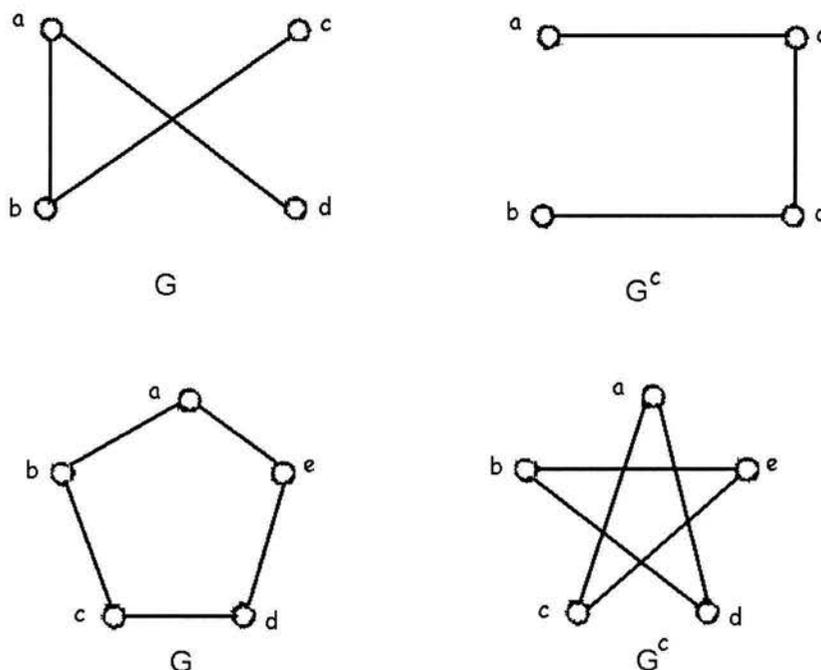


Figura 1.2.4

Sea G una gráfica y k un número entero positivo, una coloración de G es una función

$$f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}.$$

Una coloración de los vértices de una gráfica G , es una coloración propia, si cualesquiera dos vértices adyacentes tienen asignado un color diferente.

El número cromático de una gráfica G , denotado por $\chi(G)$ es el número mínimo de colores necesario para colorear los vértices de G , de tal manera que, dos vértices adyacentes no sean coloreados del mismo color, o dicho de otra manera, es el mínimo número de colores necesario para dar una coloración propia a los vértices de la gráfica G .

En la figura 1.2.5 se muestran dos gráficas con su coloración propia, en la que se observa que $\chi(G_1) = 3$, y $\chi(G_2) = 3$.

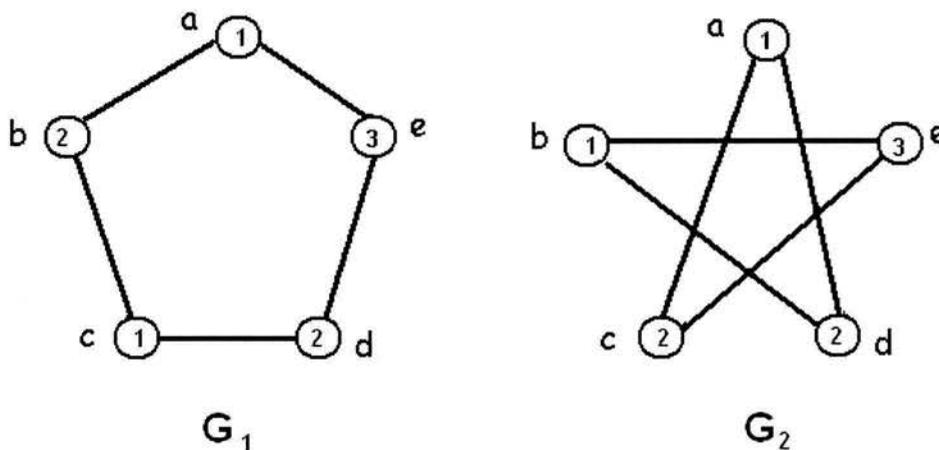


Figura 1.2.5

Una gráfica G es completa cuando cada par de vértices es adyacente y la denotamos como K_n , donde n es el número de vértices. Una gráfica completa K_n necesita n colores para colorearla adecuadamente, ya que cada vértice es adyacente a todos los demás.

En la figura 1.2.6 se muestran tres gráficas completas.

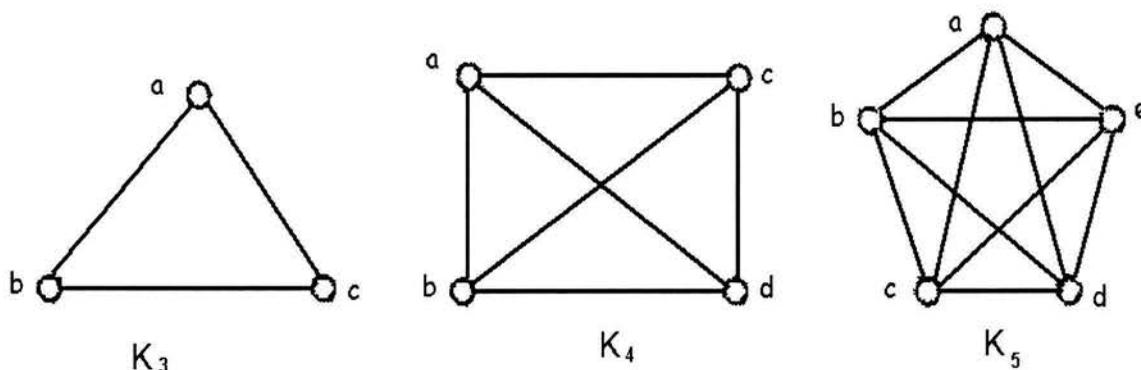


Figura 1.2.6

El número de clan de una gráfica G , denotado por $\omega(G)$ es la subgráfica completa de G de máxima cardinalidad.

En la figura 1.2.7 se muestra una gráfica y a su derecha una partición en completas, en ella se observa que $\omega(G) = 2$.

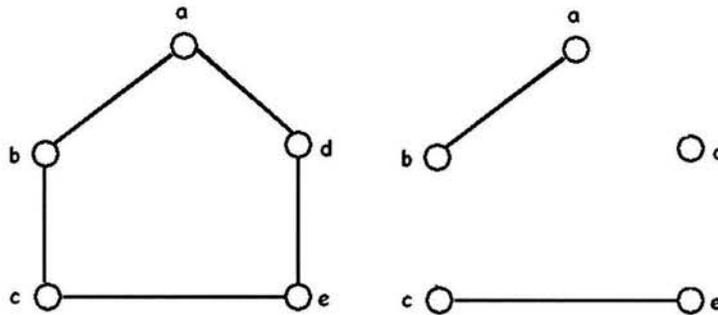


Figura 1.2.7

Sea G una gráfica, recordemos que se han definido:

- $\alpha(G)$ el número de independencia
- $\chi(G)$ el número cromático
- $\omega(G)$ la cardinalidad máxima de un clan

y denotaremos con:

- $\Phi(G)$ el número mínimo de completas que parte a $V(G)$

Definición: Sea G una gráfica, G es una gráfica independientemente perfecta si

$$\alpha(G_A) = \Phi(G_A) \quad (A \subseteq V(G))$$

y G es una gráfica cromáticamente perfecta si

$$\chi(G_A) = \omega(G_A) \quad (A \subseteq V(G))$$

Teorema 1.2.1

Sea G una gráfica, entonces $\alpha(G) = \Phi(G)$, más aún, si S es un conjunto independiente y si P es una partición en completas tal que $|S| = |P|$, entonces S es un conjunto independiente máximo y P es una partición mínima.

Demostración

Para cada conjunto independiente S y cada partición $P = (P_1, P_2, \dots, P_k)$, tenemos

$|S \cap P_i| \leq 1$ para $i = 1, 2, 3, \dots, k$, de ahí que $|S| \leq |P|$, por consiguiente

$\alpha(G) = \max |S| \leq \min |P| = \Phi(G)$, más aún, si $|S_0| = |P_0|$,

con S_0 conjunto independiente y P_0 , partición en completas,

entonces la desigualdad implica que $|S_0| = \alpha(G)$ y $|P_0| = \Phi(G)$. ■

Ejemplo 1.2.1

Si G consta de un ciclo impar de longitud $2k + 1 > 3$, sin diagonales,

entonces G no es independientemente perfecta porque $\alpha(G) = k$ y $\Phi(G) = k + 1$ (Una partición mínima de G consiste en k 2-clanes y un 1-clan).

Además, G no es cromáticamente perfecta porque $\chi(G) = 3$ y $\omega(G) = 2$.

En la figura 1.2.8 se pueden observar que los siguientes conjuntos independientes de máxima cardinalidad:

$\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$ y $\{c, e\}$, por lo que $\alpha(G) = 2$.

Los clanes están dibujados a la derecha de la gráfica y se observa que $\Phi(G) = 3$,

asimismo se ve que $\omega(G) = 2$. Finalmente,

el color de los vértices está representado con números y entonces $\chi(G) = 3$

entonces para $k = 2$, se cumple lo enunciado.

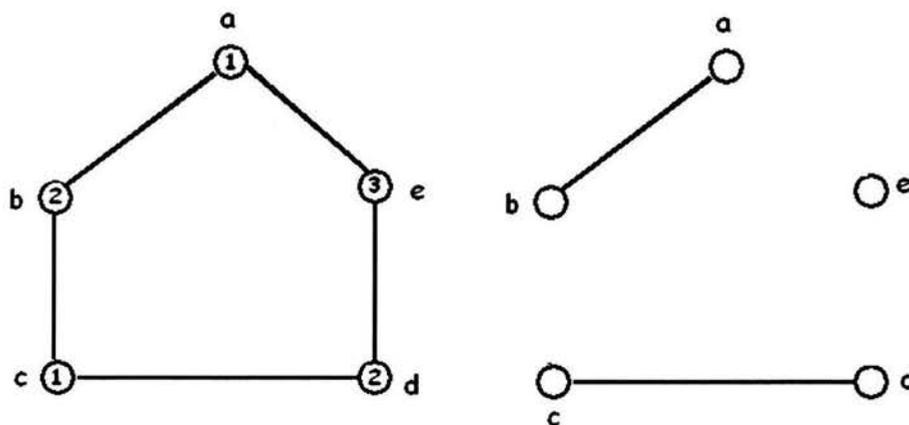


Figura 1.2.8

1.3 Digráficas

Sean V un conjunto finito no vacío, y $F \subseteq V \times V$, una colección (puede ser vacía) de pares ordenados de distintos elementos de V , una gráfica dirigida ó digráfica está determinada por V y F , la denotamos como $D(V, F)$, donde V es el conjunto de vértices de D y F es el conjunto de flechas de D . La cardinalidad de $V(D)$ es el orden de D , mientras que la cardinalidad de $F(D)$ es el tamaño de D .

En la figura 1.3.1 se muestran dos digráficas:

La digráfica D_1 donde $V(D_1) = \{u, v, w\}$ y $F(D_1) = \{(u, v), (u, w), (w, u)\}$, en ella se puede ver que (u, v) es una flecha de D_1 , pero (v, u) no es una flecha de D_1 .

La digráfica D_2 donde $V(D_2) = \{u, v, w\}$ y $F(D_2) = \{(v, u), (u, w), (w, u)\}$, en ella se puede ver que (v, u) es una flecha de D_2 , pero (u, v) no es una flecha de D_2 .

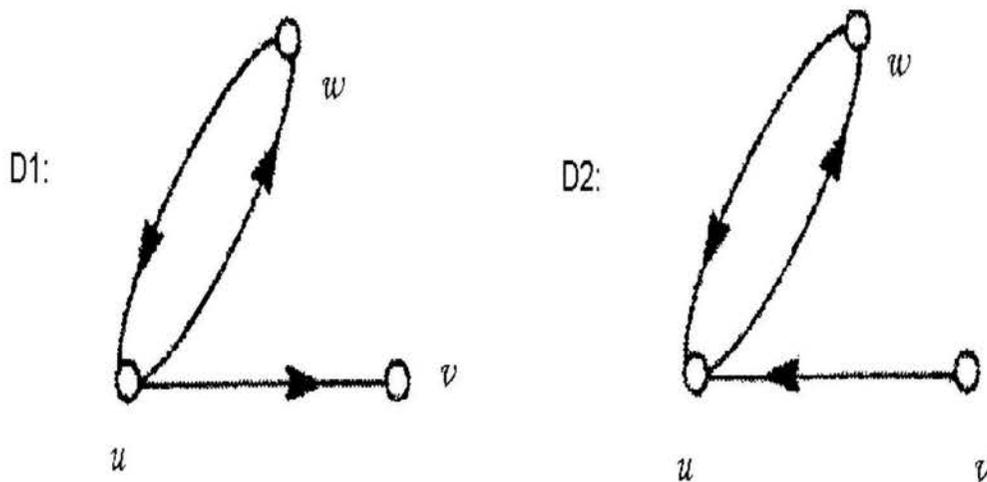


Figura 1.3.1

Si $a = (u, v)$ es una flecha de una digráfica D , decimos que a une u a v , decimos también que a es incidente desde u e incidente hacia v , al mismo tiempo que u es incidente hacia a y v es incidente desde a .

Dos flechas son adyacentes si tienen un vértice en común.

Por ejemplo si $a = (u, v)$ y $b = (v, w)$ son flechas de una digráfica D , entonces las flechas a y b son adyacentes y la flecha a es adyacente hacia la flecha b , mientras que b es adyacente desde la flecha a . Ver figura 1.3.2.

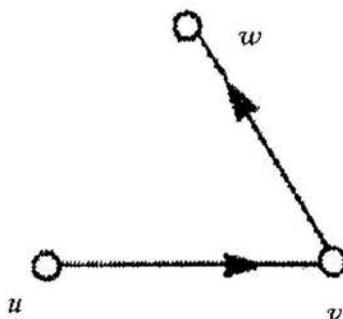


Figura 1.3.2

Un vértice b se denomina sucesor de un vértice a , si existe una arista con a como su punto inicial y con b como su punto final. En este caso, se dice que es un predecesor de B .

El conjunto de todos los sucesores de x se denota por $\Gamma_G^+(x)$, el conjunto de todos los predecesores de x se denota por $\Gamma_G^-(x)$, y el conjunto de todos los vecinos de x se denota por $\Gamma_G(x)$ así que:

$$\Gamma_G(x) = \Gamma_G^+(x) \cup \Gamma_G^-(x).$$

Una digráfica $D = (X, U)$ está completamente definida por V y la correspondencia $\Gamma_D(x) = \Gamma_D^+(x)$. De ahí que D puede ser denotada por (X, Γ) .

El exgrado (δ^+) de un vértice v en una digráfica D , es el número de vértices que son adyacentes desde v ; el ingrado (δ^-) de un vértice v en una digráfica D es el número de vértices que son adyacentes hacia v .

El grado (δ) de un vértice v en D está definido por $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$.

La figura 1.3.3 muestra que:

$$\delta^-(u) = 2, \delta^+(u) = 1, \delta^+(v) = 1, \delta^-(v) = 0, \delta^+(w) = 1 \text{ y } \delta^-(w) = 1$$

entonces $\delta(u) = 3, \delta(v) = 1 \text{ y } \delta(w) = 2$

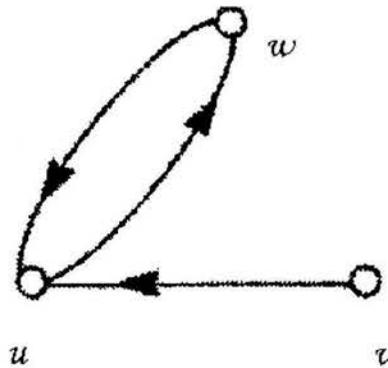


Figura 1.3.3

Teorema 1.3.1

Si D es una digráfica de orden p y tamaño q con $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, entonces:

$$\sum_{i=1}^p \delta^+(v_i) = \sum_{i=1}^p \delta^-(v_i) = q = |F(D)|$$

Demostración:

Cada flecha es contada una sola vez en la suma de exgrados de v dado que cada flecha es incidente desde un vértice exactamente una vez.

Análogamente cada flecha es contada una sola vez en la suma de ingrados de v dado que cada flecha es incidente hacia un vértice exactamente una vez. ■

Sean D_1, D_2 digráficas, D_1 es isomorfa a D_2 y lo denotamos por $(D_1 \cong D_2)$ si existe una función biyectiva $f: V(D_1) \rightarrow V(D_2)$ tal que:

$$(u, v) \in F(D_1) \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in F(D_2)$$

a f se le da el nombre de isomorfismo.

La relación "es isomorfa a" es una relación de equivalencia en digráficas. Esta relación parte el conjunto de todas las digráficas en clases de equivalencia.

Dos digráficas D_1 y D_2 son idénticas ($D_1 = D_2$), si $V(D_1) = V(D_2)$ y $F(D_1) = F(D_2)$. Si dos digráficas son idénticas, entonces son isomorfas, pero no al revés. En la figura 1.3.4 se muestran dos digráficas que son isomorfas pero no idénticas.

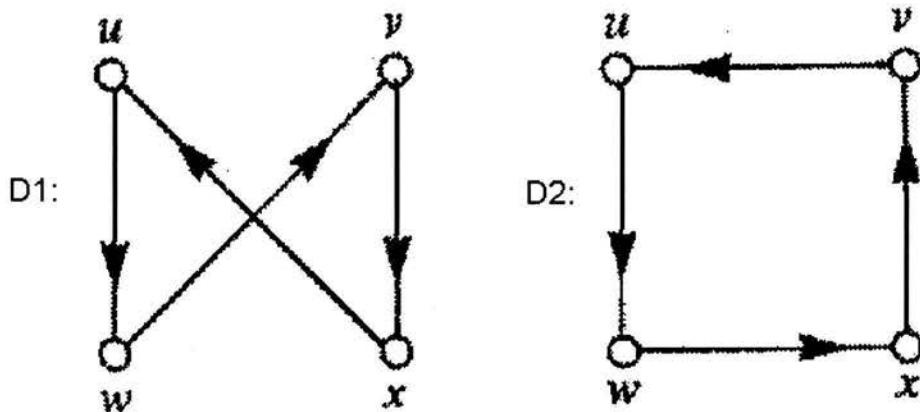


Figura 1.3.4

Una digráfica D_1 es una subdigráfica de D , si $V(D_1) \subseteq V(D)$ y $F(D_1) \subseteq F(D)$. Cualquier digráfica isomorfa a una subdigráfica de D es llamada también subdigráfica de D .

Si D es una digráfica no trivial y $v \in V(D)$, entonces $D - v$ es la digráfica con el conjunto de vértices $V(D) - \{v\}$ y el conjunto de flechas $F(D)$ que no inciden hacia v ni desde v . Lo anterior se muestra en la figura 1.3.5.

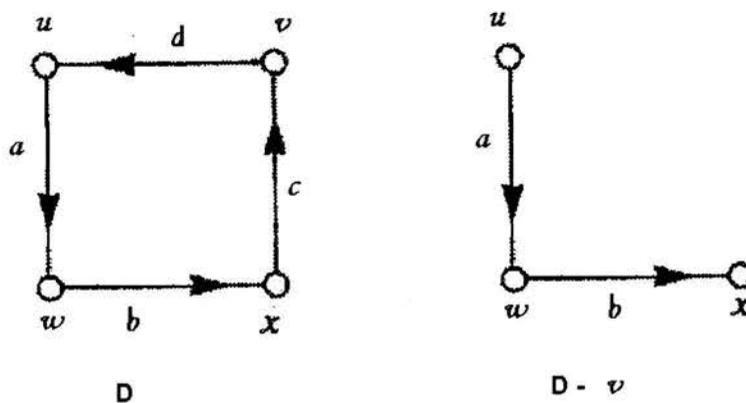


Figura 1.3.5

Si D es una digráfica no trivial y $a \in F(D)$, entonces $D - a$ es la digráfica con el conjunto de vértices $V(D)$ y el conjunto de flechas $F(D) - \{a\}$.

La eliminación de un conjunto de vértices se define análogamente.

Esto se muestra en la figura 1.3.6.

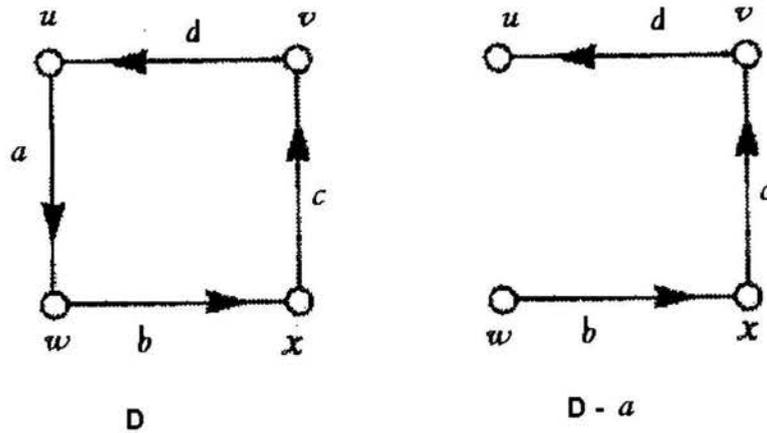


Figura 1.3.6

Sea D una digráfica en la que $u, v \in V(D)$, $a = (u, v)$, y $a \notin F(D)$, entonces la digráfica $D' = D + a$, es la que tiene el conjunto de vértices $V(D)$ y el conjunto de flechas $F(D) \cup \{a\}$.

En la figura 1.3.7 se ilustra lo anterior tomando la flecha $a = (v_2, v_4)$.

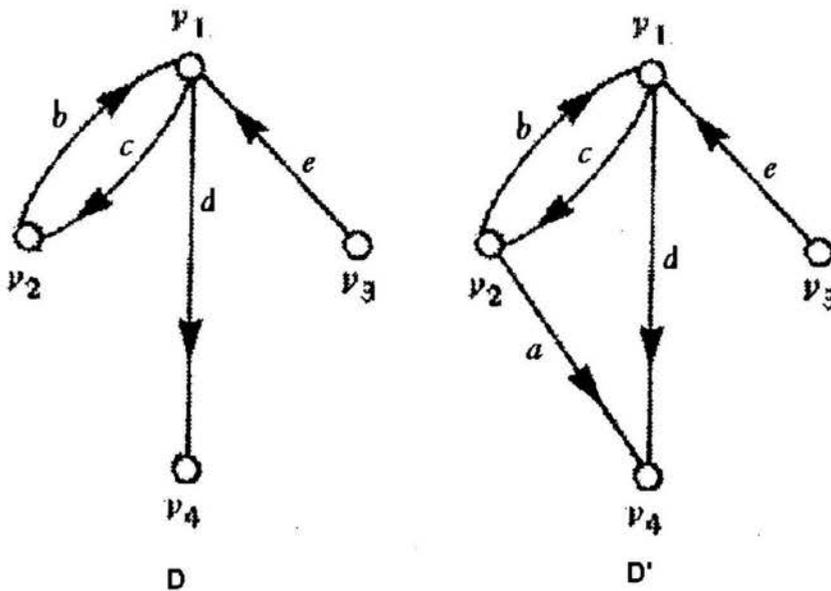


Figura 1.3.7

Si U es un subconjunto no vacío de $V(D)$, entonces la subdigráfica $D[U]$ inducida por U , es aquella digráfica cuyo conjunto de vértices es U y cuyo conjunto de flechas consiste en todas las flechas de D que inciden en vértices de U .

Esto se ilustra en la figura 1.3.8 para la digráfica D , donde:

$$V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \text{ y } U = \{v_1, v_2, v_3\}$$

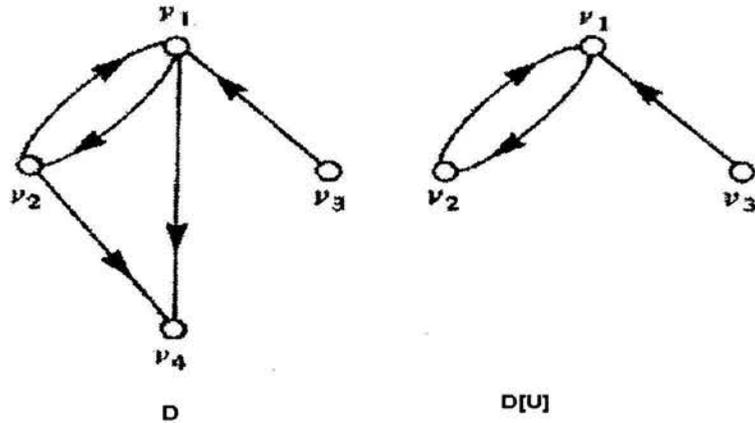


Figura 1.3.8

Si B es un subconjunto no vacío de $F(D)$, entonces la subdigráfica inducida por B , y denotada por $D[B]$, es aquella digráfica cuyo conjunto de vértices consiste en aquellos vértices de D incidentes hacia o desde, con al menos una flecha de B y cuyo conjunto de flechas es B . Lo anterior se ejemplifica en la figura 1.3.9, donde:

$$V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \text{ y}$$

$$B = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4)\}$$

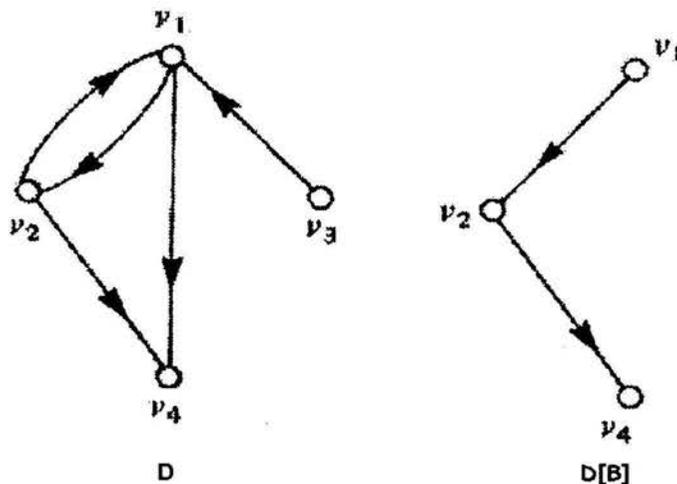


Figura 1.3.9

Una digráfica D es denominada completa si para cada dos vértices distintos u y v de D , al menos una de las flechas (u, v) o (v, u) está presente en D .

La digráfica simétrica completa (K_p) de orden p tiene ambas flechas (u, v) y (v, u) para cada dos vértices distintos u y v . De este modo K_p tiene tamaño $p(p-1)$ y $\delta^+(v) = \delta^-(v) = p-1$ para todo vértice v de D .

En la figura 1.3.10 se muestran cuatro digráficas simétricas completas.

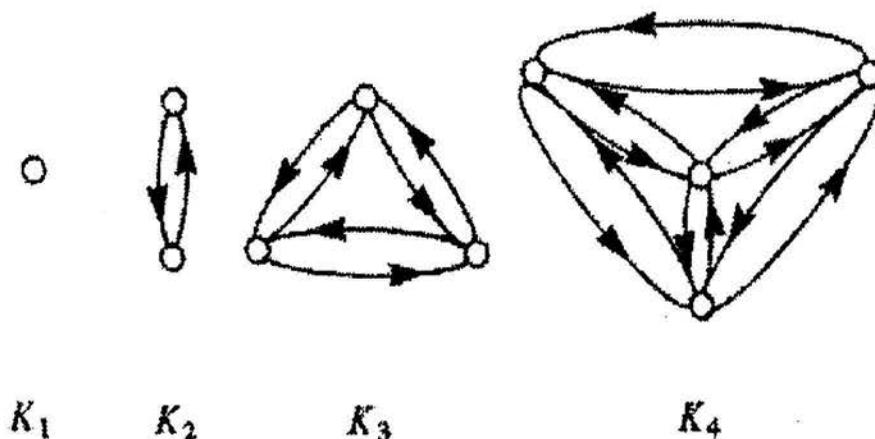


Figura 1.3.10

Una digráfica D es denominada regular de grado r o r -regular si $\delta^+(v) = \delta^-(v) = r$ para todo vértice v de D . La digráfica K_p es $(p-1)$ -regular. En la figura 1.3.11 se muestran D_1 que es digráfica 1-regular y D_2 que es digráfica 2-regular.

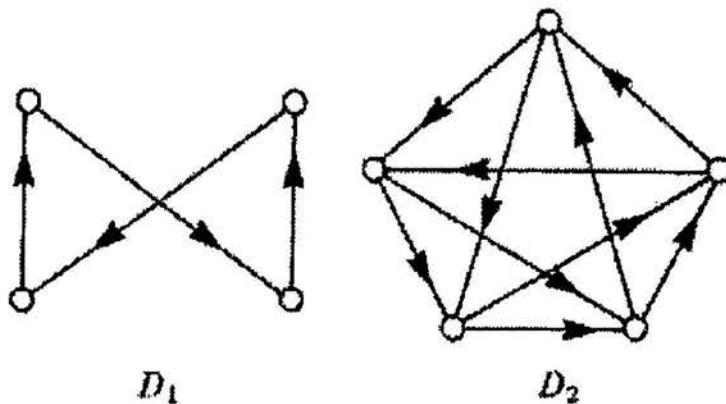


Figura 1.3.11

Un conjunto de vértices A es denominado conjunto independiente si para cualesquiera dos vértices u, v en A , no existe una flecha que une a u con v , es decir, si $u, v \in A$, entonces $(u, v) \notin F(D)$. En la figura 1.3.12, se muestra una digráfica en la cual el conjunto $A = \{b, d\}$, es independiente.

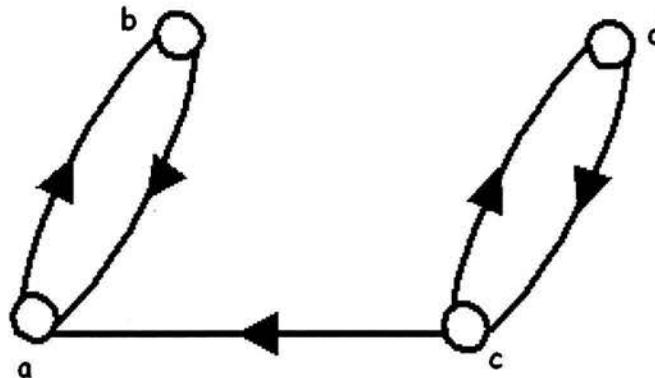


Figura 1.3.12

Sea D una digráfica y sea S un conjunto tal que $S \subset V(D)$,

S es un conjunto absorbente si para cada $x \notin S$, $\Gamma_D^+(x) \cap S \neq \emptyset$, es decir,

si para cada vértice $x \in (V(D) - S)$ existe una flecha de x a S en D .

En la figura 1.3.13, se muestra una digráfica en la que el conjunto $S = \{b, d\}$, es un conjunto absorbente.

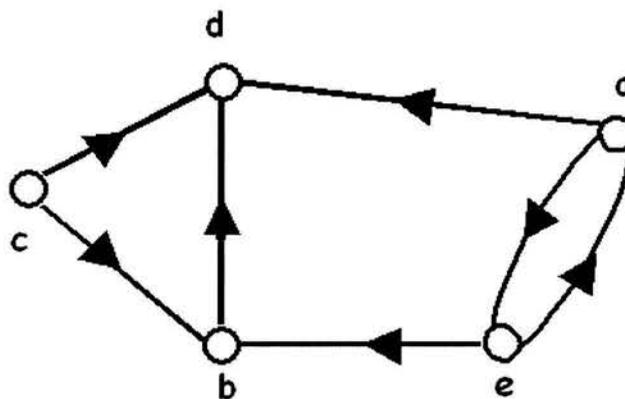


Figura 1.3.13

1.4 Conexidad en Digráficas

Sean u, v vértices (no necesariamente distintos) de una digráfica D .

La sucesión:

$$u = u_0, a_1, u_1, a_2, \dots, u_{n-1}, a_n, u_n = v \quad (1)$$

en la que alternan los vértices y las flechas, empezando con el vértice u y terminando con el vértice v , tal que $a_i = (u_{i-1}, u_i)$ o $a_i = (u_i, u_{i-1})$ para $i = 1, 2, \dots, n$, es denominado un u - v -camino de D , donde n (número de flechas) es la longitud del camino.

Si $a_i = (u_{i-1}, u_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$, en (1),

entonces la sucesión (1) es denominada un u - v -camino dirigido, en cuyo caso solo los vértices necesitan ser listados, dado que las flechas son discernibles.

Sean W_1 y W_2 dos u - v -caminos dirigidos tales que :

$$W_1: u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n = v \text{ y}$$

$$W_2: u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_m = v$$

Los caminos dirigidos W_1 y W_2 son iguales si $n = m$ y $u_i = v_i$ para $0 \leq i \leq n$; de otra manera son diferentes.

En cada camino dirigido, puede haber repetición de vértices y flechas.

Un u - v -camino dirigido es cerrado o abierto dependiendo si $u = v$ o $u \neq v$.

Un u - v -paseo dirigido es un u - v -camino dirigido donde no hay flechas repetidas.

Una u - v -trayectoria dirigida es un u - v -camino dirigido en el cual no hay vértices repetidos.

En la digráfica D de la figura 1.4.1

$W_1: v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_4, v_2), v_4, (v_3, v_4), v_3, (v_3, v_2), v_2, (v_2, v_5), v_5$

es un v_1-v_5 -camino que no es un v_1-v_5 -camino dirigido.

$W_2: v_1, v_2, v_3, v_2, v_5$

es un v_1-v_5 -paseo dirigido que no es una v_1-v_5 -trayectoria dirigida

$W_3: v_1, v_2, v_5$ es una v_1-v_5 -trayectoria dirigida.

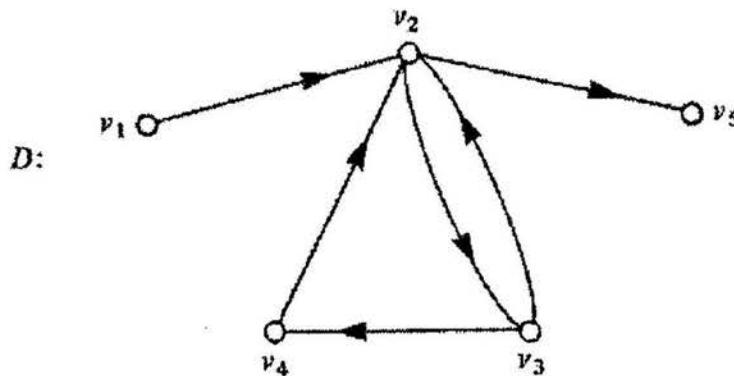


Figura 1.4.1

Si P es una $u-v$ -trayectoria dirigida entonces los vértices de P diferentes de u y v son los vértices internos de P .

Es obvio que toda $u-v$ -trayectoria dirigida es también un $u-v$ -camino dirigido pero no al revés.

Todo $u-v$ -camino dirigido en una digráfica D , contiene una $u-v$ -trayectoria dirigida.

Una digráfica de orden n que es una trayectoria dirigida se denota por P_n .

Existen varios tipos de conexidad en digráficas:

Un vértice u "está conectado" a un vértice v en una digráfica D , si existe un $u-v$ -camino (o un $v-u$ -camino) en D .

Un vértice v "es alcanzable" por un vértice u en una digráfica D , si D contiene un $u-v$ -camino dirigido.

Decimos que una digráfica D es **débilmente conexa**, si para cada dos de sus vértices, estos "están conectados".

En la figura 1.4.2, se muestra una digráfica débilmente conexa

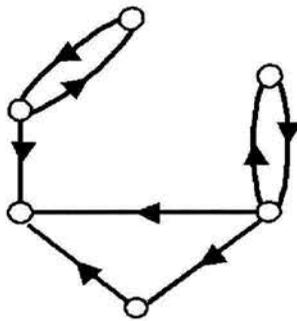


Figura 1.4.2

La digráfica D se denomina **unilateralmente conexa**, si para cada dos de sus vértices distintos de D , al menos uno de ellos “*es alcanzable*” por el otro.

En la figura 1.4.3, se muestra una digráfica unilateralmente conexa

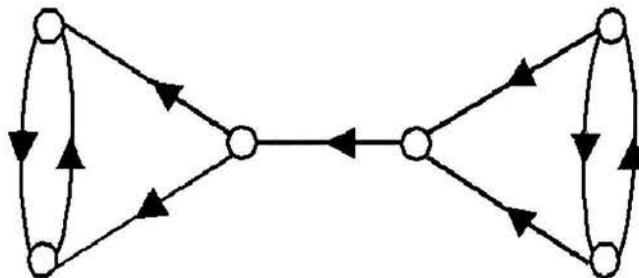


Figura 1.4.3

Una Digráfica D es **fuertemente conexa**, si para cada dos vértices distintos de D , cada vértice “*es alcanzable*” por el otro.

De esta manera, toda digráfica fuertemente conexa es unilateralmente conexa y cada digráfica unilateralmente conexa es débilmente conexa.

En la figura 1.4.4, se muestra una digráfica fuertemente conexa

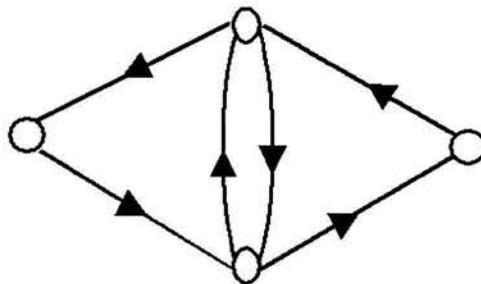


Figura 1.4.4

Una digráfica que no es conexa, es desconexa.

En la figura 1.4.5, se muestra una digráfica desconexa

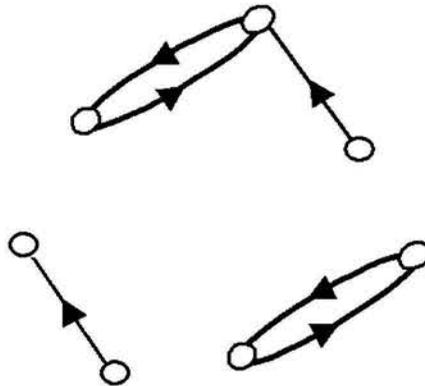


Figura 1.4.5

La relación “está conectado con “ es una relación de equivalencia en el conjunto de vértices de una digráfica. La digráfica inducida por los vértices da como resultado, una clase de equivalencia denominada “componente conexa” o componente de D.

Un camino generador es uno que contiene todos los vértices de la digráfica.

Las digráficas conexas pueden ser caracterizadas en términos de ciertos tipos de los caminos generadores que pueden (o no pueden) tener.

Teorema 1.4.1

Una digráfica D es débilmente conexa \Leftrightarrow D tiene un camino generador

Demostración

\Leftarrow) Sea D una digráfica que contiene un camino generador W, y sean u y v cualquier par de vértices distintos de D.

Como W contiene todos los vértices de D, entonces $u \in W$ y $v \in W$.

Hay una porción de W que contiene a u y v , que constituye un u - v camino (o un v - u camino) en D.

Dado que u y v son arbitrarios, entonces D es débilmente conexa.

\Rightarrow) Supongamos que D es débilmente conexa con $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$.

De este modo D contiene un camino $W_i: v_i \rightarrow v_{i+1}$ para $i=1,2,\dots,p-1$.

Sea $W'_i = W_i$ con el último término eliminado.

Entonces, $W'_1, W'_2, \dots, W'_{p-1}, v_p$ es un camino v_1-v_p que contiene todos los vértices de D . ■

Teorema 1.4.2

Una digráfica D es unilateralmente conexa $\Leftrightarrow D$ tiene un camino dirigido generador.

Demostración

\Leftarrow) Es claro que si una digráfica D tiene un camino dirigido generador, entonces es unilateralmente conexa.

\Rightarrow) Supongamos que D es una digráfica unilateralmente conexa.

Sea W un camino dirigido en D que contiene el máximo número de vértices distintos de D ;

Supongamos que W es un w_1-w_2 -camino dirigido.

Si W no es un camino dirigido generador, entonces existe algún vértice $v \in D$ tal que $v \notin W$.

Por la propiedad que posee W , no existen caminos $v-w_1$ ni w_2-v en D .

Dado que D no contiene un $v-w_1$ -camino dirigido y D es unilateralmente conexa, entonces D contiene un w_1-v -camino dirigido.

Sea u el último vértice de W para el cual existe en D un $u-v$ -camino dirigido (nótese que $u \neq w_2$) y sea W_1 un $u-v$ -camino dirigido.

Sea w el vértice que sigue a la última aparición de u en W (w existe porque no existe w_2-v -camino dirigido).

Por lo tanto no existe un $w-v$ -camino en D , porque D es unilateral, sin embargo, hay un $v-w$ -camino W_2 en D .

Procediendo en W desde w_1 hasta la última ocurrencia de u , entonces a lo largo de W_1 seguido por W_2 hasta el vértice w y entonces finalmente a lo largo W hacia w_2 , esto produce un w_1-w_2 -camino que tiene más vértices distintos en W , lo que es una contradicción. Por lo tanto W es un camino dirigido generador de D . ■

Teorema 1.4.3

Una digráfica D es fuertemente conexa $\Leftrightarrow D$ tiene un camino dirigido generador cerrado.

Demostración

\Leftarrow) Se sigue inmediatamente que si una digráfica D contiene un camino dirigido generador cerrado, entonces es fuertemente conexa.

\Rightarrow) Sea D una digráfica fuertemente conexa.

Entonces D es unilateralmente conexa y, por (teorema 1.4.2), D contiene un u - v -camino dirigido generador W para los vértices u y v de D .

Si $u = v$, la prueba está completa.

Supongamos que $u \neq v$.

Como D es fuertemente conexa, contiene una u - v -trayectoria dirigida P . Entonces el camino W seguido por P , produce un u - v -camino dirigido generador u - u , lo que completa la prueba. ■

Un paseo cerrado no trivial de una digráfica D es denominado un circuito de D .

Un circuito $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ con $n \geq 2$, cuyos n vértices v_i , $i = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, son distintos, es llamado un ciclo de D .

Si una digráfica D no contiene ciclos, es denominada acíclica. En la figura 1.4.6, se muestra lo siguiente para la digráfica D_1 : C_1 es un circuito que no es un ciclo y C_2 es un ciclo. La digráfica D_2 es acíclica

C_1 : $v_1, v_3, v_4, v_3, v_2, v_1$ es un circuito que no es un ciclo

C_2 : v_1, v_3, v_4, v_2, v_1 es un ciclo de D_1

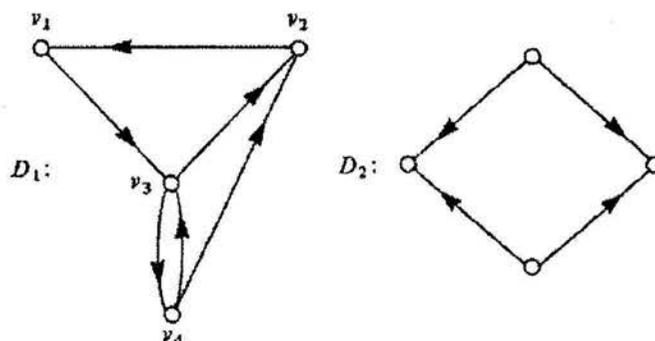


Figura 1.4.6

La relación “es mutuamente alcanzable desde” es una relación de equivalencia en el conjunto de vértices de cualquier digráfica D y, como tal, esta relación parte a $V(D)$ en clases de equivalencia V_1, V_2, \dots, V_n donde $n \geq 1$.

Dos vértices de D son “mutuamente alcanzables” si y sólo si los vértices pertenecen a la misma clase de equivalencia V_i . Sea $S_i = \langle V_i \rangle$ para $1 \leq i \leq n$.

Si u y v son dos vértices de la misma S_i , existe un $u-v$ -camino dirigido W_1 en D (dado que v es alcanzable desde u) y un $v-u$ -camino dirigido W_2 en D (dado que u es alcanzable desde v).

El camino W_1 seguido por el camino W_2 produce un $u-u$ -camino dirigido cerrado W en D . Claramente cada dos vértices de W son “mutuamente alcanzables” en D .

Esto implica que todos los vértices de W pertenecen a la misma subdigráfica S_i . Por lo tanto u y v son “mutuamente alcanzables” en S_i , esto es S_i es una subdigráfica fuerte. Las subdigráficas S_1, S_2, \dots, S_n son denominadas las componentes fuertes de D . En la figura 1.4.7, se muestra una digráfica D y sus componentes fuertes S_1, S_2, S_3 y S_4 .

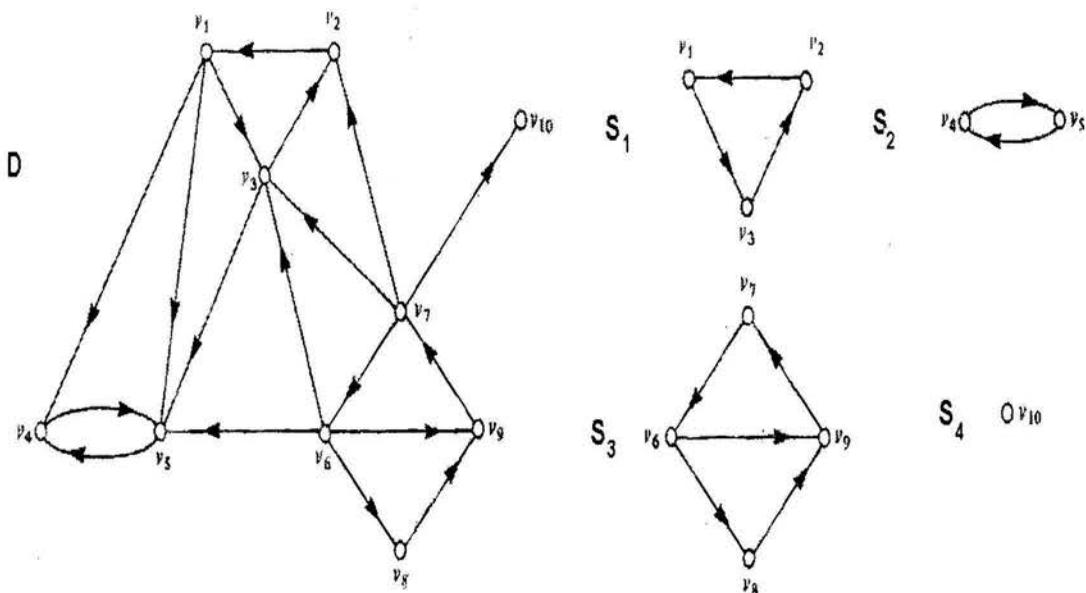


Figura 1.4.7

A cada digráfica D hay asociada otra digráfica que aunque normalmente es más simple en estructura, posee las mismas características básicas de conexidad que D . Sean S_1, S_2, \dots, S_n las componentes fuertes de D .

La condensación D^* de D es la digráfica cuyos vértices u_1, u_2, \dots, u_n se puede poner en correspondencia uno a uno con las componentes fuertes (u_i corresponde a S_i , con $i = 1, 2, \dots, n$) tal que (u_i, u_j) es una flecha de D^* con $i \neq j \Leftrightarrow$ algún vértice de S_i es adyacente hacia al menos un vértice de S_j .

En la figura 1.4.8 se muestra una digráfica D y su condensación D^* .

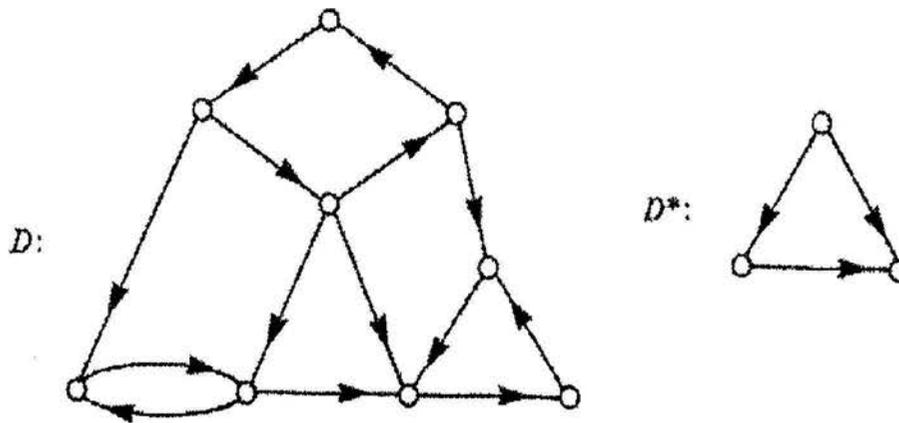


Figura 1.4.8

Teorema 1.4.4

La condensación de toda digráfica es acíclica.

Demostración

Supongamos que el teorema es falso.

Entonces existe una digráfica D cuya condensación D^* contiene ciclos.

Sean S_1, S_2, \dots, S_n los componentes fuertes de D

y sea $V(D^*) = \{ u_1, u_2, \dots, u_n \}$ tal que u_i corresponde a S_i , con $i = 1, 2, \dots, n$.

Supongamos que la etiquetación de los vértices de D^* es tal que $u_1, u_2, \dots, u_m, u_1$ es un ciclo de D^* .

Para $i = 1, 2, \dots, m-1$; existen un vértice $v'_i \in V(S_i)$ y un vértice $v_{i+1} \in V(S_{i+1})$

tales que $(v'_i, v_{i+1}) \in F(D)$; también existe una flecha (v'_m, v_1) en D ,

con $v'_m \in V(S_m)$ y $v_1 \in V(S_1)$.

Note que los vértices v'_i, v_i para $i = 1, 2, \dots, m$ no necesariamente son distintos.

Dado que S_i es fuertemente conexa,

para $i = 1, 2, \dots, m$; existe la trayectoria $P_i : v_i - v'_i$ en S_i

Por lo tanto,

$$P_1, (v'_1, v_2), P_2, (v'_2, v_3), P_3, \dots, P_m, (v'_m, v_1), v_1$$

Es un ciclo $v_1 - v_1$ en D , implicando que los vértices v_1 y v_2 por ejemplo son "mutuamente alcanzables" lo que es imposible. ■

Un vértice v , es un vértice de corte de una digráfica D si y sólo si $D - v$ tiene más componentes que D .

En la digráfica D de la figura 1.4.7, el vértice v_7 es el único vértice de corte de D .

Teorema 1.4.5

Toda digráfica D unilateralmente conexa de orden $p \geq 2$ contiene dos vértices distintos u y v tales que las subdigráficas $D-u$ y $D-v$ son unilateralmente conexas

Demostración

Por el teorema 1.4.2, D contiene un camino dirigido generador.

Sea W un camino dirigido generador de D de longitud mínima;

Supongamos que W es un $u-v$ -camino dirigido.

Obsérvese que u aparece exactamente una vez en W ; en caso contrario el camino dirigido obtenido por la eliminación de la primera flecha de W es un camino dirigido generador de longitud menor, lo que es imposible.

Por el mismo razonamiento, el vértice v aparece una sola vez en W .

Entonces, $u \neq v$ y cada $D-v$ y $D-u$ poseen un camino dirigido generador y son unilateralmente conexas por el teorema 1.4.2 ■

Dado que toda digráfica fuertemente conexa es unilateralmente conexa, un corolario inmediato es el que sigue:

Corolario 1.4.5

Toda digráfica fuertemente conexa de orden $p \geq 2$ contiene dos vértices distintos u y v tal que $D-u$ y $D-v$ son unilateralmente conexas.

Principio de Dualidad Direccional. Para cada teorema relacionado con digráficas, existe otro teorema correspondiente, que se obtiene substituyendo cada concepto por su concepto dual (opuesto).

Ejemplos del dual de un concepto: “adyacente desde” es el dual de “adyacente hacia”, “incidente desde” es el dual de “incidente hacia”, y “ingrado” es el dual de “exgrado”.

Se ilustra este principio con una propiedad simple de digráficas acíclicas.

Teorema 1.4.6

Toda digráfica acíclica contiene al menos un vértice de exgrado cero.

Demostración

Sea D una digráfica acíclica, y sea P una trayectoria dirigida de longitud máxima en D .

Supongamos que P es una $u-v$ -trayectoria dirigida.

Si v es adyacente a cualquier vértice de P , se produce un ciclo, contradiciendo el hecho de que D es acíclica.

Si v es adyacente a cualquier vértice que no está en P , entonces existe una trayectoria dirigida cuya longitud excede la de P , lo que contradice la selección de P .

Por lo tanto, v no es adyacente hacia ningún vértice que pertenezca a D ,

esto es, $\delta^+(v) = 0$. ■

Aplicando el principio de dualidad direccional, obtenemos un corolario inmediato.

Corolario 1.4.6

Toda digráfica acíclica contiene al menos un vértice de ingrado cero.

2 Teoría de Núcleos

2.1 Definiciones y resultados fundamentales

El concepto de núcleo de una digráfica fue considerado primeramente por Von Neumann, en Teoría de Juegos donde lo llamó “solución de un juego por cooperación entre n personas”. Posteriormente Claude Berge notó que el mismo concepto resultaba de utilidad en otros contextos y propuso llamarlo “el núcleo de una digráfica” y demostró teoremas de existencia.

Definición: Si \mathcal{S} es una familia de conjuntos y $S \in \mathcal{S}$ decimos que S es un conjunto:

minimal si no contiene otro elemento de \mathcal{S}

mínimo si su cardinalidad tiene el valor mínimo

maximal si no está contenido en otro conjunto de \mathcal{S}

máximo si su cardinalidad tiene el valor máximo.

Proposición 2.1.1 Berge [2]

Si N es un núcleo de la digráfica D , entonces N es un conjunto independiente maximal y un conjunto absorbente minimal.

Demostración

Supongamos que existe un conjunto $I \subseteq V(D)$ independiente en D , tal que $N \subset I$, entonces existe $x \in (I - N)$; y como $x \notin N$ y N es núcleo, entonces existe una xN -flecha en D ; pero $N \subset I$.

Esto es una contradicción ya que I es un conjunto independiente.

Por lo tanto N es un conjunto independiente maximal.

Supongamos que existe un conjunto $A \subseteq V(D)$ absorbente en D , tal que $A \subset N$, entonces existe $x \in (N - A)$; y como A es absorbente existe una xA -flecha en D , esto implica que existe una xN -flecha en D , lo que es una contradicción ya que N por ser núcleo, es independiente.

Por lo tanto N es un conjunto absorbente minimal. ■

Una digráfica D es llamada simétrica, si siempre que $(u, v) \in F(D)$, entonces también $(v, u) \in F(D)$.

Una digráfica D es llamada asimétrica u orientada si siempre que $(u, v) \in F(D)$, entonces $(v, u) \notin F(D)$.

De este modo una digráfica orientada D puede ser obtenida de una gráfica G , asignando una dirección a cada arista de G , es decir transformando cada arista de G en una flecha, lo que transforma G misma en una digráfica asimétrica.

En la figura 2.1.1 se muestran tres digráficas, D_1 es una digráfica simétrica, D_2 es una digráfica asimétrica y D_3 es una digráfica que no es simétrica ni asimétrica.

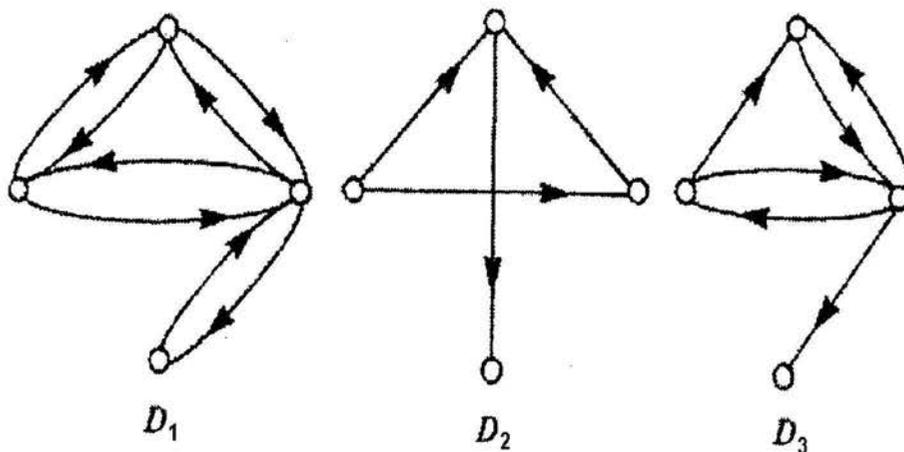


Figura 2.1.1

Una flecha $(u_1, u_2) \in F(D)$ es llamada asimétrica si la flecha $(u_2, u_1) \notin F(D)$, y es llamada simétrica si la flecha $(u_2, u_1) \in F(D)$.

En la figura 2.1.2 se muestra la digráfica D y su parte simétrica denotada por D' .

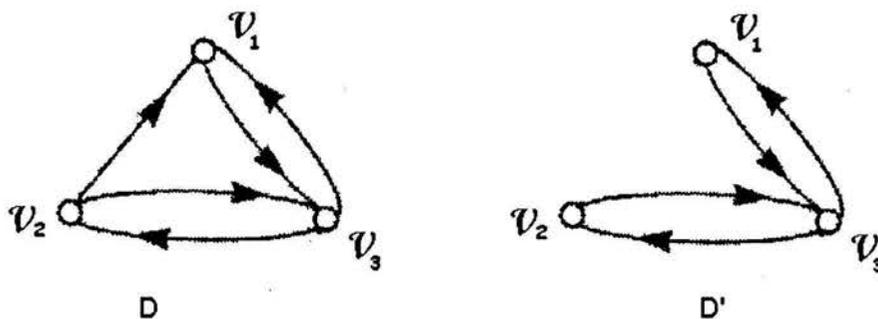


Figura 2.1.2

La parte asimétrica de D que es denotada por $\text{Asim}(D)$, es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas asimétricas de D .

En la figura 2.1.3 se muestran una digráfica y su respectiva parte asimétrica.

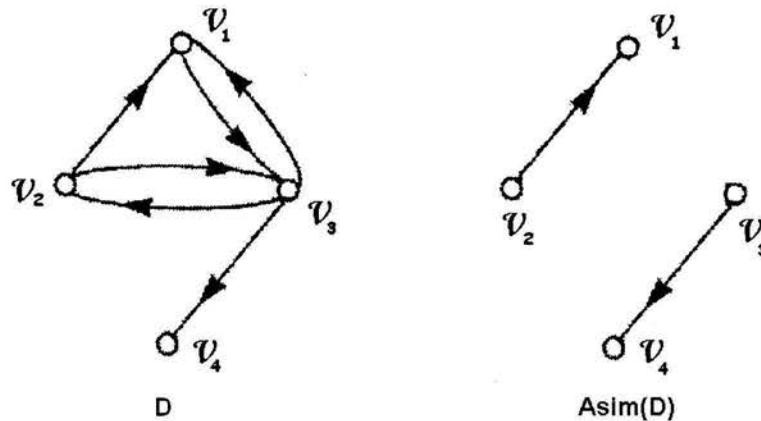


Figura 2.1.3

Un núcleo de una digráfica D es un subconjunto de vértices $K \subseteq V(D)$ tal que K es independiente (ningún vértice de K es adyacente a otro vértice de K) y K es absorbente (todo vértice de $V(D) - K$ tiene un sucesor en K), esto es:

$x \in K$ implica que $\Gamma_D(x) \cap K = \emptyset$ (Independencia)

$x \notin K$ implica que $\Gamma_D(x) \cap K \neq \emptyset$ (Absorbencia).

Cuando cada subdigráfica inducida de D tiene un núcleo, se dice que la digráfica D es una digráfica núcleo perfecta.

En la página siguiente se muestra en la figura 2.1.4 un ejemplo tomando como base la digráfica D , donde $V(D) = \{ a, b, c, d, e, f \}$ y se van mostrando subdigráficas inducidas quitando un vértice de cada subdigráfica resultante, e indicando cuales son los vértices del núcleo de cada una de ellas.

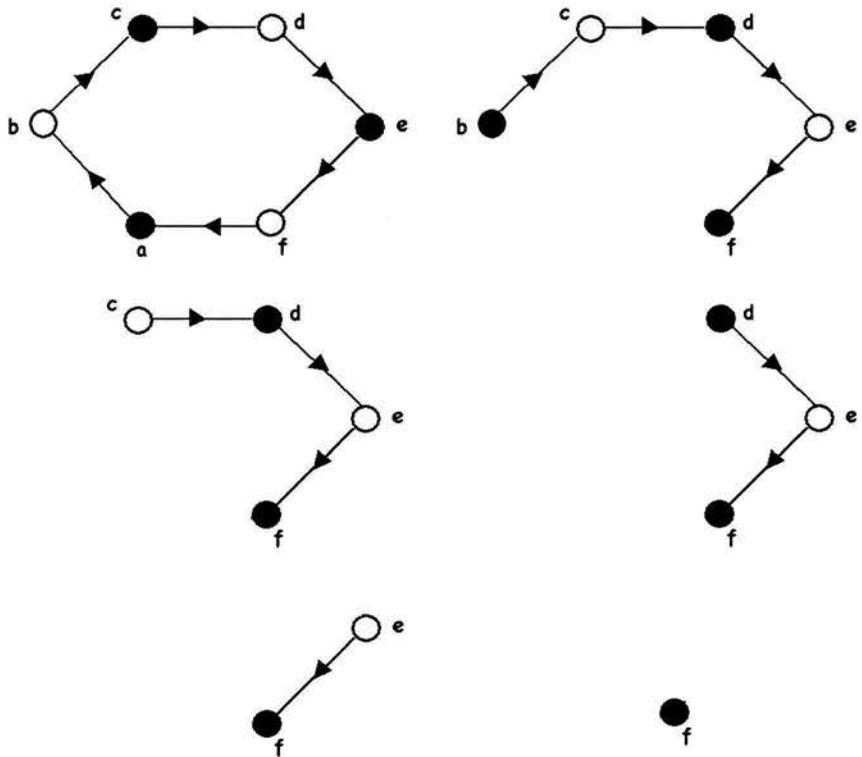


Figura 2.1.4

El concepto de núcleo de una digráfica fue considerado primeramente por Von Neumann Teoría de Juegos donde lo llamó "solución de un juego por cooperación entre n personas". En la figura 2.1.5 se muestran las digráficas D_1 y D_2 ; donde sus núcleos se muestran con vértices oscuros.

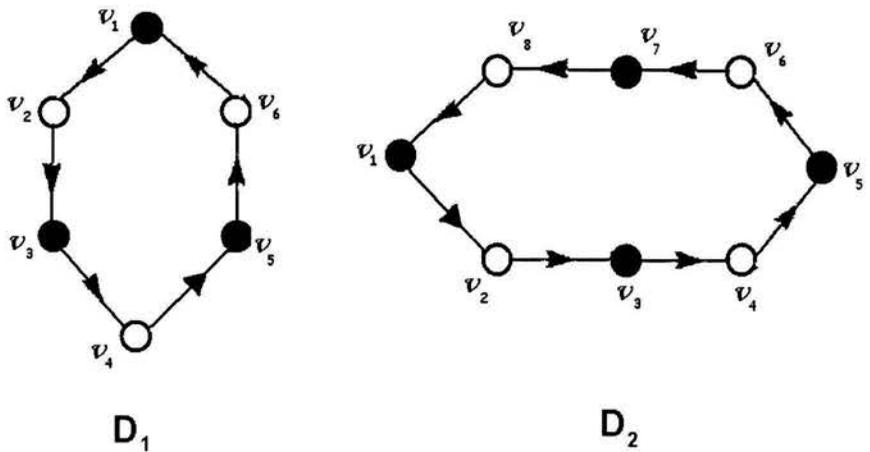


Figura 2.1.5

Teorema 2.1.1 Berge [2]

Sea D una digráfica simétrica, entonces D posee un núcleo. Además, un conjunto $S \subset V(D)$ es un núcleo si y sólo si S es un conjunto independiente maximal.

Demostración

\Leftarrow) Sea S un conjunto independiente maximal y $v \in V(D) - S$, entonces existe una vS -flecha (flecha de v a S) o una Sv -flecha en D , pero como D es simétrica, entonces existen una vS -flecha y una Sv -flecha, por lo tanto S es absorbente y S es un núcleo de D .

\Rightarrow) Sea S un núcleo de D , por la **Proposición 2.1.1**, S es un conjunto independiente maximal. ■

Definición: Sea una digráfica $D(V, F)$, se dice que D es una digráfica transitiva siempre que:

$(u, v) \in F(D)$ y $(v, w) \in F(D)$ implica que $(u, w) \in F(D)$.

En la figura 1.3.12 se muestra una digráfica transitiva, en ella se ve que:

$(1, 2) \in F(D)$ y $(2, 3) \in F(D) \Rightarrow (1, 3) \in F(D)$

$(1, 3) \in F(D)$ y $(3, 4) \in F(D) \Rightarrow (1, 4) \in F(D)$

$(1, 4) \in F(D)$ y $(4, 5) \in F(D) \Rightarrow (1, 5) \in F(D)$

$(2, 3) \in F(D)$ y $(3, 4) \in F(D) \Rightarrow (2, 4) \in F(D)$

$(2, 4) \in F(D)$ y $(4, 5) \in F(D) \Rightarrow (2, 5) \in F(D)$

$(3, 4) \in F(D)$ y $(4, 5) \in F(D) \Rightarrow (3, 5) \in F(D)$

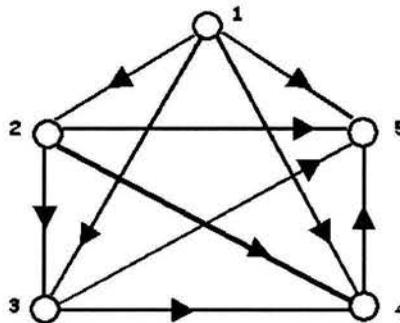


Figura 1.3.12

Definición: Sea \mathbf{A} la familia de todos los conjuntos absorbentes de la digráfica D . Entonces el número de absorción de la digráfica D está definido por:

$$\beta(D) = \min_{A \in \mathbf{A}} |A|$$

Proposición 2.1.2

Si D es una digráfica transitiva, entonces cada conjunto absorbente minimal en D tiene cardinalidad $\beta(D)$, donde $\beta(D)$, denota el número de absorción de D .

Demostración

Sea D una digráfica transitiva, es decir,

$$y \in \Gamma_D^+(x), y z \in \Gamma_D^+(y) \text{ implica que } z \in \Gamma_D^+(x)$$

Sea S una componente fuertemente conexa de D .

Denominaremos m_S al número de flechas que tienen como punto inicial a S y punto final $(V(D) - S)$.

Si S es una componente fuertemente conexa y $m_S = 0$, (esto es, no hay flechas que salgan de S), entonces S será denominada componente terminal.

La digráfica obtenida de D , condensando cada componente fuertemente conexa, por el teorema 1.4.4 ("La condensación de toda digráfica es acíclica"), no contiene ciclos, y por el teorema 1.4.6 ("Toda digráfica acíclica contiene al menos un vértice de exgrado cero"), D posee componentes terminales.

Sean C_1, C_2, \dots, C_q las componentes terminales de D .

Cada una de éstas es una subdigráfica simétrica, porque D es transitiva y fuertemente conexa..

Si A un conjunto absorbente minimal, entonces A contiene al menos un vértice de cada componente terminal.

En caso contrario, existe $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ tal que $A \cap C_j = \emptyset$,

y cada $x \in C_j$ satisface que $x \notin A$, y por lo tanto $\Gamma^+(x) \cap A = \emptyset$,

lo que contradice que A es absorbente.

Sea $a_i \in A \cap C_i$, para cada i ,

Sea $A' = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$. A' también es un conjunto absorbente,

porque cada $x \notin A'$ es punto inicial de una flecha que termina en A' (Por la transitividad).

De ahí que $A' = A$, y cada conjunto absorbente minimal, es también un conjunto absorbente mínimo y tiene cardinalidad $q = \beta(D)$. ■

Teorema 2.1.2

Sea D una digráfica transitiva, un conjunto $S \subset V(D)$ es un núcleo si y sólo si S es un conjunto absorbente minimal

Demostración

\Rightarrow) Sea S un núcleo de D , entonces por la **Proposición 2.1.1**, S es un conjunto absorbente minimal.

\Leftarrow) Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ es un conjunto absorbente minimal, por lo probado en la **Proposición 2.1.2**, A es un conjunto independiente porque no hay flechas que salgan de una componente terminal, por lo tanto A es un núcleo. ■

Corolario 2.1.1

Una digráfica transitiva tiene un núcleo y todos sus núcleos tienen la misma cardinalidad.

Demostración

Es consecuencia directa del **Teorema 2.1.2** y la **Proposición 2.1.2**

Teorema 2.1.3 Von Neumann y Morgenstern 1944 [15]

Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos, entonces D tiene un núcleo, y este núcleo es único.

Demostración

Por inducción sobre $|V(D)| = n$.

Para $n = 1$, sea $V(D) = \{u\}$, entonces $N = \{u\}$ es núcleo de D y claramente es único.

Para $n = 2$, sea $V(D) = \{u, v\}$, si $\{(u, v)\} = F(D)$, entonces $N = \{v\}$ es núcleo de D , análogamente si $\{(v, u)\} = F(D)$, el núcleo de D sería $N = \{u\}$, y si $F(D) = \emptyset$, entonces $N = \{u, v\}$ sería el núcleo de D , claramente en los dos casos el núcleo es único.

Hipótesis de inducción:

Supongamos cierto el resultado para toda digráfica D^* sin ciclos dirigidos y con $|V(D^*)| \leq n-1$.

Sea D una digráfica acíclica tal que $|V(D)| = n$.

Sea $N_0 = \{v \in V(D) \text{ tal que } \delta^+(v) = 0\}$

Como D no tiene ciclos dirigidos, por el **Teorema 1.4.6**, $N_0 \neq \emptyset$.

Sea $B_0 = \{v \in V(D) \text{ tal que existe alguna } v N_0\text{-flecha en } D\}$,

ahora consideremos a la digráfica $D' = D[V(D) - (N_0 \cup B_0)]$,

como $N_0 \neq \emptyset$, entonces $|V(D')| \leq n-1$ y por hipótesis de inducción D' tiene un único núcleo N' y $N = N_0 \cup N'$ es un núcleo de D .

Ahora demostraremos que N es el único núcleo de D .

Supongamos que existe N_1 otro núcleo de D , por definición de N_0 , $N_0 \subseteq N_1$

y también por definición de D' , $N_1 - N_0$ es un núcleo de D' ,

entonces por hipótesis de inducción $N_1 - N_0 = N'$. Por lo tanto $N_1 = N$. ■

Teorema 2.1.4

Si todo ciclo dirigido de longitud impar en D posee al menos dos polos consecutivos, entonces D es una digráfica núcleo perfecta.

Este teorema fue probado por Galeana [9], su demostración es muy larga, por eso no se incluye aquí.

2.2 Aplicaciones

2.2.1 Teoría de Juegos (Von Neumann, Morgenstern, 1944) [15]

El concepto de núcleo fue presentado primeramente bajo el nombre de solución en la Teoría de Juegos en el siguiente ejemplo:

Supóngase que n jugadores, denotados por (1), (2), ... , (n), deben discutir juntos para seleccionar un punto x (una "situación") de un conjunto X (un conjunto de "situaciones").

Si el jugador (i) prefiere la situación a sobre la situación b , escribiremos $a \geq^i b$.

Nótese que se tiene un conjunto no vacío X , y entre los n jugadores deben elegir un elemento x (una "situación") del conjunto X .

Así entre las n personas se debe establecer la preferencia de una situación sobre las demás.

Las preferencias individuales pueden no ser compatibles, y consecuentemente, es necesario introducir el concepto de *preferencia efectiva*.

La situación a es *efectivamente preferida* sobre b , o $a > b$, si existe un conjunto de jugadores, los cuales prefieren la situación a sobre la situación b y que son capaces de convencer o imponer a los demás su preferencia por la situación a .

Sin embargo, la preferencia efectiva no es transitiva, esto es, $a > b$ y $b > c$ no necesariamente implica que $a > c$.

El conjunto de situaciones y la relación de *preferencia efectiva* que se dará en algunos pares de situaciones, define la manera natural de una digráfica D , con $V(D) = X$ y con $(a, b) \in F(D)$, si b es efectivamente preferida sobre a .

Si la digráfica D tiene algún núcleo S , la elección del punto x se limita a elegir un punto de S . Ya que por ser S independiente, ninguna situación en S es efectivamente preferida a otra de S , y si $x \notin S$, entonces existiría otra situación en S que es efectivamente preferible a x .

2.2.2 Base de axiomas Claude Berge [3]

Consideremos una "teoría", esto es: un conjunto de proposiciones $\{a, b, c, \dots\}$ y se quiere encontrar una base de axiomas para esta teoría, esto es, un conjunto B de proposiciones tales que:

- (1) Cada proposición que no está en B se sigue de alguno de los axiomas
- (2) Ningún axioma se sigue de otro

Podemos representar cada proposición por un vértice y una flecha de a a b, si la proposición b implica a, la digráfica resultante D es transitiva, esto es,

$$(a, b) \in F(D) \text{ y } (b, c) \in F(D) \text{ implica que } (a, c) \in F(D).$$

Claramente el problema de encontrar una base de axiomas se traduce a encontrar un núcleo en la digráfica D.

Y como se demostró en el corolario 2.1.1 que toda digráfica transitiva tiene un núcleo, entonces la base de axiomas existe.

2.2.3 Juego entre dos personas Claude Berge [3]

Dados dos jugadores A y B y una digráfica D, se puede definir el siguiente juego: Se fija un vértice inicial x_0 .

El jugador A selecciona un vértice x_1 en $\Gamma^+(x_0)$,

$(\Gamma^+(x_0))$ indica los vértices sucesores de x_0)

el jugador B selecciona cualquier vértice x_2 en $\Gamma^+(x_1)$,

enseguida el jugador A selecciona un vértice x_3 en $\Gamma^+(x_2)$, etc.

Si un jugador selecciona un vértice x_i con $\Gamma^+(x_i) = \emptyset$, entonces ese jugador gana y su oponente pierde, es decir, pierde el jugador que ya no puede seleccionar algún vértice.

Claramente si la digráfica tiene ciclos, el juego podría no terminar.

Si la digráfica D tiene un núcleo, entonces el jugador que escoge un punto en el núcleo empata o gana. Ya que, si el jugador A selecciona un punto en el núcleo, enseguida el jugador B debe seleccionar un punto fuera de él y el jugador A, puede volver al núcleo en la siguiente oportunidad.

2.2.4 Un problema de combinatoria en lógica Claude Berge [2]

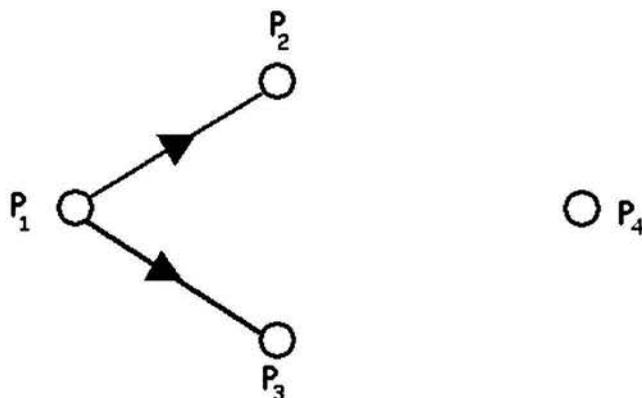
Consideremos un conjunto de propiedades $P = \{P_1, P_2, \dots\}$ y un conjunto de teoremas del tipo: "la propiedad P_i implica la propiedad P_j ".

Estos teoremas pueden ser representados por una digráfica D , con conjunto de vértices P , donde $(P_i, P_j) \in F(D)$ si y sólo si se sigue de uno o más de los teoremas dados que P_i implica P_j .

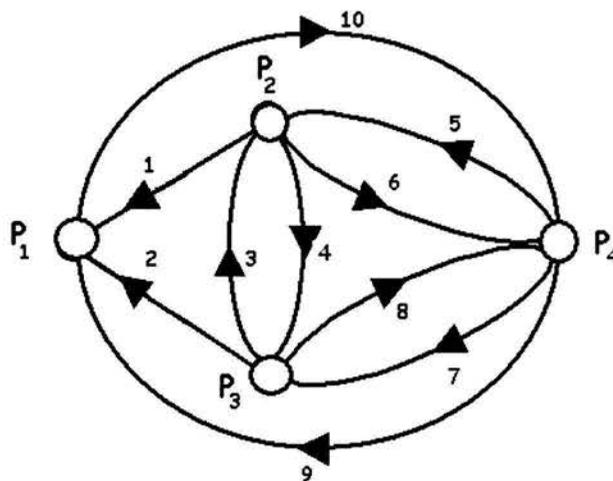
Suponga que quiere mostrar que todas las implicaciones representadas por las flechas del complemento de D , denotado por (D^C) , son falsas, es decir, que la teoría representada en D ya está completa, más precisamente, por cada pareja (p, q) con $p \neq q$ y $(p, q) \notin F(D)$, asignaremos un estudiante que tiene que encontrar un ejemplo donde p se cumple pero q no, es decir, un contraejemplo de la afirmación p implica q .

Aquí determinaremos el número mínimo de estudiantes necesarios para mostrar que todas las posibles implicaciones están ya representadas en la digráfica D .

Consideremos la siguiente digráfica D :



La digráfica D^C , complementaria a la digráfica D :

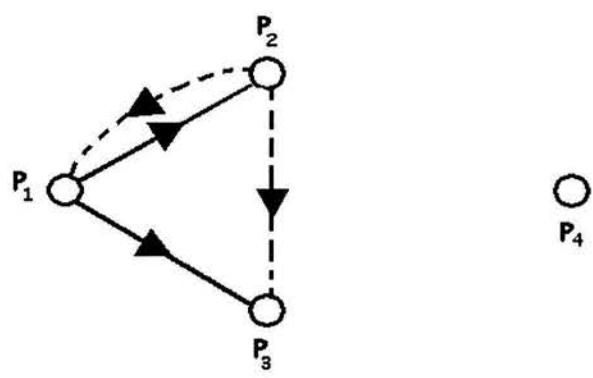


Es suficiente con probar la falsedad de las implicaciones representadas por las cinco flechas 3, 4, 5, 7 y 10 de D^C de las cuales se sigue la falsedad de las otras posibles implicaciones.

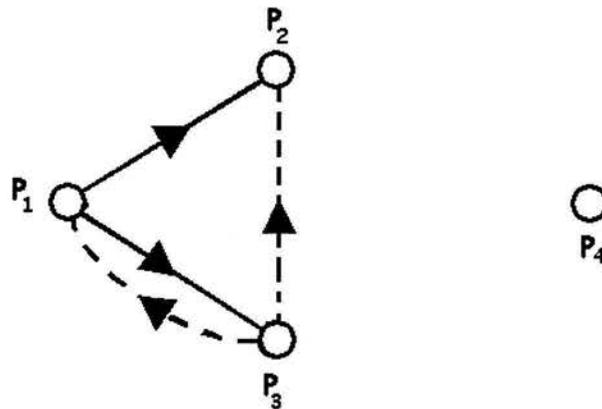
Por ejemplo, tenemos $P_2 \Rightarrow P_1$ es falsa, de otro modo $P_2 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_3$, que contradice la afirmación de que la flecha (P_2, P_3) es falsa.

Sea H una digráfica cuyos vértices representan las flechas 1, 2, 3, ..., 10 de D^C y donde una flecha es dibujada de i a j si y sólo si "la implicación i es verdadera" implica que "la implicación j es verdadera".

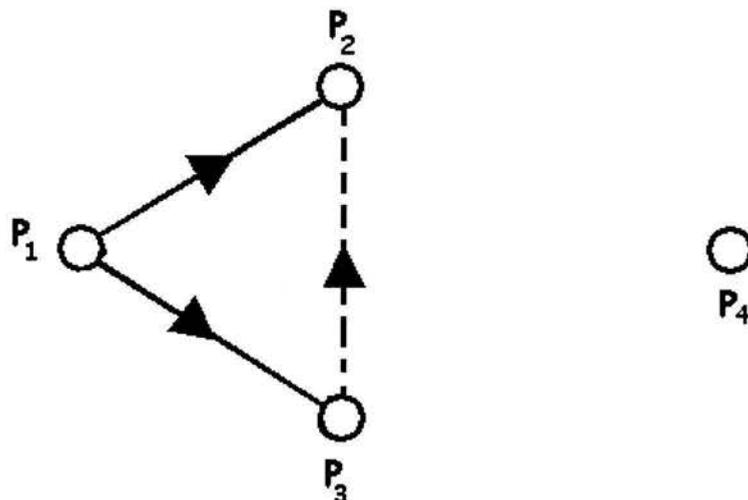
Tomamos la flecha 1 como verdadera, esto es, "la implicación 1 es verdadera", entonces $P_2 \Rightarrow P_1$ y $P_1 \Rightarrow P_3$, entonces por transitividad $P_2 \Rightarrow P_3$ que es la flecha 4, esto es, en la digráfica H , hay una flecha dibujada de la flecha 1 a la flecha 4.



Tomamos la flecha 2 como verdadera, esto es, "la implicación 2 es verdadera", entonces $P_3 \Rightarrow P_1$ y $P_1 \Rightarrow P_2$, entonces por transitividad $P_3 \Rightarrow P_2$ que es la flecha 3, esto es, en la digráfica H, hay una flecha dibujada de la flecha 2 a la flecha 3.

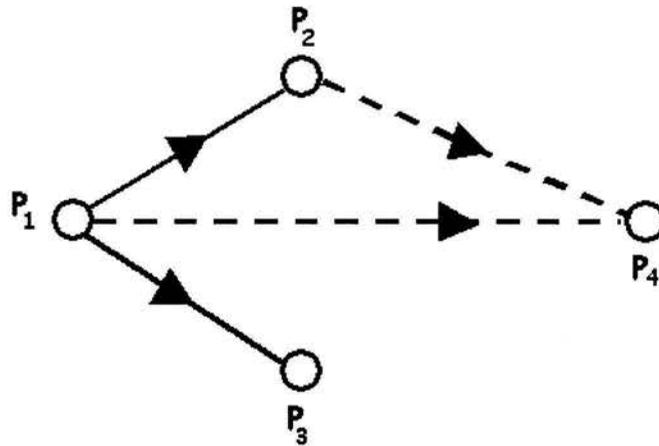


Tomamos la flecha 3 como verdadera, esto es, "la implicación 3 es verdadera", entonces $P_3 \Rightarrow P_2$ y esto no nos implica nada, esto es, en la digráfica H, no hay una flecha dibujada desde la flecha 3.

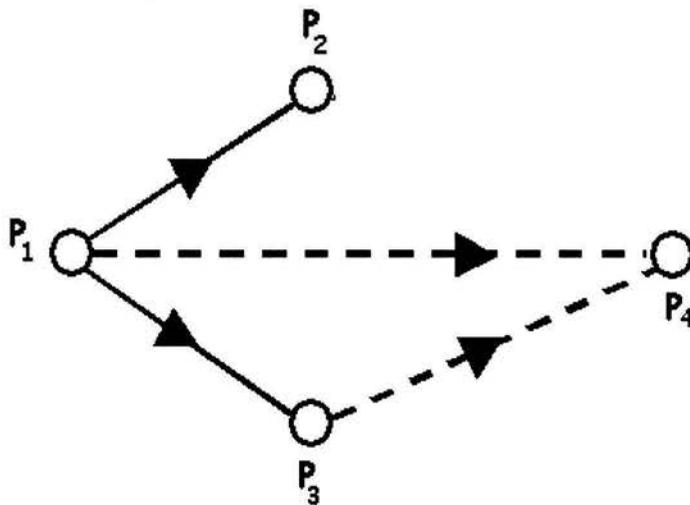


Lo sucedido con la flecha 3, pasa con las flechas 4, 5, 7 y 10, esto es, no hay una flecha dibujada desde las flechas indicadas.

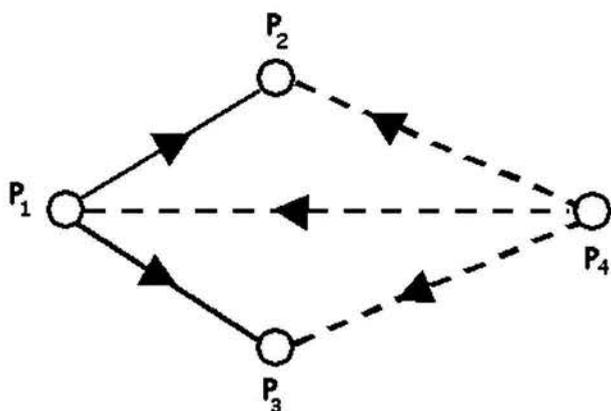
Tomamos la flecha 6 como verdadera, esto es, "la implicación 6 es verdadera", entonces $P_2 \Rightarrow P_4$ y $P_1 \Rightarrow P_2$, entonces por transitividad $P_1 \Rightarrow P_4$ que es la flecha 10, esto es, en la digráfica H, hay una flecha dibujada de la flecha 6 a la flecha 10.



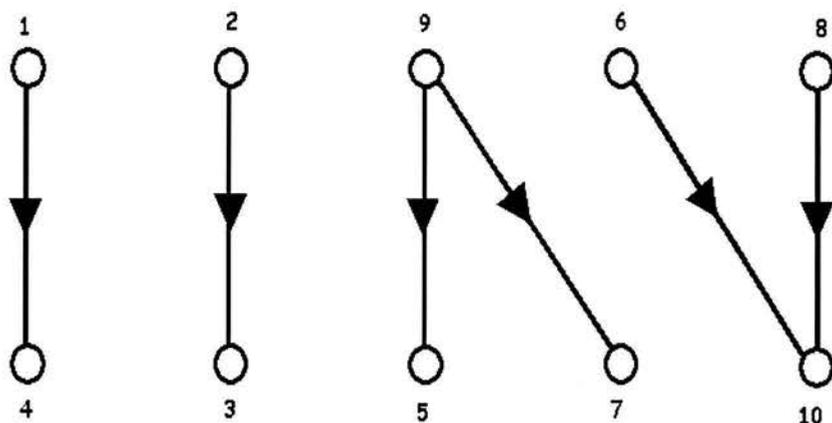
Tomamos la flecha 8 como verdadera, esto es, "la implicación 8 es verdadera", entonces $P_3 \Rightarrow P_4$ y $P_1 \Rightarrow P_3$, entonces por transitividad $P_1 \Rightarrow P_4$ que es la flecha 10, esto es, en la digráfica H, hay una flecha dibujada de la flecha 8 a la flecha 10.



Tomamos la flecha 9 como verdadera, esto es, "la implicación 9 es verdadera", entonces $P_4 \Rightarrow P_1$ y $P_1 \Rightarrow P_2$, entonces por transitividad $P_4 \Rightarrow P_2$ que es la flecha 5, esto es, en la digráfica H, hay una flecha dibujada de la flecha 9 a la flecha 5, pero además como $P_4 \Rightarrow P_1$ y $P_1 \Rightarrow P_3$, entonces por transitividad $P_4 \Rightarrow P_3$ que es la flecha 7, esto es, en la digráfica H, hay una flecha dibujada de la flecha 9 a la flecha 7.



Entonces la digráfica H queda representada de la siguiente manera:



En H, el conjunto $N = \{3, 4, 5, 7, 10\}$ es un núcleo, es decir, es absorbente e independiente.

Del hecho de que N es absorbente, se sigue que si las implicaciones 3, 4, 5, 7 y 10 son falsas, y al ser N independiente, resulta ser minimal con respecto a la propiedad anterior.

Como N es el único núcleo de H , se sigue que cinco contraejemplos son necesarios para mostrar que todas las implicaciones de D son falsas, esto es, se necesitan 5 estudiantes uno para cada contraejemplo. ■

2.2.5 Las antibases de una teoría.

Una teoría definida por $T = (X, \mathcal{C})$ está definida por:

- 1) Un conjunto X cuyos elementos $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ pueden ser pensados como proposiciones.
- 2) Una relación de cerradura \mathcal{C} en X ; para $S \subset X$, $\mathcal{C}(S)$ denota el conjunto de todas las proposiciones en X , que pueden ser probadas a partir de las proposiciones en S .

Para simplificar escribiremos $\mathcal{C}(s)$ en lugar de $\mathcal{C}(\{s\})$ para $s \in X$.

Una teoría $T = (X, \mathcal{C})$ es unitaria si $x \in \mathcal{C}(S)$ implica la existencia de algún $s \in S$ tal que $x \in \mathcal{C}(s)$, esto es, se necesita una sola proposición para probarla.

En otro caso T es plural.

Si una teoría T es unitaria, puede ser representada por una digráfica transitiva con conjunto de vértices X , donde (x, y) es una flecha si y sólo si $x \in \mathcal{C}(y)$.

Una base de axiomas para T es un conjunto $B \subseteq X$ tal que $\mathcal{C}(B) = X$ y el cual es minimal con respecto a esta propiedad.

Una antibase para T es un conjunto $A \subseteq X$ tal que $\mathcal{C}(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ y el cual es minimal con respecto a esta propiedad.

La interpretación de esta definición, es que si todas las proposiciones en A son falsas, entonces todas las proposiciones en X son falsas y A es minimal con respecto a esta propiedad.

La inversa $T^{-1} = (X, \mathcal{C}^{-1})$ de una teoría $T = (X, \mathcal{C})$, está definida por:

$x \in \mathcal{C}^{-1}(S)$ si y sólo si $\mathcal{C}(x) \cap S \neq \emptyset$.

Es fácil checar que T^{-1} es una teoría, pues X es el mismo conjunto de proposiciones que en T y \mathcal{C}^{-1} es una relación de cerradura en X .

Lema 2.2.1

La inversa T^{-1} de una teoría T es unitaria.

Demostración

Sea $S \subset X$ y $x \in \mathcal{C}^{-1}(S)$, entonces $\mathcal{C}(x) \cap S \neq \emptyset$ por definición de \mathcal{C}^{-1} .

Sea $s \in \mathcal{C}(x) \cap S$, entonces $\mathcal{C}(x) \cap \{s\} \neq \emptyset$,

esto implica que $x \in \mathcal{C}^{-1}(s)$ y por lo tanto T^{-1} es unitaria. ■

Lema 2.2.2

Un conjunto $A \subseteq X$ es una antibase para T si y sólo si A es una base para T^{-1} .

Demostración

\Rightarrow) Como $A \subseteq X$ es una antibase para T ,

entonces $\mathcal{C}(x) \cap A \neq \emptyset$ para toda $x \in X$ y es minimal con respecto a esta propiedad.

Esto es, $x \in \mathcal{C}^{-1}(A)$ para toda $x \in X$, donde \mathcal{C}^{-1} es la relación de cerradura de T^{-1} .

Esto implica que $X = \mathcal{C}^{-1}(A)$ y A es minimal con respecto a esta propiedad,

por lo tanto A es una base de axiomas para T^{-1} .

\Leftarrow) Como A es una base de axiomas para T^{-1} ,

entonces $\mathcal{C}^{-1}(A) = X$ y A es minimal con respecto a esta propiedad,

esto es, $x \in \mathcal{C}^{-1}(A)$ para toda $x \in X$.

Esto implica que $\mathcal{C}(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $x \in X$,

por lo tanto A es una antibase para T . ■

Como T^{-1} , la inversa de una teoría T es unitaria,

entonces puede ser representada por una digráfica transitiva.

Lema 2.2.3

Sea $A \subseteq X$, A es una base para $T^{-1} = (X, \mathcal{C}^{-1})$ si y sólo si A es un núcleo para H , donde H es la digráfica transitiva que representa a T^{-1} .

Demostración

\Leftarrow) Sea H la digráfica transitiva que representa a T^{-1} ,

entonces $V(H) = X$ y $(x, y) \in F(H)$ si y sólo si $x \in \mathcal{C}^{-1}(y)$, esto es, $y \Rightarrow x$

Sea A un núcleo de H , entonces A es un conjunto independiente y absorbente.

Entonces para cada $x \in X - A$, existe $y \in A$ tal que $(x, y) \in F(H)$, esto es,

$x \in \mathcal{C}^{-1}(y)$, por lo tanto $X = \mathcal{C}^{-1}(A)$ y A es minimal con respecto a esta propiedad, ya

que si suponemos que existe $A' \subseteq A$ tal que $X = \mathcal{C}^{-1}(A')$,

tomamos $x' \in A - A'$ y como A es independiente $x' \notin \mathcal{C}^{-1}(y)$ para todo $y \in A$,

entonces $x' \notin \mathcal{C}^{-1}(A')$ y por lo tanto $X \not\subseteq \mathcal{C}^{-1}(A')$, contradiciendo que A es base,

entonces A es minimal con respecto a esta propiedad

por lo tanto A es una base de axiomas de T^{-1} .

\Rightarrow) Sea A una base de axiomas para T^{-1} ,

esto es, $X = \mathcal{C}^{-1}(A)$ y A es minimal con respecto a esta propiedad.

Como T^{-1} es unitaria, entonces para cada $x \in X$ existe $y \in A$ tal que $x \in \mathcal{C}^{-1}(y)$, es

decir, $(x, y) \in F(H)$ y N es minimal con respecto a esta propiedad,

por lo tanto N es absorbente.

N es independiente ya que si suponemos lo contrario,

entonces existen $x, x' \in N$ tales que $(x, x') \in F(H)$,

entonces si $y \in \mathcal{C}^{-1}(x)$, $(y, x) \in F(H)$ y por la transitividad de H , $(y, x') \in F(H)$,

es decir, $y \in \mathcal{C}^{-1}(x')$ por lo tanto $X = \mathcal{C}^{-1}(N - \{x\})$

pero esto no es posible porque N es minimal.

Por lo tanto N es un núcleo de H . ■

Teorema 2.2.1

En una teoría $T = (X, \mathcal{C})$ todas las antibases tienen la misma cardinalidad.

Demostración

Por el Lema 2.2.2, $A \subseteq X$ es una antibase para T si y sólo si A es una base para T^{-1} , por el Lema 2.2.3 esto sucede si y sólo si A es un núcleo de H , donde H es la digráfica transitiva que representa a T^{-1} .

Y por el Corolario 2.1.1, todos los núcleos de H tienen la misma cardinalidad, por lo tanto, todas las antibases para T tienen la misma cardinalidad. ■

3 Una caracterización alternativa de Gráficas Perfectas

3.1 Definiciones .

Cualquier digráfica D puede ser vista como una orientación de su gráfica subyacente sin flechas de dirección que denotaremos como G_D . En particular, una orientación de una gráfica puede contener flechas simétricas, esto es, flechas cuyo inverso está presente. Una orientación de una gráfica simple no dirigida, consiste en reemplazar cada arista entre los vértices u_1 y u_2 por una flecha desde u_1 hacia u_2 , o por una flecha desde u_2 hacia u_1 , o por ambas flechas.

En la figura 3.1.1 se muestra la digráfica D_2 y su gráfica subyacente.

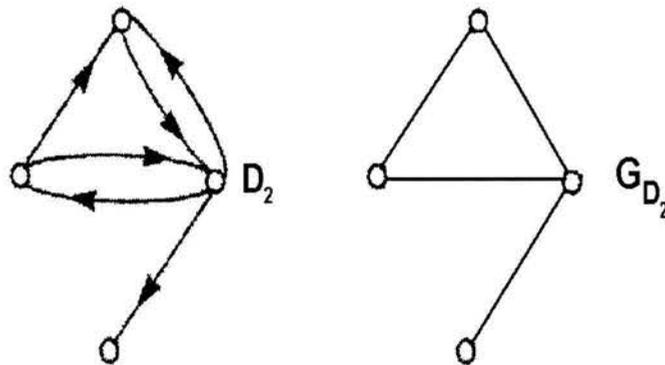


Figura 3.1.1

Notemos que una digráfica es una digráfica completa, si su gráfica subyacente G_D es una gráfica completa. En la figura 3.1.2 se muestra la digráfica D_1 , que es una digráfica completa y su gráfica subyacente

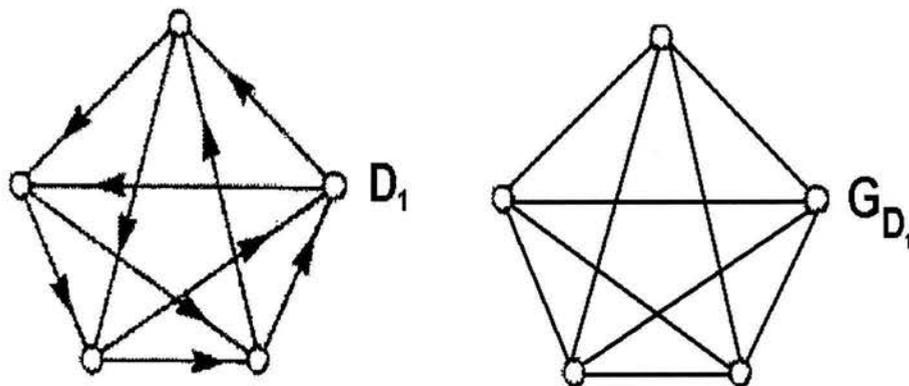


Figura 3.1.2

En digráficas simétricas completas, como todos los vértices son adyacentes entre si, el núcleo de la digráfica está formado por un solo vértice.

En la figura 3.1.3 se muestra un ejemplo en el que se observa que en ambas digráficas el vértice v_1 es núcleo.

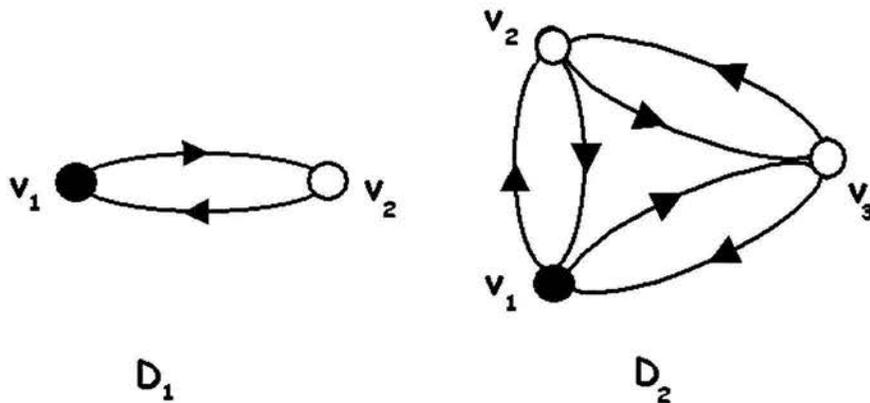


Figura 3.1.3

Definición: La digráfica D es denominada una B_1 -orientación de G_D , si $(u, w) \in F(D_G)$ y $(v, w) \in F(D_G)$ implica que $(u, v) \in F(D_G)$ o $(v, u) \in F(D_G)$.

Cuando D es una B_1 -orientación de G_D , decimos que D es una digráfica B_1 -orientada.

En la figura 3.1.4 se muestran tres digráficas B_1 -orientadas.

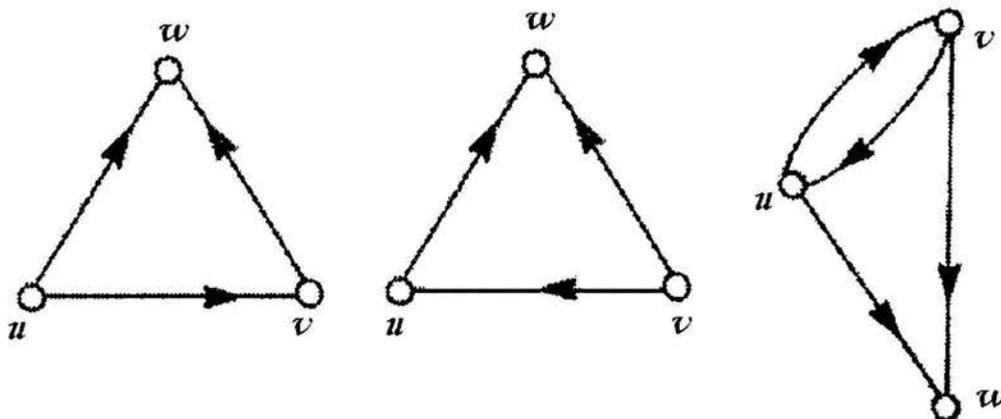


Figura 3.1.4

El concepto de B_1 -orientación fue introducido por Skrien [14] y una caracterización para el caso en el que D no tiene flechas simétricas fue obtenida por Gravil y Urrutia [11]. Ellos también probaron que las gráficas de intervalos, las gráficas trianguladas y las gráficas de arcos circulares son todas gráficas B_1 -orientables.

Muchas propiedades de las digráficas B_1 -orientables fueron obtenidas por J. Bang-Jensen [1]. Una clase de gráficas normalmente B_1 -orientables fueron estudiadas por Gravil y Toledano [10], quienes encontraron un algoritmo en tiempo polinomial para encontrar un núcleo en una clase de gráficas normalmente B_1 -orientables.

Definición: Una digráfica D es denominada una orientación normal de una gráfica G si toda subgráfica de G contiene un vértice absorbente.

Recordemos que se definieron:

El número cromático de una gráfica G , denotado por $\chi(G)$ como el mínimo número de colores necesario para dar una coloración propia a los vértices de la gráfica G .

El número de clan de una gráfica G , denotado por $\omega(G)$ es la subgráfica completa de G de máxima cardinalidad.

Claude Berge [2] definió la clase de gráficas perfectas de la siguiente manera: Una gráfica es llamada perfecta si para cada una de sus subgráficas inducidas H , $\chi(H) = \omega(H)$.

Al mismo tiempo Berge formuló la conjetura siguiente:

Una gráfica G es perfecta si y sólo si, su complemento G^c es perfecta. Esta conjetura fue probada por Lovász [12] y es conocida como el **Teorema de la Gráfica Perfecta**.

3.2 Gráficas que son B_1 -orientables y normalmente orientables .

La siguiente caracterización alternativa de gráficas perfectas fue conjeturada en 1982 por Berge y Duchet [3].

Una gráfica G es una gráfica perfecta si y sólo si cualquier orientación normal de G es núcleo perfecta.

En el presente trabajo se demuestra validez de una versión de la conjetura anterior para gráficas que permiten una B_1 -orientación y una orientación normal.

Demostración de la conjetura:

\Leftarrow) Esta primera parte de esta conjetura ya fue probada por E. Boros y V. Gurvich[4].

\Rightarrow) Para probar la segunda parte, se demuestran tres teoremas y un corolario:

Teorema 3.2.1

Sea G una gráfica perfecta. Si D_G es una orientación normal de G tal que $\text{Asim}(D_G)$ es una digráfica B_1 -orientada, entonces D_G tiene un conjunto independiente máximo, que es un núcleo de D_G .

Corolario 3.2.1.

Sea G una gráfica perfecta. Si D_G es una orientación normal de G tal que $\text{Asim}(D_G)$ es una digráfica B_1 -orientada, entonces D_G es una digráfica núcleo perfecta.

Teorema 3.2.2

Si D es una digráfica núcleo perfecta B_1 -orientada, entonces G_D (la gráfica subyacente de D) es una gráfica perfecta y cada subdigráfica inducida de D tiene un núcleo, el cual es un conjunto independiente máximo de vértices.

Teorema 3.2.3

Sea G una gráfica normalmente orientable y B_1 -orientable; G es una gráfica perfecta si y sólo si existe una orientación normal y una B_1 -orientación de G , que sea una digráfica núcleo perfecta.

Demostración de la segunda parte de la conjetura:

\Rightarrow) Sea G una gráfica perfecta. Por el Teorema de la Gráfica Perfecta, G puede ser partida en $\alpha(G)$ subgráficas completas, denominadas, $K_1, K_2, \dots, K_{\alpha(G)}$, donde $\alpha(G)$ denota el tamaño máximo de un conjunto independiente en G .

Observación 3.2.1

Sea G una gráfica perfecta y D_G cualquier orientación normal de G , si K es una gráfica completa de G , entonces puede asociarse a cada vértice v en K un número específico $n_K(v)$ entre 1 y $|V(K)|$ tal que $n_K(v) < n_K(w)$ implica que hay una flecha desde w hacia v en D_G .

Ahora, dada una partición p de $V(G)$ en gráficas completas, definimos la función f_p como la función que asocia a cada vértice el número que recibe en el clan que lo contiene. Para cualquier $A \subseteq V(D)$ denotamos $f_p(A) = \sum_{z \in A} f_p(z)$.

Demostración de la observación:

Sean G, D_G y K como están definidas en la hipótesis.

Tomamos v_1 cualquier núcleo de K y hacemos $n_K(v_1) = 1$ si y sólo si absorbe a todos los demás vértices de K .

Quitamos v_1 de K y nos queda $K - \{v_1\}$ que es completa,

Por lo tanto, existe $v_2 \in K - \{v_1\}$ tal que v_2 absorbe a todos los demás vértices de $K - \{v_1\}$, entonces hacemos $n_K(v_2) = 2$;

Quitamos v_2 de $K - \{v_1\}$ y nos queda $K - \{v_1, v_2\}$ que es completa.

Repetimos el proceso mientras $K - \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \neq \emptyset$ ■

Teorema 3.2.1 H. Galeana [16]

Sea G una gráfica perfecta. Si D_G es una orientación normal de G tal que $\text{Asim}(D_G)$ es una digráfica B_1 -orientada, entonces D_G tiene un conjunto independiente máximo, que es un núcleo de D_G .

Demostración

Sea D_G una digráfica tal que, es una orientación normal de G tal que $\text{Asim}(D_G)$ es una digráfica B_1 -orientada

$\mathcal{p} = \{K_1, K_2, \dots, K_{\alpha(G)}\}$ una partición de $V(G)$ en subgráficas completas,

$V(K_i) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n_i}\}$, con $n_i = |V(K_i)|$ es una sucesión de vértices de K_i definidos como en la **Observación 3.2.1** y

$f_p: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ una función definida como en la **Observación 3.2.1**.

Tomamos I_0 cualquier conjunto independiente máximo de vértices de D_G tal que

$f_p(I_0) = \min \{f_p(I) \mid I \text{ es un conjunto independiente máximo de vértices de } D_G\}$

Probaremos que I_0 es un núcleo de D_G .

La definición de I_0 implica que I_0 es un conjunto independiente, así que sólo necesitamos probar que I_0 es un conjunto absorbente de D_G .

(i) I_0 es un conjunto absorbente de vértices

Demostración de (i)

Supongamos que I_0 no es un conjunto absorbente de vértices de D_G .

Entonces existe $w \in (V(D_G) - I_0)$ tal que no existe $w \rightarrow I_0$ flecha en D_G .

Y existe una y solo una $i \in \{1, 2, \dots, \alpha(G)\}$ tal que $w \in K_i$. ya que $K_1, K_2, \dots, K_{\alpha(G)}$ es una partición de D_G .

Dado que I_0 es un conjunto independiente máximo de vértices de D_G y G es una gráfica perfecta, tenemos que I_0 intersecta a K_i exactamente una vez.

Sea $\{z\} = I_0 \cap K_i$, $s = f_p(w)$ y $r = f_p(z)$

$$(i.1) \quad r > s$$

$$(i.2) \quad (z, w) \in F(\text{Asim}(D_G))$$

$$(i.3) \quad (I_0 - \{z\}) \cup \{w\} \text{ no es un conjunto independiente}$$

Demostración de (i.1)

Si $r \leq s$, entonces existe wz flecha, pero $z \in I_0$ esto implica que existe wI_0 flecha, que es una contradicción por lo tanto $r > s$

Demostración de (i.2)

Como z, w están en K_i , que es subgráfica completa, entonces existe zw flecha o wz flecha, además $wz \in F(D_G)$ pues $z \in I_0$ y no existen wI_0 flechas por lo tanto $(z, w) \notin F(D_G)$ y $(w, z) \in F(D_G)$, esto es, $(z, w) \in F(\text{Asim}(D_G))$.

Demostración de (i.3)

Supongamos que $(I_0 - \{z\}) \cup \{w\}$ es un conjunto independiente.

Claramente $|I_0| = |(I_0 - \{z\}) \cup \{w\}|$ así que tenemos que:

$(I_0 - \{z\}) \cup \{w\}$ es un conjunto independiente máximo de vértices de D_G

entonces $f_p((I_0 - \{z\}) \cup \{w\}) = f_p(I_0) - f_p(z) + f_p(w)$

y de (i.1) se sigue que $f_p(w) < f_p(z)$ por lo tanto $f_p(w) - f_p(z) < 0$,

entonces $f_p((I_0 - \{z\}) \cup \{w\}) = f_p((I_0 - \{z\}) \cup \{w\}) < f_p(I_0)$ contradiciendo la elección de I_0 .

(i.4) Existe $y \in (I_0 - \{z\})$ tal que $(y, w) \in F(\text{Asim}(F(D_G)))$

Demostración de (i.4)

Dado que I_0 es un conjunto independiente

se sigue de (i.3) que existe $y \in (I_0 - \{z\})$ tal que $\{(y, w), (w, y)\} \cap F(D_G) \neq \emptyset$.

Ahora, la elección de w implica que $(w, y) \notin F(D_G)$, entonces $(y, w) \in F(D_G)$, por lo tanto $(y, w) \in F(\text{Asim}(F(D_G)))$.

Ahora de (i.2) tenemos que $(z, w) \in F(\text{Asim}(D_G))$ y

de (i.4) tenemos que $(y, w) \in F(\text{Asim}(F(D_G)))$

y dado que $\text{Asim}(D_G)$ es una digráfica B_1 -orientada, entonces $\{(z, y), (y, z)\} \cap F(D_G) \neq \emptyset$ y como $z \in I_0$ y $y \in I_0$ se contradice que I_0 es un conjunto independiente. Por lo tanto concluimos que I_0 es un conjunto absorbente de D_G , y de aquí que I_0 es un núcleo de D_G . ■

Corolario 3.2.1.

Sea G una gráfica perfecta. Si D_G es una orientación normal de G tal que $\text{Asim}(D_G)$ es una digráfica B_1 -orientada, entonces D_G es una digráfica núcleo perfecta.

Demostración

Se sigue directamente del **Teorema 3.2.1** y de los siguientes tres hechos:

- (i) Toda subdigráfica inducida de una digráfica B_1 -orientada es también una digráfica B_1 -orientada,
- (ii) Toda subdigráfica inducida de una digráfica normalmente orientada es también una digráfica normalmente orientada y
- (iii) Toda subgráfica inducida de una gráfica perfecta es también una gráfica perfecta.

Teorema 3.2.2 H. Galeana [16]

Si D es una digráfica núcleo perfecta B_1 -orientada, entonces G_D (la gráfica subyacente de D) es una gráfica perfecta y cada subdigráfica inducida de D tiene un núcleo, el cual es un conjunto independiente máximo de vértices.

Demostración

Probaremos que G_D^C el complemento de G_D es una gráfica perfecta y aplicando el **Teorema de la Gráfica Perfecta** concluiremos que G_D es una gráfica perfecta.

Sea Q una subgráfica inducida de G_D^C , probaremos que $\chi(Q) = \omega(Q)$.

Sea $H = D[V(Q)]$, tomaremos $K = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ cualquier núcleo de H y el color de los vértices de Q con n colores $1, 2, \dots, n$ como sigue:

Asignamos el color i a z_i para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y

para $x \notin K$ le asignaremos el color $\min\{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid (x, z_j) \in F(H)\}$, esto es,

x toma el valor de un vértice del cual es adyacente.

- (i) Sean $x, y \in V(Q)$. Si x y y tienen asignado el mismo color, entonces x no es adyacente a y en Q .

Demostración de (i)

Es claro que si $\{x, y\} \subseteq K$ entonces x y y tienen asignado diferente color, así que solo necesitamos analizar los siguientes casos:

$$(i.1) \quad x \in K, y \notin K$$

Dado que $x \in K$, existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $x = z_i$, de aquí que x tiene el color i la hipótesis (i) dice que x y y tienen asignado el mismo color por lo que

$$i = \min\{j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tal que } (y, z_j) \in F(H)\}$$

entonces $(y, z_i) = (y, x) \in F(H) \Rightarrow x$ es adyacente a y en G_D

$\Rightarrow x$ no es adyacente a y en $G_D^C \Rightarrow x$ no es adyacente a y en Q .

$$(i.2) \quad x \notin K, y \notin K$$

Por (i) x y y tienen asignado el mismo color, digamos i , tenemos que:

$$i = \min\{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid (x, z_j) \in F(H)\} = \min\{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid (y, z_j) \in F(H)\},$$

entonces $\{(x, z_i), (y, z_i)\} \subseteq F(H)$ y dado que D es una digráfica B_1 -orientada, tenemos que $\{(x, y), (y, x)\} \cap F(D) \neq \emptyset$, de aquí que x es adyacente a y en $G_D \Rightarrow x$ no es adyacente a y en $G_D^C \Rightarrow x$ no es adyacente a y en Q .

$$(ii) \quad \chi(Q) = \omega(Q) = n$$

Es decir el número cromático de Q es igual a la cardinalidad máxima en un clan.

Demostración de (ii)

La coloración propia dada a $V(Q)$ es propia por lo tanto se sigue que $\chi(Q) \leq n$. Como $Q[K]$ es una subgráfica completa de Q con n vértices, tenemos que el número máximo de vértices $\omega(Q) \geq n$.

Por otra parte, para colorear cualquier gráfica G se necesitan a lo más n colores, dado que puede haber dos vértices con el mismo color, por lo que $\chi(Q) \geq \omega(Q)$ para toda gráfica G , entonces

$$\chi(Q) \geq \omega(Q)$$

$$n \geq \chi(Q) \geq \omega(Q) \geq n \text{ por lo tanto}$$

$$\chi(Q) = \omega(Q) = n \Rightarrow \alpha(H) = \omega(Q)$$

por lo que K es un número máximo de conjuntos independientes de H . ■

Como una consecuencia directa de los teoremas 3.1.1 y 3.1.2 tenemos la siguiente caracterización de gráficas perfectas normalmente orientables y B_1 -orientables.

Teorema 3.2.3 H. Galeana [16]

Sea G una gráfica normalmente orientable y B_1 -orientable; G es una gráfica perfecta si y sólo si existe una orientación normal y una B_1 -orientación de G , que sea una digráfica núcleo perfecta.

Demostración

\Rightarrow) Sea G una gráfica perfecta, que es normalmente orientable y B_1 -orientable.

Entonces existe una orientación de D_G que es una orientación normal y una B_1 -orientación. Por el **Teorema 3.2.1** D_G tiene un núcleo.

Sea H una subgráfica inducida propia de D_G , entonces se tiene que H también es normalmente orientada y B_1 -orientada, la gráfica subyacente de H es perfecta.

Por el **Teorema 3.2.1** H tiene un núcleo y como toda subgráfica inducida de D_G tiene núcleo, entonces D_G es núcleo perfecta.

\Leftarrow) Tenemos una orientación normal y B_1 -orientación de G denominada D_G , la cual es núcleo perfecta. Y por el **Teorema 3.2.2**, G es perfecta. ■

Observación 3.2.2

La hipótesis “ D es una digráfica B_1 -orientada” no puede ser omitida en el **Teorema 3.2.2**.

Demostración

Sea D una digráfica D , y G_D como se muestran en la figura 3.2.1.

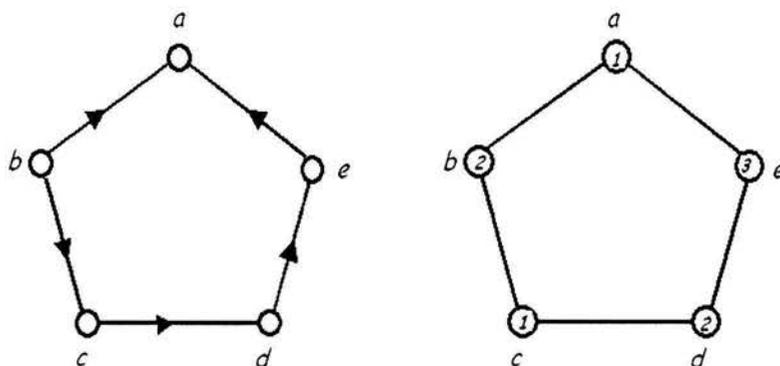


Figura 3.2.1

Dado que las flechas (e, a) y (b, a) son flechas de D , para que ésta fuera una digráfica B_1 -orientada, al menos una de las flechas (b, e) ó (e, b) debería ser flecha de D y no lo son, por lo tanto D no es una digráfica B_1 -orientada.

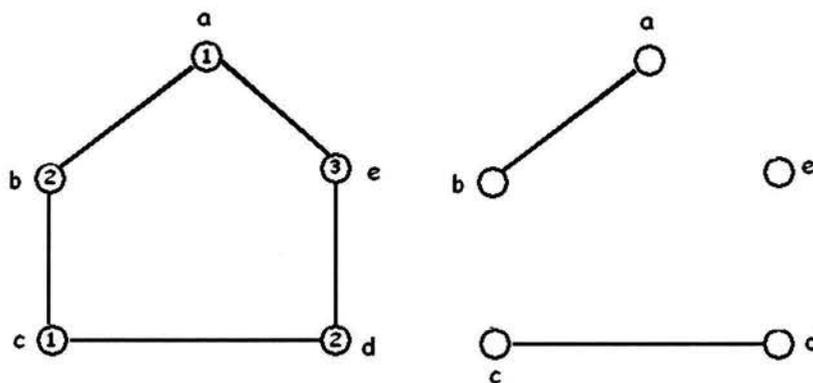


Figura 3.2.2

En la figura 3.2.2 se puede observar que los conjuntos independientes son:

$\{a, c\}$, $\{a, e\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$ y $\{c, d\}$, por lo que $\alpha(G) = 2$,

los clanes están dibujados a la derecha de la gráfica y se observa que $\Phi(G) = 3$.

También se ve que $\omega(G) = 2$. Finalmente el color de los vértices está representado con números y entonces $\gamma(G) = 3$, entonces G no es independientemente perfecta porque $\alpha(G) = 2$ y $\Phi(G) = 3$.

Más aún, G no es cromáticamente perfecta porque $\gamma(G) = 3$ y $\omega(G) = 2$ ■

Observación 3.2.3

La hipótesis "D es núcleo perfecta" no puede ser omitida en el Teorema 3.2.2.

Demostración

Sea D una digráfica D, y G_D como se muestran en la figura 3.2.3.

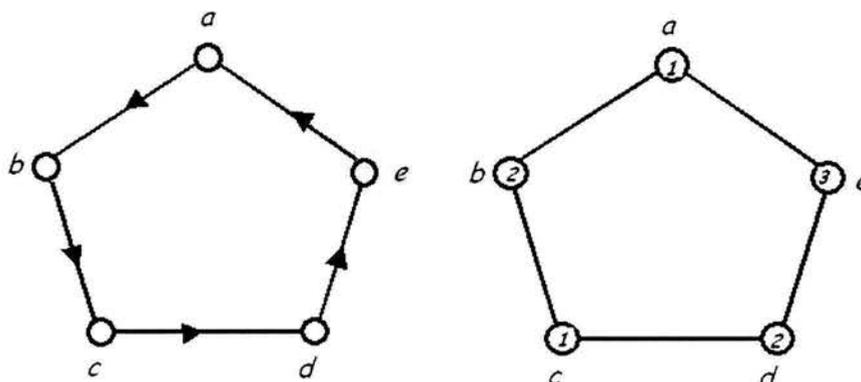


Figura 3.2.3

Supongamos que D es una digráfica núcleo perfecta.

Sea e un vértice del núcleo N, entonces por independencia $a \notin N$ y $d \notin N$.

Ahora, por absorbencia, $b \in N$, y por independencia, $a \notin N$ y $c \notin N$.

Entonces c no es absorbido por el núcleo N. Por lo tanto D no es núcleo perfecta.

La gráfica subyacente G_D es idéntica a la de la observación 3.2.2 y ya se demostró que no es una gráfica perfecta. ■

4 Digráficas B_1 -orientadas y B_2 -orientadas

4.1 Definiciones.

Definición: La digráfica D es denominada una B_1 -orientación de G_D , si $(u, w) \in F(D_G)$ y $(v, w) \in F(D_G)$ implica que $(u, v) \in F(D_G)$ o $(v, u) \in F(D_G)$.

Cuando D es una B_1 -orientación de G_D , decimos que D es una digráfica B_1 -orientada. En la figura 4.1.1 se muestran tres digráficas B_1 -orientadas.

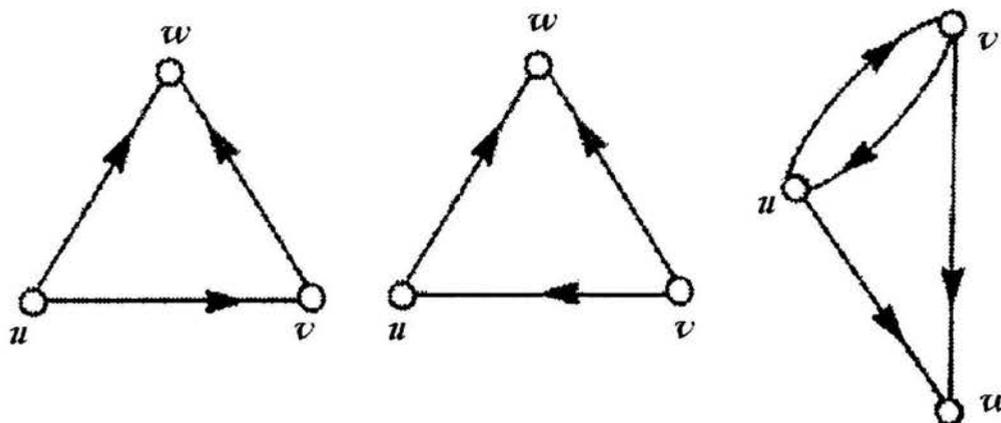


Figura 4.1.1

Definición: La digráfica D es denominada una B_2 -orientación de G_D , si $(w, u) \in F(D_G)$ y $(w, v) \in F(D_G)$ implica que $(u, v) \in F(D_G)$ o $(v, u) \in F(D_G)$.

Si D es una B_2 -orientación de G_D decimos que D es una digráfica B_2 -orientada.

En la figura 4.1.2 se muestran tres digráficas B_2 -orientadas.

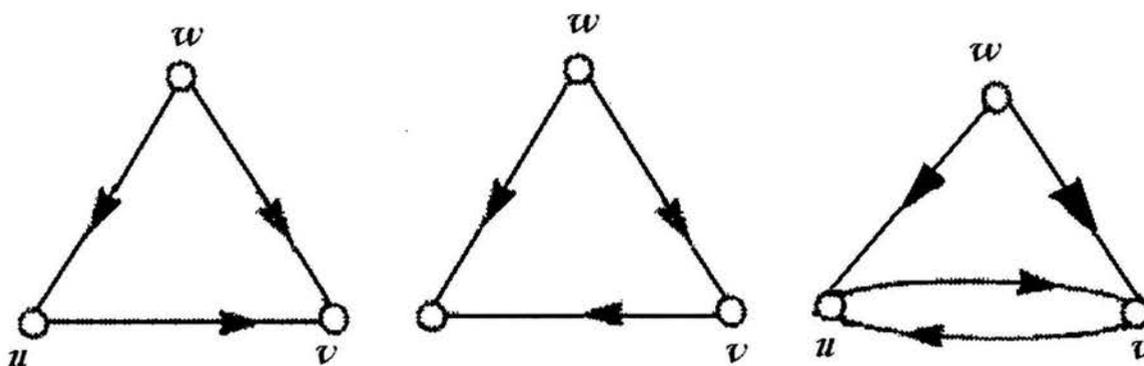


Figura 4.1.2

El concepto de B_1 -orientación fue introducido por Skrien [14] y una caracterización para el caso en el que D no tiene flechas simétricas fue obtenida por Gravil y Urrutia [11]. Ellos también probaron que las gráficas de intervalos, las gráficas trianguladas y las gráficas de arcos circulares son todas gráficas B_1 -orientables.

Definición: Sea $\mathcal{C} = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_m, v_0)$ un ciclo dirigido de la digráfica D , denotaremos por $\ell(\mathcal{C})$ su longitud, es decir, el número de flechas que lo forman. En esta notación $\ell(\mathcal{C}) = m$. Para $i \neq j$ con $i, j \in V(\mathcal{C})$. Denotaremos también con (i, \mathcal{C}, j) la ij -trayectoria dirigida contenida en \mathcal{C} y denotaremos por $\ell(i, \mathcal{C}, j)$ su longitud.

Definición: Una diagonal de \mathcal{C} es una flecha $f = (i, j) \in (F(D) - F(\mathcal{C}))$ tal que $i \neq j$ con $i, j \in V(\mathcal{C})$.

Definición: Una seudodiagonal de \mathcal{C} es una diagonal de \mathcal{C} doblemente orientada.

En la figura 4.1.3 se muestran tres ejemplos, un ciclo dirigido \mathcal{C} (4.13.a), de una diagonal en el ciclo \mathcal{C} (4.13.b) y otro de una seudodiagonal, en el mismo ciclo (4.13.c).

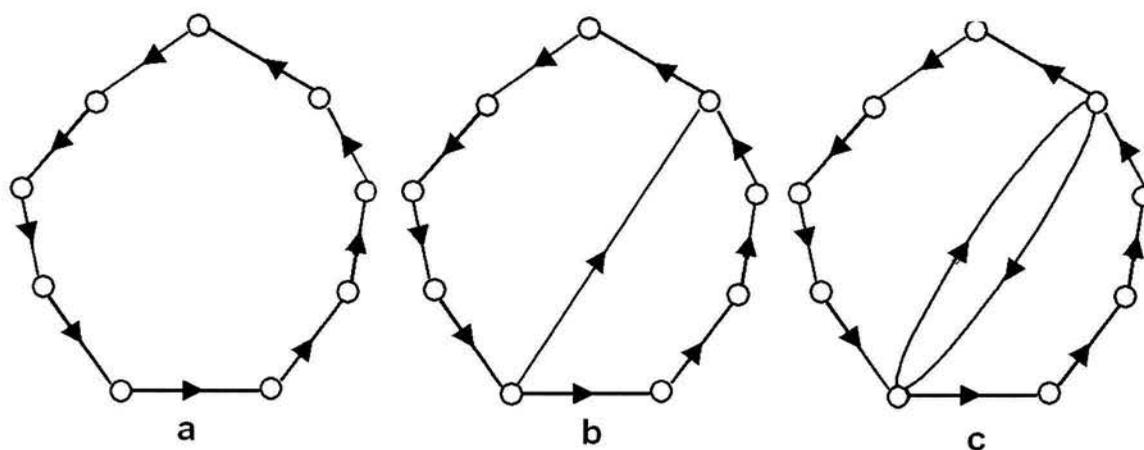


Figura 4.1.3

Definición: La manera de medir la longitud de una diagonal $\ell(i, \mathcal{C}, j)$ es, partiendo del vértice origen i , contar las flechas en \mathcal{C} , siguiendo la dirección de las flechas del ciclo dirigido \mathcal{C} , hasta llegar al vértice destino j .

Ejemplo: En la figura 4.1.4 se muestran dos ciclos dirigidos γ_1 y γ_2 , con dos diagonales cada uno. Sus longitudes son:

$$\ell(v_7, \gamma_1, v_1) = 3, \quad \ell(v_3, \gamma_1, v_7) = 4, \quad \ell(v_3, \gamma_2, v_0) = 6, \quad \ell(v_8, \gamma_2, v_5) = 6$$

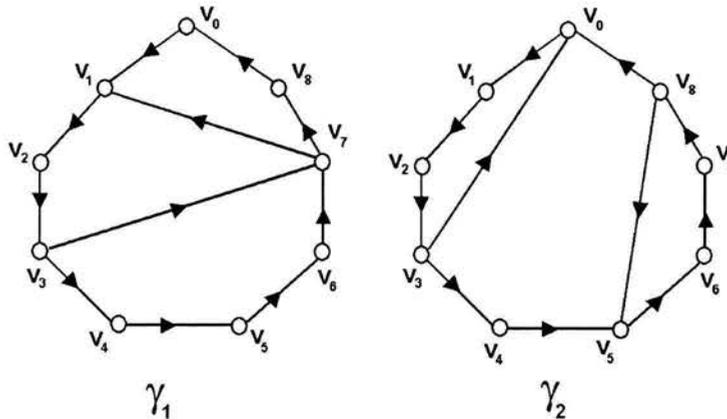


Figura 4.1.4

Dos vértices unidos por una flecha de \mathcal{C} se dice que son consecutivos en \mathcal{C} .

Definición: Un polo del ciclo \mathcal{C} es el vértice terminal w de una diagonal (x, w) de \mathcal{C} .

En la figura 4.1.5 se muestra un ciclo dirigido con una diagonal, y en él se puede ver que los vértices v_1 y v_2 son consecutivos, como también lo son v_5 y v_6 . Se muestra también un polo que es el punto v_8 (señalado con negro).

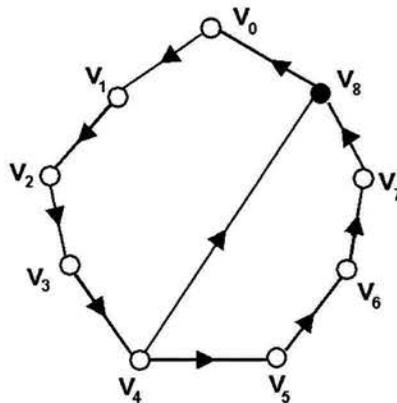


Figura 4.1.5

4.2 Núcleos en digráficas B_1 -orientadas.

Teorema 4.2.1

Sea D una digráfica en la que cada ciclo dirigido de longitud impar γ de D satisface las siguientes propiedades:

- i) $D[V(\gamma)]$ es una digráfica B_1 -orientada y
- ii) γ tiene al menos dosseudodiagonales

Entonces cada ciclo dirigido de longitud impar de D tiene al menos dos polos consecutivos.

Demostración

Procederemos por inducción sobre $\ell(\gamma)$.

Sea γ es un ciclo dirigido de longitud impar de D .

Cuando $\ell(\gamma) = 3$, el teorema se sigue de la hipótesis (ii). Ya que si $\ell(\gamma) = 3$ y se tienen dosseudodiagonales, entonces las subdigráficas posibles se muestran en la figura 4.2.1, y éstas tienen dos polos consecutivos (señalados en negro).

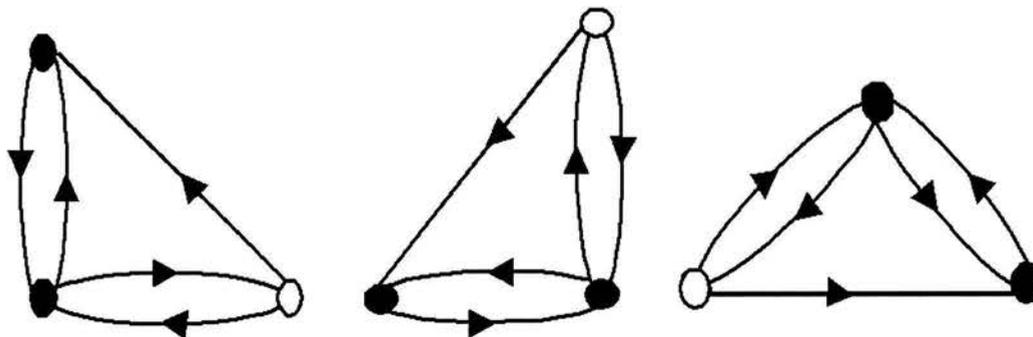


Figura 4.2.1

Suponemos que todo ciclo dirigido de longitud impar γ' con $\ell(\gamma') < 2k + 1$, con $k \geq 2$, tiene al menos dos polos consecutivos.

Sea $(0, 1, 2, \dots, 2k, 0)$ la etiquetación de los vértices de γ , un ciclo dirigido de longitud $2k + 1$, con $k \geq 2$ y que cumple las hipótesis del teorema.

Necesitamos probar que γ tiene al menos dos polos consecutivos.

Observación 4.2.1

Podemos suponer que $F(\gamma) \subseteq F(\text{Asim}(D))$. De otro modo, ya acabamos.

Veamos, si $F(\gamma) \subseteq F(\text{Sim}(D))$, entonces, dado que si $(1,0) \in F(D)$ entonces la hipótesis (i) implica que $(1, 2k) \in F(D)$ ó $(2k, 1) \in F(D)$.

Cuando $(1, 2k) \in F(D)$ tenemos que $2k,0$ son polos consecutivos de γ como se muestra en la figura 4.2.2.a, y cuando $(2k, 1) \in F(D)$ tenemos que $0,1$ son polos consecutivos de γ como se muestra en la figura 4.2.2.b, por lo que, cuando $F(\gamma) \subseteq F(\text{Sim}(D))$, γ tiene al menos dos polos consecutivos.

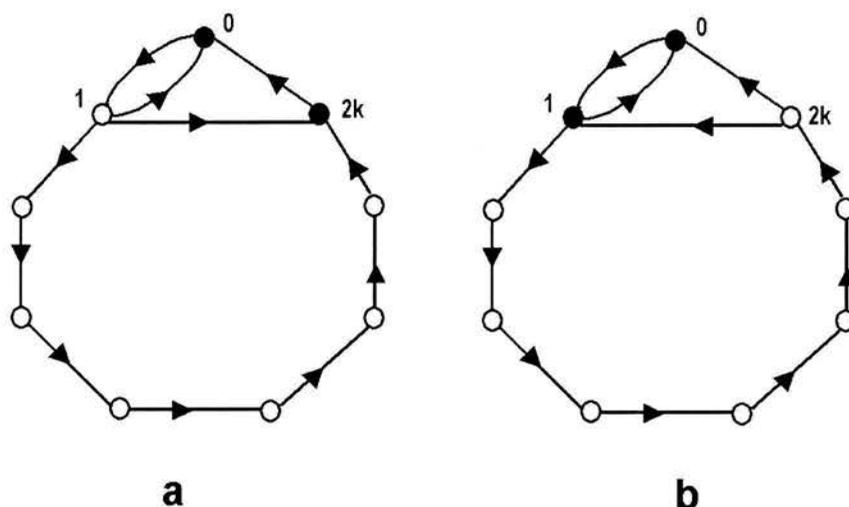


Figura 4.2.2

Por lo tanto, se puede suponer que $F(\gamma) \subseteq F(\text{Asim}(D))$.

Observación 4.2.2.

Podemos suponer que cada diagonal de γ tiene longitud 2.

De lo contrario, existe una diagonal de longitud $i \neq 2$, supongamos que el origen de ésta diagonal está en el vértice 0, es decir, existe una flecha $f = (0, i)$, diagonal de γ con $i \neq 2$.

De la **Observación 4.2.1**, la diagonal no puede tener longitud 1, entonces $i > 2$ y dado que el origen de la diagonal es el vértice 0, tenemos que $2 < i < 2k - 1$.

Por otra parte, la hipótesis (i) implica que $(0, i-1) \in F(D)$ ó $(i-1, 0) \in F(D)$; cuando $(0, i-1) \in F(D)$ tenemos que $i-1, i$ son polos consecutivos en γ como se muestra en la figura 4.2.3.a y cuando $(i-1, 0) \in F(D)$ la hipótesis (i) implica $(i-1, 2k) \in F(D)$ ó $(2k, i-1) \in F(D)$, cuando $(i-1, 2k) \in F(D)$ se tiene que $0, 2k$ son polos consecutivos de γ como se muestra en la figura 4.2.3.b y cuando $(2k, i-1) \in F(D)$ se tiene que $i, i-1$ son polos consecutivos de γ como se muestra en la figura 4.2.3.c

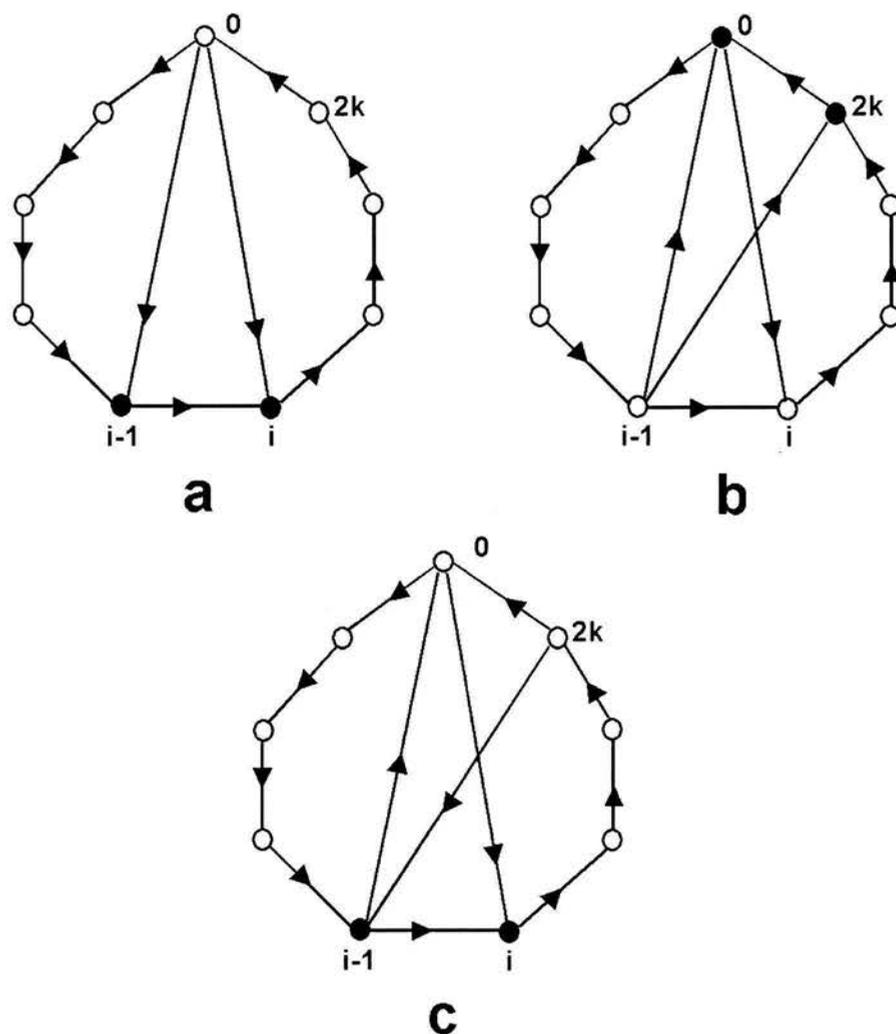


Figura 4.2.3

Por lo tanto podemos suponer que cada diagonal de γ tiene longitud 2.

De la hipótesis (ii), γ tiene dos diagonales f_1 y f_2 y de las **Observaciones 4.2.1 y 4.2.2** podemos suponer que éstas diagonales son: $f_1 = (i, i+2)$, $f_2 = (j, j+2)$. Como $j \neq i$, podemos suponer que $j > i$. Además $j > i + 1$; ya que si $j = i + 1$, ya acabamos, dado que $f_1 = (i, i+2)$, $f_2 = (j+1, i+3)$, entonces $i+2, i+3$ son polos consecutivos, como se muestra en la figura 4.2.4 (Nótese que las distancias son módulo $2k+1$)

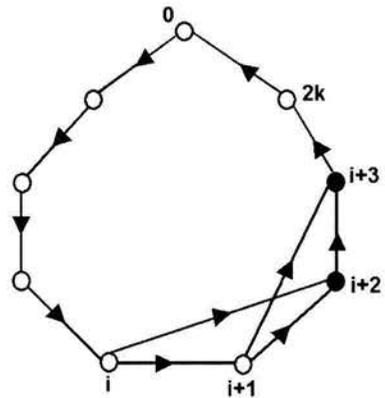


Figura 4.2.4

Por lo que podemos suponer que γ tiene dos diagonales $f_1 = (i, i+2)$, $f_2 = (j, j+2)$, con $j > i + 1$.

Sea $\gamma' = (\gamma - \{i+1, j+1\}) \cup \{f_1, f_2\}$ como se muestra en la figura 4.2.5. γ' es resultado de quitarle cuatro flechas a γ y aumentarle dos diagonales, por lo que es un ciclo dirigido de longitud impar, entonces se sigue de la hipótesis de inducción que γ' tiene dos polos consecutivos.

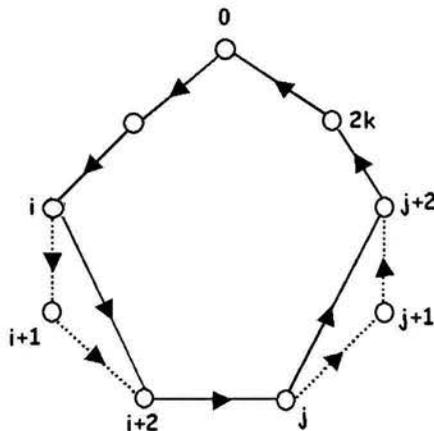


Figura 4.2.5

Si estos polos consecutivos no pertenecen al conjunto $\{i, i+2, j, j+2\}$, entonces también son polos consecutivos en γ y ya acabamos.

Si estos polos consecutivos son i y $i+2$ ó j y $j+2$, estos no son consecutivos en γ . Para cualquiera de las parejas, el análisis es análogo. Supongamos que los polos consecutivos son $i, i+2$.

Como i es polo de γ' , también es polo de γ y por las **Observaciones 4.2.1 y 4.2.2**, $(i-1, i+2) \in F(D)$, como se muestra en la figura 4.2.6.

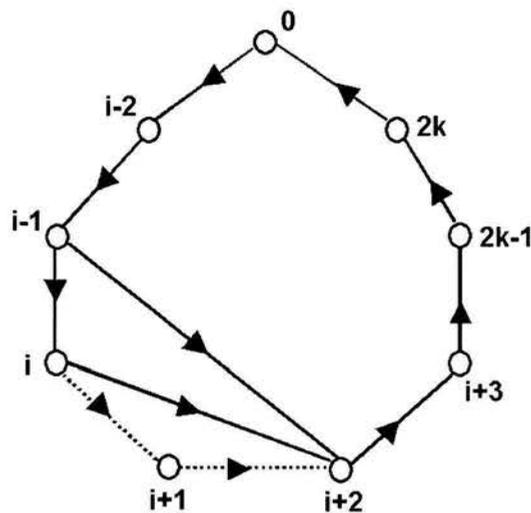


Figura 4.2.6

Como $(i-1, i+2) \in F(D)$ y $(i+1, i+2) \in F(D)$; por la hipótesis (i) $(i-1, i+1) \in F(D)$; ó $(i+1, i-1) \in F(D)$; Si $(i-1, i+1) \in F(D)$ entonces, $i, i+1$ son polos consecutivos de γ ; y si $(i+1, i-1) \in F(D)$ entonces, $i-1, i$ son polos consecutivos de γ ; por lo tanto γ tiene dos polos consecutivos. ■

Corolario 4.2.1

Sea D una digráfica, si cada ciclo dirigido de longitud impar γ de D y satisface las siguientes propiedades:

- (i) $D[V(\gamma)]$ es una digráfica B_1 -orientada y
 - (ii) γ tiene al menos dosseudodiagonales
- entonces D es núcleo perfecta.

Demostración

Por el **Teorema** anterior se sigue que cada ciclo dirigido de longitud impar γ de D tiene al menos dos polos consecutivos y ésta es la condición que requiere el **Teorema 2.1.4** (de los teoremas fundamentales), para asegurar que D es una digráfica núcleo perfecta. ■

Observación 4.2.3

La hipótesis :

“i) La subdigráfica de D inducida por $V(\gamma)$ es una digráfica B_1 -orientada”
no puede ser omitida en el **Teorema 4.2.1**.

Demostración

Sea la digráfica D , la que se muestra en la figura 4.2.7.a, y sea $D' = D[V(\gamma)]$, la digráfica mostrada en la figura 4.2.7.b.

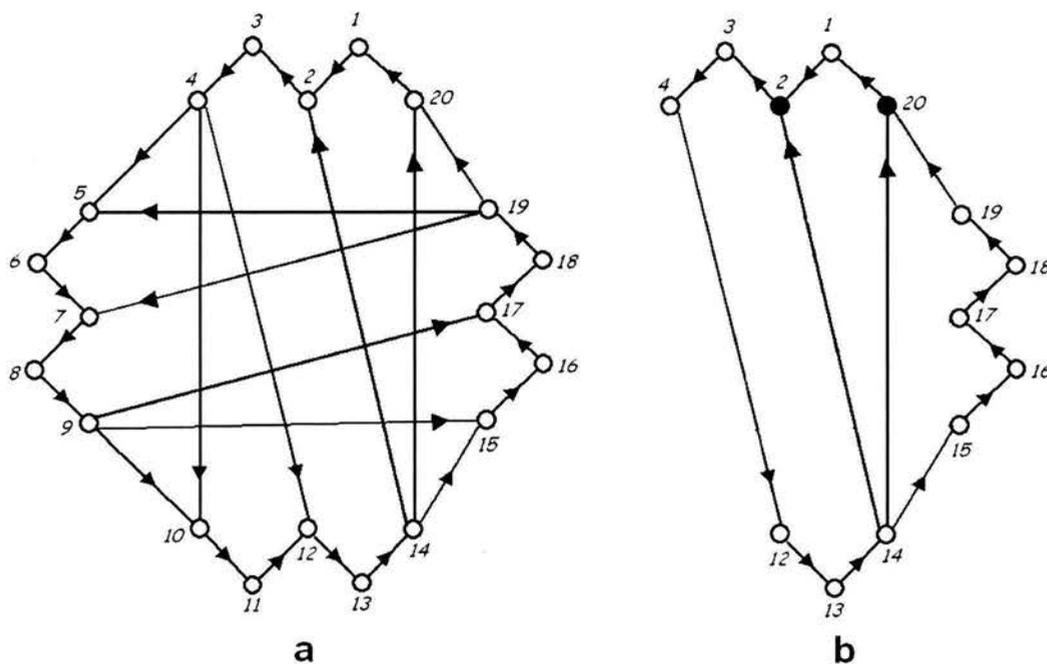


Figura 4.2.7

Dado que las flechas $(14, 20)$ y $(19, 20)$ son flechas de D' , para que esta fuera una digráfica B_1 -orientada, al menos una de las flechas $(14, 19)$ ó $(19, 14)$ debería ser flecha de D' y no lo son. Por lo tanto D' no es una digráfica B_1 -orientada.

Claramente se ve que D' es una digráfica con un ciclo dirigido de longitud impar (13), **no es una digráfica B_1 -orientada**, que tiene al menos dosseudodiagonales y tiene dos polos (señalados con negro, en la figura 4.2.7.b), que no son consecutivos.

Por lo tanto la hipótesis mencionada no puede ser omitida en el **Teorema 4.2.1**. ■

Observación 4.2.4

La hipótesis : "ii) γ tiene al menos dosseudodiagonales", no puede ser omitida en el Teorema 4.2.1.

Demostración

Sea D la digráfica que se muestra en la figura 4.2.8.a, y sea $D' = D[V(\gamma)]$, la digráfica mostrada en la figura 4.2.8.b.

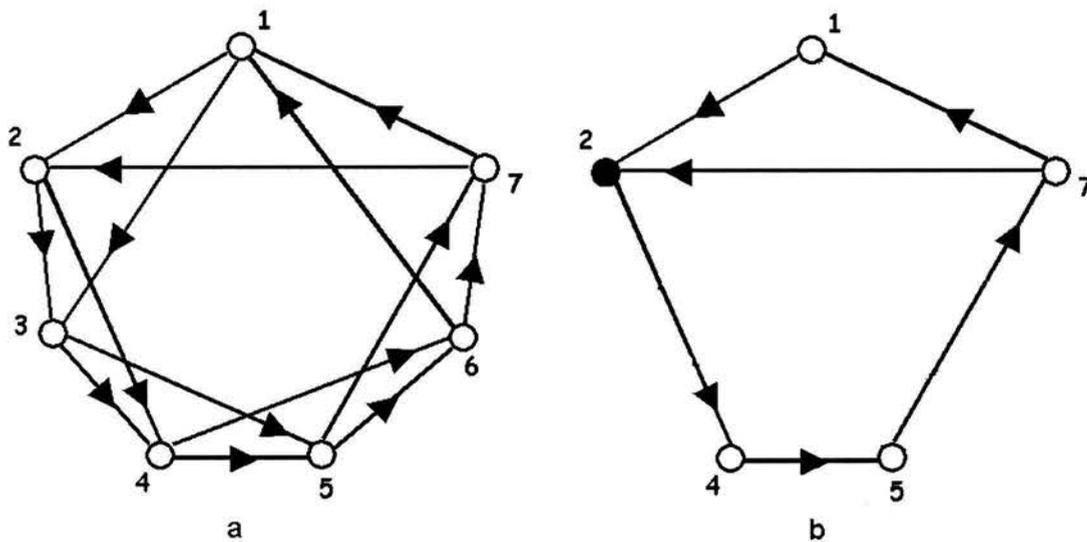


Figura 4.2.8

Dado que las flechas $(1, 2)$ y $(7, 2)$ son flechas de D' , para que sea una digráfica B_1 -orientada, al menos una de las flechas $(1, 7)$ ó $(7, 1)$ debe ser flecha de D' , y en este caso $(7, 1)$ es flecha de D' , entonces D' es una digráfica B_1 -orientada.

Claramente se ve que D' es una digráfica con un ciclo dirigido de longitud impar (5), que es una digráfica B_1 -orientada, **no tiene al menos dosseudodiagonales**, y tiene únicamente un polo (señalado con negro, en la figura 4.2.8.b).

Por lo tanto la hipótesis mencionada no puede ser omitida en el Teorema 4.2.1. ■

4.3 Núcleos en digráficas B_2 -orientadas.

Teorema 4.3.1

Sea D una digráfica, si cada ciclo dirigido de longitud impar γ de D satisface las siguientes propiedades:

- i) $D[V(\gamma)]$ es una digráfica B_2 -orientada
- ii) si $\ell(\gamma) = 3$, entonces γ tiene al menos dos flechas simétricas, y
- iii) si $\ell(\gamma) \geq 5$, entonces γ tiene al menos dos diagonales,

entonces cada ciclo dirigido de longitud impar de D , tiene al menos dos polos consecutivos.

Demostración

Argumentamos por inducción sobre $\ell(\gamma)$, donde γ es un ciclo dirigido de longitud impar de D ;

Cuando $\ell(\gamma) = 3$ el teorema se sigue de la hipótesis (ii). Ya que si $\ell(\gamma) = 3$ y se tienen dos flechas simétricas, entonces las subdigráficas posibles son tres y se muestran en la figura 4.3.1, y éstas tienen dos polos consecutivos (señalados en negro).

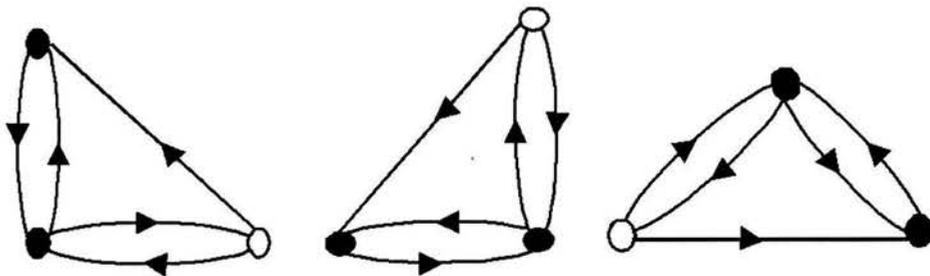


Figura 4.3.1

Supongamos que todo ciclo dirigido de longitud impar γ' con $\ell(\gamma') < 2k + 1$ tiene al menos dos polos consecutivos; Denotaremos ésta hipótesis de inducción con h_1 , debido a que dentro de la demostración se utiliza otra hipótesis de inducción.

Sea $\gamma = (0, 1, 2, \dots, 2k, 0)$ un ciclo dirigido de longitud $2k+1$, con $k \geq 2$, y que cumple con las hipótesis del teorema. Probaremos que γ tiene al menos dos polos consecutivos.

Observación 4.3.1

Podemos suponer que si (i, j) es una diagonal de γ entonces para cada $z \in V((i, \gamma, j) - \{i, j\})$, la flecha $(z, j) \in F(D)$.

Probaremos la observación por inducción sobre $\ell(i, \gamma, j)$.

Para el caso en que $\ell(i, \gamma, j) = 3$ la hipótesis se cumple por vacuidad.

Supongamos que la observación se cumple **para cualquier diagonal** $g' = (i', j')$ de γ con $\ell(i', \gamma, j') < m$ y sea $g = (i, j)$ una diagonal de γ con $\ell(i, \gamma, j) = m \geq 3$; ésta hipótesis se denotará con h_2 .

Caso 1: m es impar.

$\gamma' = (i, j) \cup (j, \gamma, i)$ es un ciclo dirigido contenido en γ , es de longitud impar, esto porque a γ se le están quitando (m correspondientes al ciclo (i, γ, j)) y se le aumenta una flecha (la de la diagonal (i, j)), entonces se sigue de la hipótesis de inducción h_1 que γ' tiene dos polos consecutivos. Estos polos necesariamente son i, j ; de otra manera, los polos consecutivos de γ' son polos consecutivos de γ también, y ya terminamos.

Dado que $\ell(i, \gamma, j) \geq 3$ y $D[V(\gamma)]$ es una digráfica B_2 -orientada se sigue que:

$(i+1, j) \in F(D)$ ó $(j, i+1) \in F(D)$. Cuando $(j, i+1) \in F(D)$ tenemos $i, i+1$ dos polos consecutivos de γ , como se muestra en la figura 4.3.2, donde la parte remarcada corresponde a γ' y los polos están marcados en negro.

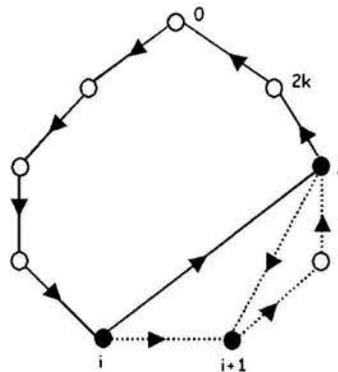


Figura 4.3.2

Cuando $(i+1, j) \in F(D)$ tenemos la trayectoria dirigida $(i+1, \gamma, j)$ y su longitud $\ell(i+1, \gamma, j)$ es menor que $\ell(i, \gamma, j)$. Entonces se tiene que $\ell(i+1, \gamma, j) < \ell(i, \gamma, j) = m$, por lo que la **Observación 4.3.1**, se sigue de la hipótesis de inducción h_2 . Esto se muestra en la figura 4.3.3, donde la parte remarcada corresponde a γ' .

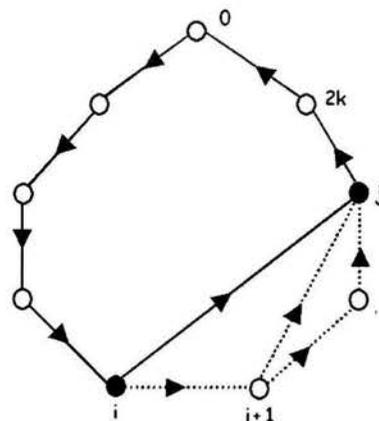


Figura 4.3.3

Caso 2:

m es par, $4 \leq m \leq 2k - 2$.

La hipótesis (i) implica que $(i+1, j) \in F(D)$ ó $(j, i+1) \in F(D)$.

Si $(i+1, j) \in F(D)$ tenemos la trayectoria dirigida $(i+1, \gamma, j)$ y su longitud $\ell(i+1, \gamma, j)$ es menor que $\ell(i, \gamma, j)$. Entonces se tiene que $\ell(i+1, \gamma, j) < \ell(i, \gamma, j) = m$ por lo que la **Observación 4.3.1**, se sigue de la hipótesis de inducción h_2 . Esto se muestra en la figura 4.3.4.

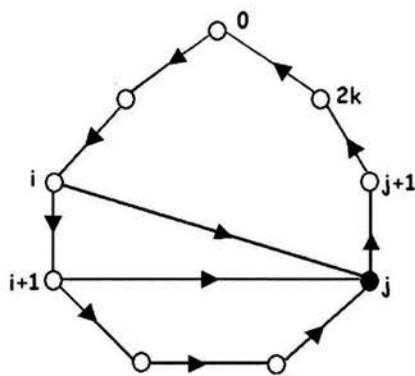


Figura 4.3.4

Si $(j, i+1) \in F(D)$, entonces la hipótesis (i) implica que $(j+1, i+1) \in F(D)$ ó $(i+1, j+1) \in F(D)$; Cuando $(i+1, j+1) \in F(D)$ tenemos que $j, j+1$ son dos polos consecutivos de γ , como se muestra en la figura 4.3.5, donde los polos están marcados con negro.

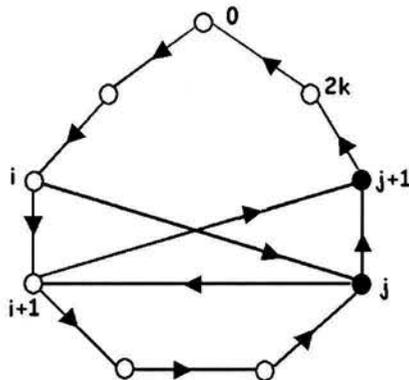


Figura 4.3.5

y cuando $(j+1, i+1) \in F(D)$, consideramos $\gamma_1 = (j+1, i+1) \cup (i+1, \gamma, j+1)$.

Como $\ell(i, \gamma, j) = m = \ell(i+1, \gamma, j+1)$, entonces la longitud de $\ell(i+1, \gamma, j+1)$ es par, y al aumentarle la diagonal $(j+1, i+1)$, se convierte en un ciclo de longitud impar; entonces se sigue de la hipótesis de inducción h_1 que γ' tiene dos polos consecutivos.

Estos polos deben ser $i+1$ y $j+1$; de otra manera, los polos consecutivos de γ_1 son polos consecutivos de γ también, y ya acabamos. Ahora como j es polo, entonces $j, j+1$ son polos consecutivos de γ como se muestra en la figura 4.3.6, donde la parte remarcada es γ_1 . Por lo que si (i, j) es diagonal de γ entonces para cada $z \in V((i, \gamma, j) - \{i, j\})$, la flecha $(z, j) \in F(D)$.

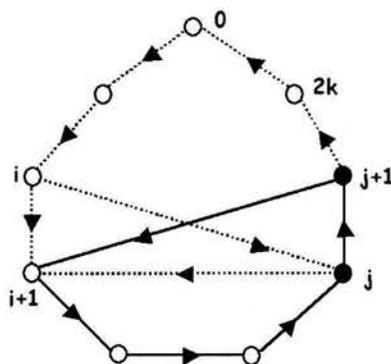


Figura 4.3.6

Observación 4.3.2

Podemos suponer que γ tiene al menos una diagonal de longitud mayor que 2.

Supongamos que toda diagonal de γ tiene longitud 2.

La hipótesis (iii) implica que γ tiene dos diagonales, sean éstas $f_1 = (i, i+2)$ y $f_2 = (j, j+2)$; necesariamente $i+2 \neq j+1$ y $j+2 \neq i+1$; ya que de otra manera acabamos, porque si $i+2 = j+1$, entonces $i+1 = j$ y $f_1 = (i, i+2)$, $f_2 = (i+1, i+3)$, entonces $i+2, i+3$ son polos consecutivos como se muestra en la figura 4.3.7.a; y si $j+2 = i+1$, entonces $j+1 = i$ y $f_1 = (j+i, j+3)$, $f_2 = (j, j+2)$, entonces $j+2, j+3$ son polos consecutivos como se muestra en la figura 4.3.7.b.

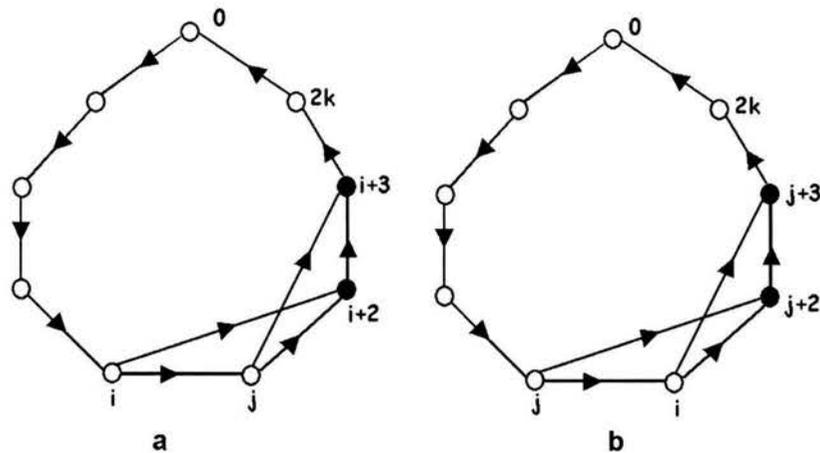


Figura 4.3.7

Ahora consideremos $\gamma_1 = (\gamma - \{i+1, j+1\}) \cup \{f_1, f_2\}$.

γ_1 es de longitud impar, debido a que a γ se le quitan 4 flechas, entonces se sigue de la hipótesis de inducción h_1 que γ_1 tiene dos polos consecutivos.

Por lo arriba expuesto, $i+1$ y $j+1$ no son consecutivos en γ ; entonces los polos consecutivos de γ_1 son $i, i+2$ ó son $j, j+2$, porque si no lo son, entonces los polos consecutivos de γ_1 son polos consecutivos en γ y ya terminamos.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los polos consecutivos de γ_1 son $i, i+2$; entonces existe una diagonal de γ_1 con punto final i , y ésta necesariamente es de tamaño 2, porque si no lo fuera, la longitud de la diagonal sería mayor que 2 y ya terminamos.

Entonces existe la diagonal $(i-2, i)$ como se muestra en la figura 4.3.8, donde la parte remarcada es γ_1

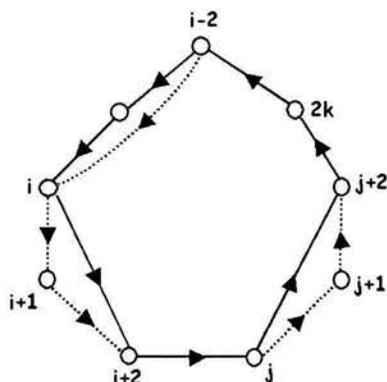


Figura 4.3.8

Ahora consideremos $\gamma_2 = (\gamma - \{i-1, i+1\}) \cup \{(i-2, i), (i, i+2)\}$.

γ_2 es de longitud impar, debido a que a γ se le quitan 4 flechas, entonces se sigue de la hipótesis de inducción h_1 que γ_2 tiene dos polos consecutivos.

Los polos consecutivos de γ_2 son $i-2, i$ ó son $i, i+2$, porque si no lo son, entonces los polos consecutivos de γ_2 son polos consecutivos en γ y ya terminamos.

En ambos casos i es polo; entonces existe una diagonal de γ_2 con punto final i , y ésta necesariamente es de tamaño 2, porque si no lo fuera, la longitud de la diagonal sería mayor que 2 y ya terminamos. Entonces existe la diagonal $(i-3, i)$, que es de longitud mayor que 2 en γ , como se muestra en la figura 4.3.9, donde la parte remarcada es γ_2

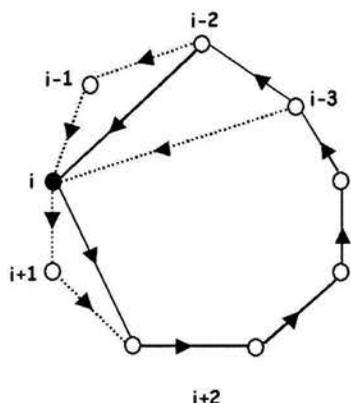


Figura 4.3.9

Por lo tanto γ tiene al menos una diagonal de longitud mayor que 2.

Podemos suponer que para alguna $i \in \{ (0, 1, 2, \dots, 2k) \}$; $(i, i+3)$ es diagonal de γ , esto por la Observación inmediata anterior y por la **Observación 4.3.1**, también podemos suponer que existe la diagonal $(i+1, i+3)$ en γ . Esto se muestra en la figura 4.3.10.a,

Sea $\gamma_1 = (i, i+3) \cup (i+3, \gamma, i)$. γ_1 es de longitud impar (ya que estamos quitando a γ tres flechas y aumentando una, que es la de la diagonal), entonces por la hipótesis h_1 , γ_1 tiene dos polos consecutivos; podemos suponer que estos son $i, i+3$, dado que si no lo fueran, entonces los polos consecutivos en γ_1 , serían polos consecutivos en γ también. Lo anterior se observa en la figura 4.3.10.b.

Finalmente como i es polo de γ , entonces $i-2, i$ es una diagonal de γ

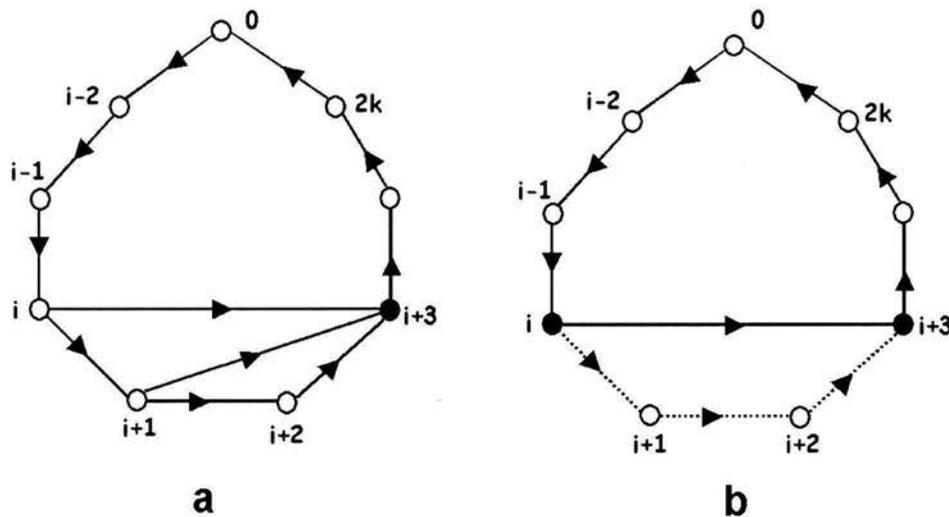


Figura 4.3.10

Ahora podemos suponer que los dos polos consecutivos de $\gamma_2 = (\gamma - \{i-1, i+2\}) \cup \{(i-2, i), (i+1, i+3)\}$ son $i-2, i$ ó son $i+1, i+3$, dado que si no lo fueran, entonces los polos consecutivos en γ_2 , serían polos consecutivos en γ también y ya acabamos, analizaremos los dos casos posibles.

Caso a: $i+1, i+3$ son polos de γ_2 .

Supusimos que $i+1$ es polo de γ_2 , entonces también es polo de γ ; y como en γ existe la diagonal $(i-2, i)$; entonces i es polo de γ por lo tanto, $i, i+1$ son polos consecutivos de γ ; como se muestra en la figura 4.3.11, donde γ_2 aparece remarcada.

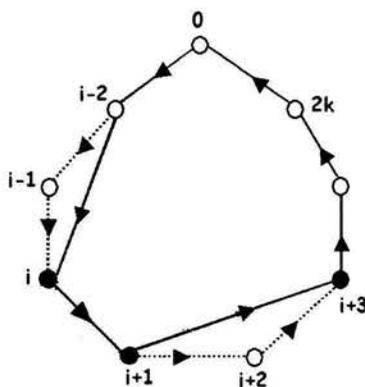


Figura 4.3.11

Caso b: $i-2, i$ son polos de γ_2

Como i es polo de γ_2 , existe una diagonal cuyo punto final es i , sea ésta $f = (k, i)$.

Analizaremos dos casos posibles: $k = i+1$ y $k \neq i+1$

Caso b.1: $k = i+1$

Como existe la diagonal $(i+1, i+3)$ en γ entonces $i+3$ es polo de γ ; y como $(i+1, i) \in F(D)$ y $(i+1, i+2) \in F(D)$, por la hipótesis (i) que $(i, i+2) \in F(D)$ ó $(i+2, i) \in F(D)$.

Cuando $(i, i+2) \in F(D)$ tenemos $i+2, i+3$ dos polos consecutivos de γ , pues sabemos que existe la flecha $(i+1, i+3)$, como se muestra en la figura 4.3.12, donde γ_2 aparece remarcada.

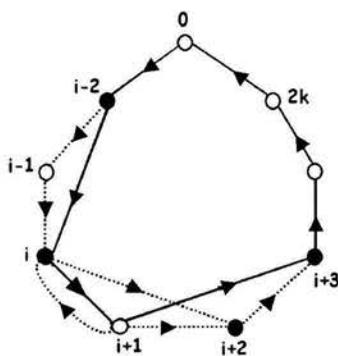


Figura 4.3.12

Cuando $(i+2, i) \in F(D)$ y $(i, i+2) \notin F(D)$, tenemos el ciclo dirigido $(i, i+1, i+2, i)$, que es de longitud 3, y por la hipótesis (ii) , tiene dos flechas simétricas, además sabemos que la flecha $(i, i+2) \notin F(D)$ y como $\{(i, i+1), (i+1, i)\} \in F(D)$, entonces existe la diagonal $(i+2, i+1)$.

Entonces $i+1$ es polo de γ y por lo tanto $i, i+1$ son polos consecutivos de γ . Esto se ilustra en la figura 4.3.13.

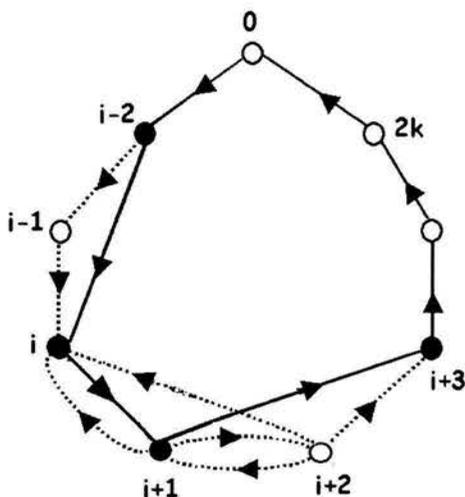


Figura 4.3.13

Caso b.2: $k \neq i+1$

Como la flecha $(i-2, i)$, es una diagonal de longitud 2 y existe en γ , entonces tenemos que

$\ell(f) \geq 3$ en γ , y de la **Observación 4.3.1** se sigue que la flecha $(i-3, i) \in F(D)$.

Sea de $\gamma_3 = (i-3, i) \cup (i, \gamma, i-3)$. γ_3 es de longitud impar ya que a γ le estamos quitando tres flechas $((i-3, i-2), (i-2, i-1)$ y $(i-1, i))$ y le estamos poniendo la diagonal $(i-3, i)$, entonces se sigue de la hipótesis que γ_3 tiene dos polos consecutivos. Podemos suponer que estos son $i-3, i$ ya que si ellos no lo fueran, entonces los polos consecutivos en γ_3 serían polos consecutivos en γ también, y ya acabamos.

Por lo que $i-2$, $i-3$ son polos de γ , como se muestra en la figura 4.3.14.

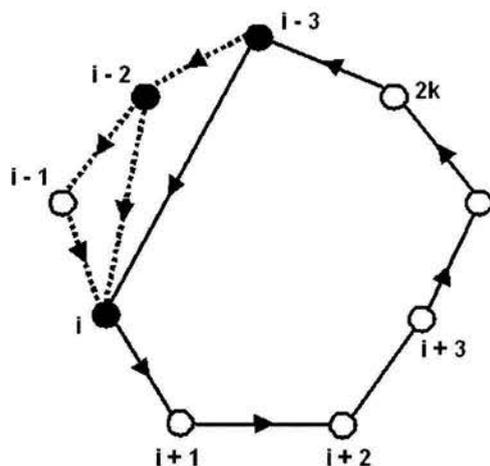


Figura 4.3.14

Por lo tanto cada ciclo dirigido de longitud impar γ tiene dos polos consecutivos. ■

Corolario 4.3.1

Sea D una digráfica, si cada ciclo dirigido de longitud impar γ de D , satisface las siguientes propiedades:

- i) $D[V(\gamma)]$ es una digráfica B_2 -orientada
- ii) si $\ell(\gamma) = 3$, entonces γ tiene al menos dos flechas simétricas, y
- iii) si $\ell(\gamma) \geq 5$, entonces γ tiene al menos dos diagonales,

Entonces D es núcleo perfecta.

Demostración

Por el Teorema anterior se sigue que cada ciclo dirigido de longitud impar γ de D tiene al menos dos polos consecutivos y ésta es la condición que requiere el Teorema 2.1.4 (de los teoremas fundamentales), para asegurar que D es una digráfica núcleo perfecta. ■

Observación 4.3.3

La hipótesis :

“i) $D[V(\gamma)]$ es una digráfica B_2 -orientada”

no puede ser omitida en el **Teorema 4.3.1**.

Demostración

Sea la digráfica D , la que se muestra en la figura 4.3.15.a, y sea $D' = D[V(\gamma)]$, la digráfica mostrada en la figura 4.3.15.b.

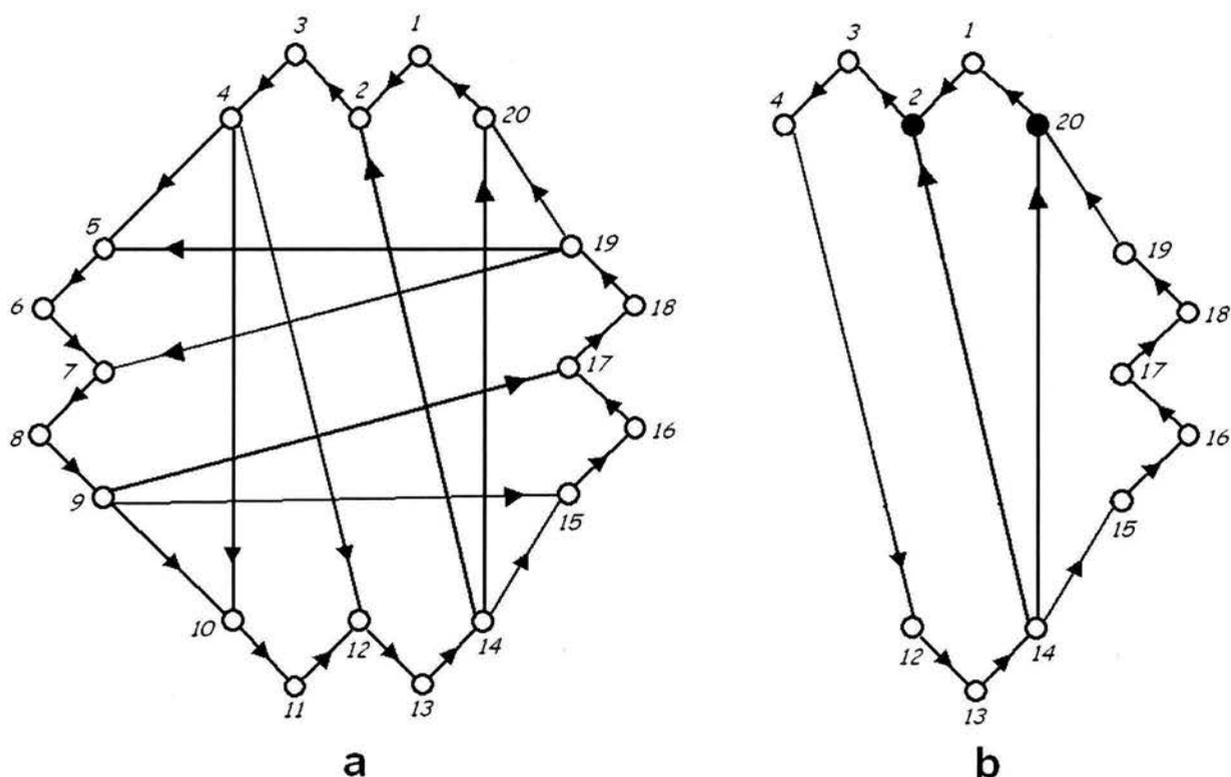


Figura 4.3.15

Dado que las flechas $(14, 2)$ y $(19, 20)$ son flechas de D' , para que esta fuera una digráfica B_2 -orientada, al menos una de las flechas $(2, 20)$ ó $(20, 2)$ debería ser flecha de D' y no lo son. Por lo tanto D' no es una digráfica B_2 -orientada.

Claramente se ve que D' es una digráfica con un ciclo dirigido de longitud impar (13), **no es una digráfica B_2 -orientada**, que tiene al menos dosseudodiagonales y tiene dos polos (señalados con negro, en la figura 4.3.15.b), que no son consecutivos.

Por lo tanto la hipótesis mencionada no puede ser omitida en el **Teorema 4.3.1**. ■

Observación 4.3.4

La hipótesis :

“ii) si $\ell(\gamma) = 3$, entonces γ tiene al menos dos flechas simétricas”,
no puede ser omitida en el **Teorema 4.3.1**.

Demostración

Sea la digráfica D , la que se muestra en la figura 4.3.16.a, y sea $D' = D[V(\gamma)]$, la digráfica mostrada en la figura 4.3.16.b.

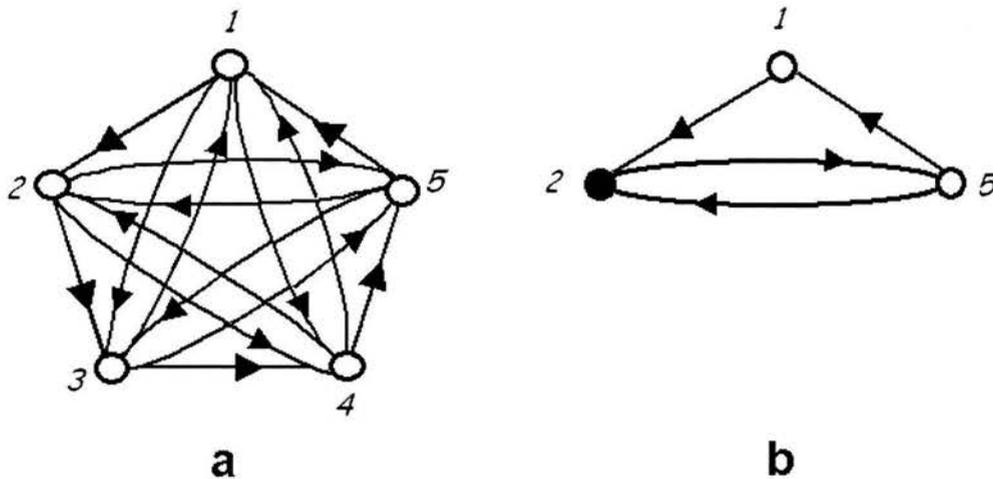


Figura 4.3.16

Dado que las flechas $(5, 1)$ y $(5, 2)$ son flechas de D' , para que sea una digráfica B_2 -orientada, alguna de las flechas $(1, 2)$ ó $(2, 1)$ deben ser flechas de D' , y en este caso $(1, 2)$ es flecha de D' , entonces D' es una digráfica B_2 -orientada.

Claramente se ve que D' es una digráfica con un ciclo dirigido de longitud impar (3), que es una digráfica B_2 -orientada, que **no tiene al menos dos flechas simétricas**, y tiene únicamente un polo (señalado con negro, en la figura 4.3.16.b).

Por lo tanto la hipótesis mencionada no puede ser omitida en el **Teorema 4.3.1**. ■

Observación 4.3.5

La hipótesis : "iii) si $\ell(\gamma) \geq 5$, entonces γ tiene al menos dos diagonales ", no puede ser omitida en el **Teorema 4.3.1**.

Demostración

Sea la digráfica D , la que se muestra en la figura 4.3.17.a, y sea $D' = D[V(\gamma)]$, la digráfica mostrada en la figura 4.3.17.b.

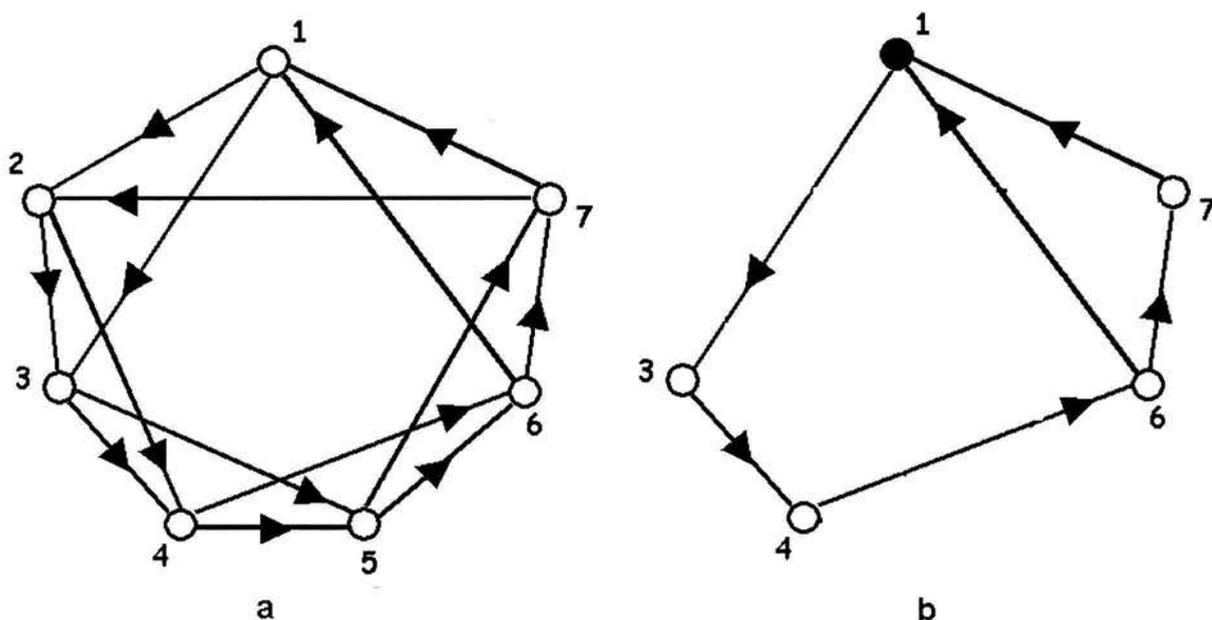


Figura 4.3.17

Dado que las flechas $(6, 7)$ y $(6, 1)$ son flechas de D' , para que sea una digráfica B_2 -orientada, alguna de las flechas $(1, 7)$ ó $(7, 1)$ deben ser flechas de D' , y en este caso $(7, 1)$ es flecha de D' , entonces D' es una digráfica B_2 -orientada.

Claramente se ve que D' es una digráfica con un ciclo dirigido de longitud impar (5), que es una digráfica B_2 -orientada, **no tiene al menos dos diagonales**, y tiene únicamente un polo (señalado con negro, en la figura 4.3.17.b).

Por lo tanto la hipótesis mencionada no puede ser omitida en el **Teorema 4.3.1**. ■

Teorema 4.3.2

Sea D una digráfica, en la que cada ciclo dirigido de longitud impar γ de D satisface las siguientes propiedades

- i) Se cumple al menos una de las dos condiciones:
 - i.a) $D[V(\gamma)]$ es una digráfica B_1 -orientada
 - i.b) $D[V(\gamma)]$ es una digráfica B_2 -orientada
- ii) si $\ell(\gamma) = 3$, entonces γ tiene al menos dos flechas simétricas, y
- iii) si $\ell(\gamma) \geq 5$, entonces γ tiene al menos dos diagonales,

entonces todo ciclo dirigido de longitud impar γ de D tiene dos polos consecutivos.

Demostración

Si D cumple las propiedades (i.a) y (iii) entonces del **Teorema 4.2.1**, se sigue que cada ciclo dirigido de longitud impar γ de D tiene al menos dos polos consecutivos.

Si D cumple las propiedades (i.b), (ii) y (iii) entonces del **Teorema 4.3.1**, se sigue que cada ciclo dirigido de longitud impar γ de D tiene al menos dos polos consecutivos. ■

Corolario 4.3.2

Sea D una digráfica, si todo ciclo dirigido de longitud impar γ de D satisface las siguientes propiedades

- i) Se cumple al menos una de las dos condiciones:
 - i.a) $D[V(\gamma)]$ es una digráfica B_1 -orientada
 - i.b) La subdigráfica de D inducida por $V(\gamma)$ es una digráfica B_2 -orientada
- ii) Si $\ell(\gamma) = 3$, entonces γ tiene al menos dos flechas simétricas,
- iii) Si $\ell(\gamma) \geq 5$, entonces γ tiene al menos dos diagonales,

Entonces D es núcleo perfecta.

Demostración

Por el **Teorema** anterior se sigue que cada ciclo dirigido de longitud impar γ de D tiene al menos dos polos consecutivos y ésta es la condición que requiere el **Teorema 2.1.4** (de los teoremas fundamentales), para asegurar que D es una digráfica núcleo perfecta. ■

C. Berge y V. Chvatal conjeturaron que si D es núcleo perfecta, entonces D^{-1} es núcleo perfecta (D^{-1} se obtiene invirtiendo la dirección de todas las flechas de la digráfica D). Esta conjetura fue refutada por Duchet y Meynel [2], así que no podemos reemplazar B_1 -orientación por B_2 -orientación en los teoremas y corolarios probados.

Sin embargo, por el Principio de Dualidad Direccional, tenemos:

Por cada teorema o corolario, existe un teorema correspondiente obtenido reemplazando B_1 -orientación por B_2 -orientación y D por D^{-1} .

Análogamente, por cada teorema o corolario, existe un teorema correspondiente obtenido reemplazando B_2 -orientación por B_1 -orientación y D por D^{-1} .

4.4 Conclusiones

En torno al estudio de la conjetura de Berge-Duchet se han hecho muchos esfuerzos. Los progresos obtenidos son pocos y están dirigidos a demostrar que algunas clases de gráficas perfectas conocidas son núcleo-perfectibles, y a encontrar clases amplias de gráficas que satisfacen la conjetura.

En este trabajo, "Núcleos en digráficas B_1 y B_2 -orientadas", cuyo enfoque es principalmente mostrar la utilidad de las digráficas B_1 y B_2 -orientadas en la Teoría de Núcleos, se analiza un artículo en el que se prueba que las digráficas B_1 y B_2 -orientadas satisfacen la siguiente conjetura propuesta por Meyniel (1980): "Si cada ciclo dirigido de longitud impar de una digráfica D , tiene al menos dosseudodiagonales, entonces D es una digráfica núcleo-perfecta".

Se describieron condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de un núcleo en una digráfica con las características especificadas en la conjetura de Meyniel y éstas son que sea B_1 -orientable o B_2 -orientable.

5 Referencias

Referencias

- [1] J. Bang-Jensen, J. Huang and E. Prisner, In tournament digraphs, *J. Combin. Theory, Ser. B* 59 (1993) 267-287.
- [2] C. Berge, *Graphs* (North-Holland, Amsterdam, 1985).
- [3] C. Berge and P. Duchet, Recent problems and results about kernels in directed graphs, *Discrete Math.* 86 (1990) 27-31.
- [4] E. Boros and V. Gurvich, Perfect graphs are kernel solvable, *Discrete Math.* 159 (1996) 35-37
- [5] P. Duchet and H. Meynel, A note on kernel-critical graphs, *Discrete Math.* 33 (1981) 103-105.
- [6] P. Duchet and H. Meynel, Une generalization du theoreme de Richardson sur l'existence de noyaux dans les graphes orientes, *Discrete Math.* 43 (1983) 21-27.
- [7] H. Galeana-Sánchez, A counterexample to conjecture of Meyniel on kernel-perfect graphs, *Discrete Math.* 41 (1982) 105-107.
- [8] H. Galeana-Sánchez, A theorem about a conjecture of Meyniel on kernel-perfect graphs, *Discrete Math.* 59 (1986) 35-41.
- [9] H. Galeana-Sánchez and V. Neumann-Lara, On kernels and semikernels of digraphs, *Discrete Math.* 48 (1984) 67-76.
- [10] F. Gravil, V. Toledano and D. de Werra, Chordless paths, odd holes and kernels in graphs without M-obstructions, *J. Algorithms* 17 (1994) 207-221.
- [11] F. Gravil and J. Urrutia, An algorithm for fraternal orientation graphs, *Inform. Process. Lett.* 41 (1992) 271-274.
- [12] L. Lovász, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Math.* 21 (1984) 29-42.
- [13] D. J. Rose, Triangulated graphs and the elimination process, *J. Math. Anal. Appl.*, 32 (1970) 597-609.
- [14] D. J. Skrien, A relationship between triangulated graphs, comparability graphs, proper interval graphs, proper circular-arc graphs, and nested interval graphs, *J. Graph Theory* 6 (1982) 309-316.

- [15] J. Von Neumann, O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [16] H. Galeana Sánchez, A characterization of normal fraternally orientable perfect graphs, Discrete Math. 169 (1997) 221-225.
- [17] H. Galeana Sánchez, B_1 and B_2 -orientable graphs in kernel theory, Discrete Math. 143 (1995) 269-274.