

00323



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

6

PROTECTORADOS EN LA NATURALEZA: EL CASO DE LA FILOTAXIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A :

ROBERTO CARLOS ÁLVAREZ MARTÍNEZ



FACULTAD DE CIENCIAS U.N.A.M.

DIRECTOR DE TESIS: DR. PEDRO EDUARDO MIRAMONTES VIDAL

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

2003



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

T



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Protectorados en la naturaleza: el caso de la filotaxia"

realizado por Alvarez Martínez Roberto Carlos con número de cuenta 9213729-3
quien cubrió los créditos de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Propietario Dr. Pedro Eduardo Miramontes Vidal

Propietario Dr. Germinal Cocho Gil

Suplente Dr. Pablo Padilla Longoria

Suplente Dra. Gertrudis Hortensia González Gómez

Suplente Dr. Carlos Villarreal Luján

Printy
G. Cocho
Pablo Padilla
Gertrudis
Carlos Villarreal

Consejo Departamental de Física

Patricia Goldstein Menache
DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Índice general

Autoriza a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a digitalizar la obra en formato electrónico el contenido de la obra para fines académicos.

NOMBRE: Roberto Carlos Álvarez Martínez
FECHA: 24 diciembre 2003
FIRMA: *CAF*

	Introducción	1
1	Historia y conceptos básicos	5
1.1	La razón áurea.....	5
1.1.1	Pitágoras y los pitagóricos.....	5
1.1.2	Definición de la razón áurea.....	7
1.2	La serie de Fibonacci.....	10
1.2.1	Leonardo de Pisa, <i>Liber Abaci</i>	10
1.2.2	El problema de los conejos.....	11
1.2.3	La serie de Fibonacci y ϕ	12
1.2.4	Propiedades de la serie de Fibonacci y la razón áurea.....	13
1.2.5	La ubicuidad de ϕ y la serie de Fibonacci en la naturaleza.....	19
1.3	Filotaxia.....	20
2	Tipos de explicación en filotaxia	27
2.1	Descripción geométrica.....	28
2.1.1	Modelo de van Iterson.....	28
2.2	Descripción dinámica.....	31
2.2.1	Hofmeister.....	31
2.2.2	Snow y Snow.....	32
2.2.3	Douady y Couder.....	32
2.3	Descripción fisiológica.....	33
2.3.1	Mecanismo de reacción difusión.....	33
2.4	Relación entre las distintas aproximaciones a la filotaxia.....	36
3	El modelo dinámico iterativo	39
3.1	Descripción del experimento.....	40
3.2	La simulación numérica.....	43
3.3	Resultados.....	45
3.3.1	Un modelo dinámico para la formación de patrones en plantas..	49
4	Descripción y resultados del programa	53

4.1	Diseño de la clase.....	53
4.2	Algoritmo.....	54
4.3	Gráficos.....	55
5	Los protectorados en la naturaleza	61
5.1	Propiedades protegidas.....	61
	5.1.2 Protectorado cuántico.....	62
	5.1.3 Protectorados clásicos.....	65
5.2	Ejemplos de protectorados clásicos.....	65
	5.2.1 La vía intermedia.....	66
5.3	Un caso de estudio: la filotaxia.....	67
	5.3.1 Superconductores.....	67
5.4	Superconductores y filotaxia.....	70
5.5	Cadenas polipeptídicas.....	71
5.6	Microtúbulos.....	72
5.7	Patrones de bacterias móviles.....	73
	Discusión y conclusiones.....	74
	Anexos	
	Anexo A Código Fuente.....	76
	Anexo B Clase Polar.h.....	83
	Bibliografía.....	89

Introducción

La filotaxia estudia el orden espacial de los flósculos, hojas, y brotes en las plantas. Se observan dos tipos de ordenaciones principales. En las flores compuestas, tales como la margarita y los girasoles, se forman, en la región central, llamado capítulo o cabezuela, arreglos espirales. Ahí se pueden observar dos conjuntos de espirales. Uno de ellos se abre en el sentido de las manecillas del reloj y el otro, en sentido inverso. Si se cuenta el número de espirales de ambos conjuntos, resulta que dichos números son elementos consecutivos de la serie de Fibonacci. Por otra parte, si se ordenan los flósculos de estas flores o las hojas de una planta vascular madura, se observa que están arreglados en una hélice. El ángulo polar entre dos brotes consecutivos en este arreglo helicoidal resulta ser $\phi = \frac{2\pi}{\phi-2}$, con $\phi = \lim F_{n+1}/F_n$, y F_n , es el n -ésimo término de la serie de Fibonacci. A este ángulo F , se le llama el ángulo áureo. Explicar este tipo de patrones geométricos y la preeminencia de la serie de Fibonacci y el ángulo áureo constituye el problema central de la filotaxia.

Aunque propiamente, éste es un campo de la biología, estudios recientes muestran que desde la perspectiva de la física se encuentra un modelo que satisface los principales hechos presentados en la filotaxia. Ejemplo de ello se encuentra en el trabajo de los físicos franceses Stefan Douady e Yves Couder, quienes llamado Phyllotaxis as a physical self-organized growth process. En este trabajo estará inspirada esta tesis.

Para tratar de explicar estos hechos, se han propuesto distintos modelos. Se pueden distinguir tres tipos de propuestas. El enfoque geométrico, dinámico y fisiológico. La relación que existe entre estos es una cadena causal, ya que la geometría de los patrones se debe a la dinámica de formación y ésta depende de la interacción fisiológica entre los elementos consecutivos (primordia).

En este artículo se realiza un experimento físico que reproduce los patrones filotáxicos encontrados en las plantas. El experimento propuesto por Douady y Couder está basado en las reglas dinámicas encontradas por Hofmeister en 1868 para la aparición de nuevos primordia.

Existen, además, otros modelos de filotaxia que reproducen exitosamente los arreglos geométricos observados. Podemos enumerar, el modelo de Levitov sobre el mínimo global energético en un arreglo espiral sobre la superficie de un cilindro, y la propuesta de Jean sobre la maximización de la entropía en un arreglo helicoidal.

Este trabajo de tesis consiste en la generación de una simulación numérica del experimento propuesto por Douady y Couder para reproducir el diagrama de bifurcaciones obtenido por van Iterson en 1907. Van Iterson utilizó únicamente consideraciones geométricas para obtener una gráfica de un parámetro (que en el sistema dinámico juega el papel de G) vs el ángulo entre elementos consecutivos, con esto obtuvo un diagrama de bifurcaciones. Una de las ramas de esta gráfica converge a $= \frac{2\pi}{\phi-2}$. En la simulación numérica, que se realizará, se podrán elegir distintas interacciones energéticas y distintas leyes de velocidad. Con ello, se muestra que este sistema dinámico es robusto ante la elección de velocidades e interacciones energéticas.

Se muestra también las diferentes condiciones iniciales y su convergencia como función de del parámetro adimensional G .

Se observa que, para valores pequeños de G , la convergencia se satisface, independiente de la interacción energética y la velocidad de las partículas que modelan los 'primordia. Se produce un ruptura de simetría para el tercer elemento y la convergencia a ϕ , se alcanza con $G \rightarrow 0$.

Para un transitorio de G , de un valor mayor a uno menor, se obtiene un transitorio, para después alcanzar la convergencia.

Finalmente, se muestra que cuando se tiene un patrón espacial artificial de partículas (primordia), si para este conjunto (G , *divergencia*) no existe solución, se observa que este patrón no puede seguir creciendo, no hay estabilidad, no hay convergencia.

Con el programa de cómputo, así como con el experimento de dipolos, se muestra que existen sistemas no biológicos que comparten los arreglos geométricos de las plantas. Este hecho sugiere la existencia de alguna propiedad común a estos sistemas. Por ello, en este trabajo de tesis se abordarán también las manifestaciones de cierto orden "filotáxico" en la naturaleza. L. Levitov en presenta un fenómeno producido en superconductores que reproduce un diagrama de bifurcaciones idéntico al de van Iterson y además satisface el teorema fundamental de la filotaxia. Otros ejemplos de este orden filotáxico se encuentran en el crecimiento de ciertas bacterias, cadenas polipeptídicas, y los arreglos de monómeros en microtúbulos. Por ello, se utilizará el concepto de protectorado. En un sistema con un número muy grande de partículas interactuantes, no cuántico se generan procesos que emergen espontáneamente como la autoorganización. Estos principios organizacionales poseen propiedades universales (en el sentido de que son independientes de los detalles específicos del sistema), se llaman propiedades "protegidas". Existen diversas formas de formular el concepto de protectorado. Se puede

afirmar que se trata de una "clase de universalidad dinámica", (Cocho, G., Miramontes, P.) o también; como lo expresan Laughlin et al son "...puntos fijos estables del grupo de renormalización". Con este concepto se mostrará que los arreglos espirales que adoptan estos sistemas constituyen una propiedad protegida de la naturaleza. Es decir que los patrones espaciales son resultado de la dinámica que subyace a estos procesos pesar de su escala y naturaleza diversa.

En el capítulo 1 se presentan la historia y los conceptos básicos, relacionados con la razón áurea, la serie de Fibonacci y su relación con la filotaxia.

En el capítulo 2 describo los tres tipos de modelos que se han utilizado para abordar el problema de la filotaxia, además exhibo la relación existente entre estos enfoques.

El capítulo 3 describo con amplitud el modelo dinámico iterativo de Douady y Couder y el modelo de Atela et al. , en donde demuestran analíticamente que las espirales son puntos fijos de un sistema dinámico basado en las reglas propuestas por Hofmeister para la aparición de nuevos primordia.

El capítulo 4 muestra las gráficas obtenidas mediante la simulación numérica (mejorada) propuesta por Douady y Couder.

Finalmente en el capítulo 5, se define el concepto de protectorados, se presentan ejemplos de éstos, y además muestro que existen otros fenómenos que exhiben ordenes espaciales espirales con su consecuente relación con la serie de Fibonacci y la razón áurea. Demostrando con ello que las estructuras espirales constituyen un protectorado en la naturaleza.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 1

Historia y conceptos básicos

1.1 La razón áurea

1.1.1 Pitágoras y los pitagóricos

Pitágoras ha ejercido una enorme influencia en la filosofía occidental. Usualmente se le considera el precursor de la visión "cientificista", en donde la realidad última está descrita por números y sus relaciones. Sin embargo, esta descripción en poco se ajusta a un estudio objetivo de la rica visión filosófica de Pitágoras .

Nació alrededor de 580 a.C., en Samos. Huye de su ciudad natal debido a un régimen represivo como lo afirma Ariastoxeno:

"Pitágoras a la edad de 40 años , al ver que la tiranía de Polícrates era demasiado presionante como para que un hombre pudiera resistir un sometimiento y despotismo semejante emigró a Crotona". [3]

En este lugar, fundó una escuela filosófica que fue conocida en su honor como los pitagóricos. Escuela que, entre otras cosas, proponía como forma de vida el ascetismo y la virtud para la purificación del espíritu. Protestas en contra de la escuela pitagórica, encabezadas por Cilón, hicieron que Pitágoras abandonara esta ciudad para refugiarse en Mepanto, lugar en el cual permaneció hasta su muerte alrededor del año 500 a.C.[45]

Se contaban entre los principales preceptos de los miembros de la comunidad pitagórica los siguientes:

- la filosofía se puede utilizar para la purificación espiritual;
- la almas son inmortales, sólo transmigran de un cuerpo a otro con la muerte;
- ciertos símbolos tienen un significado místico;
- todos los miembros de la escuela deben observar estricta lealtad y secrecía.

Debido a esta última regla, es difícil distinguir entre las enseñanzas de Pitágoras de las de sus discípulos. Los pitagóricos citaban invariablemente la autoridad de su maestro para apoyar sus escritos. De esta forma, los resultados encontrados por los miembros de esta escuela son comúnmente atribuidos a Pitágoras. Ejemplos de ello son, la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado de lado uno, y el teorema de Pitágoras. A pesar de las dudas de la autoría de este filósofo griego, sobre estos importantes resultados matemáticos, éstos son considerados las principales aportaciones de Pitágoras. Es por ello, que se le ha asignado a Pitágoras el papel precursor de una visión que pone énfasis en las relaciones numéricas como forma de entender a la naturaleza.

Número, ritmo y armonía Sin duda, el planteamiento de la escuela pitagórica que resalta, debido a su carácter novedoso, es la afirmación de que la realidad última se encuentra fundamentada en los números y sus relaciones. Esto condujo a los pitagóricos a integrar una visión armónica del mundo directamente relacionada con su concepción del ritmo y la relación con el número.[15]

Pitágoras, o alguno de sus numerosos discípulos, descubrió que en una lira las cuerdas suenan diferente porque unas son más cortas que otras, además midió la longitud relativa de las cuerdas y encontró estaban unas con otras en relaciones numéricas sencillas que hoy llamamos intervalos musicales.

Estas razones numéricas se podían expresar como cocientes de números enteros. Por ejemplo, en el caso de la lira, descubrieron, que las cuerdas se encontraban en proporciones 1: 2, 1: 3, 1: 4, 1: 5, de sus longitudes. De esta manera, descubrió la octava, la quinta, la cuarta y la séptima musical.

Esta idea permeó el resto de sus enseñanzas filosóficas de tal manera que consideraban, por ejemplo, que los cuerpos celestes al moverse generaban sonidos armónicos (La música de las esferas)[45]. Es importante resaltar que en el período cosmológico de la filosofía de la Grecia clásica, Pitágoras (o los

pitagóricos) fue el primero en afirmar que la esencia de todo lo que percibimos mediante los sentidos es el número. "*Las cosas son distintas unas de las otras por la diferencia cuantitativa y numérica.*"[2]

La inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$

Se atribuye a Pitágoras el enunciado y la demostración del teorema que relaciona las magnitudes de los catetos y la magnitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Los pitagóricos conocían una demostración de este teorema aunque se han encontrado documentos anteriores a esa época en los que se hace mención a este resultado¹.

Una consecuencia inmediata de este teorema es el problema de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado unitario. Un cuadrado unitario se puede dividir por su diagonal en dos triángulos rectángulos cuyos catetos son de lado uno, entonces la hipotenusa, es decir, la diagonal del cuadrado, tiene una magnitud de $\sqrt{2}$. Este número no se puede expresar como cociente de dos números enteros. Este importante hecho fue encontrado por los pitagóricos alrededor del año 550 a. C. Según la leyenda, "sacrificaron cien bueyes para celebrar el descubrimiento"[17] A este hecho, se le llama la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado.

De esta manera los pitagóricos creyeron encontrar un defecto en el orden y la armonía del universo debido a que hallaron un número que no puede expresarse como la razón de dos números enteros².

1.1.2 Definición de la razón áurea

"... en una razón media y extrema."

Es en este ambiente intelectual en el que los conceptos matemáticos se desarrollan, especialmente en la geometría, que en el año 300 antes de Cristo aparece la gran obra de Euclides: *Los Elementos*. En el Libro V, Proposición XXX, se encuentra el siguiente problema:

¹ Existe una demostración anterior a Pitágoras encontrado en el libro chino *Chou pei suany ching* del siglo X antes de Cristo.

² De hecho existe otra versión sobre el descubrimiento de los números inconmensurables. Se dice que los pitagóricos, experimentaron tal sorpresa, temor y reverencia ante su descubrimiento que trataron de mantenerlo en secreto y decretaron la pena de muerte para quien osase divulgarlo.

"Cortar un segmento de recta dado en una razón media y extrema."

Esta proposición conduce a encontrar una cantidad, que se llamó, naturalmente, la "razón media y extrema". En la demostración de este teorema se hace inscribir un pentágono regular en un círculo (Eucl. IV, 10, II). Se cree, que los pitagóricos descubrieron la solución geométrica de la ecuación cuadrática que conduce a la resolución de este problema.

La magnitud que se pretende encontrar se expresa, en una versión moderna, de la siguiente manera. Dividir un segmento de línea de longitud L en dos subsegmentos L_1 , L_2 de tal manera que:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{L_2}{L}$$

con $L_1 < L_2$.

Coloquialmente, se trata de dividir un segmento de recta en dos subsegmentos; de tal forma, que *la parte pequeña sea a la parte grande lo que ésta es al segmento total*.

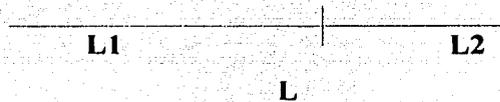


Figura 1.1 La razón áurea

La ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{L_2}{L} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \quad (1.1)$$

Sea $L_2/L_1 = \phi$, de esta manera la ecuación 1.1 se convierte en

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{L_2}{L_1} = \frac{L_1 + L_2}{L_2} = \frac{L_1}{L_2} + 1 \\ \Rightarrow \phi &= \phi^{-1} + 1 \Rightarrow \phi^2 = \phi + 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Las soluciones para ϕ , resolviendo la ecuación cuadrática 1.2, son

$$\phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (1.3)$$

$$\phi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (1.4)$$

$$\phi_1 = 1.6180... \quad (1.5)$$

$$\phi_2 = 0.6180... \quad (1.6)$$

como $\phi = \frac{L_2}{L_1}$, y $L_1 < L_2$ entonces $\phi > 1$ así que $\phi \equiv \phi_1 \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ³

Esta cantidad cobró una importancia histórica en la Grecia clásica, debido a la fascinación de los griegos por los objetos que estuvieran en un "proporción extrema y media". Un ejemplo notable del uso de este número se encuentra en las esculturas de Fidias.

Fidias fue el escultor más reconocido de la Antigüedad. Cuando Pericles llegó al poder, en el año 449 a.C., encargó a Fidias los trabajos artísticos de la construcción del Partenón. Se dice que Fidias "... había visto la imagen verdadera de la dioses y que la había revelado mediante sus esculturas a los hombres." [45] Se considera al Zeus de Fidias, (terminado alrededor de 430 a. C.) para el Templo de Zeus en Olimpia, su obra maestra. Esta estatua de marfil y oro de 13 m. de alto es considerada una de las Maravillas de la Antigüedad.

Fidias y sus asistentes utilizaban la razón media y extrema en las proporciones de sus esculturas: inscribían sus trabajos en rectángulos cuyo cociente entre sus lados estaba en proporciones medias y extremas. El frontispicio del Partenón es un ejemplo notable de este hecho. Si dividimos la magnitud de sus lados, el cociente entre ellos es aproximadamente 1.618.

A partir de este uso de la razón media y extrema, que se popularizó con Fidias, se continuó utilizando una aproximación racional a ϕ en obras artísticas, extendiéndose posteriormente su uso a otros campos. Dada la importancia de este cantidad es que, a principios del siglo XX, se sugiriera utilizar la letra griega ϕ , la letra inicial del nombre de este escultor, para designar a este número.[2]

³En la literatura se puede encontrar que $\phi \equiv \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Sin embargo en este trabajo utilizaremos como valor de $\phi \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618..$

Durante el Renacimiento, debido a la influencia de la Grecia clásica, la razón media y extrema fue muy importante en la definición de los cánones estéticos de la época. Leonardo Da Vinci ilustró un libro escrito por el matemático Luca Pacioli, cuyo título era *De Divina Proportione*. En este libro se inscriben segmentos de recta y rectángulos que guardan una proporción extrema y media entre sus lados en figuras humanas y de la naturaleza. En el siglo XVII, Kepler se refirió a esta cantidad llamándola la *razón áurea*⁴.

1.2 La serie de Fibonacci

1.2.1 Leonardo de Pisa, *Liber Abaci*

En el intercambio cultural entre Europa y el mundo islámico que se estableció en el siglo XIII, destaca la contribución del matemático italiano Leonardo de Pisa, quien reconoció y difundió una de las principales aportaciones de los árabes a la ciencia europea: el sistema posicional de numeración.

Leonardo de Pisa o Fibonacci (es decir hijo de Bonaccio) nació, probablemente, en 1170, en Pisa, Italia. Sin embargo, creció y fue educado en el norte de África. Guglielmo, su padre, era representante de los comerciantes de Pisa, en el puerto mediterráneo de Bougie, hoy Bejaña, Argelia⁵. Fibonacci recibió educación matemática en esta ciudad por parte de maestros árabes y realizó viajes por la costa norte de África, además de visitar también Siria, Grecia y Sicilia. En estos recorridos reconoció las enormes ventajas del uso de la notación numérica utilizada en esta regiones.

"Cuando mi padre fue enviado por su país a Bugia, como notario público en representación de los comerciantes de Pisa, me llevó con él y considerando mi conveniencia a futuro, decidió que recibiera instrucción en la escuela de cálculo, ahí después de una excelente enseñanza conocí el arte de los nueve símbolos de los hindúes..."[1]

Leonardo regresó a Pisa alrededor del año 1200. Fue entonces cuando comenzó a escribir un número importante de textos en los cuales refleja la influencia de sus años en contacto con la cultura islámica.

⁴Obviamente ϕ es un número irracional, de tal forma que no puede ser una razón o una proporción, pero por razones históricas seguiremos llamando a ϕ , la razón áurea. Utilizamos la raíz etimológica de la palabra razón (*lat. ratio, medida*)

⁵El nombre de esta ciudad proviene de la palabra francesa *bougie* (vela de cera)

Fibonacci escribió entre otros libros *Liber abaci* (1202), *Practica geometriac* (1220), *Flos* (1225) y *Liber quadratorum* (1225)

Leonardo fue ampliamente reconocido durante su vida a tal grado que en 1228, por decreto de la República de Pisa, se le otorgó "... al discreto y sapiente Master Leonardo Bigollo... un salario libre que consta de XX denarios al año"⁶

1.2.2 El problema de los conejos

Liber Abaci (*Libro de cálculo*) publicado en 1202, es una obra basada en la aritmética y el álgebra que Fibonacci aprendió durante su estadía en Argelia. En este libro, introdujo la notación posicional utilizada en el sistema de numeración indo-arábigo; además, estableció algunos teoremas relativos a las ecuaciones diofantinas. *Liber Abaci* es un tratado que pretendió convencer a sus contemporáneos para que adoptaran el sistema de numeración posicional, debido a que, de esta manera, se facilitaban los cálculos que resultaban muy complicados en el sistema de numeración romana.

En las últimas secciones del libro contiene una serie de problemas muy variados entre los cuales se encuentra un problema sobre la dinámica de una población de conejos.

Este problema, planteado en la tercera sección de *Liber abaci*, condujo a la serie numérica que lleva su nombre, contribución con la cual, Fibonacci, hoy es reconocido. En su enunciado original se lee lo siguiente:

" Un hombre pone un pareja de conejos en un lugar rodeado por muros, ¿ cuántas parejas de conejos se producen a partir del par inicial en un año, si se supone que cada mes cada pareja engendra otra, que a su vez se vuelve productiva después de un mes."[1]

Definición de la serie de Fibonacci

La solución a esta problema, conduce a una serie numérica. Llamemos F_n al número de parejas de conejos al año n -ésimo. La siguiente tabla nos muestra el número de conejos al año n

⁶A pesar de los esfuerzos de Fibonacci por difundir el sistema posicional, en la cédula en la que se asigna la cantidad de dinero que recibiría como salario, ésta se expresa en números romanos.

$$\begin{aligned}
F_1 &= 1 \\
F_2 &= 1 \\
F_3 &= 2 \\
F_4 &= 3 = 2 + 1 = F_3 + F_2 \\
F_5 &= 5 = 3 + 2 = F_3 + F_4 \\
F_6 &= 8 = F_4 + F_5 \\
&\vdots \\
F_n &= F_{n-2} + F_{n-1}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Fibonacci escribió en su libro, que la solución a este problema es la serie de números 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... en la cual cada número es la suma de los dos números precedentes. Es decir, se trata de una serie recursiva. Esta serie numérica fue la primera serie de este tipo conocida en Europa. La fórmula que proporciona el n -ésimo término fue escrita, por primera vez, por el matemático francés Albert Girard en 1634. En 1753, el matemático Robert Simson de la Universidad de Glasgow notó que, mientras los números de esta serie se incrementaban, el cociente entre sus elementos sucesivos se acercaban a un número.[45].

En el siglo XIX el matemático francés Edouard Lucas fue el primero darle nombre a esta serie. Naturalmente, la nombró la serie de Fibonacci. Es por esto, que al elemento n -ésimo de esta serie se le denota con con la letra F_n [45].

1.2.3 La serie de Fibonacci y ϕ

Existe una relación estrecha entre ϕ y la serie de Fibonacci. En la sección anterior se mencionó la observación realizada por Simson sobre el cociente de dos elementos sucesivos de esta serie. El número al cual converge es ϕ . La demostración es muy sencilla.

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ existe. Sea éste $\alpha \neq 0$; entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right) = 1 + \alpha^{-1} = \alpha \tag{1.8}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \alpha + 1 \tag{1.9}$$

La ecuación cuadrática resultante es la misma que se encontró en la ecuación 1.2

Las soluciones de esta ecuación, son nuevamente dos:

$$\alpha_1 = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} = 0.61803 \quad (1.10)$$

$$\alpha_2 = \frac{(\sqrt{5} + 1)}{2} = 1.61803 \quad (1.11)$$

Debido a que F_n ($n > 1$) es monótona creciente, el cociente $\frac{F_{n+1}}{F_n} > 1 \forall n$, así que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} > 1 \therefore \alpha_2 = \phi$ ■

1.2.4 Propiedades de la serie de Fibonacci y la razón áurea

Dentro de la enorme variedad de propiedades de la serie de Fibonacci y la sección áurea existe un conjunto relacionadas con el problema que se abordará en esta tesis: la filotaxia. Así que mencionaremos sólo algunos resultados que serán importantes para el desarrollo de este de este trabajo.

Rectángulo áureo y espiral logarítmica

Como se había mencionado, desde la época de Fidias, los rectángulos cuyos lados están en proporción áurea resultaron significativos en el arte. En esta sección se mostrará como construir uno de estos rectángulos y su relación con la espiral logarítmica.

Consideremos un cuadrado de lado uno, a éste se le puede agregar otro de este mismo tamaño que esté en contacto con el primero; después, se le puede agregar un cuadrado de lado 2, es decir de la suma de los lados de los dos primeros. De esta manera tenemos un rectángulo con lados 3 y 2. A continuación se le añade un cuadrado de lado tres y así sucesivamente. Con esta construcción, se genera en el i -ésimo paso, un rectángulo de lados F_i, F_{i-1} (Ver figura 1.2)

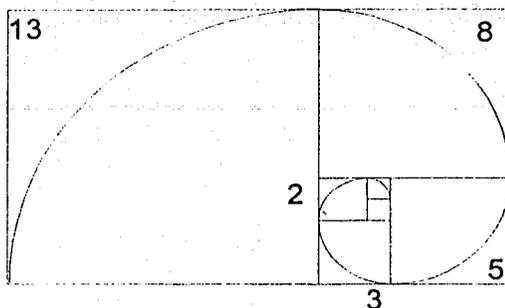


Figura 1.2 Rectángulo áureo

Este rectángulo, debido a la manera en la cual está construido, tiene como lados dos números sucesivos de la serie de Fibonacci; de tal manera que cuando continuamos con este proceso el cociente entre sus lados $F_i/F_{i-1} \rightarrow \phi$, con $i \rightarrow \infty$.

En este rectángulo se puede circunscribir una espiral tangente a los vértices de cada rectángulo interior. La ecuación de esta curva, en coordenadas polares, es $r(\theta) = Ae^{k\theta}$. Esta curva es la espiral logarítmica, que como se verá más adelante, tiene una estrecha relación con la filotaxia.

Gnomon

Definamos al gnomon de un objeto, como lo que se le tiene que agregar, para que dicho objeto resulte invariante. Esta definición, un tanto imprecisa, se aclara si consideramos ejemplos de gnomon en la geometría. Algunos de estos se encuentran enumerados por Miramontes [14]. Podemos mencionar que el gnomon de un cuadrado es un rectángulo, el de un círculo, un anillo y el de un triángulo equilátero, un trappecio. Un caso especial se observa con la espiral logarítmica, cuyo gnomon es ella misma.

Fraciones continuas

Cualquier número real a positivo se puede expresar como una fracción continua de la forma

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$a = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$.

La forma abreviada de escribir esta sucesión de enteros a_i es la siguiente:

$$a = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots]$$

Para obtener la fracción continua de un número $a \in \mathbb{R}^+$, se procede de la siguiente forma (Algoritmo de Euclides). El número a se puede expresar como la suma de su parte entera, a_0 y su parte fraccionaria r_0 .

$$a = a_0 + r_0$$

Si $r_0 \neq 0$ procedemos de la misma manera que se hizo con a , pero con $1/r_0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} &= a_1 + r_1, \text{ con } 0 \leq r_1 < 1 \\ \frac{1}{r_1} &= a_2 + r_2, \text{ con } 0 \leq r_2 < 1 \\ &\vdots \\ \frac{1}{r_{n-1}} &= a_n + r_n, \text{ con } 0 \leq r_n < 1 \end{aligned}$$

Si en este desarrollo se obtiene algún $r_i = 0$, entonces el número a tiene una sucesión de a_i finita y por lo tanto, es un número racional.

Definición Los k convergentes o convergentes principales de un número $r \in \mathbb{R}$ son los números racionales $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$, obtenidos del desarrollo de r en fracciones continuas, denotados por p_k/q_k . En el caso de que r sea racional, $0 \leq k \leq m$. Con $m \in \mathbb{Z}$

La expresión más sencilla de un número irracional expresada en fracciones continuas se tiene con $a_i = 1 \forall i$
i.e.

$$\omega \equiv [1; 1, 1, 1, \dots, 1, \dots]$$

$$\omega = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

Este número es también ϕ , como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición $\omega = [1; 1, 1, 1, \dots, 1, \dots] = \phi$

Calculemos los primeros k convergentes de ω

$$\omega_0 = 1;$$

$$\omega_1 = 2;$$

$$\omega_2 = 1 + 1/2 = 3/2;$$

$$\omega_3 = 1 + (1/2 + 1)^{-1} = 1 + 2/3;$$

$$\omega_4 = 1 + (2/3 + 1)^{-1} = 1 + 3/5;$$

$$\omega_5 = 1 + (3/5 + 1)^{-1} = 1 + 5/8;$$

$$\vdots$$

$$\omega_k = 1 + (\omega_{k-1} + 1)^{-1} = 1 + F_k/F_{k+1}$$

De la última ecuación se obtiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + F_k/F_{k+1}) = 1 + \phi^{-1} = \phi;$$

Por lo que $\phi = [1; 1, 1, 1, \dots, 1, \dots]$

Es decir,

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

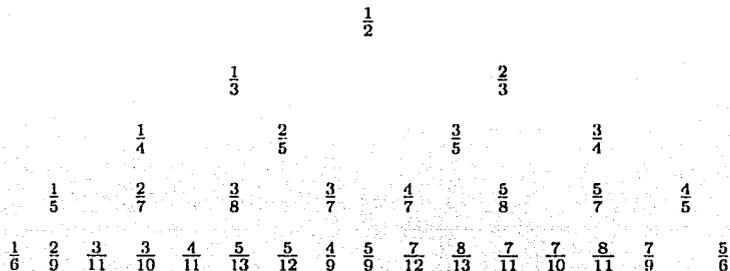
Serie y árbol de Farey

Definimos una suma \oplus entre dos números fraccionarios $0 < a/b < 1$; $0 < c/d < 1$, como

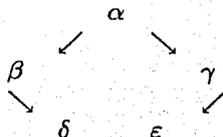
$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \quad (1.12)$$

con " + ", la suma usual en los enteros.

Utilizando esta suma, se construye la estructura que se muestra en la siguiente figura, en donde cada uno con excepción del primer número y los números que están en los extremos, son resultado de la suma entre dos elementos anteriores.



Esta estructura empieza con $1/2$. En el extremo derecho los números que componen este arreglo son, sucesivamente, $2/3, 3/4, 4/5, \dots$. Es decir que el número de la n -ésima fila a la derecha es $n/n+1$. En el extremo izquierdo, se encuentran las fracciones $1/3, 1/4, 1/5, \dots$; es decir que en n -ésimo renglón se encuentran los números $\frac{1}{n+1}$. En cada renglón existen 2^{n-1} números. El resto de los números se generan sumando de la siguiente manera; cada vez que se tenga una estructura pentagonal como la que sigue



los elementos δ y ϵ se generan sumando, como indican las flechas, $\delta = \alpha \oplus \beta$ y $\epsilon = \alpha \oplus \gamma$

Así vemos que, en el tercer renglón $2/5 = 1/2 \oplus 1/3$ y $3/5 = 1/2 \oplus 2/3$.

A esta serie numérica, se le conoce como serie de Farey y la estructura que genera se le llama, debido al parecido con las ramas de un árbol, *árbol de Farey*

Propiedades del árbol de Farey

1. Cualquier número racional entre 0 y 1 se encuentra en esta estructura.
2. Cualquier número irracional, entre 0 y 1, se puede aproximar por un serie infinita de números alternados a la izquierda y a la derecha de esta estructura. Las aproximaciones racionales son las mejores que se pueden hacer con denominador menor o igual a k (k -ésima fila), y son los convergentes principales de este número.
3. El *módulo* de dos adyacentes racionales p_1/q_1 y p_2/q_2 , definido como $|p_1q_2 - q_1p_2|$, es uno. Se definen *adyacentes* a los números que están realacionados por una estructura triangular del tipo siguiente. Se dice que α es adyacente a β y a γ

$$\alpha$$

$$\beta$$

$$\gamma$$

De esta manera $2/5$ es adyacente a $3/8$ y $3/7$; además $|2 \cdot 8 - 5 \cdot 3| = 1$ y $|2 \cdot 7 - 5 \cdot 3| = 1$.

Si tomamos el primer elemento de esta serie, $1/2$, después, el número que está a la derecha en el renglón inmediato posterior, después en el siguiente renglón el número que está a la izquierda; posteriormente el que sigue a la derecha ... y así sucesivamente, siguiendo la secuencia derecha, izquierda, derecha (D,I,D), observamos que obtenemos la siguiente sucesión de números $1/2, 2/3, 3/5, 5/8, \dots$, es decir se trata de una serie de fracciones cuyo numerador y denominador son elementos sucesivos de la serie de Fibonacci. Entonces tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \phi^{-1} = \phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Se ha demostrado que el espaciamiento de los asteroides, las frecuencias resonantes de la dinámica de la reacción de Belousov-Zhabotinsky, corresponden a series numéricas cuyos números adyacentes tienen módulo uno [16].

Si multiplicamos cada número racional que aparece en el árbol de Farey por 360° , y consideramos sólo los ángulos entre 0 y 180° , (uniendo los puntos mediante arcos de circ

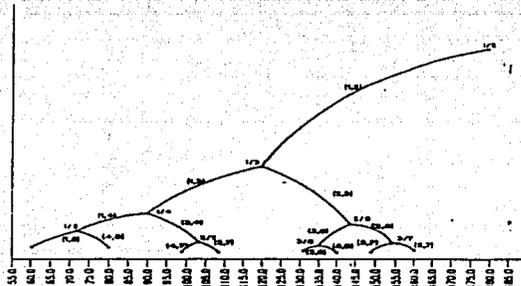


Figura 1.3 Árbol de Farey

unferencia), se obtiene un diagrama como el de la figura 1.3.

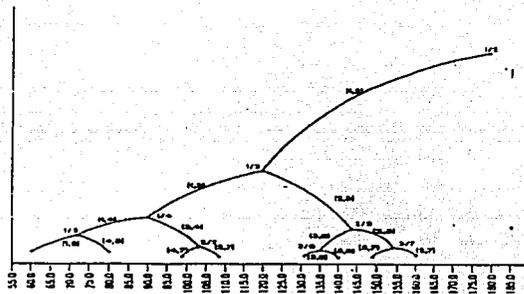


Figura 1.3 Árbol de Farey

1.2.5 La ubicuidad de ϕ y la serie de Fibonacci en la naturaleza

Las propiedades matemáticas y las construcciones geométricas de la sección anterior, no son simplemente curiosidades, sino que, como veremos más adelante, existen ejemplos de la presencia de ϕ y la serie de Fibonacci en la naturaleza.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Sin duda, la forma del molusco cefalópodo, *Nautilus* tiene el parecido más notable a la forma de la espiral logarítmica. La espiral que describe su concha se ajusta fielmente a la espiral logarítmica, que como ya vimos es gnomon de sí misma. Se cree, que todos los organismos que crecen por acreción tienen la forma de la espiral logarítmica[14].

Por ello, D'arcy Thompson, afirmó, en su famoso libro "On Growth and Form", lo siguiente:

"En el crecimiento de una concha no podemos concebir ninguna ley más simple que esta, la concha crece y se ensancha en la misma proporción: la más simple de las leyes es la que sigue la naturaleza.

La concha, como la criatura que vive dentro de ella, crecen en magnitud pero no cambian su forma; y la existencia de esta constante relativa de crecimiento, o constancia en la similaridad de la forma, es en esencia, y podría ser la base una definición, de la espiral equiangular"[4].

Además, en este trabajo se presentan ⁷ fenómenos en la naturaleza relacionados con la filotaxia. Los arreglos de hojas en las plantas exhiben patrones geométricos muy ordenados, caracterizados por parámetros relacionados con ϕ y la serie de Fibonacci. Ejemplos de este orden se encuentran en las piñas, los troncos de las palmeras, la cabezuela de los girasoles y las margaritas (en general de las flores compuestas). También se presentan, en campos tan diversos como cadenas polipéptidas, capas de superconductores, crecimiento de bacterias y los arreglos de monómeros en microtúbulos de muchos organismos.

1.3 Filotaxia

La palabra filotaxia etimológicamente proviene de dos vocablos de origen griego. El primero de ellos *phyllon*- cuyo significado es *hoja* y *taxis*, *orden*. Es decir la palabra filotaxia significa, literalmente, "el orden de las hojas". En su concepto más general, estudia el origen y formación de patrones geométricos formados por elementos idénticos (hojas, flosculos, brotes) generados en las plantas vasculares.

⁷Ver capítulos 5 y 6

Primeras observaciones A largo de la historia se ha pretendido explicar la existencia de patrones comunes a distintas plantas. Las primeras observaciones fueron hechas, sobre los arreglos de los flósculos de las margaritas o de los girasoles. En la cabecuela de estas flores, los flósculos forman, a simple vista, mediante la unión de los elementos vecinos, dos conjuntos de espirales bien definidos. *Charles Bonet* en 1790, observó que uno de estos conjuntos espirales se abre en el sentido de las manecillas del reloj y el otro conjunto, en sentido contrario. A estas espirales se les llama en términos del lenguaje empleado en botánica, *espirales parastiquias* o, simplemente, *parastiquias*.

Además, si contamos el número de espirales en un sentido y en el otro, obtenemos, en la mayor parte de los casos, números consecutivos de la serie de Fibonacci. En otros casos se presentan números de la serie de Lucas (L_n , con $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$). Así, el girasol que se muestra en la figura tiene 34 y 55 espirales parastiquias. Usualmente se les llama a estos números, *números filotáxicos*. Se les denota (m, n) o simplemente *filotaxia* (m, n) , con $m < n$, así, el girasol que se muestra en la figura tiene filotaxia $(34, 55)$

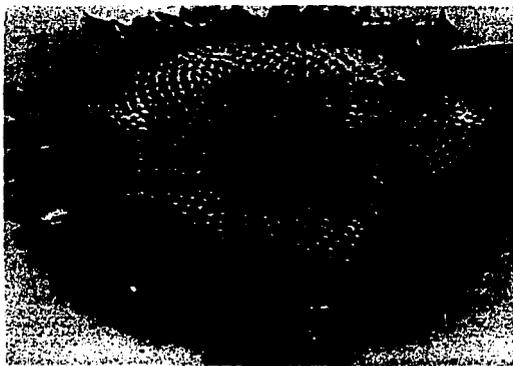


Figura 1.4 Cabecuela de un girasol. Figura tomada de D'arcy Thompson (1942)

Divergencia, espiral generatriz y ángulo áureo

Además de los notables arreglos geométricos que se pueden observar en los girasoles y margaritas existen otro tipo de regularidades en los patrones de

hojas en plantas vasculares.

Charles Schimper (s. XVII) inicia la investigación fenomenológica de la filotaxia. Schimper definió el *índice folial*, como el cociente entre el número de vueltas que se necesitan para que una hoja, esté aproximadamente encima de otra hoja previa, dividido entre el número de hojas que se requieren para llegar a ésta. Este hecho le condujo a afirmar que el ángulo, medido entre dos brotes consecutivos, expresado como como una fracción de vuelta en torno al tronco de la planta, era un número racional.

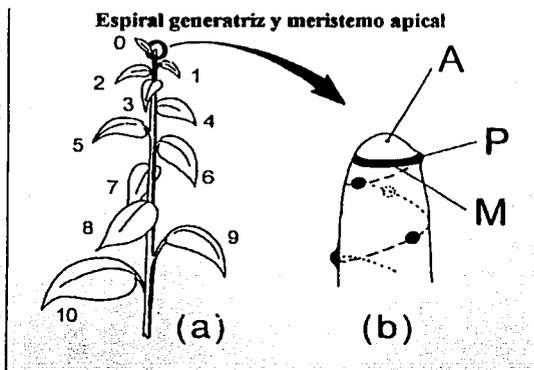


Figura 1.5 Espiral generatriz y meristemo apical. Figura tomada de Kappraf(1996)

El ángulo entre dos primordia, medido como fracción de vuelta, entre dos brotes consecutivos se llama *ángulo de divergencia* o simplemente, *divergencia*. Medidas experimentales de este ángulo mostraban que, en la mayor parte de los casos, este valor era aproximadamente 137.5° [8]. Se encontró que este ángulo es $\frac{2\pi}{\phi^2} = \frac{2\pi}{1+\phi}$. ¡Nuevamente aparece la razón áurea! A este ángulo que denotaremos con φ lo llamaremos, en este trabajo, el *ángulo áureo*.

Si seguimos alrededor del tronco, el camino más corto a través de dos hojas consecutivas, esto define una trayectoria en espiral. Ésta inicia en el brote más antiguo y culmina con el de más reciente formación. A esta espiral se le denomina *espiral generatriz* (Ver figura 1.5)

El *meristemo apical* es una región del ápice de la planta en donde se generan los nuevos brotes. Los elementos idénticos formados en el meristemo apical se llaman, genéricamente, *primordia* (Ver Figura 1.5).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Hermanos Bravais

Los hermanos Louis, éste botánico y Auguste Bravais, cristalógrafo; hicieron una de las mayores contribuciones al entedimiento de la filotaxia. Encontraron la más significativa de las regularidades observadas. Afirmaron que el ángulo entre dos brotes consecutivos es constante, e hicieron la conjetura de que no era un número racional sino que el índice foliar es sólo una aproximación racional al valor irracional de la dicergencia. Además, afirmaron que la constancia de la divergencia es una característica universal en las plantas.

Asimismo, fueron los primeros en situar el problema de la filotaxia en un arreglo espiral sobre la superficie de un cilindro y establecieron las relaciones entre la espiral generatriz y los números filotáxicos m y n . *Demonstraron que si una planta tiene números filotáxicos (m,n) , la espiral generatriz es única si y sólo si m y n son primos relativos.*

Representaciones circular y cilíndrica

Debido a la existencia de la espiral generatriz en las plantas y por otra parte, de las espirales parastiquias en la cabezuela de las flores compuestas, se pensó en un principio, que eran dos órdenes distintos, que no había relación entre ellos. Por ello se utilizaron dos representaciones para abordar la modelación de la filotaxia. Se consideraron arreglos sobre la superficie de un cilindro, para modelar los troncos de las plantas, *representación cilíndrica* y arreglos sobre la superficie de una circunferencia para simular el capítulo de una flor compuesta (*representación circular*). A pesar de que se sospechaba sobre sus equivalencia, el trabajo del botánico alemán del siglo XIX, Hofmeister, confirmó la equivalencia entre ellas.

Equivalencia de las representaciones cilíndricas y circular

Como habíamos mencionado, los hermanos Bravais fueron los primeros en utilizar la representación cilíndrica para modelar la filotaxia. Afirmaban que " el tronco en una planta madura es cilíndrico..." Posteriormente, *A. H. Church*[32] utilizó la representación circular de la filotaxia debido a la simetría del meristemo apical.

El mapeo del cilindro, (desplegado en el plano), al disco, así como su inversa, permite pasar de una representación a otra.

$$\begin{aligned} r &= e^{2\pi v} \\ \theta &= 2\pi x \end{aligned} \quad (1.13)$$

En un disco las espirales parastiquias son espirales equiangulares y en un cilindro son hélices, es decir geodésicas de la superficie.

El parámetro común a ambas representaciones es la divergencia, que en la representación circular, es el ángulo polar entre dos primordia consecutivos y , en la representación cilíndrica, es el ángulo, expresado como fracción de vuelta sobre el tronco. Es por ello, que las representaciones circulares y cilíndrica son matemáticamente equivalentes. Así que no importa que representación se este utilizando ya que es posible pasar de una otra mediante el mapeo dado por las ecuaciones 1.13

En 1868, *W. Hofmeister* [34] observó mediante el microscopio, la región de formación de primordia, el meristemo apical, y numeró el orden de aparición de los primordia. Notó que los primordia si se arreglaban mediante su orden de aparición, formaban una espiral generatriz; y que si se unen con sus vecinos más cercanos forman parastiquias. Además, lo más importante, Hofmeister estableció una serie de condiciones dinámicas para la generación de nuevos elementos. Con ello, fue el primero en resaltar la importancia de la dinámica de aparición de nuevos brotes, para la formación de patrones en las plantas.

H. Airy en 1873 [27], toma en cuenta el tamaño de los primordia, es decir que dejó de tratarlas como partículas puntuales. Investigó el efecto de la compresión de elementos idénticos en la superficie de un cilindro. Los patrones se sucedían debido a las condiciones físicas de presión entre los objetos. Son célebres sus experimentos con bandas elásticas a las cuales les pegaba esferas idénticas, para ir cambiando la tensión y observar las transiciones de disposiciones geométricas.

Inspirado en el trabajo de Airy, *Gustav Van Iterson* en 1907[11], experimentó con esferas, aunque también realizó experimentos con otras representaciones y otros elementos. En la representación cilíndrica, exploró las posibilidades de acomodar discos rígidos tangentes, sobre la superficie de un cilindro desplegado en el plano. Obtuvo condiciones geométricas entre el radio del cilindro y el radio de los discos de tal manera que había puntos de transición hacia estados en donde la configuración maximizaba la compacidad. De esta manera al disminuir el parámetro, se encontraban más soluciones. Los resultados de esta investigación se resumen en un diagrama

de bifurcaciones similar al árbol de Farey. Van Iterson graficó el cociente entre el radio del cilindro y los radios de los discos *vs* el ángulo entre los centros de los discos. Una de las ramas de este árbol converge al ángulo áureo. De esta manera, encontró una condición geométrica de los arreglos, pero no había respondido a la cuestión crucial, por qué la preeminencia de la razón y el ángulo áureo en la filotaxia.

F. J. Richards en 1951 [37], describió experimentalmente la existencia de un parámetro que determina el comportamiento de la filotaxia en la naturaleza. Definió la *razón plastocrona*, en la representación circular, como el cociente entre las distancias al centro de dos primordia consecutivos.

Al año siguiente, en "Las bases químicas de la morfogénesis" [41], Alan Mathison Turing, propone que los patrones generados en la naturaleza, no sólo en la filotaxia, podrían ser resultado de la reacción y difusión de dos sustancias. Bajo ciertas circunstancias, descritas en el capítulo 2, los procesos de reacción difusión producen concentraciones espaciales no homogéneas, que posteriormente podrían dar lugar a oscilaciones temporales que resultarían en la creación de patrones espaciales.

En el mismo año, M. Snow y R. Snow [39] propusieron nuevas hipótesis para la dinámica de formación de primordia en el meristemo apical. Ellos, a diferencia de las reglas de Hofmeister, no postularon la periodicidad en la aparición de primordia, sino que modificaron esta hipótesis afirmando que el nuevo elemento aparece en el borde del meristemo apical, "donde y cuando se crea suficiente espacio".

L.S. Levitov en 1992, utiliza un modelo mecánico de la filotaxia sobre un arreglo cilíndrico, para reproducir los patrones mediante la condición de minimización de la energía global del arreglo. Esto genera como resultado un diagrama de bifurcaciones.

Al mismo tiempo, en 1992 apareció el trabajo titulado "Filotaxia como proceso de crecimiento físico autoorganizado" [7]. En este trabajo, los físicos franceses Stefan Douady e Yves Couder realizaron un experimento, en un sistema físico, que reprodujo los patrones espaciales producidos en la filotaxia. Además utilizaron las reglas dinámicas propuestas por Hofmeister para realizar una simulación numérica que condujo a las espirales que se observan en las plantas.

Con su programa de cómputo encontraron un diagrama de bifurcaciones similar al obtenido por van Iterson, sólo que en este caso la única rama del árbol de bifurcaciones continua es aquella que converge al ángulo áureo. Este artículo será descrito, con mayor detalle, en el capítulo 3 de esta tesis.

En 1996 [8]-[10], Douady y Couder escribieron una serie de tres artículos que sintetizan y generalizan su trabajo previo, ya que utilizan las reglas de Snow y Snow para la generación de primordia en una simulación numérica.

Pau Atela, Christophe Golé y Scott Hotton en 2002 [46] demostraron analíticamente que la solución del patrón de bifurcaciones, es la única dinámicamente viable. Es decir, encontraron que los puntos fijos del sistema dinámico, basado en las reglas de Hofmeister, son estructuras espirales sobre un cilindro.

Capítulo 2

Tipos de explicación en filotaxia

En la historia del estudio de la filotaxia se pueden reconocer las siguientes etapas cronológicas

- (a) Descubrimiento de los patrones filotáxicos (siglos XV-XVI)
- (b) Observación y caracterización de los patrones (siglos XVI -XVII)
- (c) Modelación geométrica (desde el siglo XVIII)
- (d) Estudios experimentales (desde el siglo XIX)
- (e) Interpretación y explicación (desde finales del siglo XIX)

Sin embargo, una división que se refiera al nivel de descripción es más conveniente para confrontar los distintos modelos; así como para encontrar los vínculos entre cada una de las aproximaciones a este problema.

Se pueden agrupar todas las teorías de la filotaxia en tres clases. La descripción geométrica, la descripción dinámica y la descripción fisiológica. Es importante resaltar que a pesar, de que aparentemente estas propuestas son diferentes, encontraremos un vínculo entre los tres tipos de modelos.

Cada una de estas propuestas pretende responder las dos *preguntas fundamentales* de la filotaxia, que a juzgar por los hechos presentados en la sección anterior, son:

1. ¿Por qué la mayoría de las plantas, con una sola espiral generatriz su ángulo de divergencia es igual al ángulo áureo?
2. ¿Por qué los números filotáxicos (m, n) son números consecutivos de la serie de Fibonacci?

2.1 Descripción Geométrica

En esta clasificación se encuentran todos los modelos que son resultado directo de las observaciones de los arreglos en plantas. Estos modelos tratan de reproducir las características geométricas relevantes de los sistemas; y los patrones son consecuencia de dichas propiedades geométricas.

2.1.1 Modelo de van Iterson

En 1907, van Iterson propone un modelo geométrico. Este modelo es el ejemplo canónico de la aproximación geométrica a la filotaxia. Van Iterson trabajó sobre la superficie de un cilindro, desdoblado y extendido en el plano R^2 . Él consideró que los primordia son discos planos tangentes cuyos centros se encuentran sobre la espiral logarítmica L_s definida en el plano, mediante sus coordenadas polares, de la siguiente forma

$$r(\theta) = r_0 R^{\theta/d} \quad (2.1)$$

con R , r_0 y d constantes reales

Cada uno de los primordia P_k se encuentran en un punto del arreglo geométrico de la espiral L_s , definido por los puntos r , θ que satisfacen las siguientes relaciones

$$P_k = \{(r_k, \theta_k) \mid k \in Z\} \quad (2.2)$$

$$r_k = r_0 R^k \quad (2.3)$$

$$\theta_k = kd \quad (2.4)$$

con estas ecuaciones se puede encontrar un significado de los parámetros d , y R que aparecen en la ecuación 2.1

Consideremos dos elementos consecutivos, $P_k = (\theta_k, r_k)$, $P_{k+1} = (\theta_{k+1}, r_{k+1})$, calculemos la diferencia entre sus ángulos

$$\theta_{k+1} - \theta_k = (k+1)d - kd = d$$

El cociente entre sus radios es

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{r_0 R^{k+1}}{r_0 R^k} = R$$

De esta forma se observa que d es la diferencia angular entre dos primordia consecutivos, es decir el *ángulo de divergencia* o *divergencia*; y R es el cociente entre las distancias de dos primordias consecutivos, es decir la *razón plastocrona*.

A semejanza de los flósculos en el capítulo de las flores compuestas, al pasar el tiempo los primordia se alejan del centro sin cambiar de forma pero sí de tamaño. En el modelo de van Iterson se propone los primordia son discos cuyo centro se encuentra en un punto del arreglo espiral definido por las ecuaciones 2.2, 2.3, y 2.4.

Se imponen dos condiciones en este modelo.

a) La primera de ellas es que los primordia son discos en contacto tangencial.

b) La segunda condición es que los discos son rígidos, es decir que no pueden traslaparse.

La siguiente es la formulación matemática de este modelo debida a Koch (1989). El disco D_k , con un radio $\rho_k = \rho_0 R^k$, tiene su centro en (r_k, θ_k) . Para expresar que dos discos D_k y D_{n+k} son tangentes se precisa que la distancia entre sus centros sea igual a la suma de las distancias de sus centros al origen.

La suma de las distancias es

$$r_k + r_{n+k} = \rho_0 R^k + \rho_0 R^{k+n} = \rho_0 R^k (1 + R^n) \quad (2.5)$$

La distancia entre los centros de los discos k y $n+k$ es

$$\sqrt{r_k^2 + r_{n+k}^2 - 2r_k r_{n+k} \cos nd} \quad (2.6)$$

Igualando ambas expresiones obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \sqrt{r_0^2 R^{2k} + r_0^2 R^{2k+2n} - 2r_0^2 R^{2k} + n \cos nd} &= \rho_0 R^k (1 + R^n) \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{1 + R^{2n} - 2R^n \cos nd}}{1 + R^n} &= \frac{\rho_0}{r_0} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Se puede demostrar que si tenemos (m, n) parastiquias, un disco es tangente a cuatro discos: D_k es tangente a $D_{k\pm n}$ y $D_{k\pm m}$. Así que la condición de tangencia, para $\pm m$ se expresa como

$$\frac{\sqrt{1 + R^{2m} - 2R^m \cos md}}{1 + R^m} = \frac{\rho_0}{r_0} \quad (2.8)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La ecuación 2.8 sirve para determinar $\frac{R}{r_0}$ como función de $d = d(R, m, n)$. Koch demostró que si $(m, n) = 1$ y $R > 1$ entonces existe una única solución para el parámetro d .

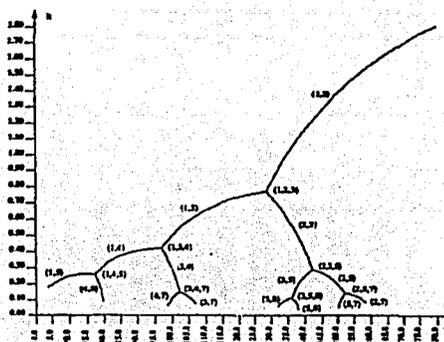
Si consideramos la segunda condición del modelo de van Iterson, es decir que los discos sean rígidos, la condición de que no se traslapen se escribe como

$$r_0 R_k \sqrt{R^{2j} - 2R^j \cos jd + 1} \geq \rho_0 R^j (1 + R^j). \quad (2.9)$$

Después de manipular algebraicamente las ecuaciones 2.9 y 2.8, Koch (1989) dedujo las siguientes consecuencias:

1. Para valores dados de R, m y n , el ángulo de divergencia d existe si y sólo si R se encuentra en un intervalo $[R_{\min}(m, n), R_{\max}(m, n)]$ cuyos límites dependen de las condiciones iniciales.
2. La divergencia d está estrechamente relacionada con los m, n parastichies. De hecho m y n son siempre convergentes principales de $d/360^\circ$.
3. En los puntos en los cuales las tres soluciones $d(R, m, n), d(R, m, p), d(R, n, p)$ se encuentran, con $m < n < p$, los tres números m, n y p son denominadores de 3 convergentes principales de $d/360^\circ$ y p , en la transición, sólo puede tomar el valor de $p = m + n$. A esto se le llama la *regla de la adición*.

El diagrama de bifurcaciones mostrado en la figura 2.1 sintetiza los resultados.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 2.1 Diagrama de van Iterson. Figura tomada de Kappraff (1998)

La figura anterior muestra que a medida que disminuye el valor de d , es decir el ángulo de divergencia, los discos se reacomodan. De tal manera, que cuando el disco D_k es tangente a seis discos $D_{k\pm m}$, $D_{k\pm n}$, $D_{k\pm(m+n)}$ se produce una bifurcación, que debe seguir la regla de adición. Esto permite entender porque los números filotáxicos (m, n) deben ser, números consecutivos de la serie de Fibonacci, ya que satisfacen la regla de adición para las bifurcaciones del diagrama de van Iterson.

2.2 Descripción Dinámica

Este tipo de modelos, enfatizan la dinámica que se produce en la región apical de una planta. Es decir, se afirma que la dinámica de aparición de primordia es la responsable de la generación de patrones. Se considera que los arreglos además de tener limitaciones geométricas, también están determinadas por la dinámica de aparición de nuevos elementos y sus interacciones.

2.2.1 Hofmeister

En 1868 Hofmeister publica un trabajo en el cual da cuenta de sus observaciones mediante el microscopio del meristemo apical. Hofmeister describió la dinámica de aparición de los primordia. Este énfasis en la dinámica, constituye un cambio radical en el enfoque hasta entonces puramente descriptivo. Resultado de sus observaciones, son las siguientes reglas.

Reglas de Hofmeister

1. El ápice es axisimétrico.
2. Los primordia se forman en la periferia del ápice, y debido al crecimiento del tronco, se mueven alejándose del centro con una velocidad radial $V(r)$.
3. Los nuevos primordia se forman a intervalos regulares.
4. El nuevo primordium aparece en el mayor espacio disponible dejado por los primordia anteriores.

5. Fuera de una región circular de radio R_0 , no existe reorganización que produzca cambios en las posiciones angulares de los primordia.

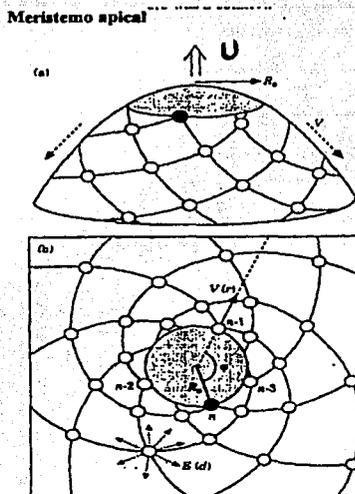


Figura 2.2 Meristemo apical y reglas de Hofmeister. Figura Douady y Couder (1995)

2.2.2 Snow y Snow

Snow y Snow modificaron las reglas de formación de primordia de Hofmeister. Ellos, a diferencia del botánico alemán, no impusieron la periodicidad de la aparición de primordia en el ápice, sino que sugieren que un nuevo primordium aparecerá en "donde y cuando exista espacio suficiente para formarse".

2.2.3 Douady y Couder

Los físicos franceses Douady y Couder escriben, en 1992, un trabajo cuyo título no podía ser más descriptivo: "La filotaxia como sistema físico de crecimiento auto-organizado". Este artículo es, sin duda, el más importante en

cuanto a que, como veremos más adelante, responde a las preguntas fundamentales de la filotaxia. Detallaré esta descripción en el siguiente capítulo.

2.3 Descripción Fisiológica

Los modelos que pretenden relacionar los mecanismos de interacción fisiológica entre primordia para explicar la formación de patrones filotáxicos se conocen como modelos fisiológicos. Entre ellos se encuentra presión de contacto, modelos mecánicos y fundamentalmente, los modelos de reacción-difusión.

2.3.1 Mecanismo reacción-difusión

Turing, Meinhardt

La morfogenésis es la parte de la embriología que se ocupa de surgimiento y el desarrollo de formas y patrones. Es el proceso responsable de la forma de un organismo mediante procesos fisiológicos o de diferenciación celular.

Alan Mathison Turing en "Las bases químicas de la morfogenésis", plantea que algunas sustancias químicas pueden reaccionar y difundirse simultáneamente para formar patrones espaciales no homogéneos, pero estables.

Los mecanismos de reacción-difusión describen los fenómenos biológicos a nivel molecular. En el meristemo apical, se producen sustancias químicas que interactúan de una manera no lineal, produciendo concentraciones no homogéneas. Estas concentraciones pueden ser usadas para iniciar eventos morfogenéticos como la diferenciación de un primordium[5].

La hipótesis de Turing permitió estudiar el desarrollo de patrones a partir de las soluciones a ecuaciones diferenciales que modelan los procesos de reacción-difusión.

Las ecuaciones de reacción-difusión

En la física son comunes los procesos de difusión (neutrones, gases, etc). El más conocido de estos procesos es la propagación de calor. La energía calorífica, a pesar de no ser una sustancia, se difunde. La ecuación que gobierna este fenómeno es una ecuación diferencial para la temperatura T . Para algunos materiales sucede que $\frac{dq}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}$, con q la energía en forma de calor. Si no existen absorción, ni generación de calor, la ecuación de difusión

se escribe como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla^2 T \quad (2.10)$$

con $D = k/c_v$, la constante de difusión, que depende de las propiedades del material. Esta ecuación también sirve para describir la difusión de líquidos. Con ella se puede modelar la difusión de sustancias morfogenéticas.

Por otra parte, las ecuaciones para la reacción de dos sustancias A y B con concentraciones a y b respectivamente son

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= f_1(a, b) \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= f_2(a, b) \end{aligned} \quad (2.11)$$

En general, las funciones f_1 y f_2 son no lineales. En este par de ecuaciones una de las sustancias favorece la reacción y la otra la retarda, es por esto que se les llama, respectivamente, *activador* e *inhibidor*.

Combinando las ecuaciones 2.11, con las correspondientes ecuaciones de difusión, obtenemos las ecuaciones generales de la reacción-difusión de dos sustancias A y B .

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D_1 \nabla^2 a + f_1(a, b) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = D_2 \nabla^2 b + f_2(a, b) \quad (2.13)$$

A este conjunto de ecuaciones se les debe agregar una condición para que el proceso de difusión no culmine con un estado homogéneo. Es decir que el papel de activador, sea menor que el del inhibidor. Esto significa que las constantes de difusión D_1 y D_2 satisfagan que $D_1 \gg D_2$. Está condición impuesta a la dinámica del sistema da lugar a soluciones periódicas. A este mecanismo inestabilidad producido por la difusión se le conoce como *mecanismo de Turing*.

Modelo de Meinhardt

En general los modelos de reacción-difusión de la filotaxia postulan que los primordia se "repelen" entre sí mediante la producción de sustancias inhibidoras. Éstas sustancias se difunden en el borde del meristemo apical, y cuando el valor del inhibidor desciende por debajo de un cierto valor límite,

se crea un nuevo primordium. Éste será por sí mismo fuente de otro inhibidor y así sucesivamente. El modelo de Meinhardt es un buen ejemplo que ilustra el uso de las ecuaciones de reacción difusión para modelar procesos de diferenciación.

El modelo de Meinhardt está basado en este proceso. Se trata de un modelo unidimensional. La diferenciación celular se lleva a cabo en un anillo situado en el borde del meristemo apical. Para reducir este problema a una dimensión se restringe la atención a un segmento de recta, es decir, el anillo desplegado en el plano, con condiciones de frontera periódicas.

Este modelo describe las interacciones de tres sustancias bioquímicas

- Un activador cuya concentración es a
- Dos sustancias antagonistas, es decir dos inhibidores con concentraciones s y h

La pareja de activador e inhibidor (a, h) contiene la dinámica propuesta por Greier y Meinhardt (1972), mientras que s , tiene una tasa baja de decaimiento, comparada con a y h , sin embargo esta sustancia juega un papel de "memoria" química a largo plazo.

El sistema empieza con una concentración alta del activador a . Cuando a se incrementa por encima de cierta concentración crítica, se induce la formación de un primordium. Después de un cierto tiempo t , largo, se tiene que las ecuaciones del sistema son las siguientes:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{a^2}{h(\kappa_a + s)} - \mu_a a + \sigma_a \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D_h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + a^2 - \mu_h h \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = D_s \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + a^2 - \mu_s s \quad (2.16)$$

D_a, D_h, D_s son los coeficientes de difusión de las sustancias, κ_a es un término de fuente constante, ν_a es un término de saturación, para que se de una situación no homogénea se debe exigir que $\mu_a \gg \mu_s = 1$ y $\mu_h \gg \mu_s = 1$. La pareja (a, h) tiene propiedades morfogenéticas si el inhibidor h es una sustancia difusiva rápida es decir que $D_h \gg D_a$.

Si las tasas de decaimiento se eligen convenientemente ($\mu_a > \mu_h$), la pareja de activador-inhibidor (a, h) produce pequeños picos locales en la concentración del activador (Meinhardt 1982). Estos picos producen la inhomogeneidad de s , que mantiene la memoria de las posiciones en donde los picos en la concentración del activador aparecieron, pero esta memoria desaparece poco a poco debido a la difusión de s y a su degradación. Debido a la acción inhibitoria de s , un nuevo pico en el activador se presentará en la primera posición donde la concentración de s desciende de un cierto valor umbral. Este proceso se repite y así se generan los primordia.

2.4 Relación entre los distintos enfoques a la filotaxia

Los modelos presentados en las secciones anteriores tienen distintas motivaciones y enfoques, pero tienen en común el buscar responder a las dos preguntas fundamentales de la filotaxia. Desde distintas perspectivas, con distintos métodos, tratan de explicar las principales hechos observados en la filotaxia. A pesar de la diversidad de enfoques, podemos decir que las tres descripciones anteriores son complementarias. Existe, entre ellas una cadena causal que nos permite ligar a las tres descripciones.

Los patrones geométricos se generan debido a la dinámica de la formación de primordia y ésta, es producto de la interacción fisiológica entre los primordia.

Conjetura de Lee y Levitov En el libro "Symmetry in plants" Lee y Levitov establecen lo que llamaré la **conjetura Lee y Levitov** que de ser probada, permitirá establecer puentes entre los distintos niveles de descripción. Lee y Levitov afirman que " en el estudio de la dinámica de sistemas de objetos que se repelen entre sí, no importa el mecanismo particular de interacción responsable, ni tampoco que representación geométrica utilizada (cilíndrica, cicular, o cono) ya que en cierto sentido las interacciones y la representación son equivalentes."

Como hemos visto en los distintos modelos, la dinámica que subyace se traduce en una dinámica de objetos, que de alguna manera, ejercen entre sí una repulsión. Por ejemplo, en el modelo de van Iterson la condición de tangencia y rigidez de los discos, modela la repulsión. En los modelos

2.4. RELACIÓN ENTRE LOS DISTINTOS ENFOQUES A LA FILOTAXIA³⁷

de reacción difusión el efecto neto es una repulsión entre los elementos que se generan. Así que el sistema dinámico que estudiaremos en el siguiente capítulo, aprovecha esta característica de la interacción entre primordia para intentar responder a las preguntas fundamentales de la filotaxia.

Capítulo 3

El modelo dinámico iterativo

La mayor parte de los modelos de filotaxia tratan de explicar la preeminencia de la serie de Fibonacci en los patrones, postulando la maximización, optimización de una serie de parámetros que le reportan beneficios, (evolutivos, crecimiento, aprovechamiento de luz solar, agua de lluvia etc.) a la planta.

Los modelos dinámicos se caracterizan por ser lejanos a la especificidad biológica del sistema. Se extrae de los hechos conocidos los parámetros relevantes para la descripción del fenómeno y a partir de estos se genera un sistema dinámico con la meta de reproducir los arreglos geométricos.

El modelo dinámico presentado por Douady y Couder es un ejemplo muy bello de simplicidad y elegancia. Ellos trataron de encontrar, y lo hicieron, el conjunto mínimo de hipótesis necesarias para reproducir los patrones filotáxicos observados en las plantas. Por ello, probaron con el conjunto de reglas propuestas por Hofmeister en 1868. La pregunta que querían responder consistía en saber si estas reglas son suficientes para producir las espirales equiangulares y las parastiquias. Esta cuestión parece trivial pero no lo es, debido a que si la respuesta fuese positiva, se podría encontrar un sistema, incluso fuera del ámbito biológico, que se comportara conforme a las reglas de Hofmeister y entonces generará los patrones.

Esta idea fue la que llevó a estos físicos franceses a encontrar un dispositivo experimental físico que cumpliera las condiciones de aparición de elementos; así como su interacción entre ellos.

3.1 Descripción del experimento

El dispositivo experimental que utilizaron consistió en un plato con aceite de silicón, dentro de un campo magnético vertical. El recipiente contenía un cono truncado en el centro del plato. A esta concentración se le aplicó un campo magnético H con un gradiente, de tal manera que en las orillas del plato el campo era más intenso. Para modelar los primordia utilizaron gotas de un fluido ferromagnético que eran dejadas caer sobre el centro del plato con una periodicidad T . De esta manera las gotas al caer sobre el cono, se desplazaban hacia la periferia, se polarizaban, y formaban dipolos con su momento dipolar alineado con el campo. Debido a la presencia del gradiente de campo magnético, cada gota adquirió una velocidad de radial $V(r)$.

Ellos observaron que se tenían tres parámetros relevantes en el experimento: la periodicidad T , el radio R_0 , a partir del cual no existe reorganización de primordia, y la velocidad $V(r)$ de los primordia después de esta región. Estos tres, se pueden combinar para formar un parámetro G , adimensional, que los relaciona.

$$G = \frac{TV}{R} \quad (3.1)$$

Fácilmente se puede verificar que el sistema del plato y las gotas satisface las reglas de Hofmeister enunciadas en la sección 2.2.1. La hipótesis de que el nuevo elemento aparezca en el espacio más grande disponible, se modela mediante la acción de las fuerzas repulsivas entre los dipolos magnéticos. Esta interacción hace que la nueva gota aparezca en la región de menor repulsión, es decir en el espacio más grande disponible.

En este sistema de gotas idénticas, los dipolos se repelen con una fuerza proporcional a d^{-3} , con d la distancia entre gotas. En el experimento Douady y Couder modificaron gradualmente el parámetro de control T , es decir la periodicidad. Con esto, hicieron variar también el parámetro G y midieron el ángulo de divergencia φ . Los resultados se discuten en la siguiente sección.

Observaron que, para valores grandes de G , el ángulo entre dos gotas consecutivas es de 180° (2π radianes). Sin embargo, a medida que disminuye T , la nueva gota es repelida no sólo por la última sino que las anteriores ejercen una influencia energética que ya no puede ser despreciada, es a este T_i (tiempo de transición) que la gota se desplaza hacia un lado, es decir no en la posición de 180° sino en un ángulo menor. Esto constituye una ruptura de simetría del sistema. Este deslizamiento define el sentido de la espiral

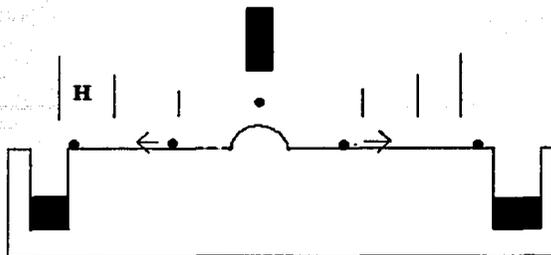


Figura 3.1: Figura 3.1 Dispositivo experimental

generatriz. Para valores más pequeños de T las distancias son menores y la nueva gota se acomoda en un lugar en el cual la repulsión es mínima.

Observaron que para valores pequeños de G , cercanos 0, las gotas se ordenaban (auto-organizaban) en un arreglo muy parecido al que se observa en el capítulo de una margarita o de un girasol. En el siguiente conjunto de fotografías (Figura 3.2) se observan los resultados para distintos valores de G .

Los arreglos de gotas observados no sólo dependen de T sino que también dependen de la velocidad de advección V , en este caso provocada por el gradiente H , y de R_c , el radio a partir del cual ya no hay reacomodo que cambie la posición angular de las gotas.

Debido a que en el experimento la única variable ajustable es T y además T es proporcional a G , se observó la influencia de T cuando R_c y $V(r)$ se consideran fijos.

En la sección 1.3 se hizo referencia al parámetro que Richards encontró. Este parámetro caracteriza el crecimiento apical: la razón plastocrona $a = \frac{r_n - 1}{r_n}$, expresado en la representación circular.

Experimentalmente, se sabe que cerca del ápice, el crecimiento de la planta es exponencial. Entonces, la velocidad de advección es proporcional a la distancia al centro.

$$V(r) \propto r$$

$$\Rightarrow V(r) = kr \quad (3.2)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Figura 3.2: Patrones filotáxicos a) $G = 1$, b) Ruptura de simetría, c) $G = 0.01$. Figura tomada de Douady y Couder (1996).

La velocidad del primordium en el borde del ápice es $V(R_0) = V_0$, con esta condición inicial se puede resolver la ecuación 3.2 para encontrar $r(t)$

$$V(r_0) = kR_0 = V_0 \Rightarrow k = \frac{V_0}{R_0} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{dr}{dt} = \frac{V_0}{R_0} r \\ \Rightarrow r(t) &= R_0 e^{\frac{V_0 t}{R_0}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si en la ecuación 3.4 tomamos $t = nT$, es decir la distancia al centro de la n -ésima gota

$$r(t = nT) = R_0 e^{\frac{nV_0 T}{R_0}} = R_0 e^{nG} \quad (3.5)$$

Por otra parte, para calcular, la razón plastocrona de Richards en este modelo, se debe formar el cociente entre las distancias de dos partículas consecutivas.

Supongamos que tenemos m partículas, calculemos entonces con $n < m$

$$\begin{aligned} r_n(t) &= R_0 e^{nG} \\ r_{n-1}(t) &= R_0 e^{(n-1)G} \end{aligned}$$

la razón plastocrona es

$$a = \frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{R_0 e^{nG}}{R_0 e^{(n-1)G}} = e^G \quad (3.6)$$

De la ecuación anterior se encuentra la relación entre la razón plastocrona de Richards a y G

$$\ln a = G \quad (3.7)$$

Mediante la ecuación previa, el parámetro G se puede determinar experimentalmente para las plantas mediante la medición de a . Meicenheimer demostró que la evolución continua de la filotaxia de una forma vegetal a la inflorescencia se debe, esencialmente, al decremento continuo de a [8].

En este experimento T y V se pueden definir con precisión, pero no así R_0 . Sin embargo, aún así, los valores de G para el experimento se pueden comparar con los obtenidos experimentalmente con la medición de a .

Por ejempl, $G = 1$, en el experimento de Douady y Couder se obtiene con $v_0 \approx 1 \text{ cms}^{-1}$, $T \approx 1 \text{ s}$, $R_0 \approx 1 \text{ cm}$. Típicamente, para las plantas se tiene $G = 1$, con $v = 10^{-3} \mu\text{ms}^{-1}$, $T \approx 10^5 \text{ s}$, $R_0 \approx 100 \mu\text{m}$.

Douady y Couder encontraron, que a partir de las hipótesis de Hofmesiter se generan los parastichies observados en la cabezuela de una flor compuesta. Así que, si se encuentra una situación de naturaleza distinta que satisfaga las reglas anteriores; entonces éstas son suficientes para generar los patrones espaciales de parastiquias.

3.2 La simulación numérica

Las hipótesis de Hofmesiter, ver sección 2.2.1, sugieren inmediatamente, la existencia de un algoritmo. Ya que estas reglas satisfacen las condiciones de uno. Son precisas, deterministas, no ambiguas, etc. Esto permitió la realización de un programa de cómputo para hacer una simulación numérica en la computadora.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Douady y Couder utilizaron la representación circular. Es decir un disco C de radio R_0 , con centro en el origen. Para modelar los primordia, las consideraron partículas puntuales. Cada una de las partículas genera una energía repulsiva $E(d)$, con d la distancia. Cada partícula tiene, además, una velocidad radial $V(r)$, que servirá para modelar la velocidad de advección, debida al crecimiento del brote o tronco.

La energía repulsiva constituye el modo más simple de reproducir la condición de que la partícula aparece en el espacio disponible más grande dejado por las otras.

Las partículas aparecen sobre la circunferencia C , cada tiempo $t = T$. Esto, además del criterio de aparición de nuevas partículas, define la dinámica de este sistema.

Criterio de aparición de una nueva partícula El nuevo elemento aparece después de T unidades de tiempo. Debido a la energía total repulsiva de las partículas previas, la nueva aparecerá en la posición sobre la circunferencia donde la energía tiene un mínimo, es decir en el espacio más grande disponible.

El programa de Douady y Couder les permitió mayor flexibilidad que el experimento, debido a que pudieron seleccionar una velocidad de advección distinta. Ellos implementaron tres distintas velocidades radiales. Estas son el crecimiento exponencial, $V(r) = \frac{V_0 r}{R_0}$, velocidad constante $V(r) = V_0$ e inverso de la distancia, $V(r) = V_0 R_0 / r$.

También se podían seleccionar distintas relaciones de interacción energética. En su simulación Douady y Couder probaron con $E(d) = \frac{1}{d}$, $E(d) = \frac{1}{d^3}$, lo cual es típicamente la interacción del experimento entre las gotas de un ferrofluido, y $E(d) = e^{-d/l}$, con l constante.

Algoritmo

Se mapea un conjunto de puntos discretos sobre la circunferencia de radio R_0 en los cuales se mide la energía repulsiva producto de la suma de cada una de las contribuciones de las n partículas previas, sumando cada $E_n(d)$. Después de seleccionar uno de estos puntos como el mínimo relativo, se repite el proceso midiendo la energía repulsiva en puntos alrededor de este mínimo parcial. Repitieron este proceso hasta encontrar la precisión requerida, que para este caso fue de 0.1°

Las soluciones se encuentran resumidas en el gráfico de la s figura 3.3.

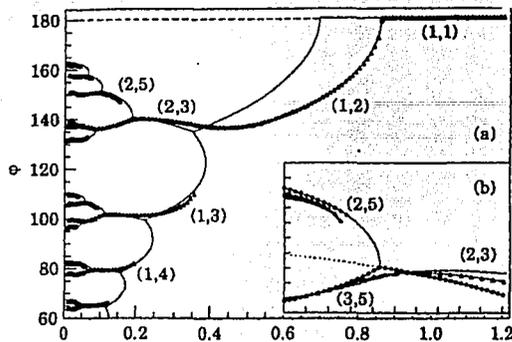


Figura 3.3 Diagrama de bifurcaciones. Figura tomada de Douady y Couder (1996)

El diagrama observado es muy parecido al árbol de Farey y al obtenido por van Iterson mediante consideraciones puramente geométricas. Sin embargo, la principal diferencia, consiste en que, en el diagrama de Couder y Douady, únicamente una rama, dentro de la precisión del programa, es continua. Esta rama es la que converge al ángulo áureo.

3.3 Resultados

Douady y Couder encontraron que la mayoría de los regímenes son estables para un valor fijo de G y φ . Cuando para un valor de G se tienen distintos ángulos φ , el ángulo que aparece depende de las condiciones iniciales, o del transitorio que conduce al valor de G .

Los regímenes permanentes Con la simulación numérica utilizada por Couder y Douady se pueden considerar las contribuciones de hasta 400 partículas, con ello se obtiene el diagrama $\varphi(G)$. Para valores grandes de $\varphi = 180^\circ$, éste es el modo decusado de la filotaxia; es decir cuando las hojas se encuentran a 180° una con respecto a otra.

Para un valor umbral G dos modos espirales son posibles $\varphi < 180^\circ$ y $\varphi > 180^\circ$. Para este valor se tiene que el número de iteraciones necesarias para la convergencia es muy grande. Es decir que, $|180^\circ - \varphi| \propto (G_c - G)^{1/2}$

diverge, esto, en el lenguaje de los sistemas dinámicos, es característico de una ruptura de simetría.

Con valores más pequeños de G , se obtiene más de una solución, cada una de las cuales se encuentra con las condiciones iniciales siguientes.

1. Un impulso inicial. La simulación empieza directamente al valor de G seleccionado, sin elementos iniciales.
2. Una condición transitoria. Se empieza con un valor grande de G y disminuye gradualmente a un valor constante G . Con este valor de G constante se calcula φ
3. Una condición inicial forzada. Se crea inicialmente un patrón con un número dado de partículas m , se selecciona una G , y se observa si esta configuración puede seguir creciendo. Esta condición permite el estudio de los límites de existencia de soluciones. Con esta Douady y Couder exploraron la continuidad de las soluciones.

Como se observa en el diagrama, el número de soluciones se incrementa con el decremento de φ . Observaron también, que el sistema es robusto ante la elección de interacciones energéticas, y también con respecto a distintas velocidades de advección. Se pueden observar cambios cuantitativos, como el valor de G para el cual se da la bifurcación, pero el valor al cual converge la única rama continua en cualquiera de los casos es ϕ .

Este diagrama se puede comparar con el obtenido por van Iterson en 1907 (Figura 2.1). La diferencia, como ya se señaló, se encuentra en la continuidad de una sola rama. Cuantitativamente, los diagramas dinámicos siempre difieren de los geométricos por una característica esencial: en la bifurcación cerca de G_{ij} , el segmento de curva (i, j) sólo se une con $(j, i + j)$ mientras que la curva $(i, i + j)$ aparece en una nueva rama disconexa.

Levitov estudió en 1991 las condiciones de energía mínima para un arreglo helicoidal sobre un cilindro. Él propuso un arreglo regular con elementos que se repelen entre si y la estructura global alcanza mínimo en la energía. Lo que hace reproducir el mismo diagrama de bifurcaciones, que se presentó en el trabajo de Couder y Douady.

La equivalencia entre ambos trabajos se debe a la dinámica de crecimiento, en donde cada primordia aparece en el lugar en donde la energía es mínima, eventualmente crea una estructura global de energía mínima.

Desde los primeros trabajos en filotaxia se mostró que los arreglos espirales son preeminentes y también la presencia de la serie de Fibonacci. El modelo dinámico de Douady y Couder responde satisfactoriamente a las dos preguntas de la filotaxia. Satisface la regla de la adición. Además, también, explica que (m, n) sean números consecutivos de la serie de Fibonacci. Explica la aparición constante en la naturaleza de ϕ , debido a que en su modelo la razón áurea se privilegia en la selección de una rama continua.

El vínculo entre los hechos de la botánica y los parámetros de este modelo se encuentran en la relación entre G y la razón plastocrona de Richards. Los experimentos demuestran, que desde el punto de vista de la filotaxia, la característica principal es la evolución continua de la razón plastocrona con el tiempo. Como la razón plastocrona y el parámetro G están relacionados mediante la ecuación 3.7 es decir, mediante $Ln(a) = G$. Por lo que el decremento continuo de a , y debido a que $Ln(x)$ es una función continua, implica que G decrece continuamente. La única rama que tiene soluciones para G decreciendo continuamente es la que converge a ϕ . De esta manera, el modelo, encuentra una respuesta satisfactoria a la aparición de la serie de Fibonacci en la filotaxia espiral.

En contraste con las explicaciones usualmente utilizadas, para justificar la presencia de la serie de Fibonacci y ϕ , la continuidad de a (y por lo tanto la de G , durante la ontogenia,) el modelo iterativo les permitió a Douady y Couder encontrar una consideración necesaria, debido a la estabilidad del sistema dinámico, para este hecho.

Ejemplo de ello es, la muy extendida, creencia de que las hojas se encuentran dispuestas en espirales logarítmicas cuyos posiciones son debidas a que, de esta manera, logran una mayor exposición a los rayos solares (Leigh 1972), es una simplificación del problema ya que

1. Supone que todos los troncos son verticales
2. que el sol siempre se encuentra en el cenit
3. que las hojas no pueden cambiar de orientación

A diferencia de esto, los físicos franceses, encontraron que el predominio de la serie de Fibonacci está vinculada con el hecho de que en un nuevo tronco siempre empieza a crecer con una razón plastocrona grande. Posteriormente, la razón plastocrona disminuye y en este rango de valores únicamente existe la serie principal. Es decir, el decremento de

esta cantidad, como ocurre en la realidad botánica, sólo se observa una rama continua del diagrama de Farey.

Reglas de Snow y Snow

Después del artículo de 1992 [7], Douady y Couder escribieron una serie de tres nuevos artículos que generalizan sus investigaciones anteriores. En el segundo de ellos proponen un nuevo algoritmo para la simulación numérica inspirado en las reglas de M. Snow y R. Snow.

Las condiciones de aparición de primordia se ven modificadas por las reglas propuestas por Snow y Snow en 1952, que eliminan la periodicidad de aparición de primordia. Postulan que el nuevo primordium aparece *donde y cuando existe espacio suficiente para formarse*.

Douady y Couder demostraron que, bajo este supuesto, el sistema puede evolucionar hacia estados en donde se genera una periodicidad constante, por lo que estas reglas son más generales, ya que contienen al caso de las reglas de Hofmeister.

Modelando con las reglas de Hofmeister, no es posible tratar con los modos multijugados espirales. En estos modos filotáxicos muchos primordia aparecen simultáneamente formando arreglos sucesivos a lo largo del tronco.

La modificación de la regla de aparición de primordia, también es reflejo de la repulsión entre elementos de un inhibidor.

Reglas de Snow y Snow

1. El meristemo apical es axisimétrico
2. El ápice tiene la forma de un paraboloide y los primordia pueden tener una forma azimutal alargada
3. Los primordia se forman en la periferia del meristemo apical y debido al crecimiento, se mueven con velocidad radial $v(r)$.
4. Un nuevo primordium aparece donde y cuando se genera un espacio suficiente en la periferia del ápice.
5. Fuera de la región de radio R_0 , no existe reorganización que conduzca a cambios en las posiciones angulares de los primordia.

Las hipótesis de Snow y Snow generan, también que la estructura global tenga una compacidad óptima. Para este conjunto de reglas, no se encontró un sistema físico que se comportara conforme a estas reglas, de tal forma que sólo se puede modelar mediante un programa de cómputo.

Para simular la ocupación de espacio, cada partícula, genera una energía repulsiva, $E(d)$ con d la distancia de esta partícula al centro. Al igual que en el caso de las reglas de Hofmeister el nuevo elemento aparece sobre un circunferencia de radio R . Se establece un valor mínimo de energía E_0 . Se le agrega la condición de que sólo puede aparecer cuando el mínimo de energía se vuelve más pequeño que cierto valor umbral E_0 .

Esta es la forma de modelar el principio "un nuevo primordium aparece donde y cuando se genera un espacio suficiente en la periferia del ápice". Se mapea en la circunferencia todos los valores de energía, y un nuevo primordium aparece cuando el valor de la energía es menor que el valor umbral E_0 .

Este cambio introducido, con respecto a la simulación basada en las reglas de Hofmesiter, genera patrones periódicos, además de modelar también los distintos modos de la filotaxia.

3.3.1 Un modelo dinámico para la formación de patrones en plantas

En 2002, Atela, Golé y Hotton [46], mediante un análisis matemático riguroso, demuestran que la única solución que satisface las condiciones de aparición es la que converge a ϕ .

Este modelo permite un aproximación matemática, no sólo numérica, al análisis del sistema dinámico que genera los patrones en plantas. Este sistema dinámico está basado en las reglas propuestas por Hofmeister para la generación de primordia en una planta vascular.

Atela, y sus colaboradores consideraron una configuración de puntos, que representan a los primordia, sobre un cilindro desplegado en el plano. Los puntos sobre él son $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, con $p_k = (\theta_k, y_k)$ y $y_k = ky$.

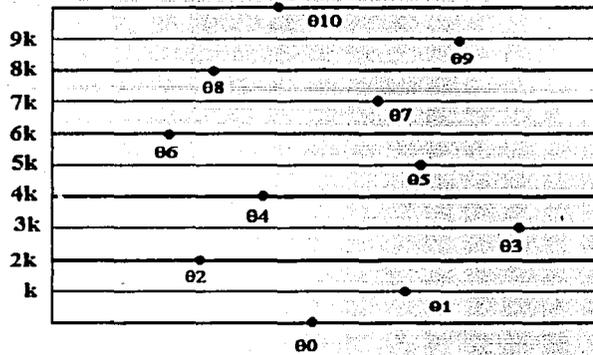


Figura 3.3 Sistema dinámico. La superficie de un cilindro desplegada en el plano, la región con $k=0$, es el meristemo apical, después de éste no hay reajuste angular.

Puesto que el parámetro de crecimiento es γ es constante, el espacio de configuración es un toro T^{N+1} , parametrizado por los ángulos θ_k .

El mapeo en este espacio fase es el siguiente

$$\begin{aligned}\theta_0 &= F(\theta_0, \dots, \theta_N) \\ \theta_1 &= \theta_0 \\ &\vdots \\ \theta_N &= \theta_{N-1}\end{aligned}$$

F es la función que selecciona el lugar "de mayor espacio" sobre el meristemo apical. p_0 está en el lugar de menor aglomeración, es decir el lugar más alejado posible, localizado en T^0 , medido por

$$\max_{p \in T^1} \{ \min_k \text{distancia}(p_k, p) \} \quad (3.8)$$

Las consecuencias de la acción de F , definida como la ecuación 3.8, sobre el espacio fase T^N son las siguientes

- Equidistancia: p_0 es equidistante a sus vecinos más cercanos p_n, p_m .

- Oposición: Los vecinos más cercanos a p_0 , es decir, p_n, p_m están en lados opuestos de p_0 .
- Amortiguamiento: Una pequeña variación en θ_m o en θ_n , induce una pequeña variación en θ_0 .

Debido la simetría circular, el espacio de configuración se puede disminuir en una dimensión, si parametrizamos con respecto a la divergencia es decir si consideramos x_k .

$$x_k = \theta_{k+1} - \theta_k \quad (3.9)$$

El mapeo, ahora es de la forma

$$\begin{aligned} X_0 &= f(x_0, \dots, x_N) \\ X_1 &= x_0 \\ &\vdots \\ X_{N-1} &= x_{N-2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

con X_k los ángulos de divergencia.

De esta manera, los puntos fijos de este mapeo son puntos con ángulo constante. Los detalles en la demostración rigurosa se pueden encontrar en [12].

Lo que encontraron fue que usando la condición de oposición y la variación de un parámetro (que juega el papel de G en el modelo de Douady y Couder), se obtiene el diagrama de van Iterson, que selecciona sólo una rama en cada punto de bifurcación. La única rama continua es nuevamente, la que converge a ϕ .

Con ello se demuestra que tanto analíticamente, como numéricamente la dinámica del sistema impone condiciones que seleccionan sólo una rama del árbol de Farey. Es decir que la dinámica que subyace al sistema es la responsable de los patrones observados en la filotaxia.

Capítulo 4

Descripción y resultados del programa

Para reproducir los resultados numéricos, del programa de Douady y Couder, se escribió un programa en C++. El programa de cómputo se basó en el enfoque de programación orientada a objetos que permitió mayor flexibilidad en el momento de imponer nuevas condiciones de aparición de primordia; debido a la reutilización del código previamente escrito. Las gráficas resultantes fueron realizadas en software comercial.

Los objetivos para elaborar una nueva simulación numérica son: investigar los límites de existencia de soluciones, comparar las distintas velocidades e interacciones energéticas propuestas por Douady y Couder, y comparar la convegnencia a ϕ de las soluciones con $G \rightarrow 0$

4.1 Diseño de la clase

Para trabajar con la cantidad de datos, asociadas a las posiciones y velocidades, se creo una clase llamada **polar.h**, en donde se modelan las posiciones de los primordia ,así como sus propiedades cinemáticas en el plano mediante coordenadas polares.

Esta clase permite el cálculo de la distancia en el plano, el ángulo entre dos primordia. Además permite manipular los datos de tipo *polar* mediante las funciones de interacciones enrgéticas y de velocidades. Permite en todo momento calcular posiciones, interacción (repulsión) entre ellas y su velocidad.

En esta simulación numérica se puede seleccionar dentro de un menú la ley de velocidad a seleccionar entre las siguientes. Adicionalmente se ofrece un menú en donde puede elegirse la relación de energía que entre primordia como función de la distancia entre ellos

A diferencia del programa reportado por Couder y Douady (1992) el algoritmo utilizado y el número de iteraciones permite mayor precisión (menor a 0.01°) que mejora la investigación sobre el límite de la existencia de soluciones en el diagrama de Farey.

4.2 Algoritmo

Después de seleccionar el radio de la circunferencia R_0 , el período de aparición de primordia T , la velocidad de cada primordia $v(r)$, y la interacción energética como función de la distancia $E(d)$. El primer primordia aparece en la posición R_0 , $\theta_0 = 0$. Con esta elección no se pierde la generalidad, debido a la simetría del problema. Los primordia subsecuentes aparecen después de T unidades de tiempo, sobre algún punto de la circunferencia de radio R_0 . Los primordia aparecen en la posición angular en la cual es mínima la energía de interacción entre los primordia previos. Después de esta interacción inicial no existen reacomodos y los primordia se alejan radialmente del centro del ápice con la ley de velocidad $v(r)$ seleccionada previamente.

La principal tarea de este programa consiste en encontrar el punto sobre la circunferencia en donde la energía de repulsión producida por los primordia previos es mínimo. El algoritmo que se utilizó para encontrar este punto es el siguiente.

Supongamos que tratamos de encontrar la posición del k -ésimo primordium. Se mapean 100 puntos de la circunferencia distribuidos regularmente; es decir, se generan un arreglo de 100 datos de tipo polar con $r_i = R_0$ y $\theta_i = \frac{2\pi i}{100} = \frac{\pi i}{50}$, para $i = 0, 1, \dots, 99$. Sobre cada uno de estos se calcula la energía repulsiva debido a los primordia previos, mediante la suma de las contribuciones energéticas de cada primordia, $\sum_{j=1}^{k-1} E(d_{jk})$, d_{jk} es la distancia de la partícula j -ésima con respecto al k -ésimo punto sobre la circunferencia. De todas estas energías se seleccionan el mínimo $\min_i \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} E_i(d_{ji}) \right\}$, con $i = 0, 1, 2, \dots, 99$. Se selecciona este punto como el mínimo parcial; es decir se elige el ángulo $\theta_w = \frac{\pi w}{50}$, en donde la interacción es menor. Alrededor de este

ángulo, se distribuyen nuevamente 100 puntos sobre una arco de circunferencia definido por los límites $\frac{\pi w}{50} - \frac{\pi w}{100} < \theta_w = \frac{\pi w}{50} < \frac{\pi w}{50} + \frac{\pi w}{100}$; es decir que los puntos se encuentran en un arco del tamaño de la primera partición, cuyo punto central es el mínimo parcial. Esto garantiza que, si el mínimo global se encuentra en el punto medio entre dos particiones, éste será un nuevo elemento de la partición. Se vuelve a calcular para cada punto la energía y se encuentra otro mínimo parcial y se repite el proceso ya descrito hasta alcanzar la precisión requerida.

4.3 Pseudocódigo

Se puede implementar este algoritmo en distintos lenguajes de programación si se ofrece su pseudocódigo. Este consiste en una descripción (no específica a lenguaje alguno de programación) bien definido, determinista, finito, no ambiguo que permite posteriormente ser expresado en un lenguaje de programación específico.¹

R_0 , T , y V

Se calcula $G = TV/R_0$

Se solicita la velocidad de primordia $v(r)$

Se solicita la interacción energética $E(d)$

Se genera un arreglo de 500 datos del tipo polar llamado "primordia"

Se genera un arreglo de 100 datos del tipo polar llamado "mínimos"

Para $k = 0$ hasta 499

Para $i = 0$ hasta 99

radio_mínimo_ $i = R_0$

ángulo_mínimo_ $i = \min + \frac{\pi i}{50}$

$i = i + 1$

Para $j = 0$ hasta $j \leq k$

radio_primordia_ $j = \text{radio_primordia_}j + \text{Radio_Primordia}(T-j)$

Para $i = 0$ hasta 99

calcular la energía por partícula

encontrar el mínimo

repetir este proceso hasta la precisión establecida

¹El código fuente de la clase utilizada, así como del programa se encuentran en el apéndice A

4.4 Gráficos

La gráfica 4.1 muestra el diagrama de bifurcación obtenido, para una interacción energética $V = V_0 r(t)$, $E = 1/d$

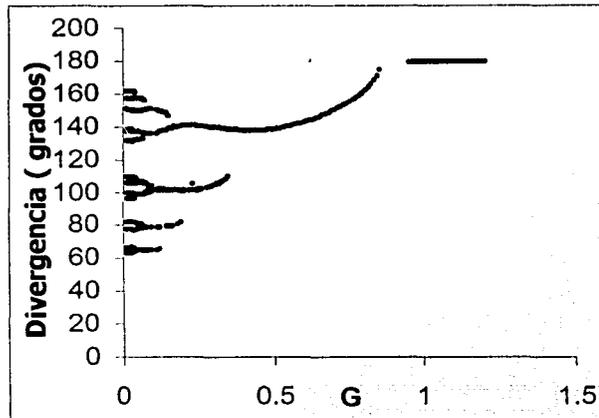


Figura 4.1 Diagrama de bifurcación.

Condiciones iniciales distintas Como se mencionó en el capítulo anterior, para obtener el diagrama de bifurcaciones se deben considerar 3 condiciones iniciales distintas. La gráfica 4.2 muestra un sistema con un valor bajo para $G = 0.01$, así que se puede observar que converge inmediatamente al ángulo áureo. Se consideró un sistema sin elementos iniciales, con el valor de G seleccionado. Se observa que el primer ángulo de divergencia es de 180° , después se da una ruptura de simetría del sistema, y el ángulo es menor. Se observa que el ángulo converge rápidamente. La velocidad e interacción energética resulta poco relevante, ya que se observan los mismos resultados. Para esta gráfica se seleccionó $v(r) = V_0 r(t)$, $E(d) = 1/d^3$.

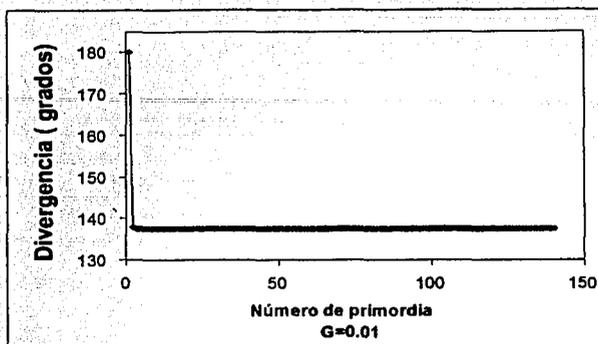


Figura 4.2 Divergencia de un sistema sin elementos previos, para un valor bajo de G (0.01)

Transitorio. Cuando se cambia el valor de G desde un valor inicial hasta el valor de G requerido. Recordemos que este cambio de G , es el que tiene una relevancia biológica debido al decremento continuo de G , y la relación G con la razón plastocrona de Richards α . Se observa que se presenta un transitorio, para después converger a 137.4° . Para esta gráfica se seleccionó $v(r) = V_0 r(t)$, $E(d) = 1/d^3$.

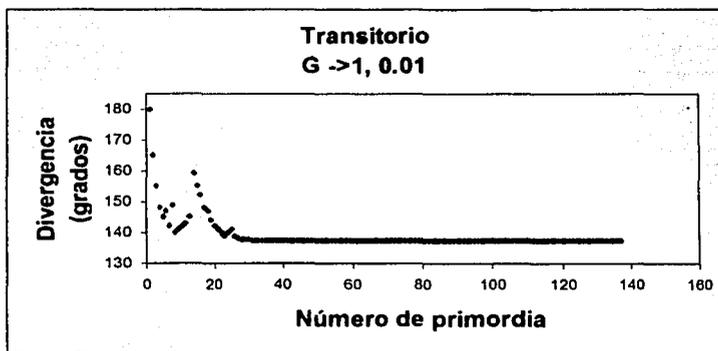
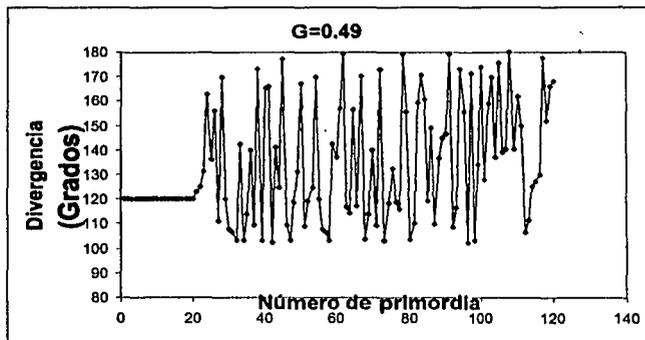


Figura 4.3 Divergencia para un decremento continuo de G .

Condición inicial Para este gráfica, se tiene un patrón inicial forzado, a un ángulo constante. Para el valor seleccionado se ve que no existe solución, no hay convergencia para este par de valores de G y ángulo inicial 120° . Esto se puede ver en el diagrama de bifurcaciones (Figura 4.1). Para este valor de (G, ϕ) , no hay solución.



Interacciones energéticas Las distintas interacciones enrgéticas, se comportan, cualitativamente iguales, sólo cambian los puntos de bifurcación, pero la convergencia al ángulo aúreo, se observa en todos los casos para $G \rightarrow 0$

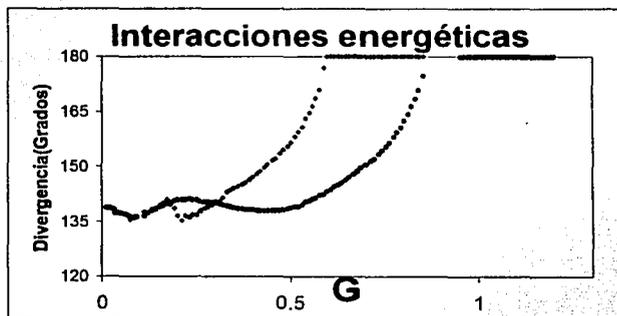


Figura 4.4 Rama continua para dos interacciones energéticas.

En la gráfica 4.4 se muestra $E(d) = 1/d$, $c(d) = \exp(-1/d)$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

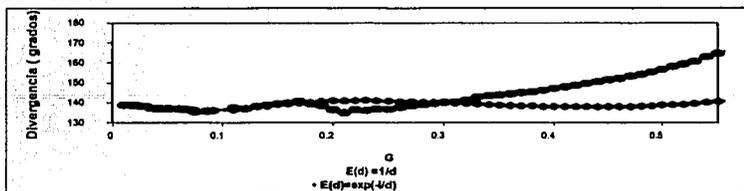


Figura 4.5 Detalle de convergencia para G pequeña.

En la gráfica 4.5 se puede observar un acercamiento de 4.4 para G pequeño.

Observamos que para valores grandes de G existe una diferencia entre las interacciones energéticas, pero para valores de G cercanos a cero, las gráficas son prácticamente indistinguibles. Además, como se puede ver en las dos gráficas anteriores, para distintas interacciones energéticas se tiene el mismo comportamiento cualitativo, y convergen al ángulo áureo con $G \rightarrow 0$. Esto resulta sumamente importante, debido a que, no se sabe realmente, cual es el tipo de interacción que se observa en los primordia. Con ello se pueden modelar esta interacción con distintas leyes de potencia y el comportamiento es el mismo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

60 *CAPÍTULO 4. DESCRIPCIÓN Y RESULTADOS DEL PROGRAMA*

Capítulo 5

Los protectorados en la naturaleza

Se presenta el concepto de protectorado, acuñado por Laughlin y Pines [24], para mostrar que existen en la naturaleza comportamientos colectivos que son independientes de su sustrato material. Además se presentan algunos ejemplos de sistemas que poseen estas propiedades y ,que en su conjunto, constituyen un protectorado.

5.1 Propiedades protegidas

5.1.1 Más es diferente

Philip W. Anderson, Premio Nóbel de Física en 1977, escribió en 1972 un artículo en la revista *Science* llamado "More is different" (Más es diferente)[26]. En ese trabajo, Anderson resalta los cambios en el comportamiento de sistemas con una gran cantidad de componentes fuertemente interactuantes. En este tipo de sistemas, existen propiedades que no están prefiguradas en el comportamiento individual de sus elementos. El principio de superposición, tan valioso para obtener predicciones del comportamiento de muchos sistemas, falla cuando se consideran propiedades emergentes del sistema, pues éstas son producto del comportamiento colectivo.

Además, Anderson señala los límites del programa reduccionista en la ciencia, en general y en la física en particular. Este programa consiste en dividir un sistema de estudio en sus componentes "fundamentales" y analizar

el comportamiento de este elemento (desprovisto de sus entorno). Después de este proceso de análisis, que puede llevar al planteamiento de una(s) ecuación(es) de este elemento, se utiliza el principio de superposición, es decir se suman los componentes individuales y se afirma que el sistema se comporta como la suma de sus comportamientos individuales. A veces, esta visión constituye sólo la primera aproximación (cuando se puede expresar como una respuesta lineal del medio), pero casi siempre se ofrecen las ecuaciones de aquí surgidas como la ley fundamental del sistema.

Con esto no se pretende soslayar la importancia del reduccionismo, ya que con éste se han obtenido avances espectaculares en la física, sino que se pretende señalar sus límites.

Existe una variedad importante, numerosa, de sistemas no necesariamente físicos, que tienen propiedades que trascienden el análisis reduccionista. Estos sistemas exhiben comportamientos que no se pueden predecir a partir de las leyes "fundamentales" encontradas con estos métodos. Generalmente estos sistemas están constituidos por una gran cantidad de elementos y la interacción entre ellos los hace comportarse como un todo, emergen propiedades no previstas. ¡Más, es claramente diferente!

El artículo de Anderson constituyó la primera aproximación de lo que hoy se conoce como la complejidad. Además abrió un nuevo campo de investigación, no sólo en la física sino en la ciencia.

5.1.2 Protectorado cuántico

Laughlin y Pines [28] inventaron un término que sintetizaba las observaciones realizadas en sistemas cuánticos. Ellos se percataron de que existían propiedades que eran robustas, esto significa que la propiedad emerge a pesar de la especificidad de los materiales. Es decir que, ciertos sistemas cuánticos de muchos cuerpos, exhiben propiedades que se mantienen inalteradas a pesar de las impurezas, imperfecciones del material y fluctuaciones térmicas. A estas propiedades las llamaron **propiedades protegidas o protectorado cuántico**.

Posteriormente, Anderson [24] afirmó que la fuente de protección cuántica se encuentra en el estado colectivo del campo cuántico involucrado. Este campo es tal que las partículas están tan estrechamente acopladas que, las excitaciones del sistema no involucran únicamente a unas pocas partículas, sino que se trata de excitaciones colectivas del sistema completo, y dan lugar a un comportamiento macroscópico [28].

Complejidad y propiedades protegidas

Tradicionalmente, la física intenta explicar el mundo, a través de dos descripciones extremas : lo más pequeño, el mundo submicroscópico y lo más grande, escalas cosmológicas. Se considera que los fenómenos que tiene lugar en las escalas intermedias se encuentran entendidas con un grado de certeza razonable (dinámica newtoniana, óptica geométrica, termodinámica). En este cuadro parece sólo cuestión de tiempo y recursos de cómputo para que todos los fenómenos de aquellas entidades intermedias se puedan reconstruir a partir de uno de las leyes estudiados en algunos de los límites de la escala superior o inferior.

Se sabe que existen fenómenos a escala mesoscópica que pueden ser categorizados y descritos por las ecuaciones fundamentales, pero no explicados en términos detallados. Ejemplos de ello son las biomoléculas, tales como las enzimas en estructuras intracelulares que son responsables de muchos procesos biológicos; éstos no pueden ser derivados de las propiedades de sus elementos constituyentes.

Los protectorados cuánticos hicieron a Pines y Laughlin sospechar la existencia de nuevos y aún no descubiertos principios organizacionales que tienen propiedades universales en el sentido de que son independientes de los detalles específicos de las propiedades microscópicas. Estas se llaman propiedades " protegidas" de la materia. Estos estados, se presenta una ruptura de simetría, es decir rompe la homogeneidad estructural para que el sistema presnete auto-organización y constituir así un protectorado. De manera más general un protectorado es un estado estable de la materia que está determinado por un principio organizacional.

Ejemplos de protectorados

Anderson enumera propiedades protegidas de la materia como superfluidez, ferromagnetismo, conducción metálica , " *cuyo comportamiento genérico es prácticamente el mismo de un sistema a otro independiente de los detalles*" [26]

Se puede formular la noción de protectorado de manera más elegante diciendo que se trata de puntos fijos estables del grupo de renormalización. Sin embargo, diremos que un protectorado es un comportamiento que emerge espontáneamente, como una propiedad que no se encuentra prefigurada en los constituyentes materiales; sino que se deben a la interacción entre ellos.

Esta propiedad es estable a pesar de perturbaciones en las ecuaciones de movimiento.

El reduccionismo afirma ser el único método viable para acceder al conocimiento de un fenómeno. Sus inegables éxitos podrían apoyar esta afirmación, pero ante los fenómenos complejos, es decir, con una gran cantidad de elementos interactuantes, se le presenta una dificultad. Por ejemplo, para el cálculo de moléculas de 10 átomos, los recursos de cómputo son insuficientes para producir un cálculo útil en la predicción del comportamiento de esta molécula. Así que, el triunfo del reduccionismo es modesto ya que, es poco factible tomar como punto de partida la ecuación de Schrödinger y tratar de construir moléculas (aunque sean sencillas), ya que para ello se requiere de una capacidad de cómputo que crece exponencialmente con el número de elementos.

Los fenómenos emergentes no violan las leyes microscópicas, pero no parecen ser consecuencia lógica de ellas. Se puede ilustrar con dos ejemplos que muestran que un fenómeno complejo puede seguir leyes independientes del sustrato material en el cual están expresados. Anderson menciona los dos siguientes ejemplos:

i) La ruptura de simetría en líquidos densos de fermiones¹, para formar un par (pares de Cooper) de fermiones que generan en conjunto una propiedad macroscópica, tiene al menos tres expresiones:

a) Electrones en metales; cuando los electrones forman un par de Cooper, modifican la estructura cristalina del material y generan regiones de carga positiva que provocan la formación de un nuevo par y así sucesivamente, dando lugar a la superconductividad.

b) átomos de ³He, el cual se vuelve un superfluido cuando el ³He líquido es enfriado por debajo de $1.3 \times 10^{-3} K$

c) nucleones, tanto en núcleos ordinarios, como en estrellas de neutrones, en donde los nucleones se aparean y se presenta también, el fenómeno de superfluidéz.

En cada uno de estos tres ejemplos diversos se genera un par de fermiones en un fluido.

ii) Por otra parte, se puede hacer una computadora digital utilizando: componentes eléctricos, tubos al vacío (bulbos), transistores, o neuronas (éstas últimas ciertamente son capaces de comportamientos más complejos),

¹ Los fermiones son las partículas con espín semientero. El ejemplo más conocido de un fermión es el electrón (espín = 1/2)

pero todos los anteriores tienen la capacidad de computabilidad.

Esto significa que las reglas que gobiernan la computabilidad no dependen del sustrato material del cual están expresados. Es decir que la capacidad de cómputo es una propiedad protegida.

Adicionalmente, a estos ejemplos, podemos encontrar que el ferromagnetismo, también es una propiedad protegida.

5.1.3 Protectorados clásicos

La autoorganización y la protección no son fenómenos inherentes a los fenómenos cuánticos, suceden lo mismo con sistemas cuya temperatura o escala de frecuencia son tan grandes que los efectos cuánticos no son observables. Por ejemplo, el fenómeno de turbulencia es otro protectorado ya que los flujos y vórtices, característicos de la turbulencia son independientes del fluido.

La existencia de protectorados clásicos sugiere la posibilidad de que tales principios podrían ser incluso válidos en la biología. Además, los protectorados y propiedades protegidas permiten la existencia de modelos matemáticos; ya que éstos soslayan la especificidad, privilegiando la dinámica, es decir, los procesos.

La existencia de la auto-organización, Cuando se produce una ruptura de simetría, la homogeneidad se ve modificada y emergen procesos espontáneos de organización y forman estructuras globales coherentes. El sustrato material de un sistema resulta poco relevante. Existen propiedades protegidas en la naturaleza, que, con independencia de su constitución material, generan la misma dinámica.[6]

5.2 Ejemplo de protectorados clásicos

Uno de los ejemplos más ampliamente divulgados de un protectorado[14] lo constituye la forma de el crecimiento de bacterias *Bacillus subtilis*, el crecimiento de iones de zinc, simulación numérica del crecimiento por difusión agregación limitada. Si miramos las fotografías de abajo, se puede ver que tienen características comunes tales como que los tres casos se trata de fractales y además tienen la misma dimensión.[6]

En todos estos casos se trata de agregados fractales que tienen distintos escalas y ámbitos pero comparten su forma. Por ejemplo, en el caso de crecimiento de iones de zinc, se tiene una disolución de sulfato de zinc en

medio de dos placas de vidrio a las que se les somete a una diferencia de potencial entre el centro y un extremo de ellas. El proceso de agregación limitada por difusión (DLA, por sus siglas en inglés) es un mecanismo para explicar el crecimiento de agregados fractales. La difusión de partículas en un medio es el principal condicionante para la formación de patrones, tanto en el caso de los iones de zinc, como en el crecimiento de la bacteria. La idea consiste en suponer, que se encuentra un conjunto inicial, y que a partir de éste una partícula, moviéndose en una caminata aleatoria ², al tocar un punto de este agregado inicial se queda adherida permanentemente, y de esta manera comienza a crecer este agregado. Esta explicación sirve igual para ambos fenómenos.

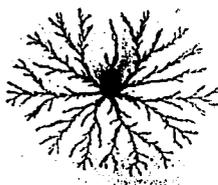


Figura 5.1 *Bacillus subtilis*. Figura tomada de Miramontes (2000)

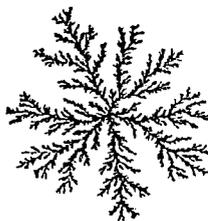


Figura 5.2 Agregación por difusión limitada. Figura tomada de Miramontes (2000)

5.2.1 La vía intermedia

Para describir una molécula de agua, la teoría más adecuada, por su exactitud y pertinencia es la mecánica cuántica. Sin embargo, para describir una gota de agua, que tiene típicamente 10^{23} moléculas utilizamos la hidrodinámica.

²Una caminata aleatoria es un método para simular un proceso de difusión

Si queremos referirnos a un fluido de estas mismas gotas utilizamos las leyes de Newton o alguna de sus formulaciones equivalentes como los formalismos Lagrangiano o Hamiltoniano.

Con este ejemplo queda de manifiesto un procedimiento común en la física, cambiar, dependiendo de la escala, a la teoría más adecuada para la descripción de un sistema. La física aborda con distintos modelos, es decir herramientas metodológicas, cuando se cambia de escala, a pesar de tratarse del mismo componente material. Existe una brecha entre los fenómenos microscópicos y los fenómenos macroscópicos. Los niveles de descripción son distintos. La pregunta es que si existen principios organizacionales que pudieran funcionar a nivel mesoscópico, por ejemplo, en las formas vivas.

La existencia de protectorados mesoscópicos y la búsqueda de la existencia de los principios organizacionales constituye lo que Pines y Laughlin llaman la **vía intermedia**.

En el ámbito no biológico, existen comportamientos interesantes, todavía no bien entendidos que se manifiestan como procesos de autorganización. La pregunta consiste en saber si existen principios organizacionales a nivel mesoscópico en el ámbito biológico.

Laughlin y Pines[28] afirman que surgirá una nueva ciencia empírica, no reduccionista, basada en las observaciones y experimentos y que no dependa de especulaciones deductivas de primeros principios microscópicos.

5.3 Un estudio de caso: la filotaxia

5.3.1 Superconductores

Los superconductores son materiales que tienen la propiedad de que, bajo ciertas circunstancias pueden conducir electricidad sin pérdida de energía. Es decir, tiene una resistencia eléctrica igual a cero.

En materiales metálicos los electrones se encuentran en los orbitales más alejados, así que se puede considerar que estos electrones están muy poco vinculados al núcleo, así que se llaman electrones libres y son los electrones de conducción. Es decir, son los que forman la corriente eléctrica cuando se aplica una diferencia de potencial entre dos puntos del material.

En 1957, Bardeen, Cooper y Schrieffer, ganadores del Premio Nóbel en 1972, dan a conocer su teoría de la superconductividad que permite explicar esta propiedad, hasta ese entonces, insuficientemente explicada.

Para que un material presente la propiedad de superconducción se debe bajar su temperatura. Los materiales superconductores tienen asociada una temperatura crítica T_c , a partir de la cual se vuelven materiales superconductores para $T < T_c$. Desde el punto de vista termodinámico esta transición de conductor a superconductor es un cambio de fase.

Además de su temperatura crítica se le asocia a cada material una densidad de corriente crítica J_c , de tal manera que, con corrientes mayores que J_c , el material no es superconductor. La corriente eléctrica en un material genera, a su vez, un campo magnético alrededor del éste.

Diamagnetismo y Efecto Meisner

Cuando la temperatura se baja a T_c , en presencia de un campo magnético externo el material superconductor repele todas las líneas de campo magnético externo de su interior. A esta propiedad se le llama día magnetismo. Esta es la propiedad macroscópica fundamental de los superconductores. Esta propiedad genera uno de los efectos más reconocidos de la superconductividad, como es el efecto Meissner. Cuando un imán es colocado en la cercanía de un material superconductor, en su estado de superconductividad, debido a que repele todas las líneas de campo magnético, el imán "levita" por encima de dicho material.

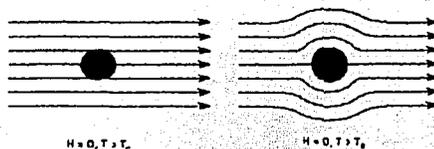


Figura 5.3 Diamagnetismo de un superconductor

Tipos de superconductores I y II

Los superconductores del tipo I son materiales puros con temperaturas críticas muy bajas. Los conductores del tipo II son cerámicos de altas temperaturas como $YB_2Cu_3O_7$, Bi_2CaSr_2 o Cu_2O_4 que son materiales con temperaturas críticas relativamente altas es decir acreedor de 90 K

En la gráfica se muestra un estado comprendido entre dos temperaturas H_{c1} y H_{c2} que constituyen el estado mixto de un superconductor. Debajo de H_{c1} el material es un superconductor y repele todas las líneas de campo magnético externo. Entre H_{c1} y H_{c2} algunas de esas líneas logran penetrar la material a este estado se le llama mixto. Cuando esto sucede algunas líneas de campo puede ser atrapadas en defectos de la estructura cristalina del material. A esto se le llama que el flujo se fija en el material. A los puntos donde la líneas de flujo penetran, siguiendo la analogía con los fluidos, se les llama vórtices.

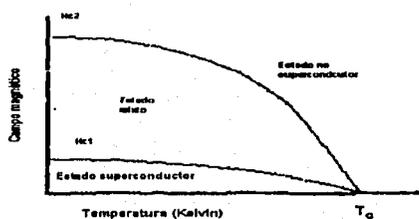


Figura 5.4 Estado mixto de un superconductor

La profundidad de penetración es la longitud característica del decaimiento del campo magnético debido a las corrientes en la superficie. La longitud de coherencia es la distancia mínima en la cual se establece la superconductividad. La razón entre estas dos cantidades es el parámetro de Ginzburg-Landau, Si este valor es menor que 0.7 no se permite la penetración de las líneas de campo en el material.

Las corrientes que se arremolinan alrededor de estos vórtices son paralelos al campo magnético aplicado. Estos se constituyen en momentos magnéticos, se repelen unos a otros y se acomodan en un arreglo geométrico.

Las líneas de flujo penetran a un estado mezclado. En materiales isotrópos los vórtices se arreglan en un a estructura hexagonal. En materiales anisotrópicos los arreglos de vórtices forman estructuras diversas.

Conductores en capas

Los superconductores de altas temperaturas, son materiales cristalinos que se pueden modelar mediante la suposición de que están compuestos de planos superconductores muy delgados débilmente acoplados, mediante capas intermedias de aislantes (Efecto Josephson). Estos aislantes constituyen una

barrera de potencial que, debido al efecto túnel los electrones pueden pasar entre las capas de potencial.

5.4 Superconductores y filotaxia

Aparentemente la filotaxia y los superconductores son fenómenos muy distintos. Uno es una propiedad emergente de los electrones en un metal a bajas temperaturas; y el otro es un fenómeno biológico. Sin embargo en 1991, Levitov reportó en un artículo [21] una asombrosa relación entre estas dos propiedades de la materia. Levitov además de ser un físico muy destacado, ha elaborado también, al mismo tiempo que Douady y Couder, un modelo de filotaxia. Así que no resulta extraño que haya encontrado vínculos entre estos dos campos.

La geometría de los arreglos de vórtices en superconductores de capas

En el artículo de Levitov se describe un modelo de superconductores en capas, en un estado mixto, al cual se le aplica un campo magnético externo, estableciéndose un arreglo de vórtices, que a medida que va cambiando el campo magnético se genera una dinámica de repulsión entre los vórtices, que atraviesan una serie de transiciones correspondientes a diferentes formas de seleccionar la distancia mínima. La dinámica de estas transiciones está caracterizada por pares de números consecutivos de la serie de Fibonacci.

En este modelo un superconductor en capas la longitud de correlación ζ_0 es comparable al espacio entre capas d . Además supone también que el campo magnético H y los vórtices son paralelos a las capas de superconductores. Con estas condiciones se procede como sigue:

- i) Se baja la temperatura T mientras se mantiene el campo H constante
- ii) Se baja el campo magnético H a T constante.

Se empieza con $T > T_c$ y $H_{c1} < H < H_{c2}$

Cuando se baja la temperatura a $T = T_c$ emerge la superconductividad y aparecen vórtices. Ahora a temperaturas bajas ($T < T_c$) se varía H , los vórtices se mueven libremente sólo en los planos separatrices de las capas y, debido a esto, se desarrolla una inestabilidad para algún H_0 . Por debajo de este valor H_0 se generan sucesiones de números de Fibonacci.

Los arreglos geométricos iniciales consisten de arreglos periódicos de vórtices alineados a lo largo de los planos de las capas, puesto que los vórtices se pueden mover únicamente en los planos $b \gg d$. Se genera una dinámica de repulsión entre los vórtices. Se obtiene por ello una función $W_x(a)$ que indica la repulsión de los vórtices dada por la siguiente ecuación

$$W_x(\alpha) = -Z_1 \sum \frac{\text{sen}^2(\pi\alpha n)}{\text{senh}^2(nx) + \text{sen}^2(\pi\alpha n)} \frac{\text{coth}(nx)}{nx} \quad (5.1)$$

con α , distancia interplanar, y Z_1 constante característica del material.

Si se grafican los mínimos de W_x como funciones de x , se obtiene un diagrama de bifurcaciones. La trayectoria del mínimo que empieza con $\alpha = 1/2$ pasa a través de bifurcaciones de $1/2$, $2/3$, $3/5$, $5/8$, $8/13$, es decir nuevamente numerador y denominador son números consecutivos de la serie de Fibonacci; el límite como ya sabemos de esta sucesión de fracciones es ϕ^{-1} . La única rama de este diagrama de bifurcaciones que es continua es la que converge a ϕ^{-1} . Las transiciones o bifurcaciones de este sistema corresponden aun mínimo global en la energía del arreglo de vórtices, este resultado coincide con el modelo propuesto por Levitov para la filotaxia, en donde se alcanza un mínimo global para un arreglo de primordia sobre la superficie de un cilindro.

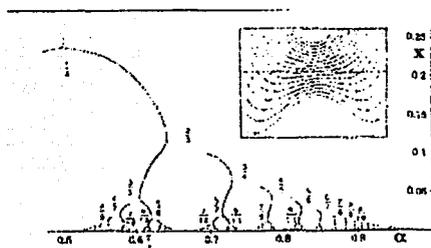


Figura 5.5 Diagrama de mínimos en el arreglo de vórtices en un superconductor en capas. Figura tomada de Levitov (1991)

Cadenas polipeptídicas

En 1954 A. Frey Wyssling [18] describió los ángulos de divergencia de los residuos de aminoácidos en un polipéptido. Las proteínas son compuestos orgánicos básicos de todo organismo formadas por aminoácidos. Las proteínas

se forman como macromoléculas polipeptídicas (es decir son aminoácidos unidos mediante enlaces péptidos)

La mayor parte de las proteínas se forma con 20 clases diferentes de aminoácidos. Interacciones entre los aminoácidos provocan que la forma en la que se enrollan las cadenas polipéptidos son hélices denominadas hélices α . Los ángulos de los enlaces caracterizan a la cadena. En las proteínas la forma de las cadenas polipeptídicas de la divergencia es decir el ángulo expresado como fracción de vuelta. La secuencia de divergencia de las cadenas polipeptídicas (polialanina, poli γ -metil-*glutamato*) tiene la siguiente secuencia de índices foliares 5/18, 8/29, 13/47. La extrapolación de esta serie sugiere que existen términos

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{11}\right), \frac{5}{18}, \frac{8}{29}, \frac{13}{47}, \dots \quad (5.2)$$

Analizando en términos del trabajo de Jean (1990) las series de tipo Fibonacci en la filotaxia se pueden escribir como

$$J < 1, t, t + 1, 2t + 1, 3t + 2, \dots > \quad (5.3)$$

con $J \geq 1$ representa el número de espirales generatrices del sistema, $t \geq 2$ es un entero. El siguiente elemento de la serie en t se obtiene sumando los dos elementos previos. Por ejemplo para la serie de Fibonacci original $J = 1, t = 2$. El ángulo de divergencia θ para cada una de estas series, se obtiene con la siguiente expresión

$$\theta = \left[J \left(t + \frac{1}{\phi} \right) \right]^{-1} \quad (5.4)$$

Para la serie encontrada por Frey-Wyssling $J = 1$ y $t = 3$. Por lo que el ángulo al cual converge es $\theta = (3 + \phi^{-1})^{-1} = (3\phi + 1/\phi)^{-1} = \frac{\phi}{3\phi + 1}$.

La similitud con respecto a la filotaxia se encuentra en la similitud geométrica de un arreglo la máxima compacidad de objetos idénticos alrededor de una hélice y el arreglo espiral sobre un cilindro de los patrones filotáxicos. En el caso de la filotaxia los arreglos son las protuberancias, hojas (primordia) y en las proteínas son aminoácidos en un arreglo espiral.

Microtúbulos

Un monómero es una molécula que puede reaccionar con otras moléculas del mismo u otro componentes para formar moléculas más grandes o polímeros.

Así, los polímeros son moléculas muy grandes formadas de monómeros enlazados. Los microtúbulos son tubos huecos y delgados que sirven de soporte para la estructura celular. Se enrollan en dímeros para formar un microtúbulo. Erickson [33] utilizó el modelo de van Iterson de 1907 para describir el arreglo de los monómeros en los microtúbulos de algunos organismos como la flagella bacteria, los micofilamentos de actina, y las cubiertas protéicas de los virus. De acuerdo con Erickson la terminología de la filotaxia es adecuada para describir los arreglos de los monómeros de los microtúbulos de muchos organismos. Como se mencionó en el Capítulo I, van Iterson realizó estudios sobre la forma de arreglar esferas sobre la superficie de un cilindro. En la figura 5.6 se muestran la aplicación del trabajo de van Iterson para el análisis de la simetría de microorganismos. Se observan claramente las parastiquias. En el centro se observa la transición de una filotaxia $9/2$ a $8/5$. La figura de la derecha es la proteína del virus mosaico del tabaco. El patrón observado en la izquierda se trata de la salmonela.

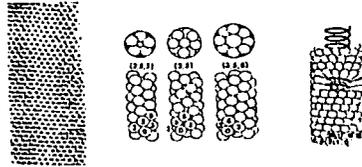


Figura 5.6 Estudios de los patrones en esferas sobre cilindros (van Iterson 1907), arreglos de microorganismos Figura tomada de Erickson (1973)

Patrones de bacterias móviles

Budrene y Berg (1991) encontraron similitudes en los patrones de manchas generadas por la bacteria *Escherichia coli* y los que se encuentran en los girasoles cuando se genera una dinámica de elementos idénticos que se repelen en un volumen v .

Las bacterias se mueven debido a los gradientes de una sustancia química que funciona como atractor que las mismas células excretan. Los patrones espaciales se forman dependiendo de las condiciones iniciales a partir de la

interacción de agregados que se expanden radialmente. Con ciertas condiciones iniciales, se genera un patrón como el de la cabezuela de un girasol. Se forman espirales a favor y en contra de las manecillas del reloj y el ángulo entre ellos es nuevamente el ángulo áureo.

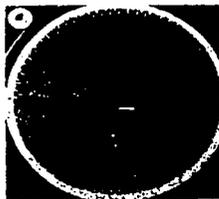


Figura 5.7 Patrón de bacterias móviles. Figura tomada de Budrene y Berg (1991)

Discusión y conclusiones

Se han observado que, ciertos fenómenos naturales tienen la tendencia a organizarse en forma de entes discretos que interactúan entre sí. Es importante, por lo tanto reconocer que, a pesar de la enorme cantidad y diversidad de fenómenos que se pueden clasificar como sistemas de este tipo no existe una multiplicidad de comportamientos, sino que existen propiedades genéricas, que son independientes del sustrato material del sistema. Es esta la característica más valiosa de estos sistemas; ya que permite abordar un problema de manera muy general, soslayar la especificidad del sistema para concentrarse en sus propiedades genéricas, que son resultado de la dinámica.

Los ejemplos anteriores en patrones de bifurcaciones, arreglos de mínima energía, o de compatibilidad óptima tienen sustratos materiales muy diversos: primordia en una planta vascular, dipolos magnéticos, arreglos de vórtices en un superconductor, bacterias interactuando con sustancias, arreglos de microtúbulos y cadenas polipeptídicas. Además de la variedad de estos sistemas también se presentan éstos fenómenos en distintas escalas. Con los ejemplos anteriormente mostrados, podemos afirmar que el fenómeno de la filotaxia es una propiedad protegida de la naturaleza.

Observemos cuál es la propiedad común a los sistemas anteriormente descritos. Como se había manifestado en el Capítulo 2 en los distintos modelos de la filotaxia, la dinámica es la responsable de la formación de patrones. La dinámica que subyace a estos fenómenos tan diversos se puede modelar

como objetos idénticos que se repelen entre sí. En la simulación numérica, el experimento de Douady y Couder, el crecimiento de bacterias, la interacción de vórtices esta dinámica es muy clara. Ya que se trata en algunos casos de repulsión electromagnética, o los efectos de un potencial químico. En el caso de arreglos geométricos el hecho de que sean elementos con dimensiones, a diferencia de las partículas puntuales de los ejemplos anteriores, provoca que , como en el caso del modelo de van Iterson, que exista un especie de "repulsión" entre los vecinos más cercanos, provocando así una dinámica similar.

La conjetura de Lee y Levitov, se hace presente, ya que tenemos una dinámica similar, y ésta es el mecanismo mediante el cual se generan patrones similares en sistemas con naturaleza distinta, con representaciones geométricas distintas, escalas diversas, pero generan los mismos patrones espaciales. D'arcy Thompson lo expresa de manera muy elegante:

"Las espléndidas configuraciones producidas por el ordenado arreglo de las hojas o flósculos en un tronco o en un capítulo han sido objeto de admiración y curiosidad, que no sólo se limita al orden de estos arreglos, sino al pequeño número posible de arreglos que se pueden observar y reconocer" [4]

Con respecto a la filotaxia, aún no se encuentran los mecanismos fisiológicos responsables de la interacción que, como sabemos, se verán reflejados en la dinámica de interacción de primordia. Por ello el concepto de protectorado es útil, ya que podemos recurrir al sistema dinámico más transparente(más sencillo), al fenómeno más conocido, para estudiar no sólo ese sistema , sino la propiedad global que comparte con los otros.

La simulación numérica realizada, permite mejorar la precisión alcanzada por el algoritmo reportado por Douady y Couder. Además permite comparar la convergencia de las distintas interacciones energéticas. También, se muestra la forma en la que se puede generar el diagrama de bifurcaciones, mostrando los resultados para las distintas condiciones iniciales que permiten, estudiar la convergencia de este sistema dinámico a los puntos estables.

Por otra parte, existen equivalencias aún no demostradas de que la capacidad óptima en un arreglo, implica el arreglo global de mínima energía de espirales sobre un cilindro. O que el arreglo global de mínima energía (Levitov), equivale al arreglo local de mínima energía (Douady y Couder); o que estos dos modelos son equivalentes al modelo de Jean de la minimización de la entropía. Ciertamente estos últimas equivalencias parecen plausibles debido

a las relaciones existentes entre la energía global y la entropía en un sistema termodinámico: en un estado de equilibrio estable la energía se minimiza, mientras que la entropía alcanza su valor máximo. Estas demostraciones constituyen una tarea a futuro.

Finalmente sin pecar de fiscalista, quisiera concluir con una cita de R. Jean de 1978, que refleja las esperanzas puestas en el estudio de los sistemas biológicos desde la perspectiva de las matemáticas y la física

”La fascinante pregunta: ¿ por qué la serie de Fibonacci aparece en el número de espirales en las plantas?, constituye el núcleo de los problemas en la morfología de las plantas. En física atómica, la serie de Balmer abrió el camino a la teoría atómica de Niels Bohr y después a la mecánica cuántica y a la electrodinámica cuántica. La gran esperanza de los biomatemáticos es que algún día , puedan ser capaces de hacer para la biología lo que han hecho los físico-matemáticos en la física” (R.V. Jean , 1978)

Capítulo 1

Código Fuente

```
include <iostream.h>
# include <math.h>
# include <conio.h>
# include <stdio.h>
# include ''polar.h''
# include <fstream.h>
# include <stdlib.h>
const double PI = 2 * asin(1);
const int NUM_CIRCULO = 100;
const int NUM_PRIMORDIA = 10;
void elegir_G( double&,double&,double&,double&);
void elegir_ley_velocidad( int&);
void elegir_ley_energia(int&);
void inicializar_arreglo( double [NUM_CIRCULO]);
int encontrar_indice_minimo(double [NUM_CIRCULO]);
int main()
{
    Polar circulo[NUM_CIRCULO];
    Polar posiciones[NUM_PRIMORDIA];
    double energias[NUM_CIRCULO];
    double divergencia[NUM_PRIMORDIA];
    double T0,V0,R0,G;
    double angulo_min;
    int existentes, cod_energia, cod_velocidad, indice_min;
    ofstream archivo_salida;
```

```

char nombre_archivo [256];
elegir_G(T0,V0,R0,G);
elegir_ley_velocidad(cod_velocidad);
elegir_ley_energia(cod_energia);
cout <<'\n\tIntroduce el nombre y direcci\UNICODE{0xf3}\n del archivo de
cin >>nombre_archivo[256];
archivo_salida.open(nombre_archivo);
if ( archivo_salida.fail())
{
cout <<''\n\tNo se puede abrir el archivo de salida ''';
exit (1);
}
posiciones[0].asignar(R0,0);
existentes = 1;
// for ( int n = 0; n < NUM_CIRCULO ; n++)
for ( int p = 0; p < NUM_PRIMORDIA; p++)
{
// Asigna las nuevas posiciones seg\UNICODE{0xfa}\n la ley de velocidad de
//de T0 unidades de tiempo
if ( cod_velocidad == 1)
for ( int i = 0; i < existentes ; i++)
ajustar_posiciones_1(T0,V0,R0, posiciones[i], existentes, i);
else if ( cod_velocidad == 2)
for ( int i = 0; i < existentes ; i++)
ajustar_posiciones_2(T0,V0,R0, posiciones[i], existentes, i);
else if ( cod_velocidad == 3)
for ( int i = 0; i < existentes ; i++)
ajustar_posiciones_3(T0,V0,R0, posiciones[i], existentes, i);
//Genera 100 puntos en el circulo de radio R0 distribuidos
// regularmente
for ( int i = 0; i < 100; i++)
circulo[i].asignar(R0, 2* PI * i /100);
for ( int k = 1; k < 2; k++)
{
inicializar_arreglo(energias);
// Calcula la energ\UNICODE{0xed}\n a sobre c/u de los puntos del circulo RC
if ( cod_energia == 1)
for ( int i = 0; i < NUM_CIRCULO ; i++)

```

```

for ( int j = 0 ; j < existentes ; j++)
energias[i] += ley_energia_1 ( circulo [i],
posiciones [j]);
else if ( cod_energia == 2)
for ( int i = 0; i < NUM_CIRCULO ; i++)
for ( int j = 0 ; j < existentes ; j++)
energias[i] += ley_energia_2 ( circulo [i], posiciones [j]);
else if ( cod_energia == 3)
for ( int i = 0; i < NUM_CIRCULO ; i++)
for ( int j = 0 ; j < existentes ; j++)
energias[i] += ley_energia_3 ( circulo [i], posiciones [j]);
indice_min = encontrar_indice_minimo(energias);
angulo_min = circulo[indice_min].devolver_angulo();
// Genera 100 puntos distribuidos regularmente alrededor
//del m\UNICODE{0xed}nimo parcial
for ( int i = 0; i < NUM_CIRCULO; i++)
circulo[i].asignar(R0, angulo_min + 2 * PI * i / pow(100, k + 1) +
- PI / pow( 100,k));
}
cout << angulo_min << " ";
posiciones[p+1].asignar (R0,angulo_min);
divergencia[p] = angulo(posiciones [p+1] ,posiciones [p]);
existentes++;
archivo_salida << posiciones [p].devolver_radio''\t''
<<posiciones [p].devolver_angulo''\t''<< divergencia[p] << endl;
//V0 = V0/(100 - n -1 );
}
for ( int i = 0; i < NUM_PRIMORDIA ;i++)
posiciones[i].desplegar( );
cout << G;
getche();
return 0;
}
void elegir_G( double& R0,double& V0,double& T0,double& G)
{
cout <<''\n\tIntroduce el valor del radio inicial del apex (R0) :'';
cin >> R0;
cout <<''\n\tIntroduce el valor de la velocidad inicial (V0) :'';

```

```

cin >> V0;
cout << '\n\tIntroduce el periodo de aparicion (T0) :';
cin >> T0;
G = T0 * V0 / R0;
clrscr();
}
void elegir_ley_velocidad( int& cod_velocidad)
{
do
{
cout << '\n\tElige una ley de velocidad (1,2,3) : '
<< endl << endl << endl
<< '\n\tV(r) = V0 * r / R0 (1) '
<< endl << endl << endl
<< '\n\tV(r) = V0 (2) '
<< endl << endl << endl
<< '\n\tV(r) = V0 * R0 / r (3) '
<< endl << endl << endl;
cin >> cod_velocidad;
}
while ( !((cod_velocidad == 1) ||(cod_velocidad==2)||
(cod_velocidad == 3)));
clrscr();
}
void elegir_ley_energia(int& cod_energia)
{
do
{
cout << '\n\tElige una ley de energia (1,2,3) : '
<< endl << endl << endl
<< '\n\tE(d) = 1 /d (1) '
<< endl << endl << endl
<< '\n\tE(d) = 1/(d*d*d) (2) '
<< endl << endl << endl
<< '\n\tE(d) = exp(-d / 1) (3) '
<< endl << endl << endl;
cin >> cod_energia;
}
}

```

```
while ( !((cod_energia == 1) ||(cod_energia==2)||
(cod_energia == 3)));
clrscr();
}
void inicializar_arreglo( double energias [NUM_CIRCULO])
{
for (int i = 0; i < NUM_CIRCULO; i++)
energias[i] = 0.0;
}
int encontrar_indice_minimo(double energias [NUM_CIRCULO] )
{
double minimo = energias[0];
int indice = 0;
for ( int i = 1; i < NUM_CIRCULO;i++)
if ( energias[i] < minimo)
{minimo = energias[i];
indice = i;
}
return ( indice);
}
```


Capítulo 2

Anexo B Clase Polar

```
# include <iostream.h>
# include <conio.h>
# include <math.h>

class Polar
{
protected:

    double radio;
    double theta;

public:

    Polar( double =0.0, double =0.0);
    void desplegar();
    void asignar(double , double);
    void asignar_radio( double);
    void asignar_angulo(double angulo);
    double devolver_radio();
    double devolver_angulo();

    friend double angulo (Polar&, Polar&);
    friend double distancia (Polar&, Polar&);
```

```
friend double ley_energia_1 (Polar&, Polar& );
friend double ley_energia_2 (Polar&, Polar& );
friend double ley_energia_3 (Polar&, Polar& );

friend void ajustar_posiciones_1 (double,double,double, Polar& , int&
friend void ajustar_posiciones_2 (double,double,double, Polar& , int&
friend void ajustar_posiciones_3 (double,double,double, Polar& , int&

};

Polar::Polar( double r, double angulo)
{
    radio = r;
    theta = angulo;
}

void Polar :: desplegar()
{
    cout <<'\n\tLas coordenadas polares son: ' << endl
         <<'\n\t r = ' << radio <<'\t theta = ' << theta << endl;
}

void Polar::asignar ( double r, double angulo)
{
    radio = r;
    theta = angulo;
}

void Polar::asignar_angulo(double angulo)
{
    theta = angulo;
}

void Polar:: asignar_radio(double r)
{
    radio = r;
```

```
}

double Polar::devolver_radio()
{
    return radio;
}

double Polar::devolver_angulo()
{
    return theta;
}

double angulo (Polar& p1, Polar& p2)
{
    return ( fabs(p1.theta -p2.theta));
}

double distancia (Polar& p1, Polar& p2)
{
    return ( sqrt ( p1.radio* p1.radio + p2.radio * p2.radio -
        2 * p1.radio * p2.radio * cos ( angulo(p1,p2))));
}

double ley_energia_1 (Polar& c, Polar& pi )
{
    double energiai;

    energiai = 1/(distancia(c,pi));
    return (energiai);
}

double ley_energia_2 (Polar& c, Polar& pi )
```

```

{
    double energiai;

    energiai = 1/pow((distancia(c,pi)),3);
    return (energiai);
}

double ley_energia_3 (Polar& c, Polar& pi)
{
    double energiai;
    const double ele = 0.001;

    energiai = exp((-distancia ( c,pi))/ele);
    return (energiai);
}

void ajustar_posiciones_1 (double te0,double ve0,double erre0, Polar& p
    int& num_elementos, int& ent)
{
    pi.radio = erre0 * exp( ve0 * te0 * (num_elementos - ent)/ erre0);
}

void ajustar_posiciones_2 (double te0,double ve0,double erre0, Polar&
    int& num_elementos, int& ent)
{
    pi.radio = ve0 *(num_elementos - ent)*te0 + erre0;
}

void ajustar_posiciones_3 (double te0, double ve0,double erre0, Polar&
    int& num_elementos, int&
        ent)
{
    pi.radio = sqrt ( 2*erre0 * (ve0 * (num_elementos - ent) * te0 + erre0

```

));
}

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Bibliografía

- [1] J. F. Gies, Thomas Y. Crowell,(1969) *Leonard de Pisa and the New Mathematics of the Middle Ages* Crowell Publishers.
- [2] H. E. Huntley (1970), *The Divine Proportion. A Study in Mathematical Beauty*, Dover, New York.
- [3] Plutarco (1977), Porrúa, México.
- [4] D'Arcy Thompson,(1942) *On Growth and Order*,Cambridge University Press, London
- [5] Esteva, Lourdes y Falconi, Manuel (compiladores). *Biología Matemática. Un enfoque desde los sistemas dinámicos*, (2002), México, Las prensas de ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM.
- [6] Cocho, Germinal; Miramontes, Pedro. (2000) "Patrones y procesos en la naturaleza. La importancia de los protectorados", Ciencias, 59, pp 12-20.
- [7] Couder, Y., Douady, S.:(1992) "Phyllotaxis as a physical self-organized growth process", Phys. Rev. Lett. 68 2098-2101
- [8] Couder, Y., Douady S.(1996) "Phyllotaxis as a Dynamical Self Organizing Process. Part II: The Spontaneous Formation of a Periodicity and the coexistence of Spiral and Whorled Patterns",J. theor. Biol., 178, 275-294
- [9] Couder, Y., Douady S.(1996) "Phyllotaxis as a Dynamical Self Organizing Process. Part I: The Spiral Modes Resulting from Time-Periodic Iterations",J. theor. Biol., 178, 255-274

- [10] Couder, Y., Douady S.(1996) "*Phyllotaxis as a Dynamical Self Organizing Process. Part III: The Simulation of the Transient Regimes of Ontogeny*", J. theor. Biol., 178, 295-312
- [11] van Iterson G., "*Mathematische und mikroskopisch-Anatomische Studien über Blattstellungen, nebst Betrachtungen über den Schalenbau der Miliolinen*", (Gustav-Fischer-Verlag, Jena , 1907)
- [12] Jean, R.V., "*Phyllotaxis. A Systemic Study in Plant Morphogenesis*" (Cambridge University Press, Cambridge , 1994)
- [13] Koch A. J.; Guerreiro J ., Bernasconi, "*An analytic model of phyllotaxis*", J. Phys. I (France) 4 (1194) 187-207
- [14] Miramontes, Pedro. (1996) "*La geometría de las formas vivas*", Ciencias, 42, pp 12-19
- [15] Xirau, Ramón.(2001) "*Introducción a la historia de la filosofía*", UNAM, México.
- [16] Kappraff J.,(1998) "*Mathematics Beyond Measure: A random Walk through in Nature*", Myth, and Number(McGraw-Hilll, New York)
- [17] Stewart, Ian.,(1997) "*From Here to Infinity*". John Wyley and Sons Inc.
- [18] Frey-Wyssling, A (1954) "*Divergence in Helical Polypeptide Chains and in Phyllotaxis*" Nature,Vol. 173, pp 596.
- [19] Meinhardt, H., *Models of Biological Pattern Formation* (Academic Press, London, 1982)
- [20] Rothen F., et al. "*Phyllotaxis or the properties of spiral lattices. II. Packing of circles along logarithmic spirals*", J. Phys (France) 50 (1989) 1603-1621.
- [21] Levitov, L.S. (1991), "*Phyllotaxis of Flux Lattices in Layered Superconductors*" Physical Review Letters, Vol. 66, Num. 2, pp 224-227.
- [22] Crutchfield, James, (1994) "*Is Anything Ever New? Considering Emergence*" Integrative Themes, G. Cowan, D. Pines and D. Melzer, editors, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity XXI, Addison Wesley, Reading, MA

- [23] Anderson, Philip, (1991) "*Is Complexity Physics? Is it Science? What is it?*" *Physics Today*, July 1991, pp 9-10
- [24] Anderson, Philip (2000) "*The Charge-Spin Separated Fermi Fluid in the High T_c Cuprates: A Quantum Protectorate*"
- [25] Laughlin, R,B; Pines David,(2001) "*The Quantum Criticality Conundrum*"
- [26] Anderson, Philip,(1995) "*Physics: The opening to complexity*" *Proc. Natl. Acad. Sci.* Vol. 92, pp 6653-6654
- [27] H. Airy, *On leaf arrangement*, *Proc. R. Soc.* 1, 21, (1873) 176-179.
- [28] Laughlin, R.B, Pines D, Schmalian, J, Stojkovi, Branko, Wolynes, P. "*The Middle Way*", *Proc. Natl. Acad. Sci.* Vol97, Issue 1, 32-37, January 4, 2000.
- [29] Adler I, (1974) "*A model of contact pressure in phyllotaxis*". *J. theor. Biol.* 45, 79
- [30] Bravais, L. Bravais, A. (1873a) "*Essai sur la disposition des feuilles curvisériées*". *Ann. Sci. Nat.* 12, pp. 5-14.
- [31] Bravais, L. Bravais, A. (1873b) "*Essai sur la disposition symétrique des inflorescences*". 193-221; *Ann. Sci. Nat.* 8, 11-42
- [32] Church, A. H. (1904) "*On the Relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws*". London, Williams and Norgate.
- [33] Erickson, R. O. (1973) "*Tubular Packing of Spheres in Biological Fine Structure*" *Science*, 181, 705-716
- [34] Hofmeister, W (1868). *Allgemeine Morphologie der Gewächse, Handbuch der Physiologischen Botanik*, I 405-664. Leipzig, Engelmann
- [35] Levitov, L.S. (1991B) *Energetic Approach to Phyllotaxis*. *Europhys. Lett.* 114, 533-539
- [36] Meinhardt H.,(1974) *The formation of morphogenetic gradient and fields*. *Ber. Deutsch. BotGes.*, 87, 101-108

- [37] Richards, F.J.,(1951) *Phyllotaxis: its quantitative expression and relation to growth in the apex*. Phil. Trans. R. Soc. Lon. B 225, 509-564.
- [38] Snow, M., Snow, R. (1935) . *Experiments on phyllotaxis. 3. Diagonal splits through decussates apices*. Phil. Trans. R. Soc. Lon B139, 545-566
- [39] Snow, M., Snow, R. (1952) . *Minimum area and leaf determination*. Proc. R. Soc. Lon. B 139, 545-566.
- [40] Snow, M., Snow, R. (1962) . *A theory of the regulation of phyllotaxis based on Lupinus albs*. Phil. Trans. R. Soc. Lon. B 244, 483-513.
- [41] Turing, A. M., (1952) *The chemical basis of morphogenesis*. Phil. Trans. R. Soc. Lon. B 237, 37-72
- [42] Young, D.A. (1978). *On the diffusion theory of phyllotaxis*. J. theor. Biol. 71, 421-432
- [43] Budrene, E., Berg, H.(1995), *Dynamics of formation of symmetrical patterns by chemotactic bacteria (1995)* Nature, 37, 49-53
- [44] Budrene, E., Berg, H.(1991), *Complex patterns formed by motile cells of Escherichia coli*, Nature, 349, 630-633.
- [45] Encyclopaedia Britannica, Deluxe Edition 2001.
- [46] Atela, P., Golé, S., Hotton, Scott.,(2002) *A Dynamical System for Plant Pattern Formation: A Rigorous Analysis*, J. Nonlinear Sci. Vol. 12, Número 6
- [47] Jean, R. V., Barabé, D. (Compliladores), *Symmetry in Plants* World Scientific Publishing, 1998.