



00321  
70  
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**“UNA PRIMERA APROXIMACIÓN AL  
MOVIMIENTO BROWNIANO”**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**ACTUARIO**

P R E S E N T A:  
**DANIEL PELLICER COVARRUBIAS**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. LUIS ANTONIO RINCÓN SOLÍS**

**FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR**



MÉXICO, D.F.

2003



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# **PAGINACION DISCONTINUA**



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Una primera aproximación al movimiento Browniano".

realizado por Daniel Pellicer Covarrubias

con número de cuenta 9550338-9, quién cubrió los créditos de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Luis Antonio Rincón Solís

Propietario Dra. Ana Meda Guardiola

Propietario Act. Jaime Vázquez Alamilla

Suplente Dra. María Emilia Cabsllero Acosta

Suplente Act. Marisa Miranda Tirado

*Handwritten signatures and notes:*  
 [Signature]  
 [Signature]  
 [Signature]  
 [Signature]  
 [Signature]

Consejo Departamental de Matemát



*Handwritten signature*  
 H. en C. José Antonio Flores Dña. CONSEJO DEPARTAMENTAL  
 DE  
 MATEMATICAS

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

*Handwritten number 2*

## Agradecimientos

Es difícil que este trabajo se hubiera realizado de no ser por la colaboración directa o indirecta de varias personas, a quienes enuncio a continuación:

Mis compañeros de la Facultad de Ciencias, quienes han hecho de mis años de estudio un espacio divertido y provechoso mi vida,

Los amigos que he hecho a lo largo de mi vida, quienes siempre están conmigo física y espiritualmente,

Mi familia, fuente de constante amor y cariño,

Y muy especialmente a Luis Antonio Rincón Solís por su enorme paciencia y dedicación que hicieron posible este acercamiento al Movimiento Browniano.

Una primera aproximación al movimiento  
Browniano

Daniel Pellicer Covarrubias

Octubre, 2003

# Introducción

A pesar de que no es frecuente que el movimiento Browniano aparezca frente a nuestros ojos de manera evidente, es posible que esté involucrado en nuestras vidas de numerosas formas insospechadas. En un principio, el movimiento Browniano se estudió buscando describir el comportamiento de partículas microscópicas en un medio particular, pero a lo largo del siglo XX se adecuó al comportamiento de otros fenómenos de distintas áreas, gracias a sus peculiares características. Hoy en día, este extraño movimiento sigue dándonos sorpresas al aparecer en la solución de problemas en los que no se imaginaba que podía hacerlo.

El presente trabajo busca recopilar los datos necesarios para que se acerque al movimiento Browniano todo aquél que no lo conozca. Para ello incluimos como parte fundamental de trabajo los capítulos referentes a antecedentes históricos, definición y construcción, propiedades, y aplicaciones. Además añadimos un capítulo para definir conceptos de procesos estocásticos, y un anexo donde se enuncian resultados de probabilidad necesarios para este trabajo.

# Contenido

<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Brown	3
1.2 Las primeras investigaciones	5
1.3 Einstein	6
1.3.1 Sobre la función de densidad	6
1.3.2 Sobre el coeficiente de difusión	8
1.4 Smoluchowski	11
1.5 Ornstein-Uhlenbeck	13
1.6 Wiener	14
<b>2 Elementos de procesos estocásticos</b>	<b>16</b>
2.1 Generalidades	16
2.2 Procesos Gaussianos	19
<b>3 Definición y construcción</b>	<b>22</b>
3.1 Definición	22
3.2 Primera construcción (por aproximación)	23
3.3 Una consecuencia de la primera construcción	30
3.4 Segunda construcción	30
3.5 Resultados utilizados	32
<b>4 Propiedades</b>	<b>39</b>
4.1 Distribuciones conjuntas	40
4.2 Trayectorias Brownianas	42
4.2.1 Derivada	42
4.2.2 Principio de reflexión	44
4.2.3 Propiedades locales y globales	49
4.3 Caracterizaciones	56

4.4	Variaciones del movimiento Browniano . . . . .	57
4.4.1	Movimiento Browniano reflejado en el origen . . . . .	58
4.4.2	Movimiento Browniano absorbido en el origen . . . . .	59
4.4.3	Movimiento Browniano con deriva . . . . .	60
4.4.4	Movimiento Browniano geométrico . . . . .	61
4.5	Movimiento Browniano multivariado . . . . .	61
4.6	Simulación . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Algunas aplicaciones</b>	<b>67</b>
5.1	Análisis de mercados . . . . .	67
5.2	Teoría de las decisiones . . . . .	68
5.3	Fractales y Movimiento Browniano . . . . .	69
5.3.1	Robótica . . . . .	69
5.3.2	Inundaciones y sequías . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Anexo</b>	<b>72</b>

# Capítulo 1

## Preliminares

A lo largo de la historia ha variado mucho la opinión del mundo científico acerca del movimiento Browniano, debido a constantes avances en las técnicas de experimentación y a conceptos físicos novedosos para cada época. En el presente capítulo se hablará de las teorías de algunos de los investigadores a quienes debemos el concepto y uso actual del movimiento Browniano. Para la elaboración de este capítulo se consultaron [3] y [10].

### 1.1 Brown

Robert Brown (1773-1858) fue un botánico escocés sólo recordado por los matemáticos como el descubridor del movimiento Browniano. Su primer interés surgió al observar partículas de polen en el microscopio y notar un "movimiento oscilatorio rápido". Vio que lo mismo sucedía con el polen de todas las especies que observó y lo atribuyó a las células sexuales masculinas de las plantas. No tardó en darse cuenta de la falsedad de su conjetura al observar que el mismo fenómeno ocurría con partículas de otras partes de las plantas. Tras examinar partículas de distinta naturaleza, no olvidando material totalmente inorgánico, supuso que la vida no tenía que ver con ese movimiento, sino la diferencia de temperatura al iluminar el agua, su evaporación, corrientes de aire y de calor, mezcladas con otros motivos como las fuerzas de atracción y repulsión de las partículas y el inestable equilibrio de éstas en el fluido en que están suspendidas. Algunos de los argumentos fueron refutados por él mismo al observar una gota microscópica de agua sumergida en aceite; mostrando este movimiento en una sola partícula. Debido a estos



Figura 1.1: Robert Brown

estudios, a este movimiento se le conoce como movimiento Browniano. No se puede decir que haya sido Robert Brown quien descubrió el movimiento Browniano, pues cualquiera que haya visto agua a través de un microscopio podría notar partículas en un movimiento peculiar. El mismo Brown en algunos de sus documentos menciona otras personas que le dedicaron atención al asunto.

La primera explicación que se dio al movimiento Browniano fue que las partículas estaban vivas. Pese a la realización de muchos experimentos, la discusión de la vida en las partículas tardó mucho en resolverse, incluso, en 1917, D'Arcy Thompson citó: "We cannot, indeed, without the most careful scrutiny, decide whether the movements of our minutest organisms are intrinsically 'vital' (in the sense of being beyond a physical mechanism, or working model) or not."

Esencialmente, la contribución de Brown fue establecer el movimiento Browniano como un fenómeno importante, demostrar su presencia en la naturaleza y refutar falsas explicaciones del fenómeno por medio de experimentos.

## 1.2 Las primeras investigaciones

En la segunda mitad del siglo XIX, varios científicos trabajaron en el movimiento Browniano, basándose en experimentos como el de la gota de agua en aceite de Brown. Delsaux propuso en 1877 que dicho movimiento se debía a los continuos impactos de las moléculas del fluido en las partículas. Jean Perrin enfatizó los aspectos probabilísticos al afirmar que en una superficie suficientemente grande, las partículas suspendidas no sufrirían perturbaciones por las colisiones de las moléculas del fluido, pero si la superficie es menor a lo necesario para asegurar la compensación de irregularidades, los cambios de presión en distintos lugares deberán ser tomados en cuenta, dado que la ley de los grandes números ya no conduce a la uniformidad de la presión en el fluido, con lo que mientras más pequeña sea la partícula, las oscilaciones se harán más vigorosas.

Este punto de vista no era aceptado del todo, por ejemplo, hubo quien sostenía un origen eléctrico del movimiento. La crítica principal a la naturaleza cinética del movimiento Browniano se refería a que, debido a que las partículas en suspensión son cientos de millones de veces más grandes que las moléculas del líquido, datos experimentales y teorías cinéticas permitían estimar que las variaciones de velocidad en cada colisión tenían un signo aleatorio; lo que hacía difícil de creer que uno pudiera ver un movimiento en las partículas que no tendiera a desaparecer.

Esto motivó a defensores de la teoría cinética, que afirma que el movimiento Browniano es causado por el bombardeo de las moléculas del fluido, a realizar experimentos cuidadosos que condujeron a establecer los siguientes puntos:

- 1) El movimiento es muy irregular, compuesto de traslaciones y rotaciones, y las trayectorias parecen no tener tangente.
- 2) Dos partículas distintas se mueven independientemente, incluso cuando se aproximan entre ellas a una distancia menor a su diámetro.
- 3) El movimiento es más activo mientras más pequeñas sean las partículas.
- 4) La composición y densidad de las partículas no tienen efecto en el movimiento Browniano.
- 5) El movimiento es más activo mientras menor es la viscosidad del fluido.

- 6) El movimiento es más activo mientras mayor es la temperatura del fluido.
- 7) El movimiento no cesa.

En 1900, Bachelier publicó en un artículo<sup>1</sup> argumentos de cómo pequeñas variaciones pueden producir un efecto visible, dejando en descubierto lo falaz del razonamiento expuesto anteriormente.

Para 1905, la teoría cinética era la más aceptada; los siete puntos enunciados arriba no parecían confrontarla. Sin embargo, la ley de la equipartición de energía en mecánica estadística<sup>2</sup> implica que la energía cinética de traslación de una partícula y de una molécula deben ser iguales. Para ello, se debía medir la velocidad de una partícula en movimiento Browniano. Se hicieron experimentos para intentar confirmar la teoría cinética, pero los dos valores de energía cinética difirieron en un factor de 100,000. La dificultad era el punto (1), es decir, ¿cómo calcular la velocidad en una trayectoria que aparentemente no tiene tangente?

## 1.3 Einstein

Albert Einstein es el responsable de dos grandes avances en la teoría del movimiento Browniano. Uno de ellos es referente a la función de densidad de la posición de una partícula en movimiento Browniano en un tiempo  $t$ ; el otro es referente principalmente a la obtención del coeficiente de difusión con base en datos físicos. Por comodidad, en adelante llamaremos partícula Browniana a una partícula en movimiento Browniano.

### 1.3.1 Sobre la función de densidad

Sea  $p_t$  la función de densidad de una coordenada de la posición de una partícula Browniana al tiempo  $t$ , y supongamos que la partícula está en la posición  $x = 0$  al tiempo  $t = 0$ . Einstein dedujo estas funciones por medio de métodos basados en series de potencias. Su conclusión fue que  $p_t$  debe satisfacer la ecuación de difusión (también llamada ecuación de calor)

---

<sup>1</sup>*Annales de l'école Normale*, Paris, 1900.

<sup>2</sup>Para un sistema de moléculas de un gas en equilibrio térmico a una temperatura  $T$ , la energía cinética promedio de una molécula por grado de libertad es  $kT/2$ , donde  $k$  es la constante de Boltzmann.



Figura 1.2: Albert Einstein

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (1.1)$$

A la constante  $D$  se le llama **coeficiente de difusión**, que, mediante una escala adecuada, podemos fijar en  $D = 1/2$ , y verificar que

$$p_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

es la única solución de (1.1) bajo las condiciones iniciales

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} p_t(x) dx = 1.$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow 0} p_t(x) = 0, \text{ si } x \neq 0.$$

Presentamos a continuación una forma de obtener la ecuación (1.1) a través de un proceso límite en una caminata aleatoria discreta. Este material fue tomado de [7].

Consideramos la caminata aleatoria simétrica sobre los enteros, y llamamos  $p_n(k)$  a la probabilidad de que la partícula se encuentre  $k$  unidades a la derecha de su posición inicial al tiempo  $n$ .

Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov para este proceso nos dan la siguiente ecuación

$$p_{n+1}(k) = \frac{1}{2}p_n(k+1) + \frac{1}{2}p_n(k-1)$$

que podemos reescribir como

$$p_{n+1}(k) - p_n(k) = \frac{1}{2}[p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)].$$

Si denotamos  $\Delta$  a la magnitud de los intervalos de tiempo, y  $\eta$  a la magnitud de las unidades de posición, reescribimos

$$\frac{p_{(n+1)\Delta}(k\eta) - p_{n\Delta}(k\eta)}{\Delta} = \frac{\frac{1}{2}[p_{n\Delta}((k+1)\eta) - 2p_{n\Delta}(k\eta) + p_{n\Delta}((k-1)\eta)]}{\Delta}$$

Ahora hacemos tender los intervalos de tiempo y los incrementos por periodo de tiempo a cero, manteniendo las relaciones  $\Delta = \eta^2$ ,  $k\eta \rightarrow x$  de tal forma que  $n\Delta \rightarrow t$ . De aquí vemos que

$$p_{n\Delta}(k\eta) \rightarrow p_t(x),$$

y obtenemos la ecuación

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{p_{t+\Delta}(x) - p_t(x)}{\Delta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}[p_t(x+\eta) - 2p_t(x) + p_t(x-\eta)]}{\eta^2}$$

de donde podemos concluir la ecuación (1.1) con  $D = 1/2$ .

### 1.3.2 Sobre el coeficiente de difusión

La idea física de Einstein sobre el movimiento Browniano se basa en la afirmación de que las partículas suspendidas pueden ser consideradas como moléculas grandes, pese a ser mucho mayores a las moléculas del fluido. De ahí el que se pueda aplicar en ellas mecánica estadística, de modo que experimentan presión osmótica cumpliendo la ley de van t'Hoff<sup>3</sup> al menos en

<sup>3</sup>La ley de van t'Hoff dice que si  $p$  es la presión osmótica (es decir, la presión parcial debido a las partículas) y  $\nu$  es la densidad numérica, entonces  $p = k_B T \nu$ , donde  $T$  es la temperatura del fluido, y  $k_B$  es la constante de Boltzmann.

pequeñas concentraciones. De este modo, la ley de van t'Hoff será válida no sólo en soluciones de partículas microscópicas, sino también para calcular la presión parcial debido a partículas de tamaño arbitrario.

Esta idea fue revolucionaria. No era contradictoria respecto a la mecánica estadística ni a la hipótesis atómica, pero posiblemente sí respecto a la termodinámica clásica. Por lo anterior, Einstein buscó formas de encontrar consecuencias macroscópicas observables.

Buscando considerar el tiempo necesario para disipar la velocidad adquirida al chocar la partícula con una sola molécula del fluido, Einstein introdujo intervalos de tiempo  $\tau$  suficientemente pequeños comparados con cualquier intervalo de tiempo observado, pero de magnitud tal que los movimientos de una partícula entre dos de estos intervalos de tiempo se consideren independientes. Después, implícitamente considera el caso límite cuando  $\tau \rightarrow 0$ . Cabe resaltar que la validez de los argumentos que incluyen estos intervalos ha sido cuestionada por mucha gente, incluyendo el propio Einstein.

La disipación de la velocidad producida por un solo choque se puede estimar, en el caso de partículas macroscópicas, usando que la velocidad adquirida  $v$ , se disipa en calor por la acción de una fuerza  $F$  que, por la ley de Stokes<sup>4</sup>, es

$$m \frac{\partial v}{\partial t} \equiv F = -6\pi\eta av,$$

donde  $m$  es la masa de la partícula,  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad del fluido y  $a$  el radio de las partículas suspendidas. Así podemos encontrar que el tiempo en que se disipa la velocidad adquirida es  $t_0 = (6\pi\eta m^{-1}a)^{-1}$ , que es muy pequeño, por lo que si  $\tau$  es suficientemente grande comparada con  $t_0$ , el movimiento será difuso.

Einstein diseñó un experimento ideal, en el que relacionaba cantidades microscópicas y macroscópicas; se basaba en suponer que una partícula suspendida es un gas de tales partículas tan pequeñas que la ley de la presión osmótica ideal es válida en ellas. Se tiene en cuenta también que en los experimentos clásicos, las partículas suspendidas son tan pocas que se consideran aisladas.

De modo que la primera etapa del experimento es reemplazar la partícula por un gas de tales partículas con densidad  $\nu$ .

---

<sup>4</sup>Para una esfera de radio  $r$  que cae libremente por gravedad con una velocidad  $c$  a través de un fluido de viscosidad  $\eta$ , la fuerza de rozamiento es  $F = 6\pi r\eta c$ . La esfera se acelera hasta que  $c$  alcanza la velocidad terminal, a la cual  $F$  es igual a la fuerza que impulsa la esfera.

Después, uno considera una fuerza externa  $F$  que actúa en las partículas suspendidas, pero no en el fluido. Esto genera, en estado estacionario, un gradiente  $F\nu$  de presión, que denotaremos  $\partial_x p$ , que por el supuesto de que la ley de presión osmótica vale para partículas macroscópicas, equivale a  $\partial_x p = k_B T \partial_x \nu$ .

Suponiendo que el fluido obedece la ecuación de Navier-Stokes, se puede calcular por medio de la ley de Stokes, la velocidad de la partícula en términos de la viscosidad de modo que el flujo generado por el gradiente de presión es

$$\Phi = \nu v = -\frac{\nu F}{6\pi\eta a} = -\frac{k_B T}{6\pi\eta a} \partial_x \nu.$$

Aquí podemos ver reflejados los puntos (3), (4), (5) y (6) de los siete que intentaban describir el movimiento Browniano antes de la teoría de Einstein. En realidad, para esto último sería necesario pedir que las partículas fueran macroscópicas.

Por último, el supuesto de que partículas individuales obtienen un movimiento difuso implica que el flujo debe ser proporcional al gradiente de densidad, de donde obtenemos

$$\Phi = -D \partial_x \nu,$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión.

Igualando las dos expresiones para el flujo de las partículas, desaparecen las cantidades auxiliares utilizadas para mostrar el experimento ideal; de aquí, uno supone que, asumiendo la teoría cinética, una partícula macroscópica (incluso sólo una) en un fluido y en equilibrio térmico (es decir, en estado estacionario) debe tener un movimiento difuso con una constante de difusión relacionado a la viscosidad

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a}, \quad (1.2)$$

que es llamada **relación de Einstein-Smoluchowski**.

Una vez que se consideró un hecho el movimiento perpetuo de las partículas suspendidas, se creyó posible fabricar ciclos termodinámicos que, por medio de paredes semipermeables para objetos macroscópicos, a temperatura constante, convirtiera calor en trabajo usando la presión osmótica. Podemos pensar en un cilindro horizontal lleno de cierto líquido y dividido en dos por una pared semipermeable móvil; en el lado izquierdo, se incluye una solución con partículas suspendidas, del lado impermeable de la pared; mientras que del lado derecho no hay partículas. La pared puede ser empujada a la derecha

usando la presión osmótica para extraer trabajo. Al final del proceso, la pared es retirada y reinsertada en la posición original. Después, se espera a que las partículas del coloide regresen a la parte izquierda. Esto puede tomar un largo rato. Cuando la última partícula del coloide cruza la pared, las condiciones iniciales se restablecen.

Perrin visualizó este aspecto del movimiento Browniano, pero notó que una máquina como éstas requeriría un intervalo de tiempo tremendamente grande para producir cantidades apreciables de energía.

El trabajo de Einstein, confirmado experimentalmente por Perrin, trajo como consecuencia que aquellos que no hubieran aceptado la hipótesis atómica notaran que las leyes de termodinámica deben tener una naturaleza estadística. Además, tuvo como aplicación la deducción, por parte del mismo Einstein, del valor de la constante de Boltzmann  $k_B$ , y por lo tanto del número de Avogadro  $N_A$ <sup>5</sup>, por medio de la medición de la difusión del azúcar suspendida en agua. El valor  $N_A = 4.0 \cdot 10^{23}$  encontrado por Einstein era impreciso debido a un error computacional; sin embargo, basándose en experimentos cuidadosos que utilizaban la teoría de Einstein, Perrin y sus colaboradores obtuvieron posteriormente un valor esencialmente igual al aceptado en la actualidad de  $N_A = 6.02252 \cdot 10^{23}$ .

## 1.4 Smoluchowski

La teoría de Smoluchowski, casi simultánea a la de Einstein, aporta mucho a las hipótesis de éste último. Smoluchowski considera un modelo microscópico para los choques, suponiendo una partícula de masa  $M$  sujeta a un gran número de choques con moléculas de masa  $m$  del fluido. Comienza llamando  $v_k$  a la velocidad de la partícula después de  $k$  choques y si la  $k$ -ésima colisión es con una molécula con velocidad  $v$  antes del choque, uno infiere de la ley de colisiones estáticas

$$v_{k+1} \approx v_k \exp\{-\lambda t\} + \frac{m}{M}(R - 1)v,$$

si  $|v|$  es mucho mayor a  $|v_k|$ ,  $M$  lo es a  $m$ , y  $R$  es una rotación aleatoria producida por el impacto. Aún se hace un ajuste debido a la fricción producida por la velocidad de la partícula ( $\exp\{-\lambda t\}$ ).

<sup>5</sup>Número de partículas en un mol de una sustancia



Figura 1.3: Marian Smoluchowski

Continuando por este camino, Smoluchowski llegó esencialmente a la relación (1.2) usando la resistencia de Doppler en un gas enrarecido en vez de la ley de Stokes. El proceso descrito aquí se puede encontrar más detallado en [10]. Podemos considerar la teoría de Smoluchowski más ambiciosa que la de Einstein, pues no deja de lado las correlaciones de tiempo entre colisiones consecutivas, mientras que Einstein sí lo hacía. Estrictamente hablando, Smoluchowski trata con partículas en un un gas enrarecido que, por tanto, no obedece la ley de viscosidad de Stokes, lo que no era relevante para los experimentos de aquel tiempo, porque no es aplicable a partículas suspendidas en un fluido. El modelo de Einstein abarca ambos casos, aunque no da una justificación microscópica de la naturaleza difusa del movimiento. La gran diferencia entre los resultados de Einstein y Smoluchowski fue que éste último encontró un coeficiente de difusión  $D_{smol}$  tal que

$$D_{smol} = aD_{ein},$$

donde  $D_{ein}$  es el coeficiente de difusión encontrado por Einstein, y  $a = \frac{1}{2\pi^2}$ . Smoluchowski posiblemente no hubiera podido obtener la fórmula de Einstein, porque no era capaz de producir un modelo microscópico razonable en un fluido. Su método puede considerarse no muy objetivo, incluso en el caso que él manejó, en que substituía el fluido por un gas enrarecido; pues lleva a un resultado para  $D$  afectado por un error de un factor  $a$  con respecto a la de

Einstein. Este factor puede ser atribuido a la inexactitud de la aproximación. Aún así, Smoluchowski, sin el apoyo del punto de vista macroscópico en que Einstein basó su teoría, se ve obligado a considerar seriamente el factor  $a$  y transferirlo a un resultado incorrecto en el caso de partículas suspendidas en un líquido.

Es probable que la teoría de Smoluchowski no fuera verificable con datos experimentales accesibles en ese tiempo; eso explica que no publicara sus resultados antes que Einstein, a pesar de que él aseguró que los había obtenido años atrás. Se puede intuir que leer los resultados de Einstein le haya ayudado a comparar su teoría con experimentos. Más tarde Smoluchowski abandonó el factor  $a$ , dejándolo en  $a = 1$ .

## 1.5 Ornstein-Uhlenbeck

Einstein no consideró intervalos de tiempo en los que ocurren pocos choques, en los cuales tiene sentido definir la velocidad de las partículas y el movimiento no será difuso. El movimiento difuso se obtiene de observar la partícula en intervalos de tiempo mucho mayores.

Langevin fue el que propuso una manera matemática de modelar el movimiento Browniano en el que se consideran tanto la parte difusa como la parte correspondiente a intervalos pequeños de tiempo. Ornstein y Uhlenbeck, usando conceptos de cálculo estocástico, modelaron la variación de la velocidad de la partícula producida por los choques por medio de una fuerza aleatoria  $dB_t$ . De este modo se obtuvo la ecuación

$$dv_t = -\beta v_t dt + dB_t, \quad (1.3)$$

donde  $\beta$  es una constante. Informalmente podríamos multiplicar por la masa de la partícula Browniana y reescribir la ecuación (1.3) como

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = m\beta v + m \frac{\partial B}{\partial t},$$

<sup>6</sup>  $\int_0^\infty f(t) dB_t$  se define como el único operador isométrico de  $L^2(\mathbb{R}, dt)$  en  $L^2(\Omega)$  tal que para todo  $0 \leq a < b < \infty$ ,

$$\int_a^\infty \phi_{[a,b]}(t) dB_t = B_b - B_a$$

donde  $\phi$  es la función indicadora,  $\Omega$  es el espacio de probabilidad de este proceso y  $B_t$  es el proceso descrito por Einstein y Smoluchowski (ver [10]).

en el entendido de que  $\partial B / \partial t$  no tiene por qué existir. Esta ecuación plantea que la fuerza en una partícula Browniana consta de dos partes, la fuerza de fricción  $F_1 = \lambda v$  con coeficiente  $\lambda = m\beta$  y la fuerza aleatoria  $F_2 = m\partial B / \partial t$ . Sean  $x_0$  y  $v_0$  la posición y el tiempo iniciales respectivamente, de una partícula en movimiento Browniano unidimensional, entonces la solución de (1.3) es

$$v_t = \exp\{-\beta t\}v_0 + \exp\{-\beta t\} \int_0^t \exp\{\beta s\} dB_s,$$

y se puede calcular la posición de la partícula al tiempo  $t$  como

$$x_t = x_0 + \int_0^t v_s ds.$$

De este modo, la velocidad y la posición de una partícula Browniana al tiempo  $t$  son Gaussianas con esperanzas

$$\begin{aligned} E(v_t) &= \exp\{-\beta t\}v_0 \\ E(x_t) &= x_0 + \frac{v_0}{\beta}(1 - \exp\{-\beta t\}). \end{aligned}$$

Recomendamos revisar [3] y [10] para profundizar en el trabajo de Ornstein y Uhlenbeck.

## 1.6 Wiener

Matemáticamente podemos considerar que un movimiento Browniano ideal en una dimensión tiene la propiedad de que la posición  $x$  de la partícula al tiempo  $t$  obedece la siguiente función de densidad de probabilidad

$$P(x, t) = \frac{1}{(2\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{Dt}\right\}, \quad (1.4)$$

sin hacer distinción cuando  $t$  es pequeño.

El hecho de que el tiempo sea proporcional al cuadrado del desplazamiento, hace que si hacemos tender el tiempo a cero, el movimiento no tenga una velocidad bien definida, como sucede en el movimiento Browniano si uno sólo puede considerar intervalos de tiempo mucho mayores al tiempo máximo en que el movimiento tiene un comportamiento no difuso.



Figura 1.4: Norbert Wiener

La contribución de Norbert Wiener fue definir matemáticamente un objeto con las características anteriores, además de probar que el proceso Gaussiano con probabilidades de transición dadas por (1.4) está bien definido desde el punto de vista matemático y que, con probabilidad uno, las trayectorias descritas por las partículas son continuas. A este modelo se le conoce como el **proceso de Wiener**.

Si bien, en un sentido físico, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck da la descripción del movimiento Browniano; el proceso de Wiener da la descripción del comportamiento asintótico de éste para tiempos no muy pequeños.

Debido a que éste trabajo es de naturaleza eminentemente matemática, y no física, en los capítulos posteriores nos referiremos al proceso de Wiener con el nombre de movimiento Browniano, a pesar de que ya quedó aclarado que hay diferencia entre ellos.

# Capítulo 2

## Elementos de procesos estocásticos

En este capítulo daremos algunas definiciones y resultados que usaremos a lo largo del trabajo. El material descrito a continuación se puede encontrar explicado con mayor detalle en [13].

### 2.1 Generalidades

En esta sección daremos la definición de versión de un proceso, filtración, martingala, proceso de Markov y variación cuadrática de un proceso, además enunciaremos el teorema de extensión de Kolmogorov.

**Definición 2.1.1** *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{X_t : t \geq 0\}$ .*

**Definición 2.1.2** *Una trayectoria de un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  es una función  $t \mapsto X_t(\omega)$  para alguna  $\omega$  en  $\Omega$ .*

**Definición 2.1.3** *Sean  $X = \{X_t : t \geq 0\}$ ,  $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$  dos procesos definidos en el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . Decimos que  $X$  es una versión de  $Y$  si para cada  $t$ ,  $X_t = Y_t$  casi seguramente.*

**Definición 2.1.4** *Una filtración sobre el espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$  es una familia  $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$  de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ , tales que  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  si  $s < t$ .*

La filtración canónica asociada a un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  es

$$\mathcal{F}_t^X = \mathcal{B}(X_s : s \leq t), \quad t \geq 0.$$

Sea  $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$  una filtración. Al sistema  $((\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}), \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\})$  se le llama espacio de probabilidad filtrado.

**Definición 2.1.5** Sea  $((\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}), \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\})$  un espacio de probabilidad filtrado y sea  $\{X_t : t \geq 0\}$  un proceso estocástico definido sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Se dice que el proceso  $\{X_t : t \geq 0\}$  es adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$  o que es  $\mathcal{F}_t$ -adaptado si para cada  $t \geq 0$  la variable aleatoria  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible, es decir,  $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$  para cada  $t \geq 0$ .

**Definición 2.1.6** Un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  es una  $\mathcal{F}_t$ -martingala si

- a)  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -adaptado y para cada  $t \geq 0$ ,  $X_t$  es integrable.
- b) Para cada  $0 < s < t$ ,

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad \text{casi seguramente.}$$

**Definición 2.1.7** Sea  $\{X_t : t \geq 0\}$  un proceso estocástico definido sobre un espacio de probabilidad filtrado  $((\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}), \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\})$ . Diremos que  $\{X_t : t \in T\}$  es un  $\mathcal{F}_t$ -proceso de Markov si

- a)  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -adaptado.
- b) Se cumple la propiedad de Markov: para cada  $s < t$ ,  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(X_t \in A | \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A | X_s).$$

Si  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$  para toda  $t \in T$ , decimos simplemente que  $\{X_t : t \geq 0\}$  es un proceso de Markov sin especificar la filtración.

Sea  $f(t)$  una función real de variable real, y sea  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  una partición del intervalo  $[a, b]$ ; definimos

$$U_n = \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t_{k-1})]^2. \quad (2.1)$$

Si  $f(t)$  tiene derivada continua en el intervalo  $[a, b]$ , un resultado de cálculo plantea que haciendo a  $n$  tender a infinito de tal forma que  $\max(t_k - t_{k-1})$  tiende a cero, obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0.$$

Substituyendo una trayectoria del proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  en lugar de  $f(t)$  en (2.1), obtenemos la siguiente definición.

**Definición 2.1.8** *Un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  tiene variación cuadrática finita si existe un proceso estocástico  $\{Y_t : t \geq 0\}$  tal que para cada  $t$  y para toda sucesión  $\xi_n : 0 = t_0^n < \dots < t_m^n = t$  de particiones del intervalo  $[0, t]$  tal que  $\max(t_k^n - t_{k-1}^n)$  tiende a cero si  $n$  tiende a  $\infty$ , la suma*

$$\sum_{k=1}^m (X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n})^2$$

converge a  $Y_t$  en probabilidad cuando  $n \rightarrow \infty$ . Al proceso  $Y_t$  se le llama variación cuadrática de  $\{X_t : t \geq 0\}$ .

### Teorema 2.1.9 TEOREMA DE EXTENSIÓN DE KOLMOGOROV

Para todo  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$  y  $k \in \mathcal{N}$ , sea  $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_k}$  una medida de probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^n)^k$ ,  $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))^k$  que satisface las siguientes dos condiciones:

- (1)  $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times F_{\sigma^{-1}(k)}) = \mu_{t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \dots \times F_k)$   
para toda permutación  $\sigma$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$ .
- (2)  $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \mu_{t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m}}(F_1 \times \dots \times F_k \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n)$   
para toda  $m \in \mathcal{N}$ .

Entonces existe un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y un proceso estocástico  $\{B_t : t \geq 0\}$  con valores en  $\mathbb{R}^n$  tal que para cualquier  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$  con  $k \in \mathcal{N}$  y para todo  $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$P(B_{t_1} \in F_1, \dots, B_{t_k} \in F_k) = \mu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k)$$

## 2.2 Procesos Gaussianos

En esta sección definiremos a los procesos Gaussianos y daremos algunos ejemplos de ellos.

**Definición 2.2.1** Decimos que un proceso  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  es Gaussiano si para cada  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ ,  $n \in \mathcal{N}$ , el vector aleatorio

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

tiene una distribución normal multivariada.

Equivalentemente el proceso  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  es Gaussiano si para cada  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ ,  $n \in \mathcal{N}$ , y  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , la variable aleatoria

$$\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$$

tiene una distribución normal.

**Definición 2.2.2** Dado un proceso  $X = \{X_t : t \geq 0\}$ , definimos la función media o función esperanza como sigue

$$\begin{aligned} M_X : [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ M_X(t) &= E(X_t), \end{aligned}$$

y definimos también la función covarianza de  $X$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} cov_X : [0, \infty) \times [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ cov_X(t, s) &= cov(X_t, X_s) = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s). \end{aligned}$$

**Definición 2.2.3** Decimos que el proceso  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  es centrado si  $M_X = 0$ .

Es posible demostrar que las funciones de media y covarianza determinan por completo a un proceso Gaussiano.

Acerca de la función covarianza podemos demostrar las siguientes propiedades

a) Simetría:  $cov_X(t, s) = cov_X(s, t)$ .

- b) La función covarianza es positiva definida: Para todo  $n \in \mathcal{N}$  y  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , la matriz cuadrada  $(\text{cov}_X(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  es positiva definida. Esto quiere decir que para cualesquiera números reales  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$

$$\sum_{i, j=1}^n \text{cov}_X(t_i, t_j) \theta_i \theta_j \geq 0.$$

También podemos demostrar que si  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  es un proceso Gaussiano centrado tal que  $\text{cov}_X(t, s) = t \wedge s$  entonces la variable aleatoria incremento  $X_t - X_s$  tiene una distribución normal con media 0 y varianza  $t - s$  cuando  $0 \leq s \leq t$ .

A continuación mencionaremos algunos ejemplos de procesos Gaussianos.

- 1) El **movimiento Browniano estándar** unidimensional  $B = \{B_t : t \geq 0\}$  es un proceso Gaussiano con las propiedades siguientes

- a)  $B_0 = 0$ .
- b)  $B$  tiene trayectorias continuas.
- c)  $\text{cov}_B(t, s) = t \wedge s$ .

(Este proceso será tratado en los siguientes capítulos con mayor detalle).

- 2) La **hoja Browniana** o movimiento estándar real con  $k$  parámetros es un proceso Gaussiano  $B = \{B_t : t \in [0, \infty)^k\}$  tal que

- a)  $B_{(t_1, \dots, t_k)} = 0$  si algún  $t_i$  es cero.
- b)  $B$  tiene trayectorias continuas.

- c)  $\text{cov}_B(t, s) = \prod_{i=1}^k t_i \wedge s_i$  en donde  $t = (t_1, \dots, t_k)$  y  $s = (s_1, \dots, s_k)$  son elementos de  $[0, \infty)^k$ .

La hoja Browniana se puede encontrar explicada con mayor detalle en [11].

- 3) El **movimiento Browniano fraccionario** de parámetro  $H \in (0, 1)$  es un proceso Gaussiano centrado  $B^H = \{B_t^H : t \geq 0\}$  con las siguientes propiedades

- a)  $B_0^H = 0$ .
- b)  $B^H$  tiene trayectorias continuas.
- c)  $\text{cov}_{B^H}(t, s) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H})$ .

Es fácil verificar que el movimiento Browniano fraccionario se reduce al movimiento Browniano cuando  $H = 1/2$ . Es posible también demostrar

que el movimiento Browniano fraccionario tiene incrementos estacionarios. Además, los incrementos son independientes si y sólo si  $H = 1/2$ . Cuando  $H < 1/2$ , los incrementos están negativamente correlacionados. En cambio, cuando  $H > 1/2$ , los incrementos resultan estar positivamente correlacionados.

- 4) El puente Browniano es un proceso  $Z = \{Z_t : t \in [0, 1]\}$  Gaussiano centrado y continuo con función de covarianza

$$\text{cov}_Z(t, x) = \begin{cases} s(1-t) & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t(1-s) & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Este proceso adquiere su nombre a partir del hecho de que  $Z_0 = Z_1 = 0$ , y por lo tanto una trayectoria cualquiera de  $Z$  empieza y termina en cero. El puente Browniano puede también ser definido o representado de la siguiente forma

$$Z_t = B_t - tB_1, \quad t \in [0, 1],$$

en donde  $\{B_t : t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano estándar. El puente Browniano se puede encontrar explicado con mayor detalle en [11].

## Capítulo 3

# Definición y construcción

En el presente capítulo definimos el movimiento Browniano matemáticamente y buscamos argumentar su existencia por medio de dos distintas construcciones. Se utilizaron [7], [8] y [11] para la obtención de la mayoría de los resultados aquí enunciados.

Para la buena comprensión de este material, es necesario conocer algunos conceptos de análisis funcional.

### 3.1 Definición

**Definición 3.1.1** *El movimiento Browniano en  $\mathbb{R}$  es un proceso estocástico  $\{B_t : t \geq 0\}$  con las siguientes propiedades*

- a)  $B_0(\omega) = 0$ , para casi todos los valores  $\omega$ .
- b) Para cada  $t \geq 0$  y  $s \geq 0$  el incremento  $(B_{t+s} - B_s)$  se distribuye normal con media 0 y varianza  $\sigma^2 t$ , en donde  $\sigma > 0$  es un parámetro fijo.
- c) Para cada par de intervalos de tiempo disjuntos  $[t_1, t_2]$ ,  $[t_3, t_4]$ , con  $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ , los incrementos  $B_{t_2} - B_{t_1}$  y  $B_{t_4} - B_{t_3}$  son variables aleatorias independientes (con la distribución descrita en el inciso anterior). Lo mismo ocurre para  $n$  intervalos disjuntos de tiempo donde  $n$  es un entero positivo cualquiera.
- d) La trayectoria  $t \mapsto B_t(\omega)$  es continua en todos los valores de  $t$  para casi todos los valores  $\omega$ .

**Definición 3.1.2** *Un proceso  $\{B_t : t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano estándar si cumple la definición anterior con  $\sigma^2 = 1$ , es decir,  $(B_{t+s} - B_s)$  se distribuye normal con media 0 y varianza  $t$ .*

En adelante, al espacio  $L_2([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \mu)$ , donde  $\mu$  es la medida de Lebesgue, lo denotaremos simplemente por  $L_2$  y lo consideraremos un espacio de Hilbert con el producto interior dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Seguiremos los siguientes pasos para mostrar la existencia del movimiento Browniano:

- 1) "Aproximaremos" la derivada respecto a  $t$  en todos los puntos de  $B_t(\omega)$  por medio de funciones en  $L_2$ . No se puede usar directamente la derivada, pues un proceso con las características del movimiento Browniano no tiene por qué ser derivable en algún punto; sin embargo, la información que darán dichas aproximaciones, nos propondrán un nuevo proceso, que será el candidato a analizar.
- 2) Posteriormente construiremos dicho proceso usando las funciones de Haar.
- 3) En el siguiente paso, demostraremos que tal proceso cumple con los cuatro incisos de la definición (3.1.1).

Adicionalmente daremos una segunda construcción del movimiento Browniano usando el teorema de extensión de Kolmogorov.

Por último, se inserta una sección donde se demuestran los resultados utilizados en la primera construcción.

### 3.2 Primera construcción (por aproximación)

Denotaremos por  $\dot{B}_h(t)$  a la derivada "aproximada" de  $B_t$  respecto de  $t$ , es decir, para  $h > 0$ ,

$$\dot{B}_h(t) := \frac{B_{t+h} - B_t}{h}.$$

Claramente la variable aleatoria  $\dot{B}_h(t)$  tiene una distribución normal con media 0 y varianza  $1/h$ . Si  $s \neq t$  y para  $h$  suficientemente pequeño, las variables aleatorias  $\dot{B}_h(s)$  y  $\dot{B}_h(t)$  deben ser independientes, pues existe  $h > 0$  tal que los intervalos  $[t, t+\epsilon]$  y  $[s, s+\epsilon]$  son ajenos para toda  $\epsilon < h$ , y por la definición del movimiento Browniano,  $B_{t+\epsilon} - B_t$  y  $B_{s+\epsilon} - B_s$  son independientes. Por lo anterior, tenemos que la covarianza del proceso  $\{\dot{B}_h(t) : t \geq 0\}$  es

$$\begin{aligned}
 K_h(t, s) &= E(\dot{B}_h(t)\dot{B}_h(s)) \\
 &= E\left[\left(\frac{B_{t+h} - B_t}{h}\right)\left(\frac{B_{s+h} - B_s}{h}\right)\right] \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq s, \\ 1/h & \text{si } t = s, \end{cases}
 \end{aligned}$$

en donde la última expresión es válida para  $h$  suficientemente pequeña. Podemos además ver que para cualquier función continua  $f$  y cualquier  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 (I) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} K_h(t, s) f(s) ds \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} E\left[\left(\frac{B_{t+h} - B_t}{h}\right)\left(\frac{B_{s+h} - B_s}{h}\right)\right] f(s) ds \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} E\left[\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} (B_{t+h} - B_t)(B_{s+h} - B_s) f(s) ds\right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} E\left[\int_{t-h}^{t+h} (B_{t+h} - B_t)(B_{s+h} - B_s) f(s) ds\right],
 \end{aligned}$$

suponiendo  $h < \epsilon$ . Separando la integral anterior en dos intervalos obtenemos

$$\begin{aligned}
 (I) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} E\left[\int_{t-h}^t (B_{t+h} - B_t)(B_{s+h} - B_s) f(s) ds + \right. \\
 &\quad \left. + \int_t^{t+h} (B_{t+h} - B_t)(B_{s+h} - B_s) f(s) ds\right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} E\left[\int_{t-h}^t (B_{s+h} - B_t)^2 f(s) ds + \int_t^{t+h} (B_{t+h} - B_s)^2 f(s) ds\right],
 \end{aligned}$$

pues podemos escribir

$$\begin{aligned}
 B_{s+h} - B_s &= (B_{s+h} - B_t) + (B_t - B_s), \\
 B_{t+h} - B_t &= (B_{t+h} - B_{s+h}) + (B_{s+h} - B_s),
 \end{aligned}$$

y la integral sobre intervalos disjuntos es cero. Haciendo el cambio de variable  $r = s - h$  en la segunda integral obtenemos

$$(I) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} E\left[\int_{t-h}^t (B_{s+h} - B_t)^2 f(s) ds + \int_{t-h}^t (B_{t+h} - B_{r+h})^2 f(r+h) dr\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} E \left[ \int_{t-h}^t \{ (B_{s+h} - B_t)^2 f(s) + (B_{t+h} - B_{s+h})^2 f(s+h) \} ds \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} E [ h \{ (B_{c+h} - B_t)^2 f(c) + (B_{t+h} - B_{c+h})^2 f(c+h) \} ]
\end{aligned}$$

para alguna  $c$  en el intervalo  $[t-h, t]$ , usando el teorema del valor medio para integrales. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
(I) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} h [ (c+h-t)f(c) + (t-c)f(c+h) ] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [ (c+h-t)f(c) + (t-c)f(c) + (t-c)\{f(c+h) - f(c)\} ] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h f(c) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (t-c) [f(c+h) - f(c)] \\
&= f(t),
\end{aligned}$$

pues cuando  $h$  tiende a 0,  $c$  tiende a  $t$  y  $t-c$  está acotado entre 0 y  $h$ . Lo anterior demuestra entonces que para cualquier  $t > 0$  y  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} K_h(t, s) f(s) ds = f(t)$$

Esto sugiere identificar a  $K_h(t, s)$  con la función delta de Dirac  $\delta_t(s)$  en el límite cuando  $h \rightarrow 0$ .

El siguiente paso consiste en expresar a  $B_h(t, \omega)$  mediante una serie de Fourier de la siguiente forma

$$B_h(t, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega) \psi_n(s)$$

en donde

$$a_n(\omega) = \int_0^1 B_h(t, \omega) \psi_n(s) ds$$

y  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  es un sistema ortonormal de  $L_2$ . Podemos calcular la covarianza de las variables aleatorias  $a_n$  y  $a_m$  como sigue

$$E(a_n a_m) = E \left( \int_0^1 B_h(t) \psi_n(t) dt \int_0^1 B_h(s) \psi_m(s) ds \right)$$

$$\begin{aligned}
&= E \left( \int_0^1 \int_0^1 \dot{B}_h(t) \dot{B}_h(s) \psi_n(t) \psi_m(s) dt ds \right) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 E(\dot{B}_h(t) \dot{B}_h(s)) \psi_n(t) \psi_m(s) ds dt \\
&= \int_0^1 \int_0^1 K_h(t, s) \psi_n(t) \psi_m(s) ds dt \\
&\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^1 \psi_n(t) \psi_m(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{para } n = m, \\ 0 & \text{para } n \neq m, \end{cases}
\end{aligned}$$

pues  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  constituye un sistema ortonormal de  $L_2$ .  
 Por tanto podríamos decir que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \dot{B}_h(t, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) \psi_n(t)$$

donde  $\{Z_n\}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes Gaussianas con media 0. Sin embargo, esa sucesión no converge. Todo lo anterior se ha hecho con el fin de analizar la derivada del movimiento Browniano en caso de que existiera, por lo que ahora definiremos

$$B_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) \int_0^t \psi_n(u) du$$

que sería el equivalente a tomar la integral de  $\lim_{h \rightarrow 0} \dot{B}_h(t, \omega)$ .

Llamamos  $\Psi_n(t)$  a  $\int_0^t \psi_n(u) du$ , con lo que

$$B_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) \Psi_n(t)$$

Lamentablemente  $\{\Psi_n\}$  no es una base ortonormal de  $L_2$ , pero ello no afecta para los resultados posteriores. Ahora resta demostrar que  $B_t$  existe eligiendo adecuadamente a la sucesión  $\{\psi_n\}$  y que efectivamente cumple con las cuatro condiciones de nuestra definición de movimiento Browniano.

La base adecuada para realizar esta construcción es la siguiente.

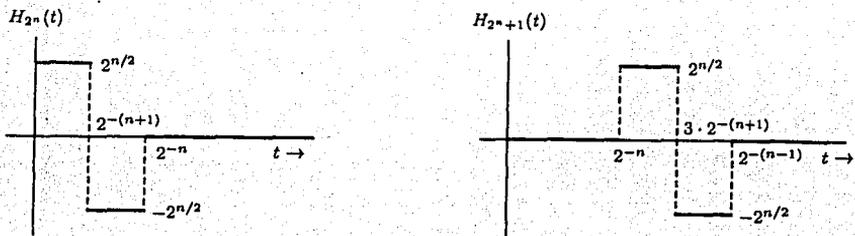


Figura 3.1: funciones de Haar

**Definición 3.2.1** Definimos las funciones  $H_0(t) = 1$ ,

$$H_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{para } \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

y para cada  $n = 1, 2, \dots$ , si  $2^n \leq k < 2^{n+1}$ , definimos

$$H_k(t) = \begin{cases} 2^{n/2} & \text{para } \frac{k-2^n}{2^n} \leq t \leq \frac{k-2^n+1}{2^n}, \\ -2^{n/2} & \text{para } \frac{k-2^n+1}{2^n} \leq t \leq \frac{k-2^n+1}{2^n}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las funciones  $H_0, H_1, H_2, \dots$  se conocen con el nombre de funciones de Haar.

Las funciones de Haar constituyen un sistema ortonormal completo de  $L_2$ . Demostraremos lo anterior más adelante en las proposiciones 3.5.2 y 3.5.3. Las funciones que utilizaremos para construir el movimiento Browniano son

$$S_k(t) = \int_0^t H_k(u) du \quad k = 1, 2, \dots$$

A estas funciones se les conoce como las funciones de Schauder.

El siguiente paso es ver que la serie

$$B_t(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(\omega) S_k(t) \quad (3.1)$$

converge y que cumple con los cuatro incisos de nuestra definición (3.1.1). Para ello utilizaremos cuatro lemas que dicen

- La serie de funciones de Schauder

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k S_k(t)$$

converge uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$  si  $|a_k| = O(k^\epsilon)$  para alguna  $\epsilon < \frac{1}{2}$ .

- Sea  $\{Z_k\}_{k=1,2,\dots}$  un conjunto de variables aleatorias normales, entonces

$$P[|Z_k| = O(k^\epsilon)] = 1$$

para cualquier  $\epsilon > 0$ .

- Una distribución normal multivariada con media 0 en  $\mathbb{R}^k$  queda determinada de manera única por su matriz de covarianzas  $C$ .
- La familia de las distribuciones normales con media 0 en  $\mathbb{R}^k$  es cerrada bajo convergencia débil.

**Teorema 3.2.2** Sean  $Z_0, Z_1, \dots$  una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas normales estándar, y sean  $\{S_k\}$  las funciones de Schauder. Entonces la serie aleatoria

$$B_t(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(\omega) S_k(t) \quad (3.2)$$

converge uniformemente en  $t$  con probabilidad 1, y las variables aleatorias  $\{B_t : t \geq 0\}$  forman un movimiento Browniano en el sentido de la definición 3.1.1 para  $0 \leq t \leq 1$ .

*Demostración.* La convergencia uniforme casi donde quiera de (3.2) es consecuencia de los lemas 3.5.4 y 3.5.5.

Como las funciones  $S_k(t)$  son continuas y satisfacen la propiedad  $S_k(0) = 0$ , la suma  $B_t(\omega)$  también será continua y tomará el valor 0 en  $t = 0$ , con lo que quedan demostrados los incisos (a) y (d) de la definición 3.1.1.

Para probar los incisos (b) y (c), consideremos tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  en  $[0, 1]$  y las variables aleatorias  $B_{t_i}$ . Si la serie (3.2) terminara en el  $k$ -ésimo término, definiría a  $B_{t_i}$  como combinación lineal de  $k$  variables aleatorias normales con media 0, por lo que  $\{B_{t_j}\}_{j=1}^k$  sería a su vez una normal multivariada con media 0. Gracias al lema 3.5.7 obtenemos que  $\{B_{t_j}\}_{j=1}^k$  definida como en (3.2) es una normal multivariada con media 0.

Calcularemos la matriz de covarianzas de  $\{B_{t_j}\}_{j=1}^k$ :

$$\begin{aligned} E(B_s B_t) &= E\left(\sum_{j=0}^{\infty} Z_j S_j(s) \sum_{k=0}^{\infty} Z_k S_k(t)\right) = \sum_{j,k} E(Z_j Z_k) S_j(s) S_k(t) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} S_j(s) S_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^s H_j(u) du \int_0^t H_j(v) dv \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \langle 1_{[0,s]}, H_j \rangle \langle 1_{[0,t]}, H_j \rangle = \langle 1_{[0,s]}, 1_{[0,t]} \rangle \end{aligned}$$

La relación de Parseval, válida para cualquier base ortonormal  $\{\Phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ , nos dice que

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \Phi_k \rangle \langle g, \Phi_k \rangle$$

y basándonos en ella tenemos que

$$E(B_s B_t) = \int_0^1 1_{[0,s]}(u) 1_{[0,t]}(u) du = \min\{s, t\} \quad (3.3)$$

que junto con el lema 3.5.6 y la proposición 3.5.1 indica que  $\{B_{t_j}\}_{j=1}^k$  tiene la misma matriz de covarianzas que tendría un movimiento Browniano, lo que termina la demostración.  $\square$

Por último, para generar el movimiento Browniano en los reales, basta tomar una sucesión de movimientos Brownianos  $\{B_t^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  sobre el intervalo  $[0, 1]$  independientes dos a dos. Definimos  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  como:

$$Y_t(\omega) = B_t^{(1)}(\omega) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1,$$

y recursivamente,

$$Y_t(\omega) = Y_n(\omega) + B_{t-n}^{(n+1)}(\omega) \quad \text{para } n \leq t \leq n+1.$$

Es claro que el proceso  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento Browniano estándar de acuerdo con la definición 3.1.2.

Esto termina nuestra primera construcción del movimiento Browniano.

### 3.3 Una consecuencia de la primera construcción

Mediante esta construcción podemos obtener un movimiento Browniano a partir de una variable aleatoria uniforme en el intervalo  $[0, 1]$  como se indica a continuación.

Dada la expansión decimal  $0.Y_1Y_2Y_3\dots$  de un número real  $Y$  entre 0 y 1, podemos acomodar sus dígitos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc} Y_1 & Y_3 & Y_6 & Y_{10} & \dots & & \\ Y_2 & Y_5 & Y_9 & \dots & & & \\ Y_4 & Y_8 & \dots & & & & \\ Y_7 & \dots & & & & & \\ & \vdots & & & & & \end{array}$$

de este modo construimos una familia numerable de números reales entre 0 y 1

$$\begin{aligned} U_1 &= 0.Y_1Y_3Y_6Y_{10}\dots, \\ U_2 &= 0.Y_2Y_5Y_9Y_{14}\dots, \\ U_3 &= 0.Y_4Y_8Y_{13}Y_{19}\dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Si ahora consideramos que  $Y$  es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ , entonces  $U_1, U_2, \dots$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas uniformes en el intervalo  $[0, 1]$ . Sea  $\Phi^{-1}$  la función inversa de la función acumulada de la distribución normal

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\{-t^2/2\} dt,$$

y sea  $Z_k = \Phi^{-1}(U_k)$ . Estas últimas variables aleatorias son idénticamente distribuidas normales estándar e independientes, pues las variables aleatorias  $U_k$ 's lo son. Introduciendo estas variables  $Z_k$  en la ecuación (3.2), obtenemos un movimiento Browniano tan sólo usando una variable aleatoria uniforme en el intervalo  $[0, 1]$  como fuente de azar. Esto último fue tomado de [7].

### 3.4 Segunda construcción

A continuación presentaremos otra forma de construir el movimiento Browniano usando un teorema de extensión de Kolmogorov. Para cada  $t > 0$  y

para cada  $y \in \mathfrak{R}$  definimos la probabilidad

$$P(t, x, y) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-(x-y)^2/2t}.$$

Para  $t = 0$  definimos  $P(0, x, y) = \delta_x(y)$ , donde  $\delta_x(y)$  denota la función con masa unitaria en el punto  $x$ . Si  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$  definimos una medida  $\mu_{t_1, \dots, t_k}$  sobre  $(\mathfrak{R}, \mathcal{B}(\mathfrak{R}))$  como sigue. Para cada  $F_1 \times \dots \times F_k \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})$ ,

$$\mu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} P(t_1, 0, x_1) P(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots P(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

Ahora usamos el teorema 2.1.9 para construir un movimiento Browniano. Para cualquier colección de tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_k$ ,  $k \in \mathcal{N}$  (no necesariamente en orden creciente) extendemos nuestra definición de  $\mu_{t_1, \dots, t_k}$  por medio de la condición (1) del teorema de extensión de Kolmogorov. La condición (2) es entonces fácilmente verificable pues  $y \mapsto p(t, 0, y)$  es una función de densidad sobre  $\mathfrak{R}$ .

El teorema de Kolmogorov establece entonces la existencia de un espacio de probabilidad que denotaremos por  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y un proceso estocástico  $\{B_t : t \geq 0\}$  tal que las distribuciones finito dimensionales del proceso  $B_t$  están dadas por las medidas  $\mu_{t_1, \dots, t_k}$ , esto es

$$P(B_{t_1} \in F_1, \dots, B_{t_k} \in F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} P(t_1, 0, x_1) P(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots P(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

El proceso estocástico así obtenido es una versión del movimiento Browniano en  $\mathfrak{R}$ . Algunas propiedades que se pueden demostrar de este proceso son las siguientes.

- (1)  $P(B_0 = 0) = 1$ .
- (2)  $\{B_t : t \geq 0\}$  es un proceso gaussiano.
- (3)  $\{B_t : t \geq 0\}$  tiene incrementos independientes, es decir, si  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$  entonces las variables aleatorias  $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$  son independientes.
- (4) Existe una versión del proceso  $\{B_t : t \geq 0\}$  tal que  $B_t(\omega)$  es continua como función de  $t$ .
- (5)  $E[B_t] = 0$  para toda  $t \geq 0$ .

- (6)  $E[|B_t|^2] = t$ .  
 (7)  $E[B_t \cdot B_s] = \min\{s, t\}$ .  
 (8)  $E[|B_t - B_s|^2] = (t - s)$  si  $0 \leq s \leq t$ .

Esta construcción se puede revisar con mayor detalle en [11].

### 3.5 Resultados utilizados

En esta sección recopilamos varios resultados utilizados en la primera construcción. La primera proposición determina la covarianza de un movimiento Browniano. Las siguientes dos proposiciones hablan acerca de las funciones de Haar. Los últimos cuatro lemas hablan de la convergencia de la serie (3.2) y de la variable aleatoria normal multivariada.

**Proposición 3.5.1** *Sea  $\{B_t : t \geq 0\}$  un movimiento Browniano estándar, entonces para cualesquiera  $s, t \geq 0$ ,*

$$E(B_t B_s) = \min\{t, s\} .$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad supondremos  $t \geq s$ , de modo que  $\min\{t, s\} = s$ . Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} E(B_t B_s) &= E(\{B_t - B_s + B_s\} B_s) \\ &= E(\{B_t - B_s\} B_s + B_s^2) \\ &= E(B_t - B_s) E(B_s) + E(B_s^2) \\ &= \text{Var}(B_s) + E^2(B_s) \\ &= \text{Var}(B_s) \\ &= s \\ &= \min\{s, t\} \end{aligned}$$

□

**Proposición 3.5.2** *Las funciones de Haar son un sistema ortonormal.*

*Demostración.* Claramente  $\|H_0\| = \|H_1\| = 1$ . Y si  $2^n \leq k < 2^{n+1}$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\|H_k\|^2 &= \int_0^1 H_k^2(t) dt = \int_{\frac{k-2^n}{2^n}}^{\frac{k-2^n+1}{2^n}} (2^{\frac{n}{2}})^2 dt + \int_{\frac{k-2^n+1}{2^n}}^{\frac{k-2^n+1}{2^n}} (-2^{\frac{n}{2}})^2 dt \\ &= \int_{\frac{k-2^n}{2^n}}^{\frac{k-2^n+1}{2^n}} 2^n dt = 2^n \frac{1}{2^n} = 1,\end{aligned}$$

de donde obtenemos que las funciones de Haar son normales. Por la observación anterior, si  $k = l$ , entonces  $\langle H_k, H_l \rangle = 1$ , por lo que en adelante supondremos que  $k \neq l$ , y sin pérdida de generalidad, supondremos  $k < l$ . Tomamos  $m, n$ , tales que  $2^m \leq k < 2^{m+1}$ ,  $2^n \leq l < 2^{n+1}$ . Si  $m = n$ , entonces los intervalos  $[\frac{k-2^m}{2^m}, \frac{k-2^m+1}{2^m}]$  y  $[\frac{l-2^n}{2^n}, \frac{l-2^n+1}{2^n}]$  son ajenos, pues  $k+1 \leq l$ , por lo que  $H_k H_l = 0$  en todo el intervalo  $[0,1]$ . De ahí que

$$\langle H_k, H_l \rangle = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Si  $m < n$ , y los intervalos  $[\frac{k-2^m}{2^m}, \frac{k-2^m+1}{2^m}]$  y  $[\frac{l-2^n}{2^n}, \frac{l-2^n+1}{2^n}]$  son ajenos, análogamente

$$\langle H_k, H_l \rangle = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Si  $m < n$ , y los intervalos  $[\frac{k-2^m}{2^m}, \frac{k-2^m+1}{2^m}]$  y  $[\frac{l-2^n}{2^n}, \frac{l-2^n+1}{2^n}]$  no son ajenos, entonces  $[\frac{l-2^n}{2^n}, \frac{l-2^n+1}{2^n}]$  está contenido en  $[\frac{k-2^m}{2^m}, \frac{k-2^m+1}{2^m}]$  o en  $[\frac{k-2^m+1}{2^m}, \frac{k-2^m+1}{2^m}]$  por lo que  $H_k H_l$  vale 0 fuera del intervalo más pequeño y

$$\begin{aligned}\langle H_k, H_l \rangle &= \int_{\frac{l-2^n}{2^n}}^{\frac{l-2^n+1}{2^n}} 2^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{m}{2}} dt + \int_{\frac{l-2^n+1}{2^n}}^{\frac{l-2^n+1}{2^n}} -2^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{m}{2}} dt \\ &= 2^{\frac{m+n}{2}} \frac{1}{2^{n+1}} - 2^{\frac{m+n}{2}} \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 0,\end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned}\langle H_k, H_l \rangle &= \int_{\frac{l-2^n}{2^n}}^{\frac{l-2^n+1}{2^n}} 2^{\frac{n}{2}} (-2^{\frac{m}{2}}) dt + \int_{\frac{l-2^n+1}{2^n}}^{\frac{l-2^n+1}{2^n}} -2^{\frac{n}{2}} (-2^{\frac{m}{2}}) dt \\ &= -2^{\frac{m+n}{2}} \frac{1}{2^{n+1}} + 2^{\frac{m+n}{2}} \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 0,\end{aligned}$$

de donde las funciones de Haar son entonces ortogonales.  $\square$

**Proposición 3.5.3** Las funciones de Haar forman un sistema ortonormal completo en  $L_2$ .

*Demostración.* La proposición anterior muestra que las funciones de Haar forman un sistema ortonormal. Para ver que es completo, supondremos que existe una función  $f$  en  $L_2$  tal que para cada  $k=0,1,2,\dots$ ,

$$0 = \langle f, H_k \rangle = \int_0^1 f(t) H_k(t) dt. \quad (3.4)$$

Llamamos  $F$  a la integral indefinida de  $f$ ,

$$F(t) = \int_0^t f(u) du$$

La función  $F$  existe y es continua, pues  $f$  pertenece a  $L_2[0,1]$ , y  $F(0) = 0$ . Ahora probemos por inducción sobre  $n$  que  $F(\frac{k}{2^n}) = 0$ . Usando las ecuaciones (3.4),

$$\begin{aligned} \langle f, H_0 \rangle &= \int_0^1 f(t) dt \\ &= F(1) - F(0) \\ &= F(1), \end{aligned}$$

de donde  $F(1) = 0$ . Además

$$\begin{aligned} \langle f, H_1 \rangle &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 -f(t) dt \\ &= F(\frac{1}{2}) - F(0) - F(1) + F(\frac{1}{2}) \\ &= 2F(\frac{1}{2}), \end{aligned}$$

de donde  $F(\frac{1}{2}) = 0$ . Análogamente

$$\begin{aligned} \langle f, H_2 \rangle &= \int_0^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} -2^{\frac{1}{2}} f(t) dt \\ &= 2^{\frac{1}{2}} [F(\frac{1}{4}) - F(0) - F(\frac{1}{2}) + F(\frac{1}{4})] \\ &= 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} F(\frac{1}{4}), \end{aligned}$$

de donde  $F(\frac{1}{4}) = 0$ . Fijemos  $n$  y supongamos que  $F(\frac{l}{2^m}) = 0$  cuando  $m \leq n$ . Sin pérdida de generalidad, podemos tomar  $k$  impar, por lo que  $\frac{k-1}{2}$  y  $\frac{k+1}{2}$  son enteros. Por la construcción de las funciones de Haar, existe  $s$  tal que

$$H_s(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{para } \frac{k-1}{2^{n-1}} \leq t \leq \frac{k}{2^n}, \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \text{para } \frac{k}{2^n} < t \leq \frac{k+1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle f, H_s \rangle &= \int_{\frac{k-1}{2^{n-1}}}^{\frac{k}{2^n}} 2^{\frac{n-1}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^{n-1}}} -2^{\frac{n-1}{2}} f(t) dt \\ &= 2^{\frac{n-1}{2}} [F(\frac{k}{2^n}) - F(\frac{k-1}{2^{n-1}})] - F(\frac{k+1}{2^{n-1}}) + F(\frac{k}{2^n}) \\ &= 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2F(\frac{k}{2^n}), \end{aligned}$$

de donde  $F(\frac{k}{2^n}) = 0$ . Como el conjunto  $\{k/2^n : k = 0, 1, \dots, 2^n; n = 1, 2, \dots\}$  es denso en  $[0, 1]$ ,  $F$  es continua en todo el intervalo  $[0, 1]$  y  $F(\frac{k}{2^n}) = 0$  para toda  $n, k$ , podemos entonces concluir que  $F = 0$ . Al no existir ninguna función ortonormal a todas las funciones de Haar, concluimos que éstas generan  $L_2$ .  $\square$

**Lema 3.5.4** *La serie de funciones de Schauder*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k S_k(t) \tag{3.5}$$

converge uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$  si  $|a_k| = O(k^\epsilon)$  para alguna  $\epsilon < \frac{1}{2}$ .

*Demostración.* Las funciones  $S_k(t)$  son no negativas; y para  $2^n \leq k < 2^{n+1}$  alcanzan su máximo en  $t = 2^{-\frac{n}{2}-1}$ , además de tener soportes disjuntos si son funciones distintas. Sea

$$b_n = \max\{|a_k| : 2^n \leq k < 2^{n+1}\}.$$

Entonces

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k S_k(t) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k S_k(t)| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |S_k(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^{-\frac{n}{2}-1}.$$

Pero como  $|a_k| = O(k^c)$ , para alguna  $c > 0$

$$c > \frac{|a_k|}{k^c},$$

y para  $2^n \leq k < 2^{n+1}$ ,

$$\frac{|a_k|}{k^c} \geq \frac{|a_k|}{2^{(n+1)c}} = \frac{|a_k|}{2^{nc} 2^c}.$$

Entonces

$$\frac{|a_k|}{2^{nc}} < 2^c c = c',$$

en particular,

$$\frac{|b_n|}{2^{nc}} < c'.$$

Por lo tanto

$$|b_n| < c' 2^{nc}$$

y

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k S_k(t) \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^{-\frac{n}{2}-1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} c' 2^{nc} 2^{-\frac{n}{2}-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c' 2^{n(\epsilon-\frac{1}{2})} 2^{-1} = c' 2^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(\epsilon-\frac{1}{2})} < \infty, \end{aligned}$$

pues  $\epsilon - \frac{1}{2} < 0$ , de donde la serie (3.5) converge absolutamente. Además converge uniformemente, pues la convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(\epsilon-\frac{1}{2})}$$

no depende de  $t$ . □

**Lema 3.5.5** Sea  $\{Z_k\}_{k=1,2,\dots}$  un conjunto de variables aleatorias normales, entonces

$$P[|Z_k| = O(k^\epsilon)] = 1 \tag{3.6}$$

para cualquier  $\epsilon > 0$ .

*Demostración.* Una distribución normal tiene momentos finitos de todos los órdenes, de modo que podemos usar la siguiente versión de la desigualdad de Chebyshev

$$P(|Z_k| \geq k^\epsilon) \leq \frac{E(Z_k^{2N})}{k^{2\epsilon N}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots N}{k^{2\epsilon N}}$$

para toda  $\epsilon > 0$ ,  $N$  natural. Tomando  $N$  suficientemente grande, el lado derecho de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots N}{k^{2\epsilon N}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\epsilon N}} < \infty$$

converge.

Considerando  $A_k$  al evento  $\{|Z_k| > k^\epsilon\}$ , se puede ver que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = B$$

donde  $B$  es el evento "Dada  $N$  natural, existe  $k > N$  tal que  $|Z_k| > k^\epsilon$ ". Usando la primera parte del lema de Borel-Cantelli afirmamos que con probabilidad 1, a lo más una cantidad finita de los eventos  $\{|Z_k| > k^\epsilon\}$  ocurre, lo que implica la ecuación (3.6).  $\square$

**Lema 3.5.6** *Una distribución normal multivariada con media 0 en  $\mathfrak{R}^k$  queda determinada de manera única por su matriz de covarianzas.*

*Demostración.* Supongamos que  $Z$  es un vector aleatorio con componentes normales estándar independientes en  $\mathfrak{R}^k$ . Su función característica es

$$\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = E\left(e^{i \sum_{j=1}^k \lambda_j Z_j}\right) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \lambda_j^2}.$$

Expresado en forma matricial,

$$\Phi(\lambda) = E\left(e^{i\lambda^T Z}\right) = e^{-\frac{1}{2} \lambda^T \lambda}, \quad (3.7)$$

donde  $\lambda$  es un vector columna con entradas  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .

Ahora consideremos el vector aleatorio  $Y = AZ$  en  $\mathfrak{R}^n$ , donde  $A$  es una matriz de  $k \times n$ , y llamemos  $\Psi$  a la función característica de  $Y$ . Entonces para un vector columna  $\eta$  en  $\mathfrak{R}^n$ .

$$\Psi(\eta) = E\left(e^{-\frac{1}{2} \eta^T Y}\right) = E\left(e^{i\eta^T AZ}\right),$$

que es la misma expresión de  $\Phi(\lambda)$  de la ecuación 3.7 con  $\lambda^T = \eta^T A$ , de donde

$$\Psi(\eta) = e^{-\frac{1}{2}\eta^T A A^T \eta}.$$

Si  $A \in M_k(\mathfrak{R})$  es una matriz simétrica, entonces  $A \cdot A^T = A^2$  es la matriz de covarianzas de  $Y$  y es el único parámetro en la función característica de  $Y$ .

□

**Lema 3.5.7** *La familia de las distribuciones normales con media 0 en  $\mathfrak{R}^k$  es cerrada bajo convergencia débil.*

*Demostración.* Sean  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  variables aleatorias normales multivariadas en  $\mathfrak{R}^k$  con media 0, tales que  $B_n \rightarrow X$  débilmente. Cada  $B_n$  tiene función característica

$$\Psi_n(\eta) = e^{-\frac{1}{2}\eta^T C_n \eta}$$

y estas funciones convergen a la función característica de  $X$ . Debido a que en la expresión anterior todos los valores son reales, es posible calcular el logaritmo de la función característica de cada  $B_n$ , y se puede ver que el límite de las formas cuadráticas  $\eta^T C_n \eta$  existe para toda  $\eta$ . Este límite debe ser una forma cuadrática simétrica definida no negativa  $\eta^T C \eta$ . De este modo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln[\Psi_n(\eta)] = -\frac{1}{2}\eta^T C \eta = \Phi(\eta).$$

Donde  $\Phi$  es el logaritmo de la función característica de  $X$ , por lo que  $X$  debe ser también una variable aleatoria normal multivariada. □

# Capítulo 4

## Propiedades

En este capítulo buscamos dar una descripción amplia de las características del movimiento Browniano, así como de los principales conceptos matemáticos derivados de él. Para ello, se incluyen las siguientes seis secciones:

- 1) Distribuciones conjuntas.
- 2) Trayectorias Brownianas.
- 3) Caracterizaciones del movimiento Browniano.
- 4) Variaciones del movimiento Browniano.
- 5) Movimiento Browniano multivariado.
- 6) Simulación.

En este capítulo denotaremos por  $\mathcal{F}_t$  a la filtración natural del movimiento Browniano.

La demostración de algunos de los resultados expuestos en este capítulo rebasan el objetivo de este trabajo. En esos casos incluimos una referencia para consulta más avanzada.

Antes de entrar en los demás temas, enunciaremos sin demostración tres propiedades fundamentales del movimiento Browniano.

**Teorema 4.0.8** *El movimiento Browniano es un proceso de Markov, es decir, para  $s < t$ , dada la información de  $B_s$ , la variable aleatoria  $B_t$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$ .*

**Teorema 4.0.9** *El movimiento Browniano satisface la propiedad fuerte de Markov, es decir, si  $S$  es un tiempo aleatorio tal que  $0 \leq S \leq t$ , entonces, dada la información de  $B_S$ , la variable aleatoria  $B_t$  es independiente de  $\mathcal{F}_S$ .*

**Teorema 4.0.10** *El movimiento Browniano es una martingala continua, es decir,  $E(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s$  casi seguramente.*

Se puede encontrar información completa sobre estos teoremas en [13].

## 4.1 Distribuciones conjuntas

En esta sección calcularemos la distribución conjunta de  $B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}$ , así como la densidad condicional de  $B_{t_2}$ , dado  $B_{t_3}$  y  $B_{t_1}$  para  $t_1 < t_2 < t_3$ . Para la elaboración de esta sección se consultó [7].

**Proposición 4.1.1** *La función de densidad conjunta de  $B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}$  es*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\left( (2\pi)^n \prod_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \right)^{1/2}} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})} \right\} \quad (4.1)$$

si  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  y  $x_0 = 0$ .

*Demostración.* Notemos que el inciso b) de la definición (3.1.1) implica que

$$f(x_1, \dots, x_n) = p(x_1, t_1) p(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \cdots p(x_n - x_{n-1}, t_n - t_{n-1}),$$

donde  $p(x_k - x_{k-1}, t_k - t_{k-1})$  es la función de densidad de  $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$  evaluada en  $x_k - x_{k-1}$ , y  $p(x_1, t_1)$  es la función de densidad de  $B_{t_1}$  evaluada en  $x_1$ . Además, por el inciso a) de dicha definición,  $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$  se distribuye normal, de donde, después de algunos cálculos, podemos concluir la ecuación (4.1).  $\square$

**Proposición 4.1.2** *La función de densidad de  $B_{t_2}$ , dado  $B_{t_3}$  y  $B_{t_1}$  para  $t_1 < t_2 < t_3$  es normal con media  $a + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}(b - a)$  y varianza  $(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)/(t_3 - t_1)$ .*

*Demostración.* Empezaremos suponiendo que  $B_{t_1} = B_{t_3} = 0$ , y que  $t_1 = 0$ . De la ecuación (4.1) podemos ver que la distribución conjunta de  $B_{t_2}$  y  $B_{t_3}$  es

$$f_{t_2, t_3}(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{t_2(t_3 - t_2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{t_2} + \frac{(y - x)^2}{t_3 - t_2} \right] \right\}$$

y la densidad de  $B_{t_3}$  es

$$f_{t_3}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_3}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t_3}\right),$$

por lo que la densidad de  $B_{t_2}$  dado que  $B_0 = 0$  y  $B_{t_3} = 0$  es

$$\frac{f_{t_2, t_3}(x, 0)}{f_{t_3}(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_2(t_3 - t_2)/t_3}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{t_2(t_3 - t_2)/t_3}\right\}$$

que es una normal con media 0 y varianza  $t_2(t_3 - t_2)/t_3$ .

En general, si  $t_1 < t_2 < t_3$ , la densidad de  $B_{t_2}$  dado  $B_{t_1} = a$ ,  $B_{t_3} = b$  se calcula reduciéndola al caso anterior. Para ello, notemos primero que la dicha densidad es igual a la densidad de  $B_{t_2 - t_1}$  dado que  $B_0 = a$  y  $B_{t_3 - t_1} = b$ , pues la longitud de los intervalos es la misma; a su vez, ésta es igual a la densidad de  $a + B_{t_2 - t_1}$ , dado que  $B_0 = 0$  y  $B_{t_2 - t_1} = b - a$ ; desarrollando esta última y haciendo algunos cálculos obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{f_{t_2 - t_1, t_3 - t_1}(x - a, b - a)}{f_{t_3 - t_1}(b - a)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)/(t_3 - t_2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(x - a)^2}{t_2 - t_1} + \frac{(x - b)^2}{t_3 - t_2} - \frac{(b - a)^2}{t_3 - t_1} \right]\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)/(t_3 - t_1)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\left[x - a - \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}(b - a)\right]^2}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)/(t_3 - t_1)}\right\} \end{aligned}$$

que es la densidad de

$$a + B_{t_2 - t_1} + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}(b - a)$$

bajo las condiciones  $B_0 = 0$  y  $B_{t_3 - t_1} = 0$ .

De lo anterior concluimos que, si  $t_1 < t_2 < t_3$ , la densidad de  $B_{t_2}$  dado que  $B_{t_1} = a$ ,  $B_{t_3} = b$  es una normal con los parámetros descritos en el enunciado de la proposición.  $\square$

## 4.2 Trayectorias Brownianas

En la presente sección estudiaremos algunas propiedades de las trayectorias Brownianas, divididas en aquellas referentes a la no existencia de la derivada, algunas propiedades locales y globales, y por último, las que tienen que ver con tiempos aleatorios.

### 4.2.1 Derivada

Veremos que el movimiento Browniano no tiene derivada en dos sentidos distintos. Como sabemos, el cociente

$$\frac{B_{t+h} - B_t}{h}$$

se distribuye normal con media 0 y varianza  $\frac{1}{h}$ , de donde concluimos la siguiente observación.

**Observación 4.2.1** Para toda  $M > 0$ ,  $t > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} P \left( \left| \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \right| \leq M \right) = 0.$$

Esta observación nos hace ver que dado el valor  $t$ , el conjunto de eventos  $\omega$  para los cuales  $B_t(\omega)$  tiene derivada, tiene probabilidad 0. El siguiente teorema fija el evento en vez del tiempo, para concluir que casi toda trayectoria Browniana es no derivable en casi todo punto.

**Teorema 4.2.2** Con probabilidad uno, el conjunto de  $t \geq 0$  para las cuales  $\frac{\partial B_t}{\partial t}$  existe tiene medida de Lebesgue cero.

*Demostración.* Definimos la variable aleatoria

$$f(t, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\partial}{\partial s} B_s(\omega) \text{ existe en } s = t, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Probaremos que  $f$  es medible como función de  $(t, \omega)$  con respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}$ , donde  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra del espacio muestral  $\Omega$ . Para ello, probaremos que  $B_t(\omega)$  es medible como función de  $(t, \omega)$ .

Para toda variable aleatoria  $X$ , la función escalón

$$S(t, \omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } a \leq t < b, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (4.2)$$

es medible, pues

$$S^{-1}(\eta, \infty) = \{(t, \omega) : a \leq t < b \text{ y } X(\omega) > \eta\} = [a, b) \times X^{-1}(\eta, \infty)$$

y  $[a, b) \times X^{-1}(\eta, \infty)$  pertenece a  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}$ .

Asimismo, la función

$$B_t^{[n]}(\omega) = \begin{cases} B_{k/n}(\omega) & \text{si } \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para  $k = 0, 1, \dots, n^2 - 1$ , es medible, pues es suma de  $n^2$  funciones de la forma (4.2). Pero, por la continuidad de las trayectorias, podemos afirmar que

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} B_t^{[n]}(\omega) = B_t(\omega) \text{ para toda } t\right) = 1.$$

Debido a que el límite casi donde quiera de funciones medibles es medible, concluimos que el movimiento Browniano  $B_t(\omega)$  es medible como función de  $t$  y  $\omega$ .

Una vez que  $B_t(\omega)$  es medible, algunos resultados de medida nos permiten afirmar que

$$\limsup_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{Q}} \frac{B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)}{h} = D^+ B_t(\omega)$$

y

$$\liminf_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{Q}} \frac{B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)}{h} = D^- B_t(\omega)$$

son medibles, y por tanto, el conjunto donde  $D^+$  y  $D^-$  coinciden es medible; pero dicho conjunto es el conjunto en que  $f(t, \omega) = 1$ . Esto demuestra que  $f$  es medible.

Ahora podemos aplicar el teorema de Fubini y obtener

$$E\left(\int_0^\infty f(t, \omega) dt\right) = \int_0^\infty E[f(t, \omega)] dt.$$

Pero para cada  $t$ , la observación (4.2.1) indica que  $f(t, \omega) = 0$  casi seguramente, de modo que  $E[f(t, \omega)] = 0$ . Esto indica que el lado derecho de la igualdad anterior es 0, y como la variable aleatoria  $M = \int_0^\infty f(t, \omega) dt$  es no negativa, se sigue que  $M = 0$  casi seguramente, lo que prueba el teorema.  $\square$

**Corolario 4.2.3** Con probabilidad uno, las trayectorias Brownianas no son rectificables (tienen longitud infinita) en cualquier intervalo de tiempo de longitud mayor a cero.

*Demostración.* En las funciones reales de variación acotada, la derivada debe existir casi dondequiera. Lo anterior, junto con el teorema 4.2.2, demuestran el corolario.  $\square$

Para la elaboración de estos resultados se consultó [8].

## 4.2.2 Principio de reflexión

En esta sección hablaremos de resultados donde intervienen tiempos aleatorios, por ejemplo, el primer momento en que se alcanza un valor determinado. Este material se puede ver con mayores detalles en [7].

Para algunos de los siguientes resultados, será necesario usar el principio de reflexión que a continuación enunciamos sin demostración.

### Teorema 4.2.4 Principio de reflexión

Si  $\{B_t^b : t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano cuyo punto inicial es  $b$ , entonces, para  $a > b$ ,

$$P \left[ \max_{0 \leq s \leq t} B_s^b \geq a \right] = 2P[B_t^b \geq a];$$

o bien, si  $b > a$ ,

$$P \left[ \min_{0 \leq s \leq t} B_s^b \leq a \right] = 2P[B_t^b \leq a].$$

La demostración del principio de reflexión se puede encontrar en [13], y se basa en la propiedad fuerte de Markov. Una interpretación de este principio es que la medida de un conjunto de trayectorias es igual a la medida de el conjunto de las trayectorias reflejadas a partir de un cierto punto, como muestra la figura 4.2.2.

Ahora llamaremos  $T_a$  a la variable aleatoria que denota el tiempo en que el movimiento Browniano  $\{B_t : t \geq 0\}$  alcanza el valor  $a > 0$  por vez primera, es decir,

$$T_a = \min\{t \geq 0 : B_t \geq a\}.$$

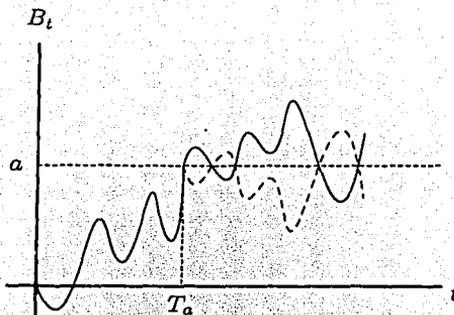


Figura 4.1: Principio de reflexión ( $b=0$ )

**Lema 4.2.5** La función de densidad de la variable aleatoria  $T_a$  denotada por  $f_a(t)$  es

$$f_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\}, \quad \text{para } t > 0. \quad (4.3)$$

*Demostración.* Usando el principio de reflexión podemos ver que

$$\begin{aligned} P(T_a \leq t) &= P\left(\max_{0 \leq u \leq t} B_u \geq a\right) \\ &= 2P(B_t > a) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $x = y\sqrt{t}$ , obtenemos

$$P(T_a \leq t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

Por último, derivando la ecuación anterior respecto a  $t$ , obtenemos la ecuación (4.3).  $\square$

Debido a lo anterior, una forma alternativa en que podemos enunciar el lema (4.2.5) es la siguiente. Si  $B_{t_0} = a$ , entonces la probabilidad  $P(a)$  de que  $B_t$

tenga al menos un cero entre  $t_0$  y  $t_1$  es

$$P(a) = \int_0^{t_1-t_0} \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2u}\right) du. \quad (4.4)$$

**Teorema 4.2.6** *La probabilidad de que el movimiento Browniano  $\{B_t : t \geq 0\}$  tenga al menos un cero en el intervalo  $(t_0, t_1)$ , es*

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{t_0}{t_1}} \quad (4.5)$$

*Demostración.* Sea  $P(u)$  a la probabilidad de que haya ceros en el intervalo  $(t_0, t_1)$  dado que  $B_{t_0} = u$ , y sea  $f$  la función de densidad de  $|B_{t_0}|$  dado que  $B_0 = 0$ . Entonces, usando el teorema de probabilidad total,

$$\alpha = \int_0^\infty P(u) f(u) du = \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}} \int_0^\infty P(u) \exp\left(-\frac{u^2}{2t_0}\right) du.$$

Sustituyendo en la ecuación (4.4) y cambiando el orden de integración obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{u^2}{2t_0}\right] \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^{t_1-t_0} \exp\left[-\frac{u^2}{2v}\right] v^{-3/2} dv \right) du \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{t_0}} \int_0^{t_1-t_0} v^{-3/2} \left( \int_0^\infty u \exp\left[-\frac{u^2}{2} \left\{ \frac{1}{v} + \frac{1}{t_0} \right\}\right] du \right) dv \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{t_0}} \int_0^{t_1-t_0} v^{-3/2} \left( -\frac{vt_0}{v+t_0} \exp\left[-\frac{u^2}{2} \left\{ \frac{1}{v} + \frac{1}{t_0} \right\}\right] \Big|_{u=0}^\infty \right) dv \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{t_0}} \int_0^{t_1-t_0} v^{-3/2} \frac{vt_0}{v+t_0} dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{t_1-t_0} \frac{\sqrt{t_0} dv}{(t_0+v)\sqrt{v}}. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $v = t_0 w^2$ , obtenemos

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{(t_1-t_0)/t_0}} \frac{dw}{1+w^2} = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_0}},$$

de donde

$$\tan \frac{\pi \alpha}{2} = \frac{\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{t_0}}$$

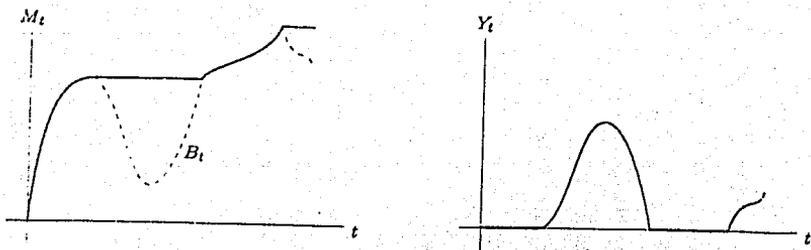


Figura 4.2: Trayectorias de los procesos  $M_t$  y  $Y_t$

y

$$\cos \frac{\pi\alpha}{2} = \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t_1}},$$

de donde concluimos la ecuación (4.5). □

Denotamos  $B_t^x$  al movimiento Browniano con  $B_0^x = x$ , y definimos para  $x > 0$ ,  $y > 0$ , y  $t > 0$

$$A_t(x, y) = P\left(B_t^x > y, \min_{0 \leq u \leq t} B_u^x > 0\right), \quad (4.6)$$

$$M_t = \max_{0 \leq u \leq t} B_u, \quad (4.7)$$

$$Y_t = M_t - B_t.$$

**Teorema 4.2.7** Para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$A_t(x, y) = \int_{y-x}^{y+x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2t}\right\} du$$

*Demostración.* Podemos ver que

$$P[B_t^x > y] = A_t(x, y) + P[B_t^x > y, \min_{0 \leq u \leq t} B_u^x \leq 0]. \quad (4.9)$$

Aplicaremos el principio de reflexión al segundo sumando de la siguiente manera. Cada trayectoria que inicia en  $x$ , alcanza un mínimo menor a 0 y termina en un valor mayor a  $y$ , puede reflejarse respecto al eje de las abscisas a partir del primer momento en que alcanza el valor 0. Al hacerlo, obtenemos una trayectoria que inicia en  $x$  y termina en un valor menor a  $-y$ . De lo anterior deducimos que

$$P[B_t^x > y, \min_{0 \leq u \leq t} B_u^x \leq 0] = P[B_t^x < -y, \min_{0 \leq u \leq t} B_u^x \leq 0] \quad (4.10)$$

$$= P[B_t^x < -y]. \quad (4.11)$$

Sustituyendo (4.11) en (4.9) obtenemos

$$\begin{aligned} A_t(x, y) &= P[B_t^x > y] - P[B_t^x < -y] \\ &= P[B_t > y - x] - P[B_t < -(y + x)] \\ &= P[B_t > y - x] - P[B_t > y + x] \\ &= \int_{y-x}^{y+x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2t}\right\} du. \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.2.8** *La función de densidad conjunta de  $M_t$  y  $Y_t$  es*

$$f(m, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} (m + y) \exp\left[-\frac{(m + y)^2}{2t}\right], \quad m \geq 0, \quad y \geq 0.$$

*Demostración.* El principio de reflexión nos muestra que para  $m \geq 0, m \geq x$ ,

$$\begin{aligned} P[M_t \geq m, B_t \leq x] &= P[B_t \geq 2m - x] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{2m - x}{\sqrt{t}}\right), \end{aligned}$$

donde  $\Phi(x)$  es la función de distribución de una variable normal estándar. Para obtener la función de densidad conjunta de  $M_t$  y  $B_t$ , derivamos con respecto a  $m$  y a  $x$ , cambiando de signo. Haciendo los cálculos podemos ver que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial}{\partial x} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{2m - x}{\sqrt{t}}\right) \right] &= -\frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{1}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{2m - x}{\sqrt{t}}\right) \right] \\ &= \frac{2m - x}{t} \frac{2}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{2m - x}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Para obtener la función de densidad  $f(m, y)$  de  $M(t)$  y  $Y(t)$ , consideramos

$$P[M_t \leq a, Y_t \leq b] = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b \frac{2m - (m - y)}{t} \frac{2}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{2m - (m - y)}{\sqrt{t}}\right) dy dm$$

y derivando con respecto a  $a$  y  $b$ , encontramos la función de densidad deseada

$$f(m, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} (m + y) \exp\left[-\frac{(m + y)^2}{2t}\right], \quad m \geq 0, \quad y \geq 0.$$

□

### 4.2.3 Propiedades locales y globales

A continuación trataremos de describir el comportamiento las trayectorias Brownianas, lo que nos da una idea de cómo se ven las gráficas de las trayectorias. Estos resultados se analizan con mayor profundidad en [8], [13] y [7].

**Proposición 4.2.9** *Con probabilidad uno, el conjunto  $\{t \geq 0 : B_t = a\}$  tiene medida de Lebesgue cero.*

*Demostración.* De manera análoga a la demostración del teorema (4.2.2), definimos

$$g(t, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } B_t(\omega) = a \\ 0 & \text{si } B_t(\omega) \neq a. \end{cases}$$

$B_t(\omega)$  es medible, y la constante  $a$  también lo es; entonces el conjunto donde  $B_t(\omega)$  y  $a$  conciden también lo es. Lo anterior implica que como función de  $t$  y  $\omega$ ,  $g$  es medible.

Una vez más aplicando el teorema de Fubini,

$$E\left(\int_0^\infty g(t, \omega) dt\right) = \int_0^\infty E[g(t, \omega)] dt.$$

Y fijando  $t$ ,

$$P[g(t, \omega) \neq 0] = P[B_t = a] = 0,$$

pues  $B_t$  es una variable aleatoria normal. De lo anterior obtenemos que

$$E[g(t, \omega)] = 0$$

para toda  $t$ , y entonces

$$E\left[\int_0^\infty g(t, \omega) dt\right] = \int_0^\infty E[g(t, \omega)] dt = 0$$

y como  $g(t, \omega) \geq 0$ , concluimos que con probabilidad uno,

$$\int_0^\infty g(t, \omega) dt = 0.$$

□

**Teorema 4.2.10 Ley del logaritmo iterado (versión 1)**

Sea  $\{B_t : t \geq 0\}$  un movimiento Browniano. Entonces

$$P\left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t \ln \ln t}} = \sqrt{2}\right) = 1 \quad (4.12)$$

*Demostración.* Si tomamos en cuenta que

$$B_n = \sum_{i=1}^n (B_i - B_{i-1}),$$

donde cada  $B_i - B_{i-1}$  es una normal estándar, por los teoremas (6.0.7) y (6.0.8), tenemos que la ecuación (4.12) es cierta para un parámetro entero  $n$ , en lugar del parámetro continuo  $t$ . Como el límite superior en cuestión es válido sobre los naturales, para los reales tenemos que

$$P\left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t \ln \ln t}} \geq \sqrt{2}\right) = 1.$$

Falta ver que entre dos enteros consecutivos, el movimiento no varía excesivamente. Sea

$$m_n = \max_{n-1 \leq t \leq n} (B_t - B_{n-1}).$$

Por el principio de reflexión tenemos que

$$P(m_n > a) = 2P(B_n - B_{n-1} \geq a).$$

Ahora, usando el lema (3.5.5),  $B_n - B_{n-1} = O(n^\epsilon)$  casi seguramente, por lo que también  $m_n = O(n^\epsilon)$  con probabilidad 1, para toda  $\epsilon > 0$ . En particular,

$$P(m_n = o(\sqrt{n \ln \ln n})) = 1,$$

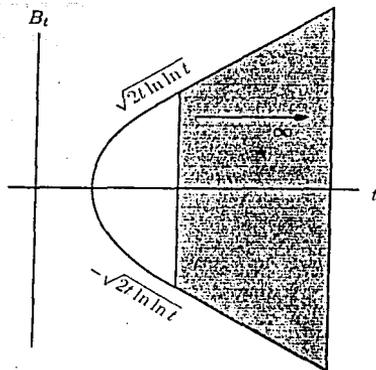


Figura 4.3: Cotas de la ley del logaritmo iterado (versión 1)

lo que termina la prueba. □

Este resultado indica que casi seguramente las trayectorias del movimiento Browniano se encuentran dentro de la región delimitada por las gráficas de las funciones  $\pm\sqrt{2t \ln \ln t}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . El siguiente corolario surge como consecuencia de ello.

**Corolario 4.2.11** *Una trayectoria Browniana tiene ceros arbitrariamente grandes casi seguramente.*

*Demostración.* El teorema (4.2.10) muestra que con probabilidad uno, existen valores de  $t$  arbitrariamente grandes tales que  $B_t(\omega) > 0$ . Aplicando el mismo argumento a  $-B_t(\omega)$ , que es otra trayectoria Browniana, obtenemos que existen valores de  $t$  arbitrariamente grandes tales que  $B_t(\omega) < 0$ . Como las trayectorias Brownianas son continuas casi seguramente, con probabilidad uno,  $B_t(\omega)$  debe también tener ceros arbitrariamente grandes. □

**Lema 4.2.12** *Sea  $\{B_t : t \geq 0\}$  un movimiento Browniano estándar, entonces el proceso*

$$B_t^{(2)} = \begin{cases} tB_{1/t} & \text{para } t > 0, \\ 0 & \text{para } t = 0, \end{cases}$$

*es un movimiento Browniano estándar.*

*Demostración.* Para probar que  $B_t^{(2)}$  cumple los cuatro incisos de la definición (3.1.1), sólo tenemos que verificar los incisos (b) y (d), pues (a) y (c) son inmediatos.

Para el inciso (b), es claro que  $B_{t+s}^{(2)} - B_t^{(2)}$  se distribuye normal con media 0; basta probar que dicha variable tiene varianza  $s$ :

$$\begin{aligned} E[(B_{t+s}^{(2)} - B_t^{(2)})^2] &= E\left[(tB_{1/t} - (t+s)B_{1/(t+s)})^2\right] \\ &= t^2 E\left[(B_{1/t} - B_{1/(t+s)})^2\right] + s^2 E\left[(B_{1/(t+s)})^2\right] \\ &= t^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+s}\right) + s^2 \frac{1}{t+s} = s. \end{aligned}$$

$B_{t+s}^{(2)}$  casi seguramente es continua si  $t > 0$  por la continuidad de  $B_t$ . Para verificar la continuidad en  $t = 0$ , usamos el teorema (4.2.10) para  $B_t$  y haciendo el cambio de variable  $t = 1/s$ ,

$$P\left(\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{B_{1/s} \sqrt{s}}{\sqrt{\ln \ln 1/s}} = \sqrt{2}\right) = P\left(\limsup_{s \rightarrow 0} s B_{1/s} = \sqrt{2s \ln \ln 1/s}\right) = 1.$$

Como

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{2s \ln \ln 1/s} = 0,$$

concluimos que

$$P\left(\lim_{t \rightarrow 0} B_t^{(2)} = 0\right) = 1.$$

□

El lema anterior nos permite enunciar la ley fuerte de los grandes números para el movimiento Browniano.

### **Teorema 4.2.13** Ley fuerte de los grandes números para el movimiento Browniano.

Sea  $\{B_t : t \geq 0\}$  un movimiento Browniano, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} t B_{1/t} = 0 \quad \text{casi seguramente,}$$

y equivalentemente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} B_t = 0 \quad \text{casi seguramente.}$$

**Teorema 4.2.14 Ley del logaritmo iterado (versión 2)**

$$P \left( \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{B_{t_0+h} - B_{t_0}}{\sqrt{h \ln \ln(1/h)}} = \sqrt{2} \right) = 1.$$

*Demostración.* Usando el lema (4.2.12) en el proceso  $B_{t_0+h} - B_{t_0}$ , haciendo el cambio de variable  $h = 1/t$ , podemos ver que

$$(B_{t_0+t} - B_{t_0})^{(2)} = t(B_{t_0+1/t} - B_{t_0}),$$

de donde

$$\frac{t(B_{t_0+1/t} - B_{t_0})}{\sqrt{t \log \log t}} = \frac{1/h(B_{t_0+h} - B_{t_0})}{\sqrt{1/h \log \log 1/h}} = \frac{B_{t_0+h} - B_{t_0}}{\sqrt{h \log \log 1/h}}$$

y usando el teorema (4.2.10),

$$\sqrt{2} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t(B_{t_0+1/t} - B_{t_0})}{\sqrt{t \log \log t}} = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{B_{t_0+h} - B_{t_0}}{\sqrt{h \log \log 1/h}},$$

lo que prueba el teorema.  $\square$

Esta versión de la ley del logaritmo iterado indica que casi seguramente las trayectorias del movimiento Browniano se encuentran dentro de la región determinada por las gráficas de las funciones  $\pm \sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}$  cuando  $t \rightarrow 0$ .

**Corolario 4.2.15** Para cada  $t_0 \geq 0$  la función  $t \mapsto B_t - B_{t_0}$  tiene casi seguramente una sucesión de ceros que converge a  $t_0$  por la derecha.

*Demostración.* Por el teorema (4.2.14) con probabilidad uno existe una sucesión  $\{r_n\}$  convergente a  $t_0$  por la derecha tal que  $\frac{B_{r_n} - B_{t_0}}{\sqrt{r_n \log \log(1/r_n)}} \rightarrow \sqrt{2} > 0$ , por lo que podemos suponer  $B_{r_n} - B_{t_0} > 0$  para toda  $n$ . De igual manera para el movimiento Browniano  $-B_t$ , con probabilidad uno existe una sucesión  $\{s_n\}$  convergente a  $t_0$  por la derecha tal que  $\frac{-B_{s_n} + B_{t_0}}{\sqrt{s_n \log \log(1/r_n)}} \rightarrow \sqrt{2} > 0$ , por lo que podemos suponer  $-B_{s_n} + B_{t_0} > 0$ , o bien,  $B_{s_n} - B_{t_0} < 0$  para toda  $n$ . Como  $B_t$  es continua casi seguramente, con probabilidad uno habrá una sucesión de ceros de  $B_t - B_{t_0}$  que converge a  $t_0$  por la derecha.  $\square$   
De los resultados anteriores podemos concluir el siguiente corolario.

**Corolario 4.2.16** Sea  $\Gamma = \{t \geq 0 : B_t = 0\}$ . Entonces, casi seguramente

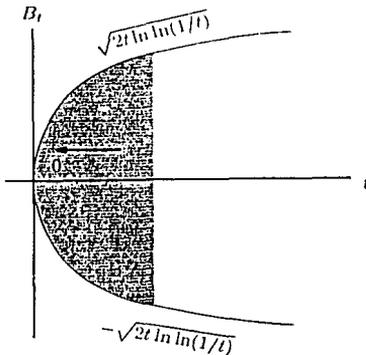


Figura 4.4: Cotas de la ley del logaritmo iterado (versión 2)

- a) El conjunto  $\Gamma$  es cerrado y no acotado.
- b) Tiene medida de Lebesgue igual a cero.
- c)  $\Gamma$  no tiene puntos aislados en  $(0, \infty)$ .
- d) El punto 0 es punto de acumulación de  $\Gamma$ .

*Demostración.* Como  $\Gamma$  es la imagen inversa de un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}$ , y las trayectorias Brownianas son continuas casi seguramente,  $\Gamma$  debe ser cerrado casi seguramente. El corolario (4.2.11) nos dice que, casi seguramente  $\Gamma$  es no acotado, con lo que queda probado el inciso (a).

El inciso (b) se obtiene de la proposición (4.2.9), y los incisos (c) y (d) del corolario (4.2.15).  $\square$

**Proposición 4.2.17** Sea  $\{B_t : t \geq 0\}$  un Movimiento Browniano, y sea  $\xi_n : a = t_0^n < \dots < t_{m_n}^n = b$  una sucesión de particiones del intervalo  $[a, b]$  tal que  $\max(t_k^n - t_{k-1}^n)$  tiende a cero si  $n$  tiende a infinito, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} [B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}]^2 = b - a \quad \text{en probabilidad.} \quad (4.13)$$

*Demostración.* Sea  $W_n = \sum_{k=1}^{m_n} [B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}]^2$ . Entonces

$$\begin{aligned} E[W_n] &= E \left[ \sum_{k=1}^{m_n} \{B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}\}^2 \right] = \sum_{k=1}^{m_n} E[\{B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}\}^2] \\ &= \sum_{k=1}^{m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n) = b - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[W_n] &= E \left[ \left( \sum_{k=1}^{m_n} \{B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}\}^2 \right)^2 \right] - (b - a)^2 \\ &= E \left[ \sum_{k=1}^{m_n} (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^4 + \sum_{k \neq j} (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 (B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2 \right] - (b - a)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{m_n} E[(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^4] + \sum_{k \neq j} E[(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2] E[(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2] - (b - a)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{m_n} 3(t_k^n - t_{k-1}^n)^2 + \sum_{k \neq j} (t_k^n - t_{k-1}^n)(t_j^n - t_{j-1}^n) - (b - a)^2. \end{aligned}$$

Por un lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n)^2 = 0,$$

pues es el límite de la  $U_n$  de (2.1) con  $f(x) = x$ ; y por otro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq j} (t_k^n - t_{k-1}^n)(t_j^n - t_{j-1}^n) &= \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j \neq k} (t_k^n - t_{k-1}^n)(t_j^n - t_{j-1}^n) \\ &= \sum_{k=1}^{m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n) [t_{m_n}^n - t_k^n + t_{k-1}^n - t_0^n] \\ &= \sum_{k=1}^{m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n)(b - a) - \sum_{k=1}^{m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n)^2 \\ &= (b - a)^2 - \sum_{k=1}^{m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n)^2, \end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[W_n] = (b - a)^2 - (b - a)^2 = 0$$

lo que demuestra la proposición.  $\square$

Es claro que si  $a = 0$  y  $b = t$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$  es la variación cuadrática del movimiento Browniano, de donde obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.2.18** *La variación cuadrática del movimiento Browniano es igual a  $t$ .*

Por último, enunciaremos una proposición que nos da información acerca del rango de valores del movimiento Browniano en intervalos cerrados. La demostración excede el objetivo de este trabajo. Sugerimos al lector interesado en profundizar en este tema consultar [13].

**Proposición 4.2.19** *a) Las trayectorias Brownianas son  $\gamma$ -Hölder casi seguramente para  $\gamma \in (0, 1/2)$ , es decir, existe  $C_\gamma$  tal que*

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq C_\gamma |t - s|^\gamma$$

*para toda  $s, t$  reales positivos.*

*b) Las trayectorias Brownianas son en ningún lado  $\gamma$ -Hölder casi seguramente para  $\gamma \in (1/2, 1)$ , es decir, no existe  $C_\gamma$  tal que cumple lo que indica el inciso (a).*

*c) Las trayectorias Brownianas no son localmente  $\frac{1}{2}$ -Hölder, es decir, existe algún conjunto compacto en los reales positivos tal que no existe  $C_\gamma$  con la propiedad de que  $|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq C_\gamma |t - s|^\gamma$  para toda  $s, t$  en dicho compacto.*

*(ver Anezo).*

La proposición nos muestra un grado de dispersión de la trayectoria Browniana. La distancia entre las ordenadas de dos puntos de la trayectoria Browniana casi seguramente está acotada por un múltiplo de la  $\gamma$ -ésima potencia de la diferencia de sus abscisas si  $\gamma$  es menor a  $1/2$ , y casi seguramente no lo está si  $\gamma$  es mayor o igual a  $1/2$ . Esto nos da tanto una cota de la variación para puntos cercanos como un indicador de lo mucho que crece o disminuye la función en tiempos grandes.

### 4.3 Caracterizaciones

A continuación se darán tres caracterizaciones del movimiento Browniano. La demostración de las equivalencias sobrepasa el objetivo de este trabajo,

por lo que recomendamos al lector interesado en profundizar en el tema consultar [13].

**Proposición 4.3.1** Sea  $\{B_t : t \geq 0\}$  un movimiento Browniano. Entonces

- a)  $\{B_t : t \geq 0\}$  es una  $\mathcal{F}_t$ -martingala.
- b)  $\{B_t^2 - B_t : t \geq 0\}$  es una  $\mathcal{F}_t$ -martingala.

Recíprocamente el movimiento Browniano es el único proceso estocástico de trayectorias continuas tal que cumple (a) y (b).

Al resultado anterior se le conoce como la caracterización de Paul Lévy del movimiento Browniano.

**Teorema 4.3.2** Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un proceso  $\{B_t : t \geq 0\}$ :

- a)  $\{B_t : t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano en  $\mathbb{R}$ .
- b)  $X_\alpha(t) = \exp\{\alpha B_t - \alpha^2 t/2\}$  es una  $\mathcal{F}_t$ -martingala, para toda  $\alpha$  constante.
- c) Para cada función  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$  el proceso

$$Y_t = f(B_t) - \int_0^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(B_s) ds$$

es una  $\mathcal{F}_t$ -martingala, donde  $C_c^2(\mathbb{R})$  denota el espacio de funciones reales de variable real de clase  $C^2$  de soporte compacto.

## 4.4 Variaciones del movimiento Browniano

El estudio del movimiento Browniano ha dado origen a otros procesos relacionados con él. Algunos de ellos se presentan a continuación.

**Proposición 4.4.1** Sea  $\{B_t : t \geq 0\}$  un movimiento Browniano estándar, entonces los procesos

- a)  $B_t^{(1)} = cB_{t/c^2}$ , para  $c > 0$  fija,
- b)  $B_t^{(2)} = \begin{cases} tB_{1/t} & \text{para } t > 0, \\ 0 & \text{para } t = 0, \end{cases}$
- c)  $B_t^{(3)} = B_{t+h} - B_h$ , para  $h > 0$  fija.
- d)  $B_t^{(4)} = B_1 - B_{1-t}$ , para  $t \in [0, 1]$ .

son cada uno un movimiento browniano estándar.

*Demostración.* Todo lo referente a  $B_t^{(2)}$  se demostró en el lema (4.2.12) de la sección anterior. Para  $B_t^{(1)}$ ,  $B_t^{(3)}$  y  $B_t^{(4)}$  probaremos que cumplen los cuatro incisos de la definición 3.1.1. Los incisos (a), (c) y (d) son inmediatos en los tres casos.

También es claro que  $B_{t+s}^{(i)} - B_t^{(i)}$  se distribuye normal con media 0,  $i = 1, 3$  y 4. Para el inciso (b) basta probar que dichas variables tienen varianza  $s$ :

$$\text{a) } E[(B_{t+s}^{(1)} - B_t^{(1)})^2] = c^2 E[(B_{(t+s)/c^2} - B_{t/c^2})^2] = c^2[(t+s)/c^2 - t/c^2] = s,$$

$$\text{c) } E[(B_{t+s}^{(3)} - B_t^{(3)})^2] = E[(B_{t+h+s} - B_{h+t})^2] = s.$$

$$\text{d) } E[(B_{t+s}^{(4)} - B_t^{(4)})^2] = E[(B_1 - B_{1-t-s} - B_1 + B_{1-t})^2] = s.$$

□

#### 4.4.1 Movimiento Browniano reflejado en el origen

Sea  $\{B_t : t \geq 0\}$  un movimiento Browniano. Llamaremos movimiento browniano reflejado en el origen al proceso estocástico  $\{Y_t : t \geq 0\}$  definido como sigue

$$Y_t = |B_t| = \begin{cases} B_t, & \text{si } B_t \geq 0, \\ -B_t, & \text{si } B_t < 0. \end{cases}$$

Podemos ver que el movimiento Browniano reflejado en el origen es un proceso de Markov:

$$\begin{aligned} P(Y_{t_0+s} \leq z \mid Y_{t_0} = x_0, \dots, Y_{t_n} = x_n) &= P(-z \leq B_{t_0+s} \leq z \mid B_{t_0} = \pm x_0, \dots, B_{t_n} = \pm x_n) \\ &= P(-z \leq B_{t_0+s} \leq z \mid B_{t_0} = x_0, \dots, B_{t_n} = x_n) \quad (\text{por simetría}) \\ &= P(-z \leq B_{t_0+s} \leq z \mid B_{t_0} = x_n) \quad \text{para } t_0 < t_1 < \dots < t_n, \end{aligned}$$

lo cual nos muestra un proceso de Markov a tiempo continuo, con trayectorias continuas con espacio de estados  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

Considerando a  $B_t$  como un movimiento Browniano estándar, calculemos la distribución de  $Y_{t+s}$  dado que  $Y_t = y$ ,

$$\begin{aligned} P(Y_{t+s} \leq z \mid Y_t = y) &= P(-z \leq B_{t+s} \leq z \mid B_t = y) \\ &= \int_{-z}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-(x-y)^2/2t\} dx, \end{aligned}$$

por lo que la función de densidad de  $Y_{t+s}$ , dado que  $Y_t = y$  es la derivada de la ecuación anterior respecto a  $z$ , es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(z-y)^2}{2t}\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(z+y)^2}{2t}\right\} = p(z-y, t) + p(z+y, t),$$

donde

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-x^2/2t\}.$$

Ahora podemos calcular la media y la varianza de  $Y_t$ . Bajo la condición  $Y_0 = 0$ ,

$$E[Y_t] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-x^2/2t\} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-x^2/2t\} dx = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

$$\text{Var}[Y_t] = E[Y_t^2] - E^2[Y_t] = E[|B_t|^2] - 2t/\pi = t - 2t/\pi = (1 - 2/\pi)t$$

#### 4.4.2 Movimiento Browniano absorbido en el origen

Suponemos que  $\{B_t^b : t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano tal que  $B_0 = b > 0$ , y denotamos  $\tau$  al primer momento en que el proceso  $B_t^b$  alcanza el cero. Llamaremos movimiento Browniano absorbido en el origen al proceso  $\{Z_t\}_{t \geq 0}$  definido como sigue

$$Z_t = \begin{cases} B_t^b, & \text{para } t \leq \tau, \\ 0 & \text{para } t > \tau. \end{cases}$$

Podemos ver que el movimiento Browniano absorbido en el origen también es un proceso de Markov. Para ello, consideremos  $s > 0$ ,  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ .

i)

$$P(Z_{t_n+s} > y \mid Z_{t_0} = x_0, \dots, Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}, Z_{t_n} = 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

ii)

$$\begin{aligned} & P(Z_{t_n+s} > y \mid Z_{t_0} = x_0, \dots, Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}, Z_{t_n} = x > 0) \\ &= P(Z_{t_n+s} > y \mid Z_{t_0} = x_0, \dots, Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}, Z_{t_n} = x, \min_{1 \leq u \leq t_n} B_u^b > 0) \\ &= P(B_{t_n+s}^b > y, \min_{1 \leq u \leq s} B_{t_n+u}^b > 0 \mid B_{t_0}^b = x_0, \dots, B_{t_{n-1}}^b = x_{n-1}, B_{t_n}^b = x) \\ &= P(B_s^b > y, \min_{1 \leq u \leq s} B_u^b > 0 \mid B_0^b = x) = A_s(x, y) \end{aligned}$$

(ver 4.7).

Bajo la condición  $Z_0 = x > 0$ , la variable aleatoria  $Z_t$  tiene distribución continua en los reales positivos con peso positivo en cero:

$$P_t(a < Z_t < b | Z_0 = x) = A_t(x, a) - A_t(x, b)$$

y

$$P(Z_t = 0 | Z_0 = x) = 1 - A_t(x, y).$$

#### 4.4.3 Movimiento Browniano con deriva

Sea  $\{B_t : t \geq 0\}$  un movimiento Browniano. Diremos que  $\{X_t : t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano con deriva si

$$X_t = B_t + \mu t,$$

para alguna constante  $\mu$ , llamada el parámetro de deriva. De este modo, un movimiento Browniano es un movimiento Browniano con deriva 0, y podemos dar una definición paralela a la definición (3.1.1) como sigue:

**Definición 4.4.2** *Un movimiento Browniano en  $\mathfrak{R}$  con deriva  $\mu$  es un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  con las siguientes propiedades:*

- Cada incremento  $X_{t+s} - X_t$  se distribuye normal con media  $\mu t$  y varianza  $\sigma^2 t$ , en donde  $\sigma$  y  $\mu$  son parámetros fijos.*
- Para cada par de intervalos de tiempo disjuntos  $[t_1, t_2]$ ,  $[t_3, t_4]$ , con  $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ , los incrementos  $X_{t_2} - X_{t_1}$  y  $X_{t_4} - X_{t_3}$  son variables aleatorias independientes (con la distribución descrita en el inciso anterior). Lo mismo ocurre para  $n$  intervalos disjuntos de tiempo donde  $n$  es un entero positivo cualquiera.*
- $X_0 = 0$ .*
- $t \rightarrow X_t(\omega)$  es continua en todos los valores de  $t$  para casi todos los valores  $\omega$ .*

Debido a que los incrementos  $X_{t+s} - X_t$  son independientes del pasado, es claro que el movimiento Browniano con deriva es un proceso de Markov.

Del inciso (a) de la definición, obtenemos para  $t > s$ :

$$\begin{aligned} P(X_t \leq x | X_s = x_0) &= P(X_t - X_s \leq x - x_0) \\ &= \int_{-\infty}^{x-x_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}\sigma} \exp\left\{-\frac{[y-\mu(t-s)]^2}{2(t-s)\sigma^2}\right\} dy \\ &= \int_{-\infty}^{[x-x_0-\mu(t-s)]/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\{-y^2/2(t-s)\} dy. \end{aligned}$$

#### 4.4.4 Movimiento Browniano geométrico

Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento Browniano con deriva  $\mu$  y coeficiente de difusión  $\sigma^2$ . Llamaremos movimiento Browniano geométrico al proceso estocástico  $\{Y_t : t \geq 0\}$  definido como sigue

$$Y_t = e^{X_t}.$$

Usando la igualdad  $Y_t = Y_0 e^{X_t - X_0}$ , y la función generadora de momentos de una normal con media  $\mu t$  y varianza  $\sigma^2 t$ , encontraremos la esperanza y la varianza del movimiento Browniano geométrico.

$$E[Y_t | Y_0 = y] = y E[e^{X_t - X_0}] = y \exp\{t(\mu + \sigma^2/2)\},$$

y

$$E[Y_t^2 | Y_0 = y] = y^2 E[e^{2(X_t - X_0)}] = y^2 \exp\{t(2\mu + 2\sigma^2)\};$$

por lo que

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_t | Y_0 = y] &= y^2 \exp\{t(2\mu + 2\sigma^2)\} - [y \exp\{t(\mu + \sigma^2/2)\}]^2 \\ &= y^2 \exp\{2t(\mu + \sigma^2/2)\} \{\exp\{t\sigma^2\} - 1\}. \end{aligned}$$

Se puede profundizar en el contenido de esta sección en [7].

#### 4.5 Movimiento Browniano multivariado

Hasta ahora, hemos hablado del movimiento Browniano unidimensional. Considerando que el origen de este estudio es el desplazamiento de partículas en dos o tres dimensiones es importante definir el movimiento Browniano en más de una dimensión.

**Definición 4.5.1** Sean  $\{B_i^1\}_{t \geq 0}, \dots, \{B_i^N\}_{t \geq 0}$  movimientos Brownianos estándar independientes en el sentido de que, para cada conjunto finito

$$\begin{array}{cccc} t_{11}, & t_{12}, & \dots, & t_{1n_1}, \\ t_{21}, & t_{22}, & \dots, & t_{2n_2}, \\ \vdots & & & \\ t_{N1}, & t_{N2}, & \dots, & t_{Nn_N}, \end{array}$$

los  $N$  vectores

$$\begin{aligned} B_{(1)} &= (B_{t_{11}}^1, \dots, B_{t_{1n_1}}^1) \\ B_{(2)} &= (B_{t_{21}}^2, \dots, B_{t_{2n_2}}^2) \\ &\vdots \\ B_{(N)} &= (B_{t_{N1}}^N, \dots, B_{t_{Nn_N}}^N) \end{aligned}$$

son independientes. Llamaremos movimiento Browniano  $N$ -dimensional al proceso estocástico definido por

$$B_t = (B_t^1, \dots, B_t^N), \quad t \geq 0.$$

Los movimientos Brownianos bidimensional y tridimensional definidos de la forma anterior pueden modelar la posición de una partícula en movimiento Browniano en el plano y en el espacio respectivamente.

El movimiento Browniano  $n$ -dimensional se puede construir por medio del teorema de extensión de Kolmogorov; para ello se define

$$P(t, x, y) = (2\pi t)^{-(n/2)} \exp\{-\|x - y\|^2 / 2t\}$$

y se procede como en la segunda construcción del movimiento Browniano expuesta en el capítulo anterior.

Sea  $(B_t^1, B_t^2)$  un movimiento Browniano bidimensional,  $(B_0^1, B_0^2) = (0, 0)$ , calcularemos la distribución de la segunda coordenada al tiempo aleatorio en que la primera coordenada alcanza el valor dado  $z > 0$ . Llamemos  $T_z$  al primer tiempo  $t$  tal que  $B_t^1 = z$ ; entonces buscamos  $Y_z = B_{T_z}^2$ .

Antes de hacer los cálculos de  $Y_z$ , serán útiles los siguientes lemas:

**Lema 4.5.2**

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(T_z \geq x) = 0$$

*Demostración.* Por el lema (4.2.5), si  $x > 0$

$$\begin{aligned} P(T_z \geq x) &= \int_x^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2t}\right\} dt \\ &\leq \int_x^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi t^3}} dt \\ &= \frac{3z}{2x\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

que converge a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ . □

Lema 4.5.3 La transformada de Laplace de  $T_z$  es

$$E[\exp\{-\theta T_z\}] = \exp\{-\sqrt{2\theta z}\}$$

*Demostración.* Denotamos  $\theta = \frac{\lambda^2}{2}$ ,  $V_t = \exp\left\{\lambda B_t^1 - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} E[V_{T_z \wedge t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[V_{z \wedge t}] dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(x \wedge t)}} \exp\left\{\lambda y - \frac{1}{2}\lambda^2(x \wedge t)\right\} \exp\left\{-\frac{y^2}{2(x \wedge t)}\right\} dy dF(x) = 1, \end{aligned}$$

donde  $F(t) = P\{T_z \leq t\}$ ; es decir,

$$E[V_{T_z \wedge t}] = E[\exp\{\lambda B_{T_z \wedge t}^1 - \theta(T_z \wedge t)\}] = 1.$$

Si  $\lambda > 0$  es suficientemente grande para garantizar que  $0 \leq V_{T_z \wedge t} \leq \exp\{\lambda z\}$ , tomamos el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_{T_z \wedge t} = \begin{cases} 0 & \text{si } T_z = \infty \\ \exp\{\lambda z - \theta T_z\} & \text{si } T_z < \infty \end{cases},$$

y gracias a éste, por el teorema de la convergencia dominada, podemos ver que

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} E[V_{T_z \wedge t}] = E[\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\{\lambda B_{T_z \wedge t}^1 - \theta(T_z \wedge t)\}] \\ &= E[\exp\{\lambda z\} \exp\{-\theta \lim_{t \rightarrow \infty} T_z \wedge t\}] \\ &= \exp\{\lambda z\} E[\exp\{-\theta T_z\}], \end{aligned}$$

por el lema (4.5.2); es decir, que

$$E[\exp\{-\theta T_z\}] = \exp\{\lambda z\}.$$

Considerando que  $\lambda = \pm\sqrt{2\theta}$ , y que pedimos  $\lambda > 0$ , concluimos que

$$E[\exp\{-\theta T_z\}] = \exp\{-\sqrt{2\theta z}\}$$

□

Ahora sí podemos encontrar la distribución de  $Y_z$ .

**Teorema 4.5.4**  $Y_z = B_z^2$ , tiene una distribución Cauchy.

*Demostración.* Dado  $z > 0$ , como  $T_z$  y el proceso  $\{B_t^2\}$  son independientes, calculamos la función característica de  $Y_z$ , usando el teorema de probabilidad total.

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= E[\exp\{iuY_z\}] = \int_0^\infty E[\exp\{iuB_t^2\} | T_z = t] dF(t) \\ &= \int_0^\infty E[\exp\{iuB_t^2\}] dF(t)\end{aligned}$$

Como  $B_t^2$  se distribuye normal con media cero y varianza uno,

$$\begin{aligned}E[\exp\{iuB_t^2\}] &= \int_{-\infty}^\infty \exp\{iux\} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-\frac{x^2}{2t}\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^\infty \exp\{-\frac{1}{2t}(x^2 - 2iuxt)\} dx \\ &= \exp\{-\frac{u^2 t}{2}\} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^\infty \exp\{-\frac{(x - iut)^2}{2t}\} dx \\ &= \exp\{-\frac{u^2 t}{2}\}.\end{aligned}$$

La última igualdad es gracias a que la función de variable compleja

$$h(y) = \int_{-\infty}^\infty \exp\{(x - y)^2/2t\} dx$$

es analítica y coincide en los reales con la función constante  $\sqrt{2\pi t}$ , que también es analítica, por lo que  $h(y) = \sqrt{2\pi t}$  para toda  $y$  compleja.

Entonces

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^\infty \exp\{-\frac{u^2 t}{2}\} dF(t) = E\left[\exp\{-\frac{u^2 T_z}{2}\}\right] = \exp\{-|u|z\},$$

$-\infty < u < \infty$ , por ser ésta la transformada de Laplace de  $T_z$  con  $\theta = \frac{1}{2}u^2$ .

Debido a que  $\Phi$  es la función característica de una variable aleatoria Cauchy,  $Y_z$  deberá tener dicha distribución.  $\square$

Variemos ahora  $z$  en los reales positivos.

**Proposición 4.5.5** *El proceso  $\{T_z : z \geq 0\}$  tiene incrementos independientes.*

*Demostración.* Sean  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ; denotemos  $\phi_z$  a la transformada de Laplace de  $T_z$  para cualquier  $z \geq 0$ . Si consideramos a  $T_{\lambda_1}$  y  $T_{\lambda_2}$  como variables aleatorias independientes,

$$\phi_{\lambda_1}(\theta)\phi_{\lambda_2}(\theta) = \exp\{-\sqrt{2\theta}\lambda_1\} \exp\{-\sqrt{2\theta}\lambda_2\} = \exp\{-\sqrt{2\theta}(\lambda_1 + \lambda_2)\} = \phi_{\lambda_1 + \lambda_2}(\theta).$$

de aquí que las distribuciones de  $T_{\lambda_1 + \lambda_2}$  y  $T_{\lambda_1} + T_{\lambda_2}$  son iguales, lo que indica que el proceso  $\{T_z : z \geq 0\}$  tiene incrementos independientes estacionarios.

□

**Corolario 4.5.6** *El proceso  $\{Y_z : z \geq 0\}$  tiene incrementos independientes.*

*Demostración.*

$$Y_{z_1 + z_2} = X_{2(r_{z_1 + z_2})} = X_{2(r_{z_1} + r_{z_2})} = X_{2r_{z_1}} + X_{2r_{z_2}} = Y_{z_1} + Y_{z_2}$$

□

Para la elaboración de la sección anterior se utilizó [7]

## 4.6 Simulación

Dada una ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dB_t,$$

donde  $a$  y  $b$  son funciones reales y  $B_t$  denota un movimiento Browniano estándar, a menudo no es sencillo encontrar su solución explícita. Sin embargo, en cualquier tiempo  $t$ , la solución se comporta como un movimiento Browniano con deriva  $a(X_t)$  y varianza  $b(X_t)$ . El proceso se puede simular usando una caminata aleatoria de la siguiente manera:

Representamos al tiempo en el eje  $X$  y el desplazamiento en el eje  $Y$  de modo que la magnitud de los incrementos en desplazamiento sea la raíz cuadrada de la magnitud de los incrementos en el tiempo. Consideramos, además, las variables aleatorias independientes  $Y_1, Y_2, \dots$  tales que

$$P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

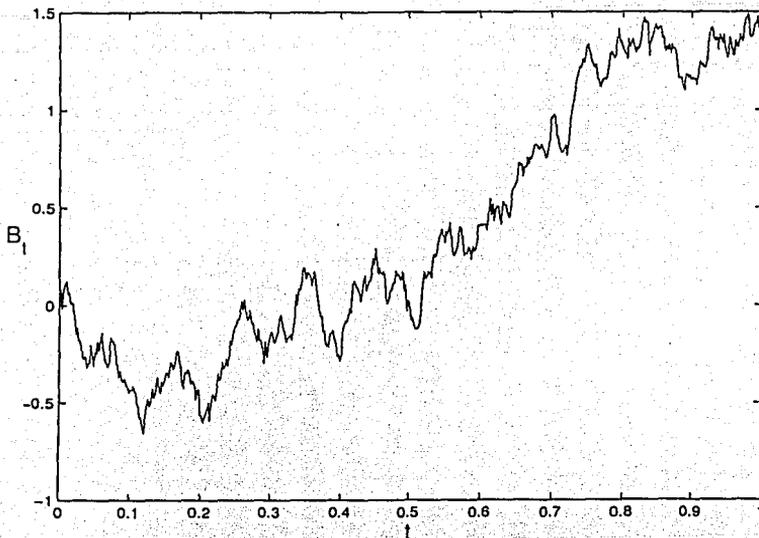


Figura 4.5: Simulación en MATLAB de un movimiento Browniano

Fijando  $X_0 = 0$ , construimos la ecuación

$$X_{n\Delta t} = X_{(n-1)\Delta t} + a(X_{(n-1)\Delta t}) + b(X_{(n-1)\Delta t})\sqrt{\Delta t}Y_n.$$

El primer sumando indica la información obtenida hasta el tiempo  $(n-1)\Delta t$ , el segundo sumando hace el papel de deriva, y el tercer sumando genera la caminata aleatoria. Por tanto, si  $n$  crece y  $\Delta t$  disminuye,  $X_{n\Delta t}$  se aproxima a  $B_{n\Delta t}$ .

Podemos ver que en el caso particular en que las funciones  $a$  y  $b$  son las constantes 0 y 1 respectivamente, lo que obtenemos es un movimiento Browniano estándar como el construido anteriormente por medio de una caminata aleatoria.

Este material fue obtenido de [9].

# Capítulo 5

## Algunas aplicaciones

A raíz de los trabajos de Bachelier y Wiener, se ha buscado modelar diversos fenómenos con ayuda del movimiento Browniano; hoy en día, se reconoce su importancia en campos como las finanzas, sin embargo se sigue trabajando alrededor del mundo con la seguridad de que el movimiento Browniano aún nos dará muchos datos más acerca de nuestro entorno. A continuación se enuncian algunas consideraciones generales sobre ciertas aplicaciones.

### 5.1 Análisis de mercados

En el año 1900, Bachelier publicó su tesis doctoral, en la que consideraba que el constante arribo de información empujaba los precios hacia arriba o hacia abajo. Suponiendo que estos arribos son aleatorios, modeló el comportamiento de los precios con un movimiento Browniano con deriva. Sin embargo, este modelo tenía algunas fallas, como aceptar precios negativos con probabilidad positiva. A mediados del siglo XX, M. F. M. Osborne analizó el logaritmo de los precios de una misma acción al azar en distintos tiempos y descubrió que la función de distribución de la posición de una partícula Browniana modelaba los cambios en dichos precios. Como consecuencia de lo anterior, se dedujo que el valor esperado de los precios aumenta con el tiempo a una tasa entre el 3 y el 5 por ciento con dispersión también creciente. Este incremento no tiene que ver con la inflación a largo plazo, puesto que el número de acciones que se pueden obtener por dolar también incrementa con el tiempo en una tasa similar. Paul Samuelson, 70 años después del trabajo de Bachelier, postuló el paradigma actual: *Los rendimientos de*

*los activos siguen un movimiento Browniano con deriva*, aunque no determinó con qué deriva, y considera el movimiento Browniano geométrico en los modelos de los mercados financieros. Hacia finales del siglo XX, Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton propusieron considerar la valoración y la cobertura de un derivado como una misma cosa. Basados en los trabajos de Bachelier y Samuelson, demostraron que existe una forma de hacer lo anterior bajo ciertas hipótesis ideales del comportamiento del mercado, y gracias a la ausencia de oportunidad de arbitraje. Hoy en día, la afamada fórmula de Black-Scholes juega un papel fundamental en el mundo financiero. S. J. Grossman y J. L. Vila encontraron otra forma de aplicar el movimiento Browniano en el mundo financiero. Ellos consideraron una persona que busca hacer una inversión riesgosa cuyo valor sigue un movimiento Browniano geométrico. El inversionista tiene una restricción en su capacidad de obtener préstamos, y su cantidad de dinero debe ser positiva en todo tiempo. Este último supuesto permitió encontrar muchos resultados aplicables a diversas situaciones. Entre ellas, se considera un inversionista que debe establecer una cantidad mínima para sus inversiones en acciones y futuros; ellos encontraron un método para calcular dicho mínimo, mejorando considerablemente las técnicas que se usaban anteriormente. Sugerimos al lector revisar [2] y el artículo de Grossman y Vila<sup>1</sup> para mayores detalles sobre este tema.

## 5.2 Teoría de las decisiones

Debido al alza y baja constantes en los precios, una industria productiva puede verse afectada si un elevado precio de una fuente energética hace que los costos de producción superen las utilidades generadas. En esos casos, la empresa puede decidir suspender las actividades en los departamentos de mayor consumo energético y reubicar a los trabajadores temporalmente en otras áreas. Si se conocen los costos por parar, reiniciar y operar las actividades en un departamento, y se considera el precio de la fuente energética como un proceso estocástico, el problema consiste en determinar una sucesión de los tiempos en que sea óptimo parar y reiniciar las actividades.

Se realizaron varias investigaciones acerca de estos modelos, pero no se pudo dar una demostración matemática rigurosa de la existencia de estrategias

<sup>1</sup>S.J. Grossman, J.L. Vila, "Optimal Dynamic Trading with Leverage Constraints", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 27, 1992

óptimas. Fue hasta finales del siglo XX que Brekke y Øksendal demostraron explícitamente la existencia de una estrategia óptima en el caso en que una empresa distribuye un recurso y el precio de éste se modela con un movimiento Browniano geométrico.

Podemos hacer algunas observaciones al modelo. Si suponemos que el costo por parar y reiniciar es suficientemente grande, dado que se reinició el proceso, será conveniente operar cierto periodo de tiempo a pesar de que los precios disminuyan mucho; sin embargo, se debe tener un límite, por debajo del cual no sea adecuado operar. La estrategia encontrada por Brekke y Øksendal toma en cuenta consideraciones como las aquí enunciadas.

Sugerimos al lector revisar el artículo de Brekke y Øksendal<sup>2</sup> para mayores detalles sobre este tema.

## 5.3 Fractales y Movimiento Browniano

El concepto de fractal fue introducido por Benoit B. Mandelbrot, quien propuso esta idea como un medio de tratar problemas de escala en el mundo real. Definió fractal como una curva o superficie independiente de la escala, es decir, no importa que tan grande o pequeña tomemos la escala para analizar la curva o superficie, ésta muestra la misma apariencia. A los objetos con esta propiedad se les llama autosimilares. Una diferencia importante entre un fractal y una curva natural a la que pudiera modelar, es que, a pesar de ser continuo, el fractal no admite tangente en ningún punto, es decir, no es derivable.

Los fractales pueden surgir al aplicar patrones en escalas cada vez más pequeñas, debido a la propiedad de ser autosimilar. Otra forma de obtenerlos es por medio de algoritmos de iteración aleatoria, como el movimiento Browniano.

### 5.3.1 Robótica

K. Arakawa y I. Krotkov propusieron un método para modelar un terreno natural basados en geometría fractal que puede ser aplicado a problemas tales como planeación de rutas para exploración al aire libre de robots móviles autónomos. Este método utiliza datos de elevación de un terreno, obtenidos

<sup>2</sup>K.A. Brekke, B. Øksendal, "Optimal Switching in an Economic Activity Under Uncertainty", Siam Journal of Control and Optimization, vol. 32, No. 4, 1994.

por medio de mediciones con láser. El método es capaz de considerar el problema de reconstruir datos en tercera dimensión con una resolución y certidumbre arbitraria.

Para darle sentido al método, es necesario contar con un robot con capacidad para tener entendimiento de su entorno y moverse de acuerdo a éste. Se debe tener en cuenta que cuando un robot se mueve en un ambiente natural, es esencial usar técnicas que permitan reconstruir un mapa de elevaciones del terreno en un área específica, y la evaluación de ciertas propiedades como dureza del suelo. La Universidad de Carnegie Mellon construyó un robot con estas características que fue capaz de producir un mapa en tres dimensiones de su entorno en un radio de 10 metros horizontalmente, y 5 metros de altura, además de que pudo moverse eficientemente en terrenos rocosos y arenosos. El mismo medidor de láser del robot fue usado para construir un mapa mucho mayor al unir mapas pequeños.

En este punto, el principal problema es construir el mapa con una resolución arbitraria en base a un conjunto de datos espaciados irregularmente. Es necesario usar algún método de interpolación que no suavice la superficie del terreno. Es por esto que debe considerarse un método que represente lo áspero del terreno con una superficie fractal adecuada. El método propuesto es una expansión del método de desplazamiento aleatorio que genera un patrón con la propiedad de una función fractal Browniana, obtenida del modelo del movimiento Browniano fraccionario.

Sugerimos al lector revisar el artículo de Arakawa y Krotkov<sup>3</sup> para mayores detalles sobre este tema.

### 5.3.2 Inundaciones y sequías

A lo largo de la historia, ha sido una constante preocupación la predicción de las inundaciones y sequías debido al daño que producen a la población. Se ha buscado usar los datos de frecuencia almacenados por años para prevenir estos desastres, pero no ha sido suficiente, pues no se tiene la información necesaria para decidir la forma de extrapolar dichos datos. Por tanto, se han buscado otras formas de tratar el problema.

Estudios sobre caminatas aleatorias Brownianas fraccionarias en distintas escalas, introdujeron la posibilidad de que las inundaciones y sequías extremas

---

<sup>3</sup>K. Arakawa, E. Krotkov, "Modeling of Natural Terrain Based on Fractal Geometry", *Systems and computers in Japan*, vol. 25, no. 11, 1994

tuvieran un comportamiento fractal. Un estudio extenso mostró una buena correlación entre los registros de más de 1000 presas y depósitos de agua y estadísticas fractales.

Una posibilidad es considerar el nivel del agua de un río como una función continua del tiempo, y por lo tanto, se puede tratar como una serie de Fourier. Para estudiar la serie, basta determinar sus coeficientes. Al asociar estos coeficientes a una función de distribución de probabilidad normal, y modelarla matemáticamente, la función puede parecerse a una caminata Browniana, o a una caminata Browniana fraccionaria. Aún no se sabe si esta técnica funcionará para predecir las inundaciones y sequías con un buen grado de credibilidad, pero de hacerlo, el movimiento Browniano nos proporcionará un método para salvar muchas vidas en el futuro.

## Anexo

En este anexo presentamos algunas definiciones y resultados que hemos usado en el desarrollo de nuestro trabajo.

**Definición 6.0.1** Sea  $(F, \rho)$  un espacio métrico. Una función  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow F$  es  $\gamma$ -Hölder ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ) si existe una constante  $C_\gamma$  tal que para toda  $s, t \in \mathbb{R}^k$

$$\rho(f(t), f(s)) \leq C_\gamma \|t - s\|^\gamma.$$

Una función  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow F$  es en ningún lado  $\gamma$ -Hölder si no existe un intervalo cerrado tal que  $f$  sea  $\gamma$ -Hölder sobre él.

Una función  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow F$  es localmente  $\gamma$ -Hölder si es  $\gamma$ -Hölder sobre cada compacto.

**Teorema 6.0.2 (Desigualdad de Markov)** Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa con esperanza finita. Para cualquier constante  $a > 0$ ,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}. \quad (6.1)$$

*Demostración.*

$$E(X) = \int_0^\infty x dF_X(x) \geq \int_a^\infty x dF_X(x) \geq a \int_a^\infty dF_X(x) = aP(X \geq a). \quad \square$$

Otra versión útil de la desigualdad de Markov (6.1) es la siguiente

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|^k)}{a^k}, \quad (6.2)$$

donde  $a > 0$ ,  $k \geq 1$  y para que la igualdad tenga algún sentido suponemos  $E(|X|^k) < \infty$ . Otra versión es

$$P(X \geq a) \leq e^{-ca} E[e^{cX}], \quad (6.3)$$

para  $c > 0$ . Las demostraciones son semejantes a la presentada arriba.

**Teorema 6.0.3 (Desigualdad de Chebyshev)** *Sea  $X$  una variable aleatoria con varianza finita. Para cualquier constante  $a > 0$ ,*

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}. \quad (6.4)$$

*Demostración.* Esta desigualdad se obtiene de (6.1) sustituyendo  $X$  por  $|X - E(X)|^2$  y  $a$  por  $a^2$ . Alternativamente podemos hacer la demostración directa como sigue

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 dF_X(x) \\ &\geq \int_{\{x: |x - E(X)| \geq a\}} (x - E(X))^2 dF_X(x) \\ &\geq a^2 \int_{\{x: |x - E(X)| \geq a\}} dF_X(x) \\ &= a^2 P(|X - E(X)| \geq a), \end{aligned}$$

de donde obtenemos la desigualdad deseada. □

**Lema 6.0.4 (Lema de Borel-Cantelli)** *Sean  $A_1, A_2, \dots$  eventos en un espacio de probabilidad, y sea  $B = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ . Entonces*

i) Si  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , entonces  $P(B) = 0$ .

ii) Si  $A_1, A_2, \dots$  son independientes y  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ , entonces  $P(B) = 1$ .

*Demostración.* Para cada  $k \in \{1, 2, \dots\}$  tenemos que

$$P(B) \leq P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n).$$

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , el lado derecho tiende a cero cuando  $k$  tiende a infinito. Esto prueba el primer inciso. Para el segundo inciso, basta probar que

$$P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = 1$$

para toda  $k$ , pues la intersección numerable de eventos con probabilidad uno, tiene probabilidad uno. Pero para cada  $M > k$ ,

$$1 - P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq 1 - P\left(\bigcup_{n=k}^M A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=k}^M A_n^c\right) = \prod_{n=k}^M [1 - P(A_n)]$$

pues los eventos  $A_n$  son independientes, y por consiguiente lo son sus complementos. Si  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ , usando la desigualdad

$$1 - x \leq \exp\{-x\} \quad \text{para toda } x \in \mathfrak{R},$$

podemos ver que

$$\prod_{n=k}^M [1 - P(A_n)] \leq \prod_{n=k}^M \exp\{-P(A_n)\} = \exp\left\{-\sum_{n=k}^M P(A_n)\right\}$$

que tiende a cero cuando  $M$  tiende a infinito, pues  $\sum P(A_n)$  diverge. Esto demuestra el segundo inciso.  $\square$

**Lema 6.0.5** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con media 0 y varianza  $\sigma^2$ . Sea  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Entonces, para cualquier  $a \geq 0$ ,

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq n} S_i \geq a\right) \leq 2P(S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2}).$$

*Demostración.* Sean

$$A = \left\{ \omega : \max_{i \leq n} S_i \geq a \right\},$$

y para cada  $j \leq n$ ,

$$A_j = \left\{ \omega / S_i < a \text{ para } i < j, S_j \geq a \right\}.$$

Entonces los  $A_j$ 's son eventos disjuntos cuya unión es  $A$ . Reescribimos

$$P(A) = P(A \cap \{S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) + P(A \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) \quad (6.5)$$

Por un lado,  $P(A \cap \{S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) \leq P(S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2})$ , y para revisar el segundo término vemos que

$$\begin{aligned} P(A_j \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) &\leq P(A_j \cap \{|S_n - S_j| \geq \sqrt{2n\sigma^2}\}) \\ &= P(A_j)P(|S_n - S_j| \geq \sqrt{2n\sigma^2}), \end{aligned}$$

pues  $A_n$  es independiente de  $|S_n - S_j|$ . Usando ahora la desigualdad de Chebyshev

$$P(A_j \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) \leq P(A_j) \frac{(n-j)\sigma^2}{2n\sigma^2} \leq \frac{1}{2}P(A_j).$$

Sumando sobre  $j$  ambos lados obtenemos

$$P(A \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) \leq \frac{1}{2}P(A). \quad (6.6)$$

De las ecuaciones (6.5) y (6.6) concluimos que

$$P(A) \leq P(S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2}) + \frac{1}{2}P(A),$$

o bien

$$P(A) \leq 2P(S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2}).$$

□

**Lema 6.0.6** Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias normales estándar, y

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , entonces

$$P(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

*Demostración.* Usando la desigualdad (6.3), vemos que

$$P(S_n \geq a) \leq e^{-ca} E[e^{-cX}] = e^{-ca} e^{nc^2/2}.$$

Sustituyendo  $c = \frac{a}{n}$ , concluimos que

$$P(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

□

**Teorema 6.0.7** Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias normales estándar, y

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ entonces}$$

$$P \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n \ln \ln n}} \geq \sqrt{2} \right) = 1. \quad (6.7)$$

*Demostración.* Sea  $a(n) = (2\sigma^2 n \ln \ln n)^{1/2}$ ,  $\gamma > 0$ ,  $n_k = [(1 + \gamma)^k]$ , donde  $[\cdot]$  representa el valor mayor entero. Por los lemas (6.0.5) y (6.0.6), y debido a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{a(n)} = 0,$$

para  $c > 1$  constante,

$$\begin{aligned} P \left( \max_{i \leq n_k} S_i \geq ca(n_k) \right) &\leq 2P(S_{n_k} \geq ca(n_k) - \sqrt{2n_k}) \\ &= 2P(S_{n_k} \geq ca(n_k)[1 - o(1)]) \\ &\leq 2 \exp\{-c^2 \ln \ln n_k [1 - o(1)]\}. \end{aligned}$$

Considerando que  $\ln \ln n_k$  es asintótico a  $\ln k(1 + \gamma)$ , la suma sobre  $k$  del último término de la desigualdad es finita, y por el lema de Borel-Cantelli, aseguramos que si  $k$  es suficientemente grande,

$$\max_{i \leq n_k} S_i < ca(n_k)$$

con probabilidad 1. En particular

$$\frac{S_i}{\sqrt{i \ln \ln i}} \leq \frac{ca(n_k)}{\sqrt{n_{k-1} \ln \ln n_{k-1}}}$$

si  $n_{k-1} < i \leq n_k$ . Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{ca(n_k)}{\sqrt{n_{k-1} \ln \ln n_{k-1}}} = \sqrt{2c^2(1 + \gamma)},$$

concluimos que para  $i$  grande,

$$\frac{S_i}{\sqrt{i \ln \ln i}} \leq \sqrt{2c^2(1 + \gamma)}(1 + \eta).$$

Gracias a que podemos acercar  $c$ ,  $(1 + \gamma)$ ,  $(1 + \eta)$  tanto como queramos a 1, y a un procedimiento análogo al anterior para  $-S_n$  en vez de  $S_n$ , obtenemos la ecuación (6.7).  $\square$

Con un procedimiento similar, con una cota inferior adecuada, se prueba el siguiente teorema.

**Teorema 6.0.8** Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias normales estándar, y

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , entonces

$$P \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \ln \ln n}} \leq \sqrt{2} \right) = 1.$$

Para profundizar en estos temas se puede consultar [8].

# Bibliografía

- [1] Bojdecki T. *Teoría general de procesos e integración estocástica*. Serie Textos, Vol. 6, Aportaciones Matemáticas. Soc. Mat. Mexicana, 1995.
- [2] Fernández Pérez J. L. "Breve historia de las matemáticas en los mercados financieros." *Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza* 19: 87-95, (2001).
- [3] Gallavoti G. *Statistical mechanics: a short treatise*. Springer, 1999.
- [4] Gorostiza L. G. "La probabilidad en el siglo XX." *Miscelánea Matemática* 33, 2001 69-92.
- [5] Ito K. & McKean H. P. *Diffusion processes and their sample paths*. Springer-Verlag, 1965.
- [6] Karatzas I. & Shreve S. E. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer-Verlag, 1988.
- [7] Karlin S. & Taylor H. *A first course in stochastic processes. 2nd. Edition*. Academic Press, 1975.
- [8] Lamperti J. *Stochastic processes*. Springer-Verlag, 1977.
- [9] Lawler G. F. *Introduction to Stochastic Processes*. Chapman Hall/CRC, 1995.
- [10] Nelson E. *Dynamical theories of Brownian motion*. Princeton University Press, 1967.
- [11] Oksendal B. *Stochastic differential equations: An introduction with applications. 5th Edition*. Springer-Verlag, 1998.
- [12] Ruiz de Chávez S. J. *Estudio del movimiento Browniano*. UAM-I, 1996.
- [13] Tudor C. *Procesos Estocásticos*. Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 1994.