00324

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

24

FACULTAD DE CIENCIAS

SEMANTICAS CATEGORIALES PARA LENGUAJES PROPOSICIONALES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

MEZA ALCANTARA DAVID

DIRECTOR DE TESIS: M.F.C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2003

A

PAGINACIÓN

DISCONTINUA

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: David Meza Alcántara
FECHA: 27/noviembre/2003
FIRMA:

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a Usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"SEMÁNTICAS CATEGORIALES PARA LENGUAJES PROPOSICIONALES"

realizado por MEZA ALCÁNATARA DAVID con número de cuenta 9424651-5

quién cubrió los créditos de la carrera de MATEMÁTICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. F. C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO	RRB.
Propietario	DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA	Hugo A. Rincón M.
Propietario	DRA. YOLANDA TORRES FALCÓN	
Suplente	M. en C. FERNANDO RENÉ MARTÍNEZ ORTIZ	
Suplente	Mat. JOSÉ GABRIEL OCAMPO MÁRQUEZ	

Consejo Departamental de MATEMÁTICAS.

M. en C. JOSÉ ANTONIO GÓMEZ ORTEGA.

B

I

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mis padres, Juana Alcántara Ramos y José de la Luz Meza Carrera, por haber propiciado en mi y en mis hermanos la cultura del estudio, y haberme apoyado durante toda mi vida. A mis hermanos, Luz Adriana y Raúl, les agradezco que compartan conmigo esta familia sólida que me ha permitido culminar mis estudios profesionales.

Especialmente quiero agradecer tambien a dos personas fundamentales en la realización de mis estudios: mi tía Ma. Antonia Meza Carrera, y mi primo Rosendo Bolívar Meza. Su hospitalidad, apoyo y ejemplo han sido pilares en la realizacion de mis estudios.

Agradezco también a Belem Díaz Velasco, quien con su amor me ha impulsado a realizar este trabajo.

Mi agradecimiento y reconocimiento:

Al profesor Rafael Rojas Barbachano, por enseñarme a desentrañar las matemáticas, por todas las enseñanzas extra matemáticas que me ha dado, y por su respaldo y confianza en la etapa en que tuve el honor de ser su ayudante.

A los profesores: José Alfredo Amor, Emilio Lluis Puebla, Emilio Lluis Riera, Arturo Nieva, Gabriel Ocampo, Ángel Tamariz, Carlos Torres y Yolanda Torres, por sus enseñanzas en matemáticas.

A los profesores: Hugo Rincón, Yolanda Torres y Gabriel Ocampo por sus valiosos comentarios y orientación en la realización de este trabajo.

A Daniel Varela, por su asesoría en la escritura de este trabajo en LaTeX.

A mis compadres: Alexei Díaz, Andrés Nava, Daniel Varela, Edna González, Elio Villaseñor, Elsa Puente, Enrique Bazúa, Israel Gelover, Nora Rodríguez, Omar Vigueras, Osvaldo Téllez y Pável Ramírez, por haber compartido conmigo esta emocionante aventura: la carrera de matemáticas.

A la Facultad de Ciencias y a la Universidad Nacional Autónoma de México, porque con sus virtudes y defectos hace a su gente conocer su realidad y la realidad de su mundo.

Introducción

El presente trabajo se inscribe en las áreas de Lógica Matemática y Teoría de las Categorías, particularmente, en el ámbito de la Lógica Proposicional (donde las fórmulas y sus interpretaciones estan dadas únicamente por la disposición de sus conectivos lógicos) y en la Teoría de Topoi Elementales, de Lawvere y Tierney.

Por semántica categorial entendemos una interpretación para un lenguaje, que nos permite discriminar de entre las fórmulas de este lenguaje, un conjunto de estas, que serán consideradas como válidas repecto a esta semántica, donde esta interpretación se hace dentro de alguna categoría, a diferencia de la semántica clásica, en la que las interpretaciones son a su vez, objetos de la teoría de conjuntos.

El interés en el estudio de las semánticas categoriales es explorar la lógica subyacente a la teoría de categorías, que como muchas otras rama de las matemáticas, tiene origen en las matemáticas mismas, y que se puede considerar parte de la matemática clásica, pero que presenta dentro de su esencia una lógica no clásica: la lógica intuicionista.

La lógica intuicionista se presenta como la formalización de la matemática constructivista de L.E.J. Brower, que rechaza algunos de los principios de la lógica clásica, particularmente, la ley de la doble negacion, puesto que la interpretación constructiva de la negación es la imposibilidad de mostrar constructivamente. De este modo, la fórmula "si no es cierto que no A, entonces A es verdadero" no es constructivamente válida puesto que el hecho de que no se puede mostrar constructivamente la verdad de no A, no quiere decir que se pueda mostrar constructivamente que pasa A. Así pues, las fórmulas válidas en el sentido intuicionista lo son tambien en el sentido clásico, mas no a la inversa.

La motivación de las semánticas categoriales se establece en el capítulo 1, y surge del teorema 1.4.15 en el que se descubre la posibilidad de interpretar un lenguaje proposicional en una categoría, en este caso, la categoría de álgebras de Boole. La interpretación en álgebras de Heyting confirma la utilidad de las interpretaciones categoriales, pero las interpretaciones de este tipo tienen un "defecto": dependen de la estructura de sus objetos y no de la estructura de las categorías mismas, y por esta razón es que no se puede establecer un vínculo entre la lógica de estas interpretaciones con la lógica de las categorías.

La validez clásica está ligada intimamente con la estructura algebraica de los conjuntos. Esto es, el álgebra de subconjuntos de un conjunto dado, que es isomorfa al conjunto de funciones características del conjunto, está determinada por la estructura de su clasificador de subobjetos, el conjunto $2 = \{0, 1\}$. La relación entre subconjuntos y funciones características sugiere una generalización de la relación de contención a categorías. La búsqueda de una analogía categórica respecto a la validez conjuntista clásica, lleva al concepto de Topos Elemental. En el capítulo 2 se expone brevemente el material teórico-categórico necesario para el capítulo 3, donde se define el concepto de Topos Elemental. Además se abunda en ejemplos y se explora un poco la estructura de estas categorías.

Finalmente, en el capítulo 4 se muestra la estructura del álgebra de subobjetos de un objeto dado en un topos. El teorema 4.2.15 reune los resultados previos respecto a la unión, intersección y seudocomplementación relativa de subobjetos y muestra el resultado central de este trabajo: La lógica subyacente a los Topoi Elementales es de tipo intuicionista.

Capítulo 1

Los lengujes proposicionales y sus semánticas

1.1. Lenguajes Proposicionales

Un *lenguaje proposicional* se define como un lenguaje formal (en el sentido de [RA97]) cuyos símbolos son los elementos de la unión de los siguientes conjuntos:

1. Un conjunto $\mathbb{P}$ no vacío de símbolos llamados "letras proposicionales".

2. Un conjunto CL llamado de *conectivos lógicos* , tal que cada uno de sus elementos tiene asociado un entero positivo, al que llamaremos *grado.*

3. Un conjunto de símbolos auxiliares, formado por los paréntesis izquierdo y derecho.

Estos conjuntos por principio se suponen ajenos dos a dos.

Dado un conjunto de letras proposicionales $\mathbb{P}$ se definen los conjuntos $Exp(\mathbb{P})$ de expresiones de $\mathbb{P}$ como el conjunto de sucesiones finitas de elementos de $\mathbb{P}$, y $\Phi(\mathbb{P})$ de fórmulas $\mathbb{P}$ como el mínimo conjunto (respecto a la contención) que contiene a todas las letras proposicionales y que está cerrado bajo las operaciones $F_\Box : Exp(\mathbb{P})^n \rightarrow Exp(\mathbb{P})$ (donde $\Box$ es un conectivo y n el grado de $\Box$), que trabajan como sigue:

$$F_\Box(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \Box(\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

Cuando $\Box$ es un conectvivo binario, se acostumbra denotar la fórmula $\Box(\alpha, \beta)$ con $(\alpha \Box \beta)$.

En este trabajo se considerarán lenguajes proposicionales cuyo conjunto de conectivos está formado por los símbolos $\neg$ (conectivo unitario); $\wedge, \vee, \rightarrow$ (conectivos binarios).

Una *semántica* **C** para un lenguaje proposicional, se define como una interpretación [1] para las fórmulas que permita discriminar de éstas un conjunto al que se llamará de **C**-válidas.

Diremos que dos semánticas **C** y **D** son equivalentes si y sólo si toda **C**-válida es una **D**-válida e inversamente.

1.2. La semántica clásica: De las tablas de verdad a las asignaciones

La semántica más conocida para lenguajes proposicionales es la dada por las célebres *tablas de verdad*[2]. La noción de validez determinada por esta semántica es la de "fórmula para la que en todo renglón de su tabla aparece la letra V".

Equivalentemente, la semántica proposicional clásica queda descrita por las asignaciones vistas como funciones del conjunto de letras proposicionales en el conjunto $2 = \{0, 1\}$, extendidas a las fórmulas en los términos de la siguiente definición.

Definición 1.2.1 (2-asignación) *Una 2-asignación es una función $v : \mathbb{P} \to 2 = \{0, 1\}$. La extensión $v^* : \Phi(\mathbb{P}) \to 2$ de la 2-asignación v se define recursivamente, como sigue:*

- $v^*(P) = v(P)$, *si P es una letra proposicional.*
- $v^*(\neg A) = 1 - v^*(A)$
- $v^*(A \to B) = max\{v^*(\neg A), v^*(B)\}$
- $v^*(A \wedge B) = min\{v^*(A), v^*(B)\}$
- $v^*(A \vee B) = max\{v^*(A), v^*(B)\}$

donde A y B son fórmulas en $\Phi(\mathbb{P})$.

Finalmente, una tautología (o fórmula 2-válida) es una fórmula a la que toda asignación extendida le asocia el valor 1.

Nótese que una 2-asignación define un renglón de una tabla de verdad, mientras que un renglón corresponde a una infinidad de asignaciones. La equivalencia entre estos dos métodos de determinación de tautologías está dada por el siguiente

Lema 1.2.2 *Sean A una fórmula de un lenguaje proposicional $\mathbb{P}$, v y w 2-asignaciones para $\mathbb{P}$. Si $v(P) = w(P)$ para toda letra proposicional P que aparece en A entonces $v^*(A) = w^*(A)$.*

[1] Entiéndase por interpretación un par formado por una estructura matemática (que puede ser de caracter conjuntista o no) y una asignación de las letras proposicionales en el dominio de esta estructura. La utilidad de la ampliación de este concepto se verá en el capítulo 4, donde la interpretación de un lenguaje proposicional se dará en el clasificador de subobjetos de un topos.

[2] No abundaré sobre la naturaleza de las tablas de verdad, pero el lector interesado en este material puede ver [End01].

1.3. Cálculos Proposicionales

Se define un cálculo proposicional como un sistema formal (en el sentido de [RA97]), basado en un lenguaje proposicional, un conjunto distinguido de fórmulas llamadas axiomas y un paquete de reglas de inferencia. Los axiomas y las reglas de inferencia de este sistema deben ser escogidas en función a la intencionalidad del cálculo. Por ejemplo, si se requiere un cálculo para modelar la noción de tautología, sus axiomas deben ser tautologías y sus reglas de inferencia deben preservar tautologías.

Ejemplo 1.3.1 (El cálculo de Kleene) *El cálculo de proposiciones de Kleene (S. C. Kleene, 1967) –que denotaremos con K– está conformado por los siguientes ingredientes:*

Un lenguaje proposicional que incluye los conectivos $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ y $\leftrightarrow$.

Las fórmulas que obedecen a los esquemas:

K1. $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

K2. $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

K3. $(A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))$

K4. $((A \wedge B) \rightarrow A)$

K5. $((A \wedge B) \rightarrow B)$

K6. $(A \rightarrow (A \vee B))$

K7. $(B \rightarrow (A \vee B))$

K8. $((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)))$

K9. $((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$

K10. $((\neg(\neg A)) \rightarrow A)$

como axiomas y la regla de inferencia Modus Ponens, *que trabaja como sigue:*

$$MP : \frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Como se muestra en [Kle67], este cálculo es completo y correcto con respecto a la noción de tautología, es decir, toda tautología es teorema formal en este sistema, y toda fórmula derivable en el sistema es tautología.

Ejemplo 1.3.2 (El cálculo intuicionista de Kleene) *El cálculo intuicionista de Kleene básicamente es idéntico al cálculo anterior, sólo que en lugar del esquema 10, se agrega el siguiente esquema:*

K10'. $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$

El cálculo intuisionista de Kleene tiene la cualidad de que de él se derivan excluisvamente las fórmulas aceptadas por los matemáticos intuicionistas. Como se puede observar, coincide casi totalmente con el cálculo clásico de Kleene, pero no postula la ley de la doble negación, y en consecuencia, no acepta le ley del tercero excluído.

Notación 1.3.3 *Sea C un cálculo de proposiciones.*

1. $\vdash_C \alpha$ *significa "α es un teorema formal de C".*

2. $\models \alpha$ *significa "α es una tautología".*

3. $\models_C \alpha$ *significa "α es una C-válida".*

Ejemplo 1.3.4 (El cálculo de Heyting) *El cálculo de proposiciones de Heyting es el sistema formal basado en un lenguaje proposicional, con los siguientes esquemas de axiomas:*

H1. $\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \alpha)$

H2. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\beta \wedge \alpha)$

H3. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$

H4. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

H5. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

H6. $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$

H7. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

H8. $(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

H9. $[(\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)] \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)$

H10. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

H11. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \neg\beta)) \rightarrow \neg\alpha$

y la regla de inferencia Modus Ponens.

El cálculo de Heyting es el más aceptado por la corriente intuicionista y resulta ser equivalente al cálculo de Kleene. De hecho, este cálculo define de manera primitiva la semántica de la lógica proposicional intuisionista: Una fórmula es válida en el sentido intuicionistasi y sólo si es derivable en el cálculo de Heyting.

1.4. Álgebras de Boole

Se define un álgebra de Boole[3] como una estructura algebraica

$$\mathfrak{B} = \langle B, +, \cdot, ^c, 0, 1\rangle$$

donde B es un conjunto no vacío (que en ocasiones denotaremos con $|\mathfrak{B}|$), $+$ y $\cdot$ son dos operaciones binarias y ^{c} una operación unitaria que satisfacen las siguientes condiciones:

$$x + y = y + x \qquad x \cdot y = y \cdot x \qquad \text{conmutatividad} \tag{1.1}$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \qquad \text{asociatividad} \tag{1.2}$$

$$(x + y) \cdot y = y \qquad (x \cdot y) + y = y \qquad \text{idempotencia} \tag{1.3}$$

$$x + x^c = 1 \qquad x \cdot x^c = 0 \qquad \text{complementos} \tag{1.4}$$

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) \qquad (x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z) \qquad \text{distributividad} \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.4.1

$$\langle 2, max, min, 1-, 0, 1\rangle$$

es un álgebra de Boole, donde $2 = \{0, 1\}$, max y min son las funciones que a cada par x, y asignan el máximo entre ellos y el mínimo entre ellos respectivamente, y $1 - (x) = 1 - x$.

Ejemplo 1.4.2 (El álgebra de Lindenbaum de $\mathbb{P}$) *Dado un lenguaje proposicional $\mathbb{P}$, se define la relación $\equiv$ entre fórmulas de $\mathbb{P}$ como sigue:* $\alpha \equiv$
β si y sólo si $\vdash_K \alpha \leftrightarrow \beta$
es sencillo mostrar que $\equiv$ es una relación de equivalencia. El álgebra de Lindenbaum de $\mathbb{P}$ es la estructura:

$$\langle L, \veebar, \bar{\wedge}, \sim, \top, \bot\rangle$$

donde:

- *L es el conjunto de clases de equivalencia respecto a $\equiv$.*
- *Las funciones $\veebar$ y $\bar{\wedge}$ son operaciones binarias sobre L y trabajan así:*

$$[\alpha] \veebar [\beta] = [\alpha \vee \beta]$$

$$[\alpha] \bar{\wedge} [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$$

[3] Para una visión amplia de álgebras de Boole es recomendable ver [BS71]

- *La función $\sim$ es una operación unitaria sobre $\mathbb{L}$ y se define por:*

$$\sim [\alpha] = [\neg\alpha]$$

Es sencillo -aunque tedioso- probar que las definiciones de estas operaciones no dependen de representantes. Para realizar una prueba remítase a [Kle67].

- *$\top$ es la clase de las tautologías y $\perp$ es la clase de las negaciones de tautologías, es decir, de las contradicciones.*

Alternativamente, es posible definir un álgebra de Boole como sigue, pero antes se darán algunas definiciones de interés matemático.

Definición 1.4.3 *1. Una relación (binaria) sobre un conjunto A es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times A$. Abreviaremos la fórmula $\langle a, b\rangle \in R$ con aRb.*

2. *Una relación binaria R sobre A se dice que es* reflexiva *si y sólo si para cada elemento $a \in A$, se tiene que aRa. Se dice que R es antisimétrica si y sólo si para cualesquiera elementos a y b de A, el hecho de que aRb y bRa implica que $a = b$. Se dice que R es transitiva si y sólo si para cualesquiera a, b y c elementos de A, si aRb y bRc entonces aRc.*

3. *Un conjunto parcialmente ordenado (COPO) es un par $\langle A, \leq\rangle$ donde A es un conjunto y $\leq$ es una relación binaria sobre A que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

4. *Sea $\langle A, \leq\rangle$ un COPO y $B \subseteq A$. Se dice que $b \in B$ es el elemento mayor de B si y solo si, para cada elemento x de B se tiene que $x \leq b$.*
   Se dice que b es elemento menor de B si y sólo si para cada elemento x de B se tiene que $b \leq x$.
   Se dice que b es un elemento máximo de B si y solo si el único elemento x de B tal que $b \leq x$ es $x = b$.
   Se dice que b es un elemento mínimo de B si y sólo si el único elemento x de B tal que $x \leq b$ es $x = b$.
   Una cota superior para B es un elemento a de A tal que para cualquier $x \in B$, $x \leq a$.
   Una cota inferior para B es un elemento a de A tal que para cualquier $x \in B$, $b \leq x$.
   El supremo de B es la menor cota superior de B.
   El ínfimo de B es la mayor cota inferior de B.

5. *Una* retícula *$\langle R, \leq\rangle$ es un COPO de tal manera que para cualesquiera dos elementos a, b de R hay un supremo en R para el conjunto $\{a, b\}$, que será denotado por $a + b$ y un ínfimo, que será denotado por $a \cdot b$.*

Teorema 1.4.4 *En cualquier retícula:*

(a) $a \cdot b = b \cdot a$ *y* $a + b = b + a$

(b) $a \cdot b \leq a$ *y* $a \cdot b \leq b$

(c) $a \leq a + b$ *y* $b \leq a + b$

(d) Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$ *entonces* $a + c \leq b + d$ *y* $a \cdot c \leq b \cdot d$

(e) $(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq a \cdot (b + c)$ *y* $a + (b \cdot c) \leq (a + b) \cdot (a + c)$

Prueba. Las cuatro primeras afirmaciones son triviales. Para la primera parte de e, observe que $b \leq b + c$ y $c \leq b + c$, de donde $a \cdot b \leq a \cdot (b + c)$ y $a \cdot c \leq a \cdot (b + c)$, lo cual prueba que $a \cdot (b + c)$ es cota superior de $a \cdot b$ y $a \cdot c$. Por tanto, $(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq a \cdot (b + c)$. Para la segunda parte, basta observar que $a \leq a + b$, $a \leq a + c$, $b \cdot c \leq b \leq a + b$ y $b \cdot c \leq c \leq a + c$. ■

Definición 1.4.5 *1. Si una retícula $\langle R, \leq \rangle$ tiene elemento mayor, éste se denotará con 1 , y si tiene elemento menor, este se denota con 0.*

2. Dado un elemento a de una retícula $\langle R, \leq \rangle$, un complemento *de a es un elemento b de la retícula tal que $a \cdot b = 0$ y $a + b = 1$.*

3. Una retícula complementada *es una retícula con 0 y 1, de tal manera que para cualquier $a \in R$ hay un complemento.*

4. Una retícula distributiva *es una retícula que cumple que $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ y $a \cdot (b + d) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$*

5. Un Álgebra de Boole *es una retícula complementada y distributiva.*

Es posible probar que en una retícula complementada y distributiva, para cada elemento a hay un único complemento, que se denota con a^c.

1.4.1. Subálgebras y homomorfismos de álgebras de Boole

Denotaremos al conjunto subyacente de un álgebra de Boole $\mathfrak{A}$ con $|\mathfrak{A}|$.

Definición 1.4.6 *Una subálgebra $\mathfrak{B}$ de un álgebra $\mathfrak{A}$ es un álgebra de Boole cuyo conjunto subyacente $|\mathfrak{B}|$ está contenido en el conjunto subyacente $|\mathfrak{A}|$ de $\mathfrak{A}$ y cuyas operaciones son las operaciones de $\mathfrak{A}$ restringidas a $|\mathfrak{B}|$.*

Ejemplo 1.4.7 *En el álgebra de Lindenbaum L de un lenguaje $\mathbb{P}$, el conjunto formado por $\perp$ y $\top$ con las operaciones restringidas es una subálgebra de L.*

Definición 1.4.8 *Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son álgebras de Boole, entonces un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ es una función $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ que preserva las operaciones algebraicas, es decir, que para todos $x, y \in |\mathfrak{A}|$:*

(a) $h(x \cdot_{\mathfrak{A}} y) = h(x) \cdot_{\mathfrak{B}} h(y)$

(b) $h(x +_{\mathfrak{A}} y) = h(x) +_{\mathfrak{B}} h(y)$

(c) $h(x^{c_{\mathfrak{A}}}) = h(x)^{c_{\mathfrak{B}}}$

Observación 1.4.9 *Es sencillo verificar que un homomorfismo entre álgebras de Boole:*

a. Envía al 0 en el 0 y al 1 en el 1.

b. Envía álgebras de Boole en subálgebras de Boole.

c. Preserva el orden definido por $a \leq b$ si y sólo si $a \cdot b = a$

Si h es un homomorfismo inyectivo, se dice que es un isomorfismo sobre su imagen, y si ademas es biyectivo, se dice simplemente que es un isomorfismo. Es fácil verificar que la función inversa de un homomorfismo biyectivo es un homomorfismo, asi que equivalentemente, se puede definir isomorfismo como un homomorfismo invertible.

Observación 1.4.10 *Para toda álgebra de Boole $\mathfrak{A}$ hay un único homomorfismo del álgebra 2 en $\mathfrak{A}$ que es además un isomorfismo sobre su imagen, a saber, la función que lleva a cada elemento distinguido del álgebra 2 en el correspondiente elemento distinguido de $\mathfrak{A}$.*

1.4.2. Validez Booleana

Obsérvese que la definición de 2-asignación sólo depende de la estructura de 2, vista como álgebra de Boole.

Esta afirmación se basa en las siguiente:

Definición 1.4.11 *Sea $\mathfrak{A} = \langle A, +, \cdot, ^c, 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole. Se define una $\mathfrak{A}$-asignación para un lenguaje proposicional $\mathbb{P}$ como una función $v : \mathbb{P} \longrightarrow A$, que se extiende en una función $v^* : \Phi(\mathbb{P}) \rightarrow A$, mediante las siguientes reglas:*

1. $v^*(P) = v(P)$ *si P es letra proposicional.*
2. $v^*(\neg\alpha) = v^*(\alpha)^c$
3. $v^*(\alpha \wedge \beta) = v^*(\alpha) \cdot v^*(\beta)$
4. $v^*(\alpha \vee \beta) = v^*(\alpha) + v^*(\beta)$
5. $v^*(\alpha \rightarrow \beta) = v^*(\alpha)^c + v^*(\beta)$

Diremos que una fórmula del lenguaje P es $\mathfrak{A}$-válida si y sólo si, para cualquier $\mathfrak{A}$-asignación v, se tiene que $v^*(\alpha) = 1$

Observación 1.4.12 *Cada $\mathfrak{A}$-asignación v determina un único homomorfismo h del álgebra de Lindenbaum $L_{\mathbf{P}}$ en $\mathfrak{A}$, dado por:*

$$h_v([\alpha]) = v^*(\alpha)$$

Prueba. Se verifica que h es función, puesto que $[\alpha] = [\beta]$ si y sólo si $\vdash_K \alpha \leftrightarrow \beta$, y dado que el cálculo de Kleene es correcto respecto a tautologías, se tiene que $v^*(\alpha) = v^*(\beta)$. Observese que:

- $h_v(\sim [\alpha]) = h_v([\neg\alpha]) = v^*(\neg\alpha) = v^*(\alpha)^c = (h_v([\alpha]))^c$
- $h_v([\alpha] \barwedge [\beta]) = h_v([\alpha \wedge \beta]) = v^*(\alpha \wedge \beta) = v^*(\alpha) \cdot v^*(\beta) = h_v([\alpha]) \cdot h_v([\beta])$
- $h_v([\alpha] \veebar [\beta]) = h_v([\alpha \vee \beta]) = v^*(\alpha \vee \beta) = v^*(\alpha) + v^*(\beta) = h_v([\alpha]) + h_v([\beta])$

■

Esta definición abre la posibilidad de semánticas para lenguajes proposicionales en la que las valuaciones van a conjuntos de cardinalidad mayor que dos, e incluso infinita. El teorema de representación de Stone garantiza que un álgebra de Boole finita tiene necesariamente cardinalidad 2^n para algun número natural n. Además, es posible encontrar un álgebra de Boole de cardinalidad κ para cualquier cardinal infinito κ, de hecho, es posible encontrar 2^κ álgebras de Boole no isomorfas de cardinalidad κ.

A pesar del aparente caos que las semánticas booleanas atraviesan, dadas la consideraciones anteriores, la validez booleana queda caracterizada en los términos del siguiente:

Teorema 1.4.13 *Para cualquier álgebra de Boole $\mathfrak{A}$, una fórmula proposicional α es $\mathfrak{A}$- válida si y sólo si α es tautología.*

Prueba. Supóngase que la fórmula α no es tautología. Por definición, existe una 2-asignación $v : \mathbb{P} \to 2$ tal que $v^*(\alpha) = 0$. Considérese el homomorfismo $h : 2 \to |\mathfrak{A}|$ definido en el ejemplo 1.4.10. Así pues, $h \circ v : \mathbb{P} \to |\mathfrak{A}|$ es una $\mathfrak{A}$-valuación, para la cual:

$$h \circ v(\alpha) = h(v(\alpha)) = h(0) = 0 \neq 1$$

de donde α no es $\mathfrak{A}$-válida.

Por otro lado, si α no es $\mathfrak{A}$-válida, hay una asignación $v : \mathbb{P} \to |\mathfrak{A}|$, para la cual $v^*(\alpha) \neq 1$. En consecuencia, $h_v([\alpha]) \neq 1$, donde $h_v : L_{\mathbb{P}} \to |\mathfrak{A}|$ es el homomorfismo inducido por la $\mathfrak{A}$-asignación v, en los términos de la observación 1.4.12. Por tanto, en el álgebra de Lindenbaum $L_{\mathbb{P}}$, sucede que $[\alpha] \neq \top$, (ver la observación 1.4.9.a) es decir, α no es tautología. ■

Con este teorema se muestra el primer ejemplo de semántica categorial:

Definición 1.4.14 *Una fórmula proposicional α es* **AB***-válida si y sólo si α es $\mathfrak{A}$-válida para cualquier álgebra de Boole $\mathfrak{A}$.*

Ahora la interpretación del lenguaje está dada por una categoría, a saber la categoría de álgebras de Boole. Esta semántica coincide con la semántica clásica, lo cual puede ser demostrado fácilmente a partir del teorema anterior.

Teorema 1.4.15 *Para cualquier fórmula proposicional α, son equivalentes:*

1. *α es una tautología*
2. *α es 2-válida*
3. *α es $\mathfrak{A}$-válida, para un álgebra de Boole dada $\mathfrak{A}$*
4. *α es* **AB***-válida*

1.5. Álgebras de Heyting

Definiremos las álgebras de Heyting como estructuras relacionales, de la misma manera que se da la definición alternativa de álgebra de Boole.

Observación 1.5.1 *En una retícula $\langle R, \leq \rangle$, si hay un elemento mínimo (resp. maximo), entonces éste es el único elemento mínimo.*

Prueba. Sean a y b elementos mínimos (maximos) de R. Dado que $a \cdot b \leq a$ y $a \cdot b \leq b$ ($a \leq a+b$ y $b \leq a+b$) se tiene que $a = a \cdot b = b$ ($a = a+b = b$), puesto que ambos, a y b son mínimos (máximos). ∎

Definición 1.5.2 *En una retícula $\langle R, \leq \rangle$, dado $a \in R$ se dice que $b \in R$ es seudocomplemento de a si y sólo si b es un máximo elemento de R tal que $a \cdot b = 0$.*

Naturalmente, no todos los elementos de una retícula dada tienen seudocomplemento, dado que no toda retícula tiene 0. Aún teniendo 0, un elemento a de la retícula puede no tener seudocomplemento porque el conjunto de $x \in R$ con $x \cdot a = 0$ puede no tener máximo.

Definición 1.5.3 *Una retícula $\langle R, \leq \rangle$ es seudocomplementada si y sólo si tiene 0 y cada elemento de R tiene un seudocomplemento.*

Ejemplo 1.5.4 *En un álgebra de Boole (retícula complementada distributiva) el seudocomplemento de un elemento dado es justamente su complemento, puesto que dado un elemento a de un álgebra de Boole, cualquier elemento ajeno a a (es decir, cuyo producto con a es cero), es necesariamente menor que el complemento de a, y por definición, el complemento de a es ajeno a a.*

Definición 1.5.5 *Para toda retícula $\langle R, \leq \rangle$, si $a, b \in R$ entonces se dice que $c \in R$ es un seudocomplemento de a relativo a b si y sólo si c es un máximo elemento de L con la propiedad $a \cdot c \leq b$.*

En un álgebra de Boole el seudocomplemento de a relativo a b es $a^c + b$

Definición 1.5.6 *Una retícula es relativamente seudocomplementada (r.p.c.) si y sólo si para todo par de elementos de la retícula hay un seudocomplemento relativo.*

Definición 1.5.7 *Un álgebra de Heyting es una retícula relativamente seudocomplementada con 0 y distributiva.*

Observación 1.5.8 *En toda álgebra de Heyting $\langle R, \leq \rangle$, dados $a, b \in R$ hay un único seudocomplemento de a relativo a b.*

Prueba. Supogamos que c y d son seudocomplementos de a relativos a b. de este modo, $a{\cdot}c \leq b$ y $a{\cdot}d \leq b$. Así pues, $(a{\cdot}c)+(a{\cdot}d) \leq b$, pero $(a{\cdot}c)+(a{\cdot}d) = a{\cdot}(c+d)$, lo cual quiere decir que $a \cdot (c+d) \leq b$, pero como c y d son seudocomplementos de a relativos a b, se tiene que $a+b \leq a$ y $a+b \leq b$, de donde, $a = a+b = b$. ■

Denotremos con $a \Rightarrow b$ al seudocomplemento de a relativo a b.

Nótese que una retícula relativamente seudocomplementada con 0 siempre es seudocomplementada, puesto que el seudocomplemento de a es el seudocomplemento de a relativo a 0 ($a \Rightarrow 0$). De este modo, un álgebra de Heyting tiene elemento mayor 1, a saber, el seudocomplemento de 0.

Observación 1.5.9 *Toda álgebra de Boole es un álgebra de Heyting.*

Ejemplo 1.5.10 *Sea $\langle A, \tau \rangle$ un espacio topológico. La retícula $\langle \tau, \subseteq \rangle$ es un álgebra de Heyting, donde el 0 es $\varnothing$, el 1 es A, el seudocomplemento de a es $int(A-a)$ y el sedocomplemento de a relativo a b es $int(A-a) \cup b$. Nótese que en esta álgebra no es necesariamente cierto que $a + (a \Rightarrow 0) = 1$.*

A continuación se dará un resultado que permite caracterizar de manera alternativa a las álgebras de Heyting.

Teorema 1.5.11 *En cualquier retícula r.p.c. donde los seudocomplementos relativos son únicos:*

I. $a \Rightarrow a = 1$

II. $a \leq b$ *si y sólo si* $a \Rightarrow b = 1$

III. (Corolario al teorema anterior) $(a \cdot b) \Rightarrow a = (a \cdot b) \Rightarrow b = a \Rightarrow (a+b) = b \Rightarrow (a+b) = 1$

IV. $a \cdot b \leq c$ *si y sólo si* $a \leq (b \Rightarrow c)$

V. $b \leq a \Rightarrow b$, *y en consecuencia* $b \Rightarrow (a \Rightarrow b) = 1$

VI. $a \leq b \Rightarrow (a \cdot b)$ *y en consecuencia* $a \Rightarrow (b \Rightarrow (a \cdot b)) = 1$

VII. $a \cdot (a \Rightarrow b) \leq b$

VIII. $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \leq (a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$, *y en consecuencia* $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = 1$

IX. (Distributividad) $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *y* $a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$

Prueba. I es una consecuencia trivial de II. Para probar II basta observar que $a{\cdot}1 = a$, y así, si $a \leq b$ entonces $a{\cdot}1 \leq b$, de donde $1 \leq a \Rightarrow b$; la otra implicación es trivial. III es consecuencia trivial de II y teorema 1.4.4. $a{\cdot}b \leq c$ es equivalente a $a \leq max\{y : y \cdot b \leq c\} = b \Rightarrow c$, de dónde se tiene IV. Para probar V basta observar que $a \cdot b \leq b$ y por tanto, $b \leq max\{y : a \cdot y \leq b\} = a \Rightarrow b$. Como $a \cdot b = b \cdot a$ se tiene que $a \leq max\{y : b \cdot y \leq a \cdot b\} = b \Rightarrow (a \cdot b)$, lo cual prueba VI. Finalmente, por definición, $(a \Rightarrow b) \cdot a \leq b$, lo cual prueba VII. Observese que para probar VIII es suficiente ver que $a \cdot (a \Rightarrow b) \cdot (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \leq c$. En efecto, $a \cdot (a \Rightarrow b) \cdot (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) = [a \cdot (a \Rightarrow b)] \cdot [a \cdot (b \Rightarrow c)] \leq b \cdot (b \Rightarrow c) \leq c$. Para probar la distributividad, por el teorema 1.4.4 inciso e, basta ver que $a \cdot (a + b) \leq (a \cdot b) + (a \cdot c)$ y $(a + b) \cdot (a + c) \leq a + (b \cdot c)$. En efecto, observe que $a \cdot b \leq (a \cdot b) + (a \cdot c)$ y $a \cdot c \leq (a \cdot b) + (a \cdot c)$. Por la parte IV, tenemos que $b \leq a \Rightarrow ((a \cdot b) + (a \cdot c))$ y $c \leq a \Rightarrow ((a \cdot b) + (a \cdot c))$, de donde, $(b + c) \leq a \Rightarrow ((a \cdot b) + (a \cdot c))$, y por el mismo inciso IV, se tiene la primera parte. Para la segunda parte, bastará ver que $(a + b) \cdot (a + c) \leq a + (b \cdot c)$. Esto es equivalente a $a + b \leq (a + c) \Rightarrow (a + (b \cdot c))$. En efecto, note que $a \cdot (a + c) = a \leq a + (b \cdot c)$ y $b \cdot (a + c) = (b \cdot a) + (b \cdot c) \leq a + (b \cdot c)$. Por tanto, $a + b \leq (a + c) \Rightarrow (a + (b \cdot c))$. Por el inciso IV, tenemos el resultado. ■

Teorema 1.5.12 *Toda retícula $\langle R, \leq \rangle$ relativamente seudocomplementada con 0 en la que los seudocomplementos relativos son únicos es un álgebra de Heyting.*

Prueba. Es una consecuencia inmediata del teorema anterior. ■

Corolario 1.5.13 *Una retícula relativamente seudocomplementada con 0 es un álgebra de Heyting si y sólo si los seudocomplementos relativos son únicos.*

Observación 1.5.14 *En una red r.p.c. $\langle R, \leq \rangle$, son equivalentes:*

(a) Para cualesquiera $a, b \in R$ hay un único seudocomplemento de a relativo a b.

(b) Para cualesquiera $a, b \in R$ hay un elemento mayor $c \in R$ con la propiedad $a \cdot c \leq b$.

Prueba. Al haber un único seudocomplemento de a relativo a b, este necesariamente es el mayor de los elementos de R con la propiedad requerida. Al haber un elemento mayor c con la propiedad $a \cdot c \leq b$, éste resulta ser el único seudocomplemento de a relativo a b. ■

El lo sucesivo, pensaremos al seudocomplemento de a relativo a b como *el mayor* elemento de c con la propiedad $a \cdot c \leq b$.

Denotaremos al seudocomplemento de a $(a \Rightarrow 0)$ con a^c.

Teorema 1.5.15 *En un álgebra de Heyting:*

1. $(a \Rightarrow c) \cdot (b \Rightarrow c) \leq (a + b) \Rightarrow c$ *y en consecuencia,*
   $(a \Rightarrow c) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow ((a + b) \Rightarrow c)) = 1$
2. $a \Rightarrow b \leq (a \Rightarrow b^c) \Rightarrow a^c$ *y en consecuencia,*
   $(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((a \Rightarrow b^c) \Rightarrow a^c) = 1$
3. $a^c \leq (a \Rightarrow b)$ *y en consecuencia,* $a^c \Rightarrow (a \Rightarrow b) = 1$

Prueba. Para probar 1 es suficiente ver que si $y \cdot a \leq c$ y $y \cdot b \leq c$ entonces $y \cdot (a + b) \leq c$. Por distributividad, esta última condición es equivalente a $(y \cdot a) + (y \cdot b) \leq c$, pero como ambos sumandos son menores o iguales que c, se tiene que la suma es menor o igual que c. Para probar 2, bastara ver que $(a \Rightarrow b) \cdot (a \Rightarrow b^c) \cdot a = 0$ (y así $(a \Rightarrow b) \cdot (a \Rightarrow b^c) \leq a^c$). En efecto, $(a \Rightarrow b) \cdot (a \Rightarrow b^c) \cdot a = (a \cdot (a \Rightarrow b)) \cdot (a \cdot (a \Rightarrow b^c)) \leq b \cdot b^c = 0$. Finalmente, probaremos 3, pero por definición $a^c \cdot a = 0 \leq b$, de donde $a^c \leq a \Rightarrow b$. ■

El lector audaz habrá notado la semejanza de los teoremas 1.4.4, 1.5.11 y 1.5.15 con los axiomas del cálculo de Kleene.

1.5.1. Validez en álgebras de Heyting

Definiremos la semántica asociada a un álgebra de Heyting de manera análoga a la definida para álgebras de Boole, es decir a través de valuaciones. Sea $\mathfrak{H} = \langle H, \leq \rangle$ un álgebra de Heyting.

Definición 1.5.16 *Una $\mathfrak{H}$-valuación de un lenguaje proposicional $\mathbb{P}$ es una función $v : \mathbb{P} \to H$, que se extiende en una función $v^* : \Phi(\mathbb{P}) \to H$, mediante las siguientes reglas:*

1. $v^*(P) = v(P)$ *si P es letra proposicional.*
2. $v^*(\neg\alpha) = v^*(\alpha)^c$
3. $v^*(\alpha \wedge \beta) = v^*(\alpha) \cdot v^*(\beta)$
4. $v^*(\alpha \vee \beta) = v^*(\alpha) + v^*(\beta)$
5. $v^*(\alpha \to \beta) = v^*(\alpha) \Rightarrow v^*(\beta)$

Nótese que esta definición es simplemente una generalización de la noción de valuación booleana, puesto que una valuación (en en el sentido de Heyting) en un álgebra de Boole es una valuación booleana.

Se dice que una fórmula $\alpha \in \Phi(\mathbb{P})$ es $\mathfrak{H}$-válida si y sólo si para toda $\mathfrak{H}$-valuación v, $v^*(\alpha) = 1$.

A diferencia de la validez booleana, la validez de Heyting no puede ser caracterizada en términos de las fórmulas válidas en cada álgebra de Heyting, puesto que hay fórmulas que son válidas en algunas álgebras de Heyting, pero en otras no, como se mostrará en la observación 1.5.21. En consecuencia, definiremos la Heyting-validez como sigue.

Definición 1.5.17 (Semántica Intuicionista) *Una fórmula α es Heyting-válida si y sólo si es $\mathfrak{H}$-válida en toda álgebra de Heyting $\mathfrak{H}$*

Lema 1.5.18 *Los axiomas del sistema intuicionista de Kleene son fórmulas Heyting-válidas.*

Prueba. Se sigue inmediatamente de los teoremas 1.4.4, 1.5.11 y 1.5.15. ■

Lema 1.5.19 *La regla Modus Ponens preserva Heyting-validez.*

Prueba. Supóngase que las fórmulas α y $\alpha \rightarrow \beta$ son Heyting-válidas. Esto es, para cualquier álgebra de Heyting $\mathfrak{H}$ y cualquier $\mathfrak{H}$-valuación v, $v^*(\alpha) = 1 = v^*(\alpha \rightarrow \beta)$. Por definición, $v^*(\alpha) \Rightarrow v^*(\beta) = 1$, de modo que por el teorema II, $v^*(\alpha) \leq v^*(\beta)$, pero como $v^*(\alpha) = 1$, se concluye que $v^*(\beta) = 1$. ■

Corolario 1.5.20 *Toda fórmula deducible en el cálculo intuicionista de Kleene es Heyting-válida.*

Observación 1.5.21 *Toda fórmula Heyting-válida es una tautología, sin embargo no toda tautología es Heyting-válida. En particular, no toda tautología es derivable en el cálculo intuicionista de Kleene.*

Prueba. Considére la fórmula $P \vee \neg P$, el álgebra de Heyting $\mathfrak{H} = \langle \tau(\mathbb{R}), \subseteq \rangle$ (la topología usual de $\mathbb{R}$ ordenada por la contención), y la $\mathfrak{H}$-valuación $v : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$v(P) = (0, \infty)$$

para todo $P \in \mathbb{P}$. De este modo:

- $v^*(P) = (0, \infty)$
- $v^*(\neg P) = (-\infty, 0)$
- $v^*(P \vee \neg P) = (0, \infty) \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} - \{0\} \neq \mathbb{R}$

Así pues, la tautología $P \vee \neg P$ no es Heyting-válida. ■

La prueba de la observación anterior muestra que el esquema 10 es independiente del resto de los esquemas del cálculo de Kleene.

En resumen: Se han mostrado dos semánticas categoriales (la categoría de álgebras de Boole y la categoría de álgebras de Heyting) en las que la validez queda definida por la validez en todos sus objetos. Estas semánticas *dependen únicamente de las propiedades internas de sus objetos y no de las propiedades de las categorías mismas*. En consecuencia, los próximos capítulos estarán dedicados a la interpretación de lenguajes proposicionales en categorías de manera que la validez esté dada por las propiedades de la categoría.

Capítulo 2

Introducción a la teoría de las categorías. Abstracción y ejemplos

2.1. Conjuntos y funciones: abstracción

La intención de esta parte es abstraer el concepto de homomorfismo entre estructuras. De este modo, definiremos las propiedades de las flechas, que de manera general, son las propiedades de los homomorfismos entre estructuras. Siguiendo esta idea, ejemplificaremos las construcciones a través de la categoría **Set** de los conjuntos, y abstraeremos las propiedades de sus flechas: las funciones.

2.1.1. Generalidades de la categoría de conjuntos

La matemática clásica moderna está cimentada sobre el universo de conjuntos, que es una construcción mental en la que todos los conjuntos aparecen, sin que éste mismo, -el universo- sea un conjunto. Esta afirmación está sustentada en el hecho de que es posible construir a los números naturales como conjuntos, y de esta manera formar el conjunto de números naturales como un conjunto de conjuntos. Y siguiendo esta línea (formando conjuntos de conjuntos), el resto de estructuras matemáticas clásicas, por ejemplo, los números racionales, reales y complejos.

Siendo consecuentes con la idea de exhibir a los objetos de estudio de la matemática como conjuntos de conjuntos, es necesario que los conceptos tales como relación, función, operación y sucesión, tengan una definición formal como conjuntos de conjuntos, que logre capturar la esencia del concepto, pero que no necesariamente sea *el* concepto.

Tal es el caso de la definición del par ordenado de a y b. Si a y b son objetos de estudio de la matemática, entonces son conjuntos, y como el par ordenado -denotado por $\langle a, b\rangle$- también será un objeto de estudio de la matemática, debe también ser un conjunto. Nótese que la esencia del concepto par ordenado es simplemente, un par de objetos en el que es posible distinguir el orden en que son tomados sus miembros. Así pues, una definición conjuntista de par ordenado debe cumplir que si dos pares ordenados son iguales, entonces sus primeros miembros son iguales y sus segundos miembros también son iguales. En símbolos:

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

Según [End77] la definición más extendiada de par ordenado es debida a K. Kuratowski, quien la formuló en 1921, y a la letra dice:

$$\langle a, b\rangle = \{a, \{a, b\}\}$$

Sin embargo, para la teoría de conjuntos es irrelevante que sea ésta, precisamente ésta, la definición de par ordenado, puesto que hay otras definiciones que igualmente cumplen la condición esencial del concepto par ordenado[1].

2.1.2. Relaciones y Funciones en el universo de conjuntos

Los conceptos de relación y función, al igual que el de par ordenado, tienen un significado intuitivo que la definición conjuntista intenta capturar. El concepto de relación (binaria) involucra a parejas de cosas que pudieran o no guardar la relación. Incluso, que vistas en un orden guarden la relación, pero al cambiarlas de orden dejen de guardar la relación. La definición conjuntista clásica es en este caso, perfectamente natural: Una relación binaria es un conjunto de pares ordenados. Justamente, los pares de conjuntos que guardan la relación.

Pero respecto al concepto de función, se debe tener mayor cautela. Según [End77] tradicionalmente se piensa a una función como "una regla que asigna a un objeto de un cierto conjunto (el dominio) un único objeto de un conjunto posiblemente distinto (el contradominio)".

Evidentemente, es necesario esclarecer el significado de la palabra "regla". En un sentido lógico, debe entenderse como una fórmula ϕ de un lenguaje formal al menos de primer orden, con dos variables libres, de tal manera que se satisfaga la fórmula:

$$\phi(x, y) \& \phi(x, z) \rightarrow y = z$$

cuando la variable x se interprete como elemento del dominio de la función.

Sin embargo esta definición de regla no puede ser satisfactoria por diversos hechos de distinta naturaleza, pero principalmente porque es una definición restrictiva al lenguaje en el que localmente se esté trabajando. En un ánimo más incluyente, se puede pensar una regla como una relación f en la que si dos pares de la forma $\langle a, b\rangle$ y $\langle a, c\rangle$ pertenecen a f, necesariamente b y c son uno y el mismo objeto. La definición de función más extendida entre los textos de teoría de conjuntos es esta última definición (la de regla), aunque algunos textos usan otras, por ejemplo en [Hal74], no se define función, sino "función de A en B", o en [Mos94] se usa como definición a la noción intuitiva de función.

El dominio y el rango de una función quedan determinados por la regla, por el hecho de que con los miembros izquierdos de una relación y con los miembros

[1] Véase [End77] para otras definiciones de par ordenado.

derechos podemos construír dos conjuntos. Pero el único conjunto digno de ser llamado el contradominio de f es el rango de f, mientras que la noción de contradominio es la de conjunto en el que la función lleva valores del dominio, que pueden ser sólo algunos de sus miembros y no necesariamente todos.

El contradominio de una función adquiere importancia cuando se planea componer funciones. La definición clásica de composición de funciones es la de composición de relaciones -La composición de relaciones está definida como sigue: dadas r y s relaciones, $r \circ s = \{\langle x, y\rangle : \exists z(\langle x, z\rangle \in s \& \langle z, y\rangle \in r\}$-, y en consecuencia, es posible componer cualesquiera dos funciones. Sin embargo el dominio de la composición puede ser subconjunto propio del dominio de la primera función que se aplica, e incluso puede ser vacío. Pero si se requiere sostener a la composición de funciones como operación en la que se respetan dominios y contradominios es necesario restringirla solo a funciones para las que el dominio de una coincide con el contradominio de la otra.

2.1.3. Relaciones y Funciones en la categoría de conjuntos

Como se verá más adelante, una categoría está formada por dos tipos de cosas: objetos y flechas. A diferencia del universo de conjuntos, que sólo está formado por conjuntos, y que cualquier cosa de contenido matemático debe ser visto como conjunto, en la categoría de conjuntos habrá cosas de dos tipos. Los objetos serán los conjuntos y las flechas serán las funciones, sólo que con una pequeña modificación:

Definición 2.1.1 (Definición categórica de función) *Una función f es una* terna ordenada *de conjuntos $f = \langle A, R, B\rangle$ donde $R \subseteq A \times B$ es tal que para cada $x \in A$ existe un único $y \in B$ tal que $\langle x, y\rangle \in R$. A la primera coordenada de una función se le llama dominio, a la segunda se le llama regla y a la tercera contradominio o codominio.*

Nótese que en esta definición se hace explícita la importancia del contradominio de una función, es decir, dos funciones (en el sentido categórico), pueden diferir por el hecho de tener diferentes contradominios.

En el sentido categórico, la composición de dos funciones debe tener como dominio al dominio de la función que se aplica primero. Una definición categórica de composición de funciones obliga a que para que esta tenga sentido, el codominio de la función que se aplica primero sea el dominio de la función que le sigue.

En términos precisos:

Definición 2.1.2 (Definición categórica de composición de funciones) *Para cada par de funciones f y g, si el dominio de f coincide con el contradominio de g, entonces la composición de f con g es la única función tal que su dominio es el dominio de g, su contradominio es el contradominio de f y su regla es la composición de las reglas de f y g, vistas como relaciones.*

Denotaremos con $g \circ f$ a la composición de f con g. En adelante, se hablará de funciones y composición de funciones en el sentido categórico de éstos, a menos que se indique lo contrario.

La composición de funciones satisface la ley asociativa, esto es:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

para cualesquiera funciones f, g y h en las que tenga sentido la composición.

Finalmente, en cada conjunto A, hay definida una función cuyo dominio y contradominio es A, y cuya regla es la relación diagonal restringida en A.

Otra caracterización de la función Id_A es la siguiente: Id_A es la única función de A en A tal que para cualesquiera funciones f con codominio A y g con dominio A,

$$Id_A \circ f = f$$

y

$$g \circ Id_A = g$$

2.2. Categorías: Definición

Definición 2.2.1 *Una categoría C comprende:*

1. *Una colección de cosas, llamadas C-objetos.*

2. *Una colección de cosas, llamadas C-flechas.*

3. *Dos operaciones*[2]*, dom y cod que a cada C-flecha f asignan los C-objetos $dom(f)$ y $cod(f)$, respectivamente. Es posible representar el hecho de que $dom(f) = a$ y $cod(f) = b$ por*

$$f : a \longrightarrow b$$

o por

$$a \xrightarrow{f} b$$

4. *Una operación entre C- flechas que asigna a cada par $\langle f, g \rangle$ de C-flechas con $dom(g) = cod(f)$, una C-flecha $g \circ f : dom(f) \longrightarrow cod(g)$ llamada, la* composición *de f con g, que satisface la ley asociativa:*

Si $f : a \longrightarrow b$, $g : b \longrightarrow c$ y $h : c \longrightarrow d$ son C-flechas, entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Diremos que el diagrama:

[2]Entiéndase por operación (para efectos de esta definición) una correspondencia entre flechas y objetos que se comporta como función en el sentido de que para cada flecha hay un único objeto que será su dominio y un único objeto que será su contradominio.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ b \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

conmuta, *si y sólo si* $h = f \circ g$.

Más en general, dado un diagrama de nodos y flechas que representen objetos y flechas de una categoría, diremos que éste conmuta si y sólo si las composiciones de flechas que forman trayectorias que confluyen en un nodo, son iguales.

5. *Una operación que a cada* C*-objeto* b *le asocia una* C*-flecha* 1_b*, llamada* la flecha identidad en b, *que satisface la ley de identidad: Para* C*-flechas* $f : a \to b$ *y* $g : b \to c$*, sucede que* $1_b \circ f = f$ *y* $g \circ 1_b = g$.

   La ley de identidad se expresa diciendo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, "1_b"] \arrow[dr, "g"] & \\ & b \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

   conmuta.

2.3. Categorías: ejemplos

Los primeros ejemplos son muy naturales.

Categoría	*Objetos*	*Flechas*
Set	Conjuntos	Funciones
Finset	conjuntos finitos	funciones
Nonset	conjuntos no vacíos	funciones
Top	espacios topológicos	funciones continuas
Vect(F)	espacios vectoriales sobre el campo F	funciones lineales
Grp	grupos	homomorfismos de grupos
Mon	monoides	homomorfismos de monoides
Met	espacios métricos	isometrías
Top Grp	grupos topológicos	homomorfismos continuos
Pos	conjuntos parcialmente ordenados	funciones monótonas

Otros son triviales:

Ejemplo 2.3.1 **1** *es la categoría con un solo objeto y una sola flecha, con la composición y la identidad evidentes.*

Ejemplo 2.3.2 **2** *es la categoría con dos objetos (digamos 0 y 1), y tres flechas, a saber:*

$$\langle 0,0\rangle : 0 \longrightarrow 0$$
$$\langle 0,1\rangle : 0 \longrightarrow 1$$
$$\langle 1,1\rangle : 1 \longrightarrow 1$$

con la composición y las identidades evidentes.

Ejemplo 2.3.3 (Categorías discretas) *Una categoriía es discreta cuando las únicas flechas que tiene son las identidades de cada uno de sus objetos.*

Ejemplo 2.3.4 (Preordenes) *Una categoría $\mathcal{C}$ que cumple que entre cualesquiera dos $\mathcal{C}$-objetos a, b hay a lo mas una flecha $f : a \longrightarrow b$, es llamada un* preorden. *Un par $\langle A, R\rangle$ de conjuntos es un conjunto preordenado si y sólo si $R \subset A \times B$ es una relación reflexiva y transitiva. Así pues, un conjunto preordenado $\langle A, R\rangle$ define un preorden. Los objetos de éste son los elementos de A, y las flechas son los elementos de R.*

Obsérvese que en esta definición no queda prohibido el hecho de que entre dos objetos distintos haya dos flechas, mientras estas tengan sentidos opuestos. Si a las condiciones dadas para que una categoría $\mathcal{C}$ sea un preorden agregamos que entre dos objetos distintos no haya más que una flecha, tendremos una categoría *orden parcial.* Un conjunto parcialmente ordenado define una categoría orden parcial en los términos del ejemplo anterior.

Ejemplo 2.3.5 $\mathcal{N}$ *es la categoría que tiene un sólo objeto ($\mathbb{N}$), y cuyas flechas son los números naturales. La composición de flechas en $\mathcal{N}$ está dada por la suma de números naturales, y la flecha $1_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es el elemento $0 \in N$.*

Generalizando el ejemplo anterior, tenemos que todo monoide define una categoría con un sólo objeto (el monoide), con los elementos del monoide como flechas, y con la operación de composición dada por la operación del monoide. La existencia de neutro y la propiedad asociativa de la operación del monoide garantizan las condiciones 4 y 5 de la definición de categoría.

2.4. Nuevas Categorías

Algunas formas usuales de construír categorías a partir de categorías dadas son las siguientes:

2.4.1. Categorías producto

Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, se define la categoría producto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ como la categoría cuyos objetos son las parejas ordenadas $\langle c, d\rangle$ donde c es un $\mathcal{C}$-objeto y d es un $\mathcal{D}$-objeto. Una flecha en $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una pareja $\langle f, g\rangle$ donde f es una $\mathcal{C}$-flecha y g es una $\mathcal{D}$-flecha. La composición de flechas queda definida coordenada a coordenada.

2.4.2. Categorías de flechas

Dada una categoría C, se construye la categoría $C^{\rightarrow}$ cuyos objetos son todas las C-flechas y si f y g son $C^{\rightarrow}$-objetos, entonces una $C^{\rightarrow}$-flecha de f en g, es un par de C-flechas $\langle h, k\rangle$ tales que $k \circ f = h \circ g$. Esto es, h y k son C-flechas tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & b \arrow[d, "k"] \\ c \arrow[r, "g"'] & d \end{tikzcd}$$

conmuta.

La composición de $C^{\rightarrow}$-flechas se define coordenada a coordenada. Esto es:

$$\langle f, g\rangle \circ \langle h, k\rangle = \langle f \circ h, g \circ k\rangle$$

2.4.3. Categorías Coma

Las categorías Coma pueden ser pensadas como clases especiales de categorías de flechas: aquellas con dominio o codominio común. Dada una categoría C, y un C-objeto a, se define $C \downarrow a$ como la categoría cuyos objetos son los pares de la forma $\langle b, f\rangle$ donde b es un C-objeto y f es una C-flecha cuyo codominio es a. Una $C \downarrow a$-flecha de $\langle b, f\rangle$ en $\langle c, g\rangle$ es una C-flecha $k : b \rightarrow c$ tal que $g \circ k = f$. Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} b \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & c \arrow[dl, "g"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

conmuta. Por otro lado, dada una categoría C, y un C-objeto a, se define $C \uparrow a$ como la categoría cuyos objetos son los pares de la forma $\langle b, f\rangle$ donde b es un C-objeto y f es una C-flecha cuyo dominio es a. Una $C \uparrow a$-flecha de $\langle b, f\rangle$ en $\langle c, g\rangle$ es una C-flecha $k : b \rightarrow c$ tal que $k \circ f = g$. Es decir, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ b \arrow[rr, "k"'] & & c \end{tikzcd}$$

conmuta.

2.4.4. Subcategorías

Definición 2.4.1 1. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría y a y b son $\mathcal{C}$-objetos, entonces $\mathcal{C}(a,b)$ es la colección de flechas con dominio a y contradominio b.*

2. *Se dice que $\mathcal{C}$ es una* subcategoría *de $\mathcal{D}$ ($\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$) si y sólo si:*

   - *Todo $\mathcal{C}$-objeto es un $\mathcal{D}$-objeto.*
   - *Si a y b son $\mathcal{C}$-objetos, entonces todas las flechas de $\mathcal{C}(a,b)$ son flechas de $\mathcal{D}(a,b)$*

3. *$\mathcal{C}$ es una subcategoría* plena *de $\mathcal{D}$ si y sólo si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ y si a y b son $\mathcal{C}$-objetos, entonces $\mathcal{C}(a,b) = \mathcal{D}(a,b)$*

De este modo se puede ver que:

1. **Finset** $\subseteq$ **Set**
2. **Nonset** $\subseteq$ **Set**
3. **Finset** $\not\subseteq$ **Nonset**
4. **Nonset** $\not\subseteq$ **Finset**

2.5. Formalización

En [Hat82] se muestra que la teoría de Categorías se puede formalizar en un lenguaje de primer orden con igualdad, cuyo tipo de semejanza consta de dos símbolos funcionales unitarios, d y c, y un símbolo predicativo ternario C que intuitivamente representan las operaciones que a cada flecha asignan su dominio y su codominio, respectivamente, y que algunas ternas de flechas estan relacionadas por el hecho de que la última es la composición de las anteriores, y que satisface los siguientes enunciados:

C1. $\forall x\big(d(c(x)) = c(x) \& c(d(x)) = d(x)\big)$

C2. $\forall x \forall y \forall z \forall w\big(C(x,y,z) \& C(x,y,w) \rightarrow z = w\big)$

C3. $\forall x \forall y\big(\exists z C(x,y,z) \leftrightarrow d(y) = c(x)\big)$

C4. $\forall x \forall y \forall z\big(C(x,y,z) \rightarrow (d(z) = d(x) \& c(z) = c(y))\big)$

C5. $\forall x\big(C(d(x),x,x) \& C(x,c(x),x)\big)$

C6. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5 \forall x_6 \forall x_7$
$\big((C(x_1,x_2,x_3) \& C(x_1,x_5,x_6) \& C(x_2,x_4,x_5) \& C(x_3,x_4,x_7)) \rightarrow x_6 = x_7\big)$

Siendo consecuentes con la idea de hacer de la teoría de categorías una teoría formal de primer orden, no hay en principio una diferencia entre flechas y objetos, es decir, la interpretación de una variable es siempre la de "flecha". Sin embargo, es posible definir en esta teoría la noción de objeto. Hatcher sugiere la siguiente:

Definición 2.5.1 *$Ob(x)$ es la fórmula $d(x) = x \& c(x) = x$*

Hatcher muestra que $Ob(x)$ es equivalente a $d(x) = x$ y a $c(x) = x$. En consecuencia del axioma 1 se tiene que los dominios y codominios de flechas son siempre objetos. Las propiedades de la composición de flechas quedan establecidas por los axiomas 2 (la composición es una función en su dominio), 3 (establece la condición para que la composición de dos flechas esté definida), 4 (define el dominio y el codominio de una composición), y 6 (ley asociativa de la composición). La existencia de flechas identidad por cada objeto se desprende del axioma 5, en el que se establece que un objeto es él mismo su flecha identidad. La formalización de la teoría de categorías adquiere sentido al enunciar el principio de dualidad que trataremos posteriormente.

En esta parte, llevaremos algunos conceptos de teoría de conjuntos a categorías.

2.6. Flechas Mono

Se dice que una función es inyectiva cuando elementos distintos tienen imágenes distintas. Esta definición es equivalente a que esta función sea cancelable por la izquierda. Esto es: $f : A \to B$ es inyectiva si y sólo si para cada par paralelo de funciones $g, h : C \to A$, el hecho de que $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$. De este modo, en una categoría C, una C-flecha es *mónica* si y sólo si es cancelable por la izquierda. De hecho, se puede probar que en cualquier categoría:

1. Si f y g son mono, entonces $g \circ f$ también lo es.

2. Si $g \circ f$ es mono, entonces también f lo es.

2.7. Flechas Epi

Una función es suprayectiva cuando para todo elemento de su contradominio, existe un elemento de su dominio, cuya imagen es el primero. Esta definición es equivalente al hecho de que esta función sea cancelable por la derecha. Esto es: una función $f : A \to B$ es suprayectiva si y sólo si para cada par paralelo de funciones $g, h : B \to C$, si $g \circ f = h \circ f$ entonces $g = h$. De este modo, en una categoría C, una C-flecha es *epi* si y sólo si es cancelable por la derecha. Análogamente, se puede probar que en cualquier categoría:

1. Si f y g son epi, entonces $g \circ f$ también lo es.

2. Si $g \circ f$ es epi, entonces también g lo es.

2.8. Flechas Iso

Una función es biyectiva si y sólo si es inyectiva y suprayectiva. Esta condición es equivalente a que esta función sea invertible. Esto es: $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva si y sólo si hay una función $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = Id_A$ y $g \circ f = Id_b$. Tal función g es única (si existe), y es llamada *la inversa de* f, que se acostumbra denotar con f^{-1}. De este modo, en una categoría C una flecha es *iso* si y sólo si es invertible. Es posible mostrar que toda flecha iso es mónica y épica. Sin embargo no en cualquier categoría una flecha mónica y épica es iso. Además, se puede mostrar que:

1. Todas las flechas identidad son iso.
2. Si f es iso, entonces f^{-1} es iso.
3. Si f y g son iso entonces $g \circ f$ es iso, con $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
4. En una categoría parcialmente ordenada $\langle P, \leq \rangle$, todas las flechas son mónicas y épicas, pero sólo las identidades son iso.
5. En un grupo [3], todas las flechas son iso.

Diremos que dos C-objetos a, b son isomorfos ($a \cong b$) si y sólo si hay una flecha iso del uno al otro. Es trivial verificar que la relación de isomorfía es de equivalencia.

Diremos que una categoría C es esquelética si y sólo si para cada par de C-objetos a, b, si $a \cong b$ entonces $a = b$.

2.9. Dualidad

Una noción de teoría de categorías (término o fórmula) es suceptible de tener un dual, que se obtiene simplemente cambiando dominios por contradominios y viceversa, y cambiando el sentido de las flechas. Formalmente, para cada término del lenguaje de la teoría de categorías τ es posible definir un segundo término $\bar{\tau}$, su dual, de la siguiente manera. Dada una variable x, su dual $\bar{x}$ es ella misma. El dual de $d(\tau)$ es $c(\bar{\tau})$ y el dual de $c(\tau)$ es $d(\bar{\tau})$. El dual de una fórmula del lenguaje de la teoría de categorías también se define recursivamente, a saber: El dual de una igualdad entre términos es la igualdad entre los términos duales de los términos dados. El dual de $C(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ es la fórmula $C(\bar{\tau_2}, \bar{\tau_1}, \bar{\tau_3})$. Para los conectivos y cuantificadores, el operador "dual" se comporta de la siguiente manera: Si α y β son fórmulas del lenguaje de la teoría de categorías, entonces:

1. $\bar{\neg}\alpha = \neg\bar{\alpha}$
2. $\alpha \bar{\&} \beta = \bar{\alpha} \& \bar{\beta}$
3. $\alpha \bar{\vee} \beta = \bar{\alpha} \vee \bar{\beta}$

[3] ver ejemplo 2.3.5

4. $\overline{\forall x\alpha} = \forall x\bar{\alpha}$

y así con el resto de conectivos y cuantificadores.

Ejemplo 2.9.1 *En el lenguaje formal de primer orden para categorías, la frase "f es una flecha mono" es la interpretación intuitiva de la fórmula*

$$\forall x\forall y\forall z(C(f,x,z)\&C(f,y,z) \longrightarrow x = y)$$

el dual de la fórmula anterior es:

$$\forall x\forall y\forall z(C(x,f,z)\&C(y,f,z) \longrightarrow x = y)$$

que intuitivamente se interpreta como "f es una flecha epi"

Observe además, que los conceptos de flecha iso y objeto son autoduales, puesto que su fórmula es equivalente a su fórmula dual.

Teorema 2.9.2 $\tau = \bar{\bar{\tau}}$

Prueba. Es trivial puesto que la igualdad se da por razones estrictamente sintácticas. Formalmente se puede verificar por inducción sobre la formación de τ. ■

2.9.1. La categoría opuesta

Dada una categoría C, se define la categoría opuesta C^{op} de C, como la categoría cuyos objetos son los objetos de C y cuyas flechas son las flechas de C, sólo que "invertidas". Esto es, hay una correspondencia biunívoca entre las C-flechas $f : a \longrightarrow b$ y las C^{op}-flechas de b en a. De esta manera, se tiene el siguiente:

Teorema 2.9.3 (Principio de Dualidad) *Una fórmula α del lenguaje de la teoría de categorías es verdadera en una categoría C si y sólo si, la fórmula dual $\bar{\alpha}$ de α es verdadera en C^{op}.*

Prueba. Evidente. ■

2.10. Objetos iniciales y terminales

Una propiedad relevante del conjunto vacío es la de que para cada conjunto A, hay una única función de $\varnothing$ en A a saber: $\langle\varnothing, \varnothing, A\rangle$. Esto se generaliza en la siguiente

Definición 2.10.1 *Un C-objeto* 0 *es* inicial *si y sólo si para cada C-objeto a hay una y sólo una flecha de* 0 *en a.*

En **Set** el conjunto vacío es el único objeto inicial, sin embargo hay categorías en las que hay más de un objeto inicial. Es muy sencillo probar que cualesquiera dos objetos iniciales son isomorfos, usando el hecho de que dados dos objetos iniciales, las únicas flechas entre éstas son una inversa de la otra. Además se puede demostrar fácilmente que cualquier objeto isomorfo a un objeto inicial también es un objeto inicial. Denotaremos con $! : 0 \to a$ o con $0_a : 0 \to a$ a la única flecha de 0 en a.

Dualizando la definición anterior tenemos:

Definición 2.10.2 *Un C-objeto 1 es* terminal *si y sólo si para cada C-objeto a hay una y sólo una flecha de a en 1.*

En **Set** son los conjuntos unitarios los objetos terminales. Evidentemente, no hay un único objeto terminal en **Set**. Sin embargo, en **Set** como en cualquier categoría, dos objetos terminales son isomorfos, y cualquier objeto isomorfo a un objeto terminal es también un objeto terminal. Denotaremos con $! : a \to 1$ o con $|_a : a \to 1$ a la única flecha de a en 1. Hay categorías cuyos objetos iniciales son los mismos que sus objetos terminales. Un objeto inicial y terminal se dice que es un cero-objeto. **Mon** y **Grp** si tienen cero-objetos.

2.11. Productos

Sean A y B conjuntos. El producto cartesiano de A por B queda definido como el conjunto de parejas ordenadas $\langle a, b\rangle$ con $a \in A$ y $b \in B$. Es posible dar una definición de producto cartesiano (salvo isomorfismo) sin recurrir a la noción de pareja ordenada, simplemente observando que hay asociadas al producto un par de flechas, las proyecciones p_A y p_B que cumplen una cierta propiedad: Dadas dos funciones $f : C \to A$ y $g : C \to B$ hay una única función $p : C \to A \times B$ de tal manera que $f = p \circ p_A$ y $g = p \circ p_B$, esto es, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "p"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, o en otros términos, para cada $z \in C$, $p(z) = \langle f(z), g(z)\rangle$. Esto justifica la siguiente

Definición 2.11.1 *Un producto, en una categoría C de dos C-objetos a y b, es un C-objeto $a \times b$ junto con dos C-flechas pr_a y pr_b tales que para cualquier par de C-flechas $f : c \to a$ y $g : c \to b$ hay exactamente una C-flecha $\langle f, g\rangle : c \to a \times b$ que hace que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "pr_a"] \arrow[r, "pr_b"'] & b \end{tikzcd}$$

conmute. Esto es, $f = pr_a \circ \langle f, g\rangle$ *y* $g = pr_b \circ \langle f, g\rangle$. *Diremos que* $\langle f, g\rangle$ *es el producto de* f *y* g *con respecto a las proyecciones* pr_a *y* pr_b.

Como siempre, no necesariamente hay un único producto para un par de objetos dados, sin embargo se puede probar que cualesquiera dos productos son isomorfos. Para tal efecto, basta considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "pr'_a"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "pr'_b"] & \\
a \arrow[d, "1_a"'] & a \times b \arrow[l, "pr_a"] \arrow[r, "pr_b"'] \arrow[d, dashed, "k"] & b \arrow[d, "1_b"] \\
a & c \arrow[l, "pr'_a"] \arrow[r, "pr'_b"'] & {}
\end{tikzcd}$$

Bajo la suposición de que c es el producto de a con b respecto a la proyecciones pr'_a y pr'_b, y del hecho de que el diagrama exterior conmuta, se tiene que $k \circ h = 1_c$. Pero rearreglando este diagrama convenientemente, es posible mostrar que $h \circ k = 1_{a\times b}$.

El siguiente teorema muestra el comportamiento de las flechas producto con respecto a la composición.

Teorema 2.11.2 *Sean* $f : c \to a$, $g : c \to b$ *y* $h : d \to c$ *flechas de una categoría* C. *Entonces*

$$\langle f, g\rangle \circ h = \langle f \circ h, g \circ h\rangle$$

Prueba. Por definición de producto, $\langle f \circ h, g \circ h\rangle$ es la única flecha que hace que los triángulos $d, a \times b, a$ y $d, a \times b, b$ del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f \circ h"'] \arrow[ddr, bend left, "g \circ h"] & \\
 & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

conmuten, sin embargo, $\langle f, g\rangle \circ h$ también hace que los triángulos conmuten. Por tanto, $\langle f, g\rangle \circ h = \langle f \circ h, g \circ h\rangle$. ■

El producto de C-objetos es una operación con muchas propiedades, algunas de las cuales describiremos a continuación:

1. $\langle pr_a, pr_b\rangle = 1_{a\times b}$
2. Si $\langle f, g\rangle = \langle h, k\rangle$ entonces $f = h$ y $g = k$
3. Si C tiene objeto inicial entonces $a \times 0 \cong 0$
4. Si C tiene objeto terminal entonces $a \times 1 \cong a$

2.11.1. Mapeos producto

Dadas dos funciones, digamos $f : A \to C$ y $g : B \to D$, éstas definen una función, llamémosla $f \times g$ de $A \times B$ en $C \times D$, que trabaja así:

$$f \times g(\langle a, b\rangle) = \langle f(a), g(b)\rangle$$

Con esto justificamos la siguiente:

Definición 2.11.3 *Si $f : a \to c$ y $g : b \to d$ son C-flechas y $a \times b$ y $c \times d$ existen en C, entonces la flecha $f \times g$ se define como la flecha $\langle f \circ pr_a, g \circ p_b\rangle$.*

Esta definición se ilustra con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "f"] & c \\
a \times b \arrow[ur, "pr_a"] \arrow[dr, "pr_b"'] \arrow[rr, dashed, "\langle f o pr_a, g o pr_b\rangle"] & & c \times d \arrow[u, "pr_c"'] \arrow[d, "pr_d"] \\
 & b \arrow[r, "g"'] & d
\end{tikzcd}$$

2.12. Igualadores

Dado un par de funciones que comparten dominio y codominio, es posible preguntarse en qué subconjunto del dominio estas funciones se comportan igual. Esto es, un par paralelo de **Set**-flechas $f, g : A \to B$ define una tercera **Set**-flecha $e : C \to A$ (que de hecho es una inclusión) que hace que $f \circ e = g \circ e$, y además, es maximo respecto a esta propiedad, es decir, si $h : D \to A$ es tal que $f \circ h = g \circ h$ entonces hay una única manera de "vaciar" D en C, esto es, hay una única función $k : D \to C$ de tal manera que $e \circ k = h$. Para generalizar este concepto se introduce la siguiente:

Definición 2.12.1 *Dado un par paralelo de C-flechas $f, g : a \rightrightarrows b$, un igualador de f y g es un C-objeto e junto con una C-flecha $i : e \to a$ tales que:*

1. *$f \circ i = g \circ i$*
2. *Para cualquier flecha $h : d \to a$ tal que $f \circ h = g \circ h$ sucede que hay una única flecha $k : d \to e$ de tal manera que $h = i \circ k$*

Esto se representa con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
 & d \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[u, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Dos propiedades importantes de el igualador de un par de flechas paralelas son las siguientes:

Teorema 2.12.2 *El igualador $i : e \to a$ de un par paralelo de flechas $f, g : a \rightrightarrows b$ es una flecha mono.*

Prueba. Supóngase que $j, l : c \rightrightarrows e$ son flechas tales que $i \circ j = i \circ l$. Llamemos h a la flecha $i \circ j$. De este modo,

$$f \circ h = f \circ (i \circ j) = (f \circ i) \circ j = (g \circ i) \circ j = g \circ (i \circ j) = g \circ h$$

Pero como hay una única flecha k tal que $i \circ k = h$ y $h = i \circ j = i \circ l$, se tiene que $j = l$. ■

Teorema 2.12.3 *En cualquier categoría, un igualador epi es iso.*

Prueba. Supongase que la flecha epi $i : e \to a$ iguala a las flechas $f, g : a \rightrightarrows b$. En particular, $f \circ i = g \circ i$. Cancelando la flecha epi i por la derecha, se tiene que $f = g$. Además, para el objeto a y la flecha 1_a sucede que hay una única flecha $k : a \to e$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} e \arrow[rr, "i"] & & a \\ & a \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[ur, "1_a"'] & \end{tikzcd}$$

conmute, es decir, $1_a = i \circ k$. Pero además,

$$i \circ k \circ i = 1_a \circ i = i = i \circ 1_b$$

y como i es igualador, por el teorema 2.12.2 es cancelable por la izquierda, de donde, $k \circ i = 1_b$, con lo que se concluye que i es iso y su inversa es k. ■

2.13. Límites y Co-límites

A continuación una discusión general respecto a colecciones particulares de objetos y flechas de una categoría dada.

Definición 2.13.1 (Diagramas, conos y límites) *Sea C una categroría.*

1. *Un* diagrama *D en C es simplemente una colección de C-objetos, junto con algunas o ninguna C-flechas entre estos C-objetos.*

2. *Un* cono *para un diagrama D o D-cono, denotado por $\{c, \{f_d : d \in D\}\}$ consta de un C-objeto c junto con una C-flecha $f_d : c \to d$ por cada C-objeto d de D, de tal manera que si $g : a \to b$ es una C-flecha del diagrama D, entonces $f_b = g \circ f_a$. Esto es, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "g"] & & b \\ & c \arrow[ul, "f_a"] \arrow[ur, "f_b"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta para cualesquiera objetos a y b y cualquier flecha $g : a \to b$ en el diagrama D.

3. *Un* límite *para un diagrama D es un D-cono $\{c, \{f_d : d \in D\}\}$ que cumple que dado cualquier D-cono $\{c', \{f'_d : d \in D\}\}$ hay una única C-flecha $h : c' \to c$, de manera que para cada d en D, $f'_d = f_d \circ h$, es decir, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "g"] & & b \\
& c \arrow[ul, "f_a"'] \arrow[ur, "f_b"] & \\
& c' \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[uul, bend left, "f'_a"] \arrow[uur, bend right, "f'_b"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta para cualesquiera a, b objetos y $g : a \to b$.

Cuando este límite existe, se dice que tiene la propiedad universal con respecto a D-conos. Esta propiedad consiste en que cualquier otro cono se factoriza a traves del límite.

Observación 2.13.2 *Un D-límite es siempre único salvo isomorfismo.*

Prueba. Sean $\{c, \{f_d : d \in D\}\}$ y $\{c', \{f'_d : d \in D\}\}$ límites para el diagrama D. Por tanto, hay C-flechas $h : c' \to c$ y $k : c \to c'$ tales que $f'_d = f_d \circ h$ y $f_d = f'_d \circ k$ para cada C-objeto d de D. Observe que, para cada C-objeto d de D, $f_d = f_d \circ 1_c$ y $f'_d = f'_d \circ 1_{c'}$ y además, 1_c y $1_{c'}$ son las únicas C-flechas con esta propiedad. Sin embargo, $f_d = f'_d \circ k = ((f_d \circ h) \circ k) = f_d \circ (h \circ k)$. De dónde, $h \circ k = 1_c$. Análogamente se puede mostrar que $k \circ h = 1_{c'}$. Por tanto, $h : c \to c'$ es un isomorfismo. ■

Ejemplo 2.13.3 *El diagrama vacío tiene por límite a cualquier objeto terminal, si es que nuestra categoría tiene objetos terminales.*

Ejemplo 2.13.4 *El diagrama consistente de dos objetos a y b y sin flechas, tiene como límite a cualquier producto de a y b(si es que lo hay) $a \times b$ junto con las flechas proyección p_a y p_b.*

$$\begin{tikzcd}
a & & b \\
& a \times b \arrow[ul, "p_a"] \arrow[ur, "p_b"'] &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.13.5 *El diagrama de dos objetos a y b y un par paralelo de flechas $f, g : a \rightrightarrows b$ tiene como límite al igualador de f y g.*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] & & b \\
& e \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "f \circ i"'] &
\end{tikzcd}$$

Dualizando la definición anterior, tenemos:

Definición 2.13.6 *1. Un co-cono para un diagrama D o D-co-cono, denotado por $\{c, \{f_d : d \in D\}\}$ consta de un C-objeto c junto con una C-flecha $f_d : d \to c$ por cada C-objeto d de D, de tal manera que si $g : a \to b$ es una C-flecha del diagrama D, entonces $f_a = f_b \circ g$. Esto es, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & c & \\ a \arrow[ur, "f_a"] \arrow[rr, "g"'] & & b \arrow[ul, "f_b"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. Un co-límite *para un diagrama D es un D-co-cono $\{c, \{f_d : d \in D\}\}$ que cumple que dado cualquier D-co-cono $\{c', \{f'_d : d \in D\}\}$ hay una única C-flecha $h : c \to c'$, de manera que para cada d en D, $f'_d = h \circ f_d$, es decir, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & c' & \\ & c \arrow[u, dashed, "h"] & \\ a \arrow[uur, "f'_a"] \arrow[ur, "f_a"] \arrow[rr, "g"'] & & b \arrow[uul, "f'_b"'] \arrow[ul, "f_b"'] \end{tikzcd}$$

conmuta para cualesquiera a y b objetos y $f : a \to b$.

Como se puede observar de estas definiciones, los límites tienen una propiedad cercana a la maximalidad en el sentido de que cualquier cono para el mismo diagrama está "metido" de manera única en el límite. Análogamente la definición de co-límite establece una propiedad cercana a la minimalidad.

Ejercicio 2.13.7 *Dualice los ejemplos 2.13.3 y 2.13.4.*

El dual del ejemplo 2.13.4 es co-cono muy importante para este trabajo, y es conocido como coproducto. En general el colímite del diagrama con dos objetos a y b y sin flechas se denota con $a + b$. Dadas dos flechas $f : a \to c$ y $g : b \to c$, la flecha cuya unicidad se postula se denota con $[f, g]$. Es posible construír una flecha $f + g$ dual a la flecha producto $f \times g$. El lector podrá definirla fácilmente.

En la categoría **Set** de conjuntos, el coigualador de dos conjuntos a y b es un la unión disjunta de a con b con las inclusiones $i_a : a \to a + b$ y $i_b : b \to a + b$.

Ejemplo 2.13.8 (Co-igualadores) *Sean $f, g : a \rightrightarrows b$ un par paralelo de C-flechas. Un co-igualador para f y g es un co-límite para el diagrama consistente de los C-objetos a y b y las C-flechas f y g. Esto es, un co-igualador para f y g consta de un C-objeto e y una C-flecha $i : b \to c$ tales que:*

1. $i \circ f = i \circ g$

II. *Cada que $h : b \to c$ es tal que $h \circ f = h \circ g$, existe una única C-flecha $k : e \to c$ de manera que $h = k \circ i$. Esto es, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "h"'] & & e \arrow[dl, dashed, "k"] \\ & & c & \end{tikzcd}$$

conmuta.

En **Set**, los co-igualadores tienen una interpretación poco natural. Sean $f, g : A \rightrightarrows B$ un par paralelo de funciones. Definimos

$$R = \{\langle f(x), g(x)\rangle \in B \times B : x \in A\}$$

que es claramente una relación binaria en B. Sea R' la mínima relación de equivalencia sobre B que contenga a R. Sean $E = B/_{R'}$ el cociente de B módulo R', e $i : B \to E$ la función dada por

$$i(b) = [b]$$

que lleva a cada $b \in B$ en su clase de equivalencia. Así pues, E junto con i es el co-igualador de f y g.

Ejercicio 2.13.9 *Pruebe esta última afirmación.*

Lema 2.13.10 *Toda flecha co-igualador es epi.*

Prueba. La prueba se obtiene dualizando la prueba del lema 2.12.2. ■

2.14. Tiradores

Un tirador (en inglés *pullback*) para un par de flechas $f : a \to c$ y $g : b \to c$ con codominio común c es un límite para este diagrama. Esto es, un C-objeto d junto con tres C-flechas $f' : d \to b$, $g' : d \to a$ y $h : d \to c$, tales que $h = f \circ g' = g \circ f'$. (Observe que h queda determinada por f' y g'), esto es, el diagrama

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

conmuta, y que además, para cualquier par de flechas $k : e \to a$ y $j : e \to b$ que sean tales que $f \circ k = g \circ j$ hay una única C-flecha $i : e \to d$ tal que $k = g' \circ i$ y

$j = f' \circ i$. Esto es representado por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, dashed, "i"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & \\
& d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}$$

Al cuadrado del interior se le llama "cuadrado tirador" o "cuadrado cartesiano". También se dice que f' se obtiene tirando f a lo largo de g, y que g' se obtiene tirando g a lo largo de f.

Ejemplo 2.14.1 *En **Set**, un tirador de dos funciones con codominio común*

$$A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$$

es el conjunto

$$D = \{\langle x, y\rangle \in A \times B : f(x) = g(y)\}$$

junto con las proyecciones (naturalmente, restringidas a D). Esto se ilustra con:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "p_B|_D"] \arrow[d, "p_A|_D"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Algunas veces, el tirador de f y g es denotado por $A \times_C B$. Es decir, el producto de A por B sobre C, o el producto fibrado.

Ejercicio 2.14.2 *Verifique los detalles de esta construcción.*

Hay una cantidad inmensa de ejemplos con contenido matemático de construcciones que corresponden a tiradores, que veremos conforme vayamos utilizándolos. Por lo pronto, enunciaremos y probaremos dos resultados importantes:

Lema 2.14.3 (del Tirador) *Si un diagrama de la forma:*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces:

1. *Si los cuadrados son tiradores, entonces el rectángulo (con lados superior e inferior como las composiciones evidentes) tambien es un tirador.*

ii *Si el rectángulo y el cuadrado del lado derecho son tiradores, entonces el cuadrado del lado izquierdo tambien lo es.*

Prueba. Para la primera parte, considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[drrr, bend left, "f"] \arrow[drr, dashed, "h"] \arrow[ddr, "g"'] \arrow[ddrr, bend right=40, "f_3\circ g"'] & & & \\
& a_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_5"'] & a_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_6"'] & a_3 \arrow[d, "f_7"] \\
& a_4 \arrow[r, "f_3"] & a_5 \arrow[r, "f_4"'] & a_6
\end{tikzcd}$$

Dado que el cuadrado del lado derecho es un tirador, y dado un C-objeto c y C-flechas $f : c \to a_3$, $g : c \to a_4$ tales que $(f_4 \circ f_3) \circ g = f_7 \circ f$, hay una única C-flecha $h : c \to a_2$ tal que

$$f = f_2 \circ h \tag{2.1}$$

y

$$f_3 \circ g = f_6 \circ h \tag{2.2}$$

Por otro lado, como el cuadrado izquierdo también es un tirador, se tiene que hay una única C-flecha $k : c \to a_1$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[ddr, "g"'] & & & \\
& a_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_5"'] & a_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_6"'] & a_3 \arrow[d] \\
& a_4 \arrow[r, "f_3"'] & a_5 \arrow[r] & a_6
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir:

$$f_1 \circ k = h \tag{2.3}$$

y

$$f_5 \circ k = g \tag{2.4}$$

De este modo, k es una C-flecha que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[drrr, bend left, "f"] \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[ddr, "g"'] & & & \\
& a_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_5"'] & a_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_6"'] & a_3 \arrow[d, "f_7"] \\
& a_4 \arrow[r, "f_3"] & a_5 \arrow[r, "f_4"'] & a_6
\end{tikzcd}$$

conmute, esto es:

$$f_5 \circ k = g$$

y

$$(f_2 \circ f_1) \circ k = f \tag{2.5}$$

lo cual prueba la existencia. Ahora bien, si $k' : c \to a_1$ cumple las condiciones 2.4 y 2.5 impuestas para k, entonces

$$f_1 \circ k' = h \tag{2.6}$$

puesto que h es la única que cumple las condiciones 2.1 y 2.2, que son condiciones que cumple $f_1 \circ k'$ (contrastar con 2.3 y 2.4). En consecuencia, por 2.6 y por que $f_5 \circ k' = g$, tenemos que $k = k'$, pues por su construcción, k es la única flecha que cumple estas condiciones.

Veamos la segunda parte. Para esto, considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, "f"] \arrow[drrr, bend left, "f_2 \circ f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & & \\
& a_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_5"] & a_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_6"] & a_3 \arrow[d, "f_7"] \\
& a_4 \arrow[r, "f_3"'] & a_5 \arrow[r, "f_4"'] & a_6
\end{tikzcd}$$

Supongamos que $f : c \to a_2$ y $g : c \to a_4$ son tales que $f_6 \circ f = f_3 \circ g$. Como el rectángulo es un tirador, tenemos que hay una única flecha $k : c \to a_1$ de tal manera que

$$f_2 \circ f = (f_2 \circ f_1) \circ k \tag{2.7}$$

y

$$g = f_5 \circ k \tag{2.8}$$

puesto que $f_7 \circ (f_2 \circ f) = (f_7 \circ f_2) \circ f = (f_4 \circ f_6) \circ f = f_4 \circ (f_6 \circ f) = f_4 \circ (f_3 \circ g)$. Ahora bien, al ser tirador el cuadrado derecho, se tiene que

$$f_1 \circ k = f \tag{2.9}$$

puesto que f es la única flecha para la cual se cumplen $f_2 \circ f = f_2 \circ (f_1 \circ k)$ y $f_3 \circ g = f_6 \circ (f_1 \circ k)$. Así pues, por 2.7 y 2.9, tenemos la existencia. Para la unicidad, supongamos que k' cumple las condiciones 2.7 y 2.9 para k, pero por la construcción de k, esta flecha es la única que cumple estas condiciones, de donde $k = k'$. ■

Corolario 2.14.4 *Si un diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces:

I. *Si los dos cuadrados son tiradores, entonces el rectángulo es tirador.*

II. *Si el rectángulo y el cuadrado inferior son tiradores entonces el cuadrado superior es tirador.*

Prueba. Basta reacomodar el diagrama para verificar el corolario. ∎

Lema 2.14.5 *Si el cuadrado*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & b \arrow[d, "k"] \\
c \arrow[r, "f"'] & d
\end{tikzcd}$$

es un tirador y f es mono, entonces g también es mono.

Prueba. Sean $m, l : e \rightrightarrows a$ dos flechas tales que $g \circ m = g \circ l$. Dado que el cuadrado del lema conmuta, tenemos que $k \circ g = f \circ h$, por lo que

$$f \circ h \circ l = k \circ g \circ l = k \circ g \circ m = f \circ h \circ m \tag{2.10}$$

Así pues, hay una única flecha $r : e \to a$ tal que $g \circ r = g \circ l$ y $h \circ r = h \circ m$, como se muestra en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, dotted, "r"] \arrow[drr, bend left, "gol"] \arrow[ddr, bend right, "hom"'] & & \\
& a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & b \arrow[d, "k"] \\
& c \arrow[r, "f"'] & d
\end{tikzcd}$$

Trivialmente, $r = l$ y $r = m$ cumplen el primer conyunto. Por otro lado, de la igualdad 2.10, y del hecho que f es mono se tiene que $h \circ l = h \circ m$, por lo que tanto $r = l$ como $r = m$ satisfacen el segundo coyunto. De este modo, l y m no tienen otra mas que ser iguales. ∎

2.15. El lanzador

El lanzador de un par de flechas con dominio común es el co-límite del diagrama formado por éstas. Esto es, dado un diagrama del tipo:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & b \\ c & \end{tikzcd}$$

el lanzador de f y g es un C-objeto d junto con dos C-flechas $f' : c \longrightarrow d$ y $g' : b \longrightarrow d$ tales que

I. $g' \circ f = f' \circ g$ y

II. para cada par de flechas $h : b \longrightarrow e, k : c \longrightarrow e$ tales que $h \circ f = k \circ g$, hay una única C-flecha $i : d \longrightarrow e$ de tal manera que $i \circ f' = k$ y $i \circ g' = h$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d, "g'"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\ c \arrow[r, "f'"'] \arrow[drr, bend right, "k"'] & d \arrow[dr, dashed, "i"] & \\ & & e \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejercicio 2.15.1 *Dualice el lema del tirador*

2.16. Completud

Definición 2.16.1 (Completud, etc.) *Una categoría C, se dice que es:*

a. Completa *si y sólo si para todo diagrama de C hay un límite.*

b. Co-completa *si y sólo si para todo diagrama de C hay un co-límite.*

c. Bicompleta *si y sólo si es completa y co-completa.*

d. Finitamente Completa *si y sólo si para todo diagrama finito de C hay un límite.*

e. Finitamente Co-completa *y* Finitamente Bicompleta *se definen como es natural.*

Teorema 2.16.2 *Si una categoría C tiene un objeto terminal y un tirador por cada par de C-objetos, entonces es finitamente completa.*

Para una prueba de este teorema, ver [HS73]. Nótese entonces, que si una categoría tiene un objeto inicial y un lanzador por cada par de objetos, entonces es finitamente co-completa.

2.17. Exponenciación

Dados dos conjuntos A y B, es posible formar el conjunto de funciones B^A de A en B. Para caracterizar con flechas la exponenciación es necesario considerar una flecha especial, la flecha evaluación $ev : B^A \times A \longrightarrow B$, que en **Set** trabaja así:

$$ev(\langle f, x\rangle) = f(x)$$

La función evaluación disfruta de una propiedad universal respecto a las funciones de la forma:

$$g : C \times A \longrightarrow B$$

Dada una función g de esta forma, hay una y sólo una función $\widehat{g} : C \longrightarrow B^A$ de manera que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[dr, "ev"] & \\
& B \\
C \times A \arrow[uu, dashed, "\widehat{g}\times Id_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. La idea detrás de esta definición es la siguiente: La función g obliga a cada $c \in C$ a comportarse como una función de A en B. Esto es, dada $c \in C$, se define $g_c : A \longrightarrow B$ que trabaja así: $g_c(a) = g(\langle c, a\rangle)$, para toda a en A, y así se define $\widehat{g}(c) = g_c$.

Por abstracción, daremos la siguiente

Definición 2.17.1 (Exponenciación) *Diremos que una categoría* $\mathcal{C}$ *tiene exponenciación si y sólo si tiene al producto de cualesquiera dos objetos, y para cualesquiera objetos* a *y* b *hay un* $\mathcal{C}$*-objeto* b^a *y una* $\mathcal{C}$*-flecha* $ev : b^a \times a \longrightarrow b$ *llamada "flecha evaluación", tales que para cualquier* $\mathcal{C}$*-objeto* c *y cualquier flecha* $g : c \times a \longrightarrow b$ *hay una única* $\mathcal{C}$*-flecha* $\widehat{g} : c \longrightarrow b^a$ *que hace que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
b^a \times a \arrow[dr, "ev"] & \\
& b \\
c \times a \arrow[uu, dashed, "\widehat{g}\times 1_a"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

conmute. Es decir, hay una única flecha $\widehat{g}$ *tal que* $ev \circ (\widehat{g} \times 1_a) = g$.

La asignación $g \longrightarrow \widehat{g}$ establece una biyección entre $\mathcal{C}(c \times a, b)$ y $\mathcal{C}(c, b^a)$. Dos flechas que se corresponden bajo esta asignación, se dice que son *exponencial adjunta* una de la otra.

Se dice que una categoría finitamente completa con exponenciación es *cartesiana cerrada.*

Teorema 2.17.2 *Sea C una categoría cartesiana cerrada con un objeto inicial 0. Entonces en C:*

1. *$0 \cong 0 \times a$ para cualquier C-objeto a.*
2. *Si hay una flecha $a \to 0$ entonces $a \cong 0$*
3. *Si $0 \cong 1$ entonces la categoría C es degenerada, esto es, todos los C-objetos son isomorfos.*
4. *Cualquier flecha $0 \to a$ es mono.*
5. *$a^0 \cong 1$, $a^1 \cong a$, $1^a \cong 1$ para cualquier C-objeto a.*

Prueba. Dado que que en una categoría cartesiana cerrada hay una correspondencia biyectiva entre $C(c \times a, b)$ y $C(c, b^a)$, se tiene que en particular hay una biyección entre $C(0 \times a, b)$ y $C(0, b^a)$, para cualesquiera objetos a y b dados. De este modo, al ser 0 un objeto inicial, sucede que $C(0, b^a)$ tiene un solo elemento, y en consecuencia $C(0 \times a, b)$ tiene un único elemento, independientemente de la elección de b. De este modo queda establecido que $0 \times a$ es un objeto inicial, y como cualesquiera dos objetos iniciales son isomorfos, se tiene que $0 \cong 0 \times a$, lo cual demuestra 1. Para probar 2 tomemos una flecha $f : a \to 0$ y veamos que $a \cong 0 \times a$. Considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f, 1_a \rangle"] \arrow[dr, "1_a"] & \\
0 & 0 \times a \arrow[l, "pr_0"] \arrow[r, "pr_a"'] & a
\end{tikzcd}$$

donde se muestra que $pr_a \circ \langle f, 1_a \rangle = 1_a$, pero por otro lado, $\langle f, 1_a \rangle \circ pr_a$ es una (de hecho la única) flecha de $0 \times a \to 0 \times a$, por lo que no tiene mas remedio que ser $1_{0 \times a}$. Supongamos que $0 \cong 1$. De este modo, $0_1^{-1} \circ !_a$ va de a en 0 y por el inciso 2, se tiene 3. Para probar 4, tomemos dos flechas $f, g : b \rightrightarrows 0$ tales que $0_a \circ f = 0_a \circ g$. Dado que el codominio de f y de g es 0, por 2 tenemos que b es objeto inicial, de modo que hay una sola flecha de b en 0, así que f y g son una y la misma. Observando que $C(1 \times 0, a)$ y $C(1 \times a, 1)$ tienen un solo elemento, se infiere que $C(1, a^0)$ y $C(1, 1^a)$ también son unitarios, de modo que a^0 y 1^a son objetos terminales y en consecuencia isomorfos a 1. ■

2.18. Subobjetos

En **Set** es posible identificar un subconjunto $B \subseteq A$ de un conjunto dado A con la función inclusión $B \hookrightarrow A$, que por cierto, es inyectiva. De hecho, cualquier funcion inyectiva $f : C \to A$ determina un único subconjuinto de A, a saber, Im_f. Esto es, C es isomorfo a Im_f. Así es que, salvo isomorfismo, el dominio de una función inyectiva con codominio A, es un subconjunto de A.

Definición 2.18.1 (Subobjeto) *Diremos que un subobjeto de un C-objeto a es una C-flecha mono con codominio a.*

En **Set** es posible construir el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de subconjuntos de A, el cual está ordenado parcialmente por la contención. En una categoría $\mathcal{C}$, podemos decir que, dados dos subobjetos $g : b \rightarrowtail a$, $f : c \rightarrowtail a$, $f \subseteq g$ si y sólo si hay una $\mathcal{C}$-flecha $h : c \to b$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, tail, "g"] & a \\ c \arrow[u, "h"] \arrow[ur, tail, "f"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Si el diagrama conmuta, h debe ser mono[4]. De este modo, la inclusión de subobjetos es reflexiva pues el diagrama

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, tail, "g"] & a \\ b \arrow[u, "1_b"] \arrow[ur, tail, "g"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta y es transitiva porque si $f \subseteq g$ y $g \subseteq k$, el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "h"] & \\ c \arrow[u, "j"] \arrow[r, tail, "g"] & a \\ d \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[uu, bend left=60, "j \circ i"] & \end{tikzcd}$$

muestra que $f \subseteq k$. Sin embargo, no es antirreflexiva, esto es, si $f \subseteq g$ y $g \subseteq f$ entonces hay flechas h, i tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, bend right, "i"'] & \\ & a \\ c \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, bend right, "h"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $f = g \circ i$ y $g = f \circ h$, de donde h es la inversa de i. Esto quiere decir que los dominios de f y g son isomorfos. Así pues, si $f \subseteq g$ y $g \subseteq f$, diremos que f y g son subobjetos isomorfos, lo cual denotaremos con $f \simeq g$. Observe que la relación de isomorfía de subobjetos es de equivalencia. Esto nos permite pensar (aunque no con el rigor conjuntista) en las clases de equivalencia de subobjetos de un $\mathcal{C}$-objeto a, y organizarlas en una colección, que denotaremos por $Sub(a)$, esto es:

Definición 2.18.2 *$Sub(a)$ es la colección de clases de equivalencia de subobjetos de a.*

[4] Ver la parte de flechas mono 2.6

2.18.1. Elementos

Habiendo descrito categóricamente la noción de subobjeto, podemos describir tambien la noción de elemento. Un elemento $x \in A$ puede ser identificado con su unitario $\{x\}$, y así con la flecha inclusión $\{x\} \rightarrowtail A$. Por otra parte, cada función de 1 en A determina uno y sólo un elemento de A. Así pues, si una categoría C tiene un objeto terminal, entonces un elemento del C-objeto a es una flecha $x : 1 \longrightarrow a$. Observe que tal flecha es siempre mono. Hay categorías en las que la noción de elemento es trivial. Por ejemplo, en la categoría **Mon**, de los monoides, un objeto terminal es el monoide "unitario del neutro" o cualquiera otro isomorfo. Una flecha de este monoide en otro monoide dado, es una función que manda neutro en neutro, y por consiguiente, el unico elemento de un monoide es su neutro.

2.19. Clasificación de Subobjetos

Hay una relación íntima entre los conjuntos $\mathbb{P}(D)$ y 2^D, para cada conjunto D. Esto es, hay una biyección entre el conjunto de partes de D y el conjunto de funciones de D en $2 = \{0, 1\}$. Esta biyección está dada por las funciones características de los subconjuntos de D, de la siguiente manera. Dado un subconjunto A de D, tenemos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "!"'] & D \arrow[d, "f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & 2 \end{tikzcd}$$

es un tirador, cuando $\top(0) = 1$. Esto es, A es el subconjunto más grande de D, cuya imagen bajo f es $\{1\}$. De este modo, f debe ser la función característica de A, y si f es la función característica χ_B de $B \subseteq D$, entonces $B = A$. En esta configuración, 2 y $\top$ juegan papeles interesantes: forman el clasificador de subobjetos de **Set**. Esto nos lleva a la siguiente

Definición 2.19.1 *Si C es una categoría con un objeto terminal 1, entonces un clasificador de subobjetos para C es un C-objeto Ω, junto con una C-flecha $\top : 1 \longrightarrow \Omega$ que satisfacen el*

Axioma 2.19.2 (Ω-axioma) *Para cada flecha mono $f : a \longrightarrow d$, existe una y sólo una flecha $\chi_f : d \longrightarrow \Omega$ tal que el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un tirador.

La flecha χ_f *será llamada la flecha* característica *de* f.

Observación 2.19.3 *Un clasificador de subobjetos de una categoría* C*, si existe, es único salvo isomorfismo.*

Prueba. Supongamos que $\top : 1 \to \Omega$ y $\top' : 1' \to \Omega'$ son clasificadores de C. Así tenemos que los cuadrados del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "\top"] \arrow[d, "!"'] & \Omega \arrow[d, "\chi'_{\top}"] \\
1' \arrow[r, tail, "\top'"] \arrow[d, "!"'] & \Omega' \arrow[d, "\chi_{\top'}"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

son tiradores, luego, por el corolario del Lema del Tirador (corolario 2.14.4), el rectángulo tambien es un tirador. Pero el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\top"] \arrow[d, "!"'] & \Omega \arrow[d, "1_{\Omega}"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

tambien es un tirador, de manera que por el Ω-axioma, $1_\Omega = \chi_{\top'} \circ \chi'_{\top}$. De manera análoga se puede ver que $1_{\Omega'} = \chi'_{\top} \circ \chi_{\top'}$. Por tanto, $\Omega \cong \Omega'$ ■

Además, la asignación de flechas características es uno a uno, en el sentido expresado por el siguiente teorema.

Teorema 2.19.4 *Sean* $f : a \rightarrowtail d$ *y* $g : b \rightarrowtail d$ *subobjetos de* d*. Entonces,* $f \simeq g$ *si y sólo si* $\chi_f = \chi_g$

Prueba. Supongamos primero que $f \simeq g$.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "!"'] & & \\
& a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Si k es un isomorfismo de b en a entonces el cuadrado exterior tambien es un tirador (pues $g = f \circ k$). Sin embargo, χ_g es la única flecha que hace que el cuadrado exterior sea tirador, de donde $\chi_f = \chi_g$. Por otro lado, si $\chi_f = \chi_g$, tenemos que a, f y b, g son límites para un mismo diagrama. Por la observación 2.13.2 $a \cong b$, y así $f \simeq g$. ■

Más aún: Dada una flecha $h : d \to \Omega$, al tirar $\top$ a lo largo de h, obtenemos un subobjeto f de d, cuya flecha característica es precisamente h. Esto, naturalmente, mientras nuestra categoría tenga tiradores.

Así pues, en una categoría $\mathcal{C}$ en la que todo par de flechas tiene un tirador, y que tiene un clasificador de subobjetos Ω, la asignación de flechas características, inyecta a $Sub(d)$ en la colección $\mathcal{C}(d, \Omega)$ de flechas de d en Ω, puesto que a cada subobjeto hay asignada una única flecha característica, y dos subobjetos son isomorfos si y sólamente si tienen la misma flecha característica (ver teorema 2.19.4). Además cada flecha de d en Ω determina al menos un subobjeto de d, asi que la asignación de flechas características *biyecta* a la colección $Sub(d)$ en la colección $\mathcal{C}(d, \Omega)$. En símbolos,

$$Sub(d) \approx \mathcal{C}(d, \Omega) \tag{2.11}$$

Capítulo 3

Topoi

3.1. Topoi: definición y ejemplos

Definición 3.1.1 *Un* topos elemental *es una categoría C que cumple:*

(1) C es finitamente completa.

(2) C es finitamente co-completa.

(3) C tiene exponenciación.

(4) C tiene un clasificador de subobjetos.

Por el teorema 2.16.2, la condición 1 puede ser reemplazada por:

(1') C tiene un objeto terminal y tiradores.

y 2 por:

(2') C tiene un objeto inicial y lanzadores.

Ejemplo 3.1.2 ***Set*** *es un topos. De hecho, es la motivación de la definición de topos.*

Ejemplo 3.1.3 ***Finset*** *es un topos. Su estructura de topos se hereda de la estructura de topos de* ***Set****.*

Ejemplo 3.1.4 ***Set***^{2}*, la categoría cuyos objetos son los pares ordenados de conjuntos y cuyas flechas son los pares ordenados de funciones, es un topos. Su estructura de topos se obtiene duplicando las construcciones en* ***Set****.*

En $\mathbf{Set}^2$, un objeto terminal es el par $\langle\{0\},\{0\}\rangle$ de unitarios. Además, dadas dos $\mathbf{Set}^2$-flechas

$$\langle f,g\rangle : \langle A,B\rangle \to \langle E,F\rangle$$

$$\langle h,k\rangle : \langle C,D\rangle \to \langle E,F\rangle$$

con codominio común, formamos los productos fibrados en **Set** de $f : A \to E$ y $h : C \to E$, y de $g : B \to F$ y $k : D \to F$. El tirador de estas dos flechas será el par de productos fibrados.

Ejemplo 3.1.5 (Haces) *Un haz de conjuntos sobre un conjunto I es un conjunto de la forma $\cup\{A_i : i \in I\}$ donde $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Así pues, dado un conjunto de índices I, se define la categoría **Bn(I)** de haces sobre I, en la que precisamente, los objetos son los haces sobre I, y las flechas son las funciones que "preservan clase", es decir las funciones de la forma $f : \cup A_i \to \cup B_i$, tales que $f[A_i] \subseteq B_i$*[1].

Es posible caracterizar alternativamente a los haces sobre un conjunto dado I, de la siguiente manera: Un haz de conjuntos sobre I es un par A, f, donde A es un conjunto y $f : A \to I$ es una función. De este modo, $A = \cup\{A_i : i \in I\}$, donde $A_i = f^{-1}(i)$. Una flecha de A, f en B, g es una función $h : A \to B$ tal que $g \circ h = f$. Es decir, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Examinemos la estructura de **Bn(I)**.

1. El objeto terminal de **Bn(I)** es el par I, Id_I, porque para cualquier A, f en **Bn(I)**, hay una única función $h : A \to I$ tal que $Id_I \circ h = f$, a saber, f.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f=h"] \arrow[dr, "f"'] & & I \arrow[dl, "Id_I"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

El tirador de dos **Bn(I)**-flechas con codominio comun $f : A, f_A \to C, f_C$ y $g : B, f_B \to C, f_C$ se obtiene formando el producto fibrado $A \times_C B$ sobre C (es decir, el tirador en **Set**) junto con las funciones proyección restringidas al producto fibrado. La función $j : A \times_C B \to I$ queda obligada por las

[1] Aqui denotamos con $f[A_i]$ a la imagen de A_i bajo f.

composiciones con f y g.

$$\begin{tikzcd}
A\times_C B \arrow[rr, "pr_B"] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "pr_A"'] & & B \arrow[dr, "f_B"] \arrow[dd, "g"] & \\
& I & & I \\
A \arrow[rr, "f"'] \arrow[dr, "f_A"'] & & C \arrow[dr, "f_C"'] & \\
& I & & I
\end{tikzcd}$$

Nótese que dado $i \in I$, $j^{-1}(i)$ es un tirador de $f_A^{-1}(i)$ y $f_B^{-1}(i)$, es decir, el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
j^{-1}(i) \arrow[r, "pr_{B_i}"] \arrow[d, "pr_{A_i}"'] & B_i \arrow[d, "g \restriction B_i"] \\
A_i \arrow[r, "f \restriction A_i"'] & C_i
\end{tikzcd}$$

es un tirador.

2. El objeto inicial de **Bn(I)** es $\emptyset, !_I$, el conjunto vacío junto con la única función de $\emptyset$ en I.

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[rr, "!_A"] \arrow[dr, "!_I"'] & & A \arrow[dl, "f"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

La constucción del lanzador de dos **Bn(I)**-flechas con dominio común es análoga a la construcción del tirador, es decir, consiste en construir un lanzador por cada $i \in I$.

3. El objeto exponencial de dos **Bn(I)**-objetos, $A, f^{B,g}$ es el conjunto de funciones de B en A que factorizan a g con respecto a f, es decir, el conjunto $A^{oB} = \{k : B \to A |\ g = f \circ k\}$, junto con la función evaluación usual de **Set**. De este modo, dado un **Bn(I)**-objeto C, h, el producto en esta categoría de C, h con B, g es el producto fibrado por h y g $C \times_I B$, junto con la función $p : C \times_I B \to I$ dada por $p(x, y) = h(x)(= g(y))$

$$\begin{tikzcd}
C \times_I B \arrow[r, "pr_B"] \arrow[d, "pr_C"'] \arrow[dr, "p"] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "h"'] & I
\end{tikzcd}$$

Veamos que para cada $\mathbf{Bn(I)}$-objeto C, h y cada $\mathbf{Bn(I)}$-flecha $r : C, h \times B, g \rightarrow A, f$, hay una única flecha $\widehat{r} : C, h \rightarrow A, f^{B,g}$ tal que $\widehat{r} \times 1_{B,g} \circ ev = r$, es decir, veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A, f^{B,g} \times B, g \arrow[dr, "ev"] & \\
& A, f \\
C, h \times B, g \arrow[uu, "\widehat{r} \times 1_{B,g}"] \arrow[ur, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Pero por las observaciones hechas, tenemos que este diagrama es equivalente al siguiente:

$$\begin{tikzcd}
A^{oB} \times_I B \arrow[dr, "ev"] & \\
& A \\
C \times_I B \arrow[uu, "\widehat{r} \times 1_B"] \arrow[ur, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

Sea C, h un $\mathbf{Bn(I)}$-objeto y $r : C, h \times B, g \rightarrow A, g$ una $\mathbf{Bn(I)}$-flecha. De este modo, $r : C \times_I B \rightarrow A$ es una función, y se define la función $\widehat{r} : C \rightarrow A^{oB}$ de la siguiente manera: dada $c \in C$, $\widehat{r}(c) : B \rightarrow A$ es la función dada por $(\widehat{r}(c))(x) = r(c, x)$. Bastará mostrar que $r(\langle c, x\rangle) = ev((\widehat{r}(c))(x))$, lo cual se cumple por definición.

4. El clasificador de subobjetos Ω de $\mathbf{Bn(I)}$ es un haz de clasificadores, es decir, el conjunto $2 \times I$, junto con la función proyección en I $pr_I : 2 \times I \rightarrow I$. La flecha $\top$ para este clasificador es la función de I (el objeto terminal) en Ω dada por

$$\top(i) = (1, i)$$

Finalmente, veamos que Ω clasifica subobjetos. Sea $k : A, f \rightarrow B, g$ una flecha mono en $\mathbf{Bn(I)}$, Sin perder generalidad, podemos suponer que $k : A \hookrightarrow B$ es una inclusión y que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Definiremos la flecha característica de k como sigue:

$$\chi_k(x) = \begin{cases} \langle 1, g(x)\rangle & \text{si } x \in A \\ \langle 0, g(x)\rangle & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Salta a la vista que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, hook, "k"] \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "f"] & & B \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "\chi_k"] \\
& I & \\
I \arrow[ur, "1_I"] \arrow[rr, "\top"'] & & 2 \times I \arrow[ul, "pr_I"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, pero además es un tirador.

3.2. Gavillas sobre espacios topológicos

El ejemplo de topos más relevante para llegar a nuestro objetivo es es el de las gavillas sobre un espacio topológico.

Dado un espacio topológico $\langle I, \Theta \rangle$, una gavilla sobre I es un par $\langle A, f \rangle$, donde A es un espacio topológico y f es un homeomorfismo local de A en I.[2] De este modo, se define **Top(I)**, la categoría de gavillas sobre I, como la categoría cuyos objetos son las gavillas sobre I, y dados dos **Top(I)**-objetos $\langle A, f \rangle$ y $\langle B, g \rangle$, una **Top(I)**-flecha h de $\langle A, f \rangle$ en $\langle B, g \rangle$ es una función continua de A en B que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

conmute.

La estructura de topos que tiene **Top(I)** se describe como sigue:

1. El objeto terminal de **Top(I)** es la pareja $\langle I, Id_I \rangle$, puesto que dado un objeto $\langle A, f \rangle$ de **Top(I)**, la única flecha h de $\langle A, f \rangle$ en $\langle I, Id_I \rangle$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & I \arrow[dl, "Id_I"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

conmute es $h = f$. Evidentemente, Id_I es un homeomorfismo local.

2. El objeto inicial de **Top(I)** es el par $\langle \emptyset, \varnothing \rangle$, donde $\varnothing$ es la función vacía con codominio I.

[2] Un homeomorfismo local $f : A \to I$ es una función continua tal que para cualquier punto $x \in A$ hay vecindades abiertas U de x y V de $f(x)$ tal que f restringida en U es un homeomorfismo de U en V.

3. El tirador de dos **Top(I)**-flechas con codominio común, digamos $F : \langle A, f\rangle \to \langle C, h\rangle$ y $G : \langle B, g\rangle \to \langle C, h\rangle$, se obtiene "tirando" F a lo largo de G y G a lo largo de F como flechas en **Set**, esto es, el tirador de F y G es el **Top(I)**-objeto $\langle A \times_I B, h\rangle$, donde $A \times_I B = \{\langle x, y\rangle \in A \times B \mid f(x) = g(y)\}$ es el producto fibrado de A con B con la topología heredada de la topología producto de $A \times B$, y $h : A \times_I B \to I$ es el mapeo continuo dado por: $h(\langle x, y\rangle) = f(x) = g(y)$ que es, por cierto, un homeomorfismo local. Obsérvese que las funciones proyección restringidas en $A \times_I B$ son continuas y abiertas, y hacen que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \times_I B \arrow[r, "pr_B \restriction_{A \times_I B}"] \arrow[d, "pr_A \restriction_{A \times_I B}"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

sea un diagrama tirador en **Set**, de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \langle A \times_I B, k\rangle \arrow[r, "pr_B \restriction_{A \times_I B}"] \arrow[d, "pr_A \restriction_{A \times_I B}"'] & \langle B, g\rangle \arrow[d, "G"] \\ \langle A, f\rangle \arrow[r, "F"'] & \langle C, h\rangle \end{tikzcd}$$

es un diagrama tirador en **Top(I)**.

4. El clasificador de subobjetos Ω de **Top(I)** se obtiene mediante una construcción bastante más complicada. Sobre Θ (la colección de abiertos de I) definiremos una relación de equivalencia por cada punto $i \in I$.

Definición 3.2.1 *Sea $i \in I$. Diremos que dos abiertos U y V en I son i-equivalentes ($U \sim_i V$) si y sólo si hay una vecindad abierta W de i para la cual $U \cap W = V \cap W$.*

La i-equivalencia es una relación de equivalencia puesto que si las vecindades abiertas W_1 y W_2 son tales que $U \cap W_1 = V \cap W_1$ y $V \cap W_2 = W \cap W_2$, entonces se tiene que $U \cap (W_1 \cap W_2) = W \cap (W_1 \cap W_2)$.

La clase de i-equivalencia de U ($[U]_i$) es llamada el "germen de U en i".

De este modo, se puede definir cada tallo de la gavilla clasificadora como sigue:

Definición 3.2.2 *Sea $i \in I$ El tallo de i en Ω es el conjunto:*

$$\Omega_i = \{\langle i, [U]_i\rangle : U \in \Theta\}$$

De modo que Ω es la unión de los tallos Ω_i, junto con la función $p : \Omega \longrightarrow I$ que a puntos de Ω_i asocia el valor i. La topolología de Ω tiene como base a todos los conjuntos de la forma

$$[U, V] = \{\langle i, [U]_i\rangle : i \in V\}$$

donde U y V son abiertos y $U \subseteq V$. Obsérvese que con esta definición, p resulta ser un homeomorfismo local de Ω en I.[3] Además esta topología hace discreto a cualquier tallo sobre I, es decir, a cada Ω_i.

Denotaremos por Θ_i a la colección de vecindades de abiertas de i.

Observación 3.2.3 *Para cualquier abierto U en I:*

(a) $[U]_i = [I]_i$ *si y sólo si* $i \in U$

(b) $[I]_i = \Theta_i$

(c) $[U]_i = [\emptyset]_i$ *si y sólo si i es separable de U, es decir, si hay una vecindad abierta V de i tal que $U \cap V = \emptyset$. Equivalentemente, i está en el interior del complemento de U.*

Ahora bien, se define la flecha $\top$ de **Top(I)** como la función de I en Ω dada por:

$$\top(i) = \langle i, [I]_i\rangle$$

Obsérvese que $\top$ es una función continua ya que si $U \in \Theta$ entonces $\top(U) = \{\langle i, [I]_i\rangle : i \in U\} = \{\langle i, [U]_i\rangle : i \in U\} = [U, U]$ y $[U, U]$ es un abierto (de hecho básico) de Ω.

Sólo resta verificar que nuestra pareja Ω, $\top$ clasifique subobjetos. En efecto, sea $h : A, f \to B, g$ una flecha mono en **Top(I)**, es decir, una función continua de A en B, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, tail, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

conmuta. Dado que g es un homeomorfismo local, podemos pensar a A como un subconjunto abierto de B.[4] Definiremos la flecha característica de h como sigue:

Si $x \in B$, tomamos una vecindad abierta S de x en la que g restringida sea un homeomorfismo sobre su imagen. Entonces

$$\chi_h(x) = \langle g(x), [g(A \cap S)]_{g(x)}\rangle$$

[3] Dados $i \in I$ y $U \in \Theta_i$, la vecindad (básica) $[U, U] = \{\langle j, [U]_j\rangle\}$ de i es homeomorfa a U.

[4] La imagen de A bajo f es un abierto en I, y en consecuencia la preimagen bajo g de la imagen de A bajo f es un abierto en B y es homeomorfo a A. En símbolos, $g^{-1}(f(A)) \cong h(A)$.

Recuérdese que estamos pensando a A como un subconjunto abierto de B. Obsérvese que $[g(A\cap S)]_{g(x)} = [I]_{g(x)}$ si y solamente si $g(x) \in g(A\cap S)$, lo cual es equivalente a que $x \in A \cap S$, y como de cualquier manera (esto es, independientemente de quien sea S) $x \in S$, basta y sobra que $x \in A$.

3.3. Propiedades fundamentales de los topoi

3.3.1. Igualadores y mono

En la sección 2.12 se vio que el igualador de un par paralelo de flechas es siempre una flecha mono. En un topos el converso también es cierto.

Teorema 3.3.1 *En un topos $\mathcal{E}$, toda flecha monof $: a \rightarrowtail b$ es igualador de un par paralelo de flechas, a saber la flecha característica de f (χ_f) y $\top_b = \top \circ !_b$.*

Prueba. Sea $f : a \rightarrowtail b$ mono. Considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "f"] & b \arrow[rr, "\chi_f"] \arrow[dr, "!_b"'] & & \Omega \\
 & & 1 \arrow[ur, "\top"'] &
\end{tikzcd}$$

que conmuta porque el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & b \arrow[d, "\chi_f"] \arrow[dl, "!_b"'] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un tirador. De modo que $\chi_f \circ f = \top_b \circ f$. Sea $h : c \to a$ una flecha tal que $\chi_f \circ h = \top_b \circ h$. De este modo debe suceder que $\chi_f \circ h = \top \circ !_c$, como se muestra en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, dashed, "i"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "!_c"'] & & \\
 & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & b \arrow[d, "\chi_f"] \arrow[dl, "!_b"'] \\
 & 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Dado que el perímetro del diagrama anterior conmuta, hay una única flecha $i : c \to a$ tal que $i \circ !_a = !_c$ y $i \circ f = h$, de manera que i es la flecha buscada, que muestra que f es el igualador de χ_f y $\top_b$ ■

Corolario 3.3.2 *En un topos $\mathcal{E}$, toda flecha epi y mono es iso.*

Prueba. Por el teorema anterior, una flecha mono es igualador de dos flechas, y por el teorema 2.12.3, todo igualador epi es iso. ■

3.3.2. Tiradores, coproductos y epi

Lema 3.3.3 *Los tiradores preservan flechas epi. Esto es, si el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d, "f"] \\ c \arrow[r, "v"] & d \end{tikzcd}$$

es tirador y f es epi, entonces g también es epi.

Lema 3.3.4 *Los coproductos preservan tiradores, esto es, si los cuadrados*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & d \arrow[d, "k"] \\ b \arrow[r, "h"] & e \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} a' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & d \arrow[d, "k"] \\ b' \arrow[r, "h'"] & e \end{tikzcd}$$

son tiradores, entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd} a+a' \arrow[r, "{[f,f']}"] \arrow[d, "g+g'"'] & d \arrow[d, "k"] \\ b+a' \arrow[r, "{[h,h']}"] & e \end{tikzcd}$$

es un tirador.

3.3.3. Factorización epimono

En **Set** es posible descomponer una función en una función suprayectiva (sobre su imagen) compuesta con una función inyectiva (la inclusión de su imagen). En un topos $\mathcal{E}$ también es posible hacer esta factorización que de hecho es única salvo isomorfismo en la imagen.

Lema 3.3.5 *En un topos $\mathcal{E}$, toda flecha f se puede factorizar de la forma $f = im_f \circ f^*$ donde im_f es mono.*

Prueba. Sea $f : a \to b$ una $\mathcal{E}$-flecha. Formemos el lanzador de f consigo misma. Sean p y q las flechas que se obtienen lanzando f a lo largo de f, como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "q"] \\ b \arrow[r, "p"] & r \end{tikzcd}$$

Sea $im_f : f(a) \to b$ el igualador de p y q. De este modo, im_f es una flecha mono (ver teorema 2.12.2). Como $p \circ f = q \circ f$, hay una única flecha $f^* : a \to f(a)$ que hace que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} f(a) \arrow[r, tail, "im_f"] & b \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & r \\ a \arrow[u, "f^*"] \arrow[ur, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

conmute. ■

Lema 3.3.6 *$f(a)$ es el menor $\mathcal{E}$-objeto a través del cual se factoriza f. Esto es, si u y v son tales que*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & b \\ & c \arrow[ur, tail, "v"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay una única flecha $k : f(a) \to c$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & f(a) \arrow[dr, tail, "im_f"] \arrow[dd, dashed, "k"] & \\ a \arrow[ur, "f^*"] \arrow[dr, "u"'] & & b \\ & c \arrow[ur, tail, "v"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, y de este modo, $f(a)$ es un subobjeto de c.

Prueba. Dado que v es mono, v es el igualador de dos flechas, digamos $s, t : b \rightrightarrows d$ (ver teorema 3.3.1). Así:

$$s \circ f = s \circ v \circ u = t \circ v \circ u = t \circ f$$

Por tanto, el perímetro del diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, bend left, "t"] & \\ b \arrow[r, "p"'] \arrow[drr, bend right, "s"'] & r \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & d \end{tikzcd}$$

conmuta, pero si el cuadrado interior del mismo es un lanzador, se tiene que hay una única flecha $h : r \to d$ tal que $h \circ p = s$ y $h \circ q = t$. Pero entonces:

$$s \circ im_f = h \circ p \circ im_f = h \circ q \circ im_f = t \circ im_f$$

y como v es el igualador de s y t, hay una única flecha $k : f(a) \to c$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "v"] & & b \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & d \\
& f(a) \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[ur, "im_f"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esto es, $v \circ k = im_f$ (triángulo derecho del diagrama del lema). Además

$$f = im_f \circ f^* = (v \circ k) \circ f^* = v \circ (k \circ f^*) = v \circ u$$

Como v es cancelable por la izquierda, de la última igualdad se tiene que:

$$k \circ f^* = u$$

Es decir, la conmutatividad del triángulo izquierdo del diagrama del lema. ∎

Lema 3.3.7 *La flecha $f^* : a \to f(a)$ es epi.*

Prueba. Aplicando la construcción anterior a la flecha f^*, se tiene que

$$\begin{tikzcd}
& f^*(a) \arrow[dr, "im_f \circ im_{f^*}"] \arrow[dd, "im_{f^*}"] & \\
a \arrow[ur, "(f^*)^*"] \arrow[dr, "f^*"'] & & b \\
& f(a) \arrow[ur, "im_f"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Como $im_f \circ im_{f^*}$ es composición de flechas mono, ella misma es mono, de modo que im_{f^*} es la única flecha que hace que $im_f \circ im_{f^*} \subseteq im_f$. Pero aplicando el teorema anterior, tenemos que $im_f \subseteq im_f \circ im_{f^*}$, por lo que $f^*(a) \cong f(a)$, así que la flecha im_{f^*} debe ser iso.

Recuérdese que por construcción, la flecha im_{f^*} es el igualador del par de flechas p^*, q^* definidas por el diagrama lanzador

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "f^*"'] & f(a) \arrow[d, "q^*"] \\
f(a) \arrow[r, "p^*"'] & r
\end{tikzcd}$$

de modo que $p^* \circ im_{f^*} = q^* \circ im_{f^*}$, pero como im_{f^*} es iso, tenemos que $p^* = q^*$.

Ahora bien, sean $h, k : f(a) \rightrightarrows c$ dos flechas tales que $f^* \circ h = f^* \circ k$. Veamos que $h = k$. Como se vio en el párrafo anterior, el lanzador de f^* con f^* es de la forma:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "f^*"'] & f(a) \arrow[d, "q^*"] \\ f(a) \arrow[r, "p^*"'] & r \end{tikzcd}$$

donde $p^* = q^*$, y dado que el cuadrado exterior del diagrama:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "f^*"'] & f(a) \arrow[d, "p^*"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\ f(a) \arrow[r, "p^*"'] \arrow[drr, bend right, "k"'] & r \arrow[dr, "j"] & \\ & & c \end{tikzcd}$$

conmuta, existe una única flecha $j : r \to c$ tal que $j \circ p = h$ y $j \circ p = k$ (como se muestra en el mismo diagrama), de dónde se tiene que $h = k$, lo cual prueba que f^* es epi. ■

Teorema 3.3.8 *En un topos $\mathcal{E}$, toda flecha $f : a \to b$ tiene una factorización epimono $im_f \circ f^* : a \twoheadrightarrow f(a) \rightarrowtail b$ y esta factorización es única salvo isomorfismo. Esto es: si $v \circ u : a \twoheadrightarrow c \rightarrowtail b$ es una factorización epimono de f entonces existe una única flecha k tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & f(a) \arrow[dr, "im_f"] \arrow[dd, dashed, "k"] & \\ a \arrow[ur, "f^*"] \arrow[dr, "u"'] & & b \\ & c \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, y además es iso.

Prueba. La existencia de la factorización está demostrada por los lemas 3.3.5, 3.3.6 y 3.3.7. El lema 3.3.5 garantiza la existencia y la unicidad de la flecha $k : f(a) \to c$ para la factorización epimono $v \circ u : a \twoheadrightarrow c \rightarrowtail b$ dada. Ahora bien, la flecha k es mono porque im_f es mono y $im_f = v \circ k$ (ver) 2, además k es epi por que u es epi y $u = k \circ f^*$ (ver) 2. Como k es mono y epi, por el corolario 3.3.2, k es iso. ■

3.4. La estructura del Clasificador de Subobjetos

Sabemos que el clasificador de subobjetos de un Topos al menos tiene un elemento, esto es, al menos hay una flecha del objeto terminal 1 en Ω, a saber, la flecha $\top$. Sin embargo, también es posible encontrar otro elemento de Ω, tomando la flecha característica del objeto inicial 0. Mostraremos quien es esta flecha en el topos **Set**.

El conjunto vacío $\emptyset$ es -por vacuidad- subconjunto de cualquier conjunto dado A. En consecuencia, su función característica es la función constante 0 de A en 2. Tomando $A = 1$, la característica del vacío respecto al 1, es una flecha de 1 en 2.

Definición 3.4.1 *En un topos, la flecha característica de un objeto inicial como subobjeto del objeto terminal 1, es una flecha de 1 en Ω, que denotaremos con $\perp$. Es decir, $\perp : 1 \to \Omega$ es la flecha caraterística de la flecha $0_1 : 0 \to 1$.*

Esto es, según el Ω-axioma, que $\perp$ es la única flecha que hace que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!_0"'] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

sea un cuadrado tirador.

La flecha $\perp : 1 \to 2$ del topos **Set** es la inclusión del subconjunto $\{\emptyset\}$ en 2, es decir, $\perp(0) = 0$.

Más en general, por cada objeto a de un topos $\mathcal{E}$, denotaremos con $\perp_a$ a la flecha característica de 0 como subobjeto de a, es decir, $\perp_a$ es la única flecha de a en Ω que hace que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_a"] \arrow[d, "!_0"'] & a \arrow[d, "\perp_a"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

sea un tirador. De hecho, $\perp_a$ se factoriza a través de $\perp$, de la siguiente manera:

Observación 3.4.2 $\perp_a = \perp \circ !_a$. *Es decir, el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_a"] \arrow[d, "!_0"'] & a \arrow[d, "\perp \circ !_a"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un tirador.

Prueba. Veremos que el rectángulo exterior del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_a"] \arrow[d, "1_0"'] & a \arrow[d, "!_a"] \\
0 \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!_0"'] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un tirador. Por definición de $\perp$, el cuadrado inferior del diagrama anterior es un tirador. Respecto al cuadrado superior, obsérvese en primer lugar que conmuta, y supongamos que $h : c \to a$ y $k : c \to 0$ son tales que $!_a \circ h = 0_1 \circ k$, como se muestra en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & \\
& 0 \arrow[r, "0_a"] \arrow[d, "1_0"'] & a \arrow[d, "!_a"] \\
& 0 \arrow[r, "0_1"'] & 1
\end{tikzcd}$$

asi pues, hay una única flecha de c en 0, a saber k, tal que $k = 1_0 \circ k$ y $h = 0_a \circ k$. La primera parte de esta afirmación no necesita prueba, y para la segunda considérese que al ser k una flecha de c en 0, resulta ser un isomorfismo de c en 0 (ver teorema 2.17.2.2) y así c es un objeto inicial, por lo que h es la única flecha de c en a. Pero como $0_a \circ k : c \to a$, necesariamente $h = 0_a \circ k$. En conclusión, los dos cuadrados, superior e inferior, son tiradores. Por el Corolario del Lema del Tirador 2.14.4, el rectángulo exterior es un tirador. ■ Un topos es degenerado si todos sus objetos son isomorfos entre si.

Lema 3.4.3 *En un topos no degenerado $\mathcal{E}$,* $\top \neq \perp$.

Prueba. Dado que $\top = \chi_{1_1}$ y $\perp = \chi_{0_1}$, si $\top = \perp$ entonces $1_1 \simeq 0_1$, de dónde $1 \cong 0$, contradiciendo la no degeneración de $\mathcal{E}$ ■

En el siguiente capítulo haremos una exposición exhaustiva de la estructura algebraica del clasificador de subobjetos de un topos.

Capítulo 4

La estructura algebraica del clasificador de subobjetos

4.1. El álgebra de valores de verdad en un topos

A continuación se muestra la estructura algebraica del clasificador de subobjetos de un topos. En principio, definiremos algunas "operaciones" entre valores de verdad.

Definición 4.1.1 (Flecha negación) *Se define la flecha neg* $: \Omega \to \Omega$ *como la flecha característica de* $\perp$*, esto es, como la única flecha que hace que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\perp"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "neg"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

sea un diagrama tirador.

En el topos **Set**, la flecha *neg* es la función NEG de 2 en 2, que es la característica del subconjunto $\{x : NEG(x) = 1\} = \{0\} \subset 2$, pero la inclusión de $\{0\}$ en 2 es la función $\perp$ de **Set**.

Definición 4.1.2 (Flecha conjunción) *Se define la flecha con* $: \Omega \times \Omega \to \Omega$ *como la característica del producto de flechas* $\langle \top, \top \rangle : 1 \to \Omega$

Esto es, *con* es la única flecha que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\langle \top, \top \rangle"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "con"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

sea un diagrama tirador.

En la categoría **Set**, la flecha *con* es la función $CON : 2 \times 2 \to 2$ tal que al único par de su dominio que lleva al 1 es el par $\langle 1, 1\rangle$, así que la función conjunción de **Set** debe ser la característica del subconjunto $\{\langle 1, 1\rangle\} \subset 2 \times 2$, pero la inclusión de este conjunto es la función producto $\langle \top, \top\rangle$.

Definición 4.1.3 (Flecha disyunción) *Se define la flecha dis* $: \Omega \times \Omega \to \Omega$ *como la flecha característica de la imagen de la flecha coproducto* $[\langle \top_\Omega, 1_\Omega\rangle, \langle 1_\Omega, \top_\Omega\rangle] : \Omega + \Omega \to \Omega \times \Omega$.

En **Set**, la flecha disyunción debe ser la función $DIS : 2 \times 2 \to 2$ característica del subconjunto

$$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle\} \subset 2 \times 2$$

Nótese que este conjunto es igual a la unión de los conjuntos $A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$ y $B = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$ Obsérvese que es posible identificar a A con la función producto $\langle \top_2, 1_2\rangle : 2 \to 2 \times 2$, que lleva al 1 en el par $\langle 1, 1\rangle$ y al 0 en el par $\langle 1, 0\rangle$. Análogamente, B se identifica con la función producto $\langle 1_2, \top_2\rangle$. Formando el coproducto con estas funciones obtenemos una flecha f cuyo dominio es la unión disjunta $2 + 2$ y su codominio es el producto 2×2 como se muestra en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[r] \arrow[dr, "\langle \top_2, 1_2\rangle"'] & 2+2 \arrow[d, "f"] & 2 \arrow[l] \arrow[dl, "\langle 1_2 \top_2\rangle"] \\
 & 2 \times 2 &
\end{tikzcd}$$

es decir, $f = [\langle \top_2, 1_2\rangle, \langle 1_2, \top_2\rangle]$. Pero esta f no es una función inyectiva, y por esta razón no podemos considerarla un subobjeto de 2×2. Sin embargo, podemos pasar a la factorización epimono de f como se muestra en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
2+2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^*"'] & & 2 \times 2 \\
 & f(2+2) \arrow[ur, hook, "im_f"'] &
\end{tikzcd}$$

y así construír la característica de im_f, es decir, DIS será la única función que hace que el diagrama de funciones

$$\begin{tikzcd}
f(2+2) \arrow[r, "im_f"] \arrow[d] & 2 \times 2 \arrow[d, "DIS"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & 2
\end{tikzcd}$$

sea un tirador.

Definición 4.1.4 (Flecha implicación) *Se define la flecha* $imp : \Omega \times \Omega \to \Omega$ *como la característica del igualador* $e : \leq \to \Omega \times \Omega$ *del par paralelo de flechas* $p_1, con : \Omega \times \Omega \rightrightarrows \Omega$ *(la primera proyección y la flecha con de la definición 4.1.2).*

En la categoría de conjuntos **Set**, la función implicación $IMP : 2 \times 2 \to 2$ debe ser la flecha característica del orden reflexivo usual de 2, $\leq = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\} = \{\langle x,y\rangle | CON(x,y) = x\}$ (recuérdese que la función $CON : 2 \times 2 \to 2$ devuelve el menor de sus argumentos). Así que la inclusión de $\leq$ en 2×2 es el igualador de las funciones con y p_1 (conjunción y primera proyección), ambas con dominio 2×2 y codominio 2.

Ejemplo 4.1.5 *En la categoría de Haces sobre un conjunto I (ver ejemplo 3.1.5), las flechas de verdad consisten en haces de copias de las flechas de verdad de* **Set**, *esto es, si* Ω *es el clasificador de* ***Bn(I)***, *entonces* $\Omega = \bigcup_{i \in I}(2 \times i)$ *y* $neg : \Omega \to \Omega$ *lleva a la pareja* $\langle 1,i\rangle$ *en la pareja* $\langle NEG(1),i\rangle = \langle 0,i\rangle$ *y a la pareja* $\langle 0,i\rangle$ *en la pareja* $\langle NEG(0),i\rangle = \langle 1,i\rangle$. *La flecha* $imp : \Omega \times \Omega \to \Omega$ *de* ***Bn(I)*** *lleva a la pareja (de pares)* $\langle x,i\rangle$ *y* $\langle y,i\rangle$ [1] *en el par* $\langle CON(x,y),i\rangle$. *El resto de las flechas de verdad de* ***Bn(I)*** *se construyen de manera semejante.*

4.2. Álgebra de subobjetos

En esta sección estudiaremos el álgebra de subobjetos en un topos, examinando su estructura a la luz de la estructura que tienen las familias de subconjuntos de un conjunto dado, es decir, de la estructura booleana de las álgebras de conjuntos. Así pues, definiremos las operaciones entre subobjetos e intentaremos extraer las propiedades relacionadas con las propiedades boolenas del álgebra de subobjetos de la categoría de conjuntos **Set**.

Observación 4.2.1 *Sean* A, B *y* D *conjuntos, con* A *y* B *subconjuntos de* D, *y con funciones características* χ_A *y* χ_B *respectivamente. entonces:*

I. $\chi_{D-A} = neg \circ \chi_A$

II. $\chi_{A \cap B} = con \circ \langle \chi_A, \chi_B\rangle$

III. $\chi_{A \cup B} = dis \circ \langle \chi_A, \chi_B\rangle$

Prueba. Para $x \in D$, si $\chi_{D-A}(x) = 1$ entonces $x \in D - A$, por lo que $x \notin A$ y en consecuencia $\chi_A(x) = 0$. Por tanto, $neg \circ \chi_A(x) = 1 = \chi_{D-A}(x)$. Pero si $\chi_{D-A}(x) = 0$, entonces $x \notin D - A$, por lo que $x \in A$ y en consecuencia $\chi_A(x) = 0$. Por tanto, $neg \circ \chi_A(x) = 0 = \chi_{D-A}(x)$. Visto que ambas funciones χ_{D-A} y $neg \circ \chi_A$ coinciden en dominio codominio y regla, se tiene que $\chi_{D-A} = neg \circ \chi_A$. Las pruebas de las afirmaciones restantes son similares, usando las definiciones de $\cap$, con, $\cup$ y dis. ■

[1] Nótese que para que el par de pares $\langle x,i\rangle$ y $\langle y,i\rangle$ pertenezca a $\Omega \times \Omega$ es necesario que ambos pares tengan el mismo índice.

Definición 4.2.2 *Sean $\mathcal{E}$ un topos y d un $\mathcal{E}$-objeto.*

1. **Complemento relativo.** *Dado un subobjeto $f : a \to d$ de d, un complemento de f relativo a d es el subobjeto $-f : -a \to d$ cuya flecha característica es $neg \circ \chi_f$. Esto es, $-f$ es una flecha que hace que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} -a \arrow[r, "-f"] \arrow[d] & d \arrow[d, "neg \circ \chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

   sea un tirador.

2. **Intersección.** *Dados dos subobjetos $f : a \to d$ y $g : b \to d$ de d, una intersección de f y g, denotada por $f \cap g : a \cap b \to d$ es un subobjeto de d cuya flecha característica es $con \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$. Esto es, $f \cap g$ se obtiene tirando $\top$ a lo largo de $con \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$, como se muestra en el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} a \cap b \arrow[r, "f \cap g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "con \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

3. **Unión.** *Dados dos subobjetos $f : a \to d$ y $g : b \to d$ de d, una unión de f y g, denotada por $f \cup g : a \cup b \to d$ es un subobjeto de d cuya flecha característica es $dis \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$. Esto es, $f \cup g$ es una flecha que hace que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} a \cup b \arrow[r, "f \cup g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "dis \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

   sea un diagrama tirador.

Obsérvese que por definición, dos complementos de un mismo subobjeto son isomorfos, puesto que se obtienen mediante el tirador de un mismo diagrama. En consecuencia, podemos decir que "el complemento" de un subobjeto, es la colección de sus complementos. La situación es análoga en la unión y la intersección de subobjetos.

Intersección

Teorema 4.2.3 *La intersección de dos subobjetos $f : a \to d$ y $g : b \to d$ de d es la mayor cota inferior de f y g. Esto es, $f \cap g \subseteq f$, $f \cap g \subseteq g$, y dado un subobjeto $h : c \to d$ de d con $h \subseteq f$ y $h \subseteq g$, se tiene que $h \subseteq f \cap g$.*

Prueba. Sean $f : a \longrightarrow d$ y $g : b \longrightarrow d$ subobjetos de d. Mostraremos que el tirador formado por f y g es $f \cap g$, y así por la propiedad universal de los tiradores, $f \cap g$ es la mayor cota inferior de f y g.

Supongamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & d \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

es un tirador, de donde se tiene que

$$g \circ f' = f \circ g' \tag{4.2}$$

Mostraremos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\ 1 \arrow[r, "\langle \top, \top \rangle"'] & \Omega \times \Omega \end{tikzcd}$$

también es un tirador, donde $\alpha = g \circ f' = f \circ g'$.

En principio, obsérvese que conmuta puesto que:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ \alpha &= \langle \chi_f \circ \alpha, \chi_g \circ \alpha \rangle && \text{por teorema 2.11.2} && (4.3)\\
&= \langle \chi_f \circ (f \circ g'), \chi_g \circ (g \circ f') \rangle && \text{por 4.2} && (4.4)\\
&= \langle (\chi_f \circ f) \circ g', (\chi_g \circ g) \circ f' \rangle && \text{por asociatividad} && (4.5)\\
&= \langle (\top \circ !_a) \circ g', (\top \circ !_b) \circ f' \rangle && \text{por } \Omega - \text{axioma} && (4.6)\\
&= \langle \top \circ (!_a \circ g'), \top \circ (!_b \circ f') \rangle && \text{por asociatividad} && (4.7)\\
&= \langle \top \circ !_c, \top \circ !_c \rangle && \text{porque 1 es objeto terminal} && (4.8)\\
&= \langle \top, \top \rangle \circ !_c && \text{por teorema 2.11.2} && (4.9)
\end{aligned}$$

Sean $h : e \longrightarrow d$ y $r : e \longrightarrow 1$ tales que $\langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ h = \langle \top, \top \rangle \circ r$. Por definición del objeto terminal 1, r es la única flecha de e en 1 ($r = !_e$), y así, supondremos que:

$$\langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ h = \langle \top, \top \rangle \circ !_e$$

es decir, el exterior del digarama

$$\begin{tikzcd} e \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[dr, bend right, "!_e"'] & & \\ & c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "!_c"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\ & 1 \arrow[r, "\langle \top, \top \rangle"'] & \Omega \times \Omega \end{tikzcd}$$

conmuta, y buscamos mostrar que hay una única flecha $k : e \to c$ tal que $h = \alpha \circ k$.

De esta suposición, por 2.11.2, se tiene que:

$$\langle \chi_f \circ h, \chi_g \circ h \rangle = \langle \top \circ !_e, \top \circ !_e \rangle$$

pero por la propiedad 2.11 inciso 2,

$$\chi_f \circ h = \top \circ !_e = \chi_g \circ h$$

lo cual prueba que los rectángulos exteriores:

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, dotted, "k_1"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "!_e"'] & & \\
& a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, dotted, "k_2"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "!_e"'] & & \\
& b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "!_b"'] & d \arrow[d, "\chi_g"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

conmutan y por tanto existen únicamente dos flechas k_1 y k_2 tales que $h = f \circ k_1$ y $h = g \circ k_2$. Precisamente para estas flechas, sucede que el rectángulo exterior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[drr, bend left, "k_1"] \arrow[ddr, bend right, "k_2"'] & & \\
& c \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & a \arrow[d, "f"] \\
& b \arrow[r, "g"'] & d
\end{tikzcd}$$

conmuta, y como el cuadrado interior del mismo es un tirador (hipótesis 4.1), hay una única flecha $k : e \to c$ tal que $g' \circ k = k_1$ y $f' \circ k = k_2$. Observe que esta flecha k es la buscada puesto que $\alpha = g \circ f' = f \circ g'$ y además:

$$\alpha \circ k = g \circ f' \circ k = g \circ k_2 = h$$

Además es la única porque si $k' : e \to c$ satisface $h = \alpha \circ k'$, se tiene que $f \circ g' \circ k' = h$ y $g \circ f' \circ k' = h$, de modo que $g' \circ k' = k_1$ y $f' \circ k' = k_2$, por las unicidades de k_1 y k_2. Pero por la unicidad de k con respecto a las identidades anteriores, se tiene que $k' = k$.

Con todo esto, tenemos que el exterior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "!_c"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
1 \arrow[r, "\langle \top, \top \rangle"] \arrow[d, "1_1"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "con"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un tirador, puesto que los cuadrados interiores son tiradores. Por esta razón, $\alpha \simeq f \cap g$. Ahora bien, $\alpha \subseteq f$ y $\alpha \subseteq g$ son consecuencias inmediatas de que c es el tirador de f y g (de hecho las flechas f'y g' lo atestiguan al ser mono por el lema 2.14.5).

Ahora mostraremos que α es la mayor cota inferior de f y g. Sea $t : m \longrightarrow d$ una flecha tal que $t \subseteq f$ y $t \subseteq g$. Por definición, esto sucede porque hay dos flechas mono $t_1 : m \longrightarrow a$ y $t_2 : m \longrightarrow b$ tales que $t = t_1 \circ f$ y $t = t_2 \circ g$, es decir, el exterior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
m \arrow[dr, dotted, "v"] \arrow[drr, bend left, "t_2"] \arrow[ddr, bend right, "t_1"'] & & \\
& c \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"] & d
\end{tikzcd}$$

conmuta, pero como el cuadrado interior es un tirador, hay una única flecha $v : m \rightarrow c$ tal que $t_1 = g' \circ v$ y $t_2 = f' \circ v$. Como t_1 y g' son mono, v también lo es, y además

$$\begin{aligned}
t &= f \circ t_1 \\
&= f \circ g' \circ v \\
&= \alpha \circ v
\end{aligned}$$

lo cual prueba que t es subobjeto de α. ■

Unión

A continuación mostraremos que la unión de dos flechas f y g es la menor cota superior de éstas, pero antes será necesario probar un par de resultados.

Lema 4.2.4 *Si el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & b \arrow[d, "v"] \\
c \arrow[r, "g"] & d
\end{tikzcd}$$

es un tirador, entonces hay una flecha $h : f(a) \longrightarrow g(c)$ que hace que el cuadrado derecho del diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, two heads, "f^*"] \arrow[d, "u"'] & f(a) \arrow[r, tail, "im_f"] \arrow[d, "h"] & b \arrow[d, "v"] \\
c \arrow[r, two heads, "g^*"] & g(c) \arrow[r, tail, "im_g"] & d
\end{tikzcd}$$

sea un tirador.

Prueba. Sean $i : e \to b$ y $h' : e \to g(c)$ las flechas que se obtienen tirando im_g y v respectivamente, esto es, las flechas que hacen que el cuadrado derecho del diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & e \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h'"] & b \arrow[d, "v"] \\ c \arrow[r, two heads, "g^*"] & g(c) \arrow[r, tail, "im_g"] & d \end{tikzcd}$$

sea un tirador. Por el lema 2.14.5, la flecha i es mono. Dado que el exterior del diagrama conmuta y el cuadrado derecho es un tirador, se tiene la existencia de la flecha $f' : a \to e$ que es tal que $f = i \circ f'$. Por hipótesis, el rectángulo exterior es tirador, así que por la segunda parte del lema del tirador 2.14.3, el cuadrado izquierdo también es un tirador. Como los tiradores preservan flechas epi (ver lema 3.3.3), tenemos que $i \circ f' : a \twoheadrightarrow e \rightarrowtail b$ es una factorización epimono de f. Así que por el teorema 3.3.8 hay una única flecha iso $k : f(a) \to e$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & f(a) \arrow[dr, "im_f"] \arrow[dd, "k"] & \\ a \arrow[ur, "f^*"] \arrow[dr, "f'"'] & & b \\ & e \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

conmute. Haciendo $h = h' \circ k$ tenemos la flecha buscada. ∎

Lema 4.2.5 *Dados dos subobjetos de $f : a \to d$ y $g : b \to d$ de d, la flecha $\alpha = im_{[f,g]}$, la imagen de la flecha coproducto $[f,g] : a + b \to c$, tiene característica $dis \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$. Esto es, $\chi_\alpha = \chi_{f \cup g}$ y en consecuencia, $\alpha \simeq f \cup g$ y hay una factorización epimono de la forma:*

$$\begin{tikzcd} a + b \arrow[rr, "{[f,g]}"] \arrow[dr] & & d \\ & a \cup b \arrow[ur, "f \cup g"'] & \end{tikzcd}$$

Prueba. Verificaremos que los cuadrados del diagrama:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi_g \circ f"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] & b \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "\chi_f \circ g"] \\ \Omega \arrow[r, "\langle \top_\Omega, 1_\Omega \rangle"'] & \Omega \times \Omega & \Omega \arrow[l, "\langle 1_\Omega, \top_\Omega \rangle"] \end{tikzcd} \tag{4.10}$$

son tiradores. Bastará probarlo sólo para el cuadrado izquierdo (el otro es análogo). En primer lugar, veamos que conmuta. En efecto, observe que

$$\langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ f = \langle \chi_f \circ f, \chi_g \circ f \rangle$$

y

$$\langle \top_\Omega, 1_\Omega\rangle \circ (\chi_g \circ f) = \langle \top_\Omega \circ \chi_g \circ f, 1_\Omega \circ \chi_g \circ f\rangle$$

Pero

$$\top_\Omega \circ \chi_g \circ f = \top \circ !_\Omega \circ \chi_g \circ f : a \to d \to \Omega \to 1 \to \Omega$$

por lo que

$$\top_\Omega \circ \chi_g \circ f = \top \circ !_a$$

Sin embargo, por el Ω-axioma,

$$\chi_f \circ f = \top \circ !_a$$

Por otro lado,

$$1_\Omega \circ \chi_g \circ f = \chi_g \circ f$$

y así, por la observación 2 de la sección de productos, el cuadrado izquierdo conmuta.

Ahora, supongamos que $h : c \to d$ y $k : c \to \Omega$ son flechas tales que el exterior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rrd, bend left, "h"] \arrow[rdd, bend right, "k"'] & & \\
 & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi_g \circ f"] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g\rangle"] \\
 & \Omega \arrow[r, "\langle \top_\Omega, 1_\Omega\rangle"'] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

conmuta, esto es, $\langle \chi_f, \chi_g\rangle \circ h = \langle \top_\Omega, 1_\Omega\rangle \circ k$. Así pues, $\langle \chi_f \circ h, \chi_g \circ h\rangle = \langle \top_\Omega \circ k, 1_\Omega \circ k\rangle$ y en consecuencia, $\chi_f \circ h = \top_\Omega \circ k$ y $\chi_g \circ h = 1_\Omega \circ k$. Esto quiere decir que los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "!_\Omega \circ k"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & d \arrow[d, "\chi_g"] \\
\Omega \arrow[r, "1_\Omega"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

conmutan. Por el Ω-axioma, existe una única flecha $i : c \to a$ tal que $f \circ i = h$. Además, el diagrama derecho muestra que $k = \chi_g \circ h = (\chi_g \circ f) \circ i$, lo cual concluye la prueba de que el cuadrado izquierdo del diagrama 4.10 es un tirador (de hecho, ambos cuadrados son tiradores).

Ahora bien, dado que los coproductos preservan tiradores (lema 3.3.4), tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
a + b \arrow[r, "{[f,g]}"] \arrow[d, "(\chi_g \circ f) + (\chi_f \circ g)"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g\rangle"] \\
\Omega + \Omega \arrow[r, "{[\langle \top_\Omega, 1_\Omega\rangle, \langle 1_\Omega, \top_\Omega\rangle]}"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

es un tirador. Obteniendo las factorizaciones epimono correspondientes:

$$\begin{tikzcd}
a+b \arrow[r, two heads] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "f+g"] & c \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "h"] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
\Omega+\Omega \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, "{[\langle \top_\Omega, 1_\Omega \rangle, \langle 1_\Omega, \top_\Omega \rangle]}"'] & e \arrow[r, tail, "i"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

reunimos las hipótesis del lema anterior (4.2.4), y así resulta que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
e \arrow[r, "i"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

es un tirador, donde las flechas α e i son las imágenes de las flechas $[f, g]$ y $[\langle \top_\Omega, 1_\Omega \rangle, \langle 1_\Omega, \top_\Omega \rangle]$, respectivamente. Observe que por definición, justamente esta flecha es aquella cuya característica es la flecha $dis : \Omega \times \Omega \to \Omega$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "dis"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un tirador. Así pues, ambos cuadrados del diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
e \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_e"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "dis"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

son tiradores y por el corolario del Lema del Tirador (2.14.4), el rectángulo exterior también es tirador, por lo que $\chi_\alpha = dis \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$. ■

Ahora estamos en condición de demostrar el resultado planteado al inicio de esta sección.

Teorema 4.2.6 *Sean $f : a \to d$ y $g : a \to d$ dos subobjetos de d. La flecha $f \cup g$ es la menor cota superior de f y g. Es decir, $f \subseteq f \cup g$, $g \subseteq f \cup g$ y para cualquier subobjeto $h : c \to d$ de d tal que $f \subseteq h$ y $g \subseteq h$, se tiene que $f \cup g \subseteq h$.*

Prueba. Por la caracterización anterior de la unión de flechas, se muestra que $f \subseteq f \cup g$ y $g \subseteq f \cup g$, mediante el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[ddr, "f"'] & a+b \arrow[d] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[ddl, "g"] \\
& a \cup b \arrow[d, "f \cup g"] & \\
& d &
\end{tikzcd}$$

puesto que ambas (f y g) se factorizan a través de $f \cup g$. Sea $h : c \to d$ una flecha mono tal que $f \subseteq h$ y $g \subseteq h$. De este modo, existen flechas $h_a : a \to c$ y $h_b : b \to c$ tales que $f = h \circ h_a$ y $g = h \circ h_b$. Así pues, $[f, g] = [h \circ h_a, h \circ h_b] = h \circ [h_a, h_b]$.

Reemplazando a $[h_a, h_b]$ por su factorización epimono $a + b \xrightarrow{j} \!\!\!\!\rightarrow e \rightarrowtail^{k} c$ mostramos a $[f, g]$ como una composición de la forma:

$$\begin{tikzcd}
a + b \arrow[r, two heads, "j"] & e \arrow[r, tail, "k"] & c \arrow[r, tail, "h"] & d
\end{tikzcd}$$

donde se muestra que j y $k \circ h$ forman una factorización epimono de $[f \cup g]$ pero como las factorizaciones epimono son únicas salvo isomorfismo (ver 3.3.8) hay una flecha iso $u : a \cup b \to e$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
a + b \arrow[r, two heads, "j"] \arrow[dr] & e \arrow[r, tail, "k"] & c \arrow[r, tail, "h"] & d \\
& a \cup b \arrow[u, dotted, "u"] \arrow[urr, "f \cup g"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmute. Así pues, $k \circ u$ factoriza a $f \cup g$ a través de h, lo cual prueba que $f \cup g \subseteq h$. ∎

Corolario 4.2.7 *En un topos $\mathcal{E}$, para cualquier $\mathcal{E}$-objeto d, la colección $Sub(d)$ de clases de equivalencia de subobjetos es una retícula, en el sentido de la definición 1.4.3.*

Mayor y menor

Ahora veremos que $Sub(d)$ tiene elementos mayor y menor.

Teorema 4.2.8 *Para cualquier subobjeto $f : a \to d$ de d, $0_d \subseteq f$ y $f \subseteq 1_d$.*

Prueba. $0_d = f \circ 0_a$ y $f = 1_d \circ f$. ∎

Seudocomplementación

Bastaría probar que $Sub(d)$ es una retícula complementada y distributiva para concluir que es un álgebra de Boole. Sin embargo no será posible verificarlo por la sencilla razón de que no es cierto.

Ejemplo 4.2.9 *Consideremos el topos de gavillas sobre la recta real con su topología usual* $\mathbf{Top}(\mathbb{R})$ *(ver sección 3.2). Considérese también la gavilla* $\langle \mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}} \rangle$*, que es de hecho, el objeto terminal de* $\mathbf{Top}(\mathbb{R})$*. La gavilla* $F = \langle (0,\infty), i_{(0\infty)} \rangle$ *(el segmento final a partir del 0 con su inclusión) es un subobjeto de* $\langle \mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}} \rangle$*, como lo atestigua la* $\mathbf{Top}(\mathbb{R})$*-flecha inclusión* $i_{(0,\infty)}$ *misma. El candidato ideal para ser complemento de G es la "gavilla"* $\langle (-\infty,0], i_{(-\infty,0]} \rangle$*, pero resulta ser que ésta no es una gavilla, puesto que la inclusión del segmento inicial impropio* $(-\infty,0]$ *no es un homeomorfismo local*[2]*, así que se propone como complemento a la gavilla* $I = \langle (-\infty,0), i_{(-\infty,0)} \rangle$ *formada por el segmento inicial de 0 con su inclusión. Verifiquemos que el segmento inicial es (al menos) un seudocomplemento del segmento final de 0 con su inclusión.*

En principio, estos subobjetos son ajenos puesto que la únicas flechas f y g que hacen conmutar el diagrama de funciones

$$\begin{tikzcd}
& (0,\infty) \arrow[dr, "i_{(0,\infty)}"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathbb{R} \\
& (-\infty,0) \arrow[ur, "i_{(-\infty,0)}"'] &
\end{tikzcd}$$

son $f = 0_{(0,\infty)}$ *y* $g = 0_{(-\infty,0)}$*, las funciones vacías con los codomionios convenientes, así que el objeto inicial de nuestra gavilla es la única cota inferior de nuestros subobjetos, es decir, el ínfimo de nuestros subobjetos es justamente el elemento menor de la retícula.*

Por otro lado, para que un subobjeto $G : \langle a, f \rangle \to \langle \mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}} \rangle$ *sea ajeno a F, es necesario que el tirador formado por* $\langle a, f \rangle$ *y* $\langle (0,\infty), i_{(0,\infty)} \rangle$*, sea el objeto inicial, que en* $\mathbf{Top}(\mathbb{R})$ *es el espacio vacío con la función vacía. En conclusión, un subobjeto ajeno a nuestro subobjeto F, es una flecha cuya imagen (bajo factorización epimono) debe ser un conjunto abierto y ajeno a* $(0,\infty)$ *con su incluisión. En otros términos, G debiera ser subobjeto de* $I = \langle (-\infty,0), i_{(-\infty,0)} \rangle$*. Esto prueba que I es el seudocomplemento de F.*

Sin embargo, el supremo de F e I no es el objeto terminal $\langle \mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}} \rangle$ *puesto que ambos subobjetos son a su vez subobjetos de* $\mathbb{R} - \{0\}$ *con su inclusión. Así que el supremo de estos subobjetos F e I definitivamente no es el objeto terminal.*

El hecho de que un subobjeto de un objeto dado no tenga complemento, pero sí seudocomplemento no es ninguna casualidad. Más aún, la retícula de subobjetos de un objeto de un topos siempre tiene seudocomplementos relativos para cada par de subobjetos.

Definición 4.2.10 (seudocomplementación relativa) *Dados dos subobjetos* $f : a \to d$*,* $g : b \to d$ *de d, se define un seudocomplemento de f relativo*

[2]Basta fijarse en las vecindades de 0 para verificarlo.

a g ($f \Rightarrow g$) como un subobjeto de d cuya flecha característica es la flecha $imp \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$. Esto es, $f \Rightarrow g$ es la única flecha que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \Rightarrow b \arrow[r, "f\Rightarrow g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "imp\circ\langle\chi_f,\chi_g\rangle"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

sea un tirador.

Observe que de esta definición se desprende que dos seudocomplementos de un objeto relativos a otro son isomorfos, sus dominios son tiradores para un mismo diagrama.

Probaremos que $f \Rightarrow g$ es el supremo de las flechas cuya intersección con f es subobjeto de g (es decir, $f \Rightarrow g$ es efectivamente el seudocomplemento de f relativo a g). Para esto necesitamos un resultado técnico previo:

Lema 4.2.11 *Si f, g y h son subobjetos de d en un topos, entonces:*

(I) $f \cap g \simeq g \cap h$ si y sólo si $\chi_f \circ h = \chi_g \circ h$

(II) $\chi_f \cap \chi_h = \chi_g \cap \chi_h$ si y sólo si $\chi_f \circ h = \chi_g \circ h$

Prueba. Dado que la intersección de dos subobjetos se obtiene como el tirador de éstos, tenemos que los cuadrados superiores de los diagramas:

$$\begin{tikzcd} a \cap c \arrow[r, tail, "h_1"] \arrow[d] \arrow[dr, "f\cap h"] & c \arrow[d, "h"] \\ a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \cap c \arrow[r, tail, "h_2"] \arrow[d] \arrow[dr, "g\cap h"] & c \arrow[d, "h"] \\ b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_g"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

son tiradores. Además, por el Ω-axioma los cuadrados inferiores también lo son. En consecuencia, por el corolario del Lema del Tirador, los rectángulos exteriores son tiradores, y nuevamente por el Ω-axioma, $\chi_f \circ h = \chi_{h_1}$ y $\chi_g \circ h = \chi_{h_2}$. Así pues, $\chi_f \circ h = \chi_g \circ h$ si y sólo si $h_1 \simeq h_2$. Pero esta última condicion se verifica si y sólo si existe una flecha iso k tal que $h_1 \circ k = h_2$. De este modo, $h \circ h_1 \circ k = h \circ h_2$, por lo que hay una flecha iso k tal que $(f \cap h) \circ k = g \cap h$, lo cual es equivalente a $f \cap h \simeq g \cap h$. Para la segunda parte, basta recordar que $\chi_f \cap \chi_h = \chi_{f\cap h}$ y $\chi_g \cap \chi_h = \chi_{g\cap h}$. Así que $\chi_f \cap \chi_h = \chi_g \cap \chi_h$ si y sólo si $\chi_{f\cap h} = \chi_{g\cap h}$, si y sólo si $f \cap h \simeq g \cap h$. ■

Corolario 4.2.12 *$f \cap h \subseteq g$ si y sólo si $\chi_{f\cap g} \circ h = \chi_f \circ h$*

Prueba. Por una propiedad de las retículas, $f \cap h \subseteq g$ si y sólo si $(f \cap h) \cap g \simeq f \cap h$, pero esto es equivalente a la condición $(f \cap g) \cap h \simeq f \cap h$, lo cual, por el lema anterior, es equivalente a la condición $\chi_{f\cap g} \circ h = \chi_f \circ h$. ■

Lema 4.2.13 *En $Sub(d)$ se tiene que $h \subseteq f \Rightarrow g$ si y sólo si $f \cap h \subseteq g$.*

Prueba. Observe que el exterior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \Rightarrow b \arrow[r, "f\Rightarrow g"] \arrow[d, "j"] \arrow[dd, bend right=60, "!"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
\leq \arrow[r, "e"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "imp"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un tirador, por definición de $f \Rightarrow g$. El cuadrado inferior también es un tirador, por definición de imp. Por el Lema del Tirador, el cuadrado superior es un tirador, donde j es la única flecha que lo hace conmutar (ver detalles en la prueba del Lema del Tirador). Sea $h : c \to d$ un subobjeto de d con $h \subseteq (f \Rightarrow g)$. En consecuencia, hay una flecha $k : c \to (a \Rightarrow b)$ tal que $h = (f \Rightarrow g) \circ k$. Esta flecha k, hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "h"] & \\
a \Rightarrow b \arrow[r, "f\Rightarrow g"] \arrow[d, "j"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
\leq \arrow[r, "e"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

No olvidemos que la flecha $e : \leq \to \Omega \times \Omega$ es el igualador del par paralelo

$$pr_1, \cap : \Omega \times \Omega \rightrightarrows \Omega$$

de donde se tiene que

$$\cap \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ h = pr_1 \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ h$$

lo cual es equivalente a

$$\chi_{f \cap g} \circ h = \chi_f \circ h$$

que por el corolario anterior, es equivalente a la condición

$$f \cap h \subseteq g$$

Para mostrar el converso, supongamos que $f \cap h \subseteq g$. Por el argumento anterior, esto implica que $\cap \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ h = pr_1 \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ h$. Pero por la propiedad universal del igualador, $\langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ h$ se debe factorizar a traves de la flecha igualador e, esto es, hay una única flecha $r : c \to \leq$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, dotted, "r"'] \arrow[dr, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ h"] & & \\
\leq \arrow[r, "e"] & \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "\cap"] \arrow[r, shift right, "pr_1"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por esta razón, el exterior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rrd, bend left, "h"] \arrow[rd, dotted, "k"] \arrow[rdd, "r"'] & & \\
& a \Rightarrow b \arrow[r, "f \Rightarrow g"] \arrow[d, "j"] & d \arrow[d, "(\chi_f, \chi_g)"] \\
& \leq \arrow[r, "e"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

conmuta. Pero como el cuadrado interior es un tirador, hay una única flecha $k : c \to (a \Rightarrow b)$, la cual muestra que $h \subseteq (f \Rightarrow g)$ ■

Corolario 4.2.14 *En particular,* $f \cap (f \Rightarrow g) \subseteq g$.

Prueba. Trivial, por el teorema anterior y por que $f \Rightarrow g \subseteq f \Rightarrow g$ ■

Conclusión

Es el momento de reunir los resultados de esta sección, donde se muestran las propiedades de las operaciones entre subobjetos, para establecer la naturaleza de la estructura del clasificador de subobjetos de un Topos.

Corolario 4.2.15 (Teorema Principal) [3] *En cualquier topos $\mathcal{E}$ y para cualquier $\mathcal{E}$ objeto d, $Sub(d)$ es una retícula relativamente seudocomplementada y distributiva, es decir, un álgebra de Heyting.*

Prueba. La prueba se da a lo largo de esta sección. Lo único que falta demostrar es que $f \Rightarrow g$ es el mayor (salvo isomorfismo) subobjeto de d cuya intersección con f está contenida en g, esto es, que $(f \Rightarrow g) \cap f \subseteq g$ (corolario anterior) y para cualquier h subobjeto de d con $h \cap f \subseteq g$ se tiene que $h \subseteq f \Rightarrow g$, lo cual es parte del lema 4.2.13. ■

El presente resultado se plantea como principal porque hace ver claramente que la estructura del clasificador de subobjetos obedece a una lógica subyacente de tipo intuicionista, hay que recordar que la validez intuicionista es justamente la validez en álgebras de Heyting.

Corolario 4.2.16 *$Sub(1)$, la colección de subobjetos del objeto terminal* 1 *es un álgebra de Heyting.*

Corolario 4.2.17 *$\mathcal{E}(1, \Omega)$, la colección de $\mathcal{E}$-flechas de* 1 *en* Ω *es un álgebra de Heyting.*

[3] No es el caso que este teorema sea conocido con el nombre que aquí se le asigna. La razón por la que se le he llamado de este modo es porque en este trabajo de tesis representa el objetivo principal.

Prueba. Al final del capítulo 3 se mostró una biyeción entre las clases de subobjetos de cualquier objeto d y las flechas de d en Ω, dada de tal manera que a una clase de subobjetos $[f]$ a la que pertenece el subobjeto f de d, se le asocia la flecha característica de f. Nótese que bajo esta asignación:

$$\begin{aligned}
[f] &\longmapsto \chi_f \\
[f \cap g] &\longmapsto con \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle \\
[f \cup g] &\longmapsto dis \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle \\
[f \Rightarrow g] &\longmapsto imp \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle \\
[1_1] &\longmapsto \top \\
[0_1] &\longmapsto \bot
\end{aligned}$$

Lo cual prueba que la biyección, es de hecho un isomorfismo de álgebras de Heyting. ■

Definición 4.2.18 *Sea $\mathcal{E}$ un topos. Una $\mathcal{E}$-asignación v para un lenguaje proposicional $\mathbb{P}$ es una asingnación que lleva a cada letra proposicional de $\mathbb{P}$ en un elemento del clasificador de subobjetos de $\mathcal{E}$, es decir, una flecha de 1 en Ω. Una $\mathcal{E}$-asignación se extiende a las fórmulas del lenguaje $\mathbb{P}$ de la siguiente manera:*

- $v^*(\neg A) = neg \circ v^*(A)$
- $v^*(A \wedge B) = con \circ \langle v^*(A), v^*(B)\rangle$
- $v^*(A \vee B) = dis \circ \langle v^*(A), v^*(B)\rangle$
- $v^*(A \to B) \Longrightarrow \circ\langle v^*(A), v^*(B)\rangle$

Observe que una *Set* asignación es esencialmente una tabla de verdad, pues es una 2-asignación. El ejemplo 4.2.9 muestra que la ley del tercero excluído $(P \vee \neg P)$ no es **Top**($\mathbb{R}$) válida.

Definición 4.2.19 *Una fórmula es topoi-válida si y sólo si, es válida en todo topos.*

Como consecuencia del teorema principal (4.2.15), tenemos el siguiente resultado, concerniente a la lógica subyacente a los topoi elementales.

Teorema 4.2.20 *Una fórmula proposicional A es topoi-válida si y sólo si es válida en el sentido intuicionista.*

Prueba. El teorema principal muestra que el clasificador de subobjetos de cualquier topos tiene estructura de álgebra de Heyting, y como la validez en álgebras de Heyting coincide con la validez intuicionista, se tiene el resultado. ■

Bibliografía

[BS71] John L. Bell and A. B. Slomson. *Models and Ultraproducts.* North Holland Publishing Co., 1971.

[End77] Herbert B. Enderton. *Elements of Set Theory.* Academic Press Inc., San Diego, primera edition, 1977.

[End01] Herbert B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic.* Harcuourt-Academic Press Inc, segunda edition, 2001.

[Gol84] Robert Goldblatt. *Topoi: The categorial analysis of logic.* North Holland Publishing Co., 1984.

[Hal74] Paul R. Halmos. *Naive Set Theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1974.

[Hat82] William S. Hatcher. *The Logical Fundations of Mathematics.* Pergamon, 1982.

[HS73] Herrlich and Strecker. *Category Theory: An Introduction.* Allyn and Bacon, 1973.

[Kle67] Stephen Cole Kleene. *Mathematical Logic.* Wiley, 1967.

[Mos94] Yannis Moschovakis. *Notes on Set Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[RA97] Rafael Rojas and José Alfredo Amor. *Sistemas Formales.* Vínculos Matemáticos. Facultad de Ciencias, UNAM, cuarta edition, 1997.

[RS70] Helena Rasiowa and Roman Sikorski. *The mathematics of metamathematics.* Pantswowe Wydawnictwo Naukowe, tercera edition, 1970.

Índice alfabético