

00382
5



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

UN MODELO ESQUEMÁTICO
DE CUARKS Y GLUONES
CONSTITUYENTES.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR en CIENCIAS

P R E S E N T A:

SERGIO ADRIÁN LERMA HERNÁNDEZ

DIRECTOR:
Dr. PETER OTTO HESS BECHSTEDT.

COMITÉ TUTORAL:
Dr. JUAN CARLOS LÓPEZ VIEYRA
Dr. CHRISTOPHER STEPHENS.

México D.F. Noviembre 2003

pcf

Posgrado en ciencias físicas
unam

*Acompañada de un cd.
I*

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A lo que viene...

A los 3

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

II-7

Agradecimientos

Agradezco a todos los miembros del sínodo (G. Herrera, P. Hess, J.C. López, A. Mondragón, M. Moreno, C. Stephens y Axel Weber) por sus sugerencias, correcciones y preguntas, en particular a Axel Weber y Peter Hess por la lectura detallada del trabajo. A Peter le agradezco, también, su apoyo de todos estos años y la oportunidad del trabajo conjunto. El trabajo que condujo a esta tesis fue realizado en estrecha colaboración con Samuel Jesgarz, a quien le agradezco todas las discusiones que nos permitieron avanzar en la realización de nuestros respectivos proyectos.

A las viejas y presentes generaciones del ICN, a Don Manuel, al Yépez, al buen Roman, al Sr. Doc, a Toño, Antígona, Igor, Jerónimo, Rina, Roberto... A los viejos y nuevos compañeros de cubículo, a Samuel Jesgarz por el impulso al trabajo y por su amistad, a Maribel por la música, el café y la corrección de los primeros borradores.

A mis familias, por su apoyo de todos los años. A Sebastián, Ana, Oscar, Luisito y Emiliano, por su alegría. A todos los amigos, Paloma, Javier, Raquel, Victores, Pit, Javier, Eyra, Itzel, Luis, Hortencia, Jorge, Chepo, Sergio Ricardo... y a los Decrolianos.

A Sebastián y Alicia por todo.

Para la realización del presente trabajo, recibí apoyo económico de la Dirección General de Estudios de Posgrado de la UNAM y de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico a través del proyecto IN-119002.

Dirección General de Asuntos del Personal Académico
Adjuntar en formato electrónico e imprimir en
atendido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Sra. Adriana Lema
Hernández

FECHA: 19-Abr-2003

FIRMA: [Firma]

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Contenido

Resumen	VII
Introducción	1
1. Presentación del modelo	5
1.1. El modelo de Lipkin	6
1.2. Estados gluónicos	7
1.3. La inclusión de cuarks	9
1.3.1. El término libre fermiónico	9
1.3.2. La interacción entre cuarks y glueballs	12
1.4. Estructura algebraica de la parte fermiónica	17
1.5. Los pares cuark-anticuark como bosones	20
2. Pares escalares de espín y sabor	21
2.1. Una base completa: $U(4\Omega) \supset U(2\Omega) \otimes U(2)$	21
2.2. Un modelo exactamente soluble	23
2.3. Diagonalización numérica y estados coherentes	26
2.3.1. De la fase perturbativa a la fase condensada	29
2.3.2. Estados bariónicos	31
2.4. Fermiones sin masa	32
3. Pares de sabor (0,0) acoplados a espín 0 y 1	37
3.1. Otra base completa: $U(4\Omega) \supset U(4) \otimes U(\Omega)$	38
3.2. Los elementos de matriz	40
3.3. Resultados de la diagonalización numérica	42
3.3.1. Transiciones de fase cuánticas	44
3.4. Un modelo bosónico para el Hamiltoniano fermiónico	45
3.4.1. El Mapeo de Holstein-Primakoff	46
3.4.2. Diagonalización numérica del Hamiltoniano bosónico	48
4. Modelo General	51
4.1. El modelo bosónico en el caso general	52
4.1.1. El espacio bosónico	53
4.1.2. El Hamiltoniano bosónico	55
4.1.3. El corte del espacio bosónico	56
4.2. Ajuste al espectro mesónico	57
4.2.1. El rompimiento de la simetría $SU(3)$ de sabor	57
4.3. Resultados del ajuste	58
4.3.1. Los parámetros del ajuste, el canal de sabor (1,1) y espín 0	61
4.3.2. Estructura colectiva de los estados	62
4.3.3. Estados exóticos	63
4.3.4. Los bariones dentro del modelo	63

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

5. Temperatura finita	65
5.1. La gran función de partición y el grupo $U(4\Omega)$	65
5.2. Aplicación al estudio de la transición al PCG	70
5.2.1. Comparación con resultados experimentales	72
6. Extensiones del modelo	79
6.1. El rompimiento de la simetría de sabor	79
6.2. Excitaciones orbitales	80
6.3. Términos que conservan el número y los bariones	81
Conclusiones	83
Apéndices	87
A.1. Índices co y contravariantes	87
A.2. Relaciones de Gordon	88
A.3. Reacoplamientos fermiónicos	89
A.4. Cálculos para obtener el Hamiltoniano efectivo	91
B.1. Transición de fase cuántica del Hamiltoniano (2.15) en el límite $\Omega \rightarrow \infty$	94
C.1. Cálculo de la constante de normalización \mathcal{N}_{n_1, n_2}	95
C.2. Los elementos reducidos en $SU_q(2)$ y $SU_q(2)$	96
C.3. Comparación del espacio fermiónico y bosónico	97
D.1. Conjugación de carga de los estados	98
D.2. Elementos de matriz del Modelo bosónico	100
E.1. Reescritura de la gran función de partición	102
Programas en FORTRAN	105
E.1. Pares cuark-anticuark acoplados a sabor (0,0) y espín 0	105
E.1.1. Diagonalización numérica	105
E.1.2. Cantidades termodinámicas	107
E.2. Pares cuark-anticuark acoplados a sabor (0,0) y espín 0 y 1.	109
E.2.1. Diagonalización numérica	109
E.3. Modelo bosónico en el caso general	111
E.3.1. Reducciones $U(12) \supset U(4) \otimes U(3)$ y $U(4) \supset SU(2)$	111
E.3.2. Antigüedades de las distintas combinaciones $(\lambda, \mu)SP$	112
E.3.3. Diagonalización y ajuste al espectro mesónico	113
E.3.4. Cantidades termodinámicas	117
Bibliografía	122



Resumen

En este trabajo se estudia la posibilidad de describir aspectos de la fenomenología hadrónica a bajas energías, utilizando un modelo esquemático de cuarks y gluones constituyentes. El modelo presentado es una extensión del modelo de Lipkin en la que se incluyen pares fermiónicos más generales, para incorporar grados de libertad de cuarks y anticuarks. El modelo extendido incluye, también, un acoplamiento de los pares fermiónicos con excitaciones bosónicas. La energía de los niveles fermiónicos es 0.33 GeV y -0.33 GeV respectivamente, el cual es un valor típico para la masa de los cuarks constituyentes más ligeros. La energía de las excitaciones bosónicas es tomada de la masa del glueball de menor energía obtenido en los cálculos de red. Se realizó un estudio de las características principales del modelo como función de sus constantes de acoplamiento. Para constantes de acoplamiento mayores que ciertos valores críticos, el sistema pasa de una fase perturbativa a una condensada, en esta última los estados del modelo presentan una estructura colectiva en términos de pares cuark-anticuark y bosones. Se encontraron los valores de las constantes de acoplamiento que mejor reproducen el espectro experimental de mesones isoescales. Para estos valores de las constantes de acoplamiento, los eigenestados del modelo tienen una estructura colectiva dominada por pares gluónicos y pares cuark-anticuark acoplados a sabor (1, 1) y espín 0. Este resultado está en acuerdo con el rompimiento espontáneo de la simetría quiral observado en el régimen no perturbativo de la cromodinámica cuántica. Se introdujo temperatura en el modelo y se obtuvieron estimaciones de la curva de transición al plasma de cuarks y gluones y de las producciones totales de piones y kaones. Estas estimaciones coinciden con los valores experimentales reportados. El modelo produce masas bariónicas mayores que las experimentales. Se sugieren posibles extensiones del modelo para solucionar esta situación.

Summary

In this work is studied the possibility of describing aspects of hadron phenomenology at low energy using a schematic model of constituent quarks and gluons. The presented model is an extension of the Lipkin model in which more general fermionic pairs are incorporated in order to include degrees of freedom of quarks and antiquarks. The extension includes the coupling of fermionic pairs with boson excitations. The energy of both fermionic levels is 0.33 GeV and -0.33 GeV respectively, which is a typical value for the mass of the lightest constituent quarks. The energy of the bosonic excitations is taken from the lowest glueball mass as measured in lattice calculations.

A study of the main properties of the model as function of its coupling constants is presented. The eigenstates of the model's Hamiltonian exhibit a collective structure in terms of quark-antiquark pairs and bosons, for coupling constants larger than certain critical values. The best fitted values of the coupling constants to reproduce the experimental isoscalar meson spectrum are found. For these coupling constants the states of the model have a collective structure dominated by glueballs and quark-antiquark pairs coupled to flavor (1, 1) and spin 0. This result is consistent with the chiral symmetry breaking observed at low energy QCD. The Quark Gluon Plasma transition line and total productions of pions and kaons are calculated. These calculations are in agreement with experimental results. The model produces baryonic masses much larger than the experimental ones. Possible extensions of the model to solve this situation are outlined.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Introducción

En un trabajo seminal, De Rújula et.al. [1] establecieron las bases de la espectroscopía hadrónica en los modelos de cuarks constituyentes. Suponiendo una interacción tipo Breit-Fermi y masas diferentes para los cuarks, lograron reproducir el corrimiento de las masas en los multipletes, tanto mesónicos como bariónicos, del grupo $SU(6)$. Al mismo tiempo, su trabajo distinguía entre el tipo de interacción anterior y la responsable del espectro al nivel de los diferentes multipletes. El efecto de esta última fue modelado por parámetros, propios de cada multiplete, los cuales se ajustaron a los datos experimentales. Desde entonces han surgido otros modelos para los hadrones, ejemplos de éstos son el modelo de bolsa del MIT [2] y el modelo de Skyrme [3]. Cada uno de estos modelos resalta diferentes aspectos de la teoría fundamental, la Cromodinámica Cuántica (CDC), pero ninguno es conclusivo. Esta situación se explica por la complejidad de la CDC en el régimen no perturbativo, en el que no ha sido posible establecer la conexión entre los grados de libertad microscópicos (cuarks de corrientes y campos gluónicos) y las excitaciones observadas experimentalmente (mesones y bariones).

Dos de las propiedades básicas de la teoría fundamental de las interacciones fuertes, la CDC, son la libertad asintótica y el confinamiento del color. Mientras que la primera fue explicada teóricamente desde los inicios de la CDC, la segunda ha resistido al esfuerzo por entenderla a un nivel más allá del cualitativo. Lo anterior refleja la existencia de dos regímenes en los fenómenos hadrónicos. Por un lado, el régimen de acoplamiento débil (libertad asintótica) a energías altas o distancias pequeñas, que se manifiesta, por ejemplo, en la observación de partículas cuasi libres obedeciendo el escalamiento de Bjorken [4] en el análisis experimental del protón a una escala microscópica. Del otro lado, el régimen de acoplamiento fuerte a energías bajas o equivalentemente a distancias grandes, en el que las excitaciones observadas son bariones y mesones. En el primer régimen tiene sentido el uso de teoría de perturbaciones alrededor del caso sin interacción, en el segundo, por el contrario, el caso sin interacción deja de ser útil, muchos nuevos ingredientes, inaccesibles desde la teoría perturbativa, son los relevantes. El confinamiento de color es parte del régimen no perturbativo.

No es una situación nueva en la física el tener, por un lado, las leyes básicas que gobiernan un sistema y, por otro, la incapacidad de obtener predicciones físicas desde ellas.

La situación anterior ha conducido al uso de teorías efectivas para la descripción teórica de los fenómenos hadrónicos en el régimen no perturbativo. Las teorías efectivas no se limitan a suplir la imposibilidad de acceder a las consecuencias de la teoría fundamental, permiten aislar los mecanismos dominantes en algún régimen para obtener, de este modo, un marco de referencia más claro desde el cual comprender los fenómenos físicos.

Los fundamentos de algunas teorías efectivas que exitosamente describen algún aspecto de la CDC no perturbativa, han podido ser rastreados, aunque sólo a un nivel cualitativo, hasta la teoría fundamental. En el sentido inverso, las teorías efectivas imponen restricciones a los parámetros del Lagrangiano microscópico.

Un ejemplo de este canal de dos vías entre los modelos fenomenológicos y la CDC, es la llamada hipótesis de conservación parcial de la corriente axial (PCAC, por sus siglas en inglés) [5]. En la relación:

$$\partial_\mu A_\mu^I = m_\pi^2 f_\pi \phi_I,$$

donde A_μ^I es la corriente axial isovectorial, m_π la masa del pión y ϕ_I el campo que lo describe, se resume el rompimiento espontáneo de la simetría quiral y la naturaleza colectiva del pión como el bosón de Goldstone asociado a dicho rompimiento. La confirmación experimental de la relación anterior, impone restricciones en las masas de los cuarks más ligeros del Lagrangiano: la diferencia entre las masas del cuark up y down debe ser del orden de su magnitud, para poder explicar la simetría de isoespín de las interacciones fuertes. Este resultado si bien cualitativo, es consistente con los resultados de otros

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

modelos fenomenológicos, como el modelo de Nambu-Jona-Laisinio [6]. Basados en las observaciones anteriores, se han elaborado teorías más refinadas como la Teoría de Perturbaciones quirales [7], que cuenta entre sus logros la descripción de la fenomenología piónica de bajas energías.

Las aparentes inconsistencias de la PCAC, lejos de llevar a desecharla como hipótesis, han conducido al descubrimiento de nuevos elementos dentro de la teoría que no son obvios en una primera mirada al Lagrangiano fundamental. El llamado enigma $U_A(1)$ es un ejemplo de esto, su resolución llevó a introducir en la arena de la CDC no perturbativa, las anomalías axiales y la naturaleza topológica del espacio de los campos de norma no abelianos de la CDC.

Una de las propiedades bien establecidas de la CDC no perturbativa, es la condensación tanto de cuarks como de gluones en el vacío o estado base. Dichos condensados han podido ser inferidos usando propiedades generales de la CDC como una teoría de campos relativistas, junto con la medición de secciones eficaces de procesos hadrónicos [8]. Algunos modelos efectivos, como el de Nambu-Jona-Laisinio [6], además de describir adecuadamente algunos resultados experimentales, presentan dichos condensados. Es bien conocido, por otro lado, que gluones y pares cuark-anticuark (en la forma de piones) tienen que estar mezclados en la función de onda nucleónica para reproducir los factores de forma empíricos y los aspectos de simetría quiral de la física hadrónica de baja energía ([9] y referencias allí mencionadas). Sin embargo, la situación no es satisfactoria: por un lado, los modelos fenomenológicos sólo incluyen algunos de los grados de libertad de la CDC y, por otro, la CDC no perturbativa, debido a su complejidad, no permite el estudio de la dinámica que produce dichos condensados. La única herramienta teórica para obtener información del régimen no perturbativo de la CDC partiendo de primeros principios, son las simulaciones numéricas en la red (lattice), a pesar de que mucha información ha podido ser extraída de allí y de que existe cada vez más certidumbre de haber obtenido resultados del límite continuo, se requiere, aún, de mucho trabajo conceptual que permita entender de manera más profunda la CDC no perturbativa y no sólo reproducir los resultados experimentales, en este sentido, las simulaciones en la red son una especie de *laboratorio teórico* que permite poner a prueba las diferentes ideas acerca de las conexiones entre el Lagrangiano fundamental de la CDC y las excitaciones colectivas experimentales.

Una situación similar a la descrita en los párrafos anteriores, puede encontrarse en la física nuclear (contenida, en principio, en la CDC), donde el fuerte acoplamiento y la no linealidad de los sistemas de muchos nucleones, hace imposible la obtención de resultados exactos. A pesar de ello, ha sido posible un entendimiento cualitativo de los fenómenos nucleares (v.gr. interacción cuadrupolar, apareamiento nucleónico, formación de estados colectivos, transiciones de fase de núcleos esféricos a deformados, etc.) utilizando modelos esquemáticos que, aunque simples, permiten estudiar mecanismos comunes con las teorías más realistas, pero sin las complicaciones matemáticas de éstas.

Si bien los modelos algebraicos de sistemas de muchos cuerpos han sido usados principalmente en la física atómica y nuclear, su uso se ha extendido al estudio de la física subnucleónica, refs.[9, 10, 11]. En las refs.[12, 13, 14] se aplican técnicas de teorías de muchos cuerpos para estudiar la CDC no perturbativa desde un formalismo hamiltoniano. Con estos modelos se ha podido, en particular, reproducir el rompimiento espontáneo de la simetría quiral y la formación de condensados, así como parte del espectro mesónico y la aparición de una brecha en la fase condensada que permite relacionar a los cuarks constituyente con los cuarks de corrientes. En los modelos mencionados, sin embargo, no se consideran términos que mezclan a los cuarks con los grados de libertad gluónicos.

En el presente trabajo se explora, con un modelo algebraico y esquemático, la posibilidad de reproducir el espectro mesónico al nivel de los multipletes usando una interacción que considera explícitamente grados de libertad gluónicos y que no conserva ni el número de cuarks constituyentes ni el número de gluones. De esta manera, el modelo puede dar indicaciones acerca del contenido gluónico de los estados hadrónicos.

Un trabajo previo muy relacionado con el presente se encuentra en la ref.[15], en el cual se reprodujo el espectro de *glueballs*¹ medido en los cálculos de red [16] usando un Hamiltoniano efectivo para los modos constantes de los campos de norma. En esta tesis se usa una estrategia similar a la seguida en la mencionada ref.[15]: se propone un Hamiltoniano con las simetrías del Hamiltoniano fundamental y se introducen parámetros indeterminados, los cuales se ajustan a los datos experimentales. El Hamiltoniano propuesto en esta tesis, no depende de las variables espaciales y supone un par de niveles fermiónicos, uno para los cuarks y otro para los anticuarks. Estos niveles fermiónicos se acoplan con el estado más

¹Debido al uso constante del término *glueball*, se optó por escribirlo en caracteres normales y no en cursivas como corresponde a las palabras en idiomas distintos al español.

bajo de los glueballs obtenidos en la ref.[15].

La interacción entre fermiones y bosones produce un condensado que, para los parámetros resultantes en un ajuste al espectro mesónico, es dominado por las excitaciones fermiónicas (cuark-anticuark) y tiene una energía consistente con el valor obtenido en el modelo de la bolsa del MIT [17]. La elección de los grados de libertad efectivos usados en el modelo, es un *ansatz* cuya justificación viene de la capacidad del modelo para reproducir aspectos generales de la CDC no perturbativa.

La tesis está ordenada del siguiente modo: en el primer capítulo se presenta el modelo y se sugiere su conexión con el Hamiltoniano fundamental de la CDC, se discute, también, la estructura algebraica del sector fermiónico, así como una aproximación bosónica que se usará en la versión más general del modelo. En los capítulos 2 y 3 se estudian dos versiones simplificadas. En el capítulo 2 se discute el Hamiltoniano con pares cuark-anticuark acoplados a sabor (0,0) y espín 0, mientras que, en el capítulo 3 se considera la versión con pares cuark-anticuark acoplados a sabor (0,0) y a espín 0 y 1. El estudio de estas dos versiones simplificadas permite obtener las propiedades generales del modelo. Un ejemplo de estas propiedades es la aparición de una fase perturbativa y otra condensada dependiendo de los valores de las constantes de acoplamiento. Al final del capítulo 3 se introduce un modelo bosónico para el Hamiltoniano fermiónico. La intención de éste es el estudio de la versión más general del modelo, en la que es muy complicado el cálculo de los elementos de matriz y la construcción del espacio de Hilbert fermiónico. En el capítulo 4, se aplica el modelo bosónico del caso general al estudio del espectro mesónico realizando un ajuste de las constantes de interacción del modelo a los datos experimentales. El resultado es aceptable y señala un dominio de las excitaciones cuark-anticuark del tipo piónico (sabor (1,1) y espín 0) en los estados mesónicos del modelo. En el capítulo 5 se calcula la gran función de partición. Después de calcularla para el caso más sencillo de pares cuark-anticuark escalares, se calcula para el caso general y se aplica al estudio de la transición al plasma de cuarks y gluones, se obtienen la curva de transición en el espacio μ - T y las producciones totales de piones y kaones sobre dicha curva. Los resultados son consistentes con los cálculos de otros modelos y con los datos experimentales. En el capítulo 6 se discuten posibles extensiones del modelo, en particular, la inclusión de términos que acoplen a los bariones del modelo con la parte gluónica. Estos términos son importantes ya que las energías bariónicas, obtenidas con la presente versión del modelo, están muy por encima de los valores experimentales. En la última parte se dan las conclusiones.

En los apéndices se encuentra una guía para el uso de los programas en FORTRAN utilizados.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 1

Presentación del modelo

Uno de los escenarios en donde es posible obtener resultados analíticos en el estudio de la CDC, es el de los campos de norma en un toro de longitud $L \ll 1$ fm [18]. En esta situación la libertad asintótica de la teoría permite usar teoría de perturbaciones y la finitud del espacio actúa como un corte para las divergencias infrarrojas. A primer orden en teoría de perturbaciones, el espacio de Hilbert se separa en subespacios degenerados que dependen solamente de las componentes constantes de los campos de norma; estos subespacios están separados por brechas de energía inversamente proporcionales al volumen del toro ($\propto 1/V$). La separación permite construir un Hamiltoniano efectivo para los modos constantes e incluir el efecto del resto de los modos perturbativamente. El tamaño de las brechas de energía es fundamental para la validez de la aproximación. Cuando se aumenta el tamaño del toro para incluir situaciones físicamente relevantes, las brechas disminuyen, la mezcla de los diferentes subespacios degenerados aumenta y, por lo tanto, la interacción con los modos no constantes deja de ser manejable perturbativamente, rompiéndose, así, la aplicabilidad de la aproximación. En la referencia [15] se asumió una posición diferente, manteniendo el subespacio de Hilbert de los modos constantes, se supuso que los efectos no perturbativos podían modelarse por los parámetros indeterminados de un Hamiltoniano para estos modos. El resultado fue un sistema de gluones constituyentes con una masa aproximada de 0.8 GeV y un espectro de glueballs consistente con el obtenido por los cálculos de red (lattice) [16]; sin embargo, a diferencia de estos últimos, se obtuvo un esquema muy sencillo para explicar el ordenamiento de los glueballs dentro de bandas del grupo $O(8)$. Por ejemplo, la alta masa del glueball 1^{-+} es, dentro del modelo, una consecuencia del gran número de gluones que lo constituyen. La concordancia del modelo con los cálculos en la red sustentó la utilidad de la posición asumida.

En esta tesis se extiende, asumiendo una posición similar, el modelo de la ref.[15] para incluir a los cuarks. Utilizando el Hamiltoniano para la parte gluónica, se introducen cuarks constituyentes ($m_q \sim 0.33$ GeV) y se propone una interacción entre estos y los glueballs de la ref.[15] motivada por el término de interacción de la CDC ($\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu$). Esto conducirá a un Hamiltoniano con 4 constantes de interacción, las cuales se ajustarán al espectro experimental mesónico. Es nuestro interés mantenernos con un modelo lo más sencillo posible, de aquí que se suponga un esquema del tipo de Lipkin [19] para describir el sector fermiónico. Dos observaciones :

- Dado que de inicio se suponen cuarks constituyentes, implícitamente se ha introducido una de las consecuencias del rompimiento espontáneo de la simetría quiral, no como una consecuencia dinámica sino como hipótesis inicial. Un estado cuasi degenerado con el vacío, otra consecuencia del rompimiento de la simetría quiral, aparece en nuestro modelo cuando se aumenta alguna de las constantes de interacción más allá de un valor crítico. De esta manera, el modelo es capaz de simular una masa constituyente para los cuarks con un estado de paridad negativa cuasi-degenerado con el vacío. Aunque la estructura de la fenomenología quiral es inaccesible dentro del presente modelo, dos de sus consecuencias más importantes son reproducidas por él. Un hecho interesante es que los ajustes que se hicieron al espectro mesónico con la masa constituyente de los cuarks no fija, arrojaron un valor para ésta del orden ~ 0.4 GeV, el cual es consistente con el valor promedio de las masas constituyentes de los cuarks up, down y strange obtenido por otros modelos de CDC [20].
- El uso de sólo 2 niveles (Lipkin) para los cuarks supone, como en el trabajo mencionado del sector puro de norma, la capacidad de un modo de oscilación, ahora de los campos fermiónicos, para

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

describir la estructura gruesa del espectro hadrónico a bajas energías. A diferencia de la parte pura de norma, para los cuarks el principio de exclusión de Pauli limita la dimensión del espacio de Hilbert a $\dim=2^{2\Omega}$, donde 2Ω es la degeneración de cada uno de los niveles de Lipkin, esta degeneración es mínimamente $2\Omega = 18$ para incluir las 2 orientaciones del espín, 3 sabores (*up*, *down* y *strange*) y 3 colores.

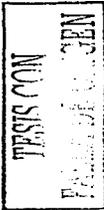
El modelo que se propone en esta tesis, en tanto que es esquemático, deja fuera la posibilidad de estudiar muchas cantidades físicamente relevantes y accesibles en modelos realistas, pero en cambio permite estudiar estructuras generales de un sistema con interacción entre fermiones y bosones constituyentes, ejemplos de ello son el ordenamiento del espectro y la mezcla de cuarks y gluones en los estados. Esto resulta útil para señalar mecanismos que podrían aparecer en modelos realistas donde es mucho más difícil obtener resultados exactos.

El presente capítulo se ordena del siguiente modo, en la sección 1.1 se revisan algunas generalidades del modelo de Lipkin; el interés se enfoca en ilustrar algunos casos en donde el modelo de Lipkin, a pesar de su simplicidad, permite identificar y entender mecanismos subyacentes en sistemas con un número grande de grados de libertad; mecanismos que, a pesar de estar presentes en teorías más complejas, se ocultan en las dificultades matemáticas de las mismas. En la sección 1.2 se describen brevemente la formulación y resultados principales del Hamiltoniano para la parte pura de norma de la ref.[15]. En la sección 1.3 se presenta el Hamiltoniano que incluye a los cuarks y anticuarks y se sugiere la conexión entre éste y el de la CDC. En la sección 1.4 se describe la estructura algebraica del sector fermiónico del modelo; se muestra que los operadores en términos de los cuales se escribe el Hamiltoniano son parte del álgebra de Lie del grupo $U(12)$ y se presenta una cadena de grupos para clasificar los estados que incluye como subgrupo al mencionado $U(12)$. Finalmente, en la sección 1.5 se discute una aproximación que se usará en el estudio más general del modelo, ésta es la bosonización de los pares cuark-anticuark.

1.1. El modelo de Lipkin

Desde su formulación en 1965 el modelo de Lipkin-Meshkov y Glick [19] ha sido utilizado para probar la validez de diferentes métodos de aproximación en teorías de muchos cuerpos. Dado que es posible obtener soluciones exactas, permite comparar con los resultados de diferentes aproximaciones. El modelo de Lipkin, a pesar de ser sencillo, no es trivial y da indicaciones de mecanismos comunes, subyacentes en modelos más complicados. En la física nuclear, los modelos esquemáticos, como el de Lipkin, han sido muy útiles para entender conceptos como el apareamiento entre nucleones, la interacción cuadrupolar y la transición de núcleos esféricos a núcleos deformados, por citar algunos ejemplos. En otros contextos, el modelo de Lipkin ha probado también su utilidad. En la ref.[21], por ejemplo, se utiliza el modelo de Lipkin para ilustrar las dificultades en el cálculo semiclásico de la integral de trayectoria alrededor de soluciones de instantón. En la ref.[22] se utiliza el modelo de Lipkin, en el contexto del decaimiento doble beta en núcleos, para verificar la validez de la RQPA (*Renormalized Quantum Phase Approximation*) en los diferentes regímenes del modelo. En la ref.[23] se utilizan los resultados exactos de modelos tipo Lipkin para fijar el parámetro de deformación (q) en la construcción de los respectivos modelos q -análogos. Una extensión del modelo de Lipkin (parecida al modelo presentado en esta tesis) fue formulada por Schütte y Da Providencia [24], quienes agregaron términos bosónicos a la interacción entre pares fermiónicos del modelo de Lipkin. Dicho modelo, como sugiere su artículo, puede interpretarse como una versión simplificada de un Hamiltoniano tipo Chew-Low [25] para nucleones y piones, los primeros representados por las variables fermiónicas y los segundos por las correspondientes bosónicas. Adicionalmente, estos autores estudiaron, dentro de un modelo exactamente soluble, la transición de fase cuántica a un estado con condensación bosónica y fermiónica. Como último ejemplo, en la ref.[26] se efectúa explícitamente la cuantización tipo BRST del modelo de Lipkin. En resumen, el modelo de Lipkin permite:

- Probar, dentro de un modelo exactamente soluble, la validez de diferentes aproximaciones en sistemas de muchos cuerpos y estudiar con detalle su naturaleza, sugiriendo, así, sus rangos de aplicabilidad.
- Identificar mecanismos generales subyacentes en sistemas con correlaciones entre pares de fermiones.



El trabajo presentado en esta tesis puede verse como una generalización de los modelos de Lipkin y de Schütte y Da Providencia, en la que se consideran nuevas correlaciones entre pares fermiónicos para incluir los grados de libertad de los cuarks (color, sabor, espín y dualidad partícula-antipartícula). Aunque esta generalización se aplica al estudio de los estados hadrónicos (especialmente mesones), puede también utilizarse en otros contextos en donde los grados de libertad relevantes sean pares fermiónicos interactuando con partículas bosónicas. Tal es el caso, por ejemplo, de la superconductividad de alta temperatura [27].

1.2. Estados gluónicos

En esta sección se describe el Hamiltoniano obtenido en [15] para la parte pura de norma.

Si se restringen los campos de norma a los modos constantes (independientes de las coordenadas espaciales) se obtiene un Hamiltoniano que, en la norma del tiempo, tiene la siguiente forma general [28]:

$$H = -\frac{1}{2B_\rho} \sum_{i,a} \frac{\partial^2}{(\partial A_i^a)^2} + V_{eff}(A). \quad (1.1)$$

Si se asume una forma muy sencilla para el potencial:

$$V_{eff}(A) = \frac{C_\rho}{2} \sum_{i,a} A_i^a A_i^a, \quad (1.2)$$

se obtiene el Hamiltoniano de un oscilador armónico de 24 dimensiones con frecuencia $\omega = \sqrt{C_\rho/B_\rho}$ y eigenenergías $E_N = \hbar\omega(N + 12)$. Para identificar el contenido de espín y color de los estados, resulta útil la siguiente cadena:

$$\begin{array}{ccccccc} U(24) & \supset & U(8) & \times & U(3) & & \\ & \xi & \downarrow & & \downarrow & & \\ (\omega_1\omega_2\omega_3 0) & & O(8) & & SU(3)_J & (p, q) & \\ & & \downarrow & & \downarrow & K & \\ (0, 0) & & SU_c(3) & & SO(3) & J, M & \end{array} \quad (1.3)$$

donde $[N]$ es la irrep totalmente simétrica de $U(24)$ y N es el número de excitaciones que determinan la energía. Las reducciones de la cadena anterior son realizadas en [15]. El resultado es la tabla 1.1 que muestra, además de los índices de la cadena (1.3), la paridad y conjugación de carga de los estados con color cero.

Si se fija la frecuencia del oscilador a $\omega = 0.8$ GeV, se obtiene un espectro que reproduce gruesa, pero aceptablemente el espectro de glueballs reportado por los cálculos de red [16]. Es notable que una suposición tan sencilla como el Hamiltoniano (1.2) sea capaz de ello. Un ejemplo relevante es el glueball 1^{-+} (no mostrado en la tabla 1.1) cuya combinación J^{PC} se obtiene hasta considerar $N = 7$ excitaciones; consecuentemente y de acuerdo al modelo, su masa debe ser alta, lo que es consistente con los cálculos de red. Estos resultados sugieren que los modos constantes son grados de libertad adecuados para explicar *grosso modo* el espectro de glueballs.

La modificación del Hamiltoniano (1.2) para obtener un acuerdo más fino con el espectro de glueballs fue llevada a cabo en la misma ref.[15]. La guía fue la cadena (1.3); usando una expansión en términos del inverso del número de campos de norma (1/8), se derivó un Hamiltoniano con 6 parámetros indeterminados y las simetrías de la cadena (1.3). El espectro de dicho Hamiltoniano es:

$$E_{n_\rho, N_2}^{(\omega_1\omega_2\omega_3), L} = \sqrt{\frac{C_\rho}{B_\rho}} \left\{ 2n_\rho + \left[4\sqrt{\frac{C_2}{B_2}} \sigma^2 N_2 + k_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 12) \right. \right. \\ \left. \left. + k_2(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu) + k_3\mathcal{L}(\mathcal{L} + 1) + k_4 \right]^{\frac{1}{2}} - \sqrt{k_4} \right\}, \quad (1.4)$$

donde n_ρ y N_2 son cuantos de excitación de osciladores armónicos en 1 y 5 dimensiones y $(\sigma, \omega_i, \lambda, \mu$ y $\mathcal{L})$ números cuánticos asociados a los grupos de la cadena (1.3) [15].

$U(8)$	$U(3)$	$O(8)$	$\#(0,0)$	$SO(3)(J)$	P	C
[2]	(0000)	1	1	0,3	+1	+1
[4]	(0000)	1	1	0,2,4	+1	+1
[2 ²]	(0000)	1	1	0,2	+1	+1
[6]	(0000)	1	1	0,2,4,6	+1	+1
[42]	(0000)	1	1	0,2,3,4	+1	+1
[2 ³]	(0000)	1	1	0	+1	+1
[3]	(3000)	1	1	1,3	-1	-1
[5]	(3000)	1	1	1,3,5	-1	-1
[41]	(3000)	1	1	1,2,3,4	-1	-1
[32]	(3000)	1	1	1,2,3	-1	-1
[1 ³]	(1110)	1	1	0	-1	+1
[31 ²]	(1110)	1	1	0,2	-1	+1
[21 ²]	(2110)	1	1	1	+1	-1
[41 ²]	(2110)	1	1	1,3	+1	-1
[321]	(2110)	1	1	1,2	+1	-1
[2 ²]	(2200)	1	1	0,2	+1	+1
[42]	(2200)	1	1	0,2,3,4	+1	+1
[321]	(2200)	1	1	1,3	+1	+1
[2 ³]	(2200)	1	1	0	+1	+1
[2 ² 1]	(2210)	1	1	1	-1	-1
[31 ²]	(3110)	1	1	0,2	-1	-1
[6]	(6000)	1	1	0,2,4,6	+1	+1
[42]	(4200)	1	1	0,2,3,4	+1	+1
[41 ²]	(4110)	1	1	1,3	+1	-1
[3 ²]	(3300)	1	1	1,3	+1	-1
[2 ³]	(2220)	1	1	0	+1	+1

Tabla 1.1: Números cuánticos de los estados gluónicos con color cero hasta $N = h_1 + h_2 + h_3 \leq 6$. El índice N corresponde al número de cuantos de un oscilador armónico de 24 dimensiones. La primera y segunda columnas muestran las irreps de los grupos $U(8)$ ($U(3)$) y $O(8)$ de la cadena (1.3), la tercera columna indica el número de estados con color cero contenidos en las irreps y las últimas tres columnas señalan el momento angular, paridad y conjugación de carga de los estados. Nótese la ausencia de la combinación $J^{PC} = 1^{-+}$ que aparece hasta $N = 7$. Tabla tomada de la ref.[15].

Los seis parámetros de (1.4) ($\frac{C_2}{B_2}, \frac{C_2}{B_2}, k_i$) fueron ajustados al espectro de glueballs de los cálculos de red. Dicho ajuste produjo un acuerdo mejorado, el cual es mostrado en la figura 1.1. Se reafirmó, así, la utilidad de la hipótesis de gluones constituyentes para describir el espectro de glueballs. Resultados similares han sido obtenidos desde otros modelos; en la ref.[14], por ejemplo, se obtiene una masa aproximada de 0.8 GeV para los gluones constituyentes; en dicho modelo la interacción proviene de un potencial instantáneo de confinamiento entre cargas de color.

La extensión del modelo gluónico de la ref.[15] para incluir cuarks es el tema de la presente tesis. Usando como guía el término de interacción ($\bar{\psi}\gamma^t\psi A_t$) de la CDC, se propone una interacción entre glueballs y cuarks constituyentes. El modelo se limita a considerar interacciones entre pares cuark-anticuark con los glueballs de menor energía (0^{++}), los cuales son representados por n_p en la ec.(1.4). En principio, se podrían suponer acoplamientos con glueballs de mayor energía, sin embargo, cálculos iniciales tomando en cuenta acoplamientos con el segundo estado excitado (2^{++}), mostraron poca influencia de este glueball al espectro de bajas energías del modelo. De aquí que, en este trabajo, sólo se sponga un acoplamiento con el glueball 0^{++} , el resto de los glueballs serán, por tanto, meros espectadores dentro del modelo.

El Hamiltoniano para las excitaciones 0^{++} está dado por:

$$H_b = \omega_g \left(\sum_{ia} g_{ia}^\dagger g_{ia} \right), \quad (1.5)$$

con g_{ia}^\dagger y g_{ia} operadores de creación y aniquilación de gluones constituyentes de masa $\omega_g = 0.8$ GeV. Como se muestra más adelante, se puede hacer un mapeo bosónico del operador de número anterior para escribir:

$$H_b \rightarrow 2\omega_g (b^\dagger b) \equiv \omega_b (b^\dagger b), \quad (1.6)$$

con b y b^\dagger operadores bosónicos que representan la aniquilación y creación de un glueball 0^{++} .

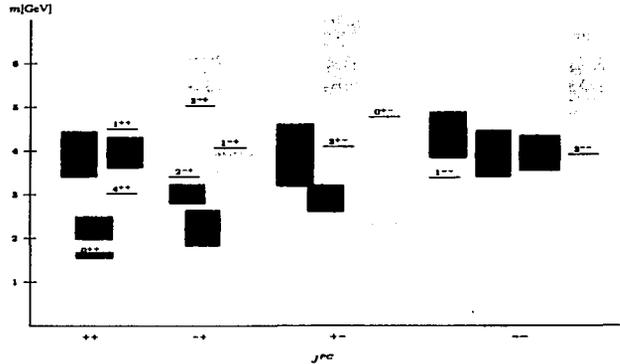


Figura 1.1: Masas de los glueballs obtenidas con el modelo algebraico de la ref.[15] (líneas). Las barras oscuras y claras son, respectivamente, estimaciones y límites superiores de los cálculos en la red de la ref.[16]. Debido a que una irrep del grupo cúbico puede estar contenida en diferentes irreps del grupo de rotaciones, el espín de un estado en la red es ambiguo, el modelo algebraico sugiere que el glueball 1^{++} en realidad es un estado 4^{++} . El modelo reproduce muy bien el espectro de los cálculos en la red. El glueball 0^{+-} , que se desvía considerablemente de la estimación de la ref.[16], coincide muy bien con la estimación de otros cálculos de red [29].

1.3. La inclusión de cuarks

En esta sección se presenta el sector fermiónico de nuestro modelo. Éste consiste de dos niveles de energía con una degeneración 2Ω . Dicha degeneración incluye mínimamente las dos proyecciones de espín, el número de colores y el número de sabores ($2\Omega_{min} = 2N_f N_c$). Es posible aumentar la degeneración de los niveles suponiendo excitaciones orbitales, sin embargo, durante el resto de esta tesis se trabajará con $2\Omega = 18$, que corresponde a 3 sabores, 3 colores y una sola excitación orbital. Se fijan los niveles de energía a 0.33 GeV y -0.33 GeV , el cual es un valor típico para la masa de cuarks constituyentes. Partículas en el nivel superior representan cuarks, mientras que, huecos en el nivel inferior representan anticuarks. El estado sin ningún cuark ni anticuark (el vacío perturbativo) es, en el lenguaje de los 2 niveles, aquel con el nivel superior vacío y el inferior completamente lleno. Nótese que se supone una masa degenerada para los cuarks constituyentes. Esta suposición simplifica el modelo y es suficiente para sus propósitos, en particular, para obtener el espectro al nivel de los diferentes multipletes mesónicos de sabor. No obstante, es posible aplicar una fórmula del tipo Gell-Mann-Okubo para obtener el corrimiento de las masas dentro de un mismo multiplete; para ello se requiere una energía representativa de cada multiplete, en este trabajo se usan las masas de las partículas isoescales como dichas energías representativas. Para comparar el espectro del modelo con el espectro mesónico experimental, se debe considerar la mezcla entre las partículas isoescales del octete y del singlete de sabor [30]. Esta mezcla es más importante en los estados de menor energía, por ello, la comparación del espectro del modelo se hará respecto a las masas isoescales experimentales, con excepción de las masas de las partículas η - η' y ω - ϕ , para las cuales se tomarán las masas experimentales corregidas por factores de mezcla tomados de la literatura; los detalles se discuten en el capítulo 4.

1.3.1. El término libre fermiónico

El campo fermiónico, en términos de ondas planas y utilizando el lenguaje de partículas con energía positiva (asociadas al índice 2) y partículas con energía negativa (índice 1), es:

$$\bar{\Psi}_{cf}(\vec{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \int d^3k \left[c_{\vec{k}cf\sigma 2}^{\dagger} \bar{U}_{\sigma}(w, \vec{k}) + c_{\vec{k}cf\sigma 1}^{\dagger} \bar{U}_{\sigma}(-w, \vec{k}) \right] \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{X}), \quad (1.7)$$

con c, f y σ índices de color, sabor y espín y $w = +\sqrt{m^2 + k^2}$.

Se puede reescribir lo anterior en términos de partículas y antipartículas, para ello basta sustituir el espinor:

$$\bar{U}_{\sigma}(-w, \vec{k}) \rightarrow \bar{V}_{\sigma}(w, -\vec{k}),$$

cambiar el operador de creación de una partícula con energía negativa por el operador de aniquilación de un anticuark:

$$c_{\vec{k}cf\sigma 1}^{\dagger} \rightarrow d_{\vec{k}cf\sigma}$$

y renombrar el operador de creación de una partícula con energía positiva por el operador de creación de un cuark:

$$c_{\vec{k}cf\sigma 2}^{\dagger} \rightarrow a_{\vec{k}cf\sigma}^{\dagger}.$$

Con esto el campo de Dirac toma su forma habitual:

$$\bar{\Psi}_{cf}(\vec{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \int d^3k \left[a_{\vec{k}cf\sigma}^{\dagger} \bar{U}_{\sigma}(w, \vec{k}) + d_{\vec{k}cf\sigma} \bar{V}_{\sigma}(w, -\vec{k}) \right] \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{X}). \quad (1.8)$$

Para expresar el campo conjugado Ψ se usa la convención de índices co y contravariantes (apéndice A.1 y ref.[31]). Según esta convención, al obtener el adjunto de un operador se debe cambiar la posición de los índices, de abajo a arriba y viceversa. Para bajar o subir los índices, el operador se multiplica por una fase y sus índices se cambian por su representación conjugada. En $SU(2)$ esto significa cambiar el espín y su proyección S, σ por $S, -\sigma$ y para $SU(3)$ cambiar $(\lambda, \mu) YTT_2$ por $(\mu, \lambda) -YT - T_2$. En esta convención, las propiedades de transformación de un operador están indicadas por los índices en la posición inferior.

Así, pues, el campo Ψ se escribe:

$$\begin{aligned} \Psi^{cf}(\vec{X}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \int d^3k \left[c^{\vec{k}cf\sigma 2} U_{\sigma}(w, \vec{k}) + c^{\vec{k}cf\sigma 1} U_{\sigma}(-w, \vec{k}) \right] \exp(i\vec{k} \cdot \vec{X}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \int d^3k \left[a^{\vec{k}cf\sigma} U_{\sigma}(w, \vec{k}) + d^{\vec{k}cf\sigma} V_{\sigma}(w, -\vec{k}) \right] \exp(i\vec{k} \cdot \vec{X}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Las reglas de anticonmutación entre los operadores de creación y aniquilación son:

$$\begin{aligned} \left\{ a^{\vec{k}cf\sigma}, a_{\vec{k}'c'f'\sigma'}^{\dagger} \right\} &= \delta_c^c \delta_f^f \delta_{\sigma}^{\sigma} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \\ \left\{ d_{\vec{k}cf\sigma}, d^{\vec{k}'c'f'\sigma'} \right\} &= \delta_c^c \delta_f^f \delta_{\sigma}^{\sigma} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \end{aligned} \quad (1.10)$$

con el resto de anticonmutadores igual a cero.

Sustituyendo las expresiones para los campos de Dirac en el Hamiltoniano sin interacción fermiónico y después de ordenar normalmente, se obtiene:

$$H_{0q} = \int d^3k w(k) \left(\hat{N}_q(\vec{k}) + \hat{N}_{\bar{q}}(\vec{k}) \right), \quad (1.11)$$

con \hat{N}_q y $\hat{N}_{\bar{q}}$ los operadores de número de cuarks y anticuarks:

$$\begin{aligned} \hat{N}_q &= \sum_{cf\sigma} a_{\vec{k}cf\sigma}^{\dagger} a^{\vec{k}cf\sigma}, \\ \hat{N}_{\bar{q}} &= \sum_{cf\sigma} d^{\vec{k}cf\sigma} d_{\vec{k}cf\sigma}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Se simplificará el sistema restringiendo el Hamiltoniano anterior a los modos de oscilación con un mismo $k \equiv |\vec{k}|$. El resultado será un Hamiltoniano para un sistema de dos niveles con degeneración $2N = 2N_o N_f N_c$, donde N_o es el número de excitaciones orbitales, esto rompe la invariancia relativista,

TIPOIC CON
FALLA DE ORIGEN

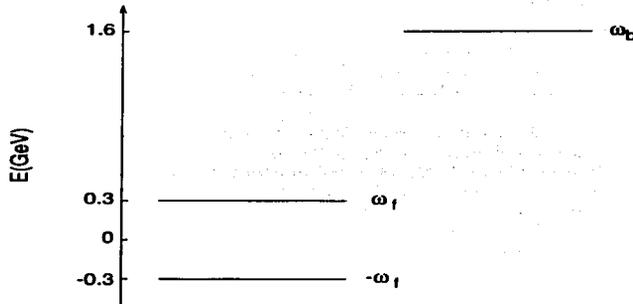


Figura 1.2: Niveles fermiónicos y bosónico del modelo. La energía $\omega_b = 1.6$ GeV corresponde a la masa del glueball 0^{++} , mientras que, la energía $\omega_f = 0.33$ GeV es aproximadamente un tercio de la masa del protón. Partículas en el nivel superior fermiónico representan cuarks y huecos en el nivel inferior anticuarks.

sin embargo, conserva aún la invariancia rotacional. Para realizar lo anterior, se expresan los operadores de creación de partículas con momento \vec{k} en términos de operadores esféricos [32]:

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}cf\sigma}^\dagger &= \sum_{lm} f^*(k) Y_m^l(\hat{k}) a_{klmcf\sigma}^\dagger, \\ a_{\vec{k}cf\sigma} &= \sum_{lm} f(k) Y_m^l(\hat{k}) a_{klmcf\sigma}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

sustituyendo las expresiones anteriores (junto con las equivalentes para los anticuarks) en (1.11), se obtiene, después de integrar sobre los ángulos:

$$H_{0q} = \int dk k^2 |f(k)|^2 w(k) \left(a_{klmcf\sigma}^\dagger a_{klmcf\sigma} + d_{klmcf\sigma}^\dagger d_{klmcf\sigma} \right), \quad (1.14)$$

con suma sobre índices repetidos.

Tomando sólo el término correspondiente a un valor fijo de k en la integral anterior y multiplicándolo por una constante ω_f , se obtiene la parte libre fermiónica de nuestro modelo:

$$H_{0f} = \omega_f \left(a_{lmcf\sigma}^\dagger a_{lmcf\sigma} + d_{lmcf\sigma}^\dagger d_{lmcf\sigma} \right). \quad (1.15)$$

De aquí en adelante se supondrá un valor $\omega_f = 0.33$ GeV para la masa efectiva de los cuarks constituyentes en términos de los cuales se expandió el campo fermiónico. Adicionalmente, se asume que los estados del modelo están localizados en un volumen elemental de aproximadamente $\frac{4\pi}{3} \text{ fm}^3$, correspondiente a una esfera de radio 1 fm.

El espacio de Hilbert de la parte fermiónica es generado por la aplicación de los operadores $a_{lmcf\sigma}^\dagger$ y $d_{lmcf\sigma}^\dagger$ al estado $|0\rangle$, el cual está definido por la propiedad:

$$a_{lmcf\sigma} |0\rangle = d_{lmcf\sigma} |0\rangle = 0.$$

El número de excitaciones orbitales lm que se tomen, define la degeneración de los dos niveles. Como ya se mencionó, aunque es posible tomar más, en el resto de este trabajo se tomará sólo una excitación orbital, la correspondiente a $l = m = 0$, con lo que se obtiene un nivel de cuarks y otro de anticuarks con una degeneración $2\Omega = 18$ para el caso de 3 colores y 3 sabores. Los niveles fermiónicos junto con el nivel bosónico que representa al glueball 0^{++} , son mostrados en la figura 1.2. En los párrafos siguientes se presenta la interacción entre los grados de libertad fermiónicos y bosónicos del modelo.

1.3.2. La interacción entre cuarks y glueballs

Una posible relación entre el Hamiltoniano del modelo y el término de interacción de la CDC, es sugerida en los siguientes párrafos. El término de interacción de la CDC es:

$$\mathbf{H}_i = - \int d^3x g \mathcal{L}_I = \int d^3x g \bar{\Psi}_{c_1 f} \gamma^\mu A_\mu^a T_{c_1 c_2}^a \Psi^{c_2 f}, \quad (1.16)$$

con c y f índices de color y sabor. Las matrices T^a son los generadores del grupo de norma $SU(3)$.

Para derivar una interacción entre los glueballs y el sistema de dos niveles fermiónicos de la subsección anterior, se restringe el Hamiltoniano (1.16) a las variables efectivas, es decir, a los campos de norma A_μ^a constantes y a los campos fermiónicos con k fijo. Esto conducirá de un problema de teoría de campos a un problema de mecánica cuántica de muchos cuerpos. Los términos de interacción resultantes se multiplicarán por constantes indeterminadas para simular los efectos de los términos no considerados explícitamente, pero de manera que el Hamiltoniano efectivo conserve las simetrías de color, sabor, momento angular, paridad y conservación de carga del Hamiltoniano microscópico original.

Al restringir el Hamiltoniano (1.16) a los modos constantes de los campos de norma, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i = & g \int d^3k \left(\mathbf{a}_{\bar{k}c f \sigma}^\dagger \mathbf{a}^{\bar{k}c' f \sigma'} \bar{U}_\sigma(\bar{k}) \gamma^i U_{\sigma'}(\bar{k}) + \right. \\ & \mathbf{a}_{\bar{k}c f \sigma}^\dagger \mathbf{a}^{\bar{k}c' f \sigma'} \bar{U}_\sigma(\bar{k}) \gamma^i V_{\sigma'}(-\bar{k}) + \\ & \mathbf{d}_{\bar{k}c f \sigma} \mathbf{a}^{\bar{k}c' f \sigma'} \bar{V}_\sigma(-\bar{k}) \gamma^i U_{\sigma'}(\bar{k}) + \\ & \left. \mathbf{d}_{\bar{k}c f \sigma} \mathbf{a}^{\bar{k}c' f \sigma'} \bar{V}_\sigma(-\bar{k}) \gamma^i V_{\sigma'}(-\bar{k}) \right) T_{cc'}^a A_i^a, \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde se utilizaron las expansiones de los campos de Dirac [ecs.(1.9) y (1.8)] y, al igual que en la ref.[15], se ha tomado la norma del tiempo por lo que sólo aparecen las componentes espaciales de A_μ^a . Utilizando la representación de Dirac para las matrices γ^μ y con la forma explícita de los espinores U_σ y V_σ en términos de espinores propios de la matriz de Pauli en la dirección z , se obtienen (apéndice A.2) las siguientes relaciones de Gordon:

$$\begin{aligned} \bar{U}_\sigma(\bar{k}) \gamma^i U_{\sigma'}(\bar{k}) &= \delta_{\sigma\sigma'} \frac{k^i}{E}, \\ \bar{U}_\sigma(\bar{k}) \gamma^i V_{\sigma'}(-\bar{k}) &= \left(\sigma_{\sigma\sigma'}^i - \frac{k^i}{E(m+E)} (\vec{\sigma} \cdot \bar{k})_{\sigma\sigma'} \right), \end{aligned} \quad (1.18)$$

que sustituidas en (1.17) conducen a:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i = & g \int d^3k \left(\left[\mathbf{a}_{\bar{k}c f \sigma}^\dagger \mathbf{a}^{\bar{k}c' f \sigma} - \mathbf{d}_{\bar{k}c f \sigma} \mathbf{d}^{\bar{k}c' f \sigma'} \right] \frac{k^i}{E} + \right. \\ & \left. \left[\mathbf{a}_{\bar{k}c f \sigma}^\dagger \mathbf{d}^{\bar{k}c' f \sigma'} + \mathbf{d}_{\bar{k}c f \sigma} \mathbf{a}^{\bar{k}c' f \sigma'} \right] \left[\sigma_{\sigma\sigma'}^i - \frac{k^i}{E(m+E)} (\vec{\sigma} \cdot \bar{k})_{\sigma\sigma'} \right] \right) T_{cc'}^a A_i^a. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Este término de interacción actúa en el espacio de Hilbert formado por el producto directo del espacio fermiónico y el espacio construido en la ref.[15] para gluones constituyentes. El espacio incluye estados con color abierto, sin embargo y dado que la interacción conserva el color, éste se divide en subespacios con diferente color invariantes ante la aplicación del Hamiltoniano. Nuestro interés se centrará en el subespacio de color $(0,0)$, el cual se divide a su vez en:

- Un subespacio (\mathcal{H}_{c_0}) con cuarks y gluones acoplados a color diferente de cero $[(\lambda_q, \mu_q)$ y (λ_g, μ_g) respectivamente], pero acoplados a color total $(0,0)$, es decir, $(\lambda_q, \mu_q) \otimes (\lambda_g, \mu_g)$ a $(0,0)$.
- Otro subespacio ($\mathcal{H}_{(0,0)}$) en donde los cuarks y los gluones están acoplados cada uno por su lado a color $(0,0)$.

Los glueballs de la ref.[15], que se asumen en este trabajo como los grados de libertad efectivos en términos de los cuales se quiere escribir el Hamiltoniano, pertenecen al subespacio $\mathcal{H}_{(0,0)}$, el cual no es invariante ante la aplicación de \mathbf{H}_i , por ello, para obtener la interacción efectiva entre los glueballs y

los fermiones inducida por H_i , se introduce el operador $\hat{f} = f(1 - \hat{P}_{(0,0)})$ donde $\hat{P}_{(0,0)}$ es el proyectador al subespacio $\mathcal{H}_{(0,0)}$ y f una constante con unidades de energía.

La introducción del operador \hat{f} con el límite $f \rightarrow \infty$ elimina los estados fermiónicos y gluónicos con color diferente de cero, los cuales, de acuerdo con la hipótesis de confinamiento, no son permitidos cuando la interacción entre cuarks y gluones está desactivada; además, lo anterior permite derivar un Hamiltoniano en términos de los glueballs de la ref.[15] como se muestra más adelante. Nótese, por otro lado, que el límite mencionado elimina del modelo los estados tipo $q\bar{q}g$ acoplados a color total (0,0).

Si se toma a \hat{f} como un Hamiltoniano a orden cero, se obtiene un espectro con energías degeneradas 0 y f , la primera para el subespacio $\mathcal{H}_{(0,0)}$ y la segunda para \mathcal{H}_{co} . Aplicando teoría de perturbaciones para subespacios degenerados al Hamiltoniano \hat{f} , según la versión de Bloch [33] y usando a H_i como una perturbación, se obtiene el siguiente Hamiltoniano efectivo sobre $\mathcal{H}_{(0,0)}$:

$$H_{i(0,0)} = \hat{P}_{(0,0)} H_i \hat{P}_{(0,0)} + \hat{P}_{(0,0)} H_i \frac{(1 - \hat{P}_{(0,0)})}{(-f)} H_i \hat{P}_{(0,0)} + \dots \quad (1.20)$$

Debido a que $T^a A_i^a$ y la parte fermiónica de H_i son octetes de color [irreps (1,1)], al actuar H_i sobre un estado cualquiera de $\mathcal{H}_{(0,0)}$ se obtiene un estado en \mathcal{H}_{co} , por ello, el primer término en la ec.(1.20) se anula y el segundo se simplifica a:

$$-\frac{1}{f} \hat{P}_{(0,0)} (H_i)^2 \hat{P}_{(0,0)}. \quad (1.21)$$

Los términos de orden superior, sustituidos por los puntos en (1.20), contienen acoplamientos con glueballs de 3 o más gluones [$(A_i^a)^3$]. Se tomará sólo el término (1.21) que involucra glueballs de 2 gluones, bajo el supuesto de que éste es el dominante en el espectro de energía baja. Según la ref.[15], los estados más bajos en energía (0^{++} y 2^{++}) contienen sólo un par de gluones constituyentes.

Para obtener la forma explícita de $H_{i(0,0)}$ en el espacio $\mathcal{H}_{(0,0)}$ se debe, pues, proyectar H_i^2 en el subespacio $\mathcal{H}_{(0,0)}$. El proceso para realizar lo anterior (detallado en el apéndice A.3) consiste en el reacoplamiento de los operadores fermiónicos y gluónicos. El resultado neto es el operador (1.19) elevado al cuadrado, sin las matrices T^a , con los índices de color de los campos de norma contraídos y los índices de color fermiónicos contraídos entre miembros del primer H_i con miembros del segundo. Esto es:

$$H_{i(0,0)} = G_1 \left(H_S^{ij} + H_P^{ij} + H_E^{ij} \right) A_a^i A_j^a, \quad (1.22)$$

con suma sobre índices repetidos, G_1 una constante (apéndice A.3),

$$H_S^{ij} = \int d^3 k_1 d^3 k_2 \left(a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2} a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} + d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger d_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2} a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} - 2 a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} \right) \frac{k_1^i k_2^j}{E_1 E_2}, \quad (1.23)$$

$$H_P^{ij} = \int d^3 k_1 d^3 k_2 \left(a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger d_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} + d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2} a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} + a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger d_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2} a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} + d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} \right) \times \left(\sigma_{\sigma_1 \sigma_2}^i - \frac{k_1^i}{E_1(m+E_1)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_1)_{\sigma_1 \sigma_2} \right) \left(\sigma_{\sigma_2 \sigma_2}^j - \frac{k_2^j}{E_2(m+E_2)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_2)_{\sigma_2 \sigma_2} \right) \quad (1.24)$$

y

$$H_E^{ij} = \int d^3 k_1 d^3 k_2 \left(a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} + a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2} a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} - d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger d_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} - d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger d_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} + a_{\bar{k}_2 c' f \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f \sigma_2} - a_{\bar{k}_2 c' f \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f \sigma_2} + d_{\bar{k}_2 c' f \sigma_2}^\dagger a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger d_{\bar{k}_2 c' f \sigma_2} - d_{\bar{k}_2 c' f \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger d_{\bar{k}_2 c' f \sigma_2} \right) \times \frac{k_1^i}{E_1} \left(\sigma_{\sigma_2 \sigma_2}^j - \frac{k_2^j}{E_2(m+E_2)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_2)_{\sigma_2 \sigma_2} \right). \quad (1.25)$$

Para restringir (1.22) al sistema de dos niveles fermiónicos es necesario tomar los términos de las ecs.(1.23), (1.24) y (1.25) con un mismo $k = |\vec{k}|$. Antes de ello conviene hacer las siguientes observaciones:

- En el Hamiltoniano anterior los operadores fermiónicos y gluónicos están acoplados a color (y también a sabor) cero de manera independiente, sin embargo, el acoplamiento escalar del momento angular tiene la forma:

$$H^{ij}q^{ij},$$

donde el campo compuesto $q^{ij} \equiv A_a^i A_b^j$ es el mismo de la ref.[15] y H^{ij} es la parte fermiónica, ambos tensores tiene componentes escalares y cuadrupolares (espín 2) y se pueden reacoplar de tal manera que la componente escalar fermiónica se acople con la escalar gluónica y lo mismo para el espín 2. De esta manera se obtendrá un Hamiltoniano en términos de los grados de libertad gluónicos 0^{++} y 2^{++} de la ref.[15]. De estos glueballs, el que tiene una energía menor es 0^{++} , por lo tanto, es la interacción con éste la que se toma en el modelo. El reacoplamiento mencionado es:

$$H^{ij}q^{ij} = H^{ik}q^{kj} + C[H^2 \otimes q^2]_0^0$$

donde el supraíndice 2 se refiere al momento angular, $[\dots]_J$ representa el acoplamiento de dos tensores a espín J y C es una constante cuyo valor exacto no es de interés aquí. Así, entonces, el reacoplamiento del momento angular permite encontrar el término fermiónico que está acoplado con el glueball 0^{++} . Este se obtiene simplemente de contraer los índices i y j en las expresiones para H_S , H_P y H_E anteriores.

- Es nuestro interés obtener un Hamiltoniano efectivo que esté escrito puramente en términos de operadores mesónicos, es decir, en términos de operadores compuestos de la forma $a^\dagger d^\dagger$ para la creación de un par cuark-anticuark y da para su aniquilación. Revisando las expresiones para H_S , H_P y H_E se ve que los únicos términos que tienen esta estructura son los de H_P y el último de H_S . Esta será una de las razones (entre otras, sobre las que se discute más adelante) por las que se dejan fuera, en un modelo enfocado al estudio de los estados mesónicos, los términos de H_E y los dos primeros de H_S .
- Los dos primeros términos en H_S tienen la forma $a^\dagger a^\dagger aa$ y $d^\dagger d^\dagger dd$ y pueden reescribirse, como se discute en el último capítulo, como $D^\dagger D$ y $\bar{D}^\dagger \bar{D}$, donde D^\dagger y \bar{D}^\dagger son operadores de creación de un di-cuark y un anti-di-cuark respectivamente; estos términos son importantes para la adecuada descripción de los bariones dentro del modelo. En capítulos posteriores se verá que las masas bariónicas, sin considerar estos términos, resultan muy altas, creemos que su inclusión mejorará estos resultados. Trabajo en esta dirección está actualmente en progreso [34].
- En todos los sumandos de (1.23), (1.24) y (1.25) los índices de color están contraídos entre los primeros y los últimos operadores de creación y/o aniquilación y entre los segundos y los terceros, mientras que el resto de los índices se acoplan entre los primeros y los segundos y entre los terceros y los cuartos operadores de creación y/o aniquilación. Para obtener una expresión en la que todos los índices estén acoplados entre los mismos pares de operadores, se deben reacoplar los operadores ahora en el espacio de sabor (apéndice A.3) y de momento angular. El reacoplamiento de los índices de sabor es inmediato y produce pares fermiónicos acoplados a color cero y sabor $(0, 0)$ y $(1, 1)$ (singulete y octete). El caso del momento angular es más complicado como se discute en el siguiente punto.
- Para analizar los acoplamientos de momento angular de los operadores fermiónicos, se deben considerar tanto los índices de espín σ_k como los de momento angular orbital i, j .

En los términos de H_S los dos primeros y los dos últimos operadores fermiónicos están acoplados a $S = 0$ y $L = 1$ ($S \equiv$ espín y $L \equiv$ momento orbital). Esto es claro ya que, por un lado, los índices de espín están contraídos y, por otro, aparecen las componentes de los vectores \vec{k}_1 y \vec{k}_2 .

En los términos de H_P los pares fermiónicos están acoplados a $S = 1$ ($a_{\sigma_1}^\dagger d_{\sigma_2}^\dagger \sigma_{\sigma_1 \sigma_2}^i$ es la i -ésima componente de un tensor de espín 1) y a $L = 0$ (para los pares acoplados sólo por las matrices de Pauli) o a $L = 2$ [para los términos acoplados por $\frac{k_i^j}{E(m+E)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{k})$].

Finalmente, en los términos de H_E un par de operadores fermiónicos está acoplado a $S = 0$ y a $L = 1$ (los correspondientes al término $\frac{k_i^j}{E}$) y el otro está acoplado a $S = 1$ y $L = 0$ ó $L = 2$.

En todos los casos el espín y el momento angular orbital de los pares se acoplan a momento angular $J = L + S = 1$ (estos 2 momentos angulares se acoplan, a su vez, a momento angular total 0 ó 2).

De las observaciones anteriores se concluye que restringirse a tomar en cuenta una sola excitación orbital ($L = 0$), implica descartar todos los términos con excepción de los de H_P (que son los únicos en los que ambos pares fermiónicos están acoplados a $L = 0$). Sin embargo, como se muestra en la sección 2.4, el uso exclusivo de los términos de H_P conduce a un espectro físicamente inaceptable, con la masa de los estados de paridad negativa muy alta respecto a los de paridad positiva. Si se quiere obtener un espectro que reproduzca al experimental, se debe obtener un estado con paridad negativa (el π -octete) de masa pequeña respecto al resto de los estados. Por otro lado, los dos primeros términos de H_P tienen una representación gráfica que es mostrada en los dos primeros diagramas de la figura 1.3, de esta figura es claro que, para tener simetría de cruzamiento de los términos de interacción, debe incluirse el término representado por el tercer diagrama de la misma figura. Este término no aparece de manera natural en la expresión para $H_{i(0,0)}$, y sólo resulta si se asume $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$; con esta igualdad, los términos que multiplican a los operadores fermiónicos en H_S , H_P y H_E se reducen a:

$$\begin{aligned} H_S &: \frac{A^2}{E^2} \\ H_P &: \sigma_{\sigma_1 \sigma_1}^i \sigma_{\sigma_2 \sigma_2}^i \left(\frac{m^2}{E^2} \right) - [A^{S=2} \otimes B^{L=2}]_0^0 \\ H_E &: \frac{m}{E^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{k})_{\sigma_2 \sigma_2} \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde $A^{S=2}$ y $B^{L=2}$ son, respectivamente, operadores tensoriales acoplados a espín total 2 y momento angular orbital 2, cuya forma explicita no es de interés aquí.

La igualdad $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ produce acoplamientos escalares del momento angular orbital en los pares fermiónicos de H_S y H_P , mas no así en los de H_E , que aún dependen explícitamente de las componentes del vector \vec{k} en el producto $(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})$; por ello se excluye H_E del Hamiltoniano del modelo. Como se muestra en el apéndice A.4, la igualdad $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ produce, además del término cruzado a los términos de H_P , los operadores de número de cuarks y anticuarks necesarios para describir adecuadamente el sector bariónico del modelo. La hipótesis $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$, introducida *ad hoc* para obtener el término cruzado a los términos de H_P , produce, adicionalmente y como se verá más adelante, un estado de paridad negativa cuasi degenerado con el estado base.

En resumen, el Hamiltoniano de nuestro modelo resulta de:

- restringirse en la expresión para $H_{i(0,0)}$ a los modos con un mismo k
- aplicar la condición $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$
- reacoplar los índices de sabor y espín de tal manera que todos los índices (sabor, color, espín y momento angular orbital) estén acoplados entre los mismos pares de operadores fermiónicos
- restringirse a los términos con momento angular orbital $L = 0$ (con esto último se elimina el término H_E)
- ordenar normalmente el Hamiltoniano y, finalmente,
- dejar fuera los dos primeros términos de H_S , los cuales, sin embargo, son importantes para la adecuada descripción de los bariones dentro de nuestro modelo.

El resultado es (apéndice A.4):

$$\begin{aligned} H_{ief} &= G_1 A_i^a A_i^a \sum_{\lambda=0}^1 \sum_{S=0}^1 G_{\lambda S} \left[(B_{(\lambda,\lambda)S}^i \cdot B_{(\lambda,\lambda)S}^i) + (B_{(\lambda,\lambda)S} \cdot B_{(\lambda,\lambda)S}) \right. \\ &\quad \left. - 2(C_{(\lambda,\lambda)S} \cdot \bar{C}_{(\lambda,\lambda)S}) + G'_S (B_{(\lambda,\lambda)S}^i \cdot B_{(\lambda,\lambda)S}^i) \right] \end{aligned} \quad (1.27)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde G_{AS} y G_S son constantes y los productos puntos representan acoplamientos escalares en sabor y espín de los operadores bifermiónicos:

$$\begin{aligned}
 B_{(\lambda,\lambda)_{f;SM}}^\dagger &= \sum_{c_{f_1} f_{2\sigma_1} \sigma_2} \left((1,0)_{f_1}; (0,1)_{f_2} | (\lambda, \lambda) f \right) \left(\frac{1}{2} \sigma_1; \frac{1}{2} \sigma_2 | SM \right) a_{c_{f_1} \sigma_1}^\dagger a_{c_{f_2} \sigma_2}^\dagger \\
 B_{(\lambda,\lambda)_{f;SM}} &= \sum_{c_{f_1} f_{2\sigma_1} \sigma_2} \left((1,0)_{f_1}; (0,1)_{f_2} | (\lambda, \lambda) f \right) \left(\frac{1}{2} \sigma_1; \frac{1}{2} \sigma_2 | SM \right) a_{c_{f_1} \sigma_1} a_{c_{f_2} \sigma_2} \\
 C_{(\lambda,\lambda)_{f;SM}} &= \sum_{c_{f_1} f_{2\sigma_1} \sigma_2} \left((1,0)_{f_1}; (0,1)_{f_2} | (\lambda, \lambda) f \right) \left(\frac{1}{2} \sigma_1; \frac{1}{2} \sigma_2 | SM \right) a_{c_{f_1} \sigma_1}^\dagger a_{c_{f_2} \sigma_2} \\
 \bar{C}_{(\lambda,\lambda)_{f;SM}} &= \sum_{c_{f_1} f_{2\sigma_1} \sigma_2} \left((1,0)_{f_1}; (0,1)_{f_2} | (\lambda, \lambda) f \right) \left(\frac{1}{2} \sigma_1; \frac{1}{2} \sigma_2 | SM \right) a_{c_{f_1} \sigma_1}^\dagger a_{c_{f_2} \sigma_2}, \quad (1.28)
 \end{aligned}$$

en donde han sido bajados los índices de los operadores de creación de anticuarks y de aniquilación de cuarks, con el fin de utilizar directamente los coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(2)$ y $SU(3)$ para el espín y sabor respectivamente. El caso $G'_S = 2$ corresponde al Hamiltoniano de interacción con simetría de cruzamiento.

La ec.(1.27) es un Hamiltoniano efectivo escrito en términos de glueballs y operadores bifermiónicos, con las partes fermiónica y gluónica acopladas independientemente a color cero. El análisis presentado ha permitido hacer explícitas las hipótesis desde las cuales se puede relacionar el Hamiltoniano (1.27) con el término de interacción de la CDC. Los grados de libertad no considerados explícitamente pueden ser incorporados perturbativamente, sin embargo, en el interés de obtener un modelo sencillo, se asumirá una posición similar a la de [15], es decir, se mantendrá el modelo en el espacio de Hilbert reducido (de los glueballs y cuarks constituyentes con un mismo k) y se hará de las constantes G_{AS} y G'_S del Hamiltoniano (1.27) parámetros libres a ajustar a valores experimentales.

La incorporación efectiva de términos de interacción no considerados explícitamente, a través de una redefinición de los parámetros de un Hamiltoniano, es similar al método de renormalización de Wilson y ha sido mostrado, también, en otros ámbitos de la física nuclear [35].

El ajuste de las constantes G_{AS} y G'_S será efectuado en dos pasos. Las constantes G'_S pueden fijarse de imponer una simetría de cruzamiento al Hamiltoniano de interacción del modelo y del estudio cualitativo de su espectro. En la sección 2.4 se muestra que para obtener un estado con paridad negativa muy bajo en energía, es suficiente tomar $G'_S \geq 5$ o eliminar el término CC y tomar $G'_S \geq 2$. Dado que esta última opción permite incorporar la simetría de cruzamiento antes mencionada, se elige:

$$G'_S = 2.$$

Con esta elección, la parte fermiónica del Hamiltoniano de interacción se expresa puramente en términos de operadores mesónicos B y B^\dagger . Del análisis cualitativo del espectro no es posible, en cambio, fijar las restantes 4 constantes G_{AS} que quedarán como parámetros libres a ser ajustados al espectro mesónico experimental.

Es posible simplificar aún más el Hamiltoniano (1.27), para ello se escribe $A_i^\dagger A_i^\dagger$ en términos de operadores de creación y aniquilación, en este caso, bosónicos.

Como se mostró en [15], las excitaciones 0^{++} son descritas por un oscilador armónico unidimensional, que no es más que la parte radial de un oscilador armónico de 24 dimensiones. De este modo el operador compuesto $A_i^\dagger A_i^\dagger$ es:

$$A_i^\dagger A_i^\dagger \propto \sum_{a_i} \left(g_{a_i}^\dagger g_{a_i}^\dagger + g_{a_i} g_{a_i} + 2g_{a_i}^\dagger g_{a_i} \right), \quad (1.29)$$

donde g y g^\dagger son operadores de creación y aniquilación de gluones efectivos de masa $m_g \sim 0.8$ GeV, que satisfacen las reglas de conmutación:

$$\begin{aligned}
 [g_{a_i}, g_{a'_j}^\dagger] &= \delta_{aa'} \delta_{ij} \\
 [g_{a_i}, g_{a'_j}] &= [g_{a_i}^\dagger, g_{a'_j}^\dagger] = 0.
 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Con el mapeo bosónico [36] de los operadores compuestos $g_{a_i}^\dagger g_{a_i}^\dagger$, $g_{a_i} g_{a_i}$ y $g_{a_i}^\dagger g_{a_i}$:

$$g_{a_i}^\dagger g_{a_i}^\dagger \rightarrow \sqrt{48b} \quad (1.31)$$

$$g_{a_i} g_{a_i} \rightarrow \sqrt{48} b^\dagger \left(1 + \frac{b^\dagger b}{12} \right) \quad (1.32)$$

$$g_{a_i}^\dagger g_{a_i} \rightarrow 2b^\dagger b, \quad (1.33)$$

$$(1.34)$$

se puede reescribir (1.29):

$$A_i^a A_i^a \rightarrow \left(b + b^\dagger \left(1 + \frac{b^\dagger b}{12} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} b^\dagger b \right), \quad (1.35)$$

El resultado anterior refleja el hecho físico de que una partícula compuesta por dos bosones se comporta como un bosón cuando su número no es muy grande (en nuestro caso no mucho mayor que 12). Como se mostrará en los capítulos siguientes, para los valores de las constantes de acoplamiento de interés, el número de gluones en los primeros eigenestados de energía no es muy grande, por lo que bastará con tomar hasta primer orden el mapeo bosónico anterior y despreciar el tercer término $\frac{1}{\sqrt{3}} b^\dagger b$, de tal manera que para el Hamiltoniano efectivo bastará sustituir:

$$A_i^a A_i^a \rightarrow M (b + b^\dagger), \quad (1.36)$$

con M una constante que puede absorberse en una redefinición de los términos de interacción.

Con este último paso se llega, finalmente, al término de interacción de nuestro modelo:

$$H_{Ief} = \sum_{\lambda=0}^1 \sum_{S=0}^1 V_{\lambda S} \left[\left(\mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}^\dagger \cdot \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S} \right) + 2 \left(\mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}^\dagger \cdot \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S} \right) + \left(\mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S} \cdot \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S} \right) \right] [b + b^\dagger], \quad (1.37)$$

en donde las constantes G_1 y M de (1.27) y (1.36) han sido absorbidas en los parámetros de interacción $V_{\lambda S}$. La representación gráfica de los términos de interacción anteriores es mostrada en la figura 1.3.

Como se mencionó, b y b^\dagger representan la aniquilación y creación de un glueball 0^{++} y satisfacen el álgebra usual de los operadores bosónicos:

$$\begin{aligned} [b, b^\dagger] &= 1 \\ [b, b] &= [b^\dagger, b^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Pueden obtenerse extensiones del modelo (grados de libertad orbitales, interacciones espín-espín entre cuarks y anticuarks, acoplamientos bariónicos, etc.) considerando términos de la ec.(1.22) que no aparecen en el Hamiltoniano (1.37), ya sea porque fueron considerados efectivamente en (1.37) o simplemente dejados fuera en este estudio del modelo que se enfoca a los estados mesónicos.

En los capítulos siguientes se discutirán en detalle dos versiones simplificadas del Hamiltoniano (1.37): los casos $V_{1,L} = V_{0,1} = 0$ y $V_{1,L} = 0$. En el capítulo 4 se estudiará el caso más general de pares cuark-anticuark acoplados a espín 0 y 1 y sabor (0,0) y (1,1).

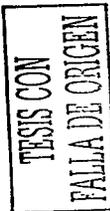
1.4. Estructura algebraica de la parte fermiónica

En esta sección se discute la estructura algebraica del espacio de Hilbert fermiónico de nuestro modelo, así como el rol en esta estructura de los operadores bifermiónicos introducidos en la sección anterior.

Para mayor claridad, se reescribe la relación entre operadores de cuarks y anticuarks con los operadores en el lenguaje de partículas con energía positiva y energía negativa:

$$\begin{aligned} a_{\alpha f \sigma}^\dagger &= c_{\alpha f \sigma 2}^\dagger, & d_{\alpha f \sigma} &= c_{\alpha f \sigma 1}^\dagger \\ a_{\alpha f \sigma} &= c_{\alpha f \sigma 2}, & d_{\alpha f \sigma}^\dagger &= c_{\alpha f \sigma 1} \end{aligned}, \quad (1.39)$$

donde el subíndice 2 se refiere a partículas en el nivel superior de energía positiva y el 1 a partículas en el nivel de energía negativa. Resultará útil en algunos casos el uso de este lenguaje, en particular, como se verá más adelante, en la clasificación de los estados fermiónicos.



TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

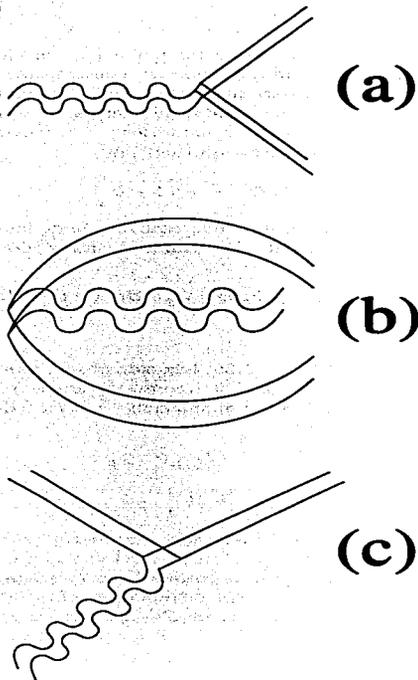


Figura 1.3: Representación gráfica de los términos de interacción. Las líneas onduladas representan al glueball 0^{++} , mientras que, las rectas representan pares cuark-anticuark. (a) Creación $(B_{(\lambda,\lambda)S}^{\dagger} \cdot B_{(\lambda,\lambda)S}^{\dagger})b$ y aniquilación $(B_{(\lambda,\lambda)S} \cdot B_{(\lambda,\lambda)S})b^{\dagger}$ de pares cuark-anticuark. (b) Correlaciones del vacío $(B_{(\lambda,\lambda)S}^{\dagger} \cdot B_{(\lambda,\lambda)S}^{\dagger})b^{\dagger}$ y $(B_{(\lambda,\lambda)S} \cdot B_{(\lambda,\lambda)S})b$. (c) Dispersión $(B_{(\lambda,\lambda)S}^{\dagger} \cdot B_{(\lambda,\lambda)S}) [b + b^{\dagger}]$.

Los operadores bifermiónicos en términos de los cuales se escribe nuestro Hamiltoniano son:

$$\begin{aligned}
 C_{f_1\sigma_1 2}^{f_2\sigma_2 1} &\equiv B_{f_1\sigma_1}^{\dagger f_2\sigma_2} \equiv \sum_{\alpha} c_{\alpha f_1\sigma_1 2}^{\dagger} c^{\alpha f_2\sigma_2 1} = \sum_{\alpha} a_{\alpha f_1\sigma_1}^{\dagger} d^{\alpha f_2\sigma_2} \\
 C_{f_1\sigma_1 1}^{f_2\sigma_2 2} &\equiv B_{f_1\sigma_1}^{f_2\sigma_2} \equiv \sum_{\alpha} c_{\alpha f_1\sigma_1 1}^{\dagger} c^{\alpha f_2\sigma_2 2} = \sum_{\alpha} d_{\alpha f_1\sigma_1} a^{\alpha f_2\sigma_2} \\
 C_{f_1\sigma_1 2}^{f_2\sigma_2 2} &\equiv C_{f_1\sigma_1}^{f_2\sigma_2} \equiv \sum_{\alpha} c_{\alpha f_1\sigma_1 2}^{\dagger} c^{\alpha f_2\sigma_2 2} = \sum_{\alpha} a_{\alpha f_1\sigma_1}^{\dagger} a^{\alpha f_2\sigma_2} \\
 C_{f_1\sigma_1 1}^{f_2\sigma_2 1} &\equiv \bar{C}_{f_1\sigma_1}^{f_2\sigma_2} \equiv \sum_{\alpha} c_{\alpha f_1\sigma_1 1}^{\dagger} c^{\alpha f_2\sigma_2 1} = \sum_{\alpha} d_{\alpha f_1\sigma_1} d^{\alpha f_2\sigma_2} ,
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

con la suma sobre el subíndice α representando la suma sobre el color (acoplamiento escalar de color) y las excitaciones orbitales (que en este trabajo será sólo una). Los pares anteriores pueden acoplarse [ver ec.(1.28)] a sabor $(\lambda, \lambda) = (0, 0)$ ó $(1, 1)$ y espín $S = 0$ ó 1 y además forman el álgebra de Lie del grupo $U(12)$:

$$[C_{f_1\sigma_1 1}^{f_2\sigma_2 2}, C_{f_3\sigma_3 2}^{f_4\sigma_4 1}] = \delta_{f_3\sigma_3 2}^{f_2\sigma_2 2} C_{f_1\sigma_1 1}^{f_4\sigma_4 1} - \delta_{f_1\sigma_1 1}^{f_4\sigma_4 1} C_{f_3\sigma_3 2}^{f_2\sigma_2 2} . \tag{1.41}$$

Los operadores del primer y segundo renglón en (1.40) son operadores de ascenso y descenso, respectivamente, del álgebra de $U(12)$ [37], mientras que, los dos últimos renglones incluyen a los operadores de peso (los 12 operadores de número) y a los restantes operadores de ascenso y descenso que son, también, los operadores de ascenso y descenso de los subgrupos de $U(12)$: $SU_{q\sigma}(2)$, $SU_{q\sigma}(2)$, $SU_{q\text{sabor}}(3)$ y $SU_{q\text{sabor}}(3)$, para el espín y sabor de los cuarks y anticuarks respectivamente.

Dado que existen 4Ω diferentes operadores $c_{\alpha f\sigma i}^{\dagger}$ ($2\Omega = N_c N_c N_f N_{\sigma}$), los posibles estados fermiónicos serán las representaciones antisimétricas del grupo $U(4\Omega)$ [37]. Una cadena de grupos que incluye al grupo $U(12)$ de (1.41) es:

$$\begin{array}{ccc}
 [1^N] & [h] = [h_1 h_2 h_3] & [h^T] \\
 U(4\Omega) & \supset U(\frac{\Omega}{3}) \otimes & U(12) \\
 & \cup & \cup \\
 (\lambda_C, \mu_C) SU_C(3) (\lambda_f, \mu_f) & SU_f(3) \otimes SU_S(2) S, M & .
 \end{array} \tag{1.42}$$

Si $N_c = 1$ ($\Omega = 9$), el grupo $U(\frac{\Omega}{3})$ se reduce al grupo $U(3)$ de color. La irrep $[h^T]$ se refiere al diagrama de Young transpuesto de $[h]$, donde las columnas y renglones son intercambiados [38]. Debido a la antisimetría $[1^N]$ de la irrep de $U(4\Omega)$, las irreps de $U(\Omega/3)$ y $U(12)$ son complementarias. La irrep de $U(\Omega/3)$, en el caso $\Omega = 9$, tiene máximamente tres renglones. En la cadena de grupos (1.42) no se indican índices de multiplicidad. Hay multiplicidades ρ_f para (λ_f, μ_f) y ρ_S para el espín S . Los índices de color (λ_C, μ_C) están relacionados a los h_i a través de $\lambda_C = h_1 - h_2$ y $\mu_C = h_2 - h_3$.

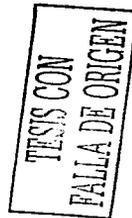
El conjunto completo de estados, según la cadena anterior, es:

$$[N, (\lambda_C, \mu_C), \rho_f(\lambda_f, \mu_f) Y T T_z, \rho_S S M] , \tag{1.43}$$

donde Y es la hipercarga, T el isoespín y T_z su proyección. Para estados mesónicos, los números cuánticos de color son $(\lambda_C, \mu_C) = (0, 0)$. Los valores de h_i se obtienen de considerar las posibles particiones de $N = h_1 + h_2 + h_3$, cada partición de N aparece una vez. Para estados sin color se cumple que $h_1 = h_2 = h_3 = h$. La irrep $[h h h]$ de $U(\frac{\Omega}{3}) = U(3)$ ($\Omega = 9$) fija la irrep de $U(12)$: $[3^h 0^{12-h}]$.

La irrep de $U(12)$ que contiene al estado base es $[(\frac{\Omega}{3})^6 0^6]$. Para la reducción de las irreps de $U(12)$ se ha escrito un programa (apéndice E.3.1), que utiliza los subgrupos $U_f(3)$ de sabor y $U(4)$ de espín y partícula-antipartícula, para encontrar el contenido de sabor y espín en una irrep dada de $U(12)$. La construcción explícita de los estados será hecha bajo la aproximación bosónica, los detalles de este procedimiento serán mostrados en el capítulo 4.

Nótese que en la cadena (1.42) se ha utilizado el lenguaje de partículas con energías positiva y negativa, lo cual hace más claro el significado de las irreps de los grupos unitarios. Por ejemplo, el número de renglones de la irrep de $U(4\Omega)$ representa el número de partículas (de cualquier energía) en los estados, mientras que los renglones de $U(12)$ tienen el siguiente significado: los primeros 6 indican el número de partículas en el nivel inferior para el estado de mínimo peso, mientras que, los restantes 6 indican el número de partículas en el nivel superior en ese mismo estado.



Debido a que está escrito en términos del álgebra de $U(12)$, el Hamiltoniano (1.37) no mezcla estados de diferentes irreps y puede, por ello, diagonalizarse independientemente en cada irrep. En las versiones más simples del Hamiltoniano efectivo (1.37) ($V_{1,S} = V_{0,1} = 0$ y $V_{1,S} = 0$), se tendrán subespacios invariantes formando irreps de subgrupos de $U(12)$. En esos casos convendrá utilizar cadenas más sencillas para la clasificación y diagonalización numérica del Hamiltoniano (capítulos 2 y 3).

1.5. Los pares cuark-anticuark como bosones

Para concluir este capítulo se discute la aproximación bosónica que se usará en el estudio de la versión más general del Hamiltoniano (1.37). La bondad de dicha aproximación se probó en las versiones más sencillas. El resultado fue que, al menos para nuestros propósitos, la aproximación funciona adecuadamente.

La construcción explícita de los estados de la ec.(1.43) y el cálculo de los elementos de matriz del Hamiltoniano (1.37) resultan muy complicados, lo cual está en conflicto con la idea de desarrollar un modelo simple. Una salida es usar un mapeo bosónico de los operadores bifermiónicos B^{\dagger} y B y trabajar en un espacio de Hilbert bosónico.

Los ingredientes básicos del modelo, los operadores bifermiónicos (1.40), pueden ser mapeados a operadores bosónicos [36]:

$$\begin{aligned} B_{f_1\sigma_1}^{\dagger f_2\sigma_2} &\rightarrow b_{f_1\sigma_1}^{\dagger f_2\sigma_2} \\ B_{f_1\sigma_1}^{f_2\sigma_2} &\rightarrow b_{f_1\sigma_1}^{f_2\sigma_2} \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde los operadores a la derecha satisfacen relaciones de conmutación bosónicas:

$$[b_{f_1\sigma_1}^{\dagger f_2\sigma_2}, b_{f_3\sigma_3}^{\dagger f_4\sigma_4}] = \delta_{f_2}^{f_3} \delta_{f_1}^{f_4} \delta_{\sigma_2}^{\sigma_3} \delta_{\sigma_1}^{\sigma_4} \quad (1.45)$$

El mapeo bosónico exacto es complicado, pero puede ser obtenido en general [36, 39], sin embargo, para los propósitos de este trabajo, sólo es importante que este mapeo pueda ser realizado.

En el estudio de la versión más general del modelo:

- se trabajará desde el inicio en el espacio bosónico
- se definirá un Hamiltoniano bosónico para el Hamiltoniano fermiónico (1.37)

La ventaja de trabajar en el espacio bosónico es la simplificación para obtener los elementos de matriz, sin embargo, esto trae consigo la aparición de estados *espurios* [36], como se discute en los capítulos 3 y 4. Para elegir una base en el espacio bosónico, se utiliza el hecho de que los grados de libertad básicos están dados por los operadores de creación bosónicos $b_{[\lambda,\lambda]fSM}^{\dagger} \equiv b_{\lambda fSM}^{\dagger}$, con $\lambda = 0$ ó 1 y $S = 0$ ó 1 . Esto da cuatro posibles combinaciones de $[\lambda, S]$: $[0,0]$, $[0,1]$, $[1,0]$ y $[1,1]$. Consecuentemente, el espacio de Hilbert total será el producto directo de los espacios de Hilbert de osciladores de una, tres, ocho y 24 dimensiones [40]. La construcción explícita de esta base, la propuesta del Hamiltoniano bosónico correspondiente al fermiónico (1.37), así como el cálculo de sus elementos de matriz y su diagonalización son realizados en el capítulo 4.

Capítulo 2

Pares escalares de espín y sabor

En este capítulo se estudia la versión más sencilla del modelo presentado en el capítulo anterior, en la que sólo se consideran pares cuark-anticuark acoplados a espín y sabor cero, es decir, el caso en el que se hacen cero las constantes V_{11} , V_{10} y V_{01} :

$$H_{(0,0)0} = \omega_f \sum_{cf\sigma} \left(a_{cf\sigma}^\dagger a^{cf\sigma} + d^\dagger{}^{cf\sigma} d_{cf\sigma} \right) + \omega_b b^\dagger b + V_{00} \left[\left(B_{(0,0)0}^\dagger \cdot B_{(0,0)0}^\dagger \right) + \left(B_{(0,0)0} \cdot B_{(0,0)0} \right) + 2 \left(B_{(0,0)0}^\dagger \cdot B_{(0,0)0} \right) \right] \left[b + b^\dagger \right]. \quad (2.1)$$

En la primera sección se presentará la cadena que permite clasificar el espacio fermiónico en subespacios invariantes ante el Hamiltoniano (2.1), los cuales son representaciones irreducibles (irreps) de un grupo $SU(2)$. En la segunda sección se estudiará una versión simplificada del Hamiltoniano (2.1) que, debido a una simetría extra, acepta soluciones cuasi analíticas, excepto por la diagonalización de matrices finitas. En la sección 2.3 se discutirá la diagonalización de (2.1), este Hamiltoniano carece de la simetría extra mencionada, por lo que su representación matricial es de dimensión infinita. Sin embargo, la introducción de un corte en el número de bosones probará ser suficiente, en el rango de V_{00} considerado, para obtener los primeros niveles de energía. En esta misma sección se introducen estados coherentes como funciones de prueba para evaluar la energía del estado base. La comparación con el resultado de la diagonalización numérica permitirá establecer el valor mínimo del corte que se necesita para obtener eigenvalores independientes de él. Se analizarán los resultados de la diagonalización numérica, en particular la aparición de una fase condensada y de un estado de paridad negativa cuasi degenerado con el estado base para valores de la constante de acoplamiento mayores que un valor crítico. En la sección 4 se revisarán los resultados de la diagonalización numérica a la luz de la solución cuasi analítica que es posible obtener fijando la masa fermiónica $\omega_f = 0$; este caso es útil para estudiar la fase condensada del Hamiltoniano (2.1) ya que, en ella, el término de interacción domina sobre el término libre fermiónico.

2.1. Una base completa: $U(4\Omega) \supset U(2\Omega) \otimes U(2)$

La simplificación a pares cuark-anticuark acoplados a espín y sabor cero reduce los subespacios invariantes del Hamiltoniano, de las irreps de $U(12)$ a las irreps de un subgrupo de éste: el grupo $SU_{\mathcal{J}}(2)$ llamado de pseudoespín [41]. En este caso la cadena que conviene utilizar es:

$$U(4\Omega) \supset U(2\Omega) \otimes U(2) \supset SU_{\mathcal{J}}(2) \quad \begin{array}{l} [1^N] \\ [h_1 h_2] \\ \cup \\ \rho_{\mathcal{J}} \end{array} \quad \begin{array}{l} h_1 + h_2 = N \\ \mathcal{J} = \frac{h_1 - h_2}{2}, \mathcal{M} \end{array} \quad (2.2)$$

donde $[\tilde{h}]$ denota la irrep transpuesta de $[h_1 h_2]$ que se obtiene de intercambiar renglones por columnas. El índice de multiplicidad $\rho_{\mathcal{J}}$ permite distinguir a las diferentes irreps \mathcal{J} de $SU_{\mathcal{J}}(2)$ contenidas en una misma irrep $[1^N]$ de $U(4\Omega)$ y corre desde 1 hasta $\dim_{U(2\Omega)}([\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_{2N}])$. El valor de las h_i está

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

limitado: $h_i \leq 2\Omega$ y $\bar{h}_i \leq 2$. Los valores que puede tomar el pseudoespín \mathcal{J} van de 0 a Ω en pasos de $\frac{1}{2}$. De acuerdo a la cadena anterior, una base completa del espacio de Hilbert fermiónico es:

$$|N; \rho_{\mathcal{J}}, \mathcal{J}\mathcal{M}\rangle. \quad (2.3)$$

La relación de los índices anteriores a las variables físicas de nuestro modelo puede establecerse fácilmente. N es el número de partículas en la imagen de partículas con energía negativa y positiva: $N = n_1 + n_2$. El número de cuarks es igual al número de partículas en el nivel superior $n_q = n_2$, mientras que el número de anticuarks está dado por el número de huecos en el nivel inferior, es decir, $n_{\bar{q}} = 2\Omega - n_1$. De este modo

$$N = n_q - n_{\bar{q}} + 2\Omega. \quad (2.4)$$

El Hamiltoniano (2.1) contiene operadores de creación y aniquilación de pares cuark-anticuark por lo que conserva el número bariónico $B = \frac{(n_q - n_{\bar{q}})}{3} = \frac{N - 2\Omega}{3}$.

Los pares cuark-anticuark del Hamiltoniano (2.1) forman el álgebra de $SU_{\mathcal{J}}(2)$:

$$\begin{aligned} [S_+, S_-] &= 2S_0, \\ [S_0, S_{\pm}] &= \pm S_{\pm}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

con:

$$\begin{aligned} S_+ &= \sum_{cfs} a_{cfs}^\dagger a_{cfs} d^{cfs} &= \sqrt{6} B_{(0,0)0}^\dagger, \\ S_- &= \sum_{cfs} d_{cfs} a_{cfs} &= \sqrt{6} B_{(0,0)0}, \\ S_0 &= \frac{1}{2} \sum_{cfs} (a_{cfs}^\dagger a_{cfs} + d^{cfs} d_{cfs}) - \Omega &= \frac{n_q + n_{\bar{q}}}{2} - \Omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

El estado de mínimo peso $|MP\rangle$ para un \mathcal{J} dado se define por:

$$S_- |MP\rangle = 0.$$

El eigenvalor de S_0 para este estado da el valor negativo de \mathcal{J} . De S_0 en términos de los operadores fermiónicos [ec.(2.6)], se ve que para el estado de mínimo peso:

$$\mathcal{J} = \Omega - \frac{n_{qval} + n_{\bar{q}val}}{2}, \quad (2.7)$$

con n_{qval} y $n_{\bar{q}val}$ el número de cuarks y anticuarks en $|MP\rangle$. El estado de mínimo peso corresponde al estado sin ninguna excitación cuark-anticuark (creadas por el operador S_+). Los cuarks y anticuarks del estado de mínimo peso serán llamados cuarks y anticuarks de valencia (cuarks y anticuarks no apareados). De este modo, si denotamos con n_f el número de pares cuark-anticuark creados por el operador S_+ , el total de cuarks y anticuarks será:

$$\begin{aligned} n_q &= n_{qval} + n_f, \\ n_{\bar{q}} &= n_{\bar{q}val} + n_f. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ec.(2.4), se obtiene:

$$N = n_q - n_{\bar{q}} + 2\Omega = n_{qval} - n_{\bar{q}val} + 2\Omega. \quad (2.9)$$

Usando esta ecuación, (2.7) y (2.2), se obtiene la relación entre los cuarks de valencia y las h_i de $U(2)$:

$$\begin{aligned} h_1 &= 2\Omega - n_{qval}, \\ h_2 &= n_{qval}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

La irrep de $U(2)$ que contiene tanto al estado sin ningún cuark ni anticuark (vacío perturbativo) como al estado base del sistema para el caso con interacción, es $[2\Omega \ 0]$ ($\mathcal{J} = \Omega$). El número bariónico de esta irrep es $B = 0$ y contiene estados mesónicos de sabor $(0, 0)$ y espín 0.

El número "pseudomagnético" \mathcal{M} de \mathcal{J} está relacionado con el número de pares cuark-anticuark, como se deduce de la expresión para S_0 en la ec.(2.6) y de la ec.(2.8):

$$\mathcal{M} = n_f - \left(\Omega - \frac{n_{qval} + n_{\bar{q}val}}{2} \right) = n_f - \mathcal{J}, \quad (2.11)$$

ESTIS CON
PALA DE ORIGEN

para la irrep $[2\Omega 0]$, la relación anterior se reduce a $\mathcal{M} = n_f - \Omega$.

La base completa (2.3) reescrita en términos de las variables físicas del modelo es:

$$|n_{qval} n_{\bar{q}val}, \rho_{\mathcal{J}}, n_f\rangle = \left| N = 2\Omega - (n_{qval} - n_{\bar{q}val}); \rho_{\mathcal{J}}, \mathcal{J} = \left(\Omega - \frac{n_{qval} + n_{\bar{q}val}}{2} \right) \mathcal{M} = n_f - \mathcal{J} \right\rangle. \quad (2.12)$$

Obsérvese que para el pseudoespín $\mathcal{J} = \Omega$ la multiplicidad $\rho_{\mathcal{J}}$ es igual a 1 ya que la única combinación de h_1 y h_2 que lo produce es $[2\Omega 0]$ y la dimensión de $[\bar{h}] = [1^{2\Omega}]$ es $\dim_{SU(2\Omega)}([1^{2\Omega}]) = 1$.

Para el sector bosónico del modelo, la base completa es simplemente la de un oscilador armónico unidimensional:

$$|n_b\rangle = \frac{(b^\dagger)^{n_b}}{\sqrt{n_b!}} |0\rangle_b. \quad (2.13)$$

El espacio completo es el producto directo del espacio fermiónico y bosónico:

$$|\Psi\rangle = | \rangle_f \otimes | \rangle_b. \quad (2.14)$$

Si se reescribe (2.1) en términos de los operadores S_+ , S_- y S_0 de (2.6), se obtiene:

$$H_{(0,0)0} = 2\omega_f (S_0 + \Omega) + \omega_b n_b + V_1 : (S_+ + S_-)^2 : (b^\dagger + b), \quad (2.15)$$

donde los dobles puntos indican *ordenamiento normal*, $n_b = b^\dagger b$ y las raíces $\sqrt{6}$ de (2.6) han sido absorbidas en una redefinición de la constante de acoplamiento ($V_1 = V_{00}/6$).

El cálculo de los elementos de matriz del Hamiltoniano (2.15), resulta idéntico al caso del momento angular $\mathcal{J} = \frac{h_1 - h_2}{2}$ con proyección \mathcal{M} . La diagonalización puede efectuarse independientemente para cada valor de \mathcal{J} . En las siguientes secciones el interés se centrará en la irrep $\mathcal{J} = \Omega$ que contiene al estado base del sistema. Igualmente, se estudiarán los estados bariónicos que corresponden al caso de 3 cuarks (ó anticuarks) de valencia, es decir, a $\mathcal{J} = \Omega - \frac{3}{2}$. En el capítulo 5, donde se introduce temperatura, la clasificación anterior de los estados fermiónicos, permitirá escribir más fácilmente la función de partición del sistema. El Hamiltoniano (2.15) conserva paridad, es decir, no mezcla estados de un número par de pares cuark-anticuark (paridad positiva) con estados de un número impar (paridad negativa). La diagonalización en cada irrep \mathcal{J} se hará, por tanto, de modo independiente para ambos sectores.

En la versión original del modelo de Lipkin que sólo considera operadores bifermiónicos, la simetría del pseudoespín es suficiente para obtener matrices finitas y diagonalizar el Hamiltoniano. En el presente caso, a pesar de que la diagonalización se hará en los subespacios fermiónicos con paridad y \mathcal{J} fijos, la introducción del grado de libertad bosónico produce matrices Hamiltonianas de dimensión infinita. La situación será remediada por la introducción de un corte en el número de bosones considerados en la construcción de la matriz Hamiltoniana.

Con el objeto de adquirir un mayor entendimiento en el manejo del Hamiltoniano (2.1), se estudiará, en la siguiente sección, una versión simplificada de éste, en la que pueden obtenerse los eigenvectores y eigenvalores diagonalizando matrices de dimensión finita.

2.2. Un modelo exactamente soluble

Si de los términos de interacción se toman sólo los llamados de creación y aniquilación de pares cuark-anticuark (fig.1.3), se obtiene el Hamiltoniano:

$$H_I = 2\omega_f (S_0 + \Omega) + \omega_b n_b + V_1 (S_+^2 b + b^\dagger S_-^2), \quad (2.16)$$

el cual conmuta con el operador:

$$R = \frac{S_0 + \Omega}{2} + n_b. \quad (2.17)$$

El Hamiltoniano (2.16) es igual al de la ref.[24], excepto en que los operadores de $SU(2)$ aparecen cuadráticamente, mientras que, en la ref.[24] lo hacen linealmente. Debido a que un par cuark-anticuark tiene paridad negativa, los operadores S_+ y S_- deben aparecer cuadráticamente para conservar paridad.

Es posible diagonalizar el Hamiltoniano en cada subespacio generado por los eigenestados de \mathbf{R} con el mismo eigenvalor. Para la irrep $[2\Omega, 0]$ de $U(2)$, los subespacios de \mathbf{R} son:

$$|r; n_f\rangle_{\mathcal{J}=\Omega} \equiv \left| \mathcal{J} = \Omega; n_f \right\rangle_{\mathcal{J}} \otimes \left| n_b = r - \frac{n_f}{2} \right\rangle_b, \quad (2.18)$$

donde se usó la relación $S_0 + \Omega = n_f$ [ec.(2.11)] que se cumple para $\mathcal{J} = \Omega$. Los eigenvalores de \mathbf{R} son $r = k/2$, con $k = 0, 1, 2, \dots$. Los valores semienteros de r involucran estados con un número impar de excitaciones bifermiónicas, es decir, estados de paridad negativa:

$$n_f = 1, 3, \dots, \min(2\Omega - 1, 2r),$$

mientras que, los valores enteros de r corresponden a estados con paridad positiva y un número par de excitaciones bifermiónicas:

$$n_f = 0, 2, \dots, \min(2\Omega, 2r).$$

La dimensión de los subespacios de \mathbf{R} es $\min(r + 1, \Omega + 1)$ para r entero y $\min(r + \frac{1}{2}, \Omega)$ para r semientero. De esta manera, la diagonalización del Hamiltoniano se reduce a la diagonalización de matrices, a lo más, de dimensión $\Omega + 1$. Para el valor de Ω que se asume en este trabajo ($\Omega = 9$), la dimensión máxima de las matrices es diez. Los subespacios de \mathbf{R} contienen desde $r = \Omega$ hasta r excitaciones bosónicas, es decir, subespacios con un r mayor involucran estados con un número mayor de glueballs 0^{++} . Obsérvese que el subespacio $r = 0$ consiste de un sólo estado: el vacío perturbativo ($n_b = n_f = 0$); el cual es eigenestado del Hamiltoniano (2.16) para cualquier valor de la constante de interacción, aunque no siempre es el eigenestado con menor energía.

Los elementos de matriz diferentes de cero para r y n_f dados son:

$$\begin{aligned} \left\langle r; n_f + 2 \left| S_-^2 b^\dagger \right| r; n_f \right\rangle &= \left\langle n_b + 1 \left| \otimes_{\mathcal{J}} \left\langle n_f - 2 \left| S_-^2 b^\dagger \right| n_f \right\rangle_{\mathcal{J}} \otimes \left| n_b = r - \frac{n_f}{2} \right\rangle_b \right\rangle = \\ &= 2\Omega \sqrt{n_f(n_f - 1)} \sqrt{\left(1 - \frac{n_f - 2}{2\Omega}\right) \left(1 - \frac{n_f - 1}{2\Omega}\right)} \sqrt{r - \frac{n_f}{2} + 1}, \\ \left\langle r; n_f - 2 \left| S_+^2 b \right| r; n_f \right\rangle &= \left\langle r; n_f \left| S_-^2 b^\dagger \right| r; n - 2f \right\rangle^*, \\ \left\langle r; n_f \left| 2\omega_f(S_0 + \Omega) + \omega_b n_b \right| r; n_f \right\rangle &= \left\langle n_b \left| \otimes_{\mathcal{J}} \left\langle n_f \left| 2\omega_f(S_0 + \Omega) + \omega_b n_b \right| n_f \right\rangle_{\mathcal{J}} \otimes \left| n_b = r - \frac{n_f}{2} \right\rangle_b \right\rangle, \\ &= 2\omega_f n_f + \omega_b \left(r - \frac{n_f}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde se usó:

$$S_+ \left| \mathcal{J} \mathcal{M} \right\rangle = \sqrt{\mathcal{J}(\mathcal{J} + 1) - \mathcal{M}(\mathcal{M} + 1)} \left| \mathcal{J} \mathcal{M} + 1 \right\rangle$$

y

$$b^\dagger \left| n_b \right\rangle = \sqrt{n_b + 1} \left| n_b + 1 \right\rangle.$$

Se escribió un programa en FORTRAN (*gsh00.f*, ver apéndice E.1.1) con el cual se realizó la diagonalización numérica del Hamiltoniano (2.16).

En la figura 2.1 se muestran las energías mínimas de cada subespacio de \mathbf{R} como función de sus eigenvalores r . Las curvas corresponden a diferentes valores de la constante de acoplamiento. Para $V < V_c \approx 0.035$ GeV, el mínimo global corresponde a $r = 0$, es decir, al vacío perturbativo. A partir de un cierto V_1 , aparece un mínimo local en las curvas, el cual llega a ser el mínimo global para valores de V_1 mayores que V_c . Este valor V_c marca la frontera entre la fase perturbativa y la fase condensada en la que el estado base contiene tanto pares cuark-anticuark como pares gluónicos. En la misma figura 2.1 se observa que, a partir de V_c , el valor de r que corresponde al estado base crece monótonamente con V_1 . Esto implica que el contenido gluónico del estado base aumenta con la constante de interacción, pasando de un condensado dominado por pares fermiónicos (para valores de V_1 ligeramente mayores que V_c) a uno dominado por pares bosónicos. Este efecto se preserva en el caso del Hamiltoniano (2.15) que no conmuta con \mathbf{R} .

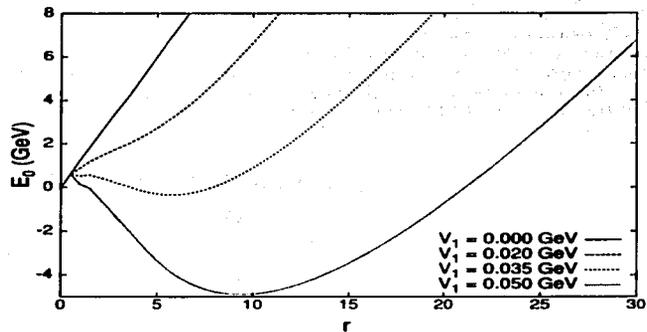


Figura 2.1: Energía mínima de cada subespacio R como función de su eigenvalor r para diferentes valores de V_1 . El valor de r con la energía mínima global cambia de $r = 0$ a $r \neq 0$ a partir de $V_1 = 0.035$ GeV. El cambio es discontinuo e indicativo de una transición de fase de primer orden.

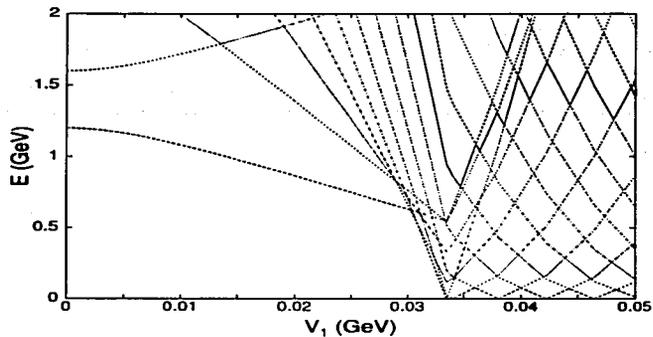


Figura 2.2: Espectro de paridad positiva del Hamiltoniano (2.16) en función de V_1 . El espectro se hace denso para $V_1 > 0.035$ GeV. La energía de los estados se mide respecto a la energía del estado base para cada valor de V_1 .

En la figura 2.2 se muestra el espectro de los estados con paridad positiva como función de la constante de acoplamiento V_1 . Las energías de los estados se miden respecto a la energía del estado base para cada valor de V_1 . Para $V_1 = 0$ la figura presenta dos estados, el primero corresponde a 2 pares cuark-anticuark con energía $4\omega_f = 1.32$ GeV y el segundo al glueball con energía $\omega_b = 1.6$ GeV. Como puede apreciarse en la figura 2.2, el cambio de la fase perturbativa a la condensada viene acompañado por un aumento en la densidad de estados. Este efecto es similar al que presentan algunos núcleos al pasar de la forma esférica a la deformada [42]. Para el caso del espectro mesónico, sin embargo, el comportamiento anterior no es realista, ya que la densidad de los estados mesónicos experimentales, no es de la forma sugerida por la figura 2.2. Como se verá en las siguientes secciones, esta situación cambiará en el caso del Hamiltoniano (2.15), el cual presenta un espectro con características más acordes con el espectro mesónico experimental.

2.3. Diagonalización numérica y estados coherentes

En esta sección se presenta la diagonalización numérica del Hamiltoniano (2.15), que incluye, además de los llamados términos de creación y aniquilación de pares del Hamiltoniano (2.16), términos de dispersión $[S_+ S_- (b + b^\dagger)]$ y de correlaciones del vacío $(S_+^2 b^\dagger + S_-^2 b)$. La introducción de estos términos mezcla los subespacios de \mathbf{R} y la diagonalización debe efectuarse, formalmente, en subespacios de dimensión infinita. Es de esperar, sin embargo, que para valores de V_1 pequeños los eigenestados del Hamiltoniano puedan obtenerse como perturbaciones de los eigenestados sin interacción, por ejemplo, el estado base sería obtenido del vacío perturbativo $|n_b = n_f = 0\rangle$. Igualmente, de los resultados de la sección anterior, puede esperarse que, para valores mayores que un V_c , el cruzamiento de los estados aumente y el estado base no sea mas un estado perturbado de $|n_b = n_f = 0\rangle$, sino un estado colectivo con condensación tanto fermiónica como bosónica. Con la intención de confirmar las expectativas anteriores, se introducen estados coherentes fermiónicos y bosónicos [43]:

$$\begin{aligned} |z\rangle &= |z_f\rangle |z_b\rangle, \\ |z_f\rangle &= \frac{1}{(1 + |z_f|^2)^\Omega} e^{z_f S_+} |0\rangle_f, \\ |z_b\rangle &= e^{-\frac{z_b S_-}{\omega_b}} e^{z_b b^\dagger} |0\rangle_b, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde $|0\rangle_f$ y $|0\rangle_b$ son, respectivamente, los estados sin excitaciones bifermiónicas y bosónicas. La potencia Ω en el factor de normalización fermiónico indica que el estado coherente está definido para la irrep $\mathcal{J} = \Omega$ de $SU_{\mathcal{J}}(2)$. Los estados anteriores, usados a modo de funciones de prueba, permiten obtener la energía y las características del estado base como función de la constante de acoplamiento.

El valor de expectación del Hamiltoniano (2.15) en los estados coherentes anteriores es [44]:

$$\begin{aligned} \langle z | \mathbf{H}_{(0,0,0)} | z \rangle &= 4\Omega\omega_f \frac{\rho_f^2}{(1 + \rho_f^2)} + \omega_b \rho_b^2 \\ &+ \frac{4\Omega V_1 \rho_f^2}{(1 + \rho_f^2)^2} [(2\Omega - 1) \cos(2\phi_f) + 2\Omega + \rho_f^2] 2\rho_b \cos(\phi_b), \end{aligned} \quad (2.21)$$

con $z_f = \rho_f e^{i\phi_f}$ y $z_b = \rho_b e^{i\phi_b}$. Minimizando el valor de expectación anterior, se obtienen las siguientes condiciones para las fases ϕ_b y ϕ_f :

$$\begin{aligned} \cos(\phi_b \min) &= -1, \\ \cos(2\phi_f \min) &= 1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

y para ρ_b :

$$\rho_b \min = \left(\frac{4\Omega V_1 \rho_f^2}{\omega_b (1 + \rho_f^2)^2} \right) [4\Omega - 1 + \rho_f^2]. \quad (2.23)$$

Substituyendo estas condiciones en la ec.(2.21), se obtienen las curvas de la figura 2.3, que muestran el valor de expectación del Hamiltoniano como función de ρ_f para diferentes valores de V_1 .

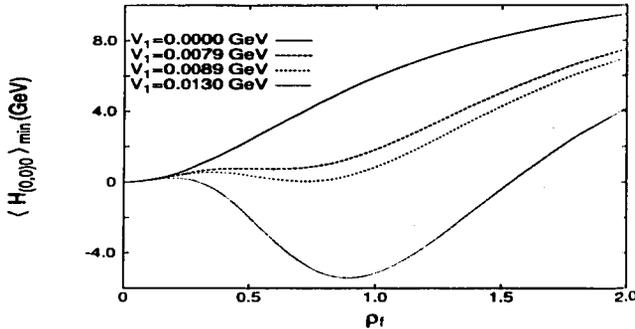


Figura 2.3: Curvas de energía del Hamiltoniano (2.15) en función del parámetro ρ_f de los estados coherentes. Obsérvese la aparición de un mínimo global en $\rho_f \neq 0$ para valores de $V_1 > 0.0089$ GeV. El valor de ρ_f que minimiza la energía presenta una discontinuidad en $V_c = 0.0089$ GeV. Esta indicación de una transición de fase de primer orden, es confirmada por el análisis $\Omega \rightarrow \infty$ realizado con la diagonalización numérica del Hamiltoniano en el apéndice B.1. La continuidad del valor de expectación del número de pares fermiónicos en el estado base [que es una función monótona creciente de ρ_f , ver ec.(2.24)], obtenida con la diagonalización numérica del Hamiltoniano (fig.2.7), es consecuencia del número finito de grados de libertad considerados ($\Omega = 9$).

Se observa que, para valores de V_1 menores que $V_c \approx 0.0089$ GeV, el mínimo global es $\rho_f \min = 0$, el cual corresponde al estado coherente $|z_f = 0\rangle \otimes |z_b = 0\rangle = |0\rangle_f \otimes |0\rangle_b$. A partir de un cierto valor de V_1 aparece un mínimo local en $\rho_f \neq 0$, que llega a ser global para V_1 mayores que V_c . Los estados con ρ_f [y por tanto $\rho_b \min$, ver ec.(2.23)] diferentes de cero tienen valores de expectación $\langle \hat{n}_f \rangle_z$ y $\langle \hat{n}_b \rangle_z$ diferentes de cero que crecen monótonamente con ρ_f :

$$\begin{aligned} \langle z_f; z_b | \hat{n}_b | z_f z_b \rangle_{\min} &= \rho_b^2 \min, \\ \langle z_f; z_b | \hat{n}_f | z_f z_b \rangle_{\min} &= \frac{2\Omega\rho_f^2}{(1 + \rho_f^2)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como se esperaba, al igual que con el Hamiltoniano (2.16), el sistema pasa de una fase perturbativa a una condensada. A partir de $V_1 = V_c$, $\rho_f \min$ crece monótonamente con V_1 y tiende a 1 en el límite $V_1 \rightarrow \infty$, por lo tanto, los condensados fermiónico y bosónico son, también, funciones monótonas crecientes de V_1 ; sin embargo, mientras que el valor de expectación del número de bosones crece ilimitadamente con V_1 [ecs. (2.24) y (2.23)], el condensado fermiónico tiende a Ω en el límite $V_1 \rightarrow \infty$. Este comportamiento es el esperado de acuerdo al Principio de exclusión de Pauli.

Lo anterior es un ejemplo de una transición de fase cuántica [45], en la que V_1 funge como el parámetro de control y los valores de expectación $\langle n_f \rangle$ y $\langle n_b \rangle$ como los parámetros de orden. La discontinuidad del valor de ρ_f que minimiza la energía (fig. 2.3), sugiere una transición de fase de primer orden, el análisis realizado en el apéndice B.1 para el límite $\Omega \rightarrow \infty$ confirma el resultado anterior. La continuidad obtenida con la diagonalización numérica del Hamiltoniano (fig.2.7) es consecuencia, simplemente, del número finito de grados de libertad considerados ($\Omega = 9$).

Dado que el valor de expectación de n_b es cero para $V_1 < V_c$ y crece monótonamente con V_1 a partir de $V_1 = V_c$ desde $\langle n_b \rangle \approx 2.5$, es de esperar que, para valores de V_1 no mucho mayores que V_c , los primeros niveles de energía sean insensibles a las configuraciones con un número grande de excitaciones bosónicas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

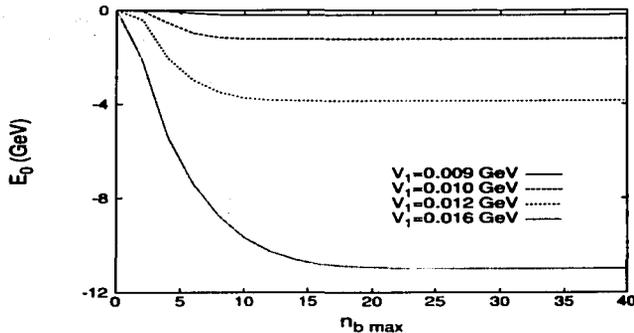


Figura 2.4: Resultados de la diagonalización numérica. Energía del estado base como función de $n_{b\max}$ para diferentes valores de V_1 .

Siguiendo la idea anterior, se introduce el corte $n_{b\max}$ para el número máximo de excitaciones bosónicas consideradas en la matriz Hamiltoniana, este corte produce matrices finitas que pueden ser diagonalizadas numéricamente. Al igual que en el caso del Hamiltoniano (2.16), el Hamiltoniano (2.15) conserva paridad, es decir, la diagonalización puede efectuarse independientemente entre los estados con un número par de excitaciones bifermiónicas y los estados con un número impar. Los subespacios en los que se diagonaliza el Hamiltoniano son:

$$|\mathcal{J} = \Omega n_f\rangle \otimes |n_b\rangle \equiv |\mathcal{J} = \Omega n_f; n_b\rangle, \quad (2.25)$$

con $n_f = 0, 2, 4, \dots, 2\Omega$ para la paridad positiva y $n_f = 1, 3, 5, \dots, 2\Omega - 1$ para la paridad negativa, en ambos casos $n_b = 0, 1, 2, \dots, n_{b\max}$.

Los elementos de matriz diferentes de cero del Hamiltoniano (2.15) son:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J} n_f; n_b | 2\omega_f(S_0 + \Omega) | \mathcal{J} n_f; n_b \rangle &= 2\omega_f(n_f - \mathcal{J} + \Omega) \\ \langle \mathcal{J} n_f; n_b | \omega_b b^\dagger b | \mathcal{J} n_f; n_b \rangle &= \omega_b n_b \\ \langle \mathcal{J} n_f + 2; n_b - 1 | S_+^2 b | \mathcal{J} n_f; n_b \rangle &= \sqrt{(n_f + 1)(n_f + 2)} \sqrt{(2\mathcal{J} - n_f)(2\mathcal{J} - (n_f + 1))} \sqrt{n_b} \\ \langle \mathcal{J} n_f - 2; n_b - 1 | S_-^2 b | \mathcal{J} n_f; n_b \rangle &= \sqrt{(n_f)(n_f - 1)} \sqrt{(2\mathcal{J} - (n_f - 1))(2\mathcal{J} - (n_f - 2))} \sqrt{n_b} \\ \langle \mathcal{J} n_f; n_b - 1 | S_+ S_- b | \mathcal{J} n_f; n_b \rangle &= n_f (2\mathcal{J} - (n_f - 1)) \sqrt{n_b} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Con el programa *ham00.f* (apéndice E.1.1) se efectúa la diagonalización numérica del Hamiltoniano, los resultados son presentados a continuación.

En la figura 2.4 se muestra la energía del estado base como función del corte $n_{b\max}$ para diferentes valores de V_1 .

Como puede observarse, a partir de un valor relativamente pequeño de $n_{b\max}$, la energía del estado base converge a su valor asintótico, el valor de $n_{b\max}$ para el que se alcanza la convergencia aumenta con V_1 lo que es consistente con el resultado obtenido con los estados coherentes, es decir, con el aumento del condensado bosónico al aumentar la constante de interacción. En la figura 2.5 se muestra la energía del estado base como función de V_1 usando la rutina de diagonalización y el valor $n_{b\max} = 40$, en la misma figura se muestra la estimación para esta energía usando estados coherentes [ec.(2.21)].

La estimación de la energía del estado base obtenida con los estados coherentes coincide con los resultados de la diagonalización numérica. De esta manera, los estados coherentes proveen de otro

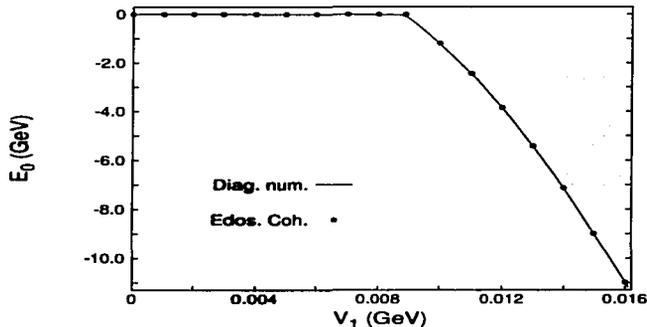


Figura 2.5: Energía del estado base como función de V_1 utilizando el valor $n_{bmax} = 40$ en la rutina de diagonalización (línea). Los puntos son la estimación a la misma energía usando estados coherentes. Obsérvese la súbita disminución de la energía a partir de $V_1 = 0.0089$ GeV.

criterio para establecer si el corte n_{bmax} es suficientemente grande para alcanzar la convergencia de los resultados de la diagonalización numérica. De las figuras 2.4 y 2.5, se concluye que el corte $n_{bmax} = 40$ es suficiente para diagonalizar numéricamente el Hamiltoniano (2.15) en el rango $V_1 \leq 0.016$ GeV¹.

2.3.1. De la fase perturbativa a la fase condensada

Usando el valor $n_{bmax} = 40$ en la rutina de diagonalización, se calcula el espectro del Hamiltoniano (2.15). En la figura 2.6 se muestra el espectro de los estados de paridad positiva y negativa como función de la constante de acoplamiento V_1 . La energía de los estados se mide respecto a la energía del estado base para cada valor de V_1 .

Como se anticipó con el análisis de los estados coherentes, el sistema transita de una fase perturbativa (normal) a una fase condensada (deformada) en $V_1 \approx 0.0089$ GeV. A diferencia del espectro del Hamiltoniano (2.16) (fig.2.2), el espectro no es denso en la fase condensada y, por el contrario, presenta una tendencia adecuada para la descripción del espectro mesónico experimental, en particular, por la aparición de un estado de paridad negativa degenerado con el vacío, que anticipa la aparición del π -octete en la versión más general del modelo.

Para valores de $V_1 \gg V_c$, el espectro se reduce al de excitaciones igualmente espaciadas por una energía de 1.6 GeV, que corresponde a la masa ω_b del glueball 0^{++} . Estos niveles de energía están doblemente degenerados con estados de paridad positiva y negativa. Lo anterior puede observarse en la figura 2.6 para los dos primeros estados excitados de cada paridad. El porqué de estas características en el espectro será aclarado en la sección 2.4, al estudiar el caso de masas fermiónicas $\omega_f = 0$.

La figura 2.7 muestra la diferencia entre el valor de expectación de n_b y n_f (el número de excitaciones bosónicas menos el número de pares cuark-anticuark) en el estado base del sistema, como función de la constante de acoplamiento V_1 .

Para la fase normal o perturbativa ($V_1 < V_c$), el estado base contiene un número muy pequeño de excitaciones fermiónicas y bosónicas. Para valores 0.015 GeV $> V_1 > V_c \approx 0.0089$ GeV, el estado base presenta un condensado predominantemente fermiónico, mientras que, para valores $V_1 > 0.015$ GeV el condensado es dominado por las excitaciones bosónicas. Este resultado ya fue adelantado por el análisis de los estados coherentes y es explicable por el número limitado de pares fermiónicos que es posible excitar, de acuerdo al Principio de exclusión de Pauli. El ya mencionado espaciamiento regular de los niveles de energía, es un reflejo del dominio de las excitaciones bosónicas para valores $V_1 \gg V_c$.

¹ El Hamiltoniano (2.15) es invariante ante un cambio en el signo de V_1 , como puede verse en la ec.(2.21), en donde un cambio en el signo de V_1 puede compensarse por un cambio de π en la fase ϕ_b .

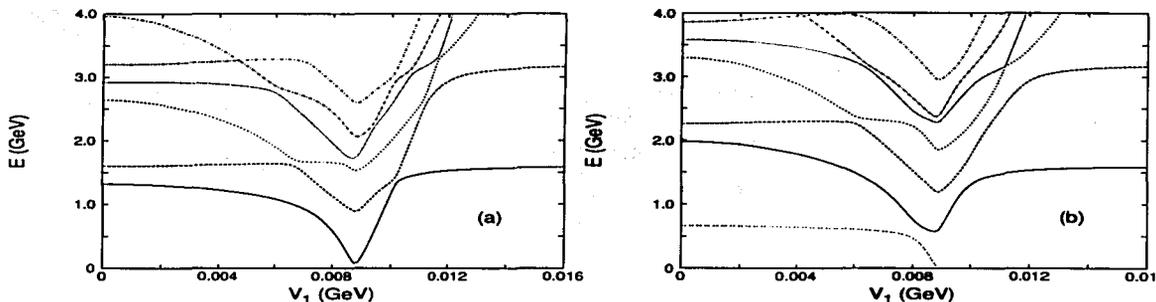


Figura 2.6: Espectro del Hamiltoniano (2.15) en función de V_1 para los estados de paridad positiva (a) y negativa (b). Las energías se miden respecto a la energía del estado base para cada valor de V_1 . La transición a la fase condensada en $V_c = 0.0089$ GeV, viene acompañada por la aparición de un estado de paridad negativa degenerado con el vacío. Obsérvese la degeneración y espaciado regular de los niveles en el lado derecho de las figuras ($V_1 \gtrsim V_c$).

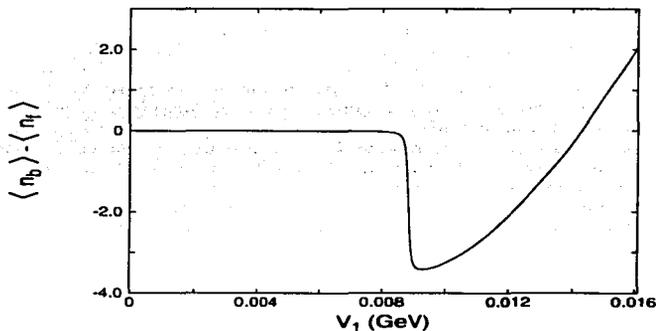


Figura 2.7: Diferencia de los valores de expectación del número de pares fermiónicos y bosónicos en el estado base como función de V_1 . Valores negativos implican un dominio fermiónico ($V_1 \lesssim V_c$), para $V_1 \gtrsim V_c$ el estado base es dominado por las excitaciones bosónicas.

TESIS CON
 FALTA DE ORIGEN

Las observaciones anteriores serán importantes para ajustar el espectro de la versión más general del modelo al espectro mesónico experimental. Este ajuste deberá caer en la región cercana a la transición ya que, en ésta, la escala de energías de los primeros estados excitados es igual a la del espectro experimental, menor a la escala de 1.6 GeV que la masa del glueball 0^{++} impone en la región dominada por las excitaciones gluónicas en $V_1 \gg V_c$. De este modo, los estados mesónicos del modelo serán estados con un contenido fermiónico mayor que el gluónico, como corresponde a la región $V_1 \gtrsim V_c$.

2.3.2. Estados bariónicos

Los estados bariónicos se componen de 3 cuarks de valencia ($n_{\text{quark}} = 3, n_{\text{antiquark}} = 0$) y los antibariónicos de 3 anticuarks de valencia ($n_{\text{quark}} = 0, n_{\text{antiquark}} = 3$), en ambos casos $\mathcal{J} = \Omega - \frac{3}{2}$ y el número máximo de excitaciones cuark-anticuark se reduce de $n_f = 2\Omega$ a $n_f = 2\Omega - 3$. La diagonalización del Hamiltoniano se realiza igual que antes, salvo por el cambio de $\mathcal{J} = \Omega$ a $\mathcal{J} = \Omega - \frac{3}{2}$ que reduce el tamaño de las matrices a diagonalizar. El comportamiento cualitativo del espectro bariónico, medido respecto al estado base de $\mathcal{J} = \Omega - \frac{3}{2}$, es idéntico al caso mesónico, con la diferencia de que la transición a la fase deformada se recorre a un valor de V_1 mayor ($V_{cBar} \approx 0.011$ GeV). Las masas físicas de los estados bariónicos deben, sin embargo, referirse al estado base del sistema total, es decir, al estado base de $\mathcal{J} = \Omega$. Este espectro se muestra en la figura 2.8.

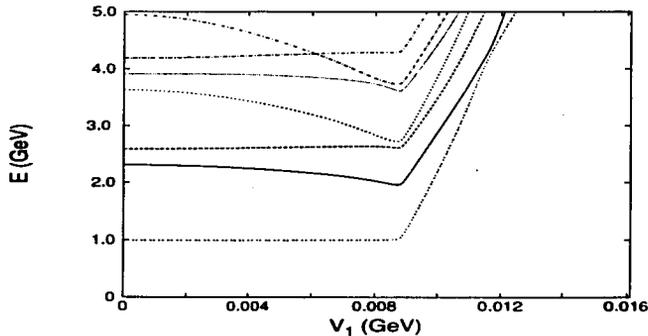


Figura 2.8: Masas bariónicas en función de V_1 . La energía de los estados se mide respecto al estado base global para cada valor de V_1 . El aumento en la energía de los estados se debe a la disminución de la energía del estado base (fig 2.5). El cruzamiento de los primeros dos estados en $V_1 \approx 0.011$ GeV señala la transición a la fase consensada bariónica.

Para $V_1 = 0$ el primer estado consiste de los 3 cuarks de valencia con masa $3\omega_f = 1.0$ GeV, el segundo es el anterior más dos pares cuark-anticuark $2\omega_f = 2.3$ GeV, el tercero consiste de los 3 cuarks de valencia más un glueball $3\omega_f + \omega_b = 2.6$ GeV y así sucesivamente.

El espectro no se modifica considerablemente hasta llegar a $V_1 \approx 0.0089$ GeV, que corresponde a la transición del sector mesónico. A partir de ese punto, la energía del estado base decrece rápidamente (fig.2.5), por ello, la energía de los estados bariónicos, que se mide respecto a ésta, crece también rápidamente. En $V_1 \approx 0.0089$ GeV los estados bariónicos aún no alcanzan la fase deformada, lo que puede verse en la figura 2.9 que muestra el contenido de cuarks y gluones del primer estado bariónico como función de V_1 .

Para valores menores que $V_{cBar} \approx 0.011$ GeV, el contenido gluónico es prácticamente nulo y el fermiónico proviene únicamente de los 3 cuarks de valencia. Para valores mayores que V_{cBar} , la situación cambia y los estados bariónicos presentan un contenido de pares cuark-anticuark y de excitaciones gluónicas, las primeras dominando sobre las segundas. La transición de los bariones a la fase deformada puede apreciarse en su espectro por un cruzamiento de los estados en $V_1 \approx 0.011$ GeV. Sin embargo, debido a que la energía del estado base de $\mathcal{J} = \Omega - \frac{3}{2}$ decrece más lentamente que la de $\mathcal{J} = \Omega$, la energía

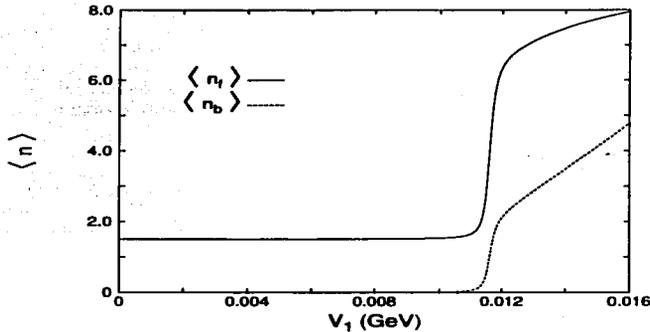


Figura 2.9: Contenido fermiónico y gluónico del primer estado bariónico en función de V_1 . Para $V_1 < 0.011$ GeV el número de pares de fermiones ($n_{\text{total}}/2 + n_f$) es 3/2 y el número de bosones es cero. A partir de $V_1 = 0.011$ GeV el número de fermiones y bosones aumenta. En el rango mostrado, el condensado es dominado por los fermiones, sin embargo, la tendencia es igual al caso mesónico: el número de pares de fermiones tiende al valor asintótico $\Omega = 9$, mientras que, el número de bosones aumenta ilimitadamente.

de los estados bariónicos continúa creciendo a pesar de haber alcanzado la fase deformada. Para valores de V_1 mayores que $V_c \approx 0.0089$ GeV, las masas bariónicas resultan muy altas. Esta sobreestimación de las masas bariónicas en el modelo, proviene del hecho de que los cuarks y anticuarks de valencia actúan como *espectadores*, es decir, el Hamiltoniano no contiene términos de interacción que involucren a los cuarks y anticuarks de valencia. Otro hecho que indica la necesidad de introducir nuevos términos de interacción para los bariones, proviene del contenido de cuarks y gluones en los estados bariónicos. Como se mencionó, el espectro mesónico experimental tiene una escala similar al de nuestro modelo para valores de V_1 ligeramente mayores que V_c , pero menores que $V_{cB\bar{a}r}$; en esta región los mesones son estados complicados en términos de cuarks, anticuarks y gluones, mientras que, los bariones todavía tienen una estructura simple de estados puros con 3 cuarks de valencia, lo cual no está de acuerdo con los resultados experimentales [46], que indican una contribución del *mar* de cuarks y gluones en los estados bariónicos. La inclusión de términos de interacción que acoplen a los cuarks de valencia con las excitaciones gluónicas producirá bariones con una contribución del *mar* de cuarks y gluones, además de una disminución de sus masas a energías consistentes con los resultados experimentales. En este trabajo se dejan fuera estos términos, queda como trabajo futuro el estudio del modelo con su inclusión [34].

2.4. Fermiones sin masa

En esta sección se presenta otra versión simplificada del Hamiltoniano (2.15) que consiste en hacer $\omega_f = 0$. En la fase deformada del Hamiltoniano (2.15) con $\omega_f \neq 0$, el término de interacción domina sobre el término libre, de aquí que el caso $\omega_f = 0$ provea de un escenario para estudiar la fase deformada con un Hamiltoniano que acepta una diagonalización analítica, excepto por la diagonalización numérica de una sola matriz finita de dimensión $2\Omega + 1$.

En esta sección se estudia, también, el efecto de introducir términos de interacción que fueron excluidos en la discusión del capítulo 1. Se mostrará que los efectos del término $C\bar{C}$ [ec.(1.27)] pueden modelarse por una redefinición de las constantes de acoplamiento de los otros términos. Se verá, como se anticipó en el capítulo 1, que es necesario introducir el término de dispersión S_+S_- y que es suficiente fijar a 2 el coeficiente G'_S [ver ec.(1.27)], para obtener un espectro con un estado de paridad negativa cuasidegenerado con el estado base.

Los Hamiltonianos que se estudian en esta sección son de la forma:

$$H = \omega_b b^\dagger b + V_1 F(b + b^\dagger), \quad (2.27)$$

donde F es un operador hermítico en el espacio fermiónico. El caso:

$$F = (S_+^2 + S_-^2 + 2S_+S_-), \quad (2.28)$$

corresponde al Hamiltoniano (2.15) de la sección anterior con la masa fermiónica igual a cero. La diagonalización del Hamiltoniano (2.27) sigue las mismas líneas generales independientemente de la forma de F .

Los operadores:

$$\begin{aligned} B &= b + \frac{V_1}{\omega_b} F, \\ B^\dagger &= b^\dagger + \frac{V_1}{\omega_b} F, \end{aligned} \quad (2.29)$$

que satisfacen el álgebra

$$[B, B^\dagger] = 1, \quad (2.30)$$

permiten reescribir H [ec.(2.27)]:

$$H = \omega_b B^\dagger B - \frac{V_1^2}{\omega_b} F^2. \quad (2.31)$$

Para diagonalizar el Hamiltoniano anterior, se definen los estados $|0; i\rangle$ a través de la condición:

$$B|0; i\rangle = 0. \quad (2.32)$$

Estos estados son de la forma:

$$|0; i\rangle = \left| z = -\frac{V_1 F_i}{\omega_b} \right\rangle_b \Big| F_i \Big\rangle_f, \quad (2.33)$$

con $|z\rangle_b$ un estado coherente bosónico (2.20) ($b|z\rangle_b = z|z\rangle_b$) y $|F_i\rangle_f$ un eigenestado del operador F ($F|F_i\rangle_f = F_i|F_i\rangle_f$). El índice i corre de 1 a la dimensión del subespacio fermiónico ($2\Omega + 1$).

Los estados (2.33) son eigenestados de H :

$$H|0; i\rangle = -\frac{(V_1 F_i)^2}{\omega_b} |0; i\rangle. \quad (2.34)$$

Si se aplica el operador B^\dagger a los estados $|0; i\rangle$, se obtiene el resto de los eigenestados de H :

$$|n; i\rangle = \frac{(B^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0; i\rangle. \quad (2.35)$$

Las eigenenergías de los estados anteriores son:

$$E_{ni} = \omega_b n - \frac{(V_1 F_i)^2}{\omega_b}, \quad (2.36)$$

con $n = 0, 1, \dots$

La tarea se reduce, entonces, a encontrar los eigenvalores del operador de dimensión finita F . Si, como en el caso de (2.28), F conserva paridad, se tiene que diagonalizar una matriz de dimensión $\Omega + 1$ para la paridad positiva y otra de Ω para la paridad negativa.

El espectro (2.36) como función de V_1 para el operador F de la ec.(2.28), es mostrado en la figura 2.10. A diferencia de las gráficas de espectros de la sección anterior, las energías no se miden respecto al estado base de cada V_1 .

Independientemente de la forma de F , el espectro (2.36) se divide en bandas etiquetadas por el entero n y consiste, como función de V_1 , de parábolas invertidas con el vértice en la posición $\omega_b n$ y curvatura dada por los eigenvalores de F (F^2/ω_b). Eigenvalores E_{ni} con un F_i mayor decrecen, como función de V_1 , más rápido que los eigenvalores E_{ni} con un F_i menor. Las degeneraciones en el espectro F_i se transmiten al espectro E_{ni} [ver ec.(2.36)]. Como puede verse en la fig.2.10, para valores pequeños de la constante de acoplamiento, las bandas están bien separadas unas de otras, pero eventualmente se mezclan conforme aumenta el valor de V_1 . La energía E_{ni} del estado con $n = 0$ y eigenvalor F_i máximo es, para todo valor de V_1 , el estado base del sistema. La energía E_{ni} del estado con $n = 1$ y eigenvalor F_i máximo, cruza, conforme aumenta V_1 , los eigenestados con $n = 0$ y F_i diferentes del máximo. Para

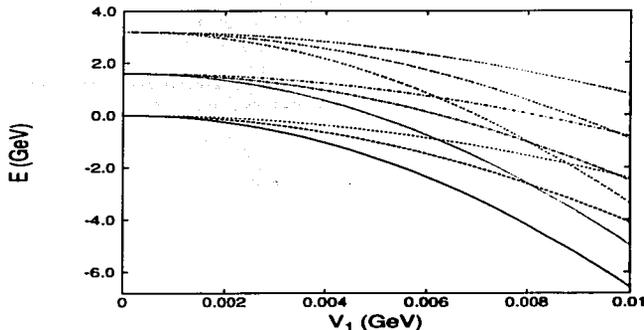


Figura 2.10: Espectro de H como función de V_1 usando el operador F de la ec.(2.28). Para valores pequeños de V_1 , el espectro consiste de bandas bien diferenciadas, caracterizadas por el entero n . Estas bandas se cruzan a partir de $V_1 \approx 0.006$ GeV. Obsérvese que, para $V_1 = 0.01$ GeV, el primer estado excitado pertenece a la segunda banda y tiene una energía, medida respecto al estado base, de $\omega_b = 1.6$ GeV.

Paridad positiva	Paridad negativa
324.26474	324.26474
256.302002	256.302002
196.356491	196.356491
144.440811	144.440811
100.581779	100.581779
64.8459702	64.8457336
37.487381	37.4102402
20.7156696	17.5088787
8.03982735	-1.71060491
-13.0346012	

Tabla 2.1: Espectro del operador $F = (S_+^2 + S_-^2 + 2S_+S_-)$ para los estados con un número par de excitaciones bifermiónicas (columna izquierda) y con un número impar (columna derecha).

valores suficientemente grandes de V_1 , este estado llega a ser el primer estado excitado, separado del estado base por una energía ω_b (fig.2.10). Si se continúa aumentando V_1 , la mezcla de las bandas es cada vez mayor y los estados base de cada banda (estados con F_1 máximo y diferentes n) llegan a ser los estados globales con menor energía, la diferencia de energía entre estos niveles es constante e igual a ω_b . Este es justamente el efecto observado en el espectro del Hamiltoniano (2.15) para valores de $V_1 \gg V_c$ (fig.2.6); para estos valores de la constante de acoplamiento, el efecto del término $\omega_f S_0$ es despreciable y los espectros de los Hamiltonianos con ω_f igual y diferente de cero, llegan a ser iguales: un espectro de oscilador armónico con frecuencia ω_b . Nótese que este comportamiento del espectro es independiente de la forma de F .

La degeneración del estado base con un estado de paridad negativa, encontrada en el espectro del Hamiltoniano (2.15), puede entenderse, con el presente caso, por el espectro del operador $F = (S_+^2 + S_-^2 + 2S_+S_-)$ (tabla 2.1).

El espectro de F presenta una cuasi degeneración entre estados con paridades negativa y positiva (que sería completa, si no se tomara la ordenación normal, es decir, si $F = S_+^2 + S_-^2 + S_+S_- + S_-S_+$). Como ya se mencionó, las degeneraciones del espectro F_1 son transmitidas al espectro E_{n_1} [c.(2.36)]. Conforme se aumenta el valor V_1 , el espectro del Hamiltoniano (2.15) (con $\omega_f \neq 0$) se acerca cada vez más al espectro E_{n_1} ($\omega_f = 0$). De esta manera se explica la aparición de estados degenerados con

paridad positiva y negativa en el espectro del Hamiltoniano (2.15). Los primeros estados en presentar esta degeneración son los de menor energía, pero al aumentar V_1 el efecto del término cinético disminuye y más estados presentarán la mencionada degeneración. Lo anterior puede verificarse en el espectro del Hamiltoniano (2.15) mostrado en la fig.2.6; para $V_1 \approx V_c$ el único estado degenerado es el estado base, mientras que, para $V_1 \gg V_c$ el número de estados degenerados aumenta.

Con el Hamiltoniano (2.27) se puede estudiar fácilmente el efecto de incluir los términos $C\bar{C}$ del capítulo 1, así como el efecto de variar el parámetro G'_S de la ec.(1.27). Los primeros son eliminados del modelo, mientras que, G'_S se tomó igual a 2. Como se verá a continuación y se adelantó en el capítulo 1, esto es suficiente para obtener un espectro con un estado de paridad negativa degenerado con el estado base. Supóngase, pues, un F de la forma:

$$F = (S_+^2 + S_-^2 + GS_+S_- + 2\hat{n}_q\hat{n}_q) , \quad (2.37)$$

donde el último término corresponde al término $C\bar{C}$ al restringir el Hamiltoniano general del capítulo 1 al canal de espín y sabor cero.

	Paridad Positiva	Paridad Negativa
$G = 0$	652.74	591.24
	531.78	474.43
$G = 2$	693.52	669.17
	637.05	600.79
$G = 5$	840.50	840.50
	777.01	776.76
$G = 2$ sin término	324.26	324.26
$2\hat{n}_q\hat{n}_q$	256.30	256.30

Tabla 2.2: Eigenvalores mayores del operador de la ec.(2.37) para diferentes valores del parámetro G .

En la tabla 2.2 se muestran los 2 eigenvalores máximos de F para las paridades positiva y negativa, en los casos $G = 0$, $G = 2$, $G = 5$ y $G = 2$ sin el término $2\hat{n}_q\hat{n}_q$. Como puede verse, $G = 0$ no presenta una degeneración entre los estados de paridad positiva y negativa; esto se traduce en el espectro del Hamiltoniano (2.15) con $\omega_f \neq 0$ y para valores $V_1 > V_c$, en estados de paridad negativa muy altos en energía. Esta es una de las razones por la que se introdujeron los términos de dispersión en el modelo, para obtener estados con paridad negativa de energía baja.

La aparición en el espectro del Hamiltoniano (2.15) ($\omega_f \neq 0$) de un estado de paridad negativa degenerado con el vacío para $V_1 > V_c$, queda garantizado por la degeneración del espectro de F entre estados con distintas paridades. En la tabla 2.2, esta degeneración ocurre para $G = 5$ y $G = 2$ sin el término $\hat{n}_q\hat{n}_q$. Puesto que esta característica es deseada en el espectro, se presentan dos opciones: mantener el término $\hat{n}_q\hat{n}_q$ fijando G a un valor grande (5 por ejemplo) o eliminar el término $\hat{n}_q\hat{n}_q$ y fijar el valor de G a 2. Esta última opción es la que se asume en el presente trabajo ya que incorpora la simetría de cruzamiento en los términos de interacción del Hamiltoniano (ver fig.1.3).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 3

Pares de sabor $(0, 0)$ acoplados a espín 0 y 1

En este capítulo se presenta una versión del Hamiltoniano (1.37) en la que se consideran, además de pares cuark-anticuark escalares, pares cuark-anticuark acoplados a espín 1; de acuerdo con la notación del capítulo 1, esto corresponde al caso $V_{1S} = 0$ y $V_{0S} \neq 0$:

$$\begin{aligned} H_{(0,0)1} &= \omega_f \sum_{cf\sigma} \left(a_{cf\sigma}^\dagger a^{cf\sigma} + d^\dagger{}^{cf\sigma} d_{cf\sigma} \right) + \omega_b b^\dagger b \\ &+ \sum_{S=0}^1 V_{0S} \left[\left(B_{(0,0)S}^\dagger \cdot B_{(0,0)S}^\dagger \right) + \left(B_{(0,0)S} \cdot B_{(0,0)S} \right) + 2 \left(B_{(0,0)S}^\dagger \cdot B_{(0,0)S} \right) \right] \left[b + b^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

El interés en el estudio de esta versión estriba en el hecho de que el cálculo de sus elementos de matriz es todavía posible, lo que permite obtener resultados exactos, junto con el hecho de que aparecen nuevas características respecto a la versión del capítulo anterior; entre éstas se pueden mencionar: un espacio de parámetros bi-dimensional (V_{00} y V_{01}) y subespacios fermiónicos invariantes que son irreps de un grupo $U(4)$. A diferencia del grupo $SU(2)$ del capítulo anterior, los miembros de una irrep de $U(4)$ requieren más de un índice para quedar completamente caracterizados. Estas nuevas propiedades enseñarán a manejar problemas que aparecen en la versión más general de nuestro modelo, en la que se consideran, adicionalmente, pares cuark-anticuark acoplados a sabor $(1, 1)$. De especial relevancia será el mapeo bosónico de los pares cuark-anticuark; el mapeo bosónico de la versión del capítulo anterior es muy sencillo, además, la uniparametrización de los miembros de una irrep dada de $SU(2)$ permite identificar fácilmente a los estados espurios del mapeo, en la presente versión, en cambio, ni el mapeo ni la identificación de los estados espurios resultan sencillos. Sin embargo, dado que la construcción explícita de una base y la diagonalización numérica es accesible, se podrá proponer un Hamiltoniano bosónico cuyos elementos de matriz sean fácilmente calculables que preserve las características básicas del Hamiltoniano fermiónico, a saber, una transición de fase cuántica a una fase deformada junto con la aparición de un estado de paridad negativa de energía baja. Se verá que no es necesario realizar el mapeo bosónico exacto y que, para la región de interés, basta con proponer un Hamiltoniano bosónico que simule el principio de exclusión de Pauli junto con reglas sencillas para eliminar los estados espurios, para el propósito de obtener el espectro de energías e información acerca del contenido de cuarks, anticuarks y gluones dentro de los estados.

El Hamiltoniano bosónico y las reglas para cortar el espacio de Hilbert obtenidas en este capítulo, serán útiles en el estudio de la versión más general, en la que se trabaja desde un inicio en un espacio bosónico mapeado.

El presente capítulo se ordena del siguiente modo, en la primera sección se mostrará la cadena que permite clasificar el espacio fermiónico utilizando el grupo de simetría ($U(4)$) del Hamiltoniano (3.1). En esta misma sección se construirá explícitamente la base fermiónica para la irrep que contiene tanto al estado base como a los primeros estados excitados. En la sección 2 se calcularán los elementos de matriz del Hamiltoniano usando la base de la sección 1. En la sección 3 se mostrarán los resultados

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

de la diagonalización numérica del Hamiltoniano, se verá que, al igual que en el caso del capítulo anterior, el sistema presenta una transición de fase cuántica a un fase deformada en la que se tiene un estado de paridad negativa muy bajo en energía. En la sección 4 se propondrá un modelo bosónico para el Hamiltoniano fermiónico, se construirá el espacio bosónico utilizando las bases de osciladores armónicos de 1 y 3 dimensiones, se diagonalizará numéricamente el Hamiltoniano bosónico propuesto y se compararán sus resultados con los del Hamiltoniano fermiónico de la sección 3; igualmente, se propondrán cortes sencillos para eliminar fácil y eficientemente la mayoría de los estados no físicos que resultan al utilizar bosones para representar pares fermiónicos cuark-anticuark.

3.1. Otra base completa: $U(4\Omega) \supset U(4) \otimes U(\Omega)$

Los pares cuark anticuark acoplados a sabor cero resultan de contraer el índice de sabor en las expresiones de la ec.(1.40):

$$\begin{aligned}
 C_{\sigma_1^1}^{\sigma_2^2} &\equiv B_{\sigma_1^1}^{\sigma_2^2} \equiv \sum_{\alpha f} c_{\alpha f \sigma_1^1}^\dagger c^{\alpha f \sigma_2^2} = \sum_{\alpha f} a_{\alpha f \sigma_1^1}^\dagger d^{\alpha f \sigma_2^2} \\
 C_{\sigma_1^2}^{\sigma_2^1} &\equiv B_{\sigma_1^2}^{\sigma_2^1} \equiv \sum_{\alpha f} c_{\alpha f \sigma_1^2}^\dagger c^{\alpha f \sigma_2^1} = \sum_{\alpha f} d_{\alpha f \sigma_1^2} a^{\alpha f \sigma_2^1} \\
 C_{\sigma_1^1}^{\sigma_2^1} &\equiv C_{\sigma_1^1}^{\sigma_2^1} \equiv \sum_{\alpha f} c_{\alpha f \sigma_1^1}^\dagger c^{\alpha f \sigma_2^1} = \sum_{\alpha f} a_{\alpha f \sigma_1^1}^\dagger a^{\alpha f \sigma_2^1} \\
 C_{\sigma_1^2}^{\sigma_2^2} &\equiv \tilde{C}_{\sigma_1^2}^{\sigma_2^2} \equiv \sum_{\alpha f} c_{\alpha f \sigma_1^2}^\dagger c^{\alpha f \sigma_2^2} = \sum_{\alpha f} d_{\alpha f \sigma_1^2}^\dagger d^{\alpha f \sigma_2^2} ,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Estos operadores satisfacen el álgebra de Lie del grupo $U(4)$:

$$[C_{\sigma_1^1 \sigma_1^1}^{\sigma_2^1 \sigma_2^1}, C_{\sigma_2^1 \sigma_2^1}^{\sigma_1^1 \sigma_1^1}] = \delta_{\sigma_2^1 \sigma_2^1}^{\sigma_1^1 \sigma_1^1} C_{\sigma_1^1 \sigma_1^1}^{\sigma_2^1 \sigma_2^1} - \delta_{\sigma_1^1 \sigma_1^1}^{\sigma_2^1 \sigma_2^1} C_{\sigma_2^1 \sigma_2^1}^{\sigma_1^1 \sigma_1^1} . \tag{3.3}$$

Puesto que el Hamiltoniano (3.1) está escrito en términos de los operadores de (3.2), las irreps de $U(4)$ forman subespacios invariantes ante él. De esta manera y dado que el Hamiltoniano es un operador tensorial de espín total cero, la cadena de grupos que conviene utilizar para la clasificación de los estados es:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} [1^N] \\ U(4\Omega) \supset \end{array} & \begin{array}{c} [\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_\Omega] \\ U(\Omega) \end{array} & \otimes & \begin{array}{c} [h_1 h_2 h_3 h_4] \\ U(4) \\ \cup \\ U_q(2) \oplus U_q(2) \\ \cup \\ SU_q(2) \oplus SU_q(2) \\ \cup \\ SU(2) \end{array} & & \begin{array}{c} h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = N \\ \\ \\ \\ \\ SM \end{array} \\
 & & & & & [f_1 f_2] \quad n_q = 2\Omega - \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 \\
 & & & & & s_q = \frac{h_1 - h_2}{2}
 \end{array} \tag{3.4}$$

La interpretación de los índices de esta cadena es similar a la del capítulo anterior, el número N es el número de partículas en la imagen de partículas con energías positiva y negativa. $[\tilde{h}]$ denota al diagrama de Young transpuesto de $[h_1 h_2 h_3 h_4]$. Los dos primeros valores (h_1 y h_2) cuentan el número de partículas, en el estado de mínimo peso de $U(4)$, que se encuentran en el nivel inferior con espín $1/2$ y $-1/2$ respectivamente; h_3 y h_4 cuentan lo propio para el nivel superior en el mismo estado de mínimo peso. El índice q es un índice de multiplicidad en la reducción $U(4)$ a $U_q(2) \oplus U_q(2)$. Los subgrupos de $U(4)$ se refieren, respectivamente, al sector de cuarks (nivel superior) y anticuarks (nivel inferior).

Una base completa de acuerdo a la cadena anterior es:

$$|N [h_1 h_2 h_3 h_4] q; n_q s_q; n_q s_q; SM \rangle , \tag{3.5}$$

que junto con la base para los glueballs,

$$|n_b \rangle = \frac{(b^\dagger)^{n_b}}{\sqrt{n_b!}} |0 \rangle , \tag{3.6}$$

forman el espacio de Hilbert del modelo:

$$| \rangle = | \rangle_f \otimes | \rangle_b \quad (3.7)$$

Para construir explícitamente la base fermiónica (3.5) se utilizan los estados de mínimo peso $|MP\rangle$, que son aquellos que cumplen con:

$$O|MP\rangle = 0$$

donde O es un operador de descenso. A diferencia de $SU(2)$, el grupo $U(4)$ tiene 6 operadores de descenso: los operadores B de (3.2) y los operadores $C_{-1/2}^{+1/2}$ y $\bar{C}_{1/2}^{-1/2}$.

El estado sin cuarks ni anticuarks es un estado de mínimo peso y corresponde, en el lenguaje de los 2 niveles, al estado con el nivel superior vacío y el inferior completamente lleno, es decir, el vacío perturbativo pertenece a la irrep $[\Omega\Omega 00]$. Esta irrep contiene, también, al estado base en el caso con interacción y a los primeros estados excitados, de esta manera, en lo que resta del presente capítulo, el interés se centrará en él.

Para construir explícitamente una base de la irrep $[\Omega\Omega 00]$, se eligen operadores con proyecciones de s_q y $s_{\bar{q}}$ máximas que no puedan ser obtenidos como productos de otros, estos operadores reciben el nombre de *Elementary Permissible Diagrams* (EPD) [47]. La primera elección de un operador de este tipo es:

$$B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger, \quad (3.8)$$

el cual es un operador tensorial de espín total $S = 1$. Este operador crea un cuark y un anticuark con proyección de espín $\frac{1}{2}$. Nótese que en la expresión anterior se ha bajado el segundo de los índices, de esta manera las propiedades de transformación del operador están indicadas directamente por sus índices (ver apéndice A.1 para la convención de índices co y contravariantes). Otro operador con proyecciones de s_q y $s_{\bar{q}}$ máximas es:

$$\Delta^\dagger = B_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger B_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^\dagger - B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger B_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^\dagger, \quad (3.9)$$

el cual es un operador con $s_q, s_{\bar{q}}$ (y también S) cero. Nótese que el operador cuadrático en B^\dagger acoplado a $s_q = s_{\bar{q}} = 1$ es simplemente el operador (3.8) elevado al cuadrado, es decir, no es un EPD. Los dos operadores anteriores son suficientes para construir los estados de la irrep $[\Omega\Omega 00]$ con proyecciones de s_q y $s_{\bar{q}}$ máximas:

$$|n_1 n_2\rangle = \mathcal{N}_{n_1 n_2} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1} \left(\Delta^\dagger \right)^{n_2} |0\rangle, \quad (3.10)$$

con $\mathcal{N}_{n_1 n_2}$ una constante de normalización (calculada en el apéndice C.1) y $|0\rangle$ el estado sin cuarks ni anticuarks. La relación de los estados anteriores con la base completa (3.5) es:

$$\begin{aligned} |n_1 n_2\rangle &= \left| N = 2\Omega, [\Omega\Omega 00], \rho = 1; n_q = n_1 + 2n_2, s_q = \frac{n_1}{2}; n_{\bar{q}} = n_q, s_{\bar{q}} = s_q; S = n_1, M = S \right\rangle \\ &\equiv \left| \Omega; n_q = n_1 + 2n_2, s_q = \frac{n_1}{2}, m_q = s_q; m_{\bar{q}} = s_q \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

En la definición de la última línea se han eliminado la multiplicidad ρ y el número y espín de los anticuarks debido a que, en esta irrep, se cumplen las relaciones $\rho = 1, n_{\bar{q}} = n_q$ y $s_{\bar{q}} = s_q$. Para obtener el resto de los miembros de la irrep, se aplican los operadores de descenso de $SU_q(2)$ ($S_{\bar{q}} \equiv C_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}$) y de $SU_q(2)$ ($S_q \equiv C_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$) al estado $|n_1 n_2\rangle$:

$$(S_{\bar{q}})^{k_1} (S_q)^{k_2} |n_1 n_2\rangle \propto \left| \Omega; n_q = n_1 + 2n_2, s_q = \frac{n_1}{2}, m_q = s_q - k_1; m_{\bar{q}} = s_q - k_2 \right\rangle \quad (3.12)$$

y se acoplan los espines s_q y $s_{\bar{q}}$ a espín total $S = 0, 1, \dots, 2s_q$:

$$\begin{aligned} \left| N = 2\Omega, [\Omega\Omega 00], \rho = 1; n_q, s_q; n_{\bar{q}} = n_q, s_{\bar{q}} = s_q; S, M \right\rangle &\equiv \\ &\equiv \left| \Omega; n_q, s_q; S, M \right\rangle = \\ &= \sum_{m_q m_{\bar{q}}} (s_q m_q, s_{\bar{q}} m_{\bar{q}} | S, M) \left| \Omega; n_q, s_q, m_q; m_{\bar{q}} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.13)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde $(s_q m_q, s_q m_q | SM)$ son los coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(2)$ y en la definición de la segunda línea se han obviado, igual que antes, el índice de multiplicidad ϱ y el número y espín de los anticuarks.

Los valores permitidos de n_q, s_q, S y M son fácilmente obtenidos de la expresión (3.10): tanto $\mathbf{B}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}$ como Δ^\dagger , crean UN cuark con proyección $\frac{1}{2}$, por lo tanto, debido a que el número máximo de cuarks de una proyección dada es Ω , se tiene que:

$$n_1 + n_2 \leq \Omega, \quad (3.14)$$

esta desigualdad, junto con las relaciones $s_q = \frac{n_q}{2}$ y $n_q = n_1 + 2n_2$, restringe los valores posibles de s_q y n_q . El espín total S resulta de acoplar s_q y $s_q = s_q$, entonces, para un valor dado de n_1 , se tiene que: $S = 0, 1, \dots, 2s_q$, es decir, $S = 0, 1, \dots, n_1$. La proyección M toma los valores $M = -S, -S + 1, \dots, S$.

Si se utilizan los elementos de matriz reducidos y el Teorema de Wigner [38], no es necesario trabajar explícitamente con toda la base completa para obtener los elementos de matriz del Hamiltoniano. Este es el tema de la siguiente sección.

3.2. Los elementos de matriz

Los elementos de matriz que se desean calcular son de la forma:

$$\left\langle \Omega; n'_q s'_q; SM \left| \left[\mathbf{B}_L^i \otimes \mathbf{B}_L^j \right]_0^{J=0} \right| \Omega; n_q s_q; SM \right\rangle \quad (3.15)$$

con $L = 0, 1$ y los índices latinos i, j denotan el adjunto (\dagger) para $i, j = 1$ y el operador mismo para $i, j = -1$. Los operadores \mathbf{B}_L son los operadores de la ec.(3.2), acoplados a espín L . Los paréntesis cuadrados implican acoplamientos de dos espines L a espín total $J = 0$. Utilizando el teorema de Wigner [48], se reescribe el elemento de matriz anterior:

$$(-1)^{S-M} \begin{pmatrix} S & 0 & S \\ -M & 0 & M \end{pmatrix} \sum_{s'_q S''} \left\{ \begin{matrix} L & L & 0 \\ S & S & S'' \end{matrix} \right\} (n'_q s'_q S || \mathbf{B}_L^i || n''_q s''_q S'') (n''_q s''_q S'' || \mathbf{B}_L^j || n_q s_q S), \quad (3.16)$$

con $n''_q = n_q + j$ y donde los primeros símbolos entre paréntesis redondos y corchetes son símbolos 3- j y 6- j [48, 49, 50] respectivamente. Los últimos factores son los elementos reducidos del grupo $SU(2)$ de espín total. Utilizando los valores de los símbolos 3- j y 6- j , la expresión anterior es:

$$\frac{(-1)^{S+L}}{(2S+1)\sqrt{2L+1}} \sum_{s''_q S''} (-1)^{S''} (n'_q s'_q S || \mathbf{B}_L^i || n''_q s''_q S'') (n''_q s''_q S'' || \mathbf{B}_L^j || n_q s_q S). \quad (3.17)$$

Basta calcular los siguientes elementos reducidos:

$$(n''_q s''_q S'' || \mathbf{B}_L^{\dagger} || n_q s_q S), \quad (3.18)$$

ya que el resto se obtienen de las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (n''_q s''_q S'' || \mathbf{B}_1 || n_q s_q S) &= (-1)^{S''-S} (n''_q s''_q S'' || \mathbf{B}_1^{\dagger} || n_q s_q S)^* \\ (n''_q s''_q S'' || \mathbf{B}_0 || n_q s_q S) &= (n''_q s''_q S'' || \mathbf{B}_0^{\dagger} || n_q s_q S)^*. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para calcular los elementos reducidos (3.18) se utiliza, de nuevo, el teorema de Wigner, el resultado es:

$$(n_q + 1 s''_q S'' || \mathbf{B}_L^{\dagger} || n_q s_q S) = \sqrt{(2S''+1)(2L+1)(2S+1)} \left\{ \begin{matrix} s''_q & s''_q & S'' \\ s_q & s_q & S \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & L \end{matrix} \right\} (n_q + 1 s''_q || \mathbf{B}^{\dagger} || n_q s_q), \quad (3.20)$$

donde las expresiones entre corchetes son 9- j símbolos y $(n_q + 1 s''_q || \mathbf{B}^{\dagger} || n_q s_q)$ son elementos reducidos en los grupos $SU_q(2)$ y $SU_q(2)$ (apéndice C.2), los cuales son calculados utilizando la base construida en la sección anterior.

Dado que B^\dagger es un objeto de espín $\frac{1}{2}$ en $SU_q(2)$ y $SU_q(2)$, los únicos elementos reducidos diferentes de cero son:

$$\left(n_q + 1 \ s_q \pm \frac{1}{2} \left\| B^\dagger \right\| n_q \ s_q \right) . \quad (3.21)$$

El caso $s_q'' = s_q + \frac{1}{2}$ se calcula aplicando el Teorema de Wigner al elemento de matriz siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \Omega; n_q + 1, s_q + \frac{1}{2}, m_q = s_q + \frac{1}{2}; m_q = s_q + \frac{1}{2} | B_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^\dagger | \Omega; n_q, s_q, m_q = s_q; m_q = s_q \rangle &= \\ \left(\begin{array}{c} s_q + \frac{1}{2} \\ -(s_q + \frac{1}{2}) \end{array} \right) \frac{1}{2} \frac{s_q}{s_q} \left(n_q + 1 \ s_q + \frac{1}{2} \left\| B^\dagger \right\| n_q \ s_q \right) &= \\ \frac{1}{2(s_q + 1)} \left(n_q + 1 \ s_q + \frac{1}{2} \left\| B^\dagger \right\| n_q \ s_q \right) , & \quad (3.22) \end{aligned}$$

el cual, por su parte, puede calcularse utilizando las expresiones de la sección anterior:

$$\begin{aligned} \langle \Omega; n_q + 1, s_q + \frac{1}{2}, m_q = s_q + \frac{1}{2}; m_q = s_q + \frac{1}{2} | B_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^\dagger | \Omega; n_q, s_q, m_q = s_q; m_q = s_q \rangle &= \\ \langle n_1 + 1 \ n_2 | B_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^\dagger | n_1 \ n_2 \rangle , & \quad (3.23) \end{aligned}$$

con $s_q = \frac{n_2}{2}$ y $n_q = n_1 + 2n_2$ [ver ec.(3.11)].

Explícitamente, en términos de los operadores de creación de (3.10), el elemento de matriz anterior es:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{n_1+1 \ n_2} \mathcal{N}_{n_1 \ n_2} \langle 0 | (\Delta)^{n_2} (B_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^\dagger)^{n_1+1} B_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^\dagger (B_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^\dagger)^{n_1} (\Delta^\dagger)^{n_2} | 0 \rangle &= \\ \langle n_1 + 1 \ n_2 | n_1 + 1 \ n_2 \rangle \frac{\mathcal{N}_{n_1 \ n_2}}{\mathcal{N}_{n_1+1 \ n_2}} , & \quad (3.24) \end{aligned}$$

usando este resultado en (3.22) se obtiene:

$$\left(n_q + 1 \ s_q + \frac{1}{2} \left\| B^\dagger \right\| n_q \ s_q \right) = 2(s_q + 1) \frac{\mathcal{N}_{n_1 \ n_2}}{\mathcal{N}_{n_1+1 \ n_2}} . \quad (3.25)$$

La constante de normalización $\mathcal{N}_{n_1 \ n_2}$ es calculada en el apéndice C.1, el resultado es:

$$(\mathcal{N}_{n_1 \ n_2})^2 = \frac{(n_1 + 1)!}{n_1! n_2! (n_1 + n_2 + 1)!} \frac{(\Omega - n_1 - n_2)! (\Omega - n_2 + 1)!}{\Omega! (\Omega + 1)!} , \quad (3.26)$$

sustituyendo en (3.25) y utilizando $n_q = n_1 + 2n_2$ y $s_q = \frac{n_2}{2}$, se obtiene finalmente:

$$\left(n_q + 1 \ s_q + \frac{1}{2} \left\| B^\dagger \right\| n_q \ s_q \right) = \sqrt{(2s_q + 1)(2s_q + 2)} \left(\frac{n_q}{2} + s_q + 2 \right) \left(\Omega - \frac{n_q}{2} - s_q \right) . \quad (3.27)$$

Para obtener el elemento reducido de matriz en el caso $s'' = s_q - \frac{1}{2}$, se aplica el teorema de Wigner al siguiente elemento:

$$\begin{aligned} \langle \Omega; n_q + 1, s_q - \frac{1}{2}, m_q = s_q - \frac{1}{2}; m_q = m_q | B_{-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^\dagger | \Omega; n_q, s_q, m_q = s_q; m_q = s_q \rangle &= \\ \left(\begin{array}{c} s_q - \frac{1}{2} \\ -(s_q - \frac{1}{2}) \end{array} \right) \frac{1}{2} \frac{s_q}{s_q} \left(n_q + 1 \ s_q - \frac{1}{2} \left\| B^\dagger \right\| n_q \ s_q \right) &= \\ \frac{1}{2(s_q + 1)} \left(n_q + 1 \ s_q - \frac{1}{2} \left\| B^\dagger \right\| n_q \ s_q \right) , & \quad (3.28) \end{aligned}$$

el cual puede calcularse directamente utilizando las reglas de conmutación de $U(4)$ [ec.(3.3)]:

$$\begin{aligned} \langle n_1 - 1 \ n_2 + 1 | B_{-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^\dagger | n_1 \ n_2 \rangle &= \\ - \frac{\mathcal{N}_{n_1 \ n_2}}{\mathcal{N}_{n_1-1 \ n_2+1}} \left(\frac{n_1}{n_1 + 1} \right) , & \quad (3.29) \end{aligned}$$

sustituyendo esta expresión en (3.28) y utilizando la ec.(3.26) para \mathcal{N}_{n_1, n_2} , se llega a:

$$\left(n_q + 1 \ s_q - \frac{1}{2} \left\| \mathbf{B}^{\dagger} \right\| n_q \ s_q \right) = -\sqrt{(2s_q + 1)(2s_q) \left(\frac{n_q}{2} - s_q + 1 \right) \left(\Omega - \frac{n_q}{2} + s_q + 1 \right)} \quad (3.30)$$

3.3. Resultados de la diagonalización numérica

Con los resultados anteriores se escribió un programa en FORTRAN (*ham10.f*, apéndice E.2.1) que calcula los elementos de matriz, construye la matriz Hamiltoniana y la diagonaliza numéricamente. Al igual que en el capítulo anterior se introduce un corte en el número de glueballs (n_{bmax}) para obtener matrices finitas. Debido a que el Hamiltoniano (3.1) conserva el momento angular total y la paridad, la diagonalización numérica del Hamiltoniano puede efectuarse independientemente para estados con espín total (S) fijo y número de excitaciones bifermiónicas (n_q) pares (paridad positiva) o impares (paridad negativa), es decir, la diagonalización del Hamiltoniano se hace independientemente en cada espacio

$$\left| \Omega; n_q s_q; SM \right\rangle \otimes \left| n_b \right\rangle, \quad (3.31)$$

con S y M fijos y donde n_q y s_q [de acuerdo a la restricción (3.14)] y n_b toman los valores:

$$\begin{aligned} n_1 &\equiv 2s_q = S_a, S_a + 2, \dots, (\Omega \text{ ó } \Omega - 1) \\ n_q &= n_1, n_1 + 2, \dots, 2\Omega - n_1 \\ n_b &= 0, 1, \dots, n_{bmax}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

con la variable S_a definida del siguiente modo: para la paridad positiva $S_a = S$ si S es par y $S_a = S + 1$ si S es impar, mientras que, para la paridad negativa $S_a = S$ si S es impar y $S_a = S + 1$ si S es par. Los resultados de la diagonalización numérica son mostrados a continuación.

En la figura 3.1 se grafica la energía estimada del estado base como función del corte n_{bmax} para diferentes valores de la constante de interacción $V_2 \equiv \sqrt{3}V_{01}$, en todas las curvas la constante de interacción del canal de espín 0 y sabor (0,0) ($V_1 \equiv V_{00}/6$) se fijó en cero. Al igual que en el caso del

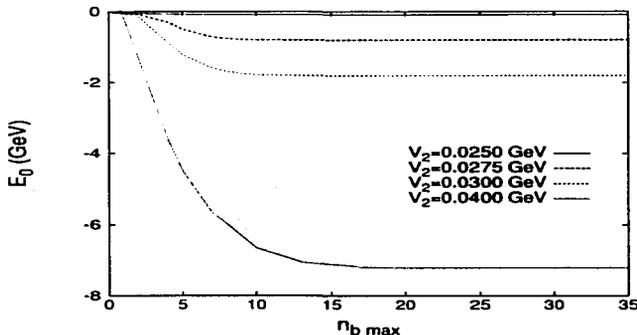


Figura 3.1: Resultados de la diagonalización numérica. Energía del estado base como función de n_{bmax} para diferentes valores de $V_2 \equiv \sqrt{3}V_{01}$, $V_1 \equiv V_{00}/6 = 0$.

capítulo 2, se observa una rápida convergencia de las curvas a su valor asintótico. El valor de n_{bmax} para el que se alcanza la convergencia aumenta con la constante de acoplamiento, lo cual (como se discutió en el capítulo 2) es una manifestación del aumento en el contenido bosónico del estado base para valores mayores de V_2 . El valor $V_2 = 0.025$ GeV corresponde, como se muestra más adelante, al valor V_{2c} que divide la fase perturbativa de una fase condensada (o deformada). En la fase perturbativa el valor de n_{bmax} que se requiere para obtener convergencia es menor que 5 y no aumenta hasta alcanzar

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

el valor crítico V_{2c} , a partir del cual aumenta monótonamente con V_2 . De la figura se observa que un valor $n_{bmax} = 30$ garantiza la independencia, respecto al corte, de los resultados de la diagonalización numérica en el rango $V_2 \leq 0.04$ GeV.

Una diferencia inmediata del Hamiltoniano del presente capítulo respecto al del anterior, es un espacio paramétrico (V_{00} - V_{01}) bi-dimensional. En el caso extremo $V_2 = 0$, se recuperan los resultados del capítulo 2. El otro caso extremo $V_{00} \equiv 6V_1 = 0$ [ver ec.(2.15)] es mostrado en las gráficas de la figura 3.2. En éstas se muestra el espectro del Hamiltoniano para los diferentes sectores de espín y paridad (S^P) como función de la constante de acoplamiento $V_2 \equiv \sqrt{3}V_{01}$. En todas las gráficas las energías se miden respecto a la energía del estado base del sector 0^+ (que es el estado base global).

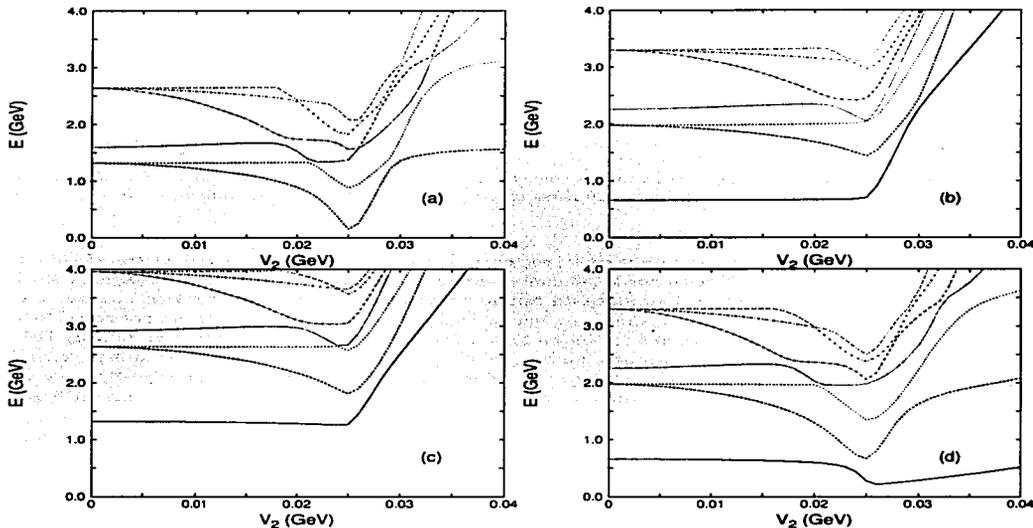


Figura 3.2: Espectro del Hamiltoniano (3.1) como función de $V_2 \equiv \sqrt{3}V_{01}$ con $V_1 \equiv V_{00}/6=0.0$ y $n_{bmax} = 30$. Sector $S^P = 0^+$ (a), 0^- (b), 1^+ (c) y 1^- (d). Las energías se miden respecto a la energía del estado base para cada valor de V_2 . Obsérvese la aparición de un estado 1^- de energía muy baja en $V_2 = V_c \approx 0.025$ GeV. Este valor divide la fase perturbativa ($V_2 < V_c$) de la fase condensada 1^- ($V_2 > V_c$).

El espectro del Hamiltoniano presenta un cambio brusco en sus características en $V_2 = V_{2c} \equiv 0.025$ GeV. Al igual que en el caso del capítulo 2, esto es reflejo del paso de una fase perturbativa a una fase condensada en la que los eigenestados son de naturaleza colectiva. En la figura 3.3 se muestra el valor de expectación del número de pares bifermiónicos y bosónicos en el estado base del sistema como función de V_2 , para $V_1 = 0.0$ GeV.

Como puede observarse, en V_{2c} los valores de expectación cambian, en un rango muy pequeño, de casi cero a un valor mayor. En el rango de V_2 mostrado el condensado del estado base es predominantemente fermiónico, aunque la tendencia de las curvas es igual que en el caso del capítulo 1: un contenido fermiónico que se satura y un contenido bosónico que crece indefinidamente. Para valores de V_2 mayores a los mostrados en la figura, el condensado pasa a ser predominantemente bosónico.

Una diferencia importante del caso $V_1 = 0$ respecto al caso $V_2 = 0$, puede apreciarse en las gráficas (b) y (d) de la figura 3.2: la transición a la fase condensada no viene acompañada de un estado 0^- degenerado con el estado base, por el contrario, a partir de V_{2c} las energías de los estados del sector 0^-

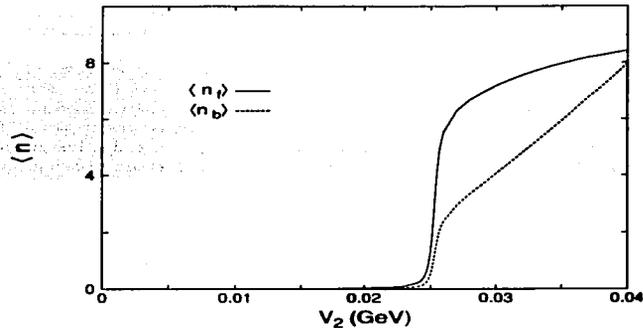


Figura 3.3: Valores de expectación del número de pares fermiónicos y de bosones en el estado base como función de V_2 . $V_1 = 0$ y $n_b, \text{max} = 30$. A partir del valor crítico $V_{2c} \approx 0.025$ GeV, el número de bosones y pares fermiónicos aumenta rápidamente. En el rango mostrado, el condensado es dominado por las excitaciones fermiónicas, sin embargo, el número de fermiones tiende a saturarse en $\langle n_f \rangle = 9$, mientras que, el número de bosones crece ilimitadamente.

aumentan rápidamente. El comportamiento del sector 0^- en el caso $V_2 = 0$ con $V_1 \neq 0$, es transferido en el presente ($V_1 = 0$ con $V_2 \neq 0$) al sector 1^- , el cual presenta un estado con energía muy baja [fig.3.2(d)]. La interacción del canal de espín 1 produce un estado de paridad negativa muy bajo en energía en el sector correspondiente. Obsérvese, sin embargo, que la energía de este estado, aunque menor respecto al resto de los estados, no alcanza valores tan bajos como la del estado 0^- en el caso $V_2 = 0$ (fig.2.6). Este comportamiento del espectro es el deseable para reproducir el octete piónico en la versión más general del modelo (capítulo 4); se puede anticipar que el valor de la constante de acoplamiento del canal de espín 0 y sabor (1,1) debe ser mayor, aunque similar, a su valor crítico para obtener un espectro que reproduzca el espectro experimental mesónico.

3.3.1. Transiciones de fase cuánticas

Hasta aquí se han identificado tres fases para el Hamiltoniano (3.1), a saber, una fase perturbativa, una fase condensada con un estado 0^- muy bajo en energía y otra fase condensada para el canal de espín 1. La pregunta es ahora ¿Cómo se modifican las transiciones para el caso en el que las dos constantes de acoplamiento son diferentes de cero? Para responder lo anterior se fijó una de las constantes de acoplamiento a un valor diferente de cero y se dejó variar la otra. El resultado es la figura 3.4, donde se muestran los espectros del sector 0^+ como función de V_1 y V_2 , respectivamente, para V_2 fijo menor y mayor que V_{2c} y para V_1 fijo menor y mayor que V_{1c} . En todas las gráficas la energía del primer estado excitado presenta un mínimo, lo que señala la ocurrencia de una transición de fase. En la primera gráfica, que corresponde a un valor fijo $V_2 < V_{2c}$, el mínimo se presenta para un valor de V_1 apenas menor que V_{1c} , es decir, el valor de V_1 para el cual el sistema pasa a la llamada fase condensada 0^- es apenas modificado para valores de $V_2 < V_{2c}$. Lo mismo ocurre en el caso de la gráfica (c), que corresponde a un V_1 fijo y menor que V_{1c} , el valor de V_2 para el cual ocurre la transición a la fase condensada 1^- es apenas menor que V_{2c} . La situación se modifica cuando la constante de acoplamiento que se fija es mayor que su valor crítico. En la gráfica (b) de la figura 3.4 ($V_2 = 0.029$ GeV), se observa que el valor de V_1 para el cual el sistema pasa del condensado 1^- al condensado 0^- aumenta desde $V_{1c} = 0.0088$ GeV hasta un valor $V_1 \sim 0.0100$ GeV. Se verifica que la transición contraria, del condensado 0^- al condensado 1^- , ocurre en el mismo punto, en la gráfica (d) de la misma figura se fijó $V_1 = 0.0100 > V_{1c}$ y se observa que el valor de V_2 para el cual ocurre la transición aumenta de $V_{2c} \equiv 0.025$ GeV a $V_2 = 0.029$ GeV. En la figura 3.5 se muestra el espectro de los sectores 0^- y 1^- para este último caso. En el rango $V_2 < 0.029$ GeV se tiene un estado 0^- de energía prácticamente nula que indica que el sistema se encuentra en el condensado 0^- , a partir de $V_2 = 0.029$ GeV la situación cambia y se observa una rápida disminución en

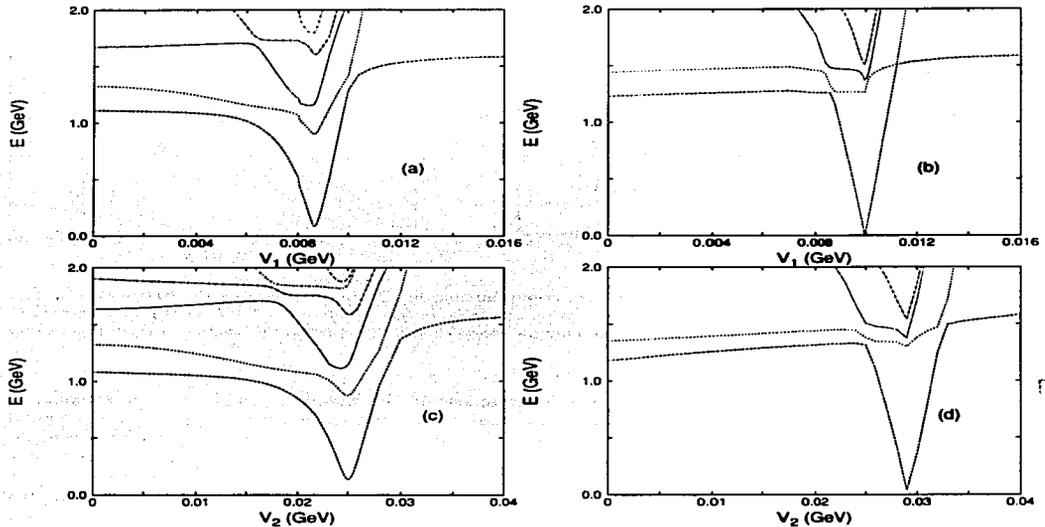


Figura 3.4: Espectro del sector 0^+ como función de V_1 para $V_2 = 0.015 < V_{2c}$ (a) y $V_2 = 0.029 > V_{2c}$ (b). El mismo espectro como función de V_1 para $V_1 = 0.006 < V_{1c}$ (c) y $V_1 = 0.010 > V_{1c}$ (d). Obsérvese el corrimiento de los valores críticos (señalados por el mínimo del primer estado excitado) cuando el valor de la otra constante de acoplamiento es mayor que su respectivo valor crítico ($V_{1c} = 0.0089$ GeV y $V_{2c} = 0.025$ GeV). La energía de los estados se mide respecto a la energía del estado base para cada valor de V_2 y V_1 .

la energía del primer estado 1^- junto con un rápido aumento de la energía del estado 0^- , lo cual es una señal de que el sistema ha pasado al condensado 1^- .

En la figura 3.6 se muestran las curvas de transición en el espacio de parámetros V_1 - V_2 . La región marcada con la letra "A" corresponde a la fase perturbativa, la marcada con "B" a la fase condensada 1^- y la región "C" a la fase condensada con un estado 0^- cuasi degenerado con el estado base. La flecha indica la ruta de la transición correspondiente a las gráficas de la figura 3.5 y a la gráfica (d) de la fig.3.4.

3.4. Un modelo bosónico para el Hamiltoniano fermiónico

En lo que resta del capítulo se discutirá acerca de la posibilidad de reproducir los resultados del Hamiltoniano (3.1) utilizando un Hamiltoniano definido en un espacio bosónico. Es bien conocido que el álgebra de los grupo unitarios puede reproducirse por funciones de operadores bosónicos [36], sin embargo, esta opción conduce a un problema que es casi tan complicado como el problema inicial. Lo que se desea es, por el contrario, un Hamiltoniano bosónico que sea mucho más simple que el Hamiltoniano fermiónico original, pero que preserve sus características básicas, es decir, una fase perturbativa para valores pequeños de las constantes de acoplamiento y fases condensadas con estados de paridad negativa muy bajos en energía para valores de las constantes de acoplamiento mayores que ciertos valores críticos. La utilidad del Hamiltoniano bosónico propuesto será manifiesta en su aplicación al estudio de la versión más general de nuestro modelo (capítulo 4) en la que el cálculo de los elementos de matriz del Hamiltoniano fermiónico resulta muy complicado. Un problema inherente al uso de operadores

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

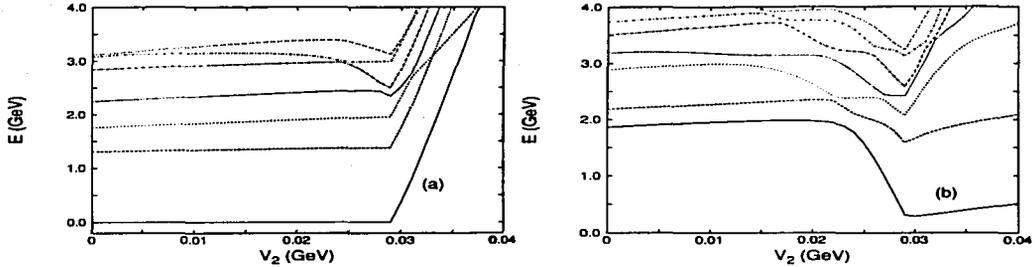


Figura 3.5: Espectro del sector 0^- (a) y 1^- (b) como función de V_2 . En ambos casos $V_1 = 0.010 \text{ GeV} > V_{1c}$. En $V_2 \approx 0.029 \text{ GeV}$, el sistema pasa de la fase condensada 0^- a la fase condensada 1^- , lo cual puede apreciarse por el cambio de espín del estado más bajo en energía. Para $V_2 < 0.029$ el estado de menor energía tiene espín 0, mientras que, para $V_2 > 0.029$ tiene espín 1.

bosónicos para representar pares fermiónicos, es la aparición de estados espurios, aunque se conocen procedimientos para identificar y eliminar estos estados [51] son, en general, complicados; contrario a esto, el interés es encontrar reglas sencillas para cortar el espacio bosónico que, sin embargo, no modifiquen significativamente las características cualitativas del espectro de baja energía encontradas en la sección anterior. Es importante recordar que el Hamiltoniano fermiónico que se estudia en esta tesis no es un Hamiltoniano exacto de la CDC, sino que es un Hamiltoniano efectivo cuyas constantes de interacción se ajustan a valores experimentales y, por lo tanto, no es relevante, en este contexto, que el Hamiltoniano bosónico reproduzca fielmente el espectro del Hamiltoniano fermiónico, sólo es importante que las características cualitativas se preserven.

La forma del Hamiltoniano bosónico que se propondrá, será sugerida por el Hamiltoniano bosónico que resulta de mapear exactamente el Hamiltoniano fermiónico en el caso más sencillo de pares cuark-anticuark acoplados a espín 0 y sabor (0,0).

3.4.1. El Mapeo de Holstein-Primakoff

El álgebra de $SU(2)$, que es satisfecha por los operadores cuark-anticuark acoplados a espín 0 y sabor (0,0) [ec.(2.6)], puede reproducirse por el siguiente mapeo de los operadores S_+ , S_- y S_0 [52]:

$$\begin{aligned} S_+ &= \sqrt{6} B_{(0,0)0}^\dagger \rightarrow \sqrt{2\Omega} b_{00}^\dagger \sqrt{1 - \frac{N_{00}}{2\Omega}} \\ S_- &= \sqrt{6} B_{(0,0)0} \rightarrow \sqrt{2\Omega} \sqrt{1 - \frac{N_{00}}{2\Omega}} b_{00} \\ S_0 &= \frac{\hat{n}_q + \hat{n}_{\bar{q}}}{2} - \Omega \rightarrow N_{00} - \Omega, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde los operadores b_{00} y b_{00}^\dagger son operadores bosónicos y $N_{00} \equiv b_{00}^\dagger b_{00}$ cuenta el número de pares cuark-anticuark que es a lo más 2Ω . El mapeo anterior es definido para el pseudoespín $\mathcal{J} = \Omega$ y recibe el nombre de mapeo de Holstein-Primakoff. Existen otros mapeos para los operadores de $SU(2)$, sin embargo, el anterior tiene la propiedad de ser hermítico, es decir, el operador al que se mapea S_- es el adjunto del operador al que se mapea S_+ .

Si se reescribe el Hamiltoniano del capítulo 2 [ec.(2.15)] utilizando el mapeo anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} H_{(0,0)0} &\rightarrow 2\omega_f N_{00} + \omega_b \hat{n}_b + \\ &2\Omega V_1 \left(b_{00}^\dagger \left(1 - \frac{N_{00}}{2\Omega} \right)^{1/2} b_{00}^\dagger \left(1 - \frac{N_{00}}{2\Omega} \right)^{1/2} + \right. \end{aligned}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

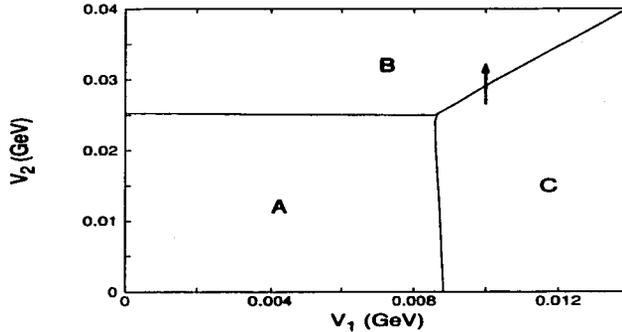


Figura 3.6: Curvas de transición en el espacio paramétrico V_1 - V_2 . La flecha indica la ruta de transición de la figura 3.5. La región *A* es la fase perturbativa, la región *B* la fase condensada 1^- y la región *C* la fase condensada 0^- .

$$2 b_{00}^\dagger \left(1 - \frac{N_{00}}{2\Omega}\right) b_{00} + \left(1 - \frac{N_{00}}{2\Omega}\right)^{1/2} b_{00} \left(1 - \frac{N_{00}}{2\Omega}\right)^{1/2} b_{00} (b^\dagger + b). \quad (3.34)$$

El espectro del Hamiltoniano anterior coincide exactamente con el del Hamiltoniano fermiónico siempre y cuando el número de excitaciones N_{00} sea a lo más 2Ω . El Hamiltoniano anterior está definido formalmente en un espacio de Hilbert bosónico generado por

$$|n_b; N_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_b! N_{00}!}} (b^\dagger)^{n_b} |0\rangle_b \otimes (b_{00}^\dagger)^{N_{00}} |0\rangle_f. \quad (3.35)$$

que contiene estados ($N_{00} > 2\Omega$) sin equivalente en el respectivo espacio fermiónico. La restricción $N_{00} \leq 2\Omega$ es la regla que permite eliminar los estados espurios y es, en este caso, simple e inmediata. ¿Es posible usar reglas tan sencillas como la anterior y un Hamiltoniano bosónico de la forma de (3.34) en el caso de pares cuark-anticuark acoplados a espín 0 y 1? Considerando los grados de libertad de los pares cuark-anticuark del presente capítulo, el espacio de Hilbert bosónico que conviene utilizar es el generado por los estados:

$$|n_b; N_{00}, N_{01} S M = S\rangle = \frac{\mathcal{N}_{N_{01} S}}{\sqrt{n_b! N_{00}!}} (b^\dagger)^{n_b} (b_{00}^\dagger)^{N_{00}} (b_{01}^\dagger \cdot b_{01}^\dagger)^{N_{01}-S} (b_{01}^\dagger)_1^S |0\rangle, \quad (3.36)$$

donde b_{01}^\dagger , m son operadores de creación esféricos del oscilador armónico en 3 dimensiones [40] y $\mathcal{N}_{N_{01} S}$ es una constante de normalización. El producto punto es un acoplamiento escalar de los operadores b_{01}^\dagger .

A semejanza de (3.34) se propone el siguiente Hamiltoniano bosónico para el Hamiltoniano con pares cuark-anticuark acoplados a espín 0 y 1:

$$\begin{aligned} H_{(0,0)1} &\rightarrow 2\omega_f n_f + \omega_b n_b + \\ &\sum_{S=0}^1 \mathcal{V}_{0S} \left\{ \left[(b_{0S}^\dagger \cdot b_{0S}^\dagger) + 2(b_{0S}^\dagger \cdot b_{0S}) + (b_{0S} \cdot b_{0S}) \right] \left(1 - \frac{n_f}{2\Omega}\right) b + \right. \\ &\left. b^\dagger \left(1 - \frac{n_f}{2\Omega}\right) \left[(b_{0S}^\dagger \cdot b_{0S}^\dagger) + 2(b_{0S}^\dagger \cdot b_{0S}) + (b_{0S} \cdot b_{0S}) \right] \right\}. \quad (3.37) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{V}_{00} \equiv 2\Omega V_1$, $\mathcal{V}_{01} \equiv 2\Omega V_2/3$ y $n_f = N_{00} + N_{01}$ es el operador de número total de las excitaciones bosónicas que representan a los pares cuark-anticuark. El factor $(1 - \frac{n_f}{2\Omega})$ tiene el mismo efecto que en

el Hamiltoniano (3.34), es decir, provoca una disminución efectiva de la interacción para estados con un número de pares fermiónicos cercano al máximo ($n_f \approx 2\Omega$). Para diagonalizar el Hamiltoniano (3.37), además de calcular sus elementos de matriz en la base (3.36), se debe restringir el espacio de Hilbert bosónico de manera que sean eliminados los estados bosónicos que no tengan un correspondiente en el espacio de Hilbert fermiónico. Como se ilustra en el apéndice C.3, es sencillo establecer cuantos estados de un cierto n_f y S se deben eliminar, sin embargo, no es inmediato decir cuales. Para el mapeo de la ec.(3.33), el criterio anterior no es ambiguo ya que sólo existe un estado con un número N_{00} fijo.

Una manera de proponer reglas sencillas para realizar el corte, se obtiene de considerar el grupo $U(4\Omega)$ y las reducciones de las ecs.(2.2) y (3.4). En cada caso, las representaciones irreducibles que contienen al estado base son $[2\Omega 0]$ y $[\Omega\Omega 00]$; en el primero (que corresponde a pares cuark-anticuark escalares) los valores de la irrep indican que se pueden excitar hasta 2Ω pares fermiónicos, en este caso, entonces, el límite $N_{00} \leq 2\Omega$ el número de pares del tipo (0,0)0 garantiza la no aparición de estados espurios; en el segundo caso, la irrep $[\Omega\Omega 00]$ señala que el número máximo de pares fermiónicos que se pueden excitar sin que aparezcan estados espurios es Ω . Usando esta observación se propone el siguiente criterio para cortar el espacio bosónico mapeado, restringiendo el número de bosones de cualquier tipo hasta 2Ω y el de excitaciones de espín 1 hasta Ω :

$$\begin{aligned} N_{00} + N_{10} &\leq 2\Omega \\ N_{01} &\leq \Omega. \end{aligned} \quad (3.38)$$

A pesar de que el criterio anterior no elimina completamente los estados espurios y de que, incluso, elimina estados físicos, tiene la ventaja de ser muy sencillo y de funcionar adecuadamente, como se verá, para reproducir las características básicas del Hamiltoniano fermiónico tanto en la fase perturbativa como en la condensada cercana a la transición.

3.4.2. Diagonalización numérica del Hamiltoniano bosónico

El cálculo de los elemento de matriz del Hamiltoniano bosónico, a diferencia del Hamiltoniano fermiónico, es muy sencillo (apéndice D.2):

$$\begin{aligned} \langle n_b; N_{00}, N_{01} SM | 2\omega_f n_f + \omega_b n_b | n_b; N_{00}, N_{01} SM \rangle &= 2\omega_f(N_{00} + N_{01}) + \omega_b n_b \\ \langle n_b - 1; N_{00} + 2, N_{01} SM | (b_{00}^\dagger \cdot b_{00}^\dagger) b | n_b; N_{00}, N_{01} SM \rangle &= \sqrt{(N_{00} + 2)(N_{00} + 1)} \sqrt{n_b} \\ \langle n_b - 1; N_{00}, N_{01} + 2 SM | (b_{01}^\dagger \cdot b_{01}^\dagger) b | n_b; N_{00}, N_{01} SM \rangle &= \sqrt{(N_{01} - S + 2)(N_{00} + S + 3)} \sqrt{n_b} \\ \langle n_b - 1; N_{00} - 2, N_{01} SM | (b_{00} \cdot b_{00}) b | n_b; N_{00}, N_{01} SM \rangle &= \sqrt{(N_{00})(N_{00} - 1)} \sqrt{n_b} \\ \langle n_b - 1; N_{00}, N_{01} - 2 SM | (b_{01} \cdot b_{01}) b | n_b; N_{00}, N_{01} SM \rangle &= \sqrt{(N_{01} - S)(N_{00} + S + 1)} \sqrt{n_b} \\ \langle n_b - 1; N_{00}, N_{01} SM | (b_{0S}^\dagger \cdot b_{0S}) b | n_b; N_{00}, N_{01} SM \rangle &= N_{0S} \sqrt{n_b}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Como se verá en el siguiente capítulo, el Hamiltoniano (3.37), la base (3.36) y los cortes (3.38) son fácilmente generalizables al caso general en el que se consideran pares cuark-anticuark acoplados a sabor (1,1); esto hace muy sencillo el cálculo de sus elementos de matriz y su diagonalización numérica, lo cual representa una gran ventaja puesto que, en la versión general, la diagonalización del Hamiltoniano fermiónico es muy complicada.

En la figura 3.7 se mostrará el espectro del Hamiltoniano bosónico (3.37) en el caso $V_1 = 0$, éste se obtuvo numéricamente utilizando el programa en FORTRAN *ham10.f* (apéndice E.2.1).

Como se puede ver en las gráficas, las características cualitativas del Hamiltoniano fermiónico se preservan. Para la fase perturbativa el espectro coincide con el del Hamiltoniano fermiónico, además, el espectro muestra la transición a la fase condensada con un estado 1^- de energía baja; dicha transición es señalada, también, por el mínimo de la energía del primer estado excitado 0^+ . En el rango de V_2 mostrado, desde cero hasta $V_2 \gtrsim V_{2c}$, el número de excitaciones fermiónicas en los estados de baja energía no es muy grande (fig.3.3), lo que explica por qué el modelo bosónico arroja resultados similares a los del Hamiltoniano fermiónico; este rango, por otra parte, es la región de interés en la que el espectro, debido a que las excitaciones gluónicas no dominan aún sobre las excitaciones fermiónicas, presenta características acordes con el espectro mesónico. En la región dominada por los glueballs

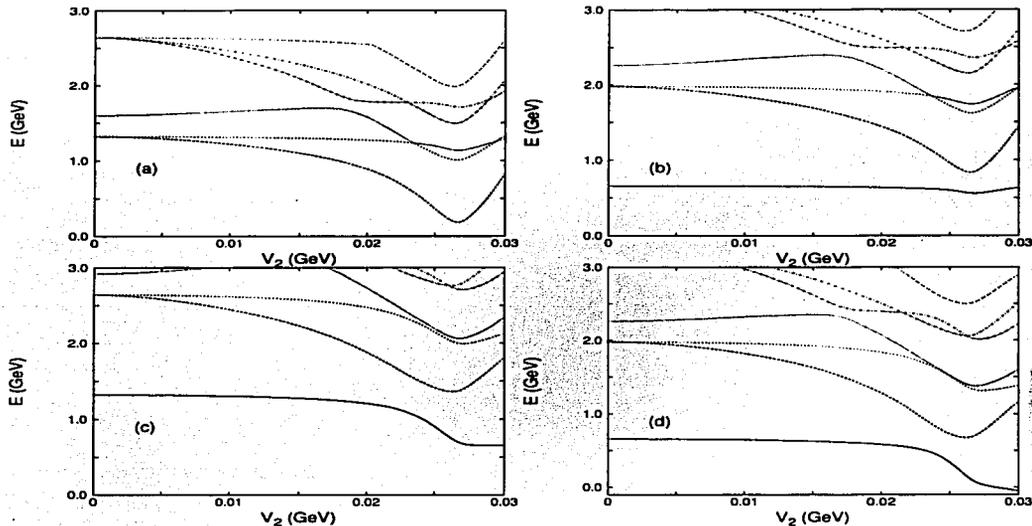


Figura 3.7: Espectro del Hamiltoniano bosónico (3.37) como función de V_2 en el caso $V_1 = 0.0$. Sector $S^P = 0^+$ (a), 0^- (b), 1^+ (c) y 1^- (d). Las características cualitativas del espectro del modelo bosónico son semejantes a las del Hamiltoniano fermiónico, en ambos casos se presenta una transición a una fase con un estado 1^- de energía baja en $V_2 > 0.025$ GeV.

($V_1 \gg V_{c1}$) el espectro es el de un oscilador armónico de frecuencia $\omega_b = 1.6$ GeV (capítulo 2), por ello, esta región no es de interés para reproducir el espectro mesónico experimental.

El Hamiltoniano bosónico no reproduce exactamente el espectro del Hamiltoniano fermiónico, sin embargo, éste no fue su objetivo, sí lo es, en cambio, obtener un modelo bosónico suficientemente simple como el propuesto que preserve las características cualitativas del Hamiltoniano fermiónico y que, al generalizarse, permita el estudio de la versión más general que considera todos los posibles acoplamientos de espín y sabor de los pares cuark-anticuark. Este es el tema del capítulo siguiente.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 4

Modelo General

En este capítulo se estudia la versión más general del Hamiltoniano, en la cual se consideran todos los posibles acoplamientos de espín ($S = 0, 1$) y sabor $((\lambda, \mu) = (0, 0), (1, 1))$ de los pares cuark-anticuark. Los principales resultados de este estudio han sido publicados en la ref.[53].

Los operadores bifermiónicos, en esta versión más general del modelo, cumplen con el álgebra de Lie del grupo $U(12)$. Una cadena de grupos útil para clasificar el espacio de Hilbert fermiónico es:

$$\begin{array}{ccccccc}
 [1^N] & & [\bar{h}_1 \dots \bar{h}_9] & & [h_1 \dots h_{12}] & & \sum_{i=1}^{12} h_i = N \\
 U(4\Omega) & \supset & U\left(\frac{\Omega}{3}\right) & \otimes & U(12) & & \\
 & & & & \cup & & \\
 & & & & [f_1 f_2 f_3] & \cup & \theta_f \\
 & & & & U_f(3) \otimes U(4) & & [g_1 g_2 g_3 g_4] \\
 & & \cup & & \cup & & \\
 (\lambda_C, \mu_C) & & SU_C(3) & & (\lambda_f, \mu_f) & & SU_f(3) \otimes SU_S(2) \quad S M \quad , \\
 & & & & & & \cup & \theta_S
 \end{array} \quad (4.1)$$

donde N es el número de partículas en la imagen de Dirac (partículas con energía positiva y negativa) y la irrep de $U(4\Omega)$ es la representación totalmente antisimétrica; debido a esto, la irrep $[h]$ de $U(\Omega/3)$ es el diagrama de Young transpuesto de la irrep $[h]$ de $U(12)$ [38]. Para $\Omega = 9$ el grupo $U(\frac{\Omega}{3})$ se reduce al grupo de color y sus irreps tienen máximo tres renglones. El grupo $U(12)$ se reduce al grupo $U_f(3)$ de sabor y al grupo $U(4)$ del capítulo anterior. Los índices θ_f y θ_S son índices de multiplicidad, respectivamente, en la reducción de $U(12)$ y de $U(4)$ al grupo de espín total $SU_S(2)$. Los índices de color y sabor se relacionan con los índices de los grupos unitarios a través de $\lambda_C = h_1 - h_2$, $\mu_C = h_2 - h_3$ y $\lambda_f = f_1 - f_2$, $\mu_f = f_2 - f_3$. Se escribieron 2 programas en FORTRAN (*u12.f* y *u4u2.f*, apéndice E.3.1) que utilizan el algoritmo de la ref.[54] para reducir $U(12)$ a $U_f(3) \otimes U(4)$ y $U(4)$ a $SU_S(2)$. Para esta última reducción el programa utiliza la cadena de $U(4)$ presentada en el capítulo anterior.

Los valores posibles de \bar{h}_i (que determinan tanto a las h_i de $U(12)$ como al color) se obtienen de considerar todas las posibles particiones de $N = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3$, con $N = 0, 1, \dots, 4\Omega$, $\bar{h}_{i+1} \leq \bar{h}_i$ y $\bar{h}_1 \leq 12$. Para los estados con color cero, en el caso $\Omega = 9$, se cumple que $\bar{h}_1 = h_2 = \bar{h}_3 = h$. El sector mesónico del modelo corresponde a las irreps $[1^{2\Omega}]$ de $U(4\Omega)$ [ver ec.(2.9)], $[\frac{2\Omega}{3} \frac{2\Omega}{3} \frac{2\Omega}{3}]$ de $U(\frac{\Omega}{3})$ y $[\frac{\Omega}{3}^6 0^6]$ de $U(12)$. Esta última irrep contiene al vacío perturbativo (ningún cuark ni anticuark) y al estado base del sistema en el caso con interacción.

La clasificación anterior permite establecer el número de estados con un espín, sabor y número de pares fermiónicos dados; esta información es útil para cortar el espacio en el caso del modelo bosónico; además, la clasificación es de gran utilidad en el cálculo de la gran función de partición (capítulo 5).

Al igual que en los capítulos anteriores, la cadena de grupos (4.1) permite escribir simbólicamente una base completa para el espacio de Hilbert fermiónico:

$$|N, (\lambda_C, \mu_C) Y_C T_C T_3 C, \theta_f (\lambda_f, \mu_f) Y_f T_f T_3 f, \theta_S S M \rangle, \quad (4.2)$$

donde Y , T y T_3 son la hipercarga, isoespín y proyección del isoespín de las irreps $SU(3)$ de color y sabor. En la tabla 4.1 se muestra, a modo de ejemplo, la reducción de la irrep $[3^6 0^6]$ de $U(12)$ en algunas irreps de $U(4)$, $SU_f(3)$ y $SU_S(2)$; para el grupo de sabor sólo se muestra el contenido $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

La construcción explícita de la base fermiónica (4.2), a diferencia de los 2 capítulos previos, llega a ser, incluso en la irrep que contiene al estado base, una tarea muy complicada. Para ilustrar esto

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$U(12)$	$U(4)$	$SU_f(3)$	\otimes	$SU_S(2)$
$[3^6 0^6]$	[9900]	(0, 0)		055, 145, 236, 328, 421, 515, 610, 76, 83 y 91
	[9720]	(0, 0) y (1, 1)		081, 1171, 2189, 3135, 490, 554, 627 y 79
	[8820]	(1, 1)		028, 184, 263, 345, 430, 518, 69 y 73
	[8811]	(0, 0) y (1, 1)		036, 128, 221, 315, 410, 56, 63 y 71
	[9711]	(1, 1)		028, 184, 263, 345, 430, 518, 69 y 73
	[5544]	$(0, 0)_2$ y $(1, 1)_4$		03 y 11

Tabla 4.1: Algunos ejemplos de la reducción de la irrep $[3^6 0^6]$ de $U(12)$ en irreps de $U(4)$ y $SU_f(3) \otimes SU_S(2)$. Sólo se muestra el contenido (0, 0) y (1, 1) de sabor. Los subíndices indican la multiplicidad de las irreps.

considerése el número de EPD's necesarios para construir la base fermiónica en los casos $[\Omega 0]$ y $[\Omega \Omega 0 0]$ de los dos capítulos previos, en el primer caso sólo se requirió uno (S_+) y en el segundo dos ($B_{\frac{1}{2}}^1$, Δ^1); para la irrep $[\frac{5}{3} 6 0^6]$ de $U(12)$, el número de EPD's necesarios aumenta hasta 30. Así, aunque en principio podría utilizarse la misma estrategia que permitió en el capítulo 3 construir la base y calcular los elementos de matriz del Hamiltoniano fermiónico, en el presente caso la labor se complica considerablemente. La opción que se tomó ya ha sido adelantada en los capítulos anteriores: se propone un Hamiltoniano bosónico para el Hamiltoniano fermiónico y se trabaja desde un inicio en un espacio bosónico recortado por una generalización de las reglas propuestas en el capítulo 3 [ec.(3.38)]. El modelo bosónico que se propone debe considerarse como un modelo inspirado del modelo original fermiónico (que a su vez está inspirado del Hamiltoniano de la CDC) con el que comparte las mismas simetrías de sabor, espín, paridad y conjugación de carga y en el que se implementa de un modo efectivo el principio de exclusión de Pauli; como se confirma por los resultados de este y anteriores capítulos, estas características son suficientes para mantener las estructuras básicas del Hamiltoniano fermiónico en el caso, mucho más manejable y sencillo, del modelo bosónico. No debe considerarse al modelo bosónico como una aproximación controlada del caso fermiónico, sino como un modelo que permite obtener información sobre la estructura general del Hamiltoniano fermiónico original.

El presente capítulo se ordena del siguiente modo; en la siguiente sección se presenta el espacio de Hilbert del modelo bosónico, el Hamiltoniano propuesto y las reglas utilizadas para cortar el espacio bosónico mapeado; se determinan, también, los números cuánticos de sabor, espín, conjugación de carga y paridad $(\lambda, \mu)S^{PC}$ de los estados. El modelo se aplica al estudio de los estados mesónicos, para ello se hace un ajuste de sus constantes de acoplamiento al espectro mesónico experimental, en la sección 2 se discute sobre los valores experimentales respecto a los cuales se realiza este ajuste. En la sección 3 se muestran y discuten los resultados del ajuste, en particular, el espectro de los diferentes sectores $(\lambda, \mu)S^{PC}$, el valor de las constantes de acoplamiento resultantes, la estructura y contenido gluónico y fermiónico de los estados, así como algunas predicciones y limitaciones del modelo.

4.1. El modelo bosónico en el caso general

El Hamiltoniano bosónico que se propone resulta de considerar los grados de libertad posibles de los operadores de creación y aniquilación de los pares cuark-anticuark:

$$\begin{aligned} B_{f_1\sigma_1}^{\dagger f_2\sigma_2} &\rightarrow b_{f_1\sigma_1}^{\dagger f_2\sigma_2} \\ B_{f_1\sigma_1}^{f_2\sigma_2} &\rightarrow b_{f_1\sigma_1}^{f_2\sigma_2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde los operadores de la derecha satisfacen reglas de conmutación bosónicas:

$$[b_{f_1\sigma_1}^{f_2\sigma_2}, b_{f_3\sigma_3}^{\dagger f_4\sigma_4}] = \delta_{f_2}^{f_3} \delta_{f_1}^{f_4} \delta_{\sigma_2}^{\sigma_3} \delta_{\sigma_1}^{\sigma_4} \quad (4.4)$$

Aunque el mapeo bosónico exacto puede ser obtenido en general [36, 39], su implementación produce un Hamiltoniano muy complicado que está mas allá de los propósitos del modelo esquemático.

4.1.1. El espacio bosónico

El espacio bosónico a utilizar resulta de considerar los posibles acoplamientos cuark-anticuark de los operadores de la ec.(4.3):

$$b_{(\lambda, \lambda)FSM}^{\dagger} \equiv b_{\lambda}^{\dagger} f_{SM} \quad (4.5)$$

con $\lambda = 0, 1$ y $S = 0, 1$, esto da cuatro posibles combinaciones $[\lambda, S]$: $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 0]$ y $[1, 1]$. Las dimensiones de las irreps respectivas, $\dim(0, 0)\dim(S = 0) = 1$, $\dim(0, 0)\dim(S = 1) = 3$, $\dim(1, 1)\dim(S = 0) = 8$ y $\dim(1, 1)\dim(S = 1) = 24$, indican el espacio de Hilbert bosónico que conviene utilizar: el producto directo de los espacios de osciladores armónicos en 1, 3, 8 y 24 dimensiones [40]. La elección de la base en el espacio de los osciladores se hace en función de la forma del Hamiltoniano bosónico propuesto [ec.(4.12)]. Se usará, para cada oscilador, una base con *antigüedad* (*seniority*) bien definida [48]:

$$\mathcal{N}_{N_{\lambda S} \nu_{\lambda S}} (b_{\lambda S}^{\dagger} \cdot b_{\lambda S}^{\dagger})^{\frac{N_{\lambda S} - \nu_{\lambda S}}{2}} |\nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S}\rangle \quad (4.6)$$

donde $N_{\lambda S}$ es el número de bosones del tipo $[\lambda, S]$, $\nu_{\lambda S}$ es la *antigüedad* correspondiente y $\mathcal{N}_{N_{\lambda S} \nu_{\lambda S}}$ es una constante de normalización. La *antigüedad* se define como el número de bosones $b_{\lambda S}^{\dagger}$ no acoplados en pares a un escalar. La etiqueta $\alpha_{\lambda S}$ denota al resto de los números cuánticos necesarios para caracterizar a los estados de un oscilador armónico particular. El punto en el lado izquierdo de la ec.(4.6) indica un producto escalar.

La base con *antigüedades* bien definidas permite calcular fácilmente los elementos de matriz del Hamiltoniano bosónico (4.12), pues éste contiene expresiones del tipo $(b_{\lambda S}^{\dagger} \cdot b_{\lambda S}^{\dagger})$, $(b_{\lambda S} \cdot b_{\lambda S})$ y $(b_{\lambda S}^{\dagger} \cdot b_{\lambda S})$. No es necesario conocer la forma exacta de $|\nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S}\rangle$, sólo se requiere conocer los números cuánticos $\alpha_{\lambda S}$ para un valor fijo de $\nu_{\lambda S}$. Debido a que los operadores $(b_{\lambda S}^{\dagger} \cdot b_{\lambda S}^{\dagger})$ de (4.6) son escalares de sabor, espín, paridad y conjugación de carga, los números cuánticos $(\lambda, \mu)S^{PC}$ son determinados por las *antigüedades* y están incluidos en la etiqueta $\alpha_{\lambda S}$. La diagonalización del Hamiltoniano bosónico se efectúa independientemente no sólo para cada sector con una combinación $(\lambda, \mu)S^{PC}$ fija, sino, además, para cada tétrada de *antigüedades* $(\nu_{11}, \nu_{10}, \nu_{01}, \nu_{00})$ fija.

En el oscilador armónico unidimensional ($[0, 0]$) la *antigüedad* puede tomar los valores 0 ó 1, sus estados son de la forma:

$$(b_{00}^{\dagger})^{N_{00}} |0\rangle = (b_{00}^{\dagger} b_{00}^{\dagger})^{\frac{N_{00} - \nu_{00}}{2}} (b_{00}^{\dagger})^{\nu_{00}} |0\rangle \quad (4.7)$$

donde el valor $\nu_{00} = 0$ implica un número par de excitaciones y $\nu_{00} = 1$ un número impar.

Para el oscilador armónico en tres dimensiones ($[0, 1]$), la *antigüedad* es igual a su espín S_{01} [40]:

$$|N_{01} S_{01} M = S_{01}\rangle = \mathcal{N}_{N_{01} S_{01}} (b_{01}^{\dagger} \cdot b_{01}^{\dagger})^{\frac{N_{01} - S_{01}}{2}} (b_{01}^{\dagger})^{S_{01}} |0\rangle \quad (4.8)$$

El espín S_{01} y el S_{11} de las excitaciones $[1, 1]$ se acoplan a espín total S .

El oscilador de ocho dimensiones ($[1, 0]$) contribuye sólo al sabor, el contenido (λ_{10}, μ_{10}) de sabor para una *antigüedad* dada ν_{10} puede obtenerse recursivamente utilizando la reducción de las irreps tot. simétricas $[N_{10}]$ del grupo $U_{10}(8)$ en irreps del grupo $SU_{10}(3)$ [55]. En la tabla 4.2 se muestra el contenido $(0, 0)$ y $(1, 1)$ de las irreps $[N_{10}]$ con $N_{10} \leq 4$. La irrep $[N_{10} = 1]$, por ejemplo, contiene sólo un $(1, 1)$, mientras que la irrep $[N_{10} = 3]$ contiene un estado $(0, 0)$ y un $(1, 1)$, este último se obtiene de aplicar al estado con $N_{10} = 1$ el operador $(b_{10}^{\dagger} \cdot b_{10}^{\dagger})$, el cual no modifica ni el sabor ni la *antigüedad*, pero sí el número de excitaciones N_{10} por dos. De esta manera se deduce que la *antigüedad* $\nu_{10} = 1$ contiene sólo el sabor $(1, 1)$ y que a la *antigüedad* $\nu_{10} = 3$ corresponde un sabor $(0, 0)$, pero no un $(1, 1)$. Restando la multiplicidad de las irreps (λ, μ) en $[(N_{10} - 2)]$ a las multiplicidades en $[N_{10}]$, permite conocer el contenido de sabor en la *antigüedad* $\nu_{10} = N_{10}$. El sabor de un estado con *antigüedad* dada ν_{10} , debe acoplarse con el sabor de los estados $[1, 1]$ con *antigüedad* ν_{11} .

El caso del oscilador armónico en 24 dimensiones ($[1, 1]$) es discutido en la ref.[15], el color en esa referencia debe interpretarse aquí como el sabor. En la ref.[15] se consideran únicamente estados $(0, 0)$, sin embargo, se explica el procedimiento a seguir en el caso general, éste consiste, al igual que en el

$U(8)$	$SU_f(3)$
[0]	(0,0) ₁
[1]	(1,1) ₁
[2]	(0,0) ₁ , (1,1) ₁
[3]	(0,0) ₁ , (1,1) ₁
[4]	(0,0) ₁ , (1,1) ₂

Tabla 4.2: Reduccion $U(8)$ a $SU(3)$ para irreps tot. simétricas. Sólo se muestra el contenido (0,0) y (1,1) de las irreps.

caso del oscilador 8-dimensional, en reducir las irreps tot. simétricas $[N_{11}]$, ahora de $U(24)$, a los grupos $SU(3)$ y $SU(2)$ de sabor (λ_{11}, μ_{11}) y de espín S_{11} . Conociendo el contenido de sabor y espín de $[N_{11} - 2]$ y $[N_{11}]$, se pueden encontrar los espines y sabores de la *antigüedad* $\nu_{11} = N_{11}$ simplemente restando las multiplicidades de las irreps de sabor y espín contenidas en $[N_{11} - 2]$ a las multiplicidades de las contenidas en $[N_{11}]$.

Acoplando los espines S_{01} y S_{11} a espín total S y los sabores (λ_{10}, μ_{10}) y (λ_{11}, μ_{11}) a sabor total (λ, μ) , se obtiene el contenido de sabor y espín para una tétada de *antigüedades* $(\nu_{11}, \nu_{10}, \nu_{01}, \nu_{00})$ dada.

El procedimiento anterior es fácilmente codificable en FORTRAN (programas *nv-allfa.fy nv-space.f*, apéndice E.3.2).

La paridad P de un conjunto fijo de *antigüedades* está dada por $P = (-1)^{n_f}$, donde $n_f = \sum_{\lambda, S=0}^1 \nu_{\lambda S}$ es la suma de las *antigüedades*, esto es así ya que cada bosón $[\lambda, S]$ representa a un par cuark-anticuark de momento orbital cero, el cual tiene paridad negativa [56]. La aplicación de los operadores $(b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S}^\dagger)$ no modifica la paridad $((-1)^{n_f+2} = (-1)^{n_f})$.

La conjugación de carga de los estados se obtiene de aplicar el operador C a los operadores bifermiónicos $B_{(\lambda, \lambda)_f, SM}^\dagger$. El resultado es (ver apéndice D.1):

$$CB_{f, SM}^\dagger C^{-1} = (-1)^S B_{f, SM}^\dagger, \quad (4.9)$$

donde λ y f son una notación corta para $\lambda \equiv (\lambda, \mu)$ y $f \equiv Y, T, T_z$, los índices conjugados son $\bar{\lambda} = (\mu, \lambda)$ y $\bar{f} = -Y, T, -T_z$. Sólo estados con $Y = 0, T_z = 0$ y $\mu = \lambda$, tienen conjugación de carga C definida. En la ec.(4.9) se aplicó el operador C que intercambia los operadores de cuarks y anticuarks ($a^\dagger \leftrightarrow d^\dagger$) e invierte los números cuánticos magnéticos de sabor: ($Y_i \rightarrow -Y_i$ y $T_{iz} \rightarrow -T_{iz}$).

Para el producto de dos operadores de creación cuark-anticuark (ver apéndice D.1):

$$C \left[B_{\lambda_1, S_1}^\dagger \otimes B_{\lambda_2, S_2}^\dagger \right]_{f, M}^{\rho(\lambda, \mu)S} C^{-1} = (-1)^{S_1+S_2-\lambda-\mu+\rho_{max}-\rho} \left[B_{\lambda_1, S_1}^\dagger \otimes B_{\lambda_2, S_2}^\dagger \right]_{f, M}^{\rho(\mu, \lambda)S}, \quad (4.10)$$

donde ρ es el índice de multiplicidad de (λ, μ) en el producto $(\lambda_1, \lambda_1) \otimes (\lambda_2, \lambda_2)$. El símbolo ρ_{max} denota el valor máximo de ρ . Se usa la convención de fase de la ref.[50]. El signo \otimes indica acoplamientos tanto de sabor como de espín.

Análogamente, la acción de la conjugación de carga en el producto de tres operadores cuark-anticuark es (apéndice D.1):

$$C \left[\left[B_{\lambda_1, S_1}^\dagger \otimes B_{\lambda_2, S_2}^\dagger \right]_{f, M}^{\rho_{12}(\lambda_{12}, \mu_{12}), S_{12}} \otimes B_{\lambda_3, S_3}^\dagger \right]_{f, M}^{\rho(\lambda, \mu)S} C^{-1} = (-1)^{S_1+S_2+S_3-\lambda-\mu+\rho_{12, max}-\rho_{12}+\rho_{max}-\rho} \left[\left[B_{\lambda_1, S_1}^\dagger \otimes B_{\lambda_2, S_2}^\dagger \right]_{f, M}^{\rho_{12}(\mu_{12}, \lambda_{12}), S_{12}} \otimes B_{\lambda_3, S_3}^\dagger \right]_{f, M}^{\rho(\mu, \lambda)S}, \quad (4.11)$$

donde ρ_{12} es el índice de multiplicidad de (λ_{12}, μ_{12}) en el producto $(\lambda_1, \lambda_1) \otimes (\lambda_2, \lambda_2)$, ρ es la multiplicidad de (λ, μ) en el último de los acoplamientos y $\rho_{12, max}$ es el valor máximo de ρ_{12} .

El procedimiento anterior puede ser usado recursivamente para acoplamientos de más de 3 operadores cuark-anticuark. Para nuestros propósitos, sin embargo, es suficiente el cálculo hasta tres pares, pues los valores de las *antigüedades* en los estados de menor energía no es mayor que 3.

En la tabla 4.3 se muestran los primeros valores de las *antigüedades* para diferentes combinaciones $(\lambda, \mu)S^{PC}$, dicha tabla fue construida utilizando el programa *nv-allfa.f* mencionado anteriormente y las formulas (4.9), (4.10) y (4.11) para la conjugación de carga.

$(\lambda, \mu) S^{PC}$	$(\nu_{00}, \nu_{01}, \nu_{10}, \nu_{11})$
(0, 0)0 ⁺⁺	(0, 0, 0, 0)
(1, 1)0 ⁺⁺	(0, 0, 0, 2), (0, 0, 2, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)
(0, 0)0 ⁻⁺	(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 3, 0), (0, 0, 1, 2), (0, 0, 0, 3)
(1, 1)0 ⁻⁺	(0, 0, 1, 0)
(1, 1)0 ⁻⁻	(0, 0, 1, 2), (0, 1, 1, 1)
(0, 0)1 ⁺⁻	(0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)
(1, 1)1 ⁺⁻	(0, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)
(1, 1)1 ⁺⁺	(0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)
(0, 0)1 ⁻⁻	(0, 1, 0, 0)
(1, 1)1 ⁻⁻	(0, 0, 0, 1)
(0, 0)1 ⁻⁺	(0, 1, 1, 1)
(1, 1)1 ⁻⁺	(1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 2)

Tabla 4.3: Primeras antigüedades de las diferentes combinaciones $(\lambda, \mu) S^{PC}$, nótese que las antigüedades de las combinaciones S^{PC} exóticas (0⁻⁻, 1⁻⁺) suman 3, mientras que, las demás combinaciones S^{PC} tienen antigüedades menores.

El espacio total del modelo es el producto directo de los espacios de los osciladores armónicos anteriores y el espacio bosónico de las excitaciones de los glueballs 0⁺⁺ ($(b^\dagger)^{n_b}|0\rangle$).

4.1.2. El Hamiltoniano bosónico

Similar al Hamiltoniano bosónico del capítulo 3 [ec.(3.37)] se propone el siguiente Hamiltoniano para el caso presente:

$$\begin{aligned}
 H &= 2\omega_f n_f + \omega_b n_b + \\
 &\sum_{\lambda, S=0}^1 \nu_{\lambda S} \left\{ \left[(b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S}^\dagger) + 2(b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S}) + (b_{\lambda S} \cdot b_{\lambda S}) \right] \left(1 - \frac{n_f}{2\Omega}\right) b + \right. \\
 &\left. b^\dagger \left(1 - \frac{n_f}{2\Omega}\right) \left[(b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S}^\dagger) + 2(b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S}) + (b_{\lambda S} \cdot b_{\lambda S}) \right] \right\}. \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

donde $n_f = \sum_{\lambda S} N_{\lambda S}$ es el operador de número total de los pares cuark-anticuark. El Hamiltoniano anterior es un operador tensorial escalar en sabor, espín, conjugación de carga y paridad. El término $(b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S}^\dagger) [(b_{\lambda S} \cdot b_{\lambda S})]$ describe la creación [aniquilación] de dos pares cuark-anticuark con la creación o aniquilación de un par gluónico. El término $(b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S})$ describe la dispersión de un par fermiónico con la creación o aniquilación de un glueball 0⁺⁺. El factor $(1 - n_f/2\Omega)$ simula el efecto de un mapeo bosónico exacto (3.34) y es responsable de la disminución de la interacción cuando el número de pares cuark-anticuark es cercano a 2Ω . En otras palabras, este factor simula el principio de exclusión de Pauli que no permite más de 2Ω pares cuark-anticuark.

El Hamiltoniano (4.12) contiene 4 parámetros indeterminados, el valor de ω_f es fijado a 0.33 GeV (aproximadamente 1/3 de la masa del nucleón), mientras que, ω_b es fijado a 1.6 GeV. La forma del Hamiltoniano (4.12) permite calcular fácilmente sus elementos de matriz en la base con antigüedades definidas construida anteriormente. Los elementos de matriz del Hamiltoniano pueden leerse de los siguientes (apéndice D.2):

$$\begin{aligned}
 \langle n_b | n_b | n_b \rangle &= n_b \\
 \langle N_{\lambda S} + 2 \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} | n_f | N_{\lambda S} \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} \rangle &= N_{\lambda S} \\
 \langle n_b + 1 | b^\dagger | n_b \rangle &= \sqrt{n_b + 1} \\
 \langle n_b - 1 | b | n_b \rangle &= \sqrt{n_b} \\
 \langle N_{\lambda S} + 2 \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} | (b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S}^\dagger) | N_{\lambda S} \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} \rangle &= \sqrt{(N_{\lambda S} - \nu_{\lambda S} + 2)(N_{\lambda S} + \nu_{\lambda S} + d_{\lambda S})} \\
 \langle N_{\lambda S} - 2 \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} | (b_{\lambda S} \cdot b_{\lambda S}) | N_{\lambda S} \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} \rangle &= \sqrt{(N_{\lambda S} - \nu_{\lambda S})(N_{\lambda S} + \nu_{\lambda S} + d_{\lambda S} - 2)} \\
 \langle N_{\lambda S} \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} | (b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S}) | N_{\lambda S} \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} \rangle &= N_{\lambda S}
 \end{aligned} \quad (4.13)$$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

donde $d_{\lambda,S} = 1, 3, 8$ y 24 para las combinaciones $[\lambda, S] = [0, 0], [0, 1], [1, 0]$ y $[1, 1]$ respectivamente y $\nu_{\lambda,S}$ son las *antigüedades* correspondientes.

4.1.3. El corte del espacio bosónico

Para definir totalmente la matriz Hamiltoniana a diagonalizar, se debe cortar el espacio bosónico de los pares cuark-anticuark. Como es bien conocido, el espacio de Hilbert fermiónico contiene menos estados que el correspondiente bosónico (apéndice C.3). A manera de ilustración, considérese el estado fermiónico que resulta de excitar todos los niveles cuark-anticuark, es decir, el estado con 2Ω pares; este estado es único y tiene sabor $(0, 0)$ y espín $S = 0$. En el espacio bosónico, por el contrario, este estado no es único y puede construirse por cualquier combinación:

$$\prod_{\lambda S} (b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S})^{\frac{2\Omega}{3}} |0\rangle,$$

con $N_{\lambda S}$ par y $\sum_{\lambda S} N_{\lambda S} = 2\Omega$, esto da un total de $(3 + \Omega)! / (3!\Omega!)$ posibles estados con 2Ω pares (para $\Omega = 9$ esta multiplicidad es 220). Para eliminar este crecimiento en la multiplicidad de los estados bosónicos respecto a los fermiónicos, se imponen límites al número de excitaciones bosónicas permitidas. Para proponer límites diferenciados para los distintos tipos de excitaciones, se consideran, como en el capítulo 3, las reducciones del grupo $U(4\Omega)$; si sólo se toman en cuenta pares $[\lambda, S] = [0, 0]$, la estructura relevante es $U(4\Omega) \supset U(2\Omega) \otimes U(2)$ y la irrep del estado base es $[2\Omega, 0]$, por lo que el número de excitaciones bosónicas que se pueden producir sin que aparezcan estados espurios es 2Ω , si se consideran adicionalmente excitaciones $[0, 1]$, la cadena relevante y la irrep del estado base son $U(4\Omega) \supset U(\Omega) \otimes U(4)$ y $[\Omega, 000]$, en este caso, el número máximo de excitaciones bosónicas que se pueden crear sin la aparición de estados espurios es Ω . Con excitaciones $[1, 0]$ se tiene $U(4\Omega) \supset U(\frac{2\Omega}{3}) \otimes U(6)$, $[\frac{2\Omega}{3}, 0^3]$ y hasta $2\Omega/3$ pares no aparecen estados espurios. Finalmente, para el caso general que incluye pares $[1, 1]$, la cadena e irrep del estado base son $U(\frac{\Omega}{3}) \otimes U(12)$ y $[\frac{\Omega}{3}, 0^6]$, de donde el límite superior para la no aparición de estados espurios es $\Omega/3$. Con las observaciones anteriores se propone el siguiente criterio para cortar el espacio bosónico:

$$\begin{aligned} N_{00} + N_{01} + N_{10} + N_{11} &\leq 2\Omega \\ N_{01} &\leq \Omega \\ N_{10} &\leq \frac{2\Omega}{3} \\ N_{11} &\leq \frac{\Omega}{3}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para el caso $\Omega = 9$ los límites anteriores son 18, 9, 6 y 3 respectivamente.

El criterio (4.14) no elimina totalmente los estados espurios e incluso elimina algunos estados físicos, sin embargo, sí reduce significativamente la influencia de las configuraciones espurias en los estados de menor energía para valores de las constantes de interacción no mucho mayores que los valores críticos. Como se ha visto en los dos capítulos anteriores, en el régimen $V_i \gg V_{ic}$ la contribución dominante a los estados de baja energía viene de configuraciones con un número pequeño de pares cuark-anticuark. Se verá más adelante que los valores de las constantes de interacción que mejor ajustan el espectro del modelo al espectro mesónico cumplen con la condición $V_i \gg V_{ic}$.

Los criterios (4.14) tienen la ventaja de ser simples y fácilmente implementables. Pueden considerarse, por otro lado, como una primera aproximación a criterios más refinados para cortar el espacio bosónico. Uno de estos procedimientos más refinados (y también más complicados) consiste en considerar la cadena del grupo $U(12)$ de la ec.(4.1). Con los programas escritos (*u12.f* y *u4u2.f*) se puede conocer el número de estados fermiónicos con n_f , (λ, μ) y S fijos y comparar con el número equivalente en el espacio bosónico; si los números coinciden, todos los estados bosónicos son tomados en cuenta, si no, se eliminan estados bosónicos hasta que los números coincidan. El criterio para decidir que estados bosónicos se deben eliminar está determinado por el tipo de excitaciones que son relevantes en cada régimen, es decir, depende de la forma específica del Hamiltoniano [51]. En ciertos casos, el error introducido por no eliminar correctamente los estados espurios puede ser absorbido en los parámetros del modelo, esto es una práctica general en el manejo de modelos fenomenológicos, en donde el número correcto de grados de libertad es lo dominante para la correcta descripción del espectro [57].

4.2. Ajuste al espectro mesónico

Con la base bosónica (4.6), el Hamiltoniano (4.12), los elementos de matriz (4.13) y los cortes (4.14) de la sección anterior, se escribió una subrutina en FORTRAN (*energycut.f*, apéndice E.3.3) que calcula los estados y valores propios del Hamiltoniano como función de las constantes de interacción, el programa utiliza la lista de *antigüedades* para cada $(\lambda, \mu)S^P$ generada por *nu-allfla.f*. Los resultados de *energycut.f* son usados por el programa *fit.f* (apéndice E.3.3), el cual utiliza la rutina *minuit* [58] de las librerías del CERN para minimizar la función:

$$FCN(V_{\lambda S}) = \sum_i p_i (E_{imo} - E_{exp})^2, \quad (4.15)$$

donde i va de 1 hasta el número de masas mesónicas consideradas, p_i es el peso dado al valor experimental y E_{imo} y E_{exp} son las energías del modelo y masas experimentales respectivamente.

Los valores experimentales considerados se discuten a continuación.

4.2.1. El rompimiento de la simetría $SU(3)$ de sabor

Como se mencionó desde el primer capítulo, en el Hamiltoniano se supone una masa degenerada para los 3 sabores de los cuarks, la consecuencia es un Hamiltoniano con multipletes de sabor degenerados. Al nivel de la CDC, el rompimiento de la simetría de sabor se debe a la diferencia de las masas de los cuarks *up*, *down* y *strange* [59] y al efecto de excitaciones topológicas llamadas instantones [60]; en la naturaleza el rompimiento de esta simetría se manifiesta por un corrimiento en las masas de un mismo multiplete y por la mezcla de las partículas isoescales ($T = Y = 0$) de los octetes y singuletes de sabor. Sin embargo, el espectro mesónico experimental muestra una jerarquía en el rompimiento de la simetría de sabor, mientras que la diferencia de las masas entre distintos multipletes para una combinación S^{PC} dada es del orden de los GeV's ($\pi(1300) - \pi(135)$, $\rho(1450) - \rho(770)$), los corrimientos dentro de un mismo multiplete son un orden de magnitud menor ($K^+(494) - \pi(135)$, $K^*(892) - \rho(770)$). Esto da sentido al uso de un Hamiltoniano con la simetría de sabor para describir las masas de los diferentes multipletes mesónicos. El corrimiento en cada multiplete puede verse, en este contexto, como la *estructura fina* del espectro mesónico [1]. Como energías representativas de cada multiplete de sabor, se toman, en este trabajo, las masas de las partículas isoescales. Estos estados son comunes a todos los multipletes mesónicos, lo que no ocurre para los estados con isospín diferente de cero. La elección de las masas isoescales como energías representativas de los multipletes mesónicos, obliga a considerar la otra consecuencia del rompimiento de la simetría de sabor mencionada: la mezcla de los isoescales de los octetes y singuletes mesónicos. El Hamiltoniano (4.12) produce estados isoescales con sabor bien definido, experimentalmente este no es el caso, las partículas isoescales físicas son combinaciones lineales de los estados con sabor bien definido. El efecto anterior es más acusado en los isoescales de menor energía 0^{-+} y 1^{-} ($\eta - \eta'$ y $\phi - \omega$) [30], es por ello que en lo siguiente sólo se considera la mezcla de estos estados.

Una manera común de representar la mezcla es a través de una rotación [61]:

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= \cos(\theta_p)|\eta_8\rangle + \sin(\theta_p)|\eta_1\rangle \\ |\eta'\rangle &= -\sin(\theta_p)|\eta_8\rangle + \cos(\theta_p)|\eta_1\rangle, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde $|\eta\rangle$ y $|\eta'\rangle$ son los estados físicos y $|\eta_1\rangle$ y $|\eta_8\rangle$ son los estados *puros* con sabor definido (0,0) y (1,1) respectivamente. La expresión (4.16) para los estados físicos implica que la matriz Hamiltoniana responsable de la mezcla de los estados *puros* es (en la base $|\eta_8\rangle, |\eta_1\rangle$) de la forma:

$$\begin{pmatrix} m_{p8} & H_8 \\ H_8 & m_{p1} \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

donde H_8 es un valor que parametriza el rompimiento de la simetría de sabor y los valores m_{p8} y m_{p1} son las masas isoescales para el caso no físico en el que no hay mezcla ($H_8 = 0$). Dado que nuestro modelo no considera términos que rompan la simetría de sabor, el ajuste del espectro del modelo debe efectuarse respecto a m_{p8} y m_{p1} y no respecto a las masas m_η y $m_{\eta'}$. Estas últimas son los eigenvalores de la matriz (4.17) con los eigenvectores dados por la ec.(4.16), de esta manera, las relaciones entre m_{p8} y m_{p1} y las masas físicas son:

$$\begin{aligned} m_{p8} &= \cos^2(\theta_p)m_\eta + \sin^2(\theta_p)m_{\eta'} \\ m_{p1} &= \cos^2(\theta_p)m_{\eta'} + \sin^2(\theta_p)m_\eta. \end{aligned} \quad (4.18)$$

partícula	(λ_f, μ_f)	J^{PC}	E_{mod} (GeV)	E_{exp} (GeV)	P_i
vacío	(0,0)	0^+	0.0	0.	0
$f_0(400-1200)$	(0,0)	0^+	0.656	0.600	25
$f_0(980)$	(1,1)	0^+	0.797	0.980	25
$f_1(1420)$	(0,0)	1^+	1.445	1.420	100
$f_1(1285)$	(1,1)	1^+	1.363	1.285	100
η' (958)	(0,0)	0^-	0.885	*0.892	300
$\eta(1440)$	(0,0)	0^-	1.379	1.440	0
$\eta(541)$	(1,1)	0^-	0.602	*0.615	300
$\eta(1295)$	(1,1)	0^-	1.428	1.295	20
$\eta(1760)$	(1,1)	0^-	1.671	1.760	10
$\omega(782)$	(0,0)	1^-	0.851	*0.861	300
$\phi(1020)$	(1,1)	1^-	0.943	*0.940	300
$\omega(1420)$	(1,1)	1^-	1.389	1.420	20
$\omega(1600)$	(1,1)	1^-	1.639	1.650	10

Tabla 4.4: Estados usados en el ajuste. Las partículas son enlistadas en la primera columna, sus propiedades de transformación de sabor, espín y paridad son mostradas en la segunda y tercera columnas. En la quinta columna se muestran las masas experimentales tomadas de [62]. Para los mesones η , η' , ω y ϕ (marcados con un asterisco) se enlistan las masas sin mezcla de sabor [ecs.(4.18) y (4.19)]. En la sexta columna se muestra el peso dado a los estados en el ajuste; obsérvese que sólo 4 estados tienen el peso mayor (300). En la cuarta columna se muestran las masas resultantes del ajuste. Con excepción de $f_0(980)$, las masas coinciden con el valor experimental al nivel del 10%.

Fórmulas similares aplican para los isoescales vectoriales:

$$\begin{aligned} m_{\nu 8} &= \cos^2(\theta_\nu) m_\phi + \sin^2(\theta_\nu) m_\omega \\ m_{\nu 1} &= \cos^2(\theta_\nu) m_\omega + \sin^2(\theta_\nu) m_\phi \end{aligned} \quad (4.19)$$

Los ángulos de mezcla son tomados de la literatura [61, 62]: $\theta_p = -23.7^\circ$ y $\theta_\nu = 35.3$. Debido a la ausencia de datos y a que el corrimiento de las masas es menor que en los isoescales vectoriales y pseudoescalares, para el resto de los estados se asume un ángulo de mezcla $\theta = 0$.

4.3. Resultados del ajuste

La lista de valores experimentales usados en el ajuste del modelo son mostrados en la tabla 4.4, para los isoescales η , η' , ω y ϕ se muestran las masas de los estados sin mezcla obtenidas de las masas físicas de acuerdo a las ecs.(4.18) y (4.19). En la última columna se muestran los pesos [ec.(4.15)] dados en el ajuste a los diferentes valores experimentales. En la cuarta columna se muestran las masas que resultan del modelo en el ajuste de las constantes de acoplamiento $\chi_{\Lambda S}$.

En la figura 4.1 se muestra el espectro del modelo en el caso sin interacción ($V_i = 0$) para diferentes sectores S^{PC} , el espectro corresponde a la combinación de los espectros de los osciladores armónicos de 1, 4, 8 y 24 dimensiones. El sabor y multiplicidad de los estados son indicados por $(\lambda, \mu)_p$.

Como puede observarse, las degeneraciones son muy grandes incluso para los estados con energía baja, este es un problema común a los modelos que permiten configuraciones de muchos cuarks: existen muchas maneras de construir un estado $(\lambda, \mu) S^P$ dado. En nuestro modelo estas degeneraciones son rotas por la interacción con el glueball 0^{++} , lo que produce, adicionalmente, estados sin un número definido de pares cuark-anticuark ni de gluones.

El espectro de los estados de espín 0, 1, 2 y 3, usando las constantes de interacción obtenidas en el ajuste, es mostrado en la figura 4.2. Sólo se muestran combinaciones S^{PC} no exóticas [63]. Al lado derecho de cada estado se indica su sabor de acuerdo a la interpretación del modelo, la degeneración, cuando existe, es indicada por un subíndice. En todas las figuras el espectro del modelo es comparado, a la izquierda, con las masas isoescales experimentales tomadas de [62]. Las cajas de las masas experimentales reflejan su incertidumbre, para algunos estados la incertidumbre es tan pequeña que las cajas aparecen como líneas. Los estados experimentales que requieren confirmación y que son omitidos en las tablas sumarias de [62], son indicados en las figuras por cajas punteadas.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

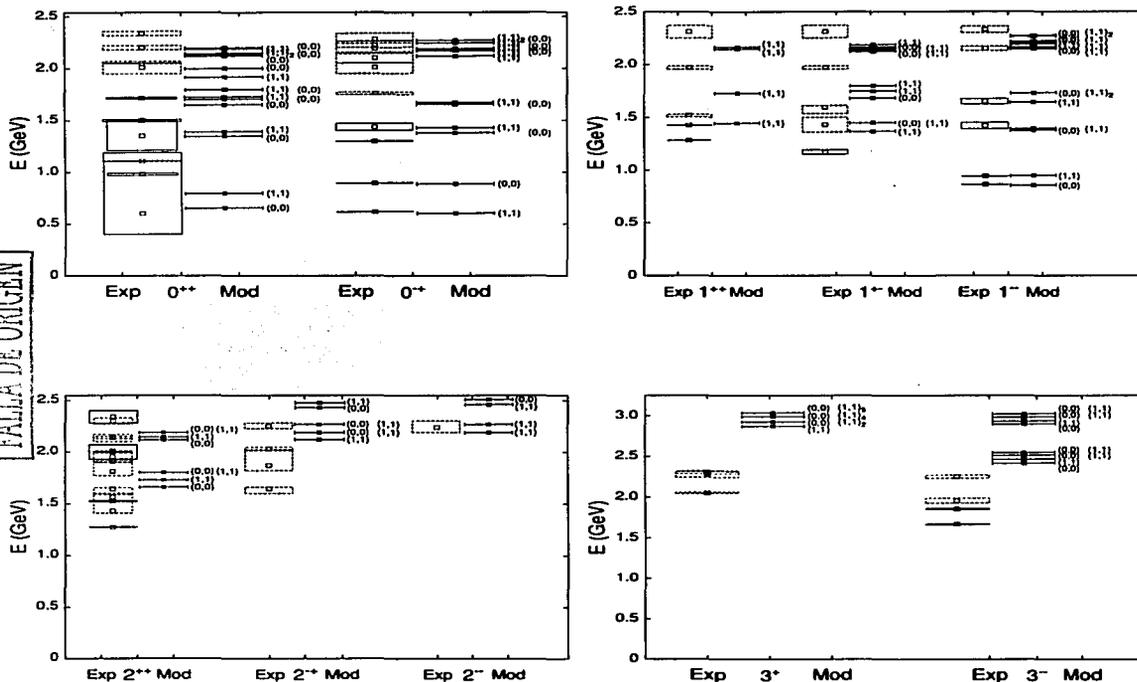


Figura 4.2: Espectro mesónico obtenido con el ajuste de las constantes de acoplamiento del modelo, para espines 0, 1, 2 y 3. En cada sector S^{PC} , se muestran, del lado derecho, las masas del modelo y del lado izquierdo los valores experimentales con su incertidumbre. Las masas experimentales corresponden a las partículas isoescales y fueron tomadas de la ref.[62]. Rectángulos punteados indican estados mesónicos experimentales que requieren confirmación.

partícula	(λ_f, μ_f)	J^*	E_{mod} (GeV)	E_{exp} (GeV)
vacío	(0,0)	0 ⁺	0.0	0.0
$f_0(400-1200)$	(0,0)	0 ⁺	0.671	0.600
$f_0(980)$	(1,1)	0 ⁺	0.796	0.980
$f_1(1420)$	(0,0)	1 ⁺	1.508	1.420
$f_1(1285)$	(1,1)	1 ⁺	1.508	1.285
$\eta'(958)$	(0,0)	0 ⁻	1.005	*0.892
$\eta(1440)$	(0,0)	0 ⁻	1.409	1.440
$\eta(541)$	(1,1)	0 ⁻	0.615	*0.615
$\eta(1295)$	(1,1)	0 ⁻	1.444	*1.295
$\eta(1760)$	(1,1)	0 ⁻	1.784	1.760
$\omega(782)$	(0,0)	1 ⁻	1.005	*0.861
$\phi(1020)$	(1,1)	1 ⁻	1.005	*0.940
$\omega(1420)$	(1,1)	1 ⁻	1.409	1.420
$\omega(1600)$	(1,1)	1 ⁻	1.784	1.650

Tabla 4.5: Resultados del ajuste de \mathcal{V}_{10} a la masa del mesón $\eta(541)$, el resto de las constantes de acoplamiento fueron fijadas a cero.

4.3.1. Los parámetros del ajuste, el canal de sabor (1, 1) y espín 0

Los valores $\mathcal{V}_{\lambda S}$ que resultan del ajuste son:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_{00a} &= 0.0337 \text{ GeV} \\
 \mathcal{V}_{01a} &= 0.0422 \text{ GeV} \\
 \mathcal{V}_{10a} &= 0.1573 \text{ GeV} \\
 \mathcal{V}_{11a} &= 0.0177 \text{ GeV} .
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Los valores críticos para los canales [0, 0] y [0, 1] fueron obtenidos en el capítulo 2 y 3: $\mathcal{V}_{00c} = 0.1584$ GeV y $\mathcal{V}_{01c} = 0.1500$ GeV (ver el comentario que sigue a la ec.(3.37) para la definición de las constantes $\mathcal{V}_{\lambda S}$). Para estimar los valores críticos de los canales [1, 0] y [1, 1], se utiliza la rutina de diagonalización para encontrar el cambio en la estructura del espectro como función de \mathcal{V}_{10} y \mathcal{V}_{11} respectivamente, el resultado es: $\mathcal{V}_{10c} = 0.1425$ GeV y $\mathcal{V}_{11c} = 0.1525$ GeV. Comparando con (4.20), se ve que sólo para el canal [1, 0] el sistema alcanza una fase deformada, este resultado era predecible considerando la baja energía del octete piónico respecto al resto. Recuérdese que la transición a la fase deformada viene acompañada de un estado de paridad negativa muy bajo en energía con los números cuánticos del canal que ha alcanzado esta fase. Como se vió en el capítulo anterior, el valor de transición de algún canal no se ve afectado por el resto de los canales, si los valores de las constantes de acoplamiento de estos últimos son menores que sus respectivos valores críticos; este es el caso de los valores del ajuste [ec.(4.20)]. Otro punto importante es que el valor \mathcal{V}_{10a} es apenas 10% mayor que su valor crítico, lo que indica que, para los valores del ajuste, el sistema se encuentra en una fase condensada $(1, 1)0^-$ dominada por pares fermiónicos, donde, por otra parte, los efectos de los estados espurios del espacio bosónico no son dominantes para el espectro resultante.

El hecho de que sólo la constante de interacción \mathcal{V}_{10} sea mayor que su valor crítico es una indicación de que este canal es el fundamental para reproducir, con el modelo, la estructura del espectro mesónico experimental. Para ilustrar lo anterior, se muestran en la tabla 4.5 las energías que resultan del modelo al fijar las constantes \mathcal{V}_{00} , \mathcal{V}_{01} y \mathcal{V}_{11} a cero y ajustar el valor de la constante \mathcal{V}_{10} a la masa del isoescalar del octete piónico (corregida respecto a la masa física como se discutió en la sección 4.2).

Compárese el resultado de la tabla 4.5 con el obtenido en el ajuste de las 4 constantes de acoplamiento (tabla 4.4). Las energías obtenidas ajustando sólo la constante \mathcal{V}_{10} son similares a las obtenidas con el ajuste completo. Se concluye que, para reproducir el espectro experimental, es suficiente con resolver exactamente el canal $(1, 1)0$ y tratar al Hamiltoniano de interacción del resto de los canales perturbativamente. El modelo restringido sólo al canal $(1, 1)0$ es, en el caso fermiónico, todavía manejable. En este caso la cadena de grupos útil para construir la base fermiónica y calcular los elementos de matriz, es [ver ecs.(2.2) y (3.4)] $U(4\Omega) \supset U(2\Omega/3) \otimes U(6)$ y el número de EPD's necesarios para

construir la irrep del estado base (siguiendo la estrategia del capítulo 3) se reduce de 30 para el caso general a sólo 3. Este es un plan de trabajo futuro.

4.3.2. Estructura colectiva de los estados

En la tabla 4.6 se muestran los valores de expectación del número de pares cuark-anticuark y del número de glueballs para los estados usados en el ajuste (tabla 4.4). En la columna 5 se muestra el contenido de pares del tipo $[\lambda, S] = [1, 0]$ y en la columna 6 el contenido de todos los tipos de pares.

partícula	E_{mod}	(λ_f, μ_f)	SP	$\langle n_{10} \rangle$	$\langle n_f \rangle$	$\langle n_g \rangle$
vacío	0.0	(0,0)	0^+	3.118	3.177	1.705
$f_0(400-1200)$	0.656	(0,0)	0^+	0.457	0.471	0.321
$f_0(980)$	0.797	(1,1)	0^+	3.781	3.832	1.495
$f_1(1420)$	1.445	(0,0)	1^+	2.392	3.434	0.902
$f_2(1270)$	1.363	(1,1)	1^+	2.464	3.519	0.993
$\eta'(958)$	0.885	(0,0)	0^-	2.509	3.562	1.292
$\eta(1440)$	1.379	(0,0)	0^-	0.773	1.790	0.444
$\eta(541)$	0.602	(1,1)	0^-	2.711	2.766	1.163
$\eta(1295)$	1.428	(1,1)	0^-	1.611	1.638	0.531
$\eta(1760)$	1.671	(1,1)	0^-	3.535	4.581	1.254
$\omega(782)$	0.851	(0,0)	1^-	2.563	3.621	1.341
$\phi(1020)$	0.943	(1,1)	1^-	2.394	3.438	1.198
$\omega(1420)$	1.389	(1,1)	1^-	0.853	1.870	0.468
$\omega(1600)$	1.639	(1,1)	1^-	3.546	4.597	1.206

Tabla 4.6: Contenido fermiónico y bosónico de algunos estados. En las columnas se indican, respectivamente, la energía según el ajuste del modelo, el sabor $[(\lambda_f, \mu_f)]$, el espín S y la paridad (P), el valor de expectación de los pares cuark-anticuark del canal $(1,1) 0^-$ ($\langle n_{10} \rangle$), el valor de expectación del número total de pares cuark-anticuark ($\langle n_f \rangle$) y el valor de expectación del número de glueballs 0^{++} ($\langle n_g \rangle$).

La contribución de los pares $[1, 0]$ es dominante no sólo respecto al resto de los pares cuark-anticuark, sino también respecto al contenido de glueballs. En particular, el contenido de pares fermiónicos en el estado base es aproximadamente el doble que el contenido de glueballs. El modelo sugiere que la estructura colectiva del estado base de la CDC es la de un condensado de gluones y cuarks-anticuarks en la que estos últimos dominan sobre los primeros y se encuentran correlacionados en pares acoplados a espín 0 y sabor $(1, 1)$. Esta estructura colectiva se preserva en los estados excitados (mesones), los cuales tienen, por un lado, una estructura colectiva de gluones y pares cuark-anticuark acoplados a espín 0 y sabor $(1, 1)$ y, por otro, pares cuark-anticuark aproximadamente puros de los otros canales que se superponen a la estructura colectiva anterior. Según el modelo, ningún estado puede describirse como un estado puramente gluónico.

La energía del estado base medida respecto al vacío perturbativo del modelo (el estado base para el caso sin interacción) es $E_{vac} = -0.726$ GeV. Suponiendo un volumen de $V_{el} = \frac{4\pi}{3} r_{el}^3$ para el sistema físico representado por el modelo, con $r_{el} \approx 1 fm$, se obtiene la siguiente estimación para la densidad de energía del vacío no perturbativo: $-0.173 \text{ GeV}/\text{fm}^3 = -(0.192 \text{ GeV})^4$, que es un valor consistente con las constantes de la bolsa (B) reportadas en la literatura [17]. Este valor es menor que la densidad de energía del vacío no perturbativo de la CDC estimada con las reglas de suma SVZ [8], la cual es $\epsilon_{np} \approx -0.5 \text{ GeV}/\text{fm}^3$, esta densidad de energía es medida respecto al vacío perturbativo de la CDC que no corresponde al vacío perturbativo de nuestro modelo.

Si bien a lo largo de la tesis se ha supuesto una masa de $1/3$ GeV para la masa de los cuarks, este es un parámetro que puede ser modificado. Se realizó un ajuste al espectro experimental dejando libre este parámetro, el resultado fue similar al mostrado en los párrafos anteriores salvo por el valor de la masa fermiónica: $\omega_f \sim 0.4$ GeV; puede considerarse a este valor como un promedio de la masa de los cuarks constituyentes $(m_u + m_d + m_s)/3$ que coincide bien con el valor promedio reportado en otros modelos [20]. Sin embargo, dado que los resultados generales no se ven modificados por este cambio, no se creyó necesario modificar los resultados presentados.

4.3.3. Estados exóticos

En los modelos tradicionales de cuarks-constituyentes, la estructura de los estados mesónicos es la de un par cuark-anticuark, en este esquema no hay lugar para estados con las combinaciones $J^{PC}=0^{+-}$, 0^{--} , 1^{-+} , 2^{+-} , etc. En nuestro modelo, por el contrario, sí es posible obtener dichas combinaciones. En la tabla 4.7 se muestran las masas de los estados 0^{--} y 1^{-+} más bajos en energía que resultan del modelo con las constantes $\mathcal{V}_{\lambda,S}$ del ajuste. La energía del estado exótico de menor energía (1^{-+})

0^{--}	(1,1)	2.189 GeV
	(1,1)	2.268 GeV
1^{-+}	(1,1)	1.727 GeV
	(0,0)	2.189 GeV
	(1,1)	2.189 GeV
	(1,1)	2.213 GeV
	(1,1)	2.268 GeV

Tabla 4.7: Energías del modelo para los estados exóticos de menor energía.

es similar a la masa de las partículas exóticas $\pi(1400)$ y $\pi(1600)$ reportadas en la literatura [62]. Estas últimas son las combinaciones exóticas de las que se tiene mayor certeza experimental.

4.3.4. Los bariones dentro del modelo

Como se discutió en los primeros dos capítulos, el sector bariónico no es bien descrito por el modelo en su forma actual. La razón es que los cuarks de valencia (cuarks no creados en correlación con un anticuark) con los que se construyen los bariones, son, en la forma actual del modelo, *espectadores* que simplemente se sobrepone a la estructura colectiva del sector mesónico. En la forma actual del modelo, los cuarks de valencia se limitan a disminuir el número de pares cuark-anticuark que es posible crear, de 2Ω a $2\Omega - 3$, lo que produce un corrimiento hacia valores mayores de los valores críticos de las constantes de interacción para los que ocurren las transiciones a las fases colectivas o deformadas. De esta manera, las masas bariónicas de menor energía son aproximadamente $m_B = 3\omega_f - E_{vac} \approx 1 + 0.7 = 1.7$ GeV; muy por encima del valor experimental ~ 1 GeV. Esta situación puede remediarse introduciendo términos que acoplen a los cuarks de valencia con la estructura colectiva a través de un acoplamiento con los glueballs. La forma concreta de esta interacción ya fue sugerida en el análisis del capítulo 1 y es discutida en el capítulo 6.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
ITALIA DE ORIGEN

Capítulo 5

Temperatura finita

El estudio del sistema de cuarks y gluones constituyentes a temperaturas y densidades finitas, es el tema del presente capítulo. La mayoría de las herramientas necesarias para realizar este estudio ya han sido provistas por los resultados de los capítulos previos (espectro, clasificación de los estados, etc.). El tema de este capítulo es el tema central de la tesis doctoral de Samuel Jesgarz [64]. Otra discusión complementaria a la presentada en este capítulo, ha sido publicada en la ref.[65].

En la primera sección se calcula la gran función de partición y se derivan las fórmulas útiles para obtener las cantidades observables, en esta tarea la clasificación del espacio fermiónico respecto a las cadenas del grupo $U(4\Omega)$ [ecs.(2.2) y (4.1)] será de gran ayuda. En la segunda sección se aplica el modelo a la descripción de la transición al plasma de cuarks y gluones (PCG) [66, 67] y se comparan algunas de sus predicciones (producción de piones y kaones) con resultados experimentales.

5.1. La gran función de partición y el grupo $U(4\Omega)$

A manera de introducción, se calcula la función de partición de la versión más simple del modelo, i.e., la versión con pares cuark-anticuark acoplados escalarmente en espín y sabor (capítulo 2). Esta versión ha sido estudiada extensamente (sin el acoplamiento bosónico) por otros autores [68], sin embargo, el uso del grupo $U(4\Omega)$ permite una derivación más clara de la función de partición que hace muy simple su extensión al estudio de Hamiltonianos más generales.

La clasificación de los estados fermiónicos puede efectuarse usando la cadena presentada en el capítulo 2:

$$\begin{aligned}
 [1^N]_{U(4\Omega)} &\supset [\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_{2\Omega}]_{U(2\Omega)} \otimes [h_1 h_2]_{U(2)} & h_1 + h_2 = N \\
 & & \cup \quad \rho_{\mathcal{J}} \\
 & & SU_{\mathcal{J}}(2) \quad \mathcal{J} = \frac{h_1 - h_2}{2}, \mathcal{M},
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde \mathcal{J} es el pseudoespín del modelo de Lipkin [19]. El Hamiltoniano del capítulo 2 está escrito en términos de los generadores del grupo $SU_{\mathcal{J}}(2)$, de este modo, los eigenestados del Hamiltoniano se ordenan según el valor del pseudoespín. En la interpretación del modelo, el número bariónico es:

$$B = \frac{N - 2\Omega}{3} = \frac{h_1 + h_2 - 2\Omega}{3} . \tag{5.2}$$

Dado que la reducción de $U(4\Omega)$ a $U(2\Omega) \otimes U(2)$ es única, la gran función de partición del sistema es:

$$Z = \sum_{h_1=0}^{2\Omega} \sum_{h_2=0}^{h_1} \dim_{U(2\Omega)}([\tilde{h}]) e^{(\beta\mu_B \frac{h_1+h_2-2\Omega}{3})} \sum_K e^{-\beta E_K^{\mathcal{J}}} , \tag{5.3}$$

donde $\dim_{U(2\Omega)}([\tilde{h}])$ es la dimensión en $U(2\Omega)$ de la irrep transpuesta $[\tilde{h}] \equiv [\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_{2\Omega}]$ obtenida de la irrep $[h_1 h_2]$ de $U(2)$ intercambiando columnas por renglones, μ_B es el potencial químico bariónico y $E_K^{\mathcal{J}}$ son los eigenvalores del Hamiltoniano en la representación con pseudoespín \mathcal{J} . Para el caso sin interacción:

$$E_K^{\mathcal{J}} = 2\omega_f(\mathcal{M} + \Omega) + \omega_b n_b , \tag{5.4}$$

con $n_b = 0, 1, \dots$ y $\mathcal{M} = -\mathcal{J}, \dots, \mathcal{J}$ [ver ec.(2.15)]. En el caso con interacción las energías $E_K^{\mathcal{J}}$ pueden obtenerse numéricamente.

La dimensión de la irrep transpuesta $[\tilde{h}]$ es:

$$\dim_{U(2\Omega)}([\tilde{h}]) = \binom{2\Omega}{h_1} \binom{2\Omega+1}{h_2} \frac{h_1 - h_2 + 1}{h_1 + 1}. \quad (5.5)$$

Sustituyendo esta expresión en (5.3), se puede comprobar (apéndice E.1) que la ec.(5.3) es igual al resultado obtenido por Kuriyama et.al. [68]:

$$\mathcal{Z} = \left(e^{-\beta\mu_B/3} + e^{\beta\mu_B/3} \right)^{2\Omega} \sum_{2\tau=0}^{2\Omega} \binom{2\Omega}{2\tau} \left(\frac{e^{-\beta\mu_B/3}}{1 + e^{-2\beta\mu_B/3}} \right)^{2\tau} \sum_{k=0}^{\tau} g_k^{\tau} \sum_K e^{-\beta E_K^{-k}}, \quad (5.6)$$

donde

$$g_k^{\tau} = \binom{2\tau}{k} \frac{2\tau - 2k + 1}{2\tau - k + 1},$$

y la función $[\tau]$ es igual a τ si τ es entero y $\tau - 1/2$ si es semientero.

La factorización del término $(e^{-\beta\mu_B/3} + e^{\beta\mu_B/3})^{2\Omega}$ en la ec.(5.6), permite eliminarlo en el cálculo de las observables y evitar, así, problemas de *sobreflujo* en los cálculos numéricos.

La energía interna y la capacidad calorífica $[(\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2)/T^2]$ se obtienen fácilmente de la ec.(5.6) introduciendo en la última de las sumas un factor $E_K^{\tau-k}$ y $(E_K^{-k})^2$ respectivamente. Con el programa *funpar0.f* (apéndice E.1.2) se calculan los eigenvalores $E_K^{\mathcal{J}}$ para todos los valores de $\mathcal{J} = 1/2, 1, 3/2, \dots, \Omega$; estos eigenvalores son usados por el programa *funpar1dp.f* (apéndice E.3.4) para calcular la energía y capacidad calorífica del sistema para diferentes valores de T y μ_B . Los resultados son mostrados en las figuras 5.1 y 5.2. Obsérvese, para el caso con interacción, el cambio de la energía interna en un rango

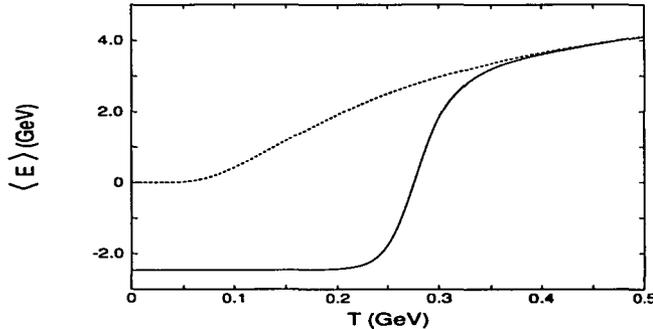


Figura 5.1: Energía interna $\langle E \rangle$ como función de la temperatura T para el Hamiltoniano del capítulo 2 [ec.(2.15)]. La línea discontinua es el resultado para el caso sin interacción ($V_1 = 0.0$ GeV). La línea continua corresponde a un valor de la constante de acoplamiento mayor que el valor crítico $V_1 = 0.011$ GeV $> V_c \approx 0.085$ GeV. Para $V_1 < V_c$, las curvas de la energía interna son similares al caso sin interacción. A partir de $V_1 = V_c$, el comportamiento de la energía interna como función de T se modifica, presentando un cambio brusco en un rango pequeño de T . Se usó el valor $\mu_B = 0$.

muy pequeño de temperaturas cerca de $T \sim 0.25$ GeV.

Para el Hamiltoniano del capítulo 4, la cadena que clasifica a los estados, en el caso particular $\Omega = 9$, es:

$$\begin{array}{ccccccc} [1^N] & & [\tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \tilde{h}_3] & & [h_1 \dots h_{12}] & & \sum_{i=1}^{12} h_i = N \\ U(4\Omega) & \supset & U_c(3) & \otimes & U(12) & & \\ & & \cup & & \cup & & \\ (\lambda_C, \mu_C) & & SU_C(3) & & (\lambda_f, \mu_f) & \otimes SU_S(2) & S M \end{array} \quad (5.7)$$

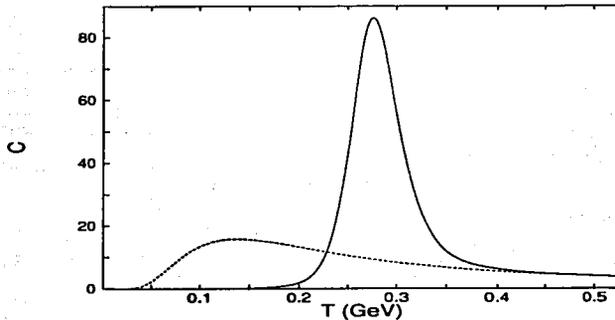


Figura 5.2: Capacidad calorífica C como función de la temperatura T para el Hamiltoniano del capítulo 2 [ec.(2.15)]. Las curvas corresponden a los mismos casos de la figura 5.1. Obsérvese el súbito aumento de C para $V_1 = 0.011 \text{ GeV} > V_c$ en comparación con la curva del caso sin interacción.

La irrep $[\tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \tilde{h}_3]$ de $U_c(3)$ se obtiene de la irrep de $U(12)$ intercambiando renglones por columnas, por ello se cumple que $\tilde{h}_i \leq 12$.

Los eigenestados del Hamiltoniano se ordenan en irreps del grupo $U(12)$, por lo tanto, procediendo del mismo modo que en el caso de la ec.(5.3), la gran función de partición es:

$$Z = \sum_{\tilde{h}_1=0}^{12} \sum_{\tilde{h}_2=0}^{\tilde{h}_1} \sum_{\tilde{h}_3=0}^{\tilde{h}_2} \dim_{U_c(3)}([\tilde{h}]) e^{\beta \mu_n B} \sum_i e^{-\beta(E_i^{[\tilde{h}]} - \mu_c s_i - \mu_T T_i)} \quad (5.8)$$

donde se han introducido fugacidades para el isoespín y el sabor que permitirán fijar sus promedios termodinámicos. De acuerdo con la interpretación del modelo, en la que los números de cuarks y anticuarks de valencia (que no se modifican por la acción del Hamiltoniano) son $n_{qval} = h_7 + h_8 + \dots + h_{12}$ y $n_{qval} = 2\Omega - (h_1 + h_2 + \dots + h_6)$ [ver ec.(2.10)], el número bariónico es ahora:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{12} h_i - 2\Omega}{3} \quad (5.9)$$

La dimensión $\dim_{U_c(3)}([\tilde{h}])$ es igual a: $\frac{1}{2}(\lambda_c + 1)(\mu_c + 1)(\lambda_c + \mu_c + 2)$ con $\lambda_c = \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2$ y $\mu_c = \tilde{h}_2 - \tilde{h}_3$.

Los eigenvalores $E_i^{[\tilde{h}]}$ para cada irrep de $U(12)$ son los calculados en el capítulo anterior con las constantes de acoplamiento obtenidas en el ajuste al espectro mesónico. Sin embargo, en el capítulo anterior sólo se calculó el espectro de la irrep $[3^6 0^6]$ de $U(12)$. Para calcular el espectro para toda irrep de $U(12)$, se asume que el único efecto de los cuarks y anticuarks de valencia es el bloqueo de los niveles y la consecuente disminución del número de pares cuark-anticuark que es posible crear ($2J$). Los valores de la irrep de $U(12)$ determinan este número:

$$2J = 2\Omega - n_{qval} - n_{qval} = \sum_{i=1}^6 h_i - \sum_{i=7}^{12} h_i \quad (5.10)$$

En el caso de la irrep $[3^6 0^6]$: $2J = 2\Omega = 18$ ($\Omega = 9$). El cambio en el número máximo de pares cuark-anticuark que es posible crear modifica los cortes al espacio del modelo bosónico [ver ec.(4.14)]:

$$\begin{aligned} N_{00} + N_{01} + N_{10} + N_{11} &\leq 2J \\ N_{01} &\leq J \\ N_{10} &\leq \frac{2J}{3} \\ N_{11} &\leq \frac{J}{3} \end{aligned} \quad (5.11)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde, como en el capítulo 4, $N_{\lambda S}$ es el número de pares cuark-anticuark (representados por excitaciones bosónicas) acoplados a sabor (λ, λ) y espín S . Otra contribución a Z viene del número de estados posibles que se pueden construir con los cuarks y anticuarks de valencia, por ejemplo, un cuark de valencia puede estar en $N_f N_\sigma = 6$ diferentes estados, donde $N_f = 3$ es el número de sabores y $N_\sigma = 2$ es el número de proyecciones del espín (el color ya fue tomado en cuenta por la dimensión de la irrep de $U_c(3)$). Cada estado de los cuarks y anticuarks de valencia (a los que se sobreponen las excitaciones de los pares cuark-anticuark) contribuye de modo diferente a la extrañeza (s_i) y al isoespín (T_{z_i}), para tomar en cuenta estas contribuciones de los cuarks y anticuarks de valencia, se asume que forman irreps del grupo $U(6)$ y que estas irreps están dadas por:

$$U_q(6) : [h_7 h_8 h_9 h_{10} h_{11} h_{12}] , \quad (5.12)$$

para los cuarks de valencia y por:

$$U_q(6) : \{h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 h_6\} , \quad (5.13)$$

para los anticuarks de valencia. Reduciendo las irreps anteriores según $U_q(6) \supset SU_{qf}(3) \otimes SU_{qs}(2)$, y subsecuentemente de $SU_{qf}(3)$ a $SU_{qT} \otimes U_{qY}(1)$, permite obtener el isoespín e hipercarga ($Y = s + B$) de las diferentes configuraciones de los cuark y anticuarks de valencia para una irrep dada de $U(12)$.

En resumen, la aproximación de la función de partición que se toma consiste en: obtener el espectro del modelo para toda irrep de $U(12)$ cambiando el parámetro 2Ω por $2J^1$ y reducir las irreps $\{h_1 \dots h_6\}$ y $\{h_7 \dots h_{12}\}$ de $U(6)$ a $SU(3) \otimes SU(2)$ para obtener la contribución de los cuarks y anticuarks de valencia a la extrañeza y al isoespín. La reducción de $U(6)$ a $SU(3) \otimes SU(2)$ se efectúa con el programa *ubs.f* (apéndice E.3.4), la subsecuente reducción de $SU(3)$ al grupo $SU(2)$ de isoespín y $U(1)$ de la hipercarga es bien conocida y existen formulas analíticas para efectuarla [50]. La expresión aproximada de la función de partición (5.8) que resulta es:

$$Z \approx \sum_{\tilde{h}_1=0}^{12} \sum_{\tilde{h}_2=0}^{\tilde{h}_1} \sum_{\tilde{h}_3=0}^{\tilde{h}_2} \dim_{U_c(3)}([\tilde{h}_i]) e^{\beta(\mu_u - \mu_s)B} \times F_{qu}(\beta\mu_s, \beta\mu_T, [h_7 \dots h_{12}]) F_{qv}(\beta\mu_s, \beta\mu_T, [h_1 \dots h_6]) \times F_{qq}(\beta, \beta\mu_s, \beta\mu_T, 2J) , \quad (5.14)$$

donde se han factorizado las contribuciones de los cuarks de valencia, la de los anticuarks de valencia y la de los pares cuark-anticuark acoplados al glueball 0^{++} . La contribución de los cuarks de valencia es (una expresión similar aplica para los anticuarks de valencia):

$$F_{qu}(\beta\mu_s, \beta\mu_T, [h]) = \sum_{k=1}^{kmax([h])} \text{mult}(S_k, (\lambda_k, \mu_k)) (2S_k + 1) \sum_{p=0}^{\lambda_k} \sum_{q=0}^{\mu_k} e^{\beta\mu_s Y_{qu}} \sum_{T_{quz}=-T_{qu}}^{T_{qu}} e^{\beta\mu_T T_{quz}} , \quad (5.15)$$

donde k es un índice que corre sobre las diferentes irreps $S_k, (\lambda_k, \mu_k)$ de $SU(2) \otimes SU(3)$ contenidas en la irrep $[h]$ de $U(6)$, cada una de éstas con multiplicidad $\text{mult}(S_k, (\lambda_k, \mu_k))$, p y q son índices involucrados en la reducción de $SU(3)$ a $SU(2) \otimes U(1)$ y dan la hipercarga e isoespín a través de $Y_{qu} = -(2\lambda + \mu - 3(p + q))/3$ y $T_{qu} = (\mu + p - q)/2$. La contribución de los pares cuark-anticuark acoplados al glueball 0^{++} es:

$$F_{qq}(\beta, \beta\mu_s, \beta\mu_T, 2J) = \sum_{P=\pm} \sum_{S\lambda\mu} (2S + 1) \sum_i \sum_{\lambda} \sum_{p=0}^{\mu} \text{mult}(E_i^{2J}) e^{-\beta(E_i^{2J} - \mu_s Y_{qqi})} \sum_{T_{qqz}=-T_{qq}}^{T_{qq}} e^{\beta\mu_T T_{qqz}} , \quad (5.16)$$

donde el índice i corre sobre los diferentes estados con los mismos números cuánticos $(\lambda, \mu)S^P$, estos estados se obtienen de la diagonalización numérica del Hamiltoniano bosónico [ec.(4.12)] con 2Ω sustituido por $2J$ y usando los cortes de la ec.(5.11). Y_i y T_{iz} son la hipercarga y proyección del isoespín y están relacionadas con p y q como ya se mencionó en renglones previos. La multiplicidad del estado i esta dada por $\text{mult}(E_i^{2J})$.

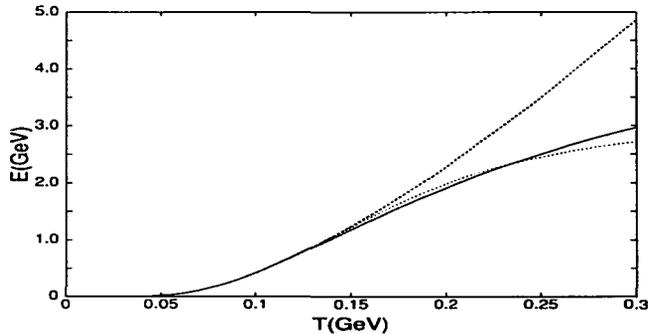
Algunas observaciones importantes:

- En la gran función de partición (5.14) las contribuciones de la extrañeza e isoespín han sido factorizadas, lo cual es posible debido a sus propiedades aditivas, $T_z = T_{quz} + T_{qvz} + T_{qqz}$, para la extrañeza, adicionalmente, se ha usado la relación $s = Y - B = Y_{qu} + Y_{qv} + Y_{qq} - B$.

¹ Este cambio es fácilmente implementable en el programa de diagonalización *enernewcutfla.f* (apéndice E.3.4)

- Como se discutió en el capítulo anterior, el modelo produce multipletes de sabor degenerados y, además, las masas de los mesones $\eta - \eta'$ y $\omega - \phi$ son las masas no físicas de las partículas sin mezcla de sabor. Puesto que las masas de estos nonetes son las de más baja energía, su contribución a la función de partición se hará corrigiendo con el ángulo de mezcla [ecs.(4.18) y (4.19)] para obtener las masas físicas de las partículas isoescalares y aplicando la fórmula de Gell-Mann-Okubo para obtener las masas del resto de las partículas en estos dos multipletes.
- En (5.14) la suma sobre irreps de $U_c(3)$ se hace sobre todos los valores permitidos de las \tilde{h}_i , esto incluye estados con color diferente de cero. En la siguiente sección se estudiarán dos casos, uno en el que se permiten estados con color abierto y otro en el que sólo se permiten estados con color cero. Para este último caso, las 3 primeras sumatorias en (5.14) se sustituyen por una sola ($\sum_{\tilde{h}_i=0}^{12}$), de acuerdo a la condición de color cero que implica $\tilde{h}_2 = \tilde{h}_3 = \tilde{h}_1$ [ver los comentarios siguientes a la ec.(4.1)].
- Aunque por completo se introdujo un potencial químico para la proyección del isoespín, en lo que resta del capítulo se supondrá un valor $\mu_T = 0$. Esto es así ya que el valor de μ_T en las situaciones físicas consideradas, es uno y dos órdenes de magnitud menor que μ_s y μ_B respectivamente.
- El Hamiltoniano considera el acoplamiento de los cuarks y anticuarks con el glueball 0^{++} . El resto de glueballs de la ref.[15] entran en el modelo como simples espectadores. En el rango de temperaturas considerado, el efecto de estos glueballs es despreciable debido a que sus energías son mayores que 2 GeV. La aseveración anterior fue checada con los programas escritos (apéndice E.3.4), en los que existe la opción de incluir el espectro de los glueballs distintos al 0^{++} , en el cálculo numérico de la gran función de partición.

La aproximación (5.14) introduce estados espurios adicionales a los mencionados en el capítulo 4, sin embargo, es consistente con la posición asumida en dicho capítulo de utilizar reglas sencillas para restringir el espacio bosónico mapeado y, además, el error introducido es suprimido exponencialmente en la función de partición y no afecta mucho al resultado en el rango de temperaturas de interés ($0 \leq T \leq 0.200$ GeV, $\beta \gg 1$). Esta afirmación es corroborada por la figura 5.3, en la que se grafican, en el caso sin interacción, la energía interna como función de la temperatura utilizando (5.14) con las reglas (5.11) y el resultado exacto en el espacio fermiónico [68]. Como se puede observar, la curva obtenida



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 5.3: Energía interna como función de la temperatura para el caso sin interacción. La línea sólida es el resultado fermiónico exacto. La línea punteada corresponde al Hamiltoniano bosónico con los cortes de la ec.(5.11). La línea discontinua es el resultado del Hamiltoniano bosónico, pero sin usar los cortes diferenciados de la ec.(5.11), limitando únicamente el número de pares de cualquier tipo hasta $2J$.

usando el modelo bosónico con los cortes (5.11) es similar (en el rango de temperaturas mostrado) al resultado exacto fermiónico. Como ilustración, en la misma figura se muestra el resultado que se obtiene

con el modelo bosónico sin usar los cortes diferenciados de la ec.(5.11) y limitando solamente el número de pares cuark-anticuark hasta $2J$. En este último caso la energía interna crece mucho más rápido que en los casos anteriores, reflejando el hecho de que el crecimiento en el número de estados espurios domina sobre su supresión exponencial a partir de una temperatura relativamente baja. Este no es el caso de la energía interna calculada usando los cortes (5.11), lo que es una prueba de que la dimensión del espacio bosónico mapeado reproduce bien la correspondiente dimensión del espacio fermiónico y de que el efecto de los estados espurios es minimizado, al menos en el rango $0 \leq T \leq 0.250$ GeV. Este último es, por otro lado, el rango de interés en la aplicación del modelo al estudio de la transición al PCG.

Con la notación corta $\mathcal{Z}_a = \sum_j e^{-\beta \epsilon_j}$ para (5.14), las observables ($\langle \mathcal{O} \rangle$) son:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_a = \frac{\sum_j \mathcal{O}_j e^{-\beta \epsilon_j}}{\mathcal{Z}_a}, \quad (5.17)$$

donde $a = (0,0)$ cuando sólo se consideran estados sin color y $a = c$ cuando se incluyen estados con color. Las observables que se calcularán serán la energía interna (E), la capacidad calorífica C , el número bariónico promedio (B), la extrañeza (s) y el número promedio de diferentes partículas (n_k), donde k denota la partícula. Si la energía (masa), número bariónico y extrañeza de la partícula k son E_k , B_k y s_k , su número promedio es:

$$\langle n_k \rangle = \frac{e^{-\beta(E_k - \mu_B B_k - \mu_s s_k)}}{\mathcal{Z}_a}. \quad (5.18)$$

Con los resultados anteriores se escribió el programa *ztot0fla.f* (apéndice E.3.4) que calcula los espectros de energía para todos los valores de $2J$, estos valores son usados por los programas *tonsave.f* y *ztot-probfla.f* (apéndice E.3.4) para calcular numéricamente la gran función de partición y las observables termodinámicas.

5.2. Aplicación al estudio de la transición al PCG

En esta sección se aplican los resultados de la anterior para obtener algunas cantidades de interés en el estudio de la transición al plasma de cuarks y gluones (PCG).

El confinamiento de color, que tiene su origen en una simetría exacta de la naturaleza [69], es incorporada en el modelo a través del Hamiltoniano \hat{f} del capítulo 1 [ec.(1.20)], pueden obtenerse estados con color diferente de cero, por ejemplo, al excitar un solo cuark de valencia. Estos estados pertenecen a irreps diferentes a la de los mesones y estado base. Tomar el límite $f \rightarrow \infty$ es equivalente a simplemente remover los estados con color en el cálculo de la función de partición. De este modo, a lo largo de la discusión siguiente, se supondrán los dos escenarios: a) uno en el que se consideran las configuraciones con color abierto a temperaturas mayores que un valor crítico T_c (deconfinamiento) y b) otro en el que sólo se consideran las configuraciones con color cero (fase confinada) a temperaturas $T < T_c$. Con el estudio de estos dos casos será posible estimar los valores T_c y μ_{bc} para los cuales ocurre la transición al PCG.

En la figura 5.4 se muestra la energía interna como función de la temperatura para densidad bariónica y extrañeza nula $\mu_B = \mu_s = 0$. Las curvas que cruzan el origen de coordenadas corresponden al caso sin interacción ($\mathcal{V}_{LS} = 0$) usando el modelo bosónico y el resultado exacto fermiónico, la curva que cruza al eje de las ordenadas por abajo del cero corresponde al caso con interacción usando la ec.(5.14), los cortes (5.11) y los valores \mathcal{V}_{LS} obtenidos en el ajuste del capítulo anterior. El valor al que tiende esta curva en $T = 0$ es la energía del estado base ($E_{vac} \sim -0.73$ GeV) medida respecto a la energía del vacío perturbativo. En todas las curvas de la figura 5.4 se tomaron en cuenta las configuraciones con color diferente de cero ($\mathcal{Z}_{a=c}$). Las curvas no presentan visos de una transición de fase. De acuerdo con los resultados de la ref.[44], el comportamiento termodinámico del sistema es independiente del valor de la constante de acoplamiento siempre que ésta sea menor que sus valor crítico ($\mathcal{V} < \mathcal{V}_c$), en estos casos el cambio de la energía respecto a la temperatura es suave y se asocia con un cruzamiento. Para valores de la constante de acoplamiento mayores que \mathcal{V}_c el comportamiento termodinámico se modifica y el sistema presenta un cambio brusco en la energía en un rango de temperatura muy pequeño. Este cambio brusco es de naturaleza diferente al cambio en el caso sin interacción y se asocia con una transición de fase de primer orden [44]. En la figura 5.4 el cambio de la energía en el caso con interacción es casi tan suave como en el caso libre. La razón de este comportamiento se encuentra en los valores de las constantes de

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

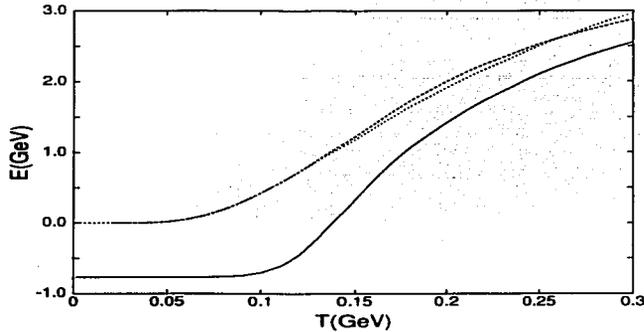


Figura 5.4: Energía interna como función de la temperatura. El caso sin interacción es mostrado por las líneas discontinua y punteada usando, respectivamente, el resultado exacto fermiónico y el modelo bosónico con los cortes (5.11). La línea continua corresponde al modelo bosónico con los cortes (5.11) usando los valores $V_{\lambda S}$ obtenidos en el ajuste al espectro mesónico experimental (capítulo 4).

acoplamiento usados [ec.(4.20)]: sólo en el canal $(\lambda, \lambda)S = (1, 1)0$ la constante de acoplamiento es mayor que su valor crítico, para el resto de los canales, el sistema se encuentra en la fase perturbativa. La superposición de estas dos situaciones produce un cambio en la energía más cercano a un cruzamiento que a una transición de fase de primer orden.

En la figura 5.5 se grafican el valor promedio del operador de Casimir del color ($C_2 \equiv \langle C_2 \rangle$) y su variación ($\Delta C_2 \equiv \sqrt{\langle C_2^2 \rangle - \langle C_2 \rangle^2}$) usando la gran función de partición $Z_{a=c}$ en el caso $\mu_B = \mu_s = \mu_T = 0$. Los eigenvalores del operador de Casimir son $C_2(\lambda_C, \mu_C) = \lambda_C^2 + \lambda_C \mu_C + \mu_C^2 + 3(\lambda_C + \mu_C) \geq 0$, como referencia, para la irrep (1,0) de color $C_2 = 4$ y para (1,1) $C_2 = 9$.

En $T_c = 0.170$ GeV la variación del color es igual a su valor promedio, para $T > T_c$ la variación es menor y para $T < T_c$ ocurre lo contrario. Esto da una imagen para establecer la temperatura en la que se espera una transición de la fase con estados de color abierto (deconfinada) a la fase con puros estados de color cero (confinada o hadrónica): En $T > T_c$ la probabilidad de encontrar estados con color cero ($C_2 = 0$) es pequeña ya que la variación ΔC_2 no es suficientemente grande como para permitirlos, se tiene, entonces, una fase deconfinada (el PCG) en la que dominan los estados con color; en $T < T_c$ la probabilidad de encontrar estados con color cero aumenta significativamente debido a que la variación ΔC_2 es mayor que el promedio C_2 , en esta situación el PCG se disuelve al formarse pequeños volúmenes de color cero. Con la interpretación anterior, el modelo permite establecer, a través de la igualdad $C_2 = \Delta C_2$, el valor de T para el que ocurre la transición del PCG a la fase hadrónica. De acuerdo con esto, la temperatura crítica para $\mu_B = \mu_s = 0$ es $T_c = 0.170$ GeV.

Para determinar la presión del sistema (presión de la bolsa) en la transición, se requiere introducir un volumen representativo (V_{el}) para el sistema, un valor razonable para éste es $V_{el} = \frac{4\pi}{3} r_{el}^3$ con $r_{el} = 1 fm$. Usando este valor y la temperatura crítica para $\mu_B = \mu_s = 0$ en la formula

$$P_c = \frac{T \log Z_{a=c}}{V_{el}}, \quad (5.19)$$

se obtiene la presión crítica $P_c^{\frac{1}{4}} = 0.18$ GeV, la cual es consistente con valores estándar para la presión de la bolsa en el modelo del MIT [17].

Para determinar la curva de transición al PCG para μ_B y μ_s diferentes de cero en el caso de extrañeza (s) = 0, se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones respecto a las variables T , μ_B y μ_s :

$$\begin{aligned} \frac{T \log Z_{a=c}(T, \mu_B, \mu_s)}{V_{el}} &= P_c \\ \langle s \rangle(T, \mu_B, \mu_s) &= 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

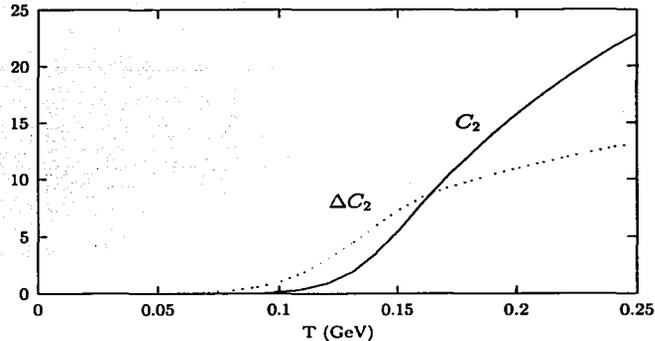


Figura 5.5: Valor promedio del operador de Casimir del grupo $SU(3)$ de color (C_2 , línea continua) y su variación (ΔC_2 , línea discontinua) como función de la temperatura. La variación alcanza al promedio en $T = T_c \approx 0.170$ GeV. Se usaron las constantes de acoplamiento del ajuste y los valores $\mu_B = \mu_s = 0$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La solución a este sistema de ecuaciones se obtiene numéricamente usando el programa *ztotprobfla.f* (apéndice E.3.4), el resultado son tres funciones [$T_c = T_c(\mu_{Bc})$, $T_c = T_c(\mu_{sc})$ y $\mu_{sc} = \mu_{sc}(\mu_{Bc})$] equivalentes entre sí que dan las curvas de transición al PCG en el espacio μ_B - T , μ_s - T y μ_B - μ_s . Las funciones $T_c(\mu_{Bc})$ y $T_c(\mu_{sc})$ son mostradas en la figura 5.6, mientras que, la función $\mu_{sc}(\mu_{Bc})$ es mostrada en la figura 5.7.

Las curvas de transición son consistentes con las estimaciones realizadas usando teorías de norma en la red [70] y otros modelos [71, 67]. Con la función de partición \mathcal{Z}_c se ha podido estimar la curva de transición de la fase hadrónica al plasma de cuarks y gluones a temperaturas y densidades bariónicas finitas, se ha supuesto, para ello, que el modelo representa a un volumen elemental de $4\pi/3fm^3$, el cual, a su vez, es representativo de lo que ocurre a nivel global en un volumen mayor formado por algún número de volúmenes elementales.

A temperaturas $T < T_c$ se asume que el sistema está en la fase confinada, en tal caso la función de partición apropiada es $\mathcal{Z}_{a=(0,0)}$. Para $T > T_c$ el sistema se encuentra en la fase deconfinada y la función de partición a usar es $\mathcal{Z}_{a=c}$. De esta manera se implementa de un modo efectivo la hipótesis de confinamiento, aunque esta implementación es introducida a *mano*, el modelo por sí mismo sí permite establecer los valores de μ_B y T a partir de los cuales el sistema debe ser descrito con una u otra función de partición.

En la figura 5.8 se muestra la energía interna (en el caso $\mu_B = \mu_s = 0$) como función de T , usando los valores $\mathcal{V}_{\lambda S}$ obtenidos en el ajuste, para el caso con confinamiento $\mathcal{Z}_{(0,0)}$ y sin confinamiento \mathcal{Z}_c . La línea sólida conecta los dos resultados en el valor crítico $T_c = 0.170$ GeV. La diferencia entre la energía interna usando \mathcal{Z}_c y $\mathcal{Z}_{(0,0)}$ produce una discontinuidad en $T_c = 0.170$ GeV. De esta manera, el paso del PCG a la fase hadrónica será acompañada por un aumento en el número de volúmenes elementales que forman el volumen total del sistema, es decir, el sistema global sufrirá una súbita expansión al producirse la transición. En la figura 5.9 se muestra la capacidad calorífica para los mismos caso de la figura 5.8. La línea sólida conecta al resultado con confinamiento ($T < T_c$) con el resultado sin él ($T > T_c$). En $T = T_c$ el valor de C no está definido.

5.2.1. Comparación con resultados experimentales

Para comparar el modelo con los resultados experimentales obtenidos en colisiones de iones pesados, se debe considerar el número de volúmenes elementales que forman al sistema termalizado producido

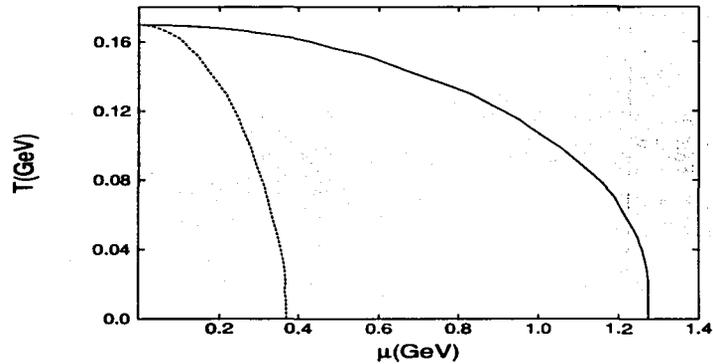


Figura 5.6: Curvas de transición μ_B - T (línea continua) y μ_s - T (línea discontinua) al plasma de cuarks y gluones. Las curvas marcan la frontera donde la presión del sistema, en un volumen elemental de radio 1 fm, es igual a la presión de la bolsa del modelo del MIT. Se usaron las constantes de acoplamiento del ajuste y la condición de extrañeza (s) = 0.

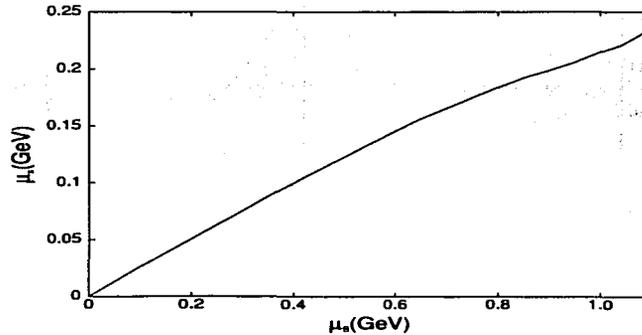


Figura 5.7: Potencial químico μ_s como función del potencial químico μ_B sobre la línea de transición de la figura 5.6.

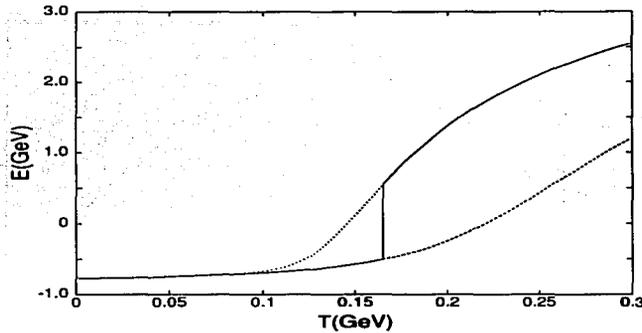


Figura 5.8: Energía interna como función de la temperatura. La línea superior es el resultado usando todas las configuraciones incluyendo las de color diferente de cero. La línea inferior es el resultado utilizando sólo las configuraciones con color cero. La línea vertical une los dos resultados en $T = T_c \approx 0.170$ GeV. Se usaron las constantes de acoplamiento del ajuste y $\mu_a = \mu_B = 0$.

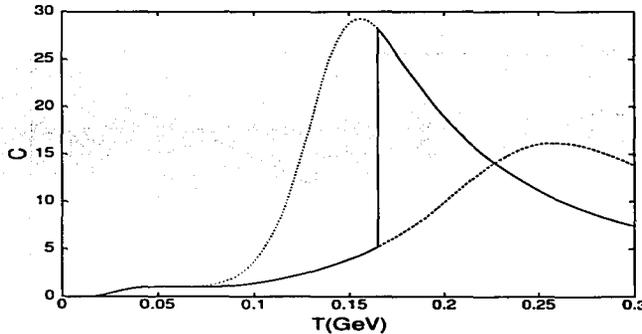


Figura 5.9: Capacidad calorífica como función de la temperatura. La línea continua interpola entre el resultado sin color debajo de $T_c \approx 0.170$ GeV y el resultado con color arriba de T_c . Las curvas punteada y discontinua corresponden, respectivamente, al caso donde se permite el color y aquel con sólo estados de color cero. Se usaron las constantes de acoplamiento del ajuste y $\mu_a = \mu_b = 0$.

en la colisión. Para obtener una estimación de este número se usa la siguiente relación:

$$\frac{V_{tot}}{V_{el}} = \frac{N_{part}}{\langle B \rangle_a}, \quad (5.21)$$

donde $\langle B \rangle_a$ es el número bariónico del volumen elemental calculado con la función de partición con color $a = c$ ó sin él $a = (0, 0)$ y N_{part} es el número de nucleones que participan en el sistema termalizado de la colisión, este último es un parámetro adicional que deberá ajustarse en cada experimento particular.

Primero se comparará el modelo en un punto de la fase hadrónica. En tal caso el confinamiento es efectivo y la función de partición a usar será $Z_{a=(0,0)}$. Se toma como ejemplo la producción total de π^+ en colisiones centrales Au+Au, a una energía por nucleón y en el centro de masa de 10 AGeV. Este experimento fue realizado en el AGS del BNL. En las figuras 2.1 y 2.3 de la ref.[72] se reportan los valores $T = 0.13$ GeV y $\mu_B = 0.55$ GeV para el sistema en equilibrio térmico y químico formado durante la colisión. Obsérvese que estos valores están dentro de la fase hadrónica de acuerdo al diagrama μ - T de la figura 5.6. Fijando $\mu_B = 0.55$ y $T = 0.13$ GeV, de acuerdo a los datos anteriores, se resuelve numéricamente la condición de extrañeza (s) = 0, para encontrar el valor μ_s correspondiente. Con estos tres valores se calcula, con el modelo, la producción total de piones de acuerdo a:

$$N_{\pi^+} = \langle n_{\pi^+} \rangle_{a=(0,0)} \frac{V_{tot}}{V_{el}} = \langle n_{\pi^+} \rangle_{a=(0,0)} \frac{N_{part}}{\langle B \rangle_{a=(0,0)}}, \quad (5.22)$$

donde, en la última igualdad, se usó la relación (5.21). Asumiendo que todos los nucleones de los núcleos de oro participan en el sistema termalizado ($N_{part} = 394$), la producción de piones, según el modelo, es $N_{\pi^+} = 180$ que está muy cerca del valor experimental de 160 obtenido de la figura 2.3 de la ref.[72]. Este es un ejemplo que muestra que, a pesar de su simplicidad, el modelo es capaz de producir estimaciones correctas para la producción total de partículas en colisiones de iones pesados.

Se compara el modelo, ahora, a temperaturas y densidades sobre la línea de transición.

En la figura 5.10 se grafican algunas razones de producción para energías de colisión de $\sqrt{s} = 130$ AGeV, los valores experimentales son tomados de la ref.[73], los cuales están basados en un experimento realizado en el RHIC y descrito en la ref.[74]. En el modelo, las razones de producción son obtenidas usando:

$$\frac{N_k}{N_i} = \frac{e^{-\beta(E_k - \mu_B B_k - \mu_s s_k)}}{e^{-\beta(E_i - \mu_B B_i - \mu_s s_i)}}. \quad (5.23)$$

Para los bariones sólo se calculan razones partícula-antipartícula ya que las masas bariónicas, como se mencionó en el capítulo anterior, no son bien descritas por la forma actual del modelo. Para determinar los potenciales químicos y la temperatura sobre la línea de transición, se usa la razón experimental K_-/K_+ , ésta, de acuerdo a la ec.(5.23), debe ser igual a la ec.(5.23). La ecuación anterior tiene solución única, si se asume que el sistema se encuentra sobre la línea de transición. Usando la figura 5.6, se encuentran los valores $\mu_s = 0.012$ GeV y $T = 0.1695$ GeV, estos valores determinan (usando la fig.5.6 ó 5.7) el potencial químico bariónico: $\mu_B = 0.044$ GeV. Habiendo establecido los valores T , μ_B y μ_s con la razón de producción de los kaones, se encuentra el resto de las razones de la figura 5.10 usando la ec.(5.23). Las razones predichas por el modelo son consistentes con los valores experimentales. Este es un ejemplo más de que la suposición de equilibrio térmico es capaz de predecir las razones de producción en colisiones de iones pesados y de que estas cantidades experimentales no son sensibles a los detalles de la dinámica de producción. Existen modelos termodinámicos que, suponiendo un gas ideal fermiónico y utilizando la información experimental de las partículas hadrónicas (masas y anchuras), reproducen muy bien las razones de producción ajustando los valores de μ_B y μ_s . Uno de estos modelos [73], aplicado a las razones de producción de la figura 5.10, produce los valores $T = 0.1658$ GeV, $\mu_B = 0.0313$ GeV y $\mu_s = 0.0074$ GeV, similares a los obtenidos con nuestro modelo.

Para determinar las producciones totales de partículas sobre la línea de transición, se procede similar a los casos anteriores. Primero se determina $\beta\mu_s$ usando la razón experimental K_-/K_+ , con este valor y usando la línea de transición de la figura 5.6 se fijan μ_B y T . Los resultados para diferentes energías ($\sqrt{s} = 40, 80$ y 158 AGeV) en colisiones Pb+Pb, son mostrados en la tabla 5.1. Se usaron los valores experimentales reportados por la colaboración NA49 del SPS-CERN [75].

Con los valores μ_B , μ_s y T para las diferentes energías de colisión, se calculan algunas producciones totales utilizando la fórmula de la ec.(5.22):

$$N_i = \langle n_i \rangle_{a=(0,0)} \frac{N_{part}}{\langle B \rangle_{a=(0,0)}}, \quad (5.24)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

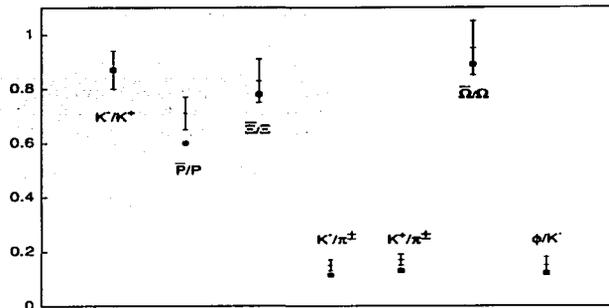


Figura 5.10: Algunas razones de producción para energías de colisión de $\sqrt{s} = 130$ AGeV. Los valores experimentales, tomados de la ref.[73], son mostrados con barras de error. Los resultados del modelo son mostrados con cuadros sólidos. Se supuso al sistema sobre la línea de transición de la fig.5.6. La temperatura y potenciales químicos que resultan del modelo son: $T = 0.1695$ GeV, $\mu_B = 0.044$ GeV y $\mu_s = 0.012$ GeV.

\sqrt{s}	40 AGeV	80 AGeV	158 AGeV
T	0.1635 GeV	0.1655 GeV	0.1670 GeV
μ_B	0.350 GeV	0.285 GeV	0.230 GeV
μ_s	0.090 GeV	0.070 GeV	0.060 GeV

Tabla 5.1: Valores T , μ_B y μ_s que resultan del modelo para diferentes energías (\sqrt{s}) en colisiones Pb+Pb.

con $i = \pi^+$, K_- ó K_+ .

Se supondrá que el sistema se encuentra justo debajo del valor crítico T_c , es decir, en donde sólo son permitidos estados con color cero y se debe usar la función de partición $Z_{A=(0,0)}$. El resultado para la producción total de piones es mostrado en la figura 5.11. La curva superior resulta de suponer la participación de todos los nucleones ($N_{part}=414$, [Pb+Pb]), mientras que, la curva inferior describe el caso $N_{part}=250$, en el que sólo participa una fracción de los nucleones. Como puede observarse, esta última curva reproduce mucho mejor los valores experimentales. Compárese con el resultado para la producción de piones a energías de 10 AGeV, en ese caso el valor experimental fue reproducido suponiendo la participación de todos los nucleones. Este resultado, el aumento de la transparencia al aumentar la energía de colisión, es bien conocido (ver por ejemplo ref. [76]). El valor $N_{part} = 250$ no está en acuerdo con el valor reportado en la ref.[75], donde se obtuvo una estimación de $N_{part} = 349$, por encima del valor obtenido con nuestro modelo.

La producción total de kaones obtenida desde el modelo es comparada con los valores experimentales [75] en la figura 5.12. El número de participantes que se asume en esta figura es el mismo que para los piones: $N_{part} = 250$. La razón de las producciones K_+/K_- fue utilizada para determinar μ_s , μ_B y T , sin embargo, las producciones totales y la forma de las curvas son resultados directos del modelo. A pesar de que nuestro modelo predice un valor menor para el número de participantes en la colisión que el reportado por el experimento, es consistente al reproducir la producción total de kaones y la de piones con el mismo valor de N_{part} , además, en acuerdo con los valores experimentales, el número participantes predicho por nuestro modelo no cambia significativamente en el rango de 40 a 158 AGeV.

En resumen, el modelo presentado, a pesar de su simplicidad, es capaz de predecir la curva de transición al PCG y de reproducir aceptablemente la producción total de partículas en un rango muy grande de energías. Claramente, es incapaz de describir los procesos dinámicos involucrados tanto en la transición al PCG como en las colisiones de iones pesados, pero, por otro lado, es un ejemplo de la utilidad de los modelos termodinámicos para describir la producción de partículas en colisiones de

iones pesados y de los modelos esquemáticos para reproducir cualitativamente (y en este caso incluso cuantitativamente) características básicas de teorías altamente no lineales y complicadas como es el caso de la Cromodinámica Cuántica.

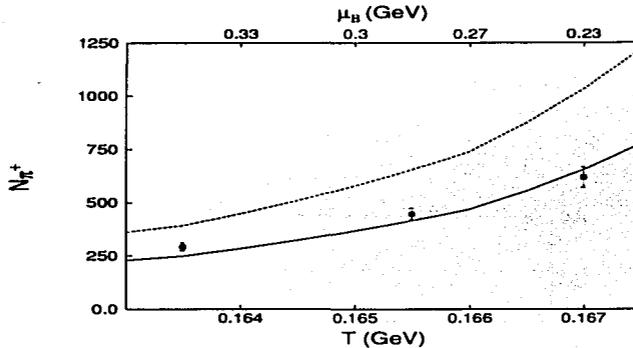


Figura 5.11: Producción total de π^+ sobre la línea de transición en la región μ - T de la tabla 5.1. La línea superior es para $N_{part} = 414$ y la inferior para $N_{part} = 250$. Los valores experimentales [75] son indicados por barras de error. Debido a que $\mu_T \approx 0$, la producción de π^- es igual que la producción de π^+ . El valor de N_{part} que mejor reproduce los valores experimentales, es menor que el valor reportado en la ref.[75] ($N_{part} = 349$)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

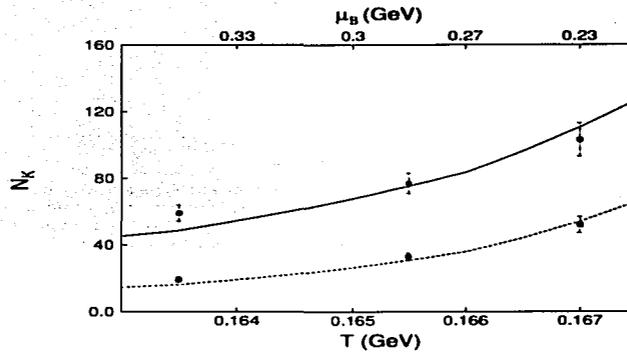


Figura 5.12: Producción total de kaones en la misma región que la figura 5.11. La línea superior es el resultado del modelo para K^+ y la inferior para K^- . En ambos casos se usó $N_{part} = 250$. Los valores experimentales (barras de error) fueron tomados de la ref. [75]. El valor de N_{part} utilizado es menor al reportado en la ref. [75], pero es igual al utilizado para reproducir la producción de piones

Capítulo 6

Extensiones del modelo

En este último capítulo se discuten brevemente algunas extensiones del modelo. Éstas ya han sido mencionadas a lo largo de los capítulos previos, sin embargo, en este capítulo se describen con más detalle. El rompimiento de la simetría de sabor que resulta de suponer masas diferentes para los cuarks, es discutido en la primera sección; en la segunda se discute la inclusión de excitaciones orbitales y en la tercera la extensión del modelo para describir a los bariones.

6.1. El rompimiento de la simetría de sabor

Una de las razones del rompimiento de la simetría de sabor en las interacciones fuertes, es la diferencia en las masas de los cuarks. A pesar de ello, la simetría de sabor, como mostraron Gell-Mann y Zweig en los 60 [77], es útil para describir el espectro hadrónico. Los dos cuarks más ligeros (up y down) producen la simetría de isospín cuyo rompimiento ($m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = 4,59$ MeV) es de una escala menor que la del rompimiento de la simetría $SU(3)$ de sabor ($m_{K^+} - m_{\pi} = 357$ MeV). Esta tendencia continúa con la inclusión de los cuarks más pesados. En el modelo se consideraron sólo los tres sabores ligeros y se supuso una masa común para ellos (ω_f). Si se toman masas diferentes para los cuarks, se obtiene un modelo de Lipkin generalizado [78] de 6 niveles, cada uno con una degeneración $2\Omega/3$. Para $m_u = m_d$ el número de niveles se reduce a 4, dos de ellos con una degeneración $4\Omega/3$ y los otros dos con $2\Omega/3$. Por simplicidad se discutirá este último caso ($m_u = m_d$) con el término de interacción del capítulo 2, es decir, aquel con pares cuark-anticuark acoplados a espín 0 y sabor (0, 0). El Hamiltoniano de la ec.(2.15) con una masa distinta para el cuark strange, es:

$$H_{(0,0)0} = 2m_u J_0 + 2m_s L_0 + 2\Omega \left(\frac{2m_u + m_s}{3} \right) + \omega_b n_b + V_1 : (S_+ + S_-)^2 : (b^\dagger + b), \quad (6.1)$$

donde J_0 y L_0 son, respectivamente, los operadores de peso del pseudoespín de los cuarks ligeros (up y down) y del cuark strange. Los operadores del pseudoespín total S_\pm y S_0 son la suma de los pseudoespines anteriores:

$$\begin{aligned} S_\pm &= J_\pm + L_\pm \\ S_0 &= J_0 + L_0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Si se hace $m_u = m_s = \omega_f$, se recupera el Hamiltoniano (2.15) del capítulo 2. La base fermiónica del capítulo 2 (con pseudoespín total \mathcal{J} definido) ya no es útil para diagonalizar el Hamiltoniano (6.1). Una base que genera los subespacios invariantes del Hamiltoniano es:

$$|LM_L\rangle \otimes |JM_J\rangle. \quad (6.3)$$

Los valores posibles de los pseudoespines L y J son:

$$L = 0, 1/2, \dots, 2\Omega/3 \quad (6.4)$$

y

$$J = 0, 1, \dots, \Omega/3. \quad (6.5)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La relación de la base anterior con la del capítulo 2 es claramente:

$$|\mathcal{JM}\rangle = \sum_{M_L M_J} (LM_L; JM_J | \mathcal{JM}) |LM_L\rangle \otimes |JM_J\rangle, \quad (6.6)$$

con $\mathcal{M} = M_L + M_J$, $\mathcal{J} = |L - M|, \dots, L + M$ y $(LM_L; JM_J | \mathcal{JM})$ coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(2)$. Los elementos de matriz se pueden obtener fácilmente de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} L_{\pm} |LM_L\rangle \otimes |JM_J\rangle &= C_{\pm}(L, M_L) |LM_L \pm 1\rangle \otimes |JM_J\rangle \\ J_{\pm} |LM_L\rangle \otimes |JM_J\rangle &= C_{\pm}(J, M_J) |LM_L\rangle \otimes |JM_J \pm 1\rangle \\ L_0 |LM_L\rangle \otimes |JM_J\rangle &= M_L |LM_L\rangle \otimes |JM_J\rangle \\ J_0 |LM_L\rangle \otimes |JM_J\rangle &= M_J |LM_L\rangle \otimes |JM_J\rangle, \end{aligned} \quad (6.7)$$

con $C_{\pm}(L, M) = \sqrt{(L \mp M)(L \pm M + 1)}$.

Los pseudoespines L y J que contienen al estado base del sistema son $L = 2\Omega/3$ y $J = \Omega/3$. El espacio de Hilbert completo es el producto directo del espacio fermiónico y bosónico:

$$|LM_L\rangle \otimes |JM_J\rangle \otimes |n_b\rangle, \quad (6.8)$$

donde $|n_b\rangle$ son los estados de un oscilador armónico unidimensional [ec.(2.13)].

Con los resultados anteriores e introduciendo un corte en el número de excitaciones bosónicas (n_{bmax}), se puede diagonalizar numéricamente el Hamiltoniano (6.1). La masa del cuark extraño rompe la degeneración de los multipletes de sabor y produce eigenestados sin sabor definido. En el caso sin interacción, por ejemplo, los eigenestados isoescalares de energía menor, son combinaciones lineales de los isoescalares del octete y singulete de sabor:

$$\begin{aligned} |u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle &= \cos\theta |\eta_8\rangle + \sin\theta |\eta_1\rangle \\ |s\bar{s}\rangle &= -\sin\theta |\eta_8\rangle + \cos\theta |\eta_1\rangle, \end{aligned} \quad (6.9)$$

con θ el ángulo de mezcla ideal ($\theta \approx 35^\circ$). De esta manera, el sabor de los estados es útil sólo como una aproximación.

El corrimiento de las masas dentro de los multipletes debe ser, de acuerdo a la información experimental, de una escala menor que la diferencia de energía entre distintos multipletes con el mismo espín, sabor y paridad. Es de esperar, por otro lado, que a la escala del rompimiento, otros términos de interacción no considerados en el modelo sean relevantes (interacciones dependientes del espín, por ejemplo). La combinación de estos términos deberá dar lugar al siguiente nivel de la espectroscopía mesónica, en el que aplican fórmulas tipo Gell-Mann-Okubo.

6.2. Excitaciones orbitales

A lo largo de la tesis se supuso $2\Omega = N_o N_c N_s N_f = 18$, que implica una sola excitación orbital en cada nivel fermiónico ($N_o = 1$, $l = 0$). Una primera extensión al modelo sería considerar excitaciones $l = 1$, de esta manera, el número de excitaciones orbitales cambiaría a $N_o = 1 + 3 = 4$ y la degeneración de los niveles aumentaría a $2\Omega = 72$. El número de posibles acoplamientos de los pares cuark anticuark, también aumentaría:

$$B_{(\lambda, \lambda)_f; LM\rho_L; \sigma m}^1, \quad (6.10)$$

con $L = 0, 1, 2$ y ρ_L el respectivo índice de multiplicidad: $\rho_0 = 1, 2$; $\rho_1 = 1, 2$ y $\rho_2 = 1$. Este índice de multiplicidad viene de las diferentes maneras de acoplar a momento angular $L = 0$ ó $L = 1$, dos momentos angulares $l_1, l_2 = 0$ ó 1 . La clasificación de los estados también se modificaría. En la cadena de la ec.(4.1), el grupo $U(\frac{\Omega}{3})$, que para una excitación orbital se reduce al grupo de color $U_c(3)$, sería en este caso $U(12)$. Este se reduciría al grupo $U_c(3)$ de color y $U(4)$ para las excitaciones orbitales. Se podría suponer una energía diferente para las excitaciones $l = 1$, obteniéndose de este modo un modelo de Lipkin generalizado con 4 niveles, 2 de degeneración 18 ($l = 0$) y los otros 2 de 54 ($l = 1$). La inclusión de excitaciones orbitales permite introducir nuevos términos en el Hamiltoniano de interacción, la forma general de algunos de estos sería:

$$(B_{(\lambda, \mu)LS}^1 \cdot B_{(\lambda, \mu)LS}^1) (b^1 + b), \quad (6.11)$$

donde el producto escalar es un acoplamiento simultáneo en los índices de sabor, momento angular orbital y espín. Los operadores b^\dagger y b son los operadores bosónicos del glueball 0^{++} . Adicionalmente, se podrían incluir los términos del Hamiltoniano H_E [ec.(1.25)], los cuales fueron excluidos por no conservar la paridad en el caso de una sola excitación orbital. Un ejemplo de interacción que resulta de este término es:

$$\left(B_{(0,0)L=1 S=0}^\dagger \right) \cdot (L_q + L_{\bar{q}}) (b^\dagger + b), \quad (6.12)$$

donde L_q y $L_{\bar{q}}$ son los operadores de momento angular orbital de los cuarks y anticuarks respectivamente. El producto punto anterior es un acoplamiento escalar en el espacio de momento angular orbital.

La manera más sencilla de suponer excitaciones orbitales es aumentar el valor de Ω sin introducir nuevos acoplamientos al Hamiltoniano. En este caso, el único cambio al modelo sería la interpretación de los números cuánticos de los estados. El momento angular sería el resultado de acoplar el momento angular orbital con el espín. De igual modo, la paridad y conjugación de carga de los estados sería modificada por la contribución orbital.

6.3. Términos que conservan el número y los bariones

En el capítulo 1 se discutió la exclusión de términos que conmutan con el operador de número de los cuarks y de los anticuarks. Estos términos, los dos primeros de la ec.(1.23) y los dos últimos de la ec.(1.24), fueron excluidos porque su efecto en el espectro mesónico (en la representación irreducible sin cuarks de valencia) puede simularse por una redefinición del parámetro que multiplica al llamado término de dispersión [parámetro G , ec.(2.37)]. Sin embargo, estos términos son importantes para la adecuada descripción de los bariones dentro del modelo. Esto se debe a que los términos excluidos acoplan los cuarks de valencia con los glueballs 0^{++} .

Los términos a los que se ha hecho alusión son, del término H_S [ec.(1.23)]:

$$a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2} a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2} + d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1} d_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2} d_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2} \quad (6.13)$$

y del término H_P [ec.(1.24)]:

$$a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2} a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2} + d_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger a_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger d_{\bar{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger. \quad (6.14)$$

Seguindo los mismos pasos que condujeron al Hamiltoniano del modelo (reacoplamientos de sabor y espín, etc.), se reescriben los términos anteriores. El resultado, para los canales de sabor (0,0) y espín 0 y 1, es:

$$\begin{aligned} (\lambda, \lambda)S &= (0,0)0 \\ H_S &: (n_q)^2 + (n_{\bar{q}})^2 \\ H_P &: 2n_q n_{\bar{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda, \lambda)S &= (0,0)1 \\ H_S &: (S_q)^2 + (S_{\bar{q}})^2 \\ H_P &: 2S_q \cdot S_{\bar{q}}, \end{aligned}$$

donde n son los operadores de número de los cuarks y anticuarks y S son sus respectivos operadores de espín. Términos similares resultan para los canales con sabor (1,1). Se pueden incluir los términos anteriores en el Hamiltoniano de interacción, para ello se introducen nuevos parámetros indeterminados ($C_{H_S \lambda S}$ y $C_{H_P \lambda S}$):

$$H_{SB} = \left(C_{H_S 00} (n_q^2 + n_{\bar{q}}^2) + C_{H_S 01} (S_q^2 + S_{\bar{q}}^2) \right) (b^\dagger + b) \quad (6.15)$$

$$H_{PB} = \left(C_{H_P 00} n_q n_{\bar{q}} + C_{H_P 01} S_q \cdot S_{\bar{q}} \right) (b^\dagger + b). \quad (6.16)$$

Estos parámetros se ajustarían, ahora, al espectro bariónico experimental. Los términos anteriores conmutan con el operador de número de los cuarks y anticuarks, es decir, acoplan estados con un mismo número de cuarks y anticuarks.

Los términos de H_{SB} , a diferencia de los de H_{PB} , involucran operadores exclusivamente de cuarks u operadores exclusivamente de anticuarks; además, pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$\left(D_{(\lambda,\mu)S}^\dagger \cdot D_{(\lambda,\mu)S} + \bar{D}_{(\lambda,\mu)S}^\dagger \cdot \bar{D}_{(\lambda,\mu)S} \right) (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}), \quad (6.17)$$

donde D^\dagger , D , \bar{D}^\dagger y \bar{D} son, respectivamente, operadores de creación y aniquilación de dicuarks y anticuarks.

En la aproximación bosónica, la expresión (6.17) es:

$$(n_{qq(\lambda,\mu)S} + n_{\bar{q}\bar{q}(\lambda,\mu)S})(\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}), \quad (6.18)$$

con n el operador de número de dicuarks o anticuarks con sabor $(\lambda, \mu) = (2, 0), (0, 1)$ y espín $S = 0, 1$. Multiplicando los términos anteriores por constantes indeterminadas para cada canal de sabor y espín, se obtiene una expresión alternativa a la ec.(6.15):

$$H_{SB} = \sum V_{(\lambda,\mu),S} (n_{qq(\lambda,\mu)S} + n_{\bar{q}\bar{q}(\lambda,\mu)S}) (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}). \quad (6.19)$$

Las constantes $V_{(\lambda,\mu),S}$ deben ajustarse al espectro bariónico experimental. Otro término de interacción que no puede excluirse *a priori* en la descripción del espectro bariónico, proviene del mapeo bosónico de $A_i^a A_i^a$ [ec.(1.35)], este término es el operador de número de las excitaciones bosónicas, que estaría acoplado al operador de número de los dicuarks y anticuarks:

$$(n_{qq(\lambda,\mu)S} + n_{\bar{q}\bar{q}(\lambda,\mu)S})(\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}). \quad (6.20)$$

La última extensión que se mencionará es la que resulta de considerar acoplamientos con el glueball 2^{++} , el cual, de acuerdo a la ref.[15], puede representarse por un oscilador armónico de 5 dimensiones. En este caso, los pares cuarks anticuark deben acoplarse a espín 1, para, así, obtener un espín fermiónico $S_f = 2$. Este espín se acopla con el espín del glueball a espín total cero:

$$\left[\left[\mathbf{B}_1^\dagger \otimes \mathbf{B}_1^\dagger \right]^{S=2} \otimes (\mathbf{b}_2^\dagger + \mathbf{b}_2) \right]_{\mathbf{0}}^{J=0}, \quad (6.21)$$

donde \mathbf{b}_2 son los operadores bosónicos que representan al glueball tensorial $S^{PC} = 2^{++}$.

Al igual que en el sector mesónico, el modelo presentado contiene estados bariónicos exóticos que no pueden ser contruidos por 3 cuarks. De especial relevancia es el pentacuark, reportado recientemente por diferentes grupos experimentales [79]. Este estado puede obtenerse de acoplar tres cuarks de valencia de sabor (1, 1) con un par cuark-anticuark en la misma representación de sabor. La predicción de la masa de estos estados exóticos, debe surgir en nuestro modelo, una vez que se hayan ajustado las nuevas constantes de acoplamiento a los multipletes bariónicos de menor energía. Trabajo en la dirección anterior está siendo actualmente realizado [34].

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Conclusiones

El objetivo inicial de este trabajo fue explorar la posibilidad de reproducir características generales de la CDC no perturbativa, usando un modelo sencillo con grados de libertad gluónicos y fermiónicos. En este sentido, una de las principales conclusiones de este trabajo es que el modelo propuesto sí es capaz de reproducir algunas de estas características, como son: la densidad de estados del espectro mesónico experimental, la aparición de un estado de paridad negativa con energía pequeña, la estimación de la energía del vacío no perturbativo de la CDC, la curva de transición al plasma de cuarks y gluones en el espacio μ - T , así como la producción total de piones y kaones en colisiones de iones pesados.

Independientemente de su capacidad para reproducir el espectro mesónico, el modelo tiene interés en sí mismo. Se logró caracterizar las propiedades básicas del modelo. Se enumeran algunas: el modelo presenta varias fases de acuerdo a los valores de sus constantes de interacción; existen valores críticos para éstas, debajo de los cuales el sistema se encuentra en una fase perturbativa, en la que los estados no son de naturaleza colectiva y pueden obtenerse perturbativamente desde los estados en el caso sin interacción; el valor de expectación de los operadores de número en el estado base es, en esta fase, casi cero. Para valores de las constantes de interacción mayores que sus valores críticos, el sistema pasa a una fase condensada en la cual los estados son de naturaleza colectiva y el estado base contiene un número finito de excitaciones tanto bosónicas como fermiónicas. El condensado es dominado por excitaciones fermiónicas para constantes de interacción mayores, pero cercanas al valor crítico; al aumentar el valor de las constantes de interacción, la expectación del número de pares fermiónicos en el condensado se satura en el valor Ω , mientras que, el número de bosones crece ilimitadamente. En la región dominada por las excitaciones bosónicas, el espectro de los primeros estados de energía es similar al de un oscilador armónico (energías igualmente espaciadas) con frecuencia (masa) ω_0 . La transición a la fase condensada es acompañada por la aparición de un estado de paridad negativa de energía muy baja respecto al resto y con los números cuánticos del canal que ha alcanzado dicha fase. Cuando más de una constante de interacción está activa, existe una competencia entre los distintos canales. El valor de la constante de interacción para el que el sistema alcanza una fase condensada en algún canal, es apenas modificado, si el resto de las constantes de interacción están fijas en valores menores que sus respectivos valores críticos. Si dos o más constantes de interacción son mayores que sus valores críticos, la naturaleza del condensado está determinada por los valores específicos de las constantes de interacción; en general, el valor de la constante de interacción para alcanzar la fase condensada en algún canal, aumenta linealmente respecto al resto de las constantes de interacción, siempre que éstas sean mayores que sus respectivos valores críticos.

El tipo de correlaciones consideradas en la interacción, determina la estructura del espectro en la fase condensada. Por ejemplo, si sólo se consideran términos de creación y aniquilación de pares, la transición a la fase condensada es de primer orden (cambio discontinuo del valor de expectación del número de excitaciones bosónicas y fermiónicas en el estado base) y el espectro en la fase condensada es mucho más denso que en la fase perturbativa. En oposición, la inclusión de los términos de dispersión y de correlaciones del vacío, produce un espectro poco denso en la fase condensada que llega a ser idéntico al de un oscilador armónico de frecuencia $\omega_0 = 1.6$ GeV para valores de la constante de interacción mucho mayores que el valor crítico. En cuanto al orden de la transición, el análisis usando estados coherentes sugiere un transición de fase de primer orden, en la que el número de excitaciones en el estado base es discontinuo en $V_1 = V_c$. Esto fue confirmado por los resultados de la diagonalización numérica, al analizar el comportamiento del sistema en el límite $\Omega \rightarrow \infty$. Para el valor $\Omega = 9$ considerado en el capítulo 2, los valores de expectación del número de excitaciones fermiónicas y bosónicas en el estado base obtenidos con la diagonalización numérica, pasan continuamente de cero a valores mayores como consecuencia del número finito de grados de libertad considerados.

La baja densidad de estados en la fase condensada, así como el espectro de oscilador armónico en

$V_1 \gg V_c$, es común a los Hamiltonianos de interacción de la forma:

$$H_I = F (b^\dagger + b) ,$$

con F un operador en el espacio fermiónico. La aparición en la fase condensada de un estado de paridad negativa degenerado con el vacío, es garantizada por la degeneración del operador fermiónico F ; este último, a diferencia del Hamiltoniano completo que incluye las excitaciones bosónicas, está definido en un espacio de dimensión finita. La inclusión del término de dispersión produce un espectro de F con degeneración entre los estados de paridad negativa (número impar de excitaciones cuark-anticuark) y positiva (número par de excitaciones cuark-anticuark); su exclusión implica un espectro de F en el que los eigenvalores de paridad positiva son mayores que los de paridad negativa, lo cual produce, a su vez, un espectro del Hamiltoniano completo con estados de paridad negativa muy altos en energía respecto a los de paridad positiva.

Los estados coherentes fueron, para el Hamiltoniano más simple, una herramienta muy útil para estimar la energía del estado base (y por tanto el valor crítico V_c) como función de la constante de acoplamiento V_1 . La diagonalización numérica del Hamiltoniano; tanto en la fase perturbativa como en la fase condensada, pero cercana a V_c ; fue posible a través de la introducción de un corte (n_{bmax}) en el número de excitaciones bosónicas. La región $V \gg V_c$ (inaccesible con la estrategia anterior debido a la influencia de las configuraciones con $n_b > n_{bmax}$ en el espectro de menor energía) es, por otro lado, de poco interés; el espectro en esta región se reduce al de un oscilador armónico de frecuencia $\omega_b = 1.6$ GeV; valor muy por encima de la escala de energías mesónicas.

En los capítulos 3 y 4 se introdujo un modelo bosónico para estudiar el Hamiltoniano fermiónico de la versión más general (pares cuark-anticuark acoplados a sabor (0,0) y (1,1) y espín 0 y 1). El Hamiltoniano bosónico fue propuesto con base en las simetrías del Hamiltoniano fermiónico original e introduciendo términos efectivos para simular el principio de exclusión de Pauli. Estos términos efectivos fueron motivados por el Hamiltoniano que resulta del mapeo bosónico de Holstein-Primakoff en el caso más sencillo de pares cuark-anticuark acoplados a espín y sabor 0. Además del Hamiltoniano bosónico, se propusieron cortes sencillos para el espacio bosónico mapeado. Estos cortes, a pesar de no eliminar todos los estados espurios y de, incluso, eliminar estados físicos, fue suficiente para reproducir las características generales del Hamiltoniano fermiónico en la fase perturbativa y en la condensada cercana a la transición. El Hamiltoniano bosónico tiene la ventaja de que sus elementos de matriz son fácilmente calculables, a diferencia del Hamiltoniano fermiónico del caso general.

Se aplicó el Hamiltoniano bosónico al estudio del espectro mesónico. Ajustando las 4 constantes de acoplamiento a los datos experimentales, se obtuvo un espectro que reproduce aceptablemente el espectro experimental. El canal de sabor (1,1) y espín cero fue el dominante en este ajuste; la constante de acoplamiento de este canal fue la única que resultó mayor que su respectivo valor crítico. La imagen de los estados mesónicos implicada por este resultado, no es la de un simple par cuark-anticuark, sino la de un estado colectivo formado por configuraciones con diferentes números de pares cuark-anticuark y gluones. La estructura de los estados es la siguiente: los estados están formados, por una parte, por un condensado de glueballs y pares cuark-anticuark acoplados a espín 0 y sabor (1,1) al que se superponen excitaciones puras de los pares cuark-anticuark del resto de los canales (por excitaciones puras se entiende configuraciones formadas predominantemente por un estado con un número definido de pares cuark-anticuark). La interacción rompe las degeneraciones encontradas en el caso sin interacción.

La constante de interacción del canal (1,1) $S = 0$ que resultó en el ajuste, es mayor pero cercana a su valor crítico, es decir, tanto en el estado base como en los primeros niveles de energía, las excitaciones fermiónicas dominan sobre las gluónicas. Las constantes de acoplamiento resultantes en el ajuste, sugieren la siguiente estrategia para estudiar el espectro mesónico usando el Hamiltoniano fermiónico original: dado que el único canal en la fase condensada es el (1,1) $S = 0$, se puede resolver exactamente el Hamiltoniano (cálculo analítico de los elementos de matriz con diagonalización numérica) en este canal, y calcular el efecto del resto perturbativamente. A diferencia del caso general fermiónico, la diagonalización del Hamiltoniano limitado al canal (1,1) $S = 0$, no resulta tan complicada y es aún accesible.

El modelo en su forma actual produce masas bariónicas muy altas respecto a los valores experimentales, esto se debe a que los cuarks de valencia no interactúan con los glueballs. Se propusieron términos de interacción que acoplan los cuarks de valencia con el sector gluónico. Queda como trabajo futuro investigar sus efectos en el modelo. Otras posibles extensiones al modelo son: una masa diferente para el cuark strange, excitaciones orbitales y acoplamientos con el glueball 2^{++} .

El estudio termodinámico del sistema arrojó una curva de transición al plasma de cuarks y gluones consistente con otros modelos, en particular con los resultados obtenidos desde cálculos en la red. Suponiendo equilibrio termodinámico y valores T , μ_B y μ_s sobre la curva de transición, se pudieron reproducir aceptablemente las producciones totales de piones y kaones medidas en colisiones de iones pesados. La clasificación de los estados fermiónicos respecto a las cadenas del grupo unitario $U(4\Omega)$, fue muy útil en el cálculo de la gran función de partición.

El modelo estudiado puede ser relevante en otros sistemas en los que exista un fuerte acoplamiento entre grados de libertad fermiónicos y bosónicos. Adicionalmente, el modelo presentado puede servir, como han servido otros modelos algebraicos, de "laboratorio teórico" para probar diferentes métodos de aproximación en sistemas de muchos cuerpos. Sería deseable estudiar la fase condensada del modelo usando variables colectivas que permitan su estudio analítico. Candidatos para estas variables son los operadores B^\dagger , cuya conexión con los grados de libertad microscópicos fue establecida en la sección 2.4. La aplicación y generalización de estas variables a modelos más complejos, es una línea futura de investigación.

Un resultado importante es la consistencia del modelo en su aplicación a diferentes aspectos de la CDC no perturbativa: la curva de transición al plasma de cuarks y gluones obtenida, es consistente con las estimaciones de otros modelos [70, 71] y depende de las constantes de acoplamiento y de un volumen elemental; las primeras resultan de un ajuste al espectro mesónico experimental [62] y del segundo se obtiene un valor para la densidad de energía del vacío no perturbativo de la CDC consistente con la del modelo de bolsa del MIT [17]; además, la masa de la excitación bosónica (el glueball 0^{++}) es tomada de los cálculos de red para la parte pura de norma [15] y la masa de los cuarks utilizada es consistente con el valor promedio de las masas de los cuarks constituyentes más ligeros reportadas en otros modelos [20]. El dominio de las excitaciones del canal $(1, 1)S = 0$ en los eigenestados de energía, sugiere una conexión con el modelo de Skyrme y el *cloudy bag model* [80], en estos modelos los estados hadrónicos son estados colectivos piónicos, similares a los obtenidos en nuestro modelo con las constantes de acoplamiento resultantes del ajuste al espectro mesónico experimental.

En resumen, el modelo presentado, a pesar de su simplicidad, es capaz de reproducir resultados generales de la CDC no perturbativa y permite, desde un escenario mucho más sencillo, sugerir posibles conexiones entre ellos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Apéndices

A.1. Índices co y contravariantes

En este apéndice se discuten las propiedades de transformación de los operadores de creación y aniquilación. Un cuark pertenece a la representación $(1,0)$ de $SU(3)$, tanto de sabor como de color, y tiene espín $1/2$. Su operador de creación tiene las mismas propiedades de transformación. El respectivo operador de aniquilación transforma según la representación conjugada [31]. En los grupos utilizados las representaciones conjugadas son:

$$\begin{aligned} SU(2) : S, \sigma &\rightarrow S, -\sigma \\ SU(3) : (\lambda, \mu) Y T T_z &\rightarrow (\mu, \lambda) - Y T - T_z \end{aligned}$$

Para el espín es clara esta propiedad: mientras que un operador de creación aumenta la proyección de espín al actuar sobre un estado, la aplicación del operador de aniquilación la disminuye. Se introducen índices covariantes y contravariantes para un manejo sencillo de las propiedades anteriores. Índices covariantes (posición inferior) indican las propiedades de transformación del operador, por lo tanto, la transformación adjunta cambia la posición de los índices:

$$(a_{\bar{k}c f \sigma}^\dagger)^\dagger = a^{\bar{k}c f \sigma} ,$$

Para obtener las propiedades de transformación del operador, basta con bajar sus índices y cambiarlos por la representación conjugada:

$$a^{\bar{k}c f \sigma} = (-1)^\phi a_{-\bar{k}c f -\sigma} ,$$

donde la fase ϕ depende de la convención (en este trabajo se usa la convención de la ref.[31]), y c y f son una notación corta para los índices $SU(3)$ de color y sabor respectivamente. Si $c = (1,0) Y T T_z$, entonces $\bar{c} = (0,1) - Y T - T_z$. Obsérvese que \bar{k} cambia a $-\bar{k}$ al bajar los índices.

Un cuark tiene las propiedades conjugadas de su anticuark, por ello, en los operadores de creación de los anticuarks, se colocan los índices arriba:

$$d^{\dagger \bar{k}c f \sigma} .$$

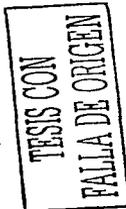
Los respectivos operadores de aniquilación son:

$$d_{\bar{k}c f \sigma} = (d^{\dagger \bar{k}c f \sigma})^\dagger .$$

Como un ejemplo de la notación anterior, el producto escalar de dos operadores de creación cuark y anticuark es:

$$a_{\bar{k}c f \sigma}^\dagger a^{\dagger \bar{k}c f \sigma} ,$$

con suma sobre índices repetidos.



A.2. Relaciones de Gordon

Los espinores de Dirac son:

$$U_{\sigma}(\vec{k}) = N \left(\begin{array}{c} \chi_{\sigma} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{m+E} \chi_{\sigma} \end{array} \right) \quad \text{y} \quad V_{\sigma}(-\vec{k}) = N \left(\begin{array}{c} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{m+E} \chi_{\sigma} \\ \chi_{\sigma} \end{array} \right),$$

con $\vec{\sigma}$ las matrices de Pauli y $N = \sqrt{(E+m)/2E}$. Contrario a lo habitual, se toman biespinores (χ_{σ}) que son eigenestados de la tercera matriz de Pauli, es decir,

$$\sigma_3 \chi_{\sigma} = \sigma \chi_{\sigma}.$$

De esta manera, se pueden acoplar fácilmente los operadores de creación y aniquilación correspondientes a diferentes direcciones de \vec{k} . Usando la representación de Dirac para las matrices γ^{μ} , se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\sigma'}(\vec{k}) \gamma^i V_{\sigma}(-\vec{k}) &= N^2 \left(\chi_{\sigma'}^{\dagger} \chi_{\sigma}^{\dagger} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{m+E} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{m+E} \chi_{\sigma} \\ \chi_{\sigma} \end{array} \right) \\ &= N^2 \left(\sigma_{\sigma'\sigma}^i - \chi_{\sigma'}^{\dagger} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{m+E} \sigma^i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{m+E} \chi_{\sigma} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Con las propiedades de las matrices de Pauli, el último de los sumandos es:

$$\chi_{\sigma'}^{\dagger} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{m+E} \sigma^i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{m+E} \chi_{\sigma} = \frac{1}{(m+E)^2} \left(2k^i \vec{k} \cdot \vec{\sigma}_{\sigma'\sigma} - |\vec{k}|^2 \sigma_{\sigma'\sigma}^i \right).$$

Sustituyendo este resultado en la ec.(A.1), se obtiene:

$$\bar{U}_{\sigma'}(\vec{k}) \gamma^i V_{\sigma}(-\vec{k}) = \left(\sigma_{\sigma'\sigma}^i - \frac{k^i}{E(m+E)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{k})_{\sigma'\sigma} \right).$$

Procediendo del mismo modo, se obtiene la siguiente relación de Gordon:

$$\bar{U}_{\sigma'}(\vec{k}) \gamma^i U_{\sigma}(\vec{k}) = \frac{k^i}{E} \delta_{\sigma'\sigma}.$$

A.3. Reacoplamiento fermiónicos

En términos de sus propiedades de transformación bajo el grupo $SU(3)$ de color, cada uno de los sumandos del Hamiltoniano H_i , se escribe:

$$\left[[q^{(1,0)} \otimes q^{(0,1)}]^{(1,1)} \otimes g^{(1,1)} \right]_{Y=0, T=0}^{(0,0)},$$

donde $q^{(1,0)} \equiv \bar{q}$ representa un operador tensorial en la representación de los cuarks ($a_{cf\sigma}^\dagger$ ó $d_{cf\sigma}$) y $q^{(0,1)} \equiv q$ en la de los anticuarks ($a^{cf\sigma}$ ó $d^{\dagger cf\sigma}$), $g^{(1,1)} \equiv g$ representa al operador asociado al octete gluónico.

Al elevar H_i al cuadrado se tiene automáticamente color cero, ya que H_i es un escalar de color. Se reacoplan los operadores de H_i^2 de tal manera que queden acoplados, por un parte, los pares cuark-anticuarks y, por otra, los gluones:

$$\begin{aligned} & \left[[\bar{q}_1 \otimes q_1]^{(1,1)} \otimes g_1 \right]_{Y=0, T=0}^{(0,0)} \otimes \left[[\bar{q}_2 \otimes q_2]^{(1,1)} \otimes g_2 \right]_{Y=0, T=0}^{(0,0)} = \\ & \sum_{\lambda_1 \mu_1} \left\{ \begin{array}{ccc} (1, 1) & (1, 1) & (0, 0) \\ (1, 1) & (1, 1) & (0, 0) \\ (\lambda_1, \mu_1) & (\mu_1, \lambda_1) & (0, 0) \end{array} \right\} \\ & \times \left[[\bar{q}_1 \otimes q_1]^{(1,1)} \otimes [\bar{q}_2 \otimes q_2]^{(1,1)} \right]_{Y=0, T=0}^{(\lambda_1, \mu_1)} \otimes \left[g_1 \otimes g_2 \right]_{Y=0, T=0}^{(\mu_1, \lambda_1)} = \\ & - \sum_{\lambda_2, \mu_2} \left\{ \begin{array}{ccc} (1, 1) & (1, 1) & (0, 0) \\ (1, 1) & (1, 1) & (0, 0) \\ (\lambda_1, \mu_1) & (\mu_1, \lambda_1) & (0, 0) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} (1, 0) & (0, 1) & (1, 1) \\ (0, 1) & (1, 0) & (1, 1) \\ (\lambda_2, \mu_2) & (\lambda_3, \mu_3) & (\lambda_1, \mu_1) \end{array} \right\} \\ & \times \left[[\bar{q}_1 \otimes q_2]^{(\lambda_2, \mu_2)} \otimes [\bar{q}_2 \otimes q_1]^{(\lambda_3, \mu_3)} \right]_{Y=0, T=0}^{(\lambda_1, \mu_1)} \otimes \left[g_1 \otimes g_2 \right]_{Y=0, T=0}^{(\mu_1, \lambda_1)} \end{aligned} \quad (A.2)$$

Para obtener la proyección al espacio $\mathcal{H}_{(0,0)}$, simplemente se toma el término correspondiente a $(\lambda_1, \mu_1) = (0, 0)$, lo que implica, por otro lado, que $(\lambda_3, \mu_3) = (\mu_2, \lambda_2)$. Dado que (λ_2, μ_2) resulta de acoplar un cuark y un anticuark, $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ ó 1, el resultado es:

$$\begin{aligned} P_{(0,0)}(H_i)^2 P_{(0,0)} = & - \sum_{\lambda_2=0}^1 \left\{ \begin{array}{ccc} (1, 1) & (1, 1) & (0, 0) \\ (1, 1) & (1, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, 0) & (0, 0) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} (1, 0) & (0, 1) & (1, 1) \\ (0, 1) & (1, 0) & (1, 1) \\ (\lambda_2, \lambda_2) & (\lambda_2, \lambda_2) & (0, 0) \end{array} \right\} \\ & \times \left[[\bar{q}_1 \otimes q_2]^{(\lambda_2, \lambda_2)} \otimes [\bar{q}_2 \otimes q_1]^{(\lambda_2, \lambda_2)} \right]_{Y=0, T=0}^{(0,0)} \otimes \left[g_1 \otimes g_2 \right]_{Y=0, T=0}^{(0,0)} \end{aligned} \quad (A.3)$$

Se obtiene un Hamiltoniano con pares cuark-anticuark acoplados a color $(0, 0)$ y $(1, 1)$. El modelo se restringirá al acoplamiento escalar $[(\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0)]$, bajo el supuesto de que éste da la contribución dominante en el régimen de energía baja.

El acoplamiento gluónico, $[g_1 \otimes g_2]^{(0,0)}$, se escribe explícitamente como:

$$[g_1 \otimes g_2]_{Y=0, T=0}^{(0,0)} = C \sum_{\alpha} A_i^{\alpha} A_j^{\alpha}, \quad (A.4)$$

con C una constante (el coeficiente de Clebsch-Gordan de $SU(3)$ que resulta de acoplar los octetes de color $T_{cc}^{\alpha}, A_i^{\alpha}$ a color cero.)

Con los resultados anteriores, la proyección de H_i^2 al subespacio \mathcal{H}_{00} que se tomará como el Hamiltoniano efectivo del modelo, es:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{f} P_{(0,0)}(H_i)^2 P_{(0,0)} = & \frac{C}{f} \left\{ \begin{array}{ccc} (1, 1) & (1, 1) & (0, 0) \\ (1, 1) & (1, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, 0) & (0, 0) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} (1, 0) & (0, 1) & (1, 1) \\ (0, 1) & (1, 0) & (1, 1) \\ (0, 0) & (0, 0) & (0, 0) \end{array} \right\} \\ & \times \left[[\bar{q}_1 \otimes q_2]^{(0,0)} \otimes [\bar{q}_2 \otimes q_1]^{(0,0)} \right]_{Y=0, T=0}^{(0,0)} \sum_{\alpha} A_i^{\alpha} A_j^{\alpha}, \end{aligned} \quad (A.5)$$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

donde se usó la forma explícita del acoplamiento gluónico [ec.(A.4)]. \bar{q}_1 y \bar{q}_2 representan a los operadores a_{cfs}^\dagger o d_{cfs} del primer y segundo H_i , respectivamente. Por su parte, q_1 y q_2 representan a los operadores a_{cfs} o d_{cfs}^\dagger del primer y segundo H_i en el producto $(H_i)^2$. La ec.(A.5), escrita en términos de operadores de creación y aniquilación, es mostrada en la ec.(1.22), en ésta se utiliza la constante G_1 , definida como:

$$G_1 = \frac{gC}{f} \left\{ \begin{array}{ccc} (1,1) & (1,1) & (0,0) \\ (1,1) & (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} (1,0) & (0,1) & (1,1) \\ (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{array} \right\}$$

Reacoplamientos de sabor y espín

Habiendo analizado la estructura de color del Hamiltoniano efectivo, se hará un análisis similar para la estructura de sabor y espín. La intención es reacoplar los operadores, de tal manera que el acoplamiento de sabor se haga entre los mismos operadores del reacoplamiento de color [ec.(A.3)].

De acuerdo a la ref.[15], la parte gluónica [ec.A.4] puede acoplarse a espín $J = 0, 2$. Puesto que H_i^2 es un operador escalar de espín, la parte fermiónica debe acoplarse a los mismos espines $J = 0, 2$.

Para la simetría de sabor, basta considerar la parte fermiónica, ya que los gluones son escalares de sabor. En términos de acoplamientos de sabor y con los irreps de SU(3) refiriéndose ahora a la simetría de sabor, H_i^2 es:

$$H_i^2 = [\bar{q}_1 \otimes q_1]^{(0,0)} \otimes [\bar{q}_2 \otimes q_2]^{(0,0)} \quad (A.6)$$

Reacoplando los términos anteriores, de tal manera que los cuarks del primer término (\bar{q}_1) se acoplen con los anticuarks del segundo (q_2) y los anticuarks del primero (q_1) con los cuarks del segundo (\bar{q}_2), se obtiene:

$$H_i^2 = - \sum_{\lambda_f=0}^1 \left\{ \begin{array}{ccc} (1,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,1) & (1,1) & (0,0) \\ (\lambda_f, \lambda_f) & (\lambda_f, \lambda_f) & (0,0) \end{array} \right\} \left[[\bar{q}_1 \otimes q_2]^{(\lambda_f, \lambda_f)} \otimes [q_1 \otimes \bar{q}_2]^{(\lambda_f, \lambda_f)} \right]_{Y=0, T=0}^{(0,0)} \quad (A.7)$$

Resultando pares cuark-anticuark acoplados a sabor (0,0) y (1,1). El reacoplamiento del espín es realizado en el apéndice A.4.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A.4. Cálculos para obtener el Hamiltoniano efectivo

Efectuando los reacomplamientos de sabor del apéndice anterior, ordenando normalmente el Hamiltoniano y contrayendo los índice espaciales i y j , la ec.(1.23) es:

$$\begin{aligned}
 H_{Sej} = & \sum_{\lambda, \gamma=0}^1 \left\{ \begin{array}{ccc} (1,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,1) & (1,1) & (0,0) \\ (\lambda, \lambda) & (\lambda, \lambda) & (0,0) \end{array} \right\} \int d^3 k_1 d^3 k_2 \frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2}{E_1 E_2} \times \\
 & \left(- \left[a_{\vec{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger \otimes a_{\vec{k}_2 c' f' \sigma_2} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \otimes \left[a_{\vec{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \otimes a_{\vec{k}_1 c' f \sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \right]^{(0,0)_f} \\
 & - \left[d_{\vec{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \otimes d_{\vec{k}_1 c' f \sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \otimes \left[d_{\vec{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger \otimes d_{\vec{k}_2 c' f' \sigma_2} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \right]^{(0,0)_f} \\
 & + 2 \left[a_{\vec{k}_1 c' f \sigma_1}^\dagger \otimes d_{\vec{k}_2 c' f' \sigma_2} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \otimes \left[d_{\vec{k}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \otimes a_{\vec{k}_1 c' f \sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \right]^{(0,0)_f} , \quad (A.8)
 \end{aligned}$$

donde los productos \otimes denotan acoplamientos de sabor. Los operadores de creación y aniquilación en términos de operadores esféricos son:

$$\begin{aligned}
 a_{\vec{k} c' f \sigma}^\dagger &= \sum_{lm} f^*(k) Y_m^l(\hat{k}) a_{klm c' f \sigma}^\dagger, & a_{\vec{k} c' f \sigma} &= \sum_{lm} f(k) Y_m^l(\hat{k}) a_{klm c' f \sigma}, \\
 d_{\vec{k} c' f \sigma}^\dagger &= \sum_{lm} g^*(k) Y_m^l(\hat{k}) d_{klm c' f \sigma}^\dagger, & d_{\vec{k} c' f \sigma} &= \sum_{lm} g(k) Y_m^l(\hat{k}) d_{klm c' f \sigma}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ec.(A.8), se realiza la integración angular después de igualar \vec{k}_1 con \vec{k}_2 de acuerdo a la discusión del capítulo 1. El resultado es:

$$\begin{aligned}
 H_{Sej} = & \sum_{\lambda, \gamma=0}^1 \left\{ \begin{array}{ccc} (1,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,1) & (1,1) & (0,0) \\ (\lambda, \lambda) & (\lambda, \lambda) & (0,0) \end{array} \right\} \int dk_1 dk_2 \frac{|\vec{k}_1|^6 |f(k_1)|^2 |g(k_2)|^2}{E_1^2} \times \\
 & \left(- \left[a_{k_1 l_1 m_1 c' f \sigma_1}^\dagger \otimes a_{k_2 l_2 m_2 c' f' \sigma_2} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \otimes \left[a_{k_2 l_2 m_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \otimes a_{k_1 l_1 m_1 c' f \sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \right]^{(0,0)_f} \\
 & - \left[d_{k_1 l_1 m_1 c' f \sigma_1}^\dagger \otimes d_{k_2 l_2 m_2 c' f' \sigma_2} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \otimes \left[d_{k_2 l_2 m_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \otimes d_{k_1 l_1 m_1 c' f \sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \right]^{(0,0)_f} \\
 & + 2 \left[a_{k_1 l_1 m_1 c' f \sigma_1}^\dagger \otimes d_{k_2 l_2 m_2 c' f' \sigma_2} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \otimes \left[d_{k_2 l_2 m_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \otimes a_{k_1 l_1 m_1 c' f \sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \right]^{(0,0)_f} . \quad (A.9)
 \end{aligned}$$

Siguiendo la discusión del capítulo 1, para obtener el Hamiltoniano efectivo del modelo, se supondrá una sola excitación orbital ($l_1 = m_1 = l_2 = m_2 = 0$), se tomarán los términos correspondientes a un valor fijo de k_1 y k_2 y se multiplicarán estos por constantes diferentes para cada sabor:

$$\begin{aligned}
 H_{Sej} = & \sum_{\lambda, \gamma=0}^1 A_\lambda \left(- \left[a_{c' f \sigma_1}^\dagger \otimes a_{c' f' \sigma_2} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \otimes \left[a_{c' f' \sigma_2}^\dagger \otimes a_{c' f \sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \right]^{(0,0)_f} \\
 & - \left[d_{c' f \sigma_1}^\dagger \otimes d_{c' f' \sigma_2} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \otimes \left[d_{c' f' \sigma_2}^\dagger \otimes d_{c' f \sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \right]^{(0,0)_f} \\
 & + 2 \left[a_{c' f \sigma_1}^\dagger \otimes d_{c' f' \sigma_2} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \otimes \left[d_{c' f' \sigma_2}^\dagger \otimes a_{c' f \sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda)_f} \right]^{(0,0)_f} , \quad (A.10)
 \end{aligned}$$

donde el símbolo 9-j y los factores $\frac{|\vec{k}_1|^6 |f(k_1)|^2 |g(k_2)|^2}{E_1^2}$ se han absorbido en la definición de las constantes indeterminadas A_λ ; para simplificar la notación, se han eliminado los índices l_i , m_i y k_i de los operadores

de creación y aniquilación. Para que todos los índices de los operadores estén acoplados entre los mismos pares, resta reacomodar los índices de espín (σ_i). Para ello se procede igual que en el reacomplamiento de color y sabor (apéndice A.3). Cada uno de los sumandos de la ec. (A.10) tienen la siguiente estructura en términos de sus propiedades de transformación respecto al grupo $SU(2)$ de espín:

$$[\bar{q}_1 \otimes q_1]^{S_1=0} \otimes [\bar{q}_2 \otimes q_2]^{S_2=0} \Big|_{M=0}^0, \quad (\text{A.11})$$

donde, como antes, \bar{q}_i representa al operador de creación de un cuark o de aniquilación de un anticuark y q_i al de aniquilación de un cuark o de creación de un anticuark. Cada uno de los operadores tensoriales anteriores, tienen espín $1/2$. Lo que se quiere es acoplar los términos \bar{q}_1 con los q_2 y los \bar{q}_2 con los q_1 :

$$[\bar{q}_1 \otimes q_1]^{S_1=0} \otimes [\bar{q}_2 \otimes q_2]^{S_2=0} \Big|_{M=0}^0 = - \sum_{S=0}^1 \left\{ \begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ S & S & 0 \end{array} \right\} [[\bar{q}_1 \otimes q_2]^S \otimes [\bar{q}_2 \otimes q_1]^S] \Big|_{M=0}^0, \quad (\text{A.12})$$

donde, ahora, los productos \otimes y los símbolo 9-j se refieren al grupo $SU(2)$ de espín. Realizando los reacomplamientos anteriores en la expresión (A.10), se obtiene:

$$\begin{aligned} H_{Sej} = & \sum_{\lambda, j=0}^1 \sum_{S=0}^1 A_{\lambda} \left\{ \begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ S & S & 0 \end{array} \right\} \times \\ & \left(- \left[\mathbf{a}_{cf\sigma_1}^\dagger \otimes \mathbf{a}_{cf'\sigma_2} \right]^{(\lambda, \lambda), j, S} \otimes \left[\mathbf{a}_{c'f'\sigma_2}^\dagger \otimes \mathbf{a}_{c'f\sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda), j, S} \right)^{(0,0), j, 0} \\ & - \left[\mathbf{d}^\dagger c'f'\sigma_2 \otimes \mathbf{d}_{cf\sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda), j, S} \otimes \left[\mathbf{d}^\dagger c'f\sigma_1 \otimes \mathbf{d}_{c'f'\sigma_2} \right]^{(\lambda, \lambda), j, S} \Big|_{M=0}^{(0,0), j, 0} \\ & + 2 \left[\mathbf{a}_{cf\sigma_1}^\dagger \otimes \mathbf{d}^\dagger c'f'\sigma_2 \right]^{(\lambda, \lambda), j, S} \otimes \left[\mathbf{d}_{c'f'\sigma_2} \otimes \mathbf{a}_{c'f\sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda), j, S} \Big|_{M=0}^{(0,0), j, 0} \Big), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

con los productos \otimes denotando conjuntamente acoplamientos $SU(3)$ de sabor y $SU(2)$ de espín.

Consistente con lo realizado anteriormente, se introducen nuevas constantes indeterminadas para cada espín ($S = 0, 1$). Con la notación [ver ec.(1.28)]:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(\lambda, \lambda), j, S, M}^\dagger &= \left[\mathbf{a}_{cf\sigma_1}^\dagger \otimes \mathbf{d}^\dagger c'f'\sigma_2 \right]^{(\lambda, \lambda), j, S} \\ \mathbf{B}_{(\lambda, \lambda), j, S, M} &= \left[\mathbf{d}_{c'f'\sigma_2} \otimes \mathbf{a}_{c'f\sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda), j, S} \\ \mathbf{C}_{(\lambda, \lambda), j, S, M} &= \left[\mathbf{a}_{cf\sigma_1}^\dagger \otimes \mathbf{a}_{cf'\sigma_2} \right]^{(\lambda, \lambda), j, S} \\ \bar{\mathbf{C}}_{(\lambda, \lambda), j, S, M} &= \left[\mathbf{d}^\dagger c'f'\sigma_2 \otimes \mathbf{d}_{cf\sigma_1} \right]^{(\lambda, \lambda), j, S}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

la ec.(A.13) se escribe:

$$H_{Sej} = \sum_{\lambda=0}^1 \sum_{S=0}^1 A_{\lambda} S \left[- (\mathbf{C}_{(\lambda, \lambda), S} \cdot \mathbf{C}_{(\lambda, \lambda), S}) - (\bar{\mathbf{C}}_{(\lambda, \lambda), S} \cdot \bar{\mathbf{C}}_{(\lambda, \lambda), S}) + 2(\mathbf{B}_{(\lambda, \lambda), S}^\dagger \cdot \mathbf{B}_{(\lambda, \lambda), S}) \right], \quad (\text{A.15})$$

donde el producto punto es un acoplamiento escalar en el espacio de espín y de sabor, y se han introducido constantes indeterminadas para cada sabor y espín.

Repetiendo los pasos anteriores para el término de la ec.(1.24), se obtiene:

$$H_{Pej} = \sum_{\lambda=0}^1 \sum_{S=0}^1 A_{\lambda} S D_S \left[(\mathbf{B}_{(\lambda, \lambda), S}^\dagger \cdot \mathbf{B}_{(\lambda, \lambda), S}) + (\mathbf{B}_{(\lambda, \lambda), S} \cdot \mathbf{B}_{(\lambda, \lambda), S}) - 2(\mathbf{C}_{(\lambda, \lambda), S}^\dagger \cdot \bar{\mathbf{C}}_{(\lambda, \lambda), S}) \right]. \quad (\text{A.16})$$

La única diferencia con H_S , es el acoplamiento inicial de los espines de los pares $\bar{q}_i \otimes q_i$, mientras que en H_P están acoplados a $S_i = 0$, en H_P están acoplados a $S_i = 1^1$, para tomar en cuenta esta diferencia se introdujo una nueva constante D_S en la expresión (A.16).

¹Es decir, en las expresiones equivalentes a las ecs.(A.12) y (A.13), los primeros 2 valores de la última columna en el símbolo 9-j, cambian de $S_i = 0$ a $S_i = 1$

Finalmente, para llegar al Hamiltoniano efectivo de la ec.(1.27), se eliminan los términos $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}$ y $\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{C}}$ de la expresión (A.15) (importantes, sin embargo, para describir el sector bariónico del modelo) y se redefinen los parámetros indeterminados ($A_{\lambda S} D_S \equiv G_{\lambda S}$ y $2A_{\lambda S} \equiv G_{\lambda S} G'_S$):

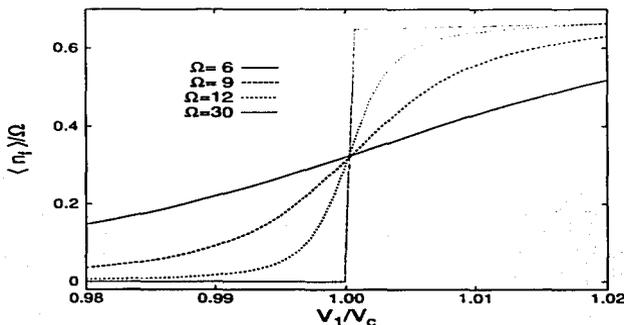
$$H_{Sej} + H_{Pef} = \sum_{\lambda=0}^1 \sum_{S=0}^1 G_{\lambda S} \left[(\mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}^\dagger \cdot \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}^\dagger) + (\mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S} \cdot \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}) \right. \\ \left. - 2(\mathbf{C}_{(\lambda,\lambda)S} \cdot \bar{\mathbf{C}}_{(\lambda,\lambda)S}) + G'_S (\mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}^\dagger \cdot \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}) \right]. \quad (\text{A.17})$$

B.1. Transición de fase cuántica del Hamiltoniano (2.15) en el límite $\Omega \rightarrow \infty$

El análisis de la transición de fase cuántica del Hamiltoniano (2.15) usando estados coherentes (figura 2.3), sugiere una transición de primer orden, en la que el valor de expectación del número de pares fermiónicos ($\langle n_f \rangle$) que es función monótona creciente de la variable ρ_f pasa de manera discontinua de 0 a un valor finito en $V_1 = V_c$. Por otro lado, el valor de expectación de los pares fermiónicos obtenido con la diagonalización numérica del Hamiltoniano, realizada para $\Omega = 9$, no muestra dicha discontinuidad (ver figuras 2.7, 2.9 y 3.3). Con el objetivo de hacer consistentes estos dos resultados, se presentan en este apéndice los resultados de la diagonalización numérica tomando diferentes valores de Ω , es decir, se presentará el comportamiento de la transición de fase al aumentar el número de grados de libertad del sistema.

Con la diagonalización numérica del Hamiltoniano, claramente, es imposible calcular el valor de expectación $\langle n_f \rangle$ en el límite termodinámico $\Omega \rightarrow \infty$, sin embargo, sí es posible obtener la tendencia del cambio de $\langle n_f \rangle$ en la región $V_1 \approx V_c$ al aumentar el número de grados de libertad del sistema, es decir, al aumentar el parámetro Ω . Esto es precisamente lo que se muestra en la figura que está en la parte inferior de la página. En ella se ha graficado, para diferentes valores de Ω , el valor de expectación de n_f normalizado respecto a Ω como función del cociente V_1/V_c , donde V_1 es la constante de acoplamiento del Hamiltoniano (2.15) y V_c es el valor crítico estimado para los diferentes valores de Ω . De la figura es claro que, al aumentar el valor de Ω , el cambio de $\langle n_f \rangle$ en la transición, es cada vez más abrupto. Sin ser una demostración formal, esto comprueba que en el límite $\Omega \rightarrow \infty$ el cambio de $\langle n_f \rangle$ en $V_1 = V_c$ es discontinuo y, por tanto, que la transición de fase es de primer orden, en acuerdo con el resultado obtenido con el análisis usando estados coherentes.

De este modo, la continuidad de $\langle n_f \rangle$ obtenida con la diagonalización numérica del Hamiltoniano en la transición de la fase perturbativa a la fase deformada, es consecuencia simplemente del número finito de grados de libertad considerados ($\Omega = 9$) y no al hecho de que la transición sea de segundo orden.



C.1. Cálculo de la constante de normalización $\mathcal{N}_{n_1 n_2}$

Los estado de máximo peso en los grupos $SU_q(2)$ y $SU_q(2)$ son:

$$|n_1, n_2\rangle = \mathcal{N}_{n_1 n_2} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1} \left(\Delta^\dagger \right)^{n_2} |0\rangle, \quad (C.1)$$

donde $|0\rangle$ es el estado sin excitaciones cuark-anticuark y $B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger$ y Δ^\dagger son definidos en el capítulo 3. De la ec. anterior es claro que se cumplen las relaciones $n_q = n_q$ y $s_q = s_q$. El espín total S de los estados resulta del acoplamiento de s_q y $s_{\bar{q}}$. La constante de normalización $\mathcal{N}_{n_1 n_2}$ es calculada usando la siguiente condición:

$$\mathcal{N}_{n_1 n_2}^2 \langle 0 | (\Delta)^{n_2} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1} \left(\Delta^\dagger \right)^{n_2} |0\rangle = 1. \quad (C.2)$$

La ec.(C.2) puede ser resuelta usando las siguientes reglas de conmutación:

$$\left[B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger, \left(\Delta^\dagger \right)^n \right] |0\rangle = n(n - \Omega - 2) B_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^\dagger (\Delta)^{n-1} |0\rangle, \quad (C.3)$$

$$\left[B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger, \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^n \right] = \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n-1} n(\Omega - n + 1 - n_{q\frac{1}{2}} - n_{\bar{q}-\frac{1}{2}}). \quad (C.4)$$

Se calcula

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{n_1 n_2}^{-2} &= \langle 0 | (\Delta)^{n_2} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1} \left(\Delta^\dagger \right)^{n_2} |0\rangle \\ &= \langle 0 | (\Delta)^{n_2} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1-1} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1} B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \left(\Delta^\dagger \right)^{n_2} |0\rangle \\ &\quad + \langle 0 | (\Delta)^{n_2} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1-1} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1-1} n_1(\Omega - n_1 + 1 - n_{q\frac{1}{2}} - n_{\bar{q}-\frac{1}{2}}) \left(\Delta^\dagger \right)^{n_2} |0\rangle, \end{aligned}$$

donde se ha usado (C.3). Después se usa (C.4) y el hecho de que cada sumando en Δ^\dagger consiste de una partícula con proyección de espín $\frac{1}{2}$ y una antipartícula con proyección de espín $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{n_1 n_2}^{-2} &= \langle 0 | (\Delta)^{n_2} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1-1} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1} n_2(n_2 - \Omega - 2) B_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^\dagger (\Delta)^{n_2-1} |0\rangle \\ &\quad + \langle 0 | (\Delta)^{n_2} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1-1} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1-1} n_1(\Omega - n_1 + 1 - 2n_2) \left(\Delta^\dagger \right)^{n_2} |0\rangle. \end{aligned}$$

Debido a que $B_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^\dagger$ conmuta con $B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger$ y con $B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{n_1 n_2}^{-2} &= \langle 0 | (\Delta)^{n_2} B_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^\dagger \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1-1} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1} n_2(n_2 - \Omega - 2) (\Delta)^{n_2-1} |0\rangle \\ &\quad + \langle 0 | (\Delta)^{n_2} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1-1} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1-1} n_1(\Omega - n_1 + 1 - 2n_2) \left(\Delta^\dagger \right)^{n_2} |0\rangle. \end{aligned}$$

Nótese que $\left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^\dagger = B_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^\dagger$, lo que permite usar la conjugación compleja de la ec.(C.3) que conduce a:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{n_1 n_2}^{-2} &= \langle 0 | n_2(n_2 - \Omega - 2) (\Delta)^{n_2-1} B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1-1} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1} n_2(n_2 - \Omega - 2) (\Delta)^{n_2-1} |0\rangle \\ &\quad + \langle 0 | (\Delta)^{n_2} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1-1} \left(B_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1-1} n_1(\Omega - n_1 + 1 - 2n_2) \left(\Delta^\dagger \right)^{n_2} |0\rangle. \end{aligned}$$

Finalmente se usa (C.2) para obtener:

$$\mathcal{N}_{n_1 n_2}^{-2} = n_2^2(\Omega + 2 - n_2)^2 \mathcal{N}_{n_1(n_2-1)}^{-2} + n_1(\Omega - n_1 + 1 - 2n_2) \mathcal{N}_{(n_1-1)n_2}^{-2}.$$

Esta ecuación tiene la solución:

$$\mathcal{N}_{n_1 n_2}^{-2} = \frac{n_2!(n_1 + n_2 + 1)!n_1!}{(n_1 + 1)!} \frac{(\Omega + 1)!}{(\Omega - n_2 + 1)!} \frac{\Omega!}{(\Omega - n_1 - n_2)!}. \quad (C.5)$$

Que es el resultado buscado.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

C.2. Los elementos reducidos en $SU_q(2)$ y $SU_{\bar{q}}(2)$.

En este apéndice se explica la notación utilizada en el capítulo 3.

B_L^{\dagger} es una notación simplificada del operador compuesto que actúa en el espacio de los cuarks y en el de los anticuarks:

$$B_{LM}^{\dagger} = \sum_{\alpha f \sigma_1 \sigma_2} (1/2\sigma_1 1/2 \sigma_2 | LM) a_{\alpha f \sigma_1}^{\dagger} d^{\dagger \alpha f}_{\sigma_2} .$$

Utilizando la ec.(2.53) de la ref.[48], se obtiene:

$$\begin{aligned} (n_q + 1s_q'' S'' || B_L^{\dagger} || n_q s_q S) &= \sqrt{(2S'' + 1)(2L + 1)(2S + 1)} \left\{ \begin{array}{ccc} s_q'' & s_q'' & S'' \\ s_q & s_q & S \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & L \end{array} \right\} \times \\ & (n_q + 1s_q'' || a_{\alpha f \sigma_1}^{\dagger} || n_q s_q) (n_q + 1s_q'' || d^{\dagger \alpha f} || n_q s_q) . \end{aligned}$$

Debido a que en la irrep del estado base ($[\Omega\Omega 00]$) se cumplen las relaciones $n_q = n_q$ y $s_q = s_q$, el producto de elementos reducidos en la última igualdad puede escribirse como:

$$(n_q + 1s_q'' || a_{\alpha f \sigma_1}^{\dagger} || n_q s_q) (n_q + 1s_q'' || d^{\dagger \alpha f} || n_q s_q) = (n_q + 1s_q'' || B^{\dagger} || n_q s_q) ,$$

que es el significado de la notación utilizada en el capítulo 3.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

C.3. Comparación del espacio fermiónico y bosónico

En este apéndice se hace una comparación explícita entre el espacio de Hilbert fermiónico y bosónico, para el caso de pares cuark-anticuark acoplados a sabor (0, 0) y espín 0 y 1 en la irrep $[\Omega\Omega 00]$ del grupo $U(4)$.

El espacio fermiónico de la irrep $[\Omega\Omega 00]$ es construido en el capítulo 3. Los estados de máximo peso en $SU_q(2)$ y $SU_q(2)$ son:

$$|N; s_q m_q = s_q; s_q m_q = s_q\rangle = \mathcal{N}_{n_1 n_2} \left(B_{\frac{1}{2}}^\dagger \right)^{n_1} \left(\Delta^\dagger \right)^{n_2} |0\rangle .$$

donde $s_q = s_q = \frac{n_1}{2}$ y $N \equiv n_q = n_q = n_1 + 2n_2$. Los operadores B^\dagger y Δ^\dagger son definidos en el capítulo 3.

La condición de que sólo haya hasta Ω cuarks (o anticuarks) de una proyección de espín dada, implica:

$$n_1 + n_2 \leq \Omega .$$

Los espines de los cuarks y anticuarks, se acoplan a espín total S :

$$S = 0, 1, \dots, 2s_q .$$

Por su parte, el espacio bosónico es construido con los operadores de creación del oscilador unidimensional y tridimensional. Los estados de máximo peso en el grupo $SO(3)$ de espín total S , son:

$$|N_{00}; N_{01} S M = S\rangle = \mathcal{N} \left(b_{00}^\dagger \right)^{N_{00}} \left(b_1^\dagger \cdot b_1^\dagger \right)^{\frac{N_{01}-S}{2}} \left(b_{11}^\dagger \right)^S |0\rangle .$$

Los cortes propuestos para el espacio bosónico son:

$$\begin{aligned} N_{00} + N_{10} &\leq 2\Omega \\ N_{01} &\leq \Omega . \end{aligned}$$

(C.6)

Con las ecs. anteriores se construye la siguiente tabla, en la que se muestran las bases fermiónica y bosónica para $\Omega = 2$:

		Fermiónico			Bosónico		
N	n_1	n_2	s_q	S	N_{00}	N_{01}	S
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	$\frac{1}{2}$	0, 1	1	0	0
					0	1	1
2	2	0	1	0, 1, 2	2	0	0
				0	1	1	1
				0	2	0, 2	
3	1	1	$\frac{1}{2}$	0, 1	3	0	0
					2	1	1
					1	2	0, 2
4	0	2	0	0	4	0	0
					3	1	1
					2	2	0, 2

Para $N \leq \Omega$ no hay aún estados espurios, los cuales aparecen a partir de $\Omega + 1$. En $N = 3$ y $N = 4$, el espín $S = 0$ aparece duplicado en el espacio bosónico, y existen estados espurios de espín $S = 2$. En $N = 4$ aparece un estado espurio de espín 1.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

D.1. Conjugación de carga de los estados

El operador de conjugación de carga actúa del siguiente modo sobre los operadores de creación de los cuarks y anticuarks:

$$\begin{aligned} C a_{c f \sigma}^{\dagger} C^{-1} &= d_{c f \sigma}^{\dagger} \\ C d_{c f \sigma}^{\dagger} C^{-1} &= a_{c f \sigma}^{\dagger} \end{aligned} \quad (D.1)$$

donde el operador a^{\dagger} transforma en color y sabor como una irrep (1,0) de $SU(3)$, mientras que d^{\dagger} transforma como (0,1). Los índices c y f se refieren a la reflexión en los números magnéticos cuánticos de $SU(3)$, es decir, si f es Y, T y T_z , \bar{f} es $-Y, T$ y $-T_z$; de modo similar para \bar{c} .

Con lo anterior, la acción de operador de conjugación de carga sobre un par cuark-anticuark es:

$$\begin{aligned} C B_{\lambda f, S M}^{\dagger} C^{-1} &= C \sum_{c f_1 f_2 \sigma_1 \sigma_2} a_{c f_1 \sigma_1}^{\dagger} a_{f_2 \sigma_2}^{\dagger} \langle (1,0) f_1, (0,1) f_2 | (\lambda, \lambda) f \rangle_1 \\ &\quad \left(\frac{1}{2} \sigma_1, \frac{1}{2} \sigma_2 | S M \right) C^{-1} \\ &= \sum_{c f_1 f_2 \sigma_1 \sigma_2} d_{c f_1 \sigma_1}^{\dagger} a_{f_2 \sigma_2}^{\dagger} \langle (1,0) f_1, (0,1) f_2 | (\lambda, \lambda) f \rangle_1 \left(\frac{1}{2} \sigma_1, \frac{1}{2} \sigma_2 | S M \right) \\ &= - \sum_{c f_1 f_2 \sigma_1 \sigma_2} a_{f_2 \sigma_2}^{\dagger} d_{c f_1 \sigma_1}^{\dagger} \langle (1,0) f_1, (0,1) f_2 | (\lambda, \lambda) f \rangle_1 \left(\frac{1}{2} \sigma_1, \frac{1}{2} \sigma_2 | S M \right) \\ &= -(-1)^{2\lambda_1+1-S} \sum_{c f_1 f_2 \sigma_1 \sigma_2} a_{f_2 \sigma_2}^{\dagger} a_{c f_1 \sigma_1}^{\dagger} \langle (1,0) \bar{f}_2, (0,1) \bar{f}_1 | (\lambda, \lambda) \bar{f} \rangle_1 \left(\frac{1}{2} \sigma_2, \frac{1}{2} \sigma_1 | S M \right) \\ &= (-1)^S B_{\lambda \bar{f}, S_1 M}^{\dagger} \end{aligned} \quad (D.2)$$

donde se usaron las propiedades de los coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(2)$ [49] y de $SU(3)$ [50]. El subíndice 1 en el coeficiente Clebsch-Gordan de $SU(3)$ indica una multiplicidad de uno [50].

Para el producto de dos pares de operadores, se tiene:

$$\begin{aligned} &C \left[B_{\lambda_1, S_1}^{\dagger} \otimes B_{\lambda_2, S_2}^{\dagger} \right]_{f, M}^{\rho(\lambda, \mu) S} C^{-1} \\ &= C \sum_{f_1 f_2 M_1 M_2} B_{\lambda_1 f_1, S_1 M_1}^{\dagger} B_{\lambda_2 f_2, S_2 M_2}^{\dagger} \langle (\lambda_1, \lambda_1) f_1, (\lambda_2, \lambda_2) f_2 | (\lambda, \mu) f \rangle_{\rho} \\ &\quad (S_1 M_1, S_2 M_2 | S M) C^{-1} \\ &= \sum_{f_1 f_2 M_1 M_2} (-1)^{S_1+S_2} B_{\lambda_1 f_1, S_1 M_1}^{\dagger} B_{\lambda_2 f_2, S_2 M_2}^{\dagger} \langle (\lambda_1, \lambda_1) f_1, (\lambda_2, \lambda_2) f_2 | (\lambda, \mu) f \rangle_{\rho} \\ &\quad (S_1 M_1, S_2 M_2 | S M) \\ &= (-1)^{S_1+S_2-\lambda-\mu+\rho_{\max}-\rho} \sum_{f_1 f_2 M_1 M_2} B_{\lambda_1 f_1, S_1 M_1}^{\dagger} B_{\lambda_2 f_2, S_2 M_2}^{\dagger} \langle (\lambda_1, \lambda_1) \bar{f}_1, (\lambda_2, \lambda_2) \bar{f}_2 | (\mu, \lambda) \bar{f} \rangle_{\rho} \\ &\quad (S_1 M_1, S_2 M_2 | S M) \\ &= (-1)^{S_1+S_2-\lambda-\mu+\rho_{\max}-\rho} \left[B_{\lambda_1, S_1}^{\dagger} \otimes B_{\lambda_2, S_2}^{\dagger} \right]_{f, M}^{(\mu, \lambda) S} \end{aligned} \quad (D.3)$$

donde ρ es el índice de multiplicidad de (λ, μ) en el producto $(\lambda_1, \lambda_1) \otimes (\lambda_2, \lambda_2)$.

Para el producto de tres pares, se tiene:

$$\begin{aligned} &C \left[\left[B_{\lambda_1, S_1}^{\dagger} \otimes B_{\lambda_2, S_2}^{\dagger} \right]_{f_{12} M_{12}}^{(\lambda_{12}, \mu_{12}), S_{12}} \otimes B_{\lambda_3, S_3}^{\dagger} \right]_{f, M}^{(\lambda, \mu) S} C^{-1} \\ &= \sum_{f_{12} f_3 M_{12} M_3} C \left[B_{\lambda_1, S_1}^{\dagger} \otimes B_{\lambda_2, S_2}^{\dagger} \right]_{f_{12} M_{12}}^{(\lambda_{12}, \mu_{12}), S_{12}} C^{-1} C B_{\lambda_3, S_3}^{\dagger} C^{-1} \\ &\quad \langle (\lambda_{12}, \mu_{12}) f_{12}, (\lambda_3, \lambda_3) f_3 | (\lambda, \mu) f \rangle_{\rho} (S_{12} M_{12}, S_3 M_3 | S M) C^{-1} \\ &= \sum_{f_{12} f_3 M_{12} M_3} (-1)^{S_1+S_2-\lambda_{12}-\mu_{12}+\rho_{12, \max}-\rho_{12}} \left[B_{\lambda_1, S_1}^{\dagger} \otimes B_{\lambda_2, S_2}^{\dagger} \right]_{f_{12} M_{12}}^{(\mu_{12}, \lambda_{12}), S_{12}} (-1)^{S_3} B_{\lambda_3, S_3}^{\dagger} \\ &\quad \langle (\lambda_{12}, \mu_{12}) f_{12}, (\lambda_3, \lambda_3) f_3 | (\lambda, \mu) f \rangle_{\rho} (S_{12} M_{12}, S_3 M_3 | S M) C^{-1} \\ &= (-1)^{S_1+S_2+S_3-\lambda_{12}-\mu_{12}+\rho_{12, \max}-\rho_{12}} \sum_{f_{12} f_3 M_{12} M_3} \left[B_{\lambda_1, S_1}^{\dagger} \otimes B_{\lambda_2, S_2}^{\dagger} \right]_{f_{12} M_{12}}^{(\mu_{12}, \lambda_{12}), S_{12}} B_{\lambda_3, S_3}^{\dagger} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \langle (\mu_{12}, \lambda_{12}) \bar{f}_{12}, (\lambda_3, \lambda_3) \bar{f}_3 | (\mu, \lambda) \bar{f} \rangle_{\rho} (-1)^{\lambda_{12} + \mu_{12} - \lambda - \mu + \rho_{\max} - \rho} (S_{12} M_{12}, S_3 M_3 | S M) \\
 = & (-1)^{S_1 + S_2 + S_3 - \lambda - \mu + \rho_{12, \max} - \rho_{12} + \rho_{\max} - \rho} \left[[B_{\lambda_1, S_1}^{\dagger} \otimes B_{\lambda_2, S_2}^{\dagger}]^{(\mu_{12}, \lambda_{12}), S_{12}} \otimes B_{\lambda_3, S_3}^{\dagger} \right]_{f, M}^{(\mu, \lambda), S}, \quad (D.4)
 \end{aligned}$$

donde se uso la notación de la ref.[50] para el coeficiente de Clebsch-Gordan de $SU(3)$ y sus propiedades de simetría.

D.2. Elementos de matriz del Modelo bosónico

En este apéndice se calculan los siguientes elementos de matriz:

$$\langle N_{\lambda S} + 2 \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} | (b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S}^\dagger) | N_{\lambda S} \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} \rangle ,$$

donde $N_{\lambda S}$ es el número de excitaciones, $\nu_{\lambda S}$ es la *antigüedad* (número de excitaciones no acopladas escalaramente en pares) y α es el resto de los números cuánticos, los cuales no son relevantes para el presente cálculo.

Los estados con *antigüedad* definida son de la forma (se eliminan los subíndices para simplificar la notación):

$$|N\nu\alpha\rangle = \mathcal{N}_{N\nu} (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{N-\nu}{2}} |\nu\nu\alpha\rangle ,$$

donde los estados $|\nu\nu\alpha\rangle$ son aquellos sin ningún par escalar y satisfacen la siguiente relación:

$$(b \cdot b) |\nu\nu\alpha\rangle = 0 .$$

El elemento de matriz es simplemente la razón de dos constantes de normalización:

$$\begin{aligned} \langle N + 2 \nu \alpha | (b^\dagger \cdot b^\dagger) | N \nu \alpha \rangle &= \\ \mathcal{N}_{N\nu} \langle N + 2 \nu \alpha | (b^\dagger \cdot b^\dagger) (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{N-\nu}{2}} |\nu \nu \alpha \rangle &= \\ \mathcal{N}_{N\nu} \frac{\mathcal{N}_{N+2\nu}}{\mathcal{N}_{N+2\nu}} \langle N + 2 \nu \alpha | (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{N+2-\nu}{2}} |\nu \nu \alpha \rangle &= \\ \frac{\mathcal{N}_{N\nu}}{\mathcal{N}_{N+2\nu}} \langle N + 2 \nu \alpha | N + 2 \nu \alpha \rangle &= \\ \frac{\mathcal{N}_{N\nu}}{\mathcal{N}_{N+2\nu}} & \end{aligned} \quad (D.5)$$

La constante de normalización $\mathcal{N}_{N\nu}$ se determina desde la siguiente condición:

$$\langle N \nu \alpha | N \nu \alpha \rangle = \langle \nu \nu \alpha | (b \cdot b)^{\frac{N-\nu}{2}} (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{N-\nu}{2}} |\nu \nu \alpha \rangle (\mathcal{N}_{N\nu})^2 = 1 . \quad (D.6)$$

De la definición del producto punto:

$$b^\dagger \cdot b^\dagger \equiv \sum_{i=1}^d b_i^\dagger b_i^\dagger ,$$

donde d es la dimensión del oscilador armónico, se puede calcular fácilmente el siguiente conmutador:

$$[(b \cdot b), (b^\dagger \cdot b^\dagger)] = 4N + 2d ,$$

donde N es el operador de número. Utilizando el conmutador anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} [(b \cdot b), (b^\dagger \cdot b^\dagger)^m] &= \\ \sum_{k=0}^{m-1} (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{m-1-k} [(b \cdot b), (b^\dagger \cdot b^\dagger)] (b^\dagger \cdot b^\dagger)^k &= \\ (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} (4N + 8k + 2d) &= \\ m (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{m-1} (4N + 2d + 4(m-1)) , & \end{aligned} \quad (D.7)$$

donde se usó:

$$[N, (b^\dagger \cdot b^\dagger)^k] = 2k (b^\dagger \cdot b^\dagger)^k .$$

Sustituyendo el conmutador (D.7) en la condición (D.6), se obtiene ($m \equiv \frac{N-\nu}{2}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{N-\nu}^{-2} &= \langle \nu \nu \alpha | (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^m (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)^m | \nu \nu \alpha \rangle = \\ &\langle \nu \nu \alpha | (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{m-1} (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)^{m-1} m (4N + 2d + 4(m-1)) | \nu \nu \alpha \rangle = \\ &m (4\nu + 2d + 4(m-1)) \langle \nu \nu \alpha | (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{m-1} (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger)^{m-1} | \nu \nu \alpha \rangle = \\ &m (4\nu + 2d + 4(m-1)) \mathcal{N}_{N-2\nu}^{-2}, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

de donde resulta:

$$\mathcal{N}_{N-\nu}^{-2} = \mathcal{N}_{N-2\nu}^{-2} 2m (2\nu + d + 2(m-1)),$$

que aplicada recursivamente conduce a:

$$\mathcal{N}_{N-\nu}^{-2} = 2^m m! \frac{(2\nu + d + 2m - 2)!!}{(2\nu + d - 2)!!}.$$

Despejando y simplificando la expresión anterior, se llega a:

$$\mathcal{N}_{N\nu} = \sqrt{\frac{(2\nu + d - 2)!!}{(N - \nu)!! (N + \nu + d - 2)!!}}.$$

Sustituyendo este resultado en la ec.(D.5) y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned} (N + 2\nu \alpha | (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger) | N \nu \alpha) &= \\ \frac{\mathcal{N}_{N\nu}}{\mathcal{N}_{N+2\nu}} &= \\ \sqrt{(N - \nu + 2)(N + d + \nu)}. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

El elemento de matriz del operador transpuesto se obtiene de conjuagar el resultado anterior:

$$\langle N \nu \alpha | (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) | N + 2\nu \alpha \rangle = \sqrt{(N - \nu + 2)(N + d + \nu)}, \quad (\text{D.10})$$

es decir:

$$\langle N - 2\nu \alpha | (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) | N \nu \alpha \rangle = \sqrt{(N - \nu)(N + \nu + d - 2)}. \quad (\text{D.11})$$

El operador $\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}$, es simplemente el operador de número, por lo que:

$$\langle N \nu \alpha | (\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}) | N \nu \alpha \rangle = N. \quad (\text{D.12})$$

Las dimensiones de los osciladores para los diferentes canales $(\lambda, \lambda)S$ de sabor y espín, son:

$(\lambda, \lambda)S$	$d_{\lambda S}$
$(0, 0)0$	1
$(0, 0)1$	3
$(1, 1)0$	8
$(1, 1)1$	24

E.1. Reescritura de la gran función de partición

La ec.(2.7) del trabajo de Kuriyama [68], que expresa la gran función de partición, es:

$$Z_k = \sum_{2\tau=0}^{2\Omega} \sum_{\nu_1=0}^{2\Omega-2\tau} \frac{(2\Omega)!}{(2\tau)!\nu_1!(2\Omega-\nu_1-2\tau)!} e^{\beta\mu(2\tau+2\nu_1)} \sum_{k=0}^{[\tau]} g_k^\tau \sum_n e^{-\beta E_n^{\tau-k}}, \quad (\text{E.1})$$

donde $g_k^\tau = \binom{2\tau}{k} \binom{2\tau}{k-1} = \binom{2\tau}{k} \binom{2\tau-2k+1}{2\tau-k+1}$, el pseudoespín es $\mathcal{J} = \tau - k$ y

$$[\tau] = \begin{cases} \tau & \text{si } 2\tau \text{ es par } (\tau \text{ entero}) \\ \tau - \frac{1}{2} & \text{si } 2\tau \text{ es impar } (\tau \text{ semientero}) \end{cases}$$

Se cumple la siguiente relación [68]: $2\tau + \nu_1 = n_1 + n_2$, donde n_i es el número de partículas en la imagen de partículas con energías positiva y negativa. De acuerdo al capítulo 2, $n_2 = n_q$ y $n_1 = 2\Omega - n_q$, entonces:

$$2\tau + 2\nu_1 = 2\Omega + (n_q - n_q) = h_1 + h_2.$$

Para comparar con la ec.(5.3) se debe, pues, identificar $\mu = \mu_B/3$ y multiplicar la ec.(E.1) por $e^{-\beta\mu 2\Omega}$:

$$e^{-\beta\mu 2\Omega} Z_k = e^{-\beta\mu 2\Omega} \sum_{2\tau=0}^{2\Omega} \sum_{\nu_1=0}^{2\Omega-2\tau} \frac{(2\Omega)!}{(2\tau)!\nu_1!(2\Omega-\nu_1-2\tau)!} e^{\beta\mu(2\tau+2\nu_1)} \sum_{k=0}^{[\tau]} g_k^\tau \sum_n e^{-\beta E_n^{\tau-k}} = e^{-\beta\mu 2\Omega} \sum_{2\tau=0}^{2\Omega} \sum_{\nu_1=0}^{2\Omega-2\tau} \sum_{k=0}^{[\tau]} \frac{(2\Omega)!}{(2\tau)!\nu_1!(2\Omega-\nu_1-2\tau)!} e^{\beta\mu(2\tau+2\nu_1)} \binom{2\tau}{k} \binom{2\tau-2k+1}{2\tau-k+1} Z[\mathcal{J} = \tau - k], \quad (\text{E.2})$$

donde en la última línea se ha utilizado la expresión para g_k^τ y la definición $Z[\mathcal{J}] = \sum_n e^{-\beta E_n^{\mathcal{J}}}$. Cambiando la suma sobre 2τ por una suma sobre $2\mathcal{J} = 2\tau - 2k$, se obtiene:

$$e^{-\beta\mu 2\Omega} Z_k = e^{-\beta\mu 2\Omega} \sum_{2\mathcal{J}=0}^{2\Omega} (2\Omega)!(2\mathcal{J}+1) Z[\mathcal{J}] e^{\beta\mu 2\mathcal{J}} \times \sum_{k=0}^{\Omega - \lfloor \frac{2\mathcal{J}+1}{2} \rfloor} \sum_{\nu_1=0}^{2\Omega-2\mathcal{J}-2k} \frac{1}{(2\mathcal{J}+2k)!\nu_1!(2\Omega-\nu_1-2\mathcal{J}-2k)!} e^{\beta\mu(2k+2\nu_1)} \binom{2\mathcal{J}+2k}{k} \left(\frac{1}{2\mathcal{J}+k+1} \right). \quad (\text{E.3})$$

En las sumas de la última línea se cambia la suma sobre ν_1 por una suma sobre $l \equiv \nu_1 + k$. Para ello supóngase que $2\mathcal{J}$ es par (el caso impar produce el mismo resultado). En este caso $\Omega - \lfloor \frac{2\mathcal{J}+1}{2} \rfloor$ se reduce a $\Omega - \mathcal{J}$ y las mencionadas sumas son:

$$\sum_{k=0}^{\Omega-\mathcal{J}} \sum_{\nu_1=0}^{2(\Omega-\mathcal{J})-2k} \frac{1}{(2\mathcal{J}+2k)!\nu_1!(2\Omega-\nu_1-2\mathcal{J}-2k)!} e^{\beta\mu(2k+2\nu_1)} \binom{2\mathcal{J}+2k}{k} \left(\frac{1}{2\mathcal{J}+k+1} \right) = \sum_{l=0}^{\Omega-\mathcal{J}} e^{2\beta\mu l} \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!(l-k)!(2(\Omega-\mathcal{J})-k-l)!(2\mathcal{J}+k+1)!} + \sum_{l=\Omega-\mathcal{J}+1}^{2\Omega-2\mathcal{J}} e^{2\beta\mu l} \sum_{k=0}^{2(\Omega-\mathcal{J})-l} \frac{1}{k!(l-k)!(2(\Omega-\mathcal{J})-k-l)!(2\mathcal{J}+k+1)!}. \quad (\text{E.4})$$

La primera de las sumas sobre k es:

$$\sum_{l=0}^l e^{2\beta\mu l} \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!(l-k)!(2(\Omega-\mathcal{J})-k-l)!(2\mathcal{J}+k+1)!} =$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\frac{1}{(2(\Omega - \mathcal{J}) - l)!(2\mathcal{J} + l + 1)!} \sum_{k=0}^l \binom{2(\Omega - \mathcal{J}) - l}{k} \binom{2\mathcal{J} + l + 1}{l - k} = \frac{1}{(2(\Omega - \mathcal{J}) - l)!(2\mathcal{J} + l + 1)!} \binom{2\Omega + 1}{l}, \quad (\text{E.5})$$

Donde se uso la identidad $\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$.

Del mismo modo, la segunda de las sumas sobre k en (E.4), es:

$$\sum_{k=0}^{2(\Omega - \mathcal{J}) - l} \frac{1}{k!(l-k)!(2(\Omega - \mathcal{J}) - k - l)!(2\mathcal{J} + k + 1)!} = \frac{1}{(2(\Omega - \mathcal{J}) - l)!(2\mathcal{J} + l + 1)!} \binom{2\Omega + 1}{l}. \quad (\text{E.6})$$

Entonces, la ec.(E.4) es simplemente:

$$\sum_{l=0}^{2\Omega - 2\mathcal{J}} e^{2\beta\mu l} \frac{1}{(2(\Omega - \mathcal{J}) - l)!(2\mathcal{J} + l + 1)!} \binom{2\Omega + 1}{l},$$

sustituyendo esta expresión en la ec.(E.3), se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{-\beta\mu 2\Omega} \mathcal{Z}_k &= e^{-\beta\mu 2\Omega} \sum_{2\mathcal{J}=0}^{2\Omega} (2\mathcal{J} + 1) \mathcal{Z}[\mathcal{J}] e^{\beta\mu 2\mathcal{J}} \times \\ &\sum_{l=0}^{2\Omega - 2\mathcal{J}} e^{2\beta\mu l} \frac{(2\Omega)!}{(2(\Omega - \mathcal{J}) - l)!(2\mathcal{J} + l + 1)!} \binom{2\Omega + 1}{l} = \\ &e^{-\beta\mu 2\Omega} \sum_{2\mathcal{J}=0}^{2\Omega} (2\mathcal{J} + 1) \mathcal{Z}[\mathcal{J}] e^{\beta\mu 2\mathcal{J}} \sum_{l=0}^{2\Omega - 2\mathcal{J}} \frac{e^{2\beta\mu l}}{2\mathcal{J} + l + 1} \binom{2\Omega}{2\mathcal{J} + l} \binom{2\Omega + 1}{l}. \end{aligned}$$

Finalmente, en la sumatoria anterior se cambia la suma sobre $2\mathcal{J}$ por una suma sobre $h_1 = l + 2\mathcal{J}$ y se renombra $l \equiv h_2$, el resultado es:

$$\begin{aligned} e^{-\beta\mu 2\Omega} \mathcal{Z}_k &= \sum_{h_1=0}^{2\Omega} \sum_{h_2=0}^{h_1} \binom{2\Omega}{h_1} \binom{2\Omega + 1}{h_2} \frac{h_1 - h_2 + 1}{h_1 + 1} e^{\beta\mu(h_1 + h_2 - 2\Omega)} \mathcal{Z}[\mathcal{J} = h_1 - h_2] = \\ &\sum_{h_1=0}^{2\Omega} \sum_{h_2=0}^{h_1} \dim_{U(2\Omega)}([\tilde{h}]) e^{\beta\mu(h_1 + h_2 - 2\Omega)} \mathcal{Z}[\mathcal{J}], \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

que coincide con la ec.(5.3) del capítulo 5.

Para obtener la ec.(5.6), se parte de la ec.(E.1) multiplicada por el factor $e^{-\beta\mu 2\Omega}$:

$$\begin{aligned} e^{-\beta\mu 2\Omega} \mathcal{Z}_k &= \sum_{2\tau=0}^{2\Omega} \sum_{\nu_1=0}^{2\Omega - 2\tau} \frac{(2\Omega)!}{(2\tau)! \nu_1! (2\Omega - \nu_1 - 2\tau)!} e^{\beta\mu(2\tau + 2\nu_1 - 2\Omega)} \sum_{k=0}^{[\tau]} g_k^\tau \sum_n e^{-\beta E_n^{\tau-k}} \\ &= \sum_{2\tau=0}^{2\Omega} \binom{2\Omega}{2\tau} e^{\beta\mu(2\tau - 2\Omega)} \sum_{k=0}^{[\tau]} g_k^\tau \sum_n e^{-\beta E_n^{\tau-k}} \sum_{\nu_1=0}^{2\Omega - 2\tau} \binom{2\Omega - 2\tau}{\nu_1} e^{2\beta\mu \nu_1} \\ &= \sum_{2\tau=0}^{2\Omega} \binom{2\Omega}{2\tau} e^{\beta\mu(2\tau - 2\Omega)} \sum_{k=0}^{[\tau]} g_k^\tau \sum_n e^{-\beta E_n^{\tau-k}} (1 + e^{2\beta\mu})^{2\Omega - 2\tau} \\ &= (e^{-\beta\mu} + e^{\beta\mu})^{2\Omega} \sum_{2\tau=0}^{2\Omega} \binom{2\Omega}{2\tau} \left(\frac{e^{-\beta\mu}}{1 + e^{-2\beta\mu}} \right)^{2\tau} \sum_{k=0}^{[\tau]} g_k^\tau \sum_k e^{-\beta E_k^{\tau-k}}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Con la sustitución $\mu_B/3 \equiv \mu$, la expresión anterior coincide con la ec.(5.6).

TESS CON
PALA DE ORIGEN

Programas en FORTRAN

En los siguientes apéndices se explica el uso de los programas escritos, los cuales se encuentran en un disco anexo a esta tesis. Los programas se dividen de acuerdo al tipo de acoplamientos cuark-anticuark considerados en el Hamiltoniano. En todos los programas las variables con unidades de energía, están expresadas en GeV.

E.1. Pares cuark-anticuark acoplados a sabor (0,0) y espín 0

En este apéndice se explica el uso de los programas de la versión más sencilla del Hamiltoniano, en la que sólo se consideran pares cuark-anticuark acoplados a sabor (0,0) y espín 0. La primera sección se dedica a la diagonalización numérica (capítulo 2) y la segunda al cálculo de la gran función de partición (capítulo 5). Un diagrama con las subrutinas y archivos de entrada requeridos por los programas, así como los archivos de salida generados por los mismos, es mostrado en la figura E.1.

E.1.1. Diagonalización numérica

Para la diagonalización numérica se escribieron 2 programas *gsh00.f* y *ham00.f*. El primero para el Hamiltoniano con la simetría R [ec.(2.16)] y el segundo para el Hamiltoniano de la ec.(2.15).

Programa *gsh00.f*

- **OBJETIVO:** Diagonalización del Hamiltoniano de la ec.(2.16) en función del eigenvalor r y de la constante de acoplamiento V_1 .
- **SUBROUTINAS UTILIZADAS:** Subrutina de diagonalización de matrices simétricas, *GI-VENS.FOR*.
- **VARIABLES DE ENTRADA:** Las variables se introducen desde el archivo *gsh00.in*.
 - epsilon:** Parámetro ω_f , masa de los cuarks.
 - omegab:** ω_b , masa del glueball 0^{++} .
 - vmin, vmax, vdel:** Rango de la constante de acoplamiento para el que se efectúa la diagonalización, desde **vmin** hasta **vmax** en pasos de **vdel**.
 - omega:** Parámetro Ω . 2Ω es la degeneración de los niveles fermiónicos.
 - nrootx:** Número de eigenvalores solicitados para cada valor de V_1 .
 - npmax:** El programa diagonaliza, para cada valor de V_1 , los subespacios de R con eigenvalor $r = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots, npmax/2$.
- **ARCHIVOS DE SALIDA:**
 - gsh00.out:** En este archivo simplemente se reescriben las variables de entrada.
 - gs00.dat:** Aquí se escriben los resultados de la diagonalización en el siguiente orden:

$$r, e(1), e(2), e(3), V_1$$

donde $e(i)$ son las tres primeras eigenenergías para cada subespacio del operador R con eigenvalor r y V_1 es el valor de la constante de acoplamiento.

gs00p+.dat: Lo mismo que el anterior, pero sólo para r enteras (estados de paridad positiva).

gs00p-.dat: Lo mismo que *gs00.dat*, pero sólo para r semienteras (estados de paridad negativa).

or00p+.dat: Primeros eigenvalores del Hamiltoniano (2.16) para los estados con paridad positiva en función de la constante de acoplamiento. El orden es el siguiente:

$$V_1, E_0, e(1), e(2), \dots$$

con V_1 la constante de acoplamiento, E_0 la energía del estado base y $e(i)$ las eigenenergías medidas respecto a E_0 .

or00p-.dat: Igual que el anterior, pero para estados con paridad negativa

Programa *ham00.f*

- **OBJETIVO:** Diagonalización del Hamiltoniano de la ec.(2.15) y de los modelos bosónicos con la forma de la ec.(3.37), en función de la constante de acoplamiento V_1 .

- **SUBROUTINAS UTILIZADAS:** Subrutina que construye la matriz, *diag00.f*, y subrutina de diagonalización de matrices simétricas, *GIVENS.FOR*.

- **VARIABLES DE ENTRADA:** Las variables de entrada se leen desde el archivo *ham00.in*.

epsilon, omegab, vmin, vmax, vdel, omega: Mismos significados que en el programa anterior *gsh00.f*.

nqmax: Número máximo de cuarks considerados en la construcción de la matriz Hamiltoniana. Si el valor de esta variable excede 2Ω , es puesto automáticamente en 2Ω .

ngmin, ngmax: Cortes en el número de excitaciones bosónicas consideradas en la matriz Hamiltoniana, *ngmin* es el número mínimo de excitaciones y *ngmax* ($\equiv n_{bmax}$) es el número máximo.

nrootx: Número de eigenvalores solicitados para cada valor V_1 .

nmb: Variable que controla el tipo de Hamiltoniano a diagonalizar. Valor 1: mapeo bosónico a primer orden (sustitución $S_+ \rightarrow b_f^+$ y $S_- \rightarrow b_f^-$); valor 2: Hamiltoniano bosónico con la forma de la ec.(3.37); cualquier otro valor: Hamiltoniano fermiónico (2.15).

npb: Variable para decidir si se calcula el espectro de los estados bariónicos (**npb**=1) o no (**npb**≠1).

nev: Variable para decidir si se calculan (**nev**=1) o no (**nev**≠1) los valores de expectación del número de pares cuark-anticuark y del número de bosones en los eigenestados.

vp, vs, vv: Variables para modificar el Hamiltoniano de interacción:

$$H_i = V_1 \left[vp (S_+^2 b + S_-^2 b^\dagger) + 2vs S_+ S_- (b + b^\dagger) + vv (S_+^2 b^\dagger + S_-^2 b) \right]$$

Los valores **vp**=**vs**=**vv**=1, corresponden al Hamiltoniano de la ec.(2.15).

- **ARCHIVOS DE SALIDA:**

ham00.out: En este archivo simplemente se reescriben las variables de entrada.

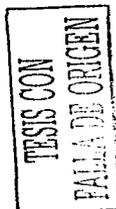
hamp+.dat: Lista de eigenvalores para los estados de paridad positiva (estados con un número par de excitaciones cuark-anticuark), el enlistado tiene el siguiente orden:

$$V_1, E_0, e(1), e(2), e(3), \dots$$

con V_1 la constante de acoplamiento, E_0 la energía del estado base y $e(i)$ las eigenenergías medidas respecto a E_0 .

hamp-.dat: Lo mismo que el anterior, pero para estados de paridad negativa.

hampb+.dat: Lo mismo que *hamp+.dat*, pero para los estados bariónicos con un número par de excitaciones cuark-anticuark.



hambp-.dat: Lo mismo que *hamp+.dat*, pero para los estados bariónicos con un número impar de excitaciones cuark-anticuark.

valep+.dat: Valores de expectación del número de pares fermiónicos y bosones en los eigenestados de energía con paridad positiva. El orden es el siguiente:

$$V_1, n_f(1), \dots, n_f(5), n_g(1), \dots, n_g(5),$$

con V_1 la constante de acoplamiento, $n_f(i)$ los valores de expectación del número de pares fermiónicos y $n_g(i)$ los valores de expectación del número de bosones.

valep-.dat: Igual que el anterior, pero para los estados con paridad negativa.

valebp+.dat: Lo mismo que para *valep+.dat*, pero para estados bariónicos con un número par de excitaciones cuark-anticuark.

valebp-.dat: Lo mismo que para *valep+.dat*, pero para estados bariónicos con un número impar de excitaciones cuark-anticuark.

E.1.2. Cantidades termodinámicas

El cálculo de la gran función de partición y demás cantidades termodinámicas, se realiza en 2 pasos. El primero es realizado con el programa *funpar0.f*, el cual genera una lista (*eva00.dat*) con las eigenenergías para todos los valores del pseudoespín ($\mathcal{J} = 0, 1/2, \dots, \Omega$) y, si así se desea, otra (*vae00.dat*) con los valores de expectación del número de fermiones y de bosones. Estas listas son utilizadas por el programa *funpar1dp.f* para calcular, con la expresión de la ec.(5.6), la gran función de partición y demás cantidades termodinámicas.

Programa *funpar0.f*

- **OBJETIVO:** Diagonalizar el Hamiltoniano para todo valor del pseudoespín $\mathcal{J} = 0, 1/2, 1, \dots, \Omega$.
- **SUBROUTINAS UTILIZADAS:** Subrutina que construye las matrices para toda \mathcal{J} , *diag00.f*, y subrutina de diagonalización de matrices simétricas, *GIVENS.FOR*.
- **VARIABLES DE ENTRADA:** Las variables de entrada se leen desde el archivo *funpar.in*.

epsilon: Parámetro ω_f , masa de los cuarks.

omegab: ω_b , masa del glueball 0^{++} .

v1: Valor de la constante de acoplamiento V_1 .

omega: Parámetro Ω . 2Ω es la degeneración de los niveles fermiónicos.

ngmax: Corte superior al número de excitaciones bosónicas consideradas en la matriz Hamiltoniana, $ngmax \equiv n_{bmax}$.

nfe: Variable para decidir si en el cálculo de la gran función de partición se utilizan todos los eigenvalores generados por la diagonalización ($nfe \neq 1$) o si se utilizan, para cada \mathcal{J} , **nrootx** eigenvalores ($nfe=1$).

nrootx: Número de eigenvalores que son tomados en cuenta, para cada \mathcal{J} , en el cálculo de la gran función de partición. Esta variable es utilizada, si $nfe=1$.

nev: Variable para decidir si se calculan los valores promedios del número de pares fermiónicos y bosones ($nev=1$) o no ($nev \neq 1$).

ned: Variable que controla el tipo de Hamiltoniano a diagonalizar. **ned=1:** mapeo bosónico a primer orden (sustitución $S_+ \rightarrow b_+^\dagger$ y $S_- \rightarrow b_-$); **ned=2:** Hamiltoniano bosónico con la forma de la ec.(3.37); cualquier otro valor: Hamiltoniano fermiónico [ec.(2.15)].

vp,vs,vv: Variables para modificar el Hamiltoniano de interacción:

$$H_i = V_1 \left[vp \left(S_+^2 b + S_-^2 b^\dagger \right) + 2vs S_+ S_- \left(b + b^\dagger \right) + vv \left(S_+^2 b^\dagger + S_-^2 b \right) \right]$$

Los valores $vp=vs=vv=1$, corresponden al Hamiltoniano de la ec.(2.15).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- **ARCHIVOS DE SALIDA:**

eva00.dat: Lista de eigenvalores del Hamiltoniano para todos los valores del pseudoespín.

vae00.dat: Lista de valores de expectación del número de fermiones y de bosones en los eigenestados del Hamiltoniano.

Programa *funpar1dp.f*

- **OBJETIVO:** Calcular la gran función de partición y demás cantidades termodinámicas.
- **SUBROUTINAS UTILIZADAS:** Ninguna.
- **VARIABLES DE ENTRADA:** El programa necesita los archivos *eva00.dat* (eigenvalores del Hamiltoniano) y *vae00.dat* (valores de expectación del número de pares fermiónicos y de bosones) generados por el programa *funpar0.f*. El resto de las variables de entrada se leen desde el mismo archivo que usa *funpar0.f*, es decir, desde *funpar.in*.

epsilon, omegab, v1, omega, ngmax, nte, nrootx, nev, ned, vp, vs, vv: Igual que en *funpar0.f*.

tmin, tmax, tdel: Rango de temperatura en el que se calcula la función de partición, desde *tmin* hasta *tmax* en pasos de *tdel*.

vmin, vmax, vdel: Rango del potencial bariónico dividido por tres ($vmin \equiv \mu_b min/3$) en el que se calcula la función de partición, desde *vmin* hasta *vmax* en pasos de *vdel*.

p: Presión de la bolsa a la $1/4$ ($B^{1/4}$). Esta variable se utiliza para calcular la isóbara crítica, en la que ocurre la transición al plasma de cuarks y gluones.

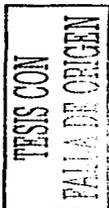
- **ARCHIVOS DE SALIDA:**

funpardp.dat: Lista de variables termodinámicas en el siguiente orden:

$T, \frac{\mu_B}{3}, \langle E \rangle, \text{Calor específico}, \langle n_q - n_{\bar{q}} \rangle, \langle n_q + n_{\bar{q}} \rangle, \langle n_b \rangle, \langle 2\tau \rangle.$

Con T la temperatura, μ_B el potencial químico bariónico, $\langle E \rangle$ la energía interna, n_q el número de cuarks, $n_{\bar{q}}$ el número de anticuarks, n_b el número de bosones y τ la variable de la ec.(5.6).

presiondp.dat: Lista de valores $\frac{\mu_B}{3}$ y T correspondientes a la isóbara de la presión de la bolsa B . Para obtener esta lista, es necesario que los rangos de temperatura y potencial bariónico elegidos contengan los valores de la isóbara crítica. La presión con la que se calculan los puntos de la isóbara, está determinada por el valor *vdel* elegido.



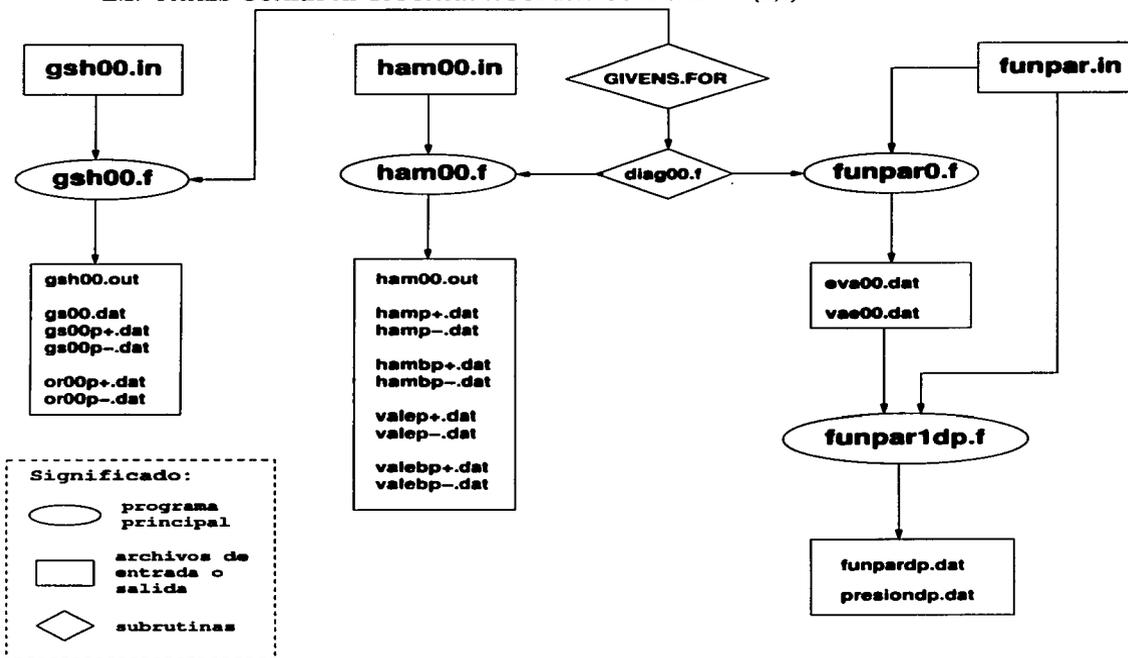


Figura E.1: Dependencias de los programas escritos para los Hamiltonianos con pares cuark-anticuark acoplados a espín y sabor 0. Para detalles ver el texto.

E.2. Pares cuark-anticuark acoplados a sabor (0,0) y espín 0 y 1.

Para esta versión del Hamiltoniano (capítulo 3) se escribió sólo un programa, el cual realiza la diagonalización numérica, tanto del modelo bosónico como del fermiónico, para diferentes valores de las constantes de acoplamiento V_1 y V_2 , con el corte en el número de excitaciones bosónicas n_{bmax} . El diagrama con los archivos de entrada y subrutinas utilizadas por el programa, así como los archivos generados por el mismo, es mostrado en la figura E.2.

E.2.1. Diagonalización numérica

Programa *ham10.f*

- **OBJETIVO:** Diagonalizar el Hamiltoniano de la ec.(3.1) y el modelo bosónico de la ec.(3.37).
- **SUBROUTINAS UTILIZADAS:** Subrutina que calcula los coeficientes de Wigner del grupo $SU(2)$, $SU2PACK.F$ [81] y subrutina de diagonalización de matrices simétricas, $GIVENS.FOR$.
- **VARIABLES DE ENTRADA:** Las variables de entrada se leen desde el archivo *ham10.in*.
 epsilon: Parámetro ω_f , masa de los cuarks.

omegab: ω_b , masa del glueball 0^{++} .

v1min,v1max,v1del: Rango de la constante de acoplamiento V_1 para el que se realiza la diagonalización, desde **v1min** hasta **v1max** en pasos de **v1del**.

v2min,v2max,v2del: Rango de la de la constante de acoplamiento V_2 para el que se realiza la diagonalización, desde **v2min** hasta **v2max** en pasos de **v2del**.

jmin, jmax: Espín de los subespacios a diagonalizar, desde **jmin** hasta **jmax** en saltos de 1. Téngase en cuenta que los eigenvalores del Hamiltoniano se miden respecto al estado base, el cual tiene espín 0. Para espines mayores que 1, debe editarse el programa para darle salida a los resultados.

omega: Parámetro Ω . 2Ω es la degeneración de los niveles fermiónicos.

ngmax: Corte superior al número de excitaciones bosónicas consideradas en la matriz Hamiltoniana, **ngmax** $\equiv n_{bmax}$.

nrootx: Número de eigenvalores que se desean para cada combinación S^P y para cada valor de la constante de acoplamiento.

nmb: Variable que controla el tipo de Hamiltoniano a diagonalizar. **nmb**=1: mapeo bosónico a primer orden (sustitución $B_{00}^{\dagger} \rightarrow b_{00}^{\dagger}$ y $B_{01}^{\dagger} \rightarrow b_{01}$, con B operadores bifermiónicos y b operadores bosónicos); **nmb**=2: Hamiltoniano bosónico con la forma de la ec.(3.37); cualquier otro valor: Hamiltoniano fermiónico [ec.(3.1)]. Para los Hamiltonianos bosónicos se utilizan los cortes al espacio de la ec.(3.38).

nev: Variable para decidir si se calculan (**nev**=1) o no (**nev** \neq 1) los valores de expectación del número de pares fermiónicos y de bosones. El cálculo de los valores de expectación no ha sido implementado para los Hamiltonianos bosónicos.

nee: Esta opción no está implementada, poner el valor en cero.

npc: Con esta variable se controla la posición del término que simula el principio de exclusión de Pauli en el Hamiltoniano bosónico. Para **npc**=1, se utiliza el siguiente Hamiltoniano de interacción:

$$\sum_{S=0}^1 V_{0S} \left[\left(1 - \frac{n_f}{2\Omega}\right) (b_{0S}^{\dagger} \cdot b_{0S}^{\dagger}) + 2 (b_{0S}^{\dagger} \cdot b_{0S}) \left(1 - \frac{n_f}{2\Omega}\right) + (b_{0S} \cdot b_{0S}) \left(1 - \frac{n_f}{2\Omega}\right) \right] (b^{\dagger} + b)$$

Para **npc** \neq 1, se utiliza el Hamiltoniano bosónico de la ec.(3.37). Esta variable es utilizada, siempre y cuando **nmb**=2.

• ARCHIVOS DE SALIDA:

ham10.out : En este archivo simplemente se reescriben las variables de entrada.

0+.dat, 0-.dat, 1+.dat, 1-.dat: Lista de eigenvalores del Hamiltoniano medidos respecto al estado base, para los espines 0 y 1 y paridades positiva y negativa. El orden de los enlistados es el siguiente:

$$V_1, V_2, E_0, e(1), e(2), \dots$$

con V_i las constantes de acoplamiento, E_0 la energía del estado base y $e(i)$ los eigenvalores medidos respecto a E_0 .

ex0+.dat, ex0-.dat, ex1+.dat, ex1-.dat: Lista de valores de expectación del número de fermiones y de bosones en los eigenestados del Hamiltoniano, para espines 0 y 1 y paridades positiva y negativa. El orden de los enlistados es:

$$V_1, V_2, \langle n_f \rangle(1), \dots, \langle n_f \rangle(7), \langle n_b \rangle(1), \dots, \langle n_b \rangle(7).$$

Con $\langle n_f \rangle(i)$ los valores de expectación del número de pares cuark-anticuark y $\langle n_b \rangle(i)$ los valores de expectación del número de bosones. El cálculo de los valores de expectación no ha sido implementado para los Hamiltonianos bosónicos.

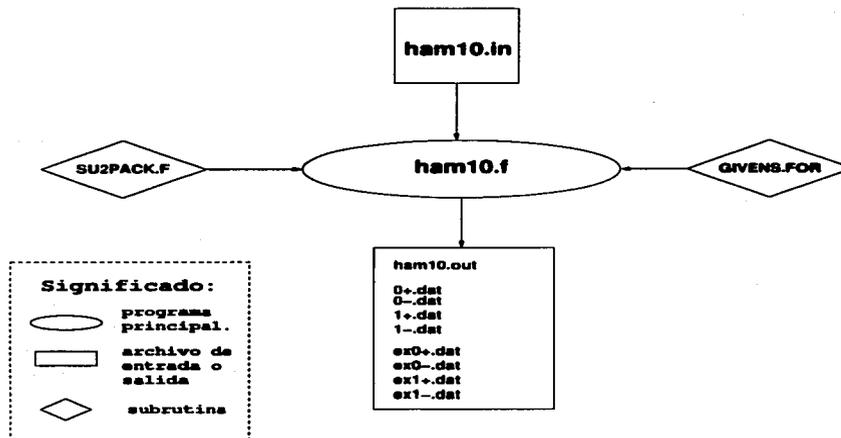


Figura E.2: Dependencias del programa escrito para diagonalizar el Hamiltoniano de la ec.(3.1) y modelos bosónicos [ec.(3.37)] en función de las constantes de acoplamiento. Para detalles ver el texto.

E.3. Modelo bosónico en el caso general

Los programas para la versión general del modelo se dividen en 4 grupos. Los del primero sirven para la clasificación de los estados fermiónicos. Los del segundo grupo sirven para construir el espacio de Hilbert en el modelo bosónico. Los del tercer grupo sirven para diagonalizar el Hamiltoniano del modelo bosónico y ajustar los parámetros del modelo al espectro mesónico. Finalmente, con los del cuarto grupo se estudian las propiedades termodinámicas del modelo general.

E.3.1. Reducciones $U(12) \supset U(4) \otimes U(3)$ y $U(4) \supset SU(2)$

Los siguientes dos programas realizan las reducciones que son útiles para clasificar el espacio fermiónico de la versión más general del modelo.

Programa *u12u4u3.f*

- **OBJETIVO:** Reducir una irrep $[h_1 h_2 \dots h_{12}]$ de $U(12)$ en irreps $[f_1 f_2 f_3] \otimes [g_1 g_2 g_3 g_4]$ del grupo $U(3) \otimes U(4)$.
- **SUBROUTINAS UTILIZADAS:** Ninguna.
- **VARIABLES DE ENTRADA:** Las variables de entrada se introducen desde el *prompt*.

Arreglo $h(12)$: Renglones de la irrep de $U(12)$.

nflag: Con esta variable se elige la estrategia a utilizar en la reducción. **nflag=0:** La reducción se realiza descomponiendo la irrep de $U(12)$ en irreps tot. simétricas. **nflag=1:** La reducción se realiza descomponiendo la irrep de $U(12)$ en irreps tot. antisimétricas. Los detalles del algoritmo se encuentran en la ref.[54]. Si la irrep de $U(12)$ tiene menos renglones que columnas, conviene usar la estrategia **nflag=0**; si menos columnas que renglones, la estrategia **nflag=1**.

- **ARCHIVOS DE SALIDA:**

u12.out : Lista de las irreps de $U(4) \otimes U(3)$ contenidas en la irrep de $U(12)$ con sus multiplicidades.

Programa **u4u2.f**

- **OBJETIVO:** Reducir una irrep $[h_1 h_2 h_3 h_4]$ de $U(4)$ en irreps $[f_1 f_2] \otimes [g_1 g_2]$ del grupo $U_q(2) \otimes U_q(2)$, estas últimas se reducen a su vez en irreps del grupo $SU(2)$ de espín total.

- **SUBROUTINAS UTILIZADAS:** Ninguna.

- **VARIABLES DE ENTRADA:** Las variables de entrada se introduce desde el *prompt*.

Arreglo h(4): Renglones de la irrep de $U(4)$.

- **ARCHIVOS DE SALIDA:**

u4u2.out : Lista de las irreps de $U(2) \otimes U(2)$ contenidas en la irrep de $U(4)$ con sus multiplicidades. Posterior a esto, se enlistan las irreps de $SU(2)$ del espín total contenidas en la irrep de $U(4)$ con sus multiplicidades.

E.3.2. *Antigüedades de las distintas combinaciones* $(\lambda, \mu)S^P$.

Con los siguientes dos programas se encuentran las *antigüedades* para los distintos sectores $(\lambda, \mu)S^P$ de sabor, espín y paridad. Existen dos versiones *nv-space3.f* y *nv-allfla.f*, el primero se limita a obtener las *antigüedades* de los sectores de sabor $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ y $(1, 1)$.

Programas *nv-space3.f* y *nv-allfla.f*

- **OBJETIVO:** Encontrar las *antigüedades* para los distintos sectores de sabor, espín y paridad $(\lambda, \mu)S^P$. El programa *nv-space3.f* se limita a encontrar las *antigüedades* para los sabores $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ y $(1, 1)$.

- **SUBROUTINAS UTILIZADAS:** Ninguna.

- **VARIABLES DE ENTRADA:**

El programa requiere del archivo *u8h1h2h3.dat* en el cual se enlistan las diferentes irreps de hasta 3 renglones que se pueden formar con hasta 12 cajas.

El resto de las variables de entrada se introducen desde el *prompt*:

nmax: El programa encuentra las *antigüedades* cuya suma $(\nu_{00} + \nu_{01} + \nu_{10} + \nu_{11})$ es menor o igual que **nmax**.

ispinmax: El programa encuentra las *antigüedades* para los sectores con espín desde 0 hasta **ispinmax**.

- **ARCHIVOS DE SALIDA:**

nv-space.out y **nv-allfla.out** : Lista detallada de las *antigüedades* para los diferentes sectores $(\lambda, \mu)S^P$. El archivo **nv-space.out** se limita a sabor $(1, 1)$ y $(0, 0)$.

nv-space.dat y **nv-allfla.dat** : Lista de las *antigüedades* para los diferentes sectores $(\lambda, \mu)S^P$. El archivo **nv-space.dat** se limita a sabor $(1, 1)$ y $(0, 0)$ y es utilizado por el programa de diagonalización y ajuste *fit.f*. El archivo **nv-allfla.dat** es utilizado por los programas que calculan las cantidades termodinámicas (*ztotfla.f*).

E.3.3. Diagonalización y ajuste al espectro mesónico

Programa *fit.f*

- **OBJETIVO:** Diagonalizar el Hamiltoniano bosónico de la versión más general del modelo [ec.(4.12)] y ajustar sus parámetros al espectro mesónico experimental. Un diagrama con los archivos de entrada, subrutinas usadas y archivos de salida generados por el programa, es mostrado en la figura E.3.
- **SUBROUTINAS UTILIZADAS:** Subrutinas que construyen la matriz Hamiltoniana, *energy-cut.f* y *energypru.f*, subrutina de diagonalización de matrices simétricas, *GIVENS.FOR*. Adicionalmente, el programa utiliza las subrutinas englobadas bajo el nombre de *minuit*, estas subrutinas son parte de las librerías del CERN [58].
- **VARIABLES DE ENTRADA:** El programa utiliza la lista de *antigüedades* para los diferentes sectores $(\lambda, \mu)S^P$, *nv-space.dat*. Esta lista es generada por el programa *nv-space3.f* y está limitada a las *antigüedades* para las irreps de sabor $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ y $(1, 1)$.

Utiliza, también, el archivo *fitinput.dat*, el cual contiene los valores de las masas mesónicas experimentales y los pesos dados a cada una de éstas. El orden en el que se introducen las variables en este archivo es el siguiente: primero se introduce el número de datos experimentales respecto a los cuales se hará el ajuste; después se introducen los valores experimentales en el orden siguiente:

Paridad (0+-, 1--), sabor (0 = (0, 0), 1 = (1, 1)), espín, Masa, Peso (*p*).

El resto de las variables son introducidas en el archivo *fit.in*.

mqmin, mqmax, mqdel: Las dos primeras establecen el rango de la masa de los cuarks en el que el programa busca el mejor ajuste [**mqmin, mqmax**]. El tercero establece la precisión inicial con la que la rutina *minuit* busca el mejor ajuste (esta precisión es modificada posteriormente por la rutina *minuit*). Si se desea fijar el valor de la masa de los cuarks, se debe hacer **mqdel**=0 y asignar el valor deseado a la variable **mqmin**. Si no se quiere poner límites al rango en el que el programa busca el mejor ajuste, se debe hacer **mqmin**=**mqmax**=0 y **mqdel**≠0.

mg0min, mg0max, mg0del: Lo mismo que las variables anteriores, pero para la masa efectiva de los gluones. La masa del glueball 0^{++} es dos veces la masa efectiva de los gluones.

c1min-c4min, c1max-c4max, c1del-c4del: Lo mismo que las variables anteriores, pero para las constantes de interacción del modelo. **c1**, **c2**, **c3** y **c4** corresponden, respectivamente, a los canales de sabor y espín $(\lambda, \lambda)S = (0, 0)0, (0, 0)1, (1, 1)0$ y $(1, 1)1$.

c5min-c8min, c5max-c8max, c5del-c8del: Estas variables son reminiscencias de viejas versiones del programa, deben fijarse a cero.

omega: Parámetro Ω . 2Ω es la degeneración de los niveles fermiónicos.

ndj: Parámetro $2J = \sum_{i=1}^6 h_i - \sum_{i=7}^{12} h_i$. Este parámetro es utilizado sólo si la variable **ift0**=0 (ver más adelante). El sector mesónico del modelo corresponde a $2J = 2\Omega$. El valor de $2J$ se modifica con la excitación de cuarks y/o anticuarks de valencia, los cuales limitan el número de excitaciones cuark-anticuark permitidas ($n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11} \leq 2J$, donde $n_{\lambda S}$ es el número de pares cuark-anticuark de sabor (λ, λ) y espín S). Este parámetro aparece explícitamente en el término que simula el Principio de exclusión de Pauli en el Hamiltoniano bosónico $(1 - n_j/2J)$ [ver ec.(4.12)].

mquest00, mquest01, mquest10, mquest11, mg0est, etop: Con estas variables se controla el número de excitaciones cuark-anticuark y del glueball 0^{++} consideradas en la construcción de la matriz Hamiltoniana. La configuración $[n_{00}; n_{01}, n_{10}, n_{11}, n_g]$, donde n_g es el número de excitaciones del glueball 0^{++} , es considerada en la construcción de la matriz Hamiltoniana si $n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11} \leq 2J$ y si:

$$\mathbf{mquest00}n_{00} + \mathbf{mquest01}n_{01} + \mathbf{mquest10}n_{10} + \mathbf{mquest11}n_{11} + \mathbf{mg0est}n_g \leq \mathbf{etop}.$$

Esta opción es posible sólo si la variable **npcor**≠0 (ver más adelante).

TESIS CON
PALLA DE ORIGEN

ng0max: Parámetro n_{bmax} . Esta variable fija el número máximo de excitaciones bosónicas consideradas en la construcción de la matriz Hamiltoniana.

nqmax: Número máximo de pares cuark-anticuark considerados en la construcción de la matriz Hamiltoniana. Esta variable es similar a n_{bmax} , pero para las excitaciones cuark-anticuark. Si el valor de esta variable excede 2Ω , el programa la fija automáticamente a 2Ω . Puede fijarse a un valor menor para reducir el tiempo en el que el programa realiza la diagonalización numérica de la matriz Hamiltoniana, sin embargo, deber ser suficientemente grande para obtener convergencia en los resultados de la diagonalización. A diferencia de $2J$ esta variable no aparece en el Hamiltoniano bosónico.

smin, smax: El programa encuentra los eigenestados del Hamiltoniano con espín desde **smin** hasta **smax**. Tómese en cuenta que el estado base tiene espín 0.

neigv: Número de eigenestados del Hamiltoniano que se desean para cada sector de sabor, espín y paridad $(\lambda, \lambda)S^P$.

ne0: Esta variable determina si los eigenvalores se miden respecto al estado base (**ne0**= 1) o no (**ne0**≠ 1). En el caso **ne0**= 1, asignese el valor cero a la variable **smin**.

xc: Con esta variable se determina la aparición (**xc**=1.0) o no (**xc**=0.0) del término que simula el Principio de exclusión de Pauli en el Hamiltoniano, es decir, del término $(1 - n_j/2J)$ que aparece en el Hamiltoniano de la ec.(4.12).

npcor: Con esta variable se determina la manera de cortar el espacio de Hilbert del modelo bosónico. Si **npcor**≠0, el programa utiliza el corte simple $n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11} \leq 2J$. Si **npcor**=0, el programa utiliza los cortes diferenciados de la ec.(4.14).

ift0: Esta variable se utiliza para decidir si el programa realiza el ajuste (**ift0**= 1) o no (**ift0**=0). En este último caso los parámetros que utiliza el programa son: **mqmin**, **mg0min** y **c1min-c4min** para la masa de los cuarks, la masa de los gluones constituyentes y para las constantes de interacción. Otra manera de diagonalizar el Hamiltoniano sin hacer ningún ajuste, es asignando los valores **ift0**=1 y **mqdel**=**mg0del**=**c1del**=...=**c4del**=0. Igual que antes, los parámetros que usa el programa para hacer la diagonalización en este caso, son: **mqmin**, **mg0min** y **c1min-c4min**.

mqstart, mg0start: Estas variables determinan los valores de la masa de los cuarks y de los gluones constituyentes, desde los cuales el programa comienza a buscar el mejor ajuste. Si **mqdel** o **mg0del** son cero, estas variables no son utilizadas.

c1start-c4start: Lo mismo que las variables anteriores, pero para las constantes de interacción.

c5start-c8start: Variables espurias, fijarlas en cero.

iftm: Con esta variable se determina la estrategia que usa el programa para encontrar el mejor ajuste. **iftm**=1: minimización simple; **iftm**=2: búsqueda aleatoria y minimización simple. Para detalles ver la documentación de la subrutina *minuit* [58].

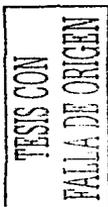
argpmin(1), argpmin(2), numar: La primera variable es el número máximo de llamadas a la función a minimizar (incluso si no se ha alcanzado convergencia); la segunda establece el criterio con el cual el programa determina si se ha alcanzado convergencia en el ajuste (minimización); la tercera le indica al programa cuantas de las 2 variables anteriores son establecidas por el usuario (0, 1 ó 2). Para detalles ver la documentación de la subrutina *minuit* [58].

• ARCHIVOS DE SALIDA:

fit.out : Este es el único archivo de salida, el contenido del archivo varía de acuerdo a la variable de entrada **ift0**. En el caso **ift0**=1 el contenido del archivo es el siguiente:

En la primera parte se reescriben los valores de las variables de entrada. Se escribe el número de renglones de la matriz diagonalizada más grande, el valor y espín máximos usados en el cálculo de las *antigüedades* y los números cuánticos, masas y pesos de los datos experimentales.

En la segunda parte se escriben los mensajes producidos por la subrutina *minuit*, en particular, el valor mínimo encontrado de la función FCN [ec.(4.15)].



En la tercera parte se muestran los resultados del ajuste, iniciando con los mejores valores encontrados para los parámetros del modelo y la energía del estado base (en GeV) correspondiente a esos valores. Le sigue una lista de los estados usados en el ajuste, en la que se compara la energía experimental con la que resulta del modelo; además de las energías, en la mencionada lista se muestran las *antigüedades* ($\nu_{\lambda S}$) de los eigenestados. Posterior a esto se muestran, en orden creciente y en GeV, las listas con el espectro del modelo para los diferentes sectores de sabor, espín y paridad $(\lambda, \lambda)S^P$. El orden de los enlistados es:

*****, energía, degeneración, ν_{00} , ν_{01} , ν_{10} , ν_{11} , $\langle n_{00} \rangle$, $\langle n_{01} \rangle$, $\langle n_{10} \rangle$, $\langle n_{11} \rangle$, $\langle n_f \rangle$, $\langle n_g \rangle$, $\langle n_g \rangle - \langle n_f \rangle$

En donde $\nu_{\lambda S}$ son las *antigüedades* de los estados, $\langle n_{\lambda S} \rangle$ los valores de expectación del número de pares cuark-anticuark acoplados a sabor (λ, λ) y espín S , $\langle n_f \rangle$ es el número total de pares cuark-anticuark y $\langle n_g \rangle$ es el valor de expectación del número de bosones (glueballs 0^{++}).

Para $\text{ifit0}=0$, el contenido del archivo `fit.out` es igual que antes, excepto en que no hay mensajes de la subrutina `minuit` y no se enlistan los valores experimentales.

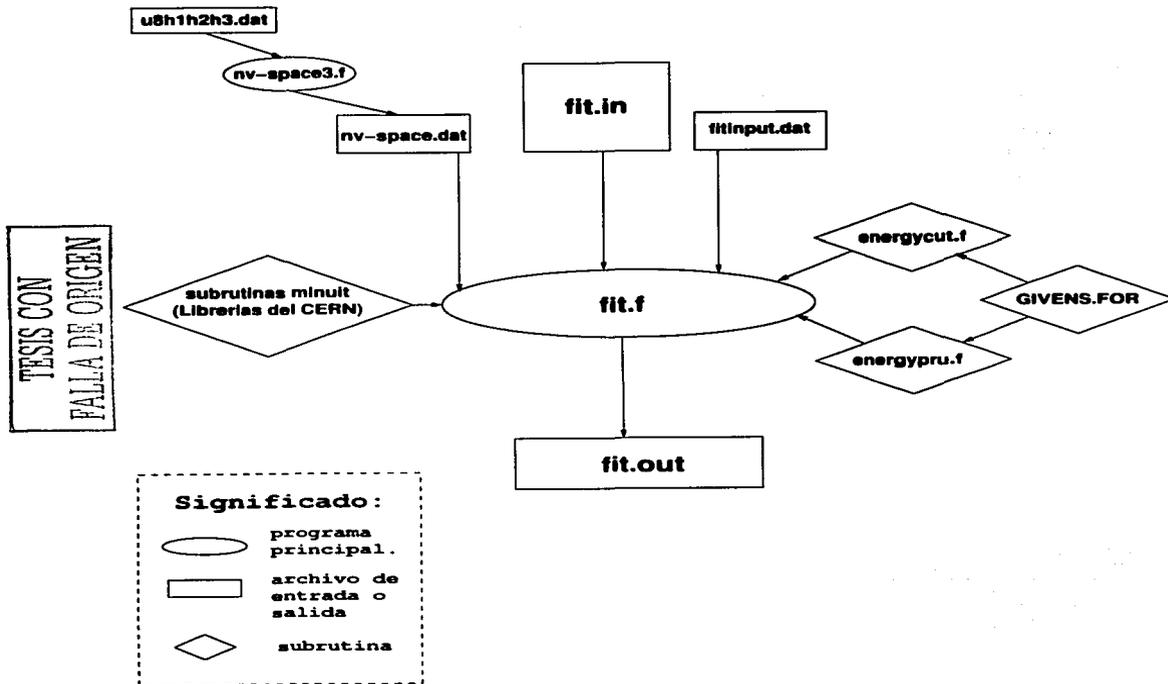


Figura E.3: Dependencias de los programas escritos para diagonalizar y ajustar los parámetros del modelo bosónico general. Para detalles ver el texto.

E.3.4. Cantidades termodinámicas

Al igual que para el caso de sabor y espín 0, el cálculo de las cantidades termodinámicas es realizado en dos pasos. El primero es realizado por el programa *ztot0fla.f*, el cual calcula el espectro del Hamiltoniano bosónico para todos los valores del parámetro $2J$ ($2J = \sum_{i=1}^6 h_i - \sum_{i=7}^{12} h_i$). El programa genera el archivo *eigenfla.out* que contiene la lista de eigenvalores para los diferentes sectores de sabor, espín y paridad. El enlistado anterior es utilizado por los programas *tontsave.f* y *ztotprobfla.f* para calcular la gran función de partición y demás cantidades termodinámicas. El programa *ztotprobfla.f* calcula la línea de transición al plasma de cuarks y gluones; los valores de T , μ_B , μ_s y μ_T correspondientes a esta línea de transición son escritos en el archivo *mutifla.out*. El programa *tontsave.f* calcula las cantidades termodinámicas de dos maneras diferentes (de acuerdo al valor de la variable *ntest*). En una se calculan las variables para valores fijos de los potenciales químicos y en un rango de T establecido por el usuario; en la otra el programa calcula las cantidades termodinámicas para los potenciales químicos y temperaturas sobre la línea de transición al plasma de cuarks y gluones. En este último caso el programa *tontsave.f* utiliza la lista *mutifla.out* mencionada anteriormente. Las dependencias entre los diferentes programas, los archivos de entrada y subrutinas requeridas, así como los archivos de salida generados, son mostradas esquemáticamente en la figura E.4.

Programa *ztot0fla.f*

- **OBJETIVO:** Calcular los eigenvalores del Hamiltoniano bosónico de la ec.(4.12), para todos los valores del parámetro $2J = \sum_{i=1}^6 h_i - \sum_{i=7}^{12} h_i$. El programa utiliza los cortes al espacio bosónico de la ec.(5.11).
- **SUBROUTINAS UTILIZADAS:** Subrutina que construye y diagonaliza la matriz Hamiltoniana para cada valor del parámetro $2J$, *enernewcutfla.f*. Subrutina de diagonalización de matrices simétricas, *GIVENS.FOR*.
- **VARIABLES DE ENTRADA:** El programa utiliza el archivo *nv-allfla.dat* generado por el programa *nv-allfla.f*. Éste contiene la lista de *antigüedades* para los diferentes sectores de sabor, paridad y espín $(\lambda_f, \mu_f)S^P$. A diferencia del archivo *nv-space.dat*, el archivo *nv-allfla.dat* no se limita a los sectores de sabor (0,0) y (1,1).

El resto de las variables de entrada es introducido desde el archivo *ztot.in* (común a todos los programas que calculan las cantidades termodinámicas en la versión más general del Hamiltoniano bosónico).

MQ: Masa de los cuarks, ω_f .

MG0: Masa de los gluones constituyentes, ω_g . La masa del glueball 0^{++} es dos veces la masa **MG0**.

C1 - C8: Constantes de acoplamiento V_i . Las únicas variables relevantes para la presente versión del modelo, son **C1** ($[\lambda, S] = [0,0]$), **C2** ($[0,1]$), **C3** ($[1,0]$) y **C4** ($[1,1]$). Las otras constantes deben ser puestas en cero.

mgest00, mgest01, mgest10, mgest11, mg0est, etop: Estas variables no son utilizadas por la presente versión del programa. Deben ser puestas en cero.

smin, smax: Determinan el rango de los espines que son tomados en cuenta en el cálculo de la gran función de partición.

ng0max: Parámetro n_{bmax} . Número máximo de glueballs 0^{++} que son tomados en cuenta en la construcción de la matriz Hamiltoniana.

nqmax: Número máximo de pares cuark-anticuark que son tomados en cuenta en la construcción de la matriz Hamiltoniana.

ndomega: Parámetro 2Ω . Degeneración de los niveles fermiónicos.

lamax: Determina el sabor máximo que es tomado en cuenta en el cálculo de la gran función de partición: (0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (2,0), ..., (**lamax**, **lamax**).

xc: Esta variable controla la aparición del factor $(1 - \frac{n_f}{2J})$ de la ec.(4.12). Si **xc=1.0**, el término aparece; si **xc=0**, no.

ifft0: Con esta variable se establece si el programa calcula los valores promedios del número de pares fermiónicos y de glueballs (**ifft0**=0) o no (**ifft0**=1).

neigw: Determina el número máximo de estados de cada sector $(\lambda, \mu)S^P$ que son tomados en cuenta en el cálculo de la gran función de partición.

El resto de las variables del archivo *ztot.in* no son utilizadas por el programa *ztot0fla.f* y son explicadas más adelante.

• ARCHIVOS DE SALIDA:

eigenfla.out : En este archivo se enlista el espectro del modelo. En la primera línea del archivo se escribe la energía del vacío. En la siguiente línea se da la siguiente información:

2J, S, λ , μ , P, Número de estados

donde *S* es el espín, (λ, μ) el sabor, *P* la paridad ($P=1=-$, $P=0=+$), y en la última columna se escribe el número de eigenvalores calculados para los números cuánticos anteriores. Este último número es la variable **neigw** o el número de renglones de la matriz diagonalizada correspondiente a los números cuánticos dados. Posterior a la línea anterior, se enlistan los eigenvalores del Hamiltoniano con su degeneración para el sector $2J, (\lambda, \mu)S^P$ correspondiente. Esto se repite hasta agotar las diferentes combinaciones de los números cuánticos $2J, (\lambda, \mu)S^P$.

La lista *eigenfla.out* es utilizada por los programas *tontsave.f* y *ztotprobfla.f* para calcular las cantidades termodinámicas.

Programa *ztotprobfla.f*

- **OBJETIVO:** Calcular la presión del sistema (*P*) y, con la condición de extrañeza $\langle s \rangle = 0$, calcular la isóbara crítica (en el espacio $\mu_B - \mu_s - T$) para la que ocurre la transición al plasma de cuarks y gluones ($P = B$, donde *B* es la presión de la bolsa del modelo del MIT).

- **SUBRUTINAS UTILIZADAS:** Subrutina *u6s.f*, que realiza la reducción de las irreps del grupo $U(6)$ en irreps del grupo $U(3) \otimes U(2)$ de sabor y espín [ver ec.(5.14)].

- **VARIABLES DE ENTRADA:** Utiliza el archivo *eigenfla.out* generado por *ztot0fla.f*, el cual contiene la lista de eigenvalores del Hamiltoniano.

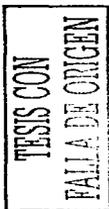
Utiliza (si **mtest**=1) el archivo *gluespek.in*, el cual contiene el espectro de los glueballs, con excepción del 0^{++} , calculado en la referencia [15].

El resto de las variables es introducido desde el archivo *ztot.in*. Las primeras variables del archivo *ztot.in* fueron explicadas en la sección anterior dedicada al programa *ztot0fla.f*, en lo siguiente se explica el resto de las variables, algunas de ellas no son utilizadas por el presente programa, pero sí por el programa *tontsave.f* (explicado más adelante); esto es indicado en las descripciones correspondientes.

tmin, tmax, tdel: Controlan el rango de temperaturas en GeV, para el que se calcula las cantidades termodinámicas. Desde **tmin** hasta **tmax** en pasos de **tdel**. Estas variables siempre son utilizadas por el programa *ztotprobfla.f* y por el programa *tontsave.f* siempre y cuando **nstest**=0.

vbmín, vbmax, vbdel: Estas variables son usadas solamente por el programa *ztotprobfla.f*. Controlan el rango del potencial bariónico μ_B en GeV, en el que se busca, para un valor fijo de la temperatura, la transición al plasma de cuarks y gluones; el parámetro **vbdel** determina la precisión con la que se determina el potencial bariónico. La curva de transición $\mu_B - T$ es calculada por el programa *ztotprobfla.f* utilizando la ec.(5.20). Se debe elegir cuidadosamente el rango de μ_B y el parámetro **vbdel**, para obtener resultados razonables.

muB, muS, muIz: Fija los valores de μ_B, μ_S y μ_{Iz} en GeV, para los que se calculan las cantidades termodinámicas. Estas variables son utilizadas, siempre y cuando **nstest**=0 y son usadas solamente por el programa *tontsave.f*.



- nstest:** Esta variable es usada sólo por el programa *tontsave.f*. Si **nstest**=0, el programa utiliza los potenciales químicos asignados a las variables del punto anterior. Si **nstest**=1, el programa calcula las cantidades termodinámicas sobre la línea de transición al PCG, utilizando la lista *mut1fla.f* generada por el programa *ztotprobfla.f*.
- mtest:** Si **mtest**=1, se incluye el espectro de los glueballs diferentes al 0^{++} en el cálculo de la gran función de partición. Si **mtest**=0 este espectro no se incluye.
- ktest:** Si **ktest**=1, se incluye, en el cálculo de la gran función de partición, el efecto de la mezcla de sabor y la fórmula de Gell-Mann Okubo para los nonetes de menor energía. Si **ktest**=0 estos efectos no son incluidos.
- npart:** Parámetro N_{part} , determina el número de partículas que participan en la formación del PCG [ec.(5.21)]. Este parámetro es utilizado en el cálculo de la producción total de piones y kaones que realiza el programa *tontsave.f*.
- bagp:** Esta variable es utilizada sólo por *ztotprobfla.f*, y sirve para introducir la raíz cuarta de la presión de la bolsa, $B^{\frac{1}{4}}$, en GeV.
- radel:** Esta variable sólo es usada por el programa *ztotprobfla.f*. Se utiliza para introducir el valor del radio (en fm) del volumen elemental V_{el} , el cual es utilizado para determinar la presión del sistema y, con ello, la isóbara crítica de transición al PCG.
- itest:** Si **itest**=0, el volumen del sistema termalizado (V_{tot}) es asumido constante. Si **itest**=1, V_{tot} es calculado usando la ec.(5.21). El volumen V_{tot} sólo es utilizado por el programa *tontsave.f* para calcular las producciones totales de piones y kaones.
- ztest:** Si **ztest**=1, los programas *ztotprobfla.f* y *tontsave.f* calculan las cantidades termodinámicas utilizando la gran función de partición $Z_{a=c}$, que considera configuraciones con color diferente de cero. Si **ztest**=0, los programas utilizan $Z_{a=(0,0)}$, que sólo considera estados con color cero. Si **ztest**=2, los programas calculan, simultáneamente, las cantidades termodinámicas con $Z_{a=c}$ y con $Z_{a=(0,0)}$.

• **ARCHIVOS DE SALIDA:**

mut1fla.out : Lista con los puntos de la isóbara crítica (extrañeza (s) = 0) en el rango [**tmin**, **max**]. El orden del enlistado es:

$T, \mu_B, \mu_s.$

Programa *tontsave.f*

- **OBJETIVO:** Calcular la función de partición y diferentes cantidades termodinámicas en un rango de temperaturas y para valores de μ_B y μ_s establecidos por el usuario, o para los valores T, μ_B y μ_s correspondientes a la línea de transición calculados por el programa *ztotprobfla.f*.
- **SUBROUTINAS UTILIZADAS:** Subrutina *u6s.f*, que realiza la reducción de las irreps del grupo $U(6)$ en irreps del grupo $U(3) \otimes U(2)$ de sabor y espín [ver ec.(5.14)].
- **VARIABLES DE ENTRADA:** Utiliza el archivo *eigenfla.out* generado por *ztot0fla.f*, el cual contiene la lista de eigenvalores del Hamiltoniano.
Utiliza (si **mtest**=1) el archivo *gluespek.in*, el cual contiene el espectro de los glueballs, con excepción del 0^{++} , calculado en la referencia [15].
Utiliza (si **nstest**=1) el archivo *mut1fla.out* generado por el programa *ztotprobfla.f*, el cual contiene la lista de valores T, μ_B y μ_s de la línea de transición al PCG.
El resto de las variables es introducido desde el archivo *zol.in*, éstas ya fueron explicadas en las secciones dedicadas a los programas *ztot0fla.f* y *ztotprobfla.f*.
- **ARCHIVOS DE SALIDA:** El programa genera diferentes archivos de salida dependiendo de los valores dados a las variables de entrada **nstest** y **ztest**.

zolfla.out : Este archivo es generado si **nstest**=0 y si **ztest**=1 ó 2. Lista de variables termodinámicas en el rango de temperaturas y para los potenciales químicos μ_B, μ_s y μ_s establecidos por el usuario. El orden del enlistado es el siguiente:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$T, PV_{el}, \langle E \rangle, C, \langle C_2 \rangle, \Delta C_2$$

donde T es la temperatura, P la presión, V_{el} el volumen elemental, $\langle E \rangle$ la energía interna, C la capacidad calorífica, $\langle C_2 \rangle$ el valor promedio del operador de Casimir del color y ΔC_2 su variación. Estas cantidades corresponden al caso en el que se consideran, en el cálculo de la gran función de partición, estados con color diferentes de cero ($\mathcal{Z}_{a=c}$).

El programa puede ser fácilmente editado, para calcular otras cantidades termodinámicas.

ztotfla00.out: Este archivo es generado si $n_{test}=0$ y si $z_{test}=0$ ó 2. Es similar al archivo anterior, pero para el caso en el que sólo se consideran, en el cálculo de la gran función de partición, estados con color cero ($\mathcal{Z}_{a=0}$). El enlistado producido en este archivo es:

$$T, PV_{el}, \langle E \rangle, \langle B \rangle, S, \langle Q \rangle,$$

donde $\langle B \rangle$ es el valor promedio del número bariónico, S la entropía y $\langle Q \rangle$ el valor promedio de la carga eléctrica. Igual que para *ztotfla.out*, el programa puede ser fácilmente editado para calcular otras cantidades termodinámicas.

prodprobfla.out: Este archivo es generado si $n_{test}=1$ y si $z_{test}=1$ ó 2. En él se enlistan las variables termodinámicas correspondientes a la línea de transición calculada por el programa *ztotprobfla.f*. El orden del enlistado es:

$$T, \langle \pi^+ \rangle, \langle K^+ \rangle, \langle K^- \rangle,$$

donde T es la temperatura y $\langle \pi^+ \rangle$, $\langle K^+ \rangle$ y $\langle K^- \rangle$ son las producciones totales calculadas con la fórmula (5.22), utilizando la gran función de partición que considera configuraciones con color diferente de cero ($\mathcal{Z}_{a=c}$).

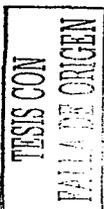
prodprobfla00.out: Este archivo es generado si $n_{test}=1$ y si $z_{test}=0$ ó 2. Es igual que *prodprobfla.out*, pero usando la gran función de partición que considera solamente estados con color cero ($\mathcal{Z}_{a=0}$).

radius.out: Este archivo es generado si $n_{test}=1$ y si $z_{test}=1$ ó 2. En él se enlistan otras variables termodinámicas para la línea de transición calculada por el programa *ztotprobfla.f*.

$$T, r, \langle B \rangle, S/\langle B \rangle, S,$$

donde r es el radio del sistema termalizado calculado con la ec.(5.21). Las variables anteriores corresponden a la gran función de partición $\mathcal{Z}_{a=c}$.

radius00.out: Este archivo es generado si $n_{test}=1$ y si $z_{test}=0$ ó 2. Es igual que *radius.out*, pero para la gran función de partición $\mathcal{Z}_{a=(0,0)}$.



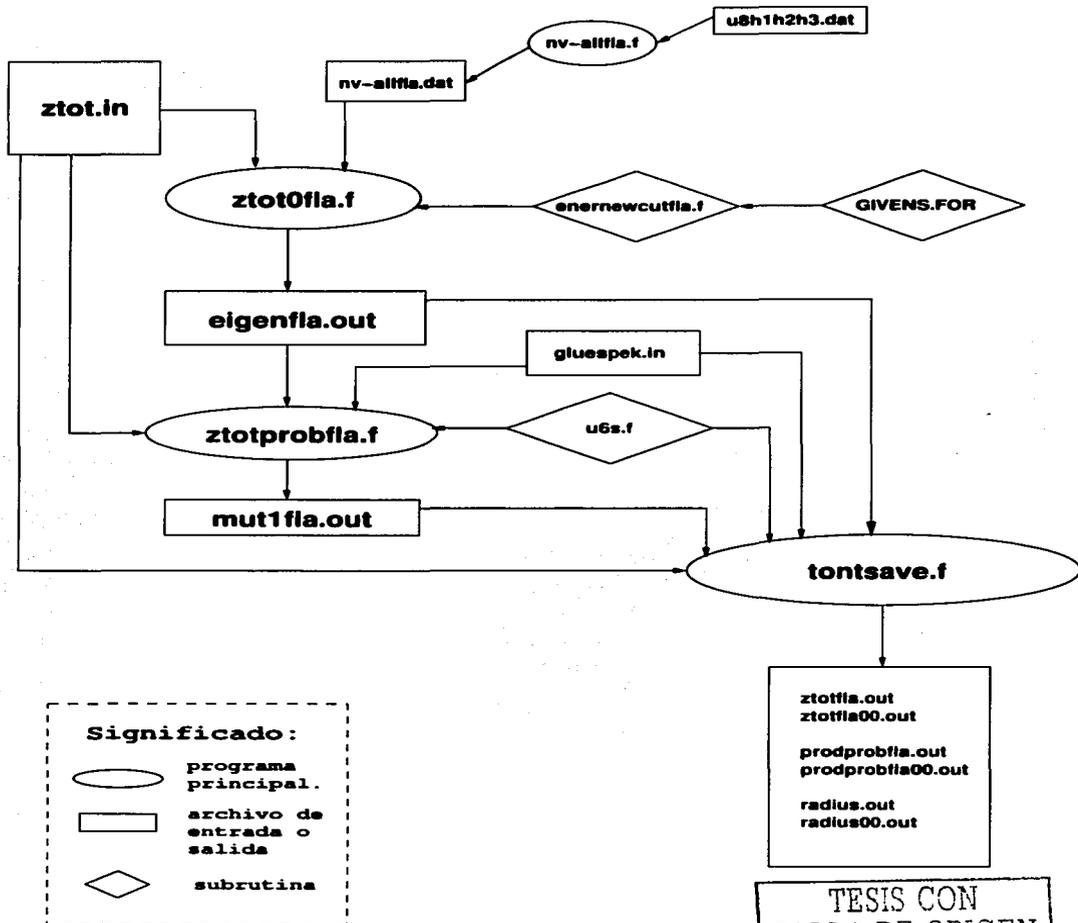


Figura E.4: Dependencias de los programas escritos para calcular la gran función de partición y demás cantidades termodinámicas del modelo bosónico en el caso general. Para detalles ver el texto.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Bibliografía

- [1] A. De Rújula, Howard Georgi y S. L. Glashow, *Phys. Rev. D* **12**, 147 (1975).
- [2] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn y V. F. Weisskopf, *Phys. Rev. D* **9**, 3471 (1974).
- [3] T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc. (London) A*, **260**, 127 (1961); *Nucl. Phys.* **31**, 556 (1962); J. Schechter y H. Weigel, arXiv:hep-ph/9907554 (1999).
- [4] R. P. Feynman *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1415 (1969); J. D. Bjorken y E. A. Paschos, *Phys. Rev.* **185**, 175 (1969).
- [5] Claude Itzykson y Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, Estados Unidos (1980).
- [6] Nambu, Y. y G. Jona-Laisinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961); *Phys. Rev.* **124**, 246 (1961). Revisiones modernas del modelo se encuentran en S.P. Klevansky, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 649 (1992) y en T. Hatsuda y T. Kunihiro, *Phys. Rep.* **247**, 221 (1994).
- [7] S. Weinberg, *Physica A* **96**, 327 (1979); J. Gasser y H. Leutwyler, *Ann. Phys. (N.Y.)* **158**, 142 (1984); *Nucl. Phys. B* **250**, 465, 517, 539 (1985); E. de Radacl, arXiv:hep-ph/9312327 (1994).
- [8] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein y V. I. Zakharov, *Nucl. Phys. B* **147**, 448 (1979); S. Narison, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl)* **54A**, 238 (1997).
- [9] H. Hofestädt, S. Merk y H.R. Petry, *Z.Phys A* **326**, 391 (1987).
- [10] S. Pittel, J. M. Arias, J. Dukelsky y A. Frank, *Phys.Rev. C* **50**, 423 (1994)
- [11] S. Pittel, J. Engel, J. Dukelsky y P. Ring, en *Symmetries in physics*, ed. por A. Frank y K. B. Wolf, *Memorias del simposio internacional en honor de Marcos Moshinsky*, Springer Verlag, Estados Unidos (1992).
- [12] A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène y J.-C. Raynal, *Phys. Rev. D* **29**, 1233 (1984). Pedro J. de A. Bicudo y José E.F. Ribeiro, *Phys. Rev. D* **42**, 1611 (1990).
- [13] D. Schütte, *Phys. Rev. D* **31**, 810 (1985); B. Faber, H. Nguyen-Quang y D. Schütte, *Phys. Rev. D* **34**, 1157 (1986).
- [14] Adam Szczepaniak, Eric S. Swanson, Chuen-Ryong Ji y Stephen R. Cotanch, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2011 (1996).A
- [15] P. O. Hess, S. A. Lerma H., J. C. López V. C. R. Stephens y A. Weber, *Eur. Phys. J. C* **9**, 121 (1999).
- [16] G. S. Bali, K. Schilling, A. Hulsebos, A. C. Irving, C. Michael y P. W. Stephenson, *Phys. Lett. B* **309**, 378 (1993); C. Michael, en *Confinement, Duality, and Nonperturbative Aspects of QCD*, ed. por P. van Baal, NATO ASI Series B 368, Plenum Press, New York (1998); en *Hadron Spectroscopy 1997*, ed. por S.-U. Chung y H. J. Willutzki, AIP Conference Proceedings 432, American Institute of Physics (1998); X.-Q. Luo, Q. Chen, S. Guo, X. Fang y J. Liu, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **53**, 243 (1997).

- [17] R. Aguirre, Phys. Lett. B **559**, 207 (2003); arXiv:nucl-th/0212020 (2002); C. Adami y G. E. Brown, Phys. Rept. **234**, 1 (1993).
- [18] M. Lüscher, Phys. Lett. B **118**, 391 (1982); Nucl. Phys. B **219**, 233 (1983).
- [19] H. J. Lipkin, N. Meschkov y S. Glick, Nucl. Phys. A **62**, 118 (1965).
- [20] L. Ya. Glozman, W. Plessas, K. Varga y R. F. Wagenbrunn, Phys. Rev. D **58**, 094030 (1998); Y. Fujiwara, C. Nakamoto y Y. Suzuki, Phys. Rev. C **54**, 2180 (1996); Nathan Isgur y Gabriel Karl, Phys. Rev. D **18**, 4187 (1978).
- [21] V. I. Belincher, C. Providencia y J. da Providencia, J. Phys. A **30**, 5633 (1997); arXiv:cond-mat/0102073
- [22] J. G. Hirsch, P. O. Hess y O. Civitarese, Phys. Lett. B **390**, 36 (1997); O. Civitarese, P. O. Hess y J. G. Hirsch, Phys. Lett. B **412**, 1 (1997); J. G. Hirsch, P. O. Hess y O. Civitarese, Phys. Rev. C **56**, 199 (1997).
- [23] A. Ballesteros, O. Civitarese, F. J. Herranz y M. Reboiro, Phys. Rev. C **66**, 064317 (2002).
- [24] D. Schütte y J. da Providência, Nucl. Phys. A **282**, 518 (1977).
- [25] G. Chew, Phys. Rev. **95**, 1669 (1954).
- [26] J. L. Armony y D. R. Bes, Phys. Rev. C, **46**, 1781 (1993).
- [27] R. Eder, O. Rogojanu y G. A. Sawatzky, Phys. Rev. B **58**, 7599 (1998); W. Hanke, R. Eder y E. Arrigoni, Physikalische Blätter **54**, 436 (1998).
- [28] N. H. Christ y T. D. Lee, Phys. Rev. D **22**, 939 (1980).
- [29] M. Peardon, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **63**, 22 (1998).
- [30] F. J. Gilman y R. Kauffman, Phys. Rev. D **36**, 2761 (1987); G. 't Hooft, arXiv:hep-th/9903189.
- [31] J. P. Draayer and Y. Akiyama, Jour. Math. Phys. **14**. 1904 (1973).
- [32] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley, Estados Unidos (1993).
- [33] C. Bloch, Nucl. Phys. **6**, 329 (1958).
- [34] Tesis de maestría de Maribel Núñez Valdez, UNAM, México (en preparación).
- [35] J. M. Eisenberg, W. Greiner, *Nuclear Theory: Nuclear Models*, 3a edición, North-Holland, Amsterdam (1987).
- [36] A. Klein y E. R. Marshalek, Rev. Mod. Phys. **63**, 375 (1991).
- [37] W. Greiner y B. Müller, *Quantum Mechanics, Symmetries*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 4a Edition (2001).
- [38] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Dover Publications, New York (1989).
- [39] P. Ring y P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag, Heidelberg (1980).
- [40] M. Moshinsky y Yu. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Harwood Academic Press, Reino Unido (1996).
- [41] K. T. Hecht y A. Adler, Nucl. Phys. A **137**, 129 (1969); A. Arima, M. Harvey y S. Shimizu, Phys. Lett. B **30**, 517 (1969).
- [42] Jorge G. Hirsch, Peter O. Hess y Osvaldo Civitarese, Phys. Rev. C **60**, 064303 (1999).

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

- [43] K. T. Hecht, *The Vector Coherent State Method and its Applications to Physical Problems of Higher Symmetries*, Lecture Notes in Physics 290, Springer-Verlag, Heidelberg (1987).
- [44] S. Lerma, S. Jesgarz, P. O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, *Phys. Rev. C* **66**, 045207 (2002).
- [45] S. L. Sondhi, S. M. Girvin, J. P. Carini y D. Shahar, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 315 (1997).
- [46] R. L. Jaffe y H. J. Lipkin, *Phys. Lett. B* **266**, 458 (1991);
Bo-Qiang Ma, Ivan Schmidt y Jian-Jun Yang, *Eur. Phys. J. A* **1**, 353 (2001);
arXiv:hep-ph/0209115 (2002).
- [47] E. Chacon, M. Moshinsky, R.T. Sharp, *J. Math. Phys.* **17**, (1976);
R. Gaskell, A. Peccia y T. Sharp, *J. Math. Phys.* **19**, 727 (1978).
- [48] A. de Shalit y H. Feshbach, *Theoretical Nuclear Physics, volume 1: Nuclear Structure*, Jhon Wiley & sons, inc., Estados Unidos (1974).
- [49] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, New Jersey (1957).
- [50] J. Escher y J. P. Draayer, *J. Math. Phys.* **39**, 5123 (1998).
- [51] H. B. Geyer, C. A. Engelbrecht y F. J. W. Hahne, *Phys. Rev. C* **33**, 1041 (1986).
- [52] A. Klein y E. R. Marshalek, *Rev. Mod. Phys.* **63**, 375 (1991).
- [53] S. Lerma H., S. Jesgarz, P.O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, *Phys. Rev. C* **67**, 055209 (2003).
- [54] R. López, P.O. Hess, P. Rochford y J.P. Draayer, *J. Phys. A* **23**, L229 (1990).
- [55] R. López y P.O. Hess, programa para la reducción de $U(8)$ a $SU(3)$, UNAM, México (1990).
- [56] F. Halzen y A. D. Martin, *Quarks and Leptons*, John Wiley & Sons, Estados Unidos (1984).
- [57] J. Cseh, *Phys. Lett. B* **281**, 173 (1992); J. Cseh y G. Lévai, *Ann. Phys. (N.Y.)* **230**, 165 (1994).
- [58] Librerías del CERN, rutina Minuit, manual en: wwwinfo.cern.ch/asdoc/minuit/minmain.html
- [59] R. Gupta y K. Maltman, *Int. J. Mod. Phys. A* **16S1B**, 591 (2001);
S. Aoki, *et al.*, Colaboración CP-PACS, *Phys. Rev. D* **67**, 034503 (2003); arXiv:hep-lat/0206009.
- [60] G. 't Hooft, *Phys. Rev. D* **14**, 3432 (1976); arXiv:hep-th/9903189 (1999).
- [61] F. Stancu, *Group Theory in Subnuclear Physics*, Oxford University Press, Oxford (1996).
- [62] Particle Data Group, D.E. Groom *et al.*, *Eur. Phys. J. C* **15**, 1 (2000).
- [63] S. Godfrey y J. Napolitano, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 1411 (1999).
- [64] Tesis doctoral de Samuel Jesgarz, Justus-Liebig-Universität, Giessen (2003).
- [65] S. Jesgarz, S. Lerma H., P.O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, *Phys. Rev. C* **67**, 055210 (2003).
- [66] B. Müller, *The Physics of the Quark-Gluon Plasma*, Lecture Notes in Physics 225, Springer, Heidelberg (1985).
- [67] J. Lettessier and J. Rafelski, *Hadrons and Quark-Gluon Plasma*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [68] A. Kuriyama, J. da Providência, C. Providência, Y. Tsue y M. Yamamura, *Prog. Theor. Phys.* **95**, 339 (1996).
- [69] A. Di Giacomo y G. Paffuti, arXiv:hep-lat/0109021 (2001);
A. Di Giacomo, arXiv:hep-lat/0105009 (2001).
- [70] K. Rajagopal y F. Wilczek, arXiv:hep-ph/0011333 (2000)

- [71] E. Shuryak, arXiv:hep-ph/0110130 (2001); Masayuki Asakawa y Koichi Yazaki, Nucl. Phys. A **504**, 621 (1989).
- [72] P.Senger y H. Ströbele, J.Phys.G **25**, R59 (1999); arXiv:nucl-exp/9810007 (1998).
- [73] J. Rafelski y J. Letessier, arXiv:nucl-th/0209084 (2002).
- [74] C. Adox *et al.*, colaboración PHENIX, Phys. Rev. Lett. **89**, 092302 (2002); J. Castillo *et al.*, colaboración STAR, (no publicado); C. Adox *et al.*, colaboración PHENIX, Phys. Rev. Lett. **88**, 242301 (2002); C. Suij *et al.*, colaboración STAR, Phys. Rev. C **65**, 041901 (2002); C. Adler *et al.*, colaboración STAR, Phys. Rev. C **65**, 041901 (2002).
- [75] S. V. Afanasiev *et al.*, colaboración NA49, Phys. Rev. C **66**, 054902 (2002); arXiv:nucl-ex/0205002 (2002).
- [76] J. Zimanyi, P. Levai y T. S. Biro, Heavy Ion Phys. **17**, 205 (2003); arXiv:hep-ph/0205192
- [77] M. Gell-Mann y Y. Neeman (editores), *The Eightfold Way*, W.A. Benjamin, Inc., New York (1964).
- [78] S. Y. Li, A. Klein y R. M. Dreizer, J. Math. Phys. **11**, 975 (1970).
- [79] T Nakano *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 012002 (2003); V.V. Barmin *et al.*, arXiv:hep-ex/0304040 (2003); Valery Kubarovsky y Stepan Stepanyan, arXiv:hep-ex/0307088 (2003).
- [80] S. Théberge, A.W. Thomas y Gerald A. Miller, Phys. Rev. D **22**, 2838 (1980).
- [81] Jerry P. Draayer, SU2-package, Louisiana State University (1979).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Artículos publicados

- P. O. Hess, S. A. Lerma H., J. C. López V. C. R. Stephens y A. Weber, *Eur. Phys. J. C* **9**, 121 (1999).
- S. Jesgarz, S. Lerma, P.O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, *Rev.Mex.Fís.*, **48 SUPLEMENTO 2**, 41 (2002).
- S. Lerma, S. Jesgarz, P. O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, *Phys. Rev. C* **66**, 045207 (2002).
- S. Lerma H., S. Jesgarz, P.O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, *Phys. Rev. C* **67**, 055209 (2003).
- S. Jesgarz, S. Lerma H., P.O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, *Phys. Rev. C* **67**, 055210 (2003).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN