00324

32

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CLASIFICACION DE MODULOS MEDIANTE EL USO DE LA RETICULA DE CLASES NATURALES SOBRE UN ANILLO R

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

SELENE CAMELIA SANCHEZ FLORES

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS. DR. JOSE RIOS MONTES

2003

A

PAGINACIÓN

DISCONTINUA

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENMA DE
MEXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a Usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Clasificación de módulos mediante el uso de la retícula de clases naturales sobre un anillo R"

realizado por Selene Camelia Sánchez Flores con número de cuenta 096503698

quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. José Ríos Montes	José Ríos M.
Propietario	Dr. Emilio Lluis Riera	
Propietario	Dr. Francisco Federico Raggi Cárdenas	
Suplente	Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía	Hugo A. Rincón M.
Suplente	M. en C. José Cruz García Zagal	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

B

A Pauch

C

Me tienes en tus manos
y me lees lo mismo que un libro.
Sabes lo que yo ignoro
y me dices las cosas que no me digo
Me aprendo en ti más que en mí misma.
Eres como un milagro de todas horas,
como un dolor sin sitio.

Jaime Sabines
Me tienes en tus manos,
Poemas Sueltos (1951-1961)

D

Agradecimientos:

A Ernesto y Estela, los mejores padres del universo, por el gran amor que sienten por mí y por todos los años que han dedicado a enseñarme este juego arriesgado y hermoso de la vida.

A Ivonne por llenar mi vida con su sonrisa y ternura.

A Mary y a Chucho por su cariño.

A mi esposo Paulo, por los maravillosos momentos que pasamos con la luna y el mar, mientras compartiamos sueños.

A Eva, Roberto, Edy y César por su apoyo y cariño.

A mis queridos amigos: Leo, Cheko, Yuri y Lu por compartir ese mundo donde habitan. A Rodri, Vero y Nacho por su amistad.

A todos mis profesores de la facultad de Ciencias por motivarme a descubrir la belleza en las matemáticas, en especial a Ana Meda.

A mi asesor Pepe por compartir sus conocimientos y por dirigir este trabajo.

A mis sinodales: Dr. José Ríos, Dr. Emilio Lluis, Dr. Francisco Raggi, Dr. Hugo Rincón y al M. en C. Cruz García por sus enseñanzas.

A mis queridos colegas: Cruz, Javier y Preisser, por su apoyo y porque disfruto mucho trabajar y platicar con ustedes.

A mis amigos del institt, a Berta, a Pepe Yúdico, a Elhoim, a Paulina, a José, a Abraham, a Daniel L., a Rolando, a Tito y a Daniel P. por motivarme en momentos difíciles.

Por último, quiero a gradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México por ser el lugar en donde he vivido los años más interesantes de mi vida y al Instituto de Matemáticas, mi segundo hogar.

E

He atestiguado el mundo;
he confesado la rareza del mundo.

Jorge Luis Borges
Casi Juicio Final (1925)

Clasificación de módulos mediante el uso de la retícula de clases naturales sobre un anillo R

Selene Camelia Sánchez Flores

Noviembre de 2003

II

Contenido

Introducción **v**

1 Clases Naturales **1**
- 1.1 Definiciones y propiedades 2
- 1.2 R-Nat 9
- 1.3 Descomposiciones en sumas directas 20

2 Tipos de Módulos **25**
- 2.1 Otra forma de construir clases naturales 26
- 2.2 Tipos de Goodearl y Boyle 30
- 2.3 Tipos de Dauns 38

3 Clases Naturales Universales **43**
- 3.1 Cambio de anillo: módulos 43
- 3.2 Cambio de anillo: clases naturales 48
- 3.3 Clases naturales universales 53

4 Ejemplos **67**

A Algunos teoremas **75**
- A.1 Argumento de la proyección 75
- A.2 Teorema de Bumby 76

A.3 Suma fibrada 77

B Radical de Goldie **81**

B.1 Prerradicales 81

B.2 Propiedades del radical de Goldie 82

Introducción

En la teoría de módulos y anillos ha existido el interés de desarrollar una teoría de descomposición de módulos en sumas directas de módulos más manejables, sobre un anillo asociativo con 1. En 1976, Goodearl y Boyle [12] desarrollaron un teoría de tipos para la categoría de módulos inyectivos no singulares sobre un anillo arbitrario; también estudiaron ciertas tipos de módulos: I, II y III. Goodearl y Boyle probaron que todo módulo inyectivo no singular tiene una descomposición en suma directa como sigue: $M = M_I \oplus M_{II} \oplus M_{III}$ donde M_I es de tipo I, M_{II} es de tipo II y M_{III} es de tipo III. Mas tarde, en 1989, John Dauns [7] estudió los módulos inyectivos no singulares de acuerdo a una relación de equivalencia $\sim$, donde $A \sim B$ si y solo si A se sumerje en una cápsula inyectiva de una suma directa de copias de B y viceversa. Demostró que la clase $\Xi(R)$ de todas las clases de equivalencia de módulos no singulares tiene una estructura de retícula completa de Boole y estudió cuatro clases especiales de módulos libres de torsión: discretos, continuos, molecularmente continuos y sin fondo. Dauns mostró que todo módulo inyectivo no singular se descompone como el producto directo: $M = A \oplus B = C \oplus D$ donde A es molecular, B es sin fondo, C continuo y D discreto. En [9], Dauns comenzó el estudio de las clases naturales de módulos inyectivos no singulares.

John Dauns publicó un artículo, en 1997, bajo el título "Module Types" [10], en donde extiende la teoría existente llevandola a una teoría de descomposición en sumas directas de módulos arbitrarios. Para esto, introduce una retícula de clases de módulos, llamada la retícula de clases naturales que, entre otras cosas, se utiliza para la clasificación de módulos. Una clase natural es una clase de módulos cerrada bajo copias isomorfas, submódulos, sumas directas y cápsulas inyectivas. Dauns comienza a estudiar la clase de clases naturales de módulos arbitrarios. Primero, dada una clase arbritaria de módulos Υ, construye la clase natural más pequeña que la contenga, es decir, la clase natural generada por Υ y muestra una descripción completa de ésta. Después, define un orden parcial en las clases naturales, dado por la inclusión de clases. Dada una familia de clases naturales se caracteriza el ínfimo como la intersección y al supremo como la clase natural generada. Un resultado importante que Dauns demuestra es que las clases naturales forman una retícula completa, que se denota como R-Nat. Dada una clase natural Δ, define la clase $c\Delta$, que también es clase natural. Para cualquier módulo M y clase natural Δ, se tiene una descomposición de la cápsula inyectiva como sigue: existen N y K submódulos de EM tales que $EM = K \oplus N$ con $N \in \Delta$ y $K \in c\Delta$. Este resultado, conduce a demostrar que en R-Nat, Δ y $c\Delta$ son complementos y además que R-Nat es una retícula distributiva. Por lo que R-Nat resulta ser una retícula completa de Boole. El resultado de descomposición se extiende para una familia Γ de clases naturales con ciertas características, se prueba que todo módulo M contiene esencialmente una suma directa de submódulos M_γ donde cada M_γ pertence a una clase natural $\gamma \in \Gamma$. Dauns continua su trabajo, estudiando ciertas clases de módulos: primero, extiende las definiciones de módulo tipo I, tipo II, tipo III, moleculares, sin fondo, continuos y discretos para módulos arbitarios. Después, demuestra que estas clases de módulos forman clases naturales, para esto, da otra construcción de clases naturales a partir de una clase arbitaria de módulos. Denota como I, II y III a las clases naturales formadas por los módulos tipo I, II y III respectivamente; también denota como A, B, C y D a las clases naturales formadas por los módulos moleculares, sin fondo, continuos y discretos respectivamente. Aplican los teoremas de descomposición en sumas directas para estas clases naturales en particular. Dauns muestra un funtor contravariante, que denota como Σ, de los anillos asociativos con 1 a las retículas completas de Boole, donde a cada anillo se le asocia la retícula de clases naturales y ciertos morfismos de anillos inducen morfismos de retículas booleanas completas. También introduce el concepto de clase natural univeral. Una clase natural universal es una asignación donde a cada anillos asociativos con 1 se le asocia una clase natural y cumple dos condiciones que se relacionan con el cambio de anillo. Se dan ejemplos de clases naturales universales: I, II, III, A, B, C y D. Defíne $\Delta_{\aleph}(R)$ como los módulos de dimensión local $\aleph$ y prueba que $\Delta_{\aleph}$ es una clase natural universal. También demuestra que para cardinal $\aleph$ existe un anillo R tal que $\Delta_{\aleph}(R)$ es distinto de la clase natural cero. En este trabajo hacemos un desarrollo detallado de los resultados publicado por John Dauns en [10].

Capítulo 1

Clases Naturales

Sea R un anillo asociativo con 1. Una clase natural Δ es una clase de R-módulos izquierdos cerrada bajo copias isomorfas, submódulos, sumas directas y cápsulas inyectivas. En este capítulo, se probarán algunas propiedades importantes de las clases naturales y se darán ejemplos. Dada una clase arbitraria Υ de R-módulos izquierdos, es posible construir la clase natural más pequeña que contenga a Υ, a ésta clase se le llama la clase natural generada por Υ. El orden parcial que se define en las clases naturales es el orden de inclusión de clases. Se caracteriza, además, el ínfimo de una familia arbitraria de clases naturales como la intersección y el supremo de una familia arbitraria como la clase natural generada por los módulos de la familia de clases naturales. Con estas operaciones de ínfimo y supremo se muestra que todas las clases naturales en R-Mod forman una retícula completa, que se denota como R-Nat. Para cada clase natural Δ, se define la clase $c\Delta$, que resulta también clase natural. Se prueba que en la retícula R-Nat, Δ y $c\Delta$ son complementos. Además se demuestra que R-Nat es una retícula distributiva. Esto nos conduce a que R-Nat es una retícula completa de Boole. Para esto, se demuestra que para todo R-módulo izquierdo M y para toda clase natural Δ, existen submódulos de N y K de M tales que $N \oplus K \subseteq_e M$ con $K \in \Delta$ y $L \in c\Delta$. Finalmente se muestra que para una familia Γ de clases naturales tal que $\alpha \wedge \beta = 0$ para toda α, $\beta \in \Gamma$ y

$\bigvee \Gamma = 1$, se tiene que todo $M \in R$-Mod contine esencialemente una suma directa de submódulos como sigue: $\oplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma \subseteq_e M$, donde $M_\gamma \in \gamma$ y $\gamma \in \Gamma$.

1.1 Definiciones y propiedades

Definición 1.1.1. Una clase no vacía de R-módulos izquierdos se llama *clase natural* si es cerrada bajo:

(a) submódulos,

(b) copias isomorfas,

(c) sumas directas y

(d) cápsulas inyectivas.

Observemos que si Δ es una clase no vacía de R-módulos izquierdos, cerrada bajo submódulos y copias isomorfas, entonces son equivalentes:

(d) Δ es cerrada bajo cápsulas inyectivas y

(d') Δ es cerrada bajo extensiones esenciales.

Ahora bien, es claro que las clases $\{0\}$ y R-Mod son clases naturales. En los siguientes ejemplos, vamos a utilizar algunos propiedades de los prerradicales y algunos resultados importantes de teorías de torsión como: la biyección entre los radicales exactos izquierdos y las teorías de torsión hereditarias. Las definiciones y propiedades básicas de los prrerradicales se pueden encontrar en [14] y los resultados de las teorías de torsión que aquí usaremos se encuentran en [4]. Algunos resultados de esta sección se pueden encontrar en [2].

Ejemplo 1.1.2. Sea r un prerradical exacto izquierdo, se define Δ_r como: $\Delta_r = \{M \in R\text{-Mod} \mid r(M) \subseteq_e M\}$. A continuación se prueba que Δ_r es cerrada bajo submódulos, copias isomorfas, sumas directas y extensiones esenciales. Por lo que Δ_r

es una clase natural. (a) Sea $M \in \Delta$ y N un submódulo de M. Como $r(M) \subseteq_e M$ entonces $r(M) \cap N \subseteq_e N$. Además $r(N) = r(M) \cap N$ pues r es exacto izquierdo. Por lo que $r(N) \subseteq_e N$ y por lo tanto $N \in \Delta$. (b) Sea $M \in \Delta$ y $\varphi : M \to M'$ un isomorfismo. Como $\varphi(r(M)) \cong r(M')$ y $\varphi(r(M)) \subseteq_e M'$, pues $r(M) \subseteq_e M$, entonces $r(M') \subseteq_e M'$. Por lo tanto $M' \in \Delta$. (c) Sea $\{M_\alpha\}$ una subfamilia de Δ. Como r es un prerradical entonces $r(\oplus M_\alpha) = \oplus r(M_\alpha) \subseteq_e \oplus M_\alpha$. Por lo tanto $\oplus M_\alpha \in \Delta$. (d) Sea $M \in \Delta$ y M' una extensión esencial de M. Como $r(M) \subseteq_e M$ y $M \subseteq_e M'$ entonces $r(M) \subseteq_e M'$. Ésto implica que $r(M) \subseteq_e r(M') \subseteq_e M'$. Por lo que $M' \in \Delta$.

Ejemplo 1.1.3. Sea $t_\tau = (\tau, \mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ una teoría de torsión hereditaria y estable. Como t_τ es una teoría de torsión entonces: $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo sumas directas y $\mathbb{F}_\tau$ es cerrada bajo submódulos y sumas directas. Ahora bien, como t_τ es hereditaria entonces: $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo submódulos y además $\mathbb{F}_\tau$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Además, como t_τ es estable entonces: $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Finalmente, ambas son cerradas bajo copias isomorfas. Por lo tanto $\mathbb{T}_\tau$ y $\mathbb{F}_\tau$ son clases naturales.

Para el siguiente ejemplo se utilizan varias propiedades del radical de Goldie, Z_2, que se pueden consultar en el apéndice.

Ejemplo 1.1.4. Sea Z el prerradical singular. Se sabe que Z es un prerradical exacto izquierdo y que Z_2 es el radical exacto izquierdo asociado a Z. Al radical exacto izquierdo Z_2 se le llama el radical de Goldie. Ahora bien, consideremos las siguientes clases:

(i) $\mathbb{F}_{Z_2} = \mathbb{F}_Z = \{M \in R\text{-Mod} \mid Z(M) = 0\}$

(ii) $\mathbb{T}_{Z_2} = \{M \in R\text{-Mod} \mid Z_2(M) = M\}$

Por la biyección entre radicales exactos izquierdos y teorías de torsión hereditarias se tiene que $\tau_{Z_2} = (Z_2, \mathbb{T}_{Z_2}, \mathbb{F}_{Z_2})$ es una teoría de torsión hereditaria. A continuación veremos que $\mathbb{T}_{Z_2}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Primero recordemos que para todo $M \in R$-Mod se tiene que $Z_2(EM) = E(Z_2M)$ (ver apéndice). Ahora bien, sean $M \in \mathbb{T}_{Z_2}$ y $E(M)$ una cápsula inyectiva de M. Como $Z_2(EM) = E(Z_2M) = EM$ entonces $EM \in \mathbb{T}_{Z_2}$. Así que τ_{Z_2} es estable y por lo tanto $\mathbb{T}_{Z_2}$ y $\mathbb{F}_{Z_2}$ son clases naturales.

A cada clase de R-módulos izquierdos le podemos asociar una clase de R-módulos izquierdos, que llamaremos clase complementaria:

Definición 1.1.5. Sea Δ una clase no vacía de R-módulos izquierdos, la *clase complementaria* de Δ se define como:

$$c\Delta = \{M \in R\text{-Mod} \mid \text{para todo submódulo } 0 \neq N \subseteq M,\ N \notin \Delta\}$$

Los módulos que pertenecen a $c\Delta$ se llaman Δ-libres. Ahora bien, la clase complementaria de $c\Delta$ es:

$$cc\Delta = \{M \in R\text{-Mod} \mid \text{para todo } 0 \neq N \text{ submódulo de } M,$$

$$\text{existe } 0 \neq H \text{ submódulo de } N \text{ tal que } H \in \Delta\}$$

Los módulos que pertenecen a $cc\Delta$ se llaman Δ-densos.

Observemos que $c\Delta$ y por lo tanto $cc\Delta$ son clases cerradas bajo submódulos.

Proposición 1.1.6. *Si Δ una clase natural entonces $c\Delta$ es una clase natural.*

Prueba. (a) Es claro que $c\Delta$ es cerrada bajo submódulos. (b) Sean $M \in c\Delta$, $\varphi : M \to M'$ un isomorfismo y $0 \neq N'$ un submódulo de M'. Supongamos que $N' \in \Delta$, si se define $N = \varphi(N') \subseteq M$. entonces $N \in \Delta$ pues $N \cong N' \in \Delta$, lo cual contradice que $M \in c\Delta$. Así que $N \notin \Delta$ y por lo tanto $M' \in c\Delta$. (c) Sean $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una subfamilia de $c\Delta$ y $0 \neq N$ un submódulo de $\oplus M_\alpha$. Supongamos que $N \in \Delta$ y sea $0 \neq x \in N$. Por el argumento de la proyección, existe $r \in R$ y $m \in M_\alpha$ para alguna $\alpha \in A$ tal que $Rrx \cong Rm \subseteq M_\alpha$. Como $N \in \Delta$ entonces $Rm \in \Delta$. Lo que contradice que $M_\alpha \in c\Delta$. Así que $N \notin \Delta$ y por lo que $\oplus M_\alpha \in c\Delta$. (*d*) Sea $M \in c\Delta$, $M \subseteq_e E(M)$ su cápsula inyectiva y $0 \neq K$ un submódulo de $E(M)$. Supongamos $K \in \Delta$. Como $0 \neq K \cap M \subseteq K$ entonces $K \cap M \in \Delta$. Lo cual contradice que $M \in c\Delta$.. Por lo que $K \notin \Delta$ y $E(M) \in c\Delta$. Por lo tanto $c\Delta$ es una clase natural. $\square$

La siguiente proposición muestra que toda clase natural es cerrada bajo extensiones.

Proposición 1.1.7. *Sea Δ es una clase natural. Consideremos la siguiente sucesión exacta:*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/M' \longrightarrow 0$$

con M' y M/M' en Δ. Entonces $M \in \Delta$.

Prueba. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & M/M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E(M') \arrow[r, "j"] & P \arrow[r, "p"] & M/M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde P es la suma fibrada del primer cuadro. Observemos que el diagrama es conmutativo y que la última sucesión es exacta [ver Apéndice]. Ahora bien, tenemos que $P = E(M') \oplus M/M'$ pues $E(M')$ es inyectivo. Como $E(M')$ y M/M' pertenecen a Δ entonces $P \in \Delta$. Por otro lado, sea $x \in P$ tal que $h(x) = 0$. Como $0 = ph(x) = g(x)$ entonces $x = f(y)$ para alguna $y \in M'$. Así que $0 = hf(y) = ji(y)$ y por lo tanto $y = 0$. Esto implica que $x = 0$. Por lo que h es monomorfismo. y entonces M es una copia isomorfa de un submódulo de P. Como $P \in \Delta$ entonces $M \in \Delta$. $\square$

Clase natural generada por una clase de módulos

Observación 1.1.8. Sea $\{\Delta_i\}$ una familia no vacía de clases naturales. Entonces se cumple que: (1) La clase $\cap\Delta_i$ es disntinta del vacío pues $\{0\}$ pertenece a Δ_i para toda i y (2) la clase $\cap\Delta_i$ es natural.

Como consecuencia tenemos la siguiente definición:

Definición 1.1.9. Sea Υ una familia de R-módulos izquierdos, la clase

$$\langle \Upsilon \rangle = \cap\{\Delta \in R\text{-Nat} \mid \Upsilon \subseteq \Delta\}$$

es la menor clase natural que contiene a Υ y es llamada la clase natural generada por Υ.

A continuación se dará una caracterización de las clases naturales generadas por una familia de R-módulos izquierdos.

Teorema 1.1.10. *Sea Υ una familia de R-módulos izquierdos y $\langle \Upsilon \rangle$ la única clase natural generada por Υ. Sea $\overline{\Upsilon}$ la clase de todos los módulos isomorfos a un submódulo de un elemento de Υ. Entonces se cumple lo siguiente:*

(i) $\langle \Upsilon \rangle = \{M \in R\text{-}Mod \mid$ *existe* $\{N_j\}_{j\in J} \subseteq \Upsilon$, *y existe* $M \hookrightarrow E(\oplus_{j\in J} N_j)\}$

(ii) $\langle \Upsilon \rangle = \{M \in R\text{-}Mod \mid$ *existe* $\{P_j \hookrightarrow N_j\}_{j\in J}$, $N_j \in \Upsilon$, $\oplus_{j\in J} P_j \subseteq_e M\}$

(iii) $\langle \Upsilon \rangle = \langle \overline{\Upsilon} \rangle = cc\overline{\Upsilon} = \{M \in R\text{-}Mod \mid$ *para todo submódulo* $0 \neq N$ *de* M, *existe* $0 \neq H$ *submódulo de* N, $H \in \overline{\Upsilon}\}$

Prueba. Para (i) y (ii), se denotará como Y al lado derecho de la ecuación.
(i) $(\subseteq)$ Primero observemos que Y es una clase natural: (a) y (b) Es claro que Y es cerrada bajo submódulos y copias isomorfas. (c) Sea $\{M_\alpha\}$ una subfamilia de Y. La siguiente familia de monomorfismos: $M_\alpha \hookrightarrow E(\oplus_{J_\alpha} N_{j_\alpha}) \hookrightarrow E(\oplus_\alpha \oplus_{J_\alpha} N_{j_\alpha})$, induce un único monomorfismo: $\oplus_\alpha M_\alpha \hookrightarrow E(\oplus_\alpha \oplus_{J_\alpha} N_{j_\alpha})$. Por lo tanto $\oplus_\alpha M_\alpha \in Y$, así que Y es cerrada bajo sumas directas. (d) Sean $M \in Y$ y $\{N_j\}$ una familia de submódulos de M tal que $M \hookrightarrow E(\oplus_J N_j)$. Si M' es una extensión esencial de M entonces tenemos que $M' \hookrightarrow E(\oplus_J N_j)$. Por lo tanto $M' \in Y$. Así que Y es cerrada bajo extensiones esenciales. Por lo tanto Y es una clase natural. Además como $\Upsilon \subseteq Y$ entonces $\langle \Upsilon \rangle \subseteq Y$. $(\supseteq)$ Ahora bien, notemos que si $M \in Y$ entonces M es

una copia isomorfa de un submódulo de la cápsula inyectiva de una suma directa de elementos de Υ. Por lo tanto $M \in \langle \Upsilon \rangle$ y $Y \subseteq \langle \Upsilon \rangle$.

(ii) ($\subseteq$) Primero obsservemos que Y es una clase natural. (a) Sean $M \in Y$ y N un submódulo de M. Consideremos la siguiente familia: $\mathcal{F} = \{\{H_i\} \mid H_i$ es un submódulo de N y $H_i \hookrightarrow N_j \in \Upsilon$ para alguna j y $\Sigma H_i = \oplus H_i\}$. Existe $\{P_j\}$ una familia de submódulos de M tal que para toda j, $P_j \hookrightarrow N_j$ con $N_j \in \Upsilon$ y $\oplus_J P_j \subseteq_e M$. Supongamos que $N \neq 0$ y sea $0 \neq x \in N$. Por el argumento de la proyección, existe $r \in R$, $j \in J$ y $p \in P_j$ tal que $Rrx \cong Rp \subseteq P_j \hookrightarrow N_j$. Como $N_j \in \Upsilon$ entonces $\{Rrx\} \in \mathcal{F}$. Es decir la familia $\mathcal{F}$ no es vacía. Además $\mathcal{F}$ cumple las hipótesis del Lema del Zorn. Sea $\{H_i\}$ un máximo de $\mathcal{F}$. Observemos que $\oplus H_i \subseteq_e M$. Para eso, supongamos que $0 \neq K$ es un submódulo de N tal que $\oplus H_i \cap K = 0$. Supongamos que $0 \neq k \in K$ entonces, por el argumento de la proyección, existe $s \in R$, P_j y $q \in P_j$ tal que $Rsk \cong Rq \subseteq P_j$. Si $K' = Rsk$ entonces $K' \hookrightarrow P_j \hookrightarrow N_j \in \Upsilon$ y $\oplus H_i \cap K' = 0$. Así que $\{H_i\} \subsetneq \{\{H_i\} \cup K'\} \in \mathcal{F}$. Esto contradice que $\{H_i\}$ sea un máximo de $\mathcal{F}$. Así que $K = 0$, y entonces $\oplus H_i \subseteq_e N$. Por lo tanto $N \in Y$ y Y es cerrada bajo submódulos. (b) Es claro que Y es cerrada bajo copias isomorfas. (c) Ahora verificamos que Y es cerrada bajo sumas directas. Sea $\{M_\alpha\}$ una subfamilia de Y. Para cada α existe una familia de submódulos $\{P_{\alpha_j}\}$ tal que $\oplus_{\alpha_j} P_{\alpha_j} \subseteq_e M_\alpha$. Así, tenemos que $\oplus_\alpha \oplus_{\alpha_j} P_{\alpha_j} \subseteq_e \oplus_\alpha M_\alpha$. Por lo tanto, $\oplus_\alpha M_\alpha \in Y$. (d) Es claro que Y es cerrada bajo extensiones esenciales. Por lo tanto Y es una clase natural. Además $\Upsilon \subseteq Y$, por lo que $\langle \Upsilon \rangle \subseteq Y$. ($\supseteq$) Ahora bien, notemos que si $M \in Y$ entonces es una extensión esencial de una suma directa de copias isomorfas de submódulos, que son elementos de Υ. Por lo tanto $Y \subseteq \langle \Upsilon \rangle$.

(iii) ($\subseteq$) Primero observemos que $\Upsilon \subseteq \overline{\Upsilon} \subseteq \langle \Upsilon \rangle$, por lo que $\langle \Upsilon \rangle = \langle \overline{\Upsilon} \rangle$. Ahora veamos que $cc\overline{\Upsilon}$ es una clase natural. (a) y (b) Es claro que $cc\overline{\Upsilon}$ es cerrada bajo submódulo y copias isomorfas. (c) Sean $\{M_\alpha\}$ una subfamilia de $cc\overline{\Upsilon}$ y $0 \neq N$ un submódulo de $\oplus_\alpha M_\alpha$. Supongamos que $0 \neq x \in N$ entonces, por el argumento de la proyección, existe $0 \neq r \in R$ y $y \in M_\alpha$ para alguna α tal que $Rrx \cong Ry \subseteq M_\alpha$.

Como $M_\alpha \in \overline{\Upsilon}$ entonces existe H submódulo de Ry tal que $H \in \overline{\Upsilon}$. Por lo que $Rrx \in \overline{\Upsilon}$ y por lo tanto $N \in cc\overline{\Upsilon}$. Así que $\oplus_\alpha M_\alpha \in cc\overline{\Upsilon}$. (d) Sea $M \in cc\overline{\Upsilon}$, $M \subseteq_e M'$ y $0 \neq N \subseteq M'$. Observemos que $0 \neq N \cap M \subseteq M$ y además $N \cap M \in cc\overline{\Upsilon}$. Es decir, existe $H \in N \cap M$ tal que $H \in \overline{\Upsilon}$. $0 \neq H \subseteq M'$ entonces $M' \in cc\overline{\Upsilon}$. Además $\overline{\Upsilon} \subseteq cc\overline{\Upsilon}$, por lo tanto $\langle\overline{\Upsilon}\rangle \subseteq cc\overline{\Upsilon}$.
($\supseteq$) Sea $M \in cc\overline{\Upsilon}$. Consideremos la siguiente familia: $\mathcal{F} = \{\{H_i\} \subseteq \overline{\Upsilon}$ tal que $H_i \subseteq M$ para toda i y $\Sigma H_i = \oplus H_i\}$. Como $M \in cc\overline{\Upsilon}$ existe $H \in \overline{\Upsilon}$ tal que $0 \neq H \subseteq M$, así que $\mathcal{F}$ no es vacía. Además $\mathcal{F}$ cumple las hipótesis del Lema del Zorn. Sea $\{H_i\}$ un máximo de $\mathcal{F}$. Observemos que $\oplus H_i \subseteq_e M$. Para eso, supongamos que $0 \neq K$ es un submódulo de M tal que $\oplus H_i \cap K = 0$. Como $K \in cc\overline{\Upsilon}$ entonces existe $0 \neq H$ submódulo de K tal que $H \in \overline{\Upsilon}$ y $\oplus H_i \cap H = 0$. Por lo tanto $\{H_i\} \subsetneq \{\{H_i\} \cup H\} \in \mathcal{F}$. Esto contradice que $\{H_i\}$ sea un máximo de $\mathcal{F}$. Así que $K = 0$, y entonces $\oplus H_i \subseteq_e M$. Por lo que $M \subseteq_e E(M) = E(\oplus H_i)$. Como $E(\oplus H_i) \in \langle\overline{\Upsilon}\rangle$ entonces $M \in \langle\overline{\Upsilon}\rangle$. Por lo tanto $cc\overline{\Upsilon} \subseteq \langle\overline{\Upsilon}\rangle$. □

Corolario 1.1.11. Sea $M \in R$-Mod y $\langle M\rangle$ la clase natural generada por M. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen:

(iv) $\langle M\rangle = \{N \mid$ para todo submódulo $0 \neq L \subseteq N$, existe $0 \neq H \subseteq L$ tal que $H \cong P \subseteq M$para algún submódulo P de $M\}$

(v) $\langle M\rangle = \{N \mid$ existe una familia $\{P_j\}_{j\in J}$ tal que $P_j \subseteq N$, $P_j \hookrightarrow M$ y $\sum_J P_j = \oplus_J P_j \subseteq_e N\}$

Corolario 1.1.12. Sean Δ y Δ' dos clases naturales tales que $\Delta \cap \Delta' = 0$. Entonces $\langle\Delta \cup \Delta'\rangle = \{M \in R$-Mod $\mid$ existen M_1 y M_2 submódulos de M tales que $M_1 \in \Delta$, $M_2 \in \Delta'$ y $M_1 \oplus M_2 \subseteq_e M\}$.

Prueba. ($\subseteq$) Sea $M \in \langle\Delta \cup \Delta'\rangle$. Entonces por el inciso (*ii*) del teorema anterior se tiene que: existen $P_j \hookrightarrow N_j$, $N_j \in \Delta \cup \Delta'$ tal que $\oplus P_j \subseteq_e M$. Sean $M_1 = \oplus\{P_j \mid P_j \hookrightarrow N_j \in \Delta\}$ y $M_2 = \oplus\{P_j \mid P_j \hookrightarrow N_j \in \Delta'\}$. Por hipótesis $M_1 \cap M_2 = 0$. Así que $M_1 \oplus M_2 \subseteq_e M$ con $M_1 \in \Delta$ y $M_2 \in \Delta'$. ($\supseteq$) Sean M_1, M_2 y $M \in R$-Mod tal que $M_1 \in \Delta$ y $M_2 \in \Delta'$ y $M_1 \oplus M_2 \subseteq_e M$. Como $M_1 \oplus M_2 \in \langle \Delta \cup \Delta' \rangle$ entonces $M \in \langle \Delta \cup \Delta' \rangle$. □

1.2 R-Nat

Se denotará como R-Nat a la clase de todas las clases naturales definidas en la categoría de R-Mod. En esta sección se probará que R-Nat es un conjunto. Además se demostrará que R-Nat es una retícula completa de Boole.

Definición 1.2.1. Sean Δ_1 y $\Delta_2 \in R$-Nat, se define un orden parcial en R-Nat como sigue:

$$\Delta_1 \leq \Delta_2 \Leftrightarrow \Delta_1 \subseteq \Delta_2$$

R-Nat tiene a $\{0\}$ como elemento menor y a R-Mod como elemento mayor. Se denotaran como las clases naturales 0 y 1 respectivamente. Sea I un conjunto y $\{\Delta_i \mid i \in I\} \subseteq R$-Nat. Se tiene entonces que las operaciones de ínfimo y supremo están definidas en R-Nat y se caracterizan como sigue:

(i) $\bigwedge\{\Delta_i \mid i \in I\} = \cap\{\Delta_i \mid i \in I\} \in R$-Nat

(ii) $\bigvee\{\Delta_i \mid i \in I\} = \langle\{\Delta_i \mid i \in I\}\rangle \in R$-Nat

Proposición 1.2.2. *Sea $\{N_i\}$ un subfamilia de R-Mod. Entonces:* $\langle \oplus N_i \rangle = \bigvee \langle N_i \rangle$.

Prueba. $(\leq)$ Para toda i se tiene que: $N_i \in \bigvee\langle N_i \rangle$. Entonces $\oplus N_i \in \bigvee\langle N_i\rangle$. Por lo que $\langle \oplus N_1 \rangle \leq \bigvee\langle N_1 \rangle$. $(\geq)$ Para toda i se tiene que: $\langle N_i \rangle \leq \langle \oplus N_i \rangle$. Entonces $\bigvee\langle N_i\rangle \leq \langle \oplus N_i \rangle$. □

R-Nat es una retícula completa

Para demostrar que R-Nat es una retícula completa basta ver que es un conjunto. Primero, hagamos la siguiente observación:

Observación 1.2.3. Sea $X \subseteq \{E(R/L) \mid L \subseteq R$ es un ideal izquierdo$\}$ un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de cápsulas inyectivas de módulos cíclicos. Observemos que para todo $0 \neq M \in R$-Mod, existe un subconjunto $T \subseteq M$ tal que $\{E(Rx) \mid x \in T\} \subseteq X$ es un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de cápsulas inyectivas de los submódulos cíclicos de M.

Lema 1.2.4. *Sean $M \in R$-Mod y $M_* = \oplus\{E(Rx) \mid x \in T\}$ donde $T \subseteq M$ es el subconjunto que se describió en la observación anterior. Entonces se tiene que: $\langle M\rangle = \langle M_*\rangle$.*

Prueba. ($\leq$) Por el lema de Zorn, existe $\{Rx_i\}$ una familia independiente máxima de submodulos cíclicos, entonces $\oplus_I Rx_i \subseteq_e M$. Para cada cíclico tenemos que: $Rx_i \subseteq E(Rx_i) \cong E(Rx) \subseteq \oplus\{E(Rx) \mid x \in T\} = M_*$. Esta familia induce el siguiente monorfismo: $\oplus_I Rx_i \hookrightarrow M_*^{(I)} \subseteq E(M_*^{(I)})$. Así que $M \subseteq E(M_*^{(I)}) \in \langle M_*\rangle$. Entonces $M \in \langle M_*\rangle$ y por lo tanto $\langle M\rangle \leq \langle M_*\rangle$. ($\geq$) Para cada $x \in T$ tenemos el siguiente monomorfismo: $Rx \hookrightarrow M$. Entonces, $M_* = \oplus\{Rx \mid x \in T\} \hookrightarrow M^{(T)} \subseteq E(M^{(T)})$. Por lo tanto $M_* \in \langle M\rangle$. Así que $\langle M_*\rangle \leq \langle M\rangle$. □

Lema 1.2.5. *Sea X como en la observación 1.2.3. Se definen las siguientes funciones:*

$g : R$-Mod $\to \mathcal{P}(X)$ dada por

$$g(M) = \{E(Rx) \mid 0 \neq x \in M,\ E(Rx) \in X\}$$

y $f : R$-Nat $\to \mathcal{P}(X)$ dada por

$$f(\Delta) = \{E(Rx) \mid E(Rx) \in \Delta \cap X\}$$

Sean $M_1,\ M_2 \in R$-Mod y $\Delta_1,\ \Delta_2 \in R$-Nat. Entonces

(i) $\langle M_1\rangle = \langle M_2\rangle \Leftrightarrow g(M_1) = g(M_2)$

(ii) La función f es inyectiva.

(iii) $| R\text{-}Nat | \leq | \mathcal{P}(X) | \leq 2^{|\mathcal{P}(R)|}$

(iv) Para toda $\Delta \in R\text{-}Nat$, $\Delta = \langle \oplus \{Rx \mid E(Rx) \in f(\Delta)\} \rangle$

Prueba. (i) Recordemos que $T \subseteq M$ es el subconjunto descrito en la observación 1.2.3. $(\Rightarrow)$ Por hipótesis, $\langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle$. Por el lema anterior, $\langle M_{1*} \rangle = \langle M_{2*} \rangle$. Sea $E(Rx) \in g(M_1)$, entonces $E(Rx) \in \langle M_{1*} \rangle$. Por lo que $E(Rx) \in \langle M_{2*} \rangle = \langle M_2 \rangle$. Por (iii) del teorema 1.1.10, existe P, submódulo ciclíco de M_{2*}, tal que $Rx \cong P$. Como $E(Rx) \cong E(P) \in g(M_2)$ entonces se tiene que $E(Rx) \in g(M_2)$. Así que $g(M_1) \subseteq g(M2)$. Analogamente $g(M_2) \subseteq g(M1)$. Así que $g(M_1) = g(M_2)$. $(\Leftarrow)$ Como $g(M_1) = g(M_2)$ entonces $M_{1*} \cong M_{2*}$. Por lo tanto $\langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle$.
(ii) Primero observemos que para todo $\Delta \in R$-Nat y $M \in \Delta$ se tiene que $g(M) \subseteq f(\Delta)$. Ahora bien, supongamos que $f(\Delta_1) = f(\Delta_2)$. Sea $M \in \Delta_1$, por la observación anterior, $g(M) \subseteq f(\Delta_1) = f(\Delta_2)$, así que para todo $E(Rx) \in g(M)$, $E(Rx) \in \Delta_2$ lo que implica que $M_* \in \Delta_2$ y por lo tanto $M \in \langle M \rangle = \langle M_* \rangle \leq \Delta_2$. Así que $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$. Analogamente $\Delta_2 \leq \Delta_1$ y por lo tanto $\Delta_1 = \Delta_2$. Por lo que f es inyectiva.
(iii) Por el inciso anterior, $|R\text{-Nat}| \leq | \mathcal{P}(X)|$. Ahora bien, observemos que cada elemento de X esta determinado por al menos un ideal izquierdo, L. Como $|X| \leq |\mathcal{P}(R)|$ entonces $|\mathcal{P}(X)| \leq | \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{R})) | = 2^{|\mathcal{P}(\mathrm{R})|}$.
(iv) Observemos que para toda $E(Rx) \in f(\Delta)$, $Rx \in \Delta$, por lo que la suma directa, $\oplus\{Rx \mid E(Rx) \in f(\Delta)\} \in \Delta$. Así que $\langle \oplus\{Rx \mid E(Rx) \in f(\Delta)\} \rangle \subseteq \Delta$. Ahora bien para la otra contención, sea $M \in \Delta$, para cada $x \in T$ se tiene que $Rx \subseteq_e E(Rx)$. Así que $\oplus\{Rx \mid x \in T\} \subseteq_e \oplus\{E(Rx) \mid x \in T\} = M_*$. Así que tenemos lo siguiente: $M \in \langle M \rangle = \langle M_* \rangle = \langle \oplus\{Rx \mid x \in T\} \rangle \subseteq \langle \oplus\{Rx \mid E(Rx) \in f(\Delta)\} \rangle$. Por lo tanto $\Delta \subseteq \langle \oplus\{Rx \mid E(Rx) \in f(\Delta)\} \rangle$. Así que $\langle \oplus\{Rx \mid E(Rx) \in f(\Delta)\} \rangle$. □

Ejemplo 1.2.6. El siguiente ejemplo muestra que f no es suprayectiva. Consideremos a $\mathbb{Z}$-Mod, la categoría de los grupos abelianos. Sean $n \in N$ con $n > 1$ y A el conjunto de todos los primos que aparecen en la descomposición en primos de n. Ahora bien consideremos el siguiente subconjunto de X: $X' = \{E(\mathbb{Z}_n) = \oplus\{\mathbb{Z}_{p^\infty} \mid p \in A\}\} \subseteq X$. Sea $\Delta \in R$-Nat tal que $E(\mathbb{Z}_n) \in \Delta$. Para toda $p \in A$, $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_n$, además $E(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_{p^\infty} \in \Delta$ y por lo tanto $\mathbb{Z}_{p^\infty} \in f(\Delta)$ pero $\mathbb{Z}_{p^\infty} \notin X'$. Es decir $f(\Delta) \neq X'$. Por lo que f no es suprayectiva.

Como consecuecia del lema anterior y de las observaciones previas se tiene que R-Nat es una retícula completa.

R-Nat tiene complementos

Lema 1.2.7. *Sea $\Delta \in R$-Nat. Entonces se cumplen:*

(i) $cc\Delta = \Delta$

(ii) $\Delta \cap c\Delta = 0$

(iii) *Se $N \in \Delta$ y $K \in c\Delta$ entonces $N \cap K = 0$*

Prueba. Recordemos que si $\Delta \in R$-Nat entonces $c\Delta \in R$-Nat. (i) Por el inciso (iii) de 1.1.10, se tiene que $\Delta = \langle\Delta\rangle = \langle\overline{\Delta}\rangle = cc\overline{\Delta} = cc\Delta$. (ii) Observemos que para $0 \neq M \in R$-Mod se tiene que si $M \in c\Delta$ entonces $M \notin \Delta$. Así que $\Delta \cap c\Delta = 0$. (iii) Como $N \cap K \subseteq N \in \Delta$ y $N \cap K \subseteq K \in c\Delta$, entonces $N \cap K \in \Delta \cap c\Delta$. Por el inciso anterior $N \cap K = 0$. □

Lema 1.2.8. *Sea $\Delta \in R$-Nat y $\mathcal{C} \subseteq \Delta$ una cadena ascendente de módulos. Entonces $\bigcup \mathcal{C} \in \Delta$.*

Prueba. Supongamos que $\Delta \neq 0$ y que $0 \neq M = \bigcup \mathcal{C}$. Sea $0 \neq N \subseteq M$. Entonces existe $M_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $0 \neq N \cap M_\alpha$. Como $M_\alpha \in \Delta$ entonces $N \cap M_\alpha \in \Delta$. Por lo que $M \in cc\Delta$. Así que $M \in \Delta$. □

Lema 1.2.9. *Sea $\Delta \in R$-Nat y $M \in R$-Mod. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) Existe N, submódulo de M, máximo con la propiedad de que $N \in \Delta$.

(ii) Sea N un submódulo de M, máximo con la propiedad de que $N \in \Delta$. Entonces para todo submódulo H de M tal que $N \cap H = 0$, se tiene que $H \in c\Delta$.

(iii) Existen N y K, submódulos de M, pseudocomplementos uno del otro tales que $N \oplus K \subseteq_e$ y $N \in \Delta$, $K \in c\Delta$.

(iv) Además K es máximo con la propiedad de que $K \in c\Delta$.

(v) Para los submódulos del inciso anterior, $E(M) = E(N) \oplus E(K)$ con $E(N) \in \Delta$ y $E(K) \in c\Delta$.

Prueba. (*i*) Sea $\mathcal{F} = \{N \subseteq M \mid N \in \Delta\}$. Por el lema anterior, $\mathcal{F}$ cumple las hipótesis del Lema del Zorn. Así que existen submódulos de M, máximos con la propiedad de pertenecer a Δ.

(*ii*) Sea $N \subseteq M$ tal que es máximo con la propiedad de que $N \in \Delta$. Sea $H \subseteq M$ tal que $N \cap H = 0$. Veamos que $H \in c\Delta$. Para eso, sea $0 \neq T$ submódulo de H. Supongamos que $T \in \Delta$, entonces $N \oplus T \in \Delta$. Como N es máximo con la propiedad de $N \in \Delta$,entonces $N = N \oplus T$, lo cual impica que $T = 0$. Esto contradice lo anterior. Así que $T \notin \Delta$ y por lo tanto $H \in c\Delta$.

(*iii*) Sea N submódulo de M, máximo con la propiedad de que $N \in \Delta$ y K submódulo de M, un pseudocomplemento de N. Por el inciso anterior, $K \in c\Delta$. Ahora bien, se demostrará que N es un pseudocomplemento de K en M. Sea N' un pseudocomplemento de K en M tal que $N \subseteq N'$. Vamos a demostrar que $N' \in \Delta$. Sea H' submódulo de N' tal que $H' \cap N = 0$. Primero observemos que $H' \in c\Delta$ y entonces $H' \oplus K \in c\Delta$. Así que $N \cap (H' \oplus K) = 0$. Como K es pseudocomplemento y $K \subseteq H' \oplus K$, entonces tenemos dos casos $K = H' \oplus K$ o $M = H' \oplus K$. Supongamos $M = H' \oplus K$, entonces $M \in c\Delta$ y $N = 0$. Como $K \subseteq_e M$ entonces $H' = 0$. Ahora bien, si $K = H' \oplus K$ entonces $H' = 0$. Así que $N \subseteq_e N'$ y por lo tanto $N' \in \Delta$. Como N es máximo tal que $N \in \Delta$ entonces $N = N'$. Así que N y K son pseudocomplementos uno del otro.

(*iv*) Supongamos que K es un submódulo de Y y que $T \in c\Delta$. Como $T \cap N = 0$,

por el inciso (iii) del lema 1.2.7, entonces $K = T$ pues K es un pseudocomplemento de N.
(v) Sean N, $K \subseteq M$ como el inciso anterior. Como $N \oplus K \subseteq_e M$ entonces $E(M) = E(N \oplus K) = E(N) \oplus E(K)$. Además $N \in \Delta$ y $K \in c\Delta$ implican que $E(N) \in \Delta$ y $E(K) \in c\Delta$. □

De aquí en adelante, denotaremos como $M_{(\Delta)} \subseteq M$, a los submódulos de M, máximos con la propiedad de que $M_{(\Delta)} \in \Delta$.

Proposición 1.2.10. *Sean $M \in R$-Mod y $M_{(\Delta)} \subseteq M$ un submódulo máximo con la propiedad de $M_{(\Delta)} \in \Delta$. Entonces $[M/M_{(\Delta)}]_{(\Delta)} = 0$*

Prueba. Como $(M/_{M_{(\Delta)}})_{(\Delta)} \subseteq M/_{M_{(\Delta)}}$, existe L tal que $M_{(\Delta)} \subseteq L \subseteq M$ y $L/_{M_{(\Delta)}} = (M/_{M_{(\Delta)}})_{(\Delta)} \in \Delta$. Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M_{(\Delta)} \longrightarrow L \longrightarrow L/_{M_{(\Delta)}} \longrightarrow 0$$

Como $M_{(\Delta)} \in \Delta$ y $L/_{M_{(\Delta)}} \in \Delta$ entonces, por la proposición 1.1.7, $L \in \Delta$ y por lo tanto $M_{(\Delta)} = L$. Así que $L/M_{(\Delta)} = 0$. Por lo tanto se tiene que $(M/_{M_{(\Delta)}})_{(\Delta)} = 0$. □

Los submódulos $M_{(\Delta)}$ y $M_{(c\Delta)}$ no son únicos por lo tanto si M tiene una descomposición, $M_{(\Delta)} \oplus M_{(c\Delta)} \subseteq_e M$ entonces no es única. A continuación se demostrará que existe tal descomposición y que es única salvo superspectividad.

Definición 1.2.11. Sean A y B dos submódulos de M, se dice que estan en *superspectividad* si para cualquier submódulo $D \subseteq M$ se tiene que $M = A \oplus D \Leftrightarrow M = B \oplus D$. Ahora bien, una descomposición de M dada por $M = A_1 \oplus A_2$ se dice que es *única* salvo *superspectividad* si para cualquier otra descomposición, $M = B_1 \oplus B_2$, A_i y B_i estan en superspectividad para $i = 1, 2$

Teorema 1.2.12. *Sea $\Delta \in R$-Nat y $M \in R$-Mod, supongamos que $N_1 \oplus K_1 \subseteq_e M$ y $N_2 \oplus K_2 \subseteq_e M$ con N_1, $N_2 \in \Delta$ y K_1, $K_2 \in c\Delta$. Entonces:*

(i) $E(N_i) \subseteq E(M)$ *y* $E(K_i) \subseteq E(M)$ *son submódulos de* $E(M)$ *máximos con la propiedad de que* $E(N_i) \in \Delta$ *y* $E(K_i) \in c\Delta$.

(ii) $E(N_1) \oplus E(K_2) = E(M) = E(N_2) \oplus E(K_1)$

(iii) $E(N_1) \cong E(N_2)$ *y* $E(K_1) \cong E(K_2)$

(iv) *Existen* $H_1 \subseteq_e N_1$, $H_2 \subseteq_e N_2$ *y* $f : H_1 \to H_2$ *un isomorfismo.*

(v) *Para todo* $M \in R$*-Mod, la descomposición* $E(M) = E(M_{(\Delta)}) \oplus E(M_{(c\Delta)})$ *es única salvo superspectividad.*

Prueba. (*i*) Supongamos que $N_1 \oplus K_1 = M = N_2 \oplus K_2$ y N_i, K_i son inyectivos para $i = 1, 2$. Primero, observemos que $N_i \in \Delta$ y además es máximo con esta propiedad. Supongamos que $N_i \subseteq L \subseteq M$, con $L \in \Delta$. Observemos que $L \cap K_i = 0$ por el lema 1.2.7 (iii). Como $M = N_i \oplus K_i$, entonces N_i es máximo con la propiedad de que $N_i \cap K_i = 0$. Así que $L = N_i$ ó $L = M$. Por lo tanto N_i es un submódulo de M, máximo con la propiedad de $N_i \in \Delta$. Por el mismo argumento $K_i \in c\Delta$ y es máximo con esta propiedad.
(*ii*) Ahora bien, por el lema 1.2.7 (iii), $N_1 \cap K_2 = 0$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$0 \longrightarrow N_1 \oplus K_2 \longrightarrow M \longrightarrow M/_{N_1 \oplus K_2} \longrightarrow 0$$

Sea $H = M/_{N_1 \oplus K_2}$. Como $N_1 \oplus K_2$ es inyectivo entonces $M = N_1 \oplus K_2 \oplus H$. Como $N_1 \cap H = 0$ entonces $H \in c\Delta$ por el lema 1.2.9 (i). Por otro lado, $K_2 \cap H = 0$ entonces por el mismo argumento $H \in cc\Delta$. Por 1.2.9 (ii), $H \in \Delta \cap c\Delta$ y por lo tanto $H = 0$. Es decir, $M = N_1 \oplus K_2$. De la misma forma $M = N_2 \oplus K_1$.
(*iii*) Como $E(N_1) \oplus E(K_2) = E(M) = E(N_2) \oplus E(K_1)$ entonces si $\xi \in N_1$, existen $\nu \in N_2$ y $\eta \in K_1$ únicos tal que $\xi = \nu + \eta$. Se define el siguiente morfismo: $f : N_1 \to N_2$ como $f(\xi) = f(\nu + \eta) = \nu$. Esta bien definida pues la descomposición de ξ es única. Ahora bien, sea $\xi \in Nuc(f)$, por lo que $\nu = 0$. Como $\xi = \eta$ entonces $\xi \in N_1 \cap K_1$ y por lo tanto $\xi = 0$. Así que f es un monomorfismo, es decir, existe

$N_2' \subseteq N_2$ tal que $N_1 \cong N_2' \subseteq N_2$. Analogamente, $N_2 \cong N_1' \subseteq N_1$. Por el teorema de Bumby, $N_1 \cong N_2$.
(*iv*) Sea $\varphi : E(N_1) \to E(N_2)$ un isomorfismo. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \varphi^{-1}(N_2) & \xrightarrow{i} & E(N_1) \\ & & \varphi| \downarrow & & \varphi \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N_2 & \xrightarrow{j} & E(N_2) \end{array}$$

Como $N_2 \subseteq_e E(N_2)$ entonces $\varphi^{-1}(N_2) \subseteq_e E(N_1)$. Sea $H_1 = N_1 \cap \varphi^{-1}(N_2)$. Observemos que $0 \neq H_1 \subseteq_e E(N_1)$ y además $0 \neq H_1 \subseteq_e N_1$. Ahora bien, sea $H_2 = \varphi(H_1)$. Es claro que $H_1 \cong H_2$. Veamos que $H_2 \subseteq_e N_2$. Sea $0 \neq L \subseteq N_2$. Así que $0 \neq L' = \varphi^{-1}(L) \subseteq \varphi^{-1}(N_2)$ Ahora bien $0 \neq L' \cap N_1$, y además $0 \neq L' \cap H_1$. Si $0 \neq x \in L'$ entonces $0 \neq \varphi(x) \in L \cap H_2$. Por lo tanto $H_2 \subseteq_e N_2$.
(*v*) Considerese dos descomposiciones de $E(M)$: $E(N_1) \oplus E(K_1) = M = E(N_2) \oplus E(K_2)$ con $E(N_i) \in \Delta$ y $E(K_i) \in c\Delta$. Por el inciso (*i*) y todo submódulo $C_1 \subseteq M$ $E(M) = E(N_1) \oplus E(C_1)$ si y solo si $E(N_2) \oplus E(C_1)$. Por lo que $E(N_1)$ y $E(N_2)$ estan esn superspectividad. □

Corolario 1.2.13. Sea $\Delta \in R$-Nat. Entonces la clase natural $c\Delta \in R$-Nat es única con respecto a las siguientes propiedades:

(i) $\Delta \wedge c\Delta = 0$

(ii) $\Delta \vee c\Delta = R$-Mod

Prueba. (*i*) Por 1.2.7 tenemos que $\Delta \wedge c\Delta = \Delta \cap c\Delta = (0)$.
(*ii*) Recordemos que $\Delta \vee c\Delta = \langle\{\Delta, c\Delta\}\rangle \subseteq R$-Mod. Para la otra contención, sea $M \in R$-Mod. Por 1.2.9 existen $M_{(\Delta)} \in \Delta \subseteq \Delta \vee c\Delta$ y $M_{(c\Delta)} \in c\Delta \subseteq \Delta \vee c\Delta$ tal que $M_{(\Delta)} \oplus M_{(c\Delta)} \subseteq_e M$. Como $M_{(\Delta)} \oplus M_{(c\Delta)} \in \Delta \vee c\Delta$ entonces $M \in \Delta \vee c\Delta$. Por lo tanto $\Delta \vee c\Delta = R$-Mod. Ahora bien para mostrar la unicidad, sea $\Upsilon \in \Delta$ tal que: $\Upsilon \wedge \Delta = 0$ y $\Upsilon \vee \Delta = R$-Mod. Primero, observemos que $\Upsilon \subseteq c\Delta$. Sea $M \in \Upsilon$

y $0 \neq N \subseteq M$. Como $N \in \Upsilon$ entonces $N \notin \Delta$ y por lo tanto $M \in c\Delta$. Para la otra contención, supongamos que $M \in c\Delta$. Como $M \in R$-Mod$= \Upsilon \vee \Delta = \langle \Upsilon \cup \Delta \rangle$ entonces por el corolario 1.1.12 existen $M_1 \in \Upsilon$ y $M_2 \in \Delta$, tales que $M_1 \oplus M_2 \subseteq_e M$. Como $M \in c\Delta$ entonces $M_2 \in c\Delta$. Así que $M_2 = 0$ y por lo tanto $M_1 \subseteq_e M$. Es decir, $M \in \Upsilon$. Por lo tanto $\Upsilon = c\Delta$. □

Así que para cada $\Delta \in R$-Nat existe su complemneto, $c\Delta$.

Corolario 1.2.14. Sea $t_\tau = (\tau, \mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ una teoría de torsión hereditaria y estable. Entonces $\mathbb{T}_\tau = c(\mathbb{F}_\tau)$

Prueba. (i) Es claro que $\mathbb{T}_\tau \wedge \mathbb{F}_\tau = 0$
(ii) Sea $M \in R$-Mod entonces $\tau(M) \in \mathbb{T}_\tau$. Sea $K \subseteq M$ un pseudocomplemento de $\tau(M)$. Ahora bien, como $\tau(K) = K \cap \tau(M) = 0$ entonces $K \in \mathbb{F}_\tau$. Por lo que $\tau(M) \oplus K \subseteq_e M \in \mathbb{T}_\tau \vee \mathbb{F}_\tau$. Así que $\mathbb{T}_\tau \vee \mathbb{F}_\tau = R$-Mod. □

R-Nat es distributiva

Lema 1.2.15. *Sean α, β, $\gamma \in R$-Nat. Entonces*

$$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) = \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$$

Prueba. $(\leq)$ Es claro. $(\geq)$ Sea $M \in \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$. Consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{S} = \{(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mid \mathrm{P} + \mathrm{Q} = \mathrm{P} \oplus \mathrm{Q} \subseteq \mathrm{M},\ \mathrm{P} \in \alpha \wedge \beta,\ \mathrm{Q} \in \alpha \wedge \gamma\}$$

Como $(0,0) \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S} \neq \emptyset$. S tiene un orden parcial, se define como: $(P, Q) \leq (P', Q') \Leftrightarrow P \subseteq P'$ y $Q \subseteq Q'$. $\mathcal{S}$ cumple las hipótesis del Lema del Zorn. Sea (P, Q) un máximo de $\mathcal{S}$ donde $P \in \alpha \wedge \beta$ y $Q \in \alpha \wedge \gamma$. Observemos que $P \oplus Q \in (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$. Sea $V \subseteq M$ un pseudocomplemento de $P \oplus Q$ en M, así que $P \oplus Q \oplus V \subseteq_e M$. Es claro que $V \in \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$. Por el corolario 1.1.12 entonces existen $A \in \beta$ y $B \in \gamma$ tal que $A \oplus B \subseteq_e V$. Como $(P, Q) \leq (P \oplus A, P \oplus B)$ con $P \oplus A \in \alpha \wedge \beta$ y $Q \oplus B \in \alpha \wedge \gamma$ entonces $A = 0$ y $B = 0$. Por lo que $V = 0$ y por lo tanto $P \oplus Q \subseteq_e M$. Asi que $M \in (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$. □

Así que R-Nat es distributiva.

R-Nat es una retícula completa de Boole

Como consecuencia de los resultados anteriores tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.2.16. *R-Nat es una retícula completa de Boole.*

Sea $t_\tau = (\tau, \mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ una teoría de torsión hereditaria y estable. Para cada $\Delta \in R$-Nat se definen las siguientes clases: $t\Delta = \mathbb{T}_\tau \wedge \Delta$ y $f\Delta = \mathbb{F}_\tau \wedge \Delta$. Observemos que $t\Delta$ y $f\Delta$ son clases naturales.

Corolario 1.2.17. Sea $t_\tau = (\tau, \mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ una teoría de torsión hereditaria y estable. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $t\Delta \wedge f\Delta = 0$ y $t\Delta \vee f\Delta = \Delta$.

(ii) $c\Delta \leq c(t\Delta) \wedge c(f\Delta)$

(iii) $f\Delta = c(t\Delta) \wedge \Delta$ y $t\Delta = c(f\Delta) \wedge \Delta$

(iv) $t\Delta \vee c\Delta = c(f\Delta)$ y $f\Delta \vee c\Delta = c(t\Delta)$

Prueba. *(i)* Observemos que $t\Delta \wedge f\Delta = (\mathbb{T}_\tau \wedge \mathbb{F}_\tau) \wedge \Delta = 0$. Ahora bien, $t\Delta \vee f\Delta = (\mathbb{T}_\tau \wedge \Delta) \vee (\mathbb{F} \wedge \Delta) = (\mathbb{T}_\tau \vee \mathbb{F}_\tau) \wedge \Delta = \Delta$.
(ii) Sea $M \in c\Delta$ y $0 \neq N \subseteq M$ entonces $N \notin \Delta$. Así que $N \notin t\Delta$ y $N \notin f\Delta$. Por lo que $M \in c(t\Delta)$ y $M \in c(f\Delta)$.
(iii) ($\leq$) Es claro. ($\geq$) Sea $M \in c(t\Delta) \wedge \Delta$ entonces todo submódulo de M distinto de cero no pertenece a $t\Delta$ y por lo tanto existe $M_{(f\Delta)}$ tal que $M_{(f\Delta)} \subseteq_e M$. Así que $M \in f\Delta$.
(iv) Como R-Nat es de Boole, por el inciso anterior se tiene que: $t\Delta \vee c\Delta = (c(f\Delta) \wedge \Delta) \vee c\Delta = (c(f\Delta) \vee c\Delta) \wedge (\Delta \vee c\Delta) = c(f\Delta) \vee c\Delta = c(f\Delta)$. □

Ahora bien, consideremos las siguientes clases de clases naturales:

$$R\text{-Nat}_{\mathcal{T}_\tau}=\{\Delta\in R\text{-Nat}\mid M\in\mathbb{T}_\tau \text{ para toda } M\in\Delta\}$$
$$R\text{-Nat}_{\mathcal{F}_\tau}=\{\Delta\in R\text{-Nat}\mid M\in\mathbb{F}_\tau \text{ para toda } M\in\Delta\}$$

Si τ es el radical de Goldie entonces éstas clases se denotarán, simplemente, como: R-Nat$_{\mathcal{T}}$ y R-Nat$_{\mathcal{F}}$

Corolario 1.2.18. Entonces:

(i) R-Nat$_{\mathcal{T}_\tau}$ y R-Nat$_{\mathcal{F}_\tau}$ son subretículas convexas de R-Nat.

(ii) R-Nat $= R$-Nat$_{\mathcal{T}_\tau} \oplus$ R-Nat$_{\mathcal{F}_\tau}$ es una suma directa de subretículas convexas.

Prueba. *(i)* $\Delta\in R$-Nat$_{\mathcal{T}} \Leftrightarrow t\Delta=\Delta$ y $\Delta\in R$-Nat$_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow f\Delta=\Delta$. Sea $\{\Delta_i\}\subseteq R$-Nat$_{\mathcal{T}}$. Ahora bien, $t(\wedge\Delta_i)=(\wedge\Delta_i)\wedge\mathbb{T}_\tau=\wedge(\Delta_i\wedge\mathbb{T}_\tau)=\wedge t\Delta_i=\wedge\Delta_i$. Por lo que $\wedge\Delta_i\in R$-Nat$_{\mathcal{T}}$. Además, $t(\vee\Delta_i)=(\vee\Delta_i)\wedge\mathbb{T}_\tau\geq\vee(\Delta_i\wedge\mathbb{T}_\tau)=\vee t\Delta_i=\vee\Delta_i$. Por lo que $\vee\Delta_i\in R$-Nat$_{\mathcal{T}}$. Por otro lado, sean $\Delta_1,\Delta_2\in R$-Nat$_{\mathcal{T}}$ y $\Delta\in R$-Nat tal que $\Delta_1\leq\Delta\leq\Delta_2$. Como $t\Delta=\Delta\wedge\mathbb{T}_\tau=(\Delta\wedge\Delta_2)\wedge\mathbb{T}_\tau=\Delta\wedge t\Delta_2=\Delta\wedge\Delta_2=\Delta$ entonces $\Delta\in R$-Nat$_{\mathcal{T}}$. Así que el intervalo $[\Delta_1,\Delta_2]\subseteq R$-Nat$_{\mathcal{T}}$. Analogamente para $\{\Delta_i\}\subseteq R$-Nat$_{\mathcal{F}}$.
(ii) R-Nat$_{\mathcal{T}}\oplus R$-Nat$_{\mathcal{F}}=\{\alpha\vee\beta\mid\alpha\in R$-Nat$_{\mathcal{T}}$ y $\beta\in R$-Nat$_{\mathcal{F}}\}$. Es claro que R-Nat$_{\mathcal{T}}\oplus R$-Nat$_{\mathcal{F}}\subseteq R$-Nat. Ahora bien, sea $\Delta\in R$-Nat. Por el inciso (i), $\Delta=t\Delta\vee f\Delta$ y por lo tanto R-Nat $\subseteq R$-Nat$_{\mathcal{T}}\oplus R$-Nat$_{\mathcal{F}}$. □

Proposición 1.2.19. *Sean $\Delta\in R$-Nat y $M\in R$-Mod. Entonces:*

(i) $\Delta\cap\langle M\rangle=\langle M_{(\Delta)}\rangle$

(ii) $\Delta\leq\langle M\rangle\Leftrightarrow\Delta=\langle M_{(\Delta)}\rangle$

(iii) Para toda $\alpha,\beta\in R$-Nat, $\alpha\wedge\beta=0$ si y solo si para toda $M\in R$-Mod, $M_{(\alpha)}\in\alpha$ y $M_{(\beta)}\in\beta$ se tiene que $M_{(\alpha)}\cap M_{(\beta)}=0$

Prueba. *(i)* ($\subseteq$) Sean $T\in\Delta\cap\langle M\rangle$ y $0\neq N\subseteq T$ un submódulo. Observemos que $N\in\Delta\cap\langle M\rangle$. Por el corolario 1.1.11 (i), existen submódulos $0\neq L\subseteq M$

y $0 \neq P \subseteq M$ tales que $L \cong P$. Como $N \in \Delta$, $L \in \Delta$ y por lo tanto $P \in \Delta$. Por el lema de Zorn, existe un submódulo $P \subseteq Q \in \Delta$ máximo con respecto a que $Q \in \Delta$. Por el teorema 1.2.12 (iii), existen submódulos $H \subseteq_e M_{(\Delta)}$ y $H' \subseteq_e Q$ tales que $H \cong H' \subseteq_e Q$. Por lo tanto $Q \in \langle M_{(\Delta)} \rangle$. Así que $P \in \langle M_{(\Delta)} \rangle$ y por lo tanto $L \in \langle M_{(\Delta)} \rangle$. Es decir, existen submódulo $0 \neq K \subseteq L$ y $0 \neq K' \subseteq M_{(\Delta)}$ tales que $K \cong K' \subseteq M_{(\Delta)}$. Entonces para toda $0 \neq N \subseteq T$ existe $0 \neq K \subseteq N$ tal que $K \cong K' \subseteq M_{(\Delta)}$. Por el corolario 1.1.11, $T \in \langle M_{(\Delta)} \rangle$. ($\supseteq$) Como $M_{(\Delta)} \in \Delta$ y $M_{(\Delta)} \in \langle M \rangle$ entonces $\langle M_{(\Delta)} \rangle \subseteq \Delta \cap \langle M \rangle$.
(ii) Por el inciso anterior.
(iii) ($\Rightarrow$) Es claro pues $M_{(\alpha)} \cap M_{(\beta)} \in \alpha \wedge \beta = 0$. ($\Leftarrow$) Sea $M \in \alpha \wedge \beta$ entonces $M = M_{(\alpha)}$ y $M = M_{(\beta)}$. Así que $M = M_{(\alpha)} \cap M_{(\beta)} = 0$. □

1.3 Descomposiciones en sumas directas

Teorema 1.3.1. *Sea $\Gamma \subseteq R$-Nat una subfamilia tal que:*
(i) $\alpha \wedge \beta = 0$ para toda $\alpha, \beta \in \Gamma$ siempre que $\alpha \neq \beta$ y (ii) $\bigvee \Gamma = R-Mod$.
Sea $M \in R$-Mod y para cada $\alpha \in \Gamma$, sea $M_{(\alpha)} \subseteq M$ una elección de un submódulo de M, máximo con la propiedad de que $M_{(\alpha)} \in \alpha$. Ahora bien, sean $\Omega \subseteq \Gamma$ un subconjunto y $K \subseteq M$ un submódulo de M tal que cumple las siguientes condiciones: $\Sigma\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Omega\} \subseteq_e K$ y $K \subseteq M$ es esencialmente cerrado. Entonces:

(i) $\Sigma\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\} = \oplus\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq_e M$

(ii) *$K \in \bigvee \Omega$ es máximo en M con la propiedad de que $K \in \bigvee \Omega$, es decir, $K = M_{(\vee\Omega)}$*

(iii) *Si $L \subseteq M$ es tal que $\oplus\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma \backslash \Omega\} \subseteq_e L$ entonces $L = M_{(c(\vee\Omega))}$. Así que $M_{(\vee\Omega)} \oplus M_{(c(\vee\Omega))} \subseteq_e M$ con $\oplus_{\gamma\in\Omega} M_{(\gamma)} \subseteq_e M_{(\bigvee\Omega)} \in \bigvee\Omega$ y $\oplus_{\gamma\in\Gamma\backslash\Omega} M_{(\gamma)} \subseteq_e M_{(c(\vee\Omega))} \in c(\bigvee\Omega)$*

(iv) *Supongamos que $N^{(\gamma)} \subseteq M$ es otra elección de un submódulo de M, máximo*

con la propiedad de que $N^{(\gamma)} \in \gamma$. Ahora bien consideremos $N^{(\vee\Omega)}$ un submódulo de M tal que $\oplus N^{(\gamma)} \subseteq_e N^{(\vee\Omega)} \in \bigvee\Omega$ y máximo con la propiedad de $N^{(\vee\Omega)} \in \bigvee\Omega$. Entonces $E(N^{(\vee\Omega)}) = E(M_{(\vee\Omega)})$.

Prueba. (i) Sea $\alpha_0 \in \Gamma$ y $x \in M_{(\alpha_0)} \cap \Sigma_{\alpha\neq\alpha_0} M_{(\alpha)}$. Primero, veamos que cualquier subfamilia finita de $\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ es independiente. La demostración se hará por inducción sobre la cardinalidad de la subfamilia. Supongamos que cualquier familia de cardinalidad menor o igual a $n-1$ es independiente. Consideremos la siguiente familia: $\{M_{(\alpha_1)}, (M_{(\alpha_2)}, \ldots, M_{(\alpha_n)})\}$ y supóngamos que existe $0 \neq m \in M_{(\alpha_i)} \cap (\Sigma_{j\neq i} M_{(\alpha_j)})$. Por hipótesis de inducción tenemos que $m \in M_{\alpha_i} \cap (\oplus_{j\neq i} M_{(\alpha_j)})$, por el argumento de la proyección existe $k \neq i$ y $0 \neq m' \in M_{(\alpha_k)}$ tal que $Rm \cong Rm'$. Por lo que $0 \neq Rm \in \alpha_i \wedge \alpha_k$. Lo cual es una contradicción y por lo tanto $M_{(\alpha_i)} \cap (\Sigma_{j\neq i} M_{(\alpha_j)}) = 0$ para toda $i = 1 \ldots n$. Ahora bien, si $x \in \Sigma_{\alpha\neq\alpha_0} M_{(\alpha)}$ entonces existe $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \Gamma$ tal que $x \in M_{(\alpha_0)} \cap (M_{(\alpha_1)} \oplus M_{(\alpha_2)} \oplus \cdots \oplus M_{(\alpha_n)})$. Como toda subfamilia finita de $\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ es independinete entonces $x = 0$. Por lo tanto $\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ es una familia independiente.
Por otro lado, sea $P \subseteq M$ un pseudocomplemento de $\oplus\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ y por lo tanto $(\oplus\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}) \oplus P \subseteq_e M$. Como $P \in \bigvee\Gamma$, por el teorema 1.1.10, existe $\{P_\gamma \subseteq P \mid P_\gamma \in \gamma \in \Gamma\}$ tal que $\oplus P_\gamma \subseteq_e P$. Si $P \neq 0$ entonces $P_\gamma \neq 0$ para álgun $\gamma \in \Gamma$ y por lo tanto $M_{(\gamma)} \oplus P_\gamma \in \gamma$. Lo cual contradice que M_γ es máximo. Así que $P = 0$ y por lo tanto $\oplus\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq_e M$.
(ii) $K \in \bigvee\Omega$. Supongamos que $K \subseteq T$ con T submódulo de M, máximo con la propiedad de que $T \in \bigvee\Omega$. Supongamos que $H \subseteq T$ es un pseudocomplemento de K, por lo que $K \oplus H \subseteq_e T$. Como $H \in \bigvee\Omega$ entonces existe $\oplus\{H_\gamma \mid \gamma \in \Omega\} \subseteq_e H$. Ahora bien, para cada $\gamma \in \Omega$, $M_{(\gamma)} \oplus H_\gamma \in \gamma$. Como $M_{(\gamma)}$ es máximo con $M_{(\gamma)} \in \gamma$ entonces $H_\gamma = 0$. Por lo que $H = 0$ y por lo tanto $K \subseteq_e T$. Así que $K = T$.
(iii) Solo falta ver que $\bigvee(\Gamma\backslash\Omega) = c(\bigvee\Omega)$. Por el corolario 1.2.13 basta demostrar que $\bigvee(\Gamma\backslash\Omega)$ cumple las siguientes condiciones: (a) $(\bigvee(\Gamma\backslash\Omega)) \vee (\bigvee\Omega) = R$-Mod y (b) $(\bigvee(\Gamma\backslash\Omega)) \wedge (\bigvee\Omega) = (0)$. Ahora bien como $\bigvee\Gamma = R$-Mod entonces para todo $M \in R$-Mod, existe $\oplus\{M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq_e M$. Como $(\oplus\{M_\gamma \mid \gamma \in \Omega\}) \oplus (\oplus\{M_\gamma \mid$

$\gamma \in \Gamma \backslash \Omega\} \subseteq_e M_{(\bigvee \Omega)} \oplus M_{(\bigvee \Gamma \backslash \Omega)} \subseteq_e M$ entonces $M \in (\bigvee(\Gamma \backslash \Omega)) \bigvee (\bigvee \Omega)$. Ahora bien, sea $0 \neq M \in (\bigvee(\Gamma \backslash \Omega)) \bigwedge (\bigvee \Omega)$ entonces existen $0 \neq \oplus\{M_\gamma \mid \gamma \in \Omega\} \subseteq_e M$ y $0 \neq \oplus\{M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \backslash \Omega\} \subseteq_e M$. Por lo que $0 \neq T = [\oplus\{M_\gamma \mid \gamma \in \Omega\}] \cap [\oplus\{M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \backslash \Omega\}] \subseteq_e M$. Sea $0 \neq x \in T$, como $0 \neq T \subseteq E(\oplus\{M_\gamma \mid \gamma \in \Omega)$ entonces por el argumento de la proyección existen $r \in R$ y $0 \neq y \in M_\alpha$ para alguna $\alpha \in \Omega$ tales que $Rrx \cong Ry \in \alpha$. Como $0 \neq rx \in T$ y $T \subseteq E(\{M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \backslash \Omega)$ entonces por el argumento de la proyección existe $s \in R$ y $0 \neq z \in M_\beta$ para alguna $\beta \in \Gamma \backslash \Omega$ tales que $Rsrx \cong Rz \in \beta$. Por lo que $Rsrx \in \beta \wedge \alpha = 0$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $M = 0$.

(iv) Es inmediato de los incisos anteriores y del teorema 1.2.12 (iii). □

Corolario 1.3.2. En particular, si $\Omega = \{\alpha\}$ se cumple lo siguiente

(i) Si $M_\alpha \subseteq M$ es un submódulo, máximo con la propiedad de $M_\alpha \in \alpha$ entonces existe un submódulo $\oplus_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq \alpha} M_{(\gamma)} \subseteq_e M_{c(\alpha)} \in c(\alpha)$ tal que $M_\alpha \oplus M_{(c(\alpha))} \subseteq_e M$.

(ii) Si $N^{(\alpha)} \subseteq$ es otra elección de submódulo, máximo con la propiedad de que $N^{(\alpha)}$ $E(M_{(\alpha)}) \cong E(N^{(\alpha)})$ y $E(M_{(c\alpha)}) \cong E(N^{(c\alpha)})$.

Corolario 1.3.3. Consideremos a Γ como en el teorema anterior. Para cada $\alpha \in \Gamma$, se definen $t\alpha$ y $f\alpha \in R$-Nat como en el corolario 1.2.17. Entonces al considerar las siguientes subfamilias: $\{t\alpha,\ f\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ y $\{M_{(t\alpha)},\ M_{(f\alpha)} \mid \alpha \in \Gamma\}$ se tiene que, $\oplus\{M_{(t\alpha)} \mid \alpha \in \Gamma\} \oplus \{M_{(f\alpha)} \mid \alpha \in \Gamma\} \subseteq_e M$

Prueba. Se sigue del teorema anterior, si hacemos $\Omega = \{t\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$. □

Corolario 1.3.4. Consideremos a Γ y a $\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ como en el teorema anterior. Sea $M_{t\gamma}$ y $M_{f\gamma}$ submódulos de $M_{(\gamma)}$, máximos con la propiedad de pertenecer a $t\gamma$ y $f\gamma$ respectivamente. Entonces:

(i) $M_{t\gamma} = \tau(M_{(\gamma)})$

(ii) $M_{t\gamma}$ y $M_{f\gamma}$ son pseudocomplementos uno del otro en M_γ

(iii) $\oplus\{\tau(M_{(\gamma)}) \mid \gamma \in \Gamma\} \oplus \{M_{f\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq_e M$

(iv) $\oplus\{\tau(M_{(\gamma)}) \mid \gamma \in \Gamma\}) \subseteq_e \tau(M)$

(v) $\tau(M) \oplus (\oplus\{M_{(f\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}) \subseteq_e M$

Prueba. (i) Como $M_{t\gamma} \in t\gamma$ entonces $M_{t\gamma} \subseteq \tau(M_{(\gamma)})$. Además $\tau(M_{(\gamma)})$ es un submódulo de $M_{(\gamma)}$ que pertenece a la clase $t\gamma$. Así que $M_{t\gamma} = \tau(M_{(\gamma)})$.
(ii) Por el lema de Zorn, existe K submódulo de $M_{(\gamma)}$ tal que $M_{t\gamma} \subseteq K$ y K es pseudocomplemento de $M_{f\gamma}$. Observemos que $K \in c(f\gamma) \wedge \gamma$. Por el corolario 1.2.17 se tiene que $K \in t\gamma$. Como $M_{t\gamma}$ es máximo con la propiedad de $M_{t\gamma} \in t\gamma$ entonces $K = M_{t\gamma}$ y por lo tanto $M_{t\gamma}$ es un pseudocomplemento de $M_{f\gamma}$. Análogamente, $M_{f\gamma}$ es un pseudocomplemento de $M_{t\gamma}$. Además $M_{t\gamma} \oplus M_{f\gamma} \subseteq_e M_{(\gamma)}$.
(iii) Se sigue del inciso (i) y del corolario anterior.
(iv) Por el teorema anterior, $\oplus M_{(\alpha)} \subseteq_e M$, así que $\tau(\oplus M_{(\alpha)}) \subseteq_e \tau(M)$. Pero $\tau(\oplus M_{(\alpha)}) = \oplus\tau(M_{(\alpha)}) \subseteq_e \tau(M)$.
(v) Por el corolario anterior, $\oplus\{\tau(M_{(\alpha)}) \mid \alpha \in \Gamma\} \oplus \{M_{(f\alpha)} \mid \alpha \in \Gamma\} \subseteq_e M$. Por el inciso anterior, se tiene que: $\tau(M) \oplus (\oplus\{M_{(f\alpha)} \mid \alpha \in \Gamma\}) \subseteq_e M$. □

Corolario 1.3.5. Consideremos a Γ y a $\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ como en el teorema anterior. Para cada γ, se define el siguiente submódulo $E(\tau M_{(\gamma)}) \cap M$. Entonces:

(i) $E(\tau M_{(\gamma)})$ es un submódulo de $E(M)$ máximo con la propiedad de pertenecer a la clase natural $t\gamma$

(ii) $E(\tau M_{(\gamma)}) \cap M$ es un submódulo de M máximo con la propiedad de pertenecer a la clase natural $t\gamma$, es decir, $M_{(t\gamma)} = E(\tau M_{(\gamma)}) \cap M$

(iii) $\tau M_{(\gamma)} \subseteq_e M_{(t\gamma)}$

(iv) $M_{(t\gamma)}$ es la cerradura esencial de $\tau M_{(\gamma)}$

Prueba. (i) Como $E(M) = E(M_{(\gamma)}) \oplus E(M_{(c\gamma)}) = E(\tau M_{(\gamma)}) \oplus E(M_{f\gamma}) \oplus E(M_{(c\gamma)})$ entonces, por el teorema 1.2.12, $E(\tau M_{(\gamma)})$ es máximo con la propiedad de pertenecer

a la clase natural $t\gamma$.
(*ii*) Supongamos que L es un submódulo de M tal que $E(\tau M_{(\gamma)}) \cap M \subseteq L$ y $L \in t\gamma$. Por el inciso anterior, $E(L) = E(\tau M_{(\gamma)})$. Así que $L \subseteq E(\tau M_{(\gamma)})$ y por lo tanto $L \subseteq E(\tau M_{(\gamma)}) \cap M$.
(*iii*) Como $\tau M_{(\gamma)} \subseteq_e E(\tau M_{(\gamma)})$ entonces $\tau M_{\gamma)} \subseteq_e E(\tau M_{(\gamma)}) \cap M$.
(*iv*) Observemos que $M_{(t\gamma)}$ es esencialmente cerrado por construcción. Ahora bien, supongamos que L es un submódulo de M que contiene a $\tau M_{(\gamma)}$ y que L es esencialmente cerrado en M. Ahora bien, como $E(\tau M_{(\gamma)}) \subseteq E(L)$ entonces $E(\tau M_{(\gamma)}) \cap M \subseteq E(L) \cap M = L$ pues L es escencialmente cerrado. Así que $M_{(t\gamma)}$ es el submódulo más pequeño que contiene a $\tau M_{(\gamma)}$ con la propiedad de ser esencialmente cerrado. Por lo tanto $M_{(t\gamma)}$ es la cerradura esencial de $\tau M_{(\gamma)}$. □

Corolario 1.3.6. Consideremos a Γ y a $\{M_{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ como en el teorema anterior. Supongamos que τ es el radical exacto izquierdo Z_2. Entonces: $Z_2 M_{(\gamma)}$ es un submódulo de M máximo con la propiedad de pertenecer a la clase natural $t\gamma$, es decir, $M_{(t\gamma)} = Z_2 M_{(\gamma)}$.

Prueba. Sabemos que para todo módulo M se tiene que $Z_2 M$ es la cerradura escencial de $\tau(M)$. Por el corolario anterior, $Z_2 M_{(\gamma)}$ es un submódulo de M máximo con la propiedad de pertenecer a la clase natural $t\gamma$. □

Capítulo 2

Tipos de Módulos

En este capítulo,se extienden las definiciones de los tipos de módulos, para ambas clasificaciones: la de Goodearl y Boyle, así como la de Dauns. Las definiciones, ahora, se dan para módulos arbritarios en lugar de módulos inyectivos no singulares. Dada una familia $\mathcal{C}$ de R-módulos izquierdos, se introduce el concepto de los módulos esencialmente $\mathcal{C}$-densos. Se demuestra que la clase de los módulos esencialmente $\mathcal{C}$-densos es una clase natural y se da una descripción del complemento de ésta. En la sección 2, se estudia el caso cuando $\mathcal{C}$ es la clase de módulos cuadrados y luego cuando $\mathcal{C}$ es la clase de módulos cuadrados idempotentes. Ésto nos conduce a estudiar las clases naturales formadas por los módulos $\mathcal{C}$-densos, los módulos localmente directamente finitos, así como las clases naturales de los módulos de tipo I, de tipo II y de tipo III. En la sección 3, se estudia el caso cuando $\mathcal{C}$ es la clase de módulos atómicos y luego cuando $\mathcal{C}$ es la clase de módulos uniformes; lo cuál nos lleva a estudiar las clases naturales formadas por los módulos moleculares, sin fondo, continuos y dicretos. En ambas secciones, se aplican los teoremas, vistos previamente, de descomposición de un módulo en sumas directas de submódulos que pertencen a estas clases naturales.

2.1 Otra forma de construir clases naturales

Sea $\mathcal{C}$ una clase no vacía de R-módulos izquierdos cerrada bajo copias isomórfas. Se denotará como, *ess* $\mathcal{C}$, a la siguiente clase de R-módulos izquierdos:

$$ess\ \mathcal{C} = \{N \in R\text{-Mod} \mid \text{ existe } K \in \mathcal{C} \text{ tal que } N \subseteq_e K\} \tag{2.1}$$

Observemos que $\mathcal{C} \subseteq ess\ \mathcal{C}$. La clase *ess* $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos esenciales. Ahora bien, si $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos esenciales entonces $\mathcal{C} = ess\ \mathcal{C}$.

Definición 2.1.1. Sea $M \in R$-Mod. Se dice que M es un módulo *esencialmente $\mathcal{C}$-denso* si para todo submódulo $0 \neq N$ de M, existe un submódulo $0 \neq H$ de $E(N)$, tal que $H \in \mathcal{C}$.

Observemos que si M es $\mathcal{C}$-denso entonces M es esencialmente $\mathcal{C}$-denso.

Proposición 2.1.2. *Sea $M \in R$-Mod. M es ess $\mathcal{C}$-denso si y solo si M es esencialmente $\mathcal{C}$-denso.*

Prueba. $(\Rightarrow)$ Sea $0 \neq N$ un submódulo de M. Como M es *ess* $\mathcal{C}$-denso, existe $0 \neq H$ submódulo de N tal que $H \subseteq_e C$ con $C \in \mathcal{C}$. Así que $0 \neq C \subseteq E(C) = E(H) \subseteq E(N)$ y por lo tanto M es esencialmente $\mathcal{C}$-denso.
$(\Leftarrow)$ Sea $0 \neq N$ un submódulo de M. Como M es esencialmente $\mathcal{C}$-denso, existe $0 \neq H$ un submódulo de $E(N)$ tal que $H \in \mathcal{C}$. Como $N \subseteq_e E(N)$ entonces $0 \neq H' = H \cap N \subseteq_e H \in \mathcal{C}$ y por lo tanto $H' \in ess\ \mathcal{C}$. Así que M es *ess* $\mathcal{C}$-denso. $\square$

Así que la familia de los módulos esencialmente $\mathcal{C}$-densos es la familia de los módulos *ess* $\mathcal{C}$-densos. Es decir, $cc(ess\ \mathcal{C})$ representa a la familia de los módulos esencialmente $\mathcal{C}$-densos. Además la familia de los módulos $\mathcal{C}$-densos esta contenida en la familia de los esencialmente $\mathcal{C}$-densos. Por lo que $cc(\mathcal{C}) \subseteq cc(ess\ \mathcal{C})$.

Proposición 2.1.3. *Supongamos que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos esenciales. Entonces M es $\mathcal{C}$-denso si y solo si M es esencialmente $\mathcal{C}$-denso.*

Prueba. Por hipótesis, $\mathcal{C} = ess\ \mathcal{C}$. Así que M es $\mathcal{C}$-denso si y solo si M es *ess* $\mathcal{C}$-denso. Por la proposición anterior tenemos que M es $\mathcal{C}$-denso si y solo si M es esencialmanete $\mathcal{C}$-denso. □

Así que si $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos esenciales, $cc(\mathcal{C}) = cc(ess\ \mathcal{C})$.

Proposición 2.1.4. *Sean $0 \neq M \in R$-Mod y M' una extensión esencial de M. M' es $\mathcal{C}$-denso si y solo si M es $\mathcal{C}$-denso.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Es claro.
($\Leftarrow$) Sea $0 \neq N$ un submódulo de M'. Como $M \subseteq_e M'$ entonces $0 \neq N \cap M \subseteq_e N$. Además, como M es $\mathcal{C}$-denso entonces existe $0 \neq H \subseteq N \cap M$ tal que $H \in \mathcal{C}$. □

Definición 2.1.5. Sea $M \in R$-Mod. Se dice que M es *localmente $\mathcal{C}$-libre* si para todo submódulo $0 \neq N$ de M, existe un submódulo $0 \neq K$ de N, tal que ningún submódulo, distinto de cero, de K pertenece a $\mathcal{C}$, es decir $K \in c(\mathcal{C})$.

De la definición, es clara la siguiente afirmación:

Proposición 2.1.6. *Sea $M \in R$-Mod. M es localmente $\mathcal{C}$-libre si y solo si M es $c(\mathcal{C})$-denso.*

Así que la familia de los módulos localmente $\mathcal{C}$-libres es igual a la familia de los módulos $c(\mathcal{C})$-densos, es decir, $cc(c\mathcal{C})$. Observemos que si M es un módulo $\mathcal{C}$-libre entonces M es localmente $\mathcal{C}$-libre.

Proposición 2.1.7. *Supongamos que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos. Entonces M es $\mathcal{C}$-libre si y solo si M es localmente $\mathcal{C}$-libre.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Es claro.
($\Leftarrow$) Sea $0 \neq N$ un submódulo de M. Supongamos que $N \in \mathcal{C}$, entonces todo submódulo de N pertenece a $\mathcal{C}$. Lo cual contradice que M es localmente $\mathcal{C}$-libre. Así que M es $\mathcal{C}$-libre. □

Teorema 2.1.8. *Sea $\mathcal{C}$ una familia no vacía de módulos. Entonces:*

(i) La familia de los módulos esencialmente $\mathcal{C}$-densos es una clase natural, es dcir, $cc(ess\ \mathcal{C}) \in R\text{-}Nat$.

(ii) La familia complementaria de $cc(ess\ \mathcal{C})$ consiste de todos los módulos localmente ess $\mathcal{C}$-libres.

Prueba. (*i*) Recordemos que la clase $cc(ess\ \mathcal{C})$ es la clase de los módulos esencialmente $\mathcal{C}$-densos. (a) Es claro que $cc(ess\ \mathcal{C})$ es cerrada bajo submódulos. (b) Es claro que $cc(ess\ \mathcal{C})$ es cerrada bajo copias isomorfas. (c) Sea $\{M_\alpha\}$ una familia de módulos esencialmente $\mathcal{C}$-densos. Si $0 \neq N$ es un submódulo de $\oplus_\alpha M_\alpha$ y $0 \neq x \in N$, por el argumento de la proyección, existen $0 \neq r \in R$ y $y \in M_\alpha$ para alguna α tal que $Rrx \cong Ry$. Como Ry es un submódulo de M_α y M_α es esencialmente $\mathcal{C}$-denso, entonces existe $0 \neq H$, un submódulo de $E(Ry)$, que pertenece a $\mathcal{C}$. Por lo que existe $0 \neq K \subseteq E(Rrx)$, submódulo de $E(N)$, tal que $K \cong H \in \mathcal{C}$. Así que $\oplus_\alpha M_\alpha$ es esencialmente $\mathcal{C}$-denso y por lo tanto $cc(ess\ \mathcal{C})$ es cerrada bajo sumas directas. (d) Sean M un módulo *ess* $\mathcal{C}$-denso y M' una extensión esencial de M. Por proposición 2.1.4, M' es *ess* $\mathcal{C}$-denso. Por lo que $cc(ess\ \mathcal{C})$ es cerrada bajo extensiones esenciales. (*ii*) A continuación se probará que M pertenece a la clase complementaria de $cc(ess\ \mathcal{C})$ si y solo si M es localmente *ess* $\mathcal{C}$-libre. Sea $M \in R$-Mod y $0 \neq N$ un submódulo de M. ($\Rightarrow$) Supongamos que M pertenece a la clase complementaria de $cc(ess\ \mathcal{C})$ entonces N no es esencialmente $\mathcal{C}$-denso. Por lo tanto existe $0 \neq K$ submódulo de N tal que $E(K) \in c(\mathcal{C})$. Sea $0 \neq T$ un submódulo de K y supongamos que $T \in ess\ \mathcal{C}$. Por lo tanto existe $0 \neq C \in \mathcal{C}$ tal que $T \subseteq_e C$. Así que $C \subseteq E(C) = E(T) \subseteq E(K)$. Lo cual contradice la elección de K. Por lo que $T \notin ess\ \mathcal{C}$ y por lo tanto K es *ess* $\mathcal{C}$-libre. Así que M es localmente *ess* $\mathcal{C}$-libre. ($\Leftarrow$) Supongamos que M es localmente *ess* $\mathcal{C}$-libre, por lo que existe $0 \neq K$ submódulo de N tal que $K \in c(ess\ \mathcal{C})$. Sea $0 \neq T$ un submódulo de $E(K)$ y supongamos que $T \in \mathcal{C}$. Como $K \subseteq_e E(K)$ entonces $0 \neq T \cap K \subseteq_e T$ y por lo tanto $0 \neq T \cap K \in ess\ \mathcal{C}$. Lo cual contradice la elección de K. Por lo que $T \notin \mathcal{C}$

y por lo tanto N no es esencialmente $\mathcal{C}$-denso. Así que M pertenece a la clase complementaria de $cc(ess\ \mathcal{C})$. $\square$

Corolario 2.1.9. Si $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos esenciales entonces:

(i) La familia de los módulos $\mathcal{C}$-densos es una clase natural, es decir, $cc(\mathcal{C}) \in R$-Nat.

(ii) La clase complementaria de $cc(\mathcal{C})$ consiste de todos los módulos localmente $\mathcal{C}$-libres.

Prueba. Observemos que $ess\ \mathcal{C} = \mathcal{C}$. (i) Por lo que, M es $\mathcal{C}$-denso si y solo si M es $ess\ \mathcal{C}$-denso. (ii) Por lo que, M es localmente $ess\ \mathcal{C}$-libre si y solo si M es localmente $\mathcal{C}$-libre. $\square$

Corolario 2.1.10. Si $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos entonces

(i) La clase de los módulos $\mathcal{C}$-densos es la clase natural generada por $\mathcal{C}$, es decir, $cc(\mathcal{C}) = \langle \mathcal{C} \rangle$.

(ii) La clase complementaria de $cc(\mathcal{C})$ consiste de los módulos $\mathcal{C}$-libres.

Prueba. Recordemos que $\overline{\mathcal{C}}$ consiste de todas las copias isomorfas de submódulos de elementos de $\mathcal{C}$. Por lo que $ess\ \mathcal{C} = \mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}$. (i) Por el teorema 1.1.10 se tiene que $cc(ess\ \mathcal{C}) = cc(\mathcal{C}) = cc(\overline{\mathcal{C}}) = \langle \mathcal{C} \rangle$. (ii) Por la proposición 2.1.7, M es $\mathcal{C}$-libre si y solo si M es localmente $\mathcal{C}$-libre. $\square$

2.2 Tipos de Goodearl y Boyle

Definición 2.2.1. Sea $M \in R$-Mod. Se dice que M es un módulo *cuadrado* si existen P y Q, submódulos de M, tales que $M \cong P \oplus Q$ y $P \cong Q$. Se dice que M es *cuadrado idempotente* si $P \oplus Q \cong P$.

En esta sección, se denotará como Cu a la clase de todos los R-módulos izquierdos cuadrados y como $Cu_{\mathcal{I}}$ a la clase de los R-módulos izquierdos inyectivos cuadrados idempotentes. Es claro que C y $Cu_{\mathcal{I}}$ son clases cerradas bajo copias isomorfas. Además C es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Lema 2.2.2. *Sea $0 \neq M \in R$-Mod y $M' \in R$-Mod una extensión esencial de M. Si M' contiene un submódulo cuadrado(idempotente) distinto de cero entonces M contiene un submódulo cuadrado (idempotente) distinto de cero también.*

Prueba. Supongamos que existen P, Q submódulos distintos de cero de M' tales que $P \oplus Q \subseteq M'$ y $P \cong Q$. Sean $f : P \to Q$ un isomorfismo y $0 \neq x \in P$. Como $M \subseteq_e M'$ entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx + rf(x) \in M$. Observemos que $Rrx + Rrf(x) = Rrx \oplus Rrf(x) \subseteq M$ y $Rrx \cong Rrf(x)$. Por lo que $Rrx \oplus Rrf(x)$ es un submodulo cuadrado distinto cero de M. □

Proposición 2.2.3. *Sea $M \in R$-Mod. M es Cu-denso si y solo si M es esencialmente Cu-denso.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Es claro.
($\Leftarrow$) Sea $0 \neq N$ submódulo de M. Por hipótesis, $E(N)$ contiene un submódulo cuadrado distinto de cero. Entonces, por el lema anterior, N contiene un submódulo cuadrado distinto de cero. Así que M es Cu-denso. □

Proposición 2.2.4. *Sea $M \in R$-Mod. Entonces:*

(i) M es Cu-denso si y solo si todo sumando directo de $E(M)$ es cuadrado.

(ii) Si M es $Cu_{\mathcal{I}}$-denso entonces todo sumando directo de $E(M)$ es un cuadrado idempotente.

Prueba. (i) ($\Rightarrow$) Sea N un sumando directo de $E(M)$ y $\mathcal{F}$ la siguiente clase: $\mathcal{F} = \{(V, W) \mid V$ y W son submódulos de N, $V + W = V \oplus W$ y $V \cong W\}$. Se define un orden parcial en $\mathcal{F}$, dado por: $(V_1, W_1) \leq (V_2, W_2)$ si y solo si $V_1 \subseteq V_2$ y $W_1 \subseteq W_2$.

Ahora bien, por la proposición 2.1.4, $E(M)$ es Cu-denso y entonces existen $0 \neq P, Q$ submódulos de N tales que $P \oplus Q \subseteq N$ y $P \cong Q$. Por lo que $\mathcal{F}$ no es vacía. Supongamos que $\{(V_i,\ W_i)\} \subseteq \mathcal{F}$ es una cadena en $\mathcal{F}$. Sean $V = \bigcup V_i$ y $W = \bigcup W_i$ submódulos de N, entonces $V + W = V \oplus W$ y $V \cong W$ y por lo tanto $(V, W) \in \mathcal{F}$. Así que $\mathcal{F}$ cumple las hipótesis del Lema de Zorn. Sea (K, L) un máximo de $\mathcal{F}$ y T un pseudocomplemento de $K \oplus L$ en N. Supongamos que $T \neq 0$, entonces existen $0 \neq H_1, H_2$ submódulos de T tales que $H_1 \oplus H_2 \subseteq N$ y $H_1 \cong H_2$. Observemos que $(K \oplus H_1, L \oplus H_2) \in \mathcal{F}$. Como (K, L) es un máximo de $\mathcal{F}$ entonces $H_1 = 0 = H_2$, lo cual es una contradicción. Así que $T = 0$ y por lo tanto $K \oplus L \subseteq_e N$ con $K \cong L$. Como N es inyectivo entonces $N = E(K) \oplus E(L)$ con $E(K) \cong E(L)$. Por lo tanto N es un módulo cuadrado.
($\Leftarrow$) Sea $0 \neq N$ un submódulo de M, como $E(N)$ es sumando directo de $E(M)$ entonces $E(N)$ es cuadrado. Por el lema 2.2.2 N contiene un cuadrado distinto de cero. Por lo tanto M es Cu-denso.
(*ii*) Basta pedir en ($\Rightarrow$) del inciso anterior que $V \cong W \cong V \oplus W$ y por lo tanto $K \cong L \cong K \oplus L$. Así que $N = E(K) \oplus E(L) \cong E(K) \cong E(L)$ y por lo tanto N es un cuadrado idempotente. □

Como consecuencia, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.2.5. *Sea $M \in R$-Mod. Entonces son equivalentes:*

(i) M es Cu-denso

(ii) $E(M)$ es Cu-denso

(iii) M es esencialmente Cu-denso

(iv) Todo sumando directo de $E(M)$ es cuadrado

Proposición 2.2.6. *Sea $M \in R$-Mod. Entonces todo submódulo Cu-libre esta contenido en un submódulo máximo Cu-libre de M. En particular, todo módulo contiene un submódulo Cu-libre máximo.*

Prueba. Sea N un submódulo Cu-libre de M. Se define $\mathcal{F}$ la siguiente clase: $\mathcal{F} = \{K \subseteq M \mid N \subseteq K$ y K es Cu-libre$\}$. Observemos que $\mathcal{F}$ no es vacía pues $N \in \mathcal{F}$. Ahora bien, supongamos que $\{K_i\} \subseteq \mathcal{F}$ es una cadena entonces $\bigcup K_i \subseteq M$ es un submódulo de M que contiene a N. Vamos a ver que $\bigcup K_i$ es Cu-libre. Sea T un submódulo de $\bigcup K_i$ y supongamos que T es cuadrado, es decir, existen P, Q submódulos de T tales que $T = P \oplus Q$ y $P \cong Q$. Sea $f : P \to Q$ un isomorfismo. Para toda $x \in P$, se tiene que x y $f(x)$ pertencen a algun K_i de la cadena. Así que $Rx + Rf(x) = Rx \oplus Rf(x) \subseteq K_i$ y $Rx \cong Rf(x)$. Como K_i es Cu-libre entonces $x = 0$ y por lo tanto $P = 0$. Por lo que $T = 0$ y $\bigcup K_i \in \mathcal{F}$. Así que $\mathcal{F}$ cumple con las hipótesis del Lema de Zorn. Sea K un máximo de $\mathcal{F}$, entonces $N \subseteq K$ y K es Cu-libre. La última afirmación es clara ya que 0 es Cu-libre. □

Definición 2.2.7. Sea $M \in R$-Mod. Se dice que M es un módulo *abeliano* si ningún sumando directo distinto de cero de $E(M)$ es cuadrado.

Proposición 2.2.8. *Sea $M \in R$-Mod. Entonces son equivalentes:*

(i) M es abeliano

(ii) M es Cu-libre

(iii) $E(M)$ es Cu-libre

(iv) No existen $0 \neq x \in M$ y $0 \neq y \in M$ tales que $Rx \cong Ry$ y $Rx \cap Ry \neq 0$

Prueba. $(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que N es un submódulo cuadrado de M. Entonces $E(N)$ también es cuadrado. Como M es abeliano y $E(N)$ es un sumando directo de $E(M)$ entonces $E(N) = 0$ y por lo tanto $N = 0$. Así que M es Cu-libre.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Por el lema 2.2.2
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Supongamos que existen x y $y \in M$ tales que $Rx \cong Ry$ y $Rx \cap Ry = 0$. Entonces $Rx \oplus Ry$ es un cuadrado de $E(M)$, por lo que $x = 0 = y$.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Sea $0 \neq N$ un sumando directo de $E(M)$ y supongamos que N es cuadrado. Por el lema 2.2.2 M, existen $0 \neq P, Q$ submodulos de M tales que

$P \oplus Q \subseteq N$ y $P \cong Q$. Sean $f : P \to Q$ un isomorfismo y $0 \neq x \in P$. Observemos que $Rx \cap Rf(x) = 0$ y $Rx \cong Rf(x)$. Esto contradice la hipótesis. Por lo que N no es cuadrado. □

Se denotará como $\mathcal{A}$b a la clase de los módulos abelianos. Del resultado anterior se tiene que $\mathcal{A}\text{b} = c(\mathcal{C}u)$. Observemos que la clase $\mathcal{A}$b es cerrada bajo copias isomorfas, submódulos y cápsulas inyectivas.

Definición 2.2.9. Sea $M \in R$-Mod. Se dice que M es un módulo *directamente finito* si ningún sumando directo distinto de cero de $E(M)$ es cuadrado idempotente. Se dice que M es un módulo *directamente infinito* si existe un sumando directo distinto de cero de $E(M)$ que sea cuadrado idempotente. Se dice que M es un módulo *puramente infinito* si ningun sumando directo distinto de cero de $E(M)$ totalmente invariante es directamente infinito. Se dice que M es un módulo *localmente directamente finito* si todo sumando directo distinto de cero de $E(M)$ contiene un submódulo directamente finito de N.

Se denotará como $\mathcal{DF}$ a la clase de todos los R-módulos izquierdos directamente finitos y como $\mathcal{LDF}$ a la clase de todos los R-módulos izquierdos localmente directamente finitos. Es claro que si $M \in R$-Mod es un módulo abeliano entonces es directamente finito y que si M es directamente finito entonces es localmente directamente finito. Así que, $\mathcal{A}\text{b} \subseteq \mathcal{DF} \subseteq \mathcal{LDF}$. Observemos que M es localmente directamente finito si y solo si todo sumando directo distinto de cero de $E(M)$ contiene un submódulo inyectivo directamente finito. Por último, observemos que la clase de los módulos directamente finitos es cerrada bajo copias isomorfas, submódulos y cápsulas inyectivas.

Proposición 2.2.10. *Sea $M \in R$-Mod. M es localmente directamente finito si y solo si M es $\mathcal{DF}$-denso.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Sea $0 \neq N$ un submódulo de M. Como $0 \neq E(N)$ es un sumando directo de $E(M)$ entonces existe un submódulo, $0 \neq H$, directamente finto de $E(N)$.

Como $\mathcal{DF}$ es cerrada bajo submódulos y $0 \neq H \cap N$ es un submódulo de H entonces $0 \neq H \cap N$ es directamente finito. Por lo que M es $\mathcal{DF}$-denso.
($\Leftarrow$) Sea $0 \neq N$ un sumando directo de $E(M)$. Como M es $\mathcal{DF}$-denso y $0 \neq N \cap M$ es submódulo de M entonces existe un submódulo, $0 \neq H$, directamente finito de $N \cap M$. Por lo que M es localmente directamente finito. $\square$

Definición 2.2.11. Sea $M \in R$-Mod. Se dice que M es de *tipo I* si todo sumando directo distinto de cero de $E(M)$ contiene un submódulo inyectivo abeliano. Se dice que M es de *tipo II* si ningun sumando directo de $E(M)$ es abeliano y además todo sumando directo contiene, a su vez, un sumando directo que sea directamente finito. Se dice que M es de *tipo III* si todo sumando directo distinto de cero de $E(M)$ es directamente infinito.

Se denotará como I, II y III a todos los R-módulos izquierdos de *tipo* I, *tipo* II y *tipo* III respectivamente.

Proposición 2.2.12. *Sea $M \in R$-Mod. M es tipo I si y solo si M es $\mathcal{A}b$-denso.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Sea $0 \neq N$ un submódulo de M. Como $0 \neq E(N)$ es un sumando directo de $E(M)$ entonces existe un submódulo, $0 \neq H \subseteq E(N)$, que es inyectivo y abeliano. Ahora bien, $0 \neq H \cap N \subseteq_e H$ y $H \in \mathcal{A}b$ y entonces $0 \neq H \cap N \in \mathcal{C}u$.
($\Leftarrow$) Sea $0 \neq N$ un sumando directo de $E(M)$. Como $0 \neq N \cap M \subseteq M$ entonces existe un submódulo abeliano $H \subseteq N \cap M$. Así que $E(H) \subseteq N$ es un submódulo inyectivo y abeliano. $\square$

Proposición 2.2.13. *Sea $M \in R$-Mod. M es $\mathcal{C}u$-denso si y solo si ningun sumando directo distinto de cero de $E(M)$ es abeliano.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Supongamos que $0 \neq N$ es un sumando directo de $E(M)$. Como $E(M)$ es $\mathcal{C}u$-denso entonces existe $0 \neq H$ submódulo de N tal que H es cuadrado. Por lo que N no es abeliano.
($\Leftarrow$) Supongamos que $0 \neq N$ es un submódulo de M. Como $0 \neq E(N)$ es un

sumando directo de $E(M)$ entonces $E(N)$ no es abeliano, es decir, $E(N)$ contiene un submódulo cuadrado distinto de cero. Por el lema 2.2.2, N contiene un cuadrado no cero. □

Proposición 2.2.14. *Sea $M \in R$-Mod. M es tipo II si y solo si M es Cu-denso y localmente directamente finito.*

Prueba. Por las proposición anterior, M es Cu-denso si y solo si no tiene sumandos directos abelianos distintos de cero. Además M es localmente directamente finito si y solo si todo sumando directo de $E(M)$ contiene un sumando directo que sea directamente finito. □

Proposición 2.2.15. *Sea $M \in R$-Mod. M es tipo III si y solo si M es esencialmente $Cu_{\mathcal{I}}$-denso.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Supongamos que $0 \neq N$ es un submódulo de M. Como $0 \neq E(N)$ es un sumando directo de $E(M)$ entonces $E(N)$ es directamente infinito. Por lo que existe un sumando directo de cero de $E(N)$ que es cuadrado idempotente. Es decir, $E(N)$ contiene un submódulo cuadrado idempotente distinto de cero. Así que M es $Cu_{\mathcal{I}}$-denso.

($\Leftarrow$) Supongamos que $0 \neq N$ es un sumando directo de $E(M)$. Como $0 \neq N \cap M \subseteq_e N$ es un submódulo de M entonces existe H submódulo cuadrado idempotente de $N \cap M$. Por lo que N es directamente infinito y por lo tanto M es de *tipo III*. □

Proposición 2.2.16. *Sea $M \in R$-Mod. M es esencialmente $Cu_{\mathcal{I}}$-denso si y solo si M es $\mathcal{DF}$-libre.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Sea $0 \neq N$ un submódulo de M. Por hipótesis, existe $0 \neq H$ submódulo de $E(N)$ tal que $H \in Cu_{\mathcal{I}}$. Por lo que N no es directamente finito. Así que M es $\mathcal{DF}$-libre.

($\Leftarrow$) Sea $0 \neq N$ un submódulo de M. Por hipotesis, N no es directamente finito. Por lo que existe un sumando directo, distinto de cero, de $E(N)$ que es cuadrado idempotente. Por lo tanto M es esencialmente $Cu_{\mathcal{I}}$-denso □

Las proposiciones anteriores muestran como construir las clases $\mathcal{LDF}$, I, II, III a partir de la clase de cuadrados y la clase de cuadrados idempotentes. Los resultados anteriores se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.17. *Para todo anillo R,*

(i) Los módulos localmente directamente finitos son los módulos $\mathcal{DF}$-densos

(ii) Los módulos tipo I son los módulos $\mathcal{A}b$-densos

(iii) Los módulos tipo II son los módulos que son $\mathcal{C}u$-densos y localmente directamente finitos

(iv) Los módulos tipo III son los módulos esencialmente $\mathcal{C}u_{\mathcal{I}}$-densos

Corolario 2.2.18. Para todo anillo R se tiene que los módulos $\mathcal{C}u$-densos forman una clase natural y que las clases $\mathcal{LDF}$, I, II, III son naturales

Prueba. Recordemos que los módulos $\mathcal{C}u$-densos son todos los módulos esencialmente $\mathcal{C}u$-densos. Por la proposición 2.1.8, los módulos $\mathcal{C}u$-denso forman una clase natural. Ahora bien, como la clase $\mathcal{DF}$ es cerrada bajo submódulos y la clase $\mathcal{LDF}$ esta formada por los módulos $\mathcal{DF}$-densos, por la proposición 2.1.10, $\mathcal{LDF}$ es una clase natural. El mismo argumento se repite para la clase $\mathcal{A}$b y por lo tanto I es una clase natural. Por otro lado, II es la interseción de dos clases naturales. Por último, por la proposición 2.1.8, III es una clase natural. □

Corolario 2.2.19. Para todo anillo R,

(i) $\mathcal{LDF}$ es la clase natural generada por $\mathcal{DF}$

(ii) I es la clase generada por $\mathcal{A}$b

(iii) $I \subseteq \mathcal{LDF}$

Prueba. Por el corolario 2.1.10 tenemos que:
(i) Como $\mathcal{DF}$ es cerrada bajo submódulos $\langle \mathcal{DF} \rangle = cc\mathcal{DF} = \mathcal{LDF}$.
(ii) Como $\mathcal{A}$b es cerrada bajo submódulos $\langle \mathcal{A}\text{b} \rangle = cc(\mathcal{A}\text{b}) = cc(c\mathcal{C}u) = I$.
(iii) Como $\mathcal{A}\text{b} \subseteq \mathcal{DF}$ entonces $I \subseteq \mathcal{LDF}$ □

Corolario 2.2.20. Para toda anillo R,

(i) $\mathcal{LDF}$ y III son complementos

(ii) $cc(\mathcal{C}u)$ y I son complementos

(iii) $III \subseteq c(I)$

Prueba. Por el corolario 2.1.10 tenemos que:
(i) Como $\mathcal{DF}$ es cerrada bajo submódulos, la clase complementaria de $\mathcal{LDF}$ consiste de los módulos $\mathcal{DF}$-libres. Como los módulos $\mathcal{DF}$-libres son los módulos esencialemente $\mathcal{C}u_{\mathcal{I}}$-densos entonces III es la clase complementaria de $\mathcal{LDF}$.
(ii) Como $\mathcal{A}$b es cerrada bajo submódulos, la clase complementaria de I consiste de los módulos $\mathcal{A}$b-libres, es decir, de los módulos $\mathcal{C}u$-densos. Por lo que $cc(\mathcal{C}u)$ es la clase complementaria de I.
(iii) Como $I \subseteq \mathcal{LDF}$ entonces $III \subseteq cc(\mathcal{C}u)$. Además $c(I) = cc(\mathcal{C}u)$. □

Corolario 2.2.21. Para todo anillo R,

(i) $\mathcal{LDF} = I \vee II$ y $c(I) = II \vee III$

(ii) $I \vee II \vee III = R\text{-Mod}$, $I \wedge II = 0$, $II \wedge III = 0$ y $I \wedge III = 0$

Prueba. (i) Recordemos que $II = c(I) \wedge \mathcal{LDF}$. Como R-Nat es una retícula booleana completa entonces $I \vee II = I \vee (c(I) \wedge \mathcal{LDF}) = (I \vee c(I)) \wedge (I \vee \mathcal{LDF}) = \mathcal{LDF}$. Ahora bien, $II \vee III = (c(I) \wedge \mathcal{LDF}) \vee III = (c(I) \vee III) \wedge (\mathcal{LDF} \vee III) = c(I)$.
(ii) Por el inciso anterior, $I \vee II \vee III = \mathcal{LDF} \vee III = R\text{-Mod}$. Por otro lado, $I \wedge II = I \wedge c(I) \wedge \mathcal{LDF} = 0$, $II \wedge III = c(I) \wedge \mathcal{LDF} \wedge III = 0$ y por último $I \wedge III \subseteq I \wedge c(I) = 0$ □

Al considerar la familia $\{I, II, II\}$ de clases naturales, por el teorema 1.3.1 tenemos que:

Corolario 2.2.22. Sea $M \in R$-Mod. Entonces:

(i) Existen $M_{(I)}$, $M_{(II)}$, $M_{(III)}$ submódulos de M tal que
$M_{(I)} \oplus M_{(II)} \oplus M_{(III)} \subseteq_e M$

(ii) La descomposición $E(M) = E(M_{(I)}) \oplus E(M_{(II)}) \oplus E(M_{(III)})$ es única salvo superspectividad.

2.3 Tipos de Dauns

Definición 2.3.1. Sea $M \in R$-Mod. Se dice que M es un módulo *atómico* si todo submódulo distinto de cero de M genera la misma clase natural que M.

Se denotará como $\mathcal{AT}$ a la clase de todos los R-módulos izquierdos atómicos. La clase $\mathcal{AT}$ es cerrada bajo submódulos. Ahora bien, se denotará como $\mathcal{U}$ a la clase de todos los R-módulos izquierdos uniformes. Observemos que la clase de todos los módulos uniformes es cerradas bajo submódulos. Como todo módulo uniforme es atómico entonces $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{AT}$.

Proposición 2.3.2. *Sea $M \in R$-Mod. M es atómico si y solo si $\langle M \rangle$ es un átomo en R-Nat.*

Prueba. $(\Rightarrow)$ Sea $\Delta \in R$-Nat tal que $0 \neq \Delta \leq \langle M \rangle$. Sea $0 \neq T \in \Delta$, como $T \in \langle M \rangle$ entonces existe una familia $\{P_j\}$ de submódulos de M tal que $\oplus P_j \subseteq_e T$. Por hipótesis, se tiene que $\langle \oplus P_j \rangle = \langle M \rangle$. Por lo que $\langle N \rangle = \langle M \rangle$ y por lo tanto $\langle M \rangle = \Delta$.
$(\Leftarrow)$ Sea $0 \neq N$ un submódulo de M, entonces $\langle N \rangle \leq \langle M \rangle$. Por hipótesis, $\langle N \rangle = \langle M \rangle$. □

Definición 2.3.3. Sea $M \in R$-Mod. Se dice que M es un módulo *molecular* si todo submódulo distinto de cero de M contiene un submódulo atómico. Se dice que M es *sin fondo* si no contiene submódulos atómicos. Se dice que M es *discreto* si contiene esencialmente una suma directa de módulos uniformes. Se dice que M es *continuo* si no contiene submódulos uniformes.

Se denotará como A, B, C y D a la clase de R-módulos izquierdos moleculares, sin fondo, continuos y discretos respectivamente.

De la definición, es claro el siguiente resultado:

Teorema 2.3.4. *Para todo anillo R se tiene que*

(i) Los módulos moleculares son los $\mathcal{AT}$-densos

(ii) Los módulos sin fondo son los $\mathcal{AT}$-libres

(iii) Los módulos discretos son los $\mathcal{U}$-densos

(iv) Los módulos continuos son los $\mathcal{U}$-libres

Prueba. (i), (ii) y (iv) son claras de las definiciones.
(iii) Por el teorema 1.1.10. □

Corolario 2.3.5. Para todo anillo R, las clases A, B, C y D son naturales

Prueba. Como la clase $\mathcal{AT}$ es cerrada bajo submódulos y la clase A esta formada por los $\mathcal{AT}$-densos entonces, por la proposición 2.1.10, A es una clase natural. Ahora bien, como A es una clase natural entonces $c(A)$ es una clase natural. Observemos que $A = cc(\mathcal{AT})$. Por lo que $B = c(A) = c(cc\mathcal{AT}) = ccc(\mathcal{AT}) = c(\mathcal{AT})$, por el inciso (i) del lema 1.2.7. Así que B es clase natural. El mismo argumeto se repite para la clase $\mathcal{U}$. □

Corolario 2.3.6. Para todo anillo R,

(i) A es la clase generada por $\mathcal{AT}$

(ii) D es la clase generada por $\mathcal{U}$

(iii) $D \subseteq A$

Prueba. *(i)* Como $\mathcal{AT}$ es cerrada bajo submódulos $\langle \mathcal{AT} \rangle = cc\mathcal{AT} = A$.
(ii) Como $\mathcal{U}$ es cerrada bajo submódulos
(iii) Como $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{AT}$ entonces $A \subseteq D$ □

Corolario 2.3.7. Para todo anillo R,

(i) A y B son complementos

(ii) C y D son complementos

(iii) $B \subseteq C$

Prueba. *(i)* Es claro pues B es la clase complementaria de A
(ii) Es claro pues D es la clase complementaria de C.
(iii) Por último, si un módulo es $\mathcal{AT}$-libre entonces es $\mathcal{U}$-libre. □

Se denotará como CA a la clase de todos los módulos continuos y moleculares.

Corolario 2.3.8. Para todo anillo R,

(i) La clase CA es natural

(ii) $C = CA \vee B$ y $A = CA \vee D$

(iii) $CA \vee B \vee D = R$-Mod, $CA \wedge B = 0$, $CA \wedge D = 0$ y $D \wedge B = 0$

Prueba. *(i)* Como $CA = C \cap A$ entoces $CA \in R$-Nat.
(ii) Como R-Nat es una retícula booleana entonces $CA \vee B = (C \wedge A) \vee B = (C \vee B) \wedge (A \vee B) = C$. Ahora bien, $CA \vee D = (C \wedge A) \vee D = (C \vee D) \wedge (A \vee D) = A$.
(iii) Por el inciso anterior, $CA \vee B \vee D = C \vee D = R$-Mod. Ahora bien, $CA \wedge B \subseteq A \wedge B = 0$ y $CA \wedge D \subseteq C \wedge D$. Además $D \wedge B \subseteq A \wedge B = 0$. □

Al considerar la familia $\{CA, B, D\}$ de clases naturales, tenemos que:

Corolario 2.3.9. Sea $M \in R$-Mod. Entonces:

(i) Existen las siguientes descomposiciones: $M_{(CA)} \oplus M_{(B)} \subseteq_e M_{(C)}$, $M_{(C)} \oplus M_{(D)} \subseteq_e M$ y por lo tanto $M_{(CA)} \oplus M_{(B)} \oplus M_{(D)} \subseteq_e M$

(ii) Las siguientes descomposiciones: $E(M) = E(_{(C)}) \oplus E(M_{(D)})$ y $E(M) = E(M_{(CA)}) \oplus E(M_{(B)}) \oplus E(M_{(D)})$ son únicas salvo superspectividad.

42

Capítulo 3

Clases Naturales Universales

Sean R y S dos anillos asociativos con 1 y $\phi : R \to S$ un morfismo suprayectivo de anillos. En la primera sección se estudia el funtor que induce el morfismo ϕ de S-Mod a R-Mod. En la sección 2, se analiza el caso de cambio de anillo en las clases naturales. Los resultados de ambas secciones, nos permiten definir un funtor, denotado por Σ, de la categoría de anillos asociativos con 1 a la categoría de las retículas completas de Boole donde a cada anillo R, le asociamos la retícula de clases naturales R-Nat y todo morfismo ϕ, como arriba, induce un morfismo de retículas completas. Por último, se introduce el concepto de clase natural universal. Este concepto nos lleva a la descomposición del funtor Σ. La clases naturales que se estudiaron en el capítulo anterior, nos dan ejemplos de clases naturales universales.

3.1 Cambio de anillo: módulos

Sean R y S dos anillos con 1 y $\phi : R \to S$ un morfismo de anillos que preserva la identidad. Este morfismo induce una asignación de la categoría S-Mod a la categoría R-Mod, la cual denotaremos como $\mathcal{F}_\phi$. La asignación de objetos esta dada como sigue: a cada S-módulo izquierdo $_sM$ se le puede definir la siguiente operación: $r \cdot m = \phi(r)m$. El R-módulo izquierdo que se induce de esta operación se denotará como M_ϕ, es decir $\mathcal{F}_\phi({}_sM) = M_\phi$. Ahora bien, la siguiente proposición nos muestra que la asignación de morfismo esta dada por la identidad. Es decir, si $f : {}_sM \to {}_sM'$ es un morfismo de S-módulos entonces $\mathcal{F}_\phi(f) = f_\phi$ donde $f_\phi : M_\phi \to M'_\phi$ tal que $f_\phi(m) = f(m)$.

Proposición 3.1.1. *Sean R y S dos anillos con 1 y $\phi : R \to S$ un morfismo de anillos que preserva la identidad. Si ${}_sM$ y ${}_sM' \in S$-Mod entonces se cumple lo siguiente: $Hom_S({}_sM, {}_sM') = Hom_R(M_\phi, M'_\phi)$*

Prueba. ($\subseteq$) Supongamos que $f : M_S \to M'_S$ es un morfismo de S-módulos. Sean $r \in R$ y $m \in M$. Entonces $f_\phi(r \cdot m) = f_\phi(\phi(r)m) = \phi(r)f_\phi(m) = r \cdot f_\phi(m)$. Por lo que f es un morfismo de R-módulos.
($\supseteq$) Supongamos que $f : M_\phi \to M'_\phi$ es un morfismo de R-módulos. Sea $s \in S$ y $m \in M$. Observemos que para toda $s \in S$ existe $r \in R$ tal que $\phi(r) = s$. Entonces $f(sm) = f(\phi(r)m) = f(r \cdot m) = r \cdot f(m) = \phi(r)f(m) = sf(m)$. Por lo que f es un morfismo de S-módulos. □

Teorema 3.1.2. *Sean R y S dos anillos con 1 y $\phi : R \to S$ un morfismo de anillos que preserva la identidad con $I = Nuc\,\phi$. Entonces este morfismo induce un funtor covariante $\mathcal{F}_\phi$ de la categoría S-Mod a la categoría R-Mod dado por: $\mathcal{F}_\phi({}_sM) = M_\phi$ y $\mathcal{F}_\phi(f) = f$.*

Prueba. Supongamos que f y g son morfismos de S-módulos. Es claro que $\mathcal{F}_\phi(fg) = \mathcal{F}_\phi(f)\mathcal{F}_\phi(g)$ y que $\mathcal{F}_\phi(id_M) = id_{M_\phi}$ pues $\mathcal{F}_\phi$ es la identidad en los morfismos. Por lo que $\mathcal{F}_\phi$ es un funtor. □

Corolario 3.1.3. La imagen del funtor $\mathcal{F}_\phi$ es la siguiente clase de R-módulos izquierdos: $\{M \in R\text{-Mod tal que } IM = 0\}$

Prueba. Primero observemos que $IM_\phi = 0$ para todo M_ϕ. Por otro lado, sean $M \in R$-Mod tal que $IM = 0$, $s \in S$, $m \in M$. A continuación vamos a definir una multiplicación por escalar en el grupo abeliano que hace que $M \in S$-Mod. Se define esta operación en M como sigue: $\diamond : S \times M \to M$ dada por $s \diamond m = rm$ donde $\phi(r) = s$. La operación $\diamond$ esta bien definida: supongamos que $\phi(r) = s = \phi(t)$ para $t \in R$, entonces $\phi(r-t) = 0$ y $r - t \in I$. Por lo que $(r-t)m = 0$ y por lo tanto $s \diamond m = rm = tm = t \diamond m$. Es fácil verificar que $M \in S$-Mod. Vamos a denotar como ${}_sM$ al S-módulo izquierdo que se obtiene con esta operación. Ahora bien, si $r \in R$ y $m \in M$ entonces $r \cdot m = \phi(r)s = r \diamond m$. Por lo que $\mathcal{F}_\phi({}_sM) = M$. □

Corolario 3.1.4. $\mathcal{F}_\phi$ es un funtor exacto

Prueba. Supongamos que $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es exacta en S-Mod. Como $\mathcal{F}_\phi(f) = f$ y $\mathcal{F}_\phi(g) = g$ entonces al aplicar el funtor $\mathcal{F}_\phi$ tenemos que: $0 \to M'_\phi \xrightarrow{\mathcal{F}_\phi(f)} M_\phi \xrightarrow{\mathcal{F}_\phi(g)} M''_\phi \to 0$ es exacta en R-Mod. □

Corolario 3.1.5. Sean ${}_sM$ y ${}_sM' \in S$-Mod y ${}_sN$ es un submódulo de ${}_sM$. Entonces se cumple lo siguiente:

(i) ${}_sM \subseteq_e {}_sM'$ si y solo si $M_\phi \subseteq_e M'_\phi$

(ii) $({}_sM/{}_sN)_\phi = M_\phi/N_\phi$

(iii) Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de S-módulos entonces $(\oplus_{\alpha\in A} M_\alpha)_\phi = \oplus_{\alpha\in A}(M_\alpha)_\phi$

Prueba. Es claro que si $x \in {}_sM$ y $s \in S$ entonces $sx = r \cdot x$ donde $\phi(r) = s$.
(*i*) Supongamos que ${}_sM \subseteq_e {}_sM'$. Sea $x \in M'_\phi$, existe $s \in S$ tal que $0 \neq sx \in {}_sM$. Si $r \in R$ es tal que $\phi(r) = s$, entonces $0 \neq r \cdot x = sx \in M_\phi$. Ahora bien, supongamos que $M_\phi \subseteq_e M'_\phi$. Sea $x \in {}_sM'$, existe $r \in R$ tal que $0 \neq r \cdot x \in M_\phi$. Si $s = \phi(r)$ entonces $0 \neq sx = r \cdot x \in {}_sM$.
(*ii*) Como $\mathcal{F}_\phi$ es exacto entonces al considerar la siguiente sucesión exacta: $0 \to {}_sN \overset{i}{\hookrightarrow} {}_sM \xrightarrow{\pi} {}_sM/{}_sN \to 0$, tenemos la siguiente sucesión exacta: $0 \to N_\phi \xrightarrow{i} M_\phi \xrightarrow{\pi} ({}_sM/{}_sN)_\phi \to 0$. Por lo tanto $({}_sM/{}_sN)_\phi = M_\phi/N_\phi$.
(*iii*) Es claro que $(\oplus_{\alpha\in A} M_\alpha)_\phi$ y $\oplus_{\alpha\in A}(M_\alpha)_\phi$ son los mismos como grupos abelianos. Para ver que son iguales como R-módulos, basta ver que la multiplicación por escalar es la misma. Sea $r \in R$ y $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \in (\oplus_{\alpha\in A} M_\alpha)_\phi$, entonces $r \cdot \{x_\alpha\}_{\alpha\in A} =$

$\phi(r)\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} = \{\phi(r)x_\alpha\}_{\alpha\in A} = \{r \cdot x_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Ahora bien al considerar a $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \in \oplus_{\alpha\in A}(M_\alpha)_\phi$, la multiplicación por escalar esta dada por : $r\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} = \{r \cdot x_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Por lo que $(\oplus_{\alpha\in A}M_\alpha)_\phi = \oplus_{\alpha\in A}(M_\alpha)_\phi$. $\square$

Si ${}_sM \in S$-Mod entonces $Sub_s({}_sM)$ denota la retícula de S-submódulos izquierdos de ${}_sM$ y $Sub_R(M_\phi)$ denota la retícula de R-módulos izquierdos de M_ϕ.

Corolario 3.1.6. Sean ${}_sM$ y ${}_sM' \in S$-Mod y ${}_sN$ es un submódulo de ${}_sM$. Entonces se cumple lo siguiente: $Sub_s({}_sM) = Sub_R(M_\phi)$

Prueba. Como $sx = r \cdot x$ entonces: $sx \in {}_sN$ si y solo si $r \cdot x \in N_\phi$. Es decir, la multiplicación es cerrada en ${}_sN$ si y solo si es cerrada en N_ϕ. $\square$

Ahora bien, la subretícula de submódulos esenciales de M se denotará como $Sub^e_R(M)$ y la clase de los complementos de M se denotará como $Com_R(M)$. También denotaremos como $Coc_R(M)$ a los R-módulos izquierdos cocientes de M. Como consecuencia de los resultados anteriores tenemos que el funtor $\mathcal{F}_\phi$ manda submódulos en submódulos, submódulos esenciales en submódulos esenciales, complementos en complementos y cocientes en cocientes. Es decir,

(i) $Sub^e_S({}_sM) = Sub^e_S(M_\phi)$

(ii) $Coc_S({}_sM) = Coc_R(M_\phi)$

(iii) $Com_S({}_sM) = Com_R(M_\phi)$

Corolario 3.1.7. Sean ${}_sM \in S$-Mod. Entonces se cumple lo siguiente:

(i) $M_\phi \subseteq_e (E\,{}_sM)_\phi \subseteq EM_\phi$

(ii) $E({}_sM) = \{x \in EM_\phi \text{ tal que } Ix = 0\}$

(iii) $E({}_sM)_\phi$ es un módulo quasi-inyectivo en R-Mod

Prueba. (i) Como ${}_sM \subseteq_e E\,{}_sM$ entonces $M_\phi \subseteq_e (E\,{}_sM)_\phi$.
(ii) Sea $T = \{x \in EM_\phi$ tal que $Ix = 0\}$. Como I es un ideal bilateral entonces T es un R-submódulo izquierdo de EM_ϕ. Ahora bien, T también es un S-módulo izquierdo pues $IT = 0$. Además ${}_sM \subseteq T$. Entonces $M_\phi \subseteq_e T_\phi \subseteq_e EM_\phi$ en R-Mod. Así que ${}_sM \subseteq_e T$ en S-Mod. A continuación probaremos que T es inyectivo en S-Mod. Sea J un ideal izquierdo de S y $f : J \to T$ un morfismo de S-módulos. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J_\phi \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & S_\phi \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ 0 \arrow[r] & T_\phi \arrow[r, "i"] & EM_\phi \end{tikzcd}$$

En R-Mod existe $\overline{f} : S_\phi \to EM_\phi$ tal que $\overline{f}\,|_J = if$. Ahora bien, sean $r \in I$ y $s \in S$ entonces $r \cdot \overline{f}(s) = \phi(r)\overline{f}(s) = 0$, es decir $\overline{f}(s) \in T$. Por lo que $\overline{f}(S) \subseteq T$. Así que $\overline{f} \in Hom_R(S_\phi, T_\phi) = Hom_S(S, T)$. Es decir, en S-Mod existe $\overline{f} : S \to T$ tal que $f = \overline{f}i$. Por lo tanto T es inyectivo.
(iii) Por el primer inciso, la cápsula inyectiva de $(E\,{}_sM)_\phi$ es EM_ϕ. Además, por el inciso anterior, $(E\,{}_sM)_\phi = \{x \in E(M_\phi) \mid Ix = 0\}$. Sean $g \in End_R(EM_\phi)$ y $x \in (E\,{}_sM)_\phi$. Si $r \in I$ entonces $r \cdot g(x) = \phi(r)g(x) = 0$. Por lo que $g(x) \in (E\,{}_sM)_\phi$. Así que $g((E\,{}_sM)_\phi) \subseteq (E\,{}_sM)_\phi$. □

Corolario 3.1.8. Sean ${}_sM \in S$-Mod. Entonces se cumple lo siguiente:

(i) $Z\,{}_sM \subseteq ZM_\phi$

(ii) $Z_2\,{}_sM \subseteq Z_2N_\phi$

Prueba. (i) Sea $x \in Z\,{}_sM$ y $r \in R$. Como $An_S(x) \subseteq_e S$ entonces para $s = \phi(r)$ existe $a \in S$ tal que $0 \neq as$ y $asx = 0$. Para $a \in S$ existe $t \in R$ tal que $\phi(t) = a$. Por lo que $tr \cdot x = \phi(tr)x = asx = 0$ y además $0 \neq tr$. Así que $An_R \subseteq_e R$. Por lo tanto $x \in ZM_\phi$
(ii) Sea $x \in Z_2\,{}_sM$ y $r \in R$. Como $(Z\,{}_sM : x) \subseteq_e S$ entonces para $s = \phi(r)$ existe

$a \in S$ tal que $0 \neq as$ y $asx \in Z\,{}_{S}M$. Para $a \in S$ existe $t \in R$ tal que $\phi(t) = a$. Por lo que $tr \cdot x = \phi(tr)x = asx \in Z\,{}_{S}M$. Es decir, $0 \neq tr \in ZM_{\phi}$. Así que $(ZM_{\phi} : x) \subseteq_e R$. Por lo tanto $x \in Z_2M_{\phi}$. $\square$

Corolario 3.1.9. Sean ${}_{S}M \in S$-Mod. Supongamos que I es un complemento de R. Entonces se cumple lo siguiente:

(i) $Z\,{}_{S}M = ZM_{\phi}$

(ii) $Z_2\,{}_{S}M = Z_2M_{\phi}$

(iii) $Z(S) = Z(S_{\phi})$ y $Z_2(S) = Z_2(S_{\phi})$

Prueba. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\phi : R \rightarrow R/I$ es la proyección natural. Primero, observemos que si $x \in M_{\phi}$ entonces $An_{R/I}(x) = An_R(x)/I$. Como $r \cdot x = (r + I)x$ entonces $r \in An_R(x)$ si y solo si $r + I \in An_{R/I}(x)$. Ahora bien, si $x \in Z(M_{\phi})$ entonces $An_R(x) \subseteq_e R$ en R-Mod y por lo tanto se tiene que: en R/I-Mod, $An_R(x)/I \subseteq_e R/I$ pues I es esencialmente cerrado en R. Así que $An_{R/I}(x) \subseteq_e R/I$. Por lo que $x \in Z\,{}_{S}M$. $\square$

3.2 Cambio de anillo: clases naturales

Sea $\mathcal{A}$ la categoría cuyos objetos son los anillos con 1 y morfismos son homomorfismos de anillos con las siguientes características: (a) preserva la identidad y (b) son suprayectivos. Vamos a denotar como $\mathcal{A}^*$ a la subcategoría de $\mathcal{A}$ que tiene los mismos objetos pero cuyos morfismo sean: (c) $\varphi \in \mathcal{A}$ tal que $Nuc(\varphi)$ es esencialmente cerrado.

Ahora bien, sea $\mathcal{B}$ la categoría cuyos objetos son las retículas booleanas completas con 0 y 1. Los morfismos son los morfismos de retículas completas, es decir, funciones que preservan infimos y supremos arbitrarios; con las siguientes características: (a) preservan el elemento menor, (b) son inyectivas y (c) tienen imagen convexa.

Hay una asignación de objetos de la categoría $\mathcal{A}$ a la categoría $\mathcal{B}$. Esta asignación de objetos está dada mediante: a cada anillo $R \in \mathcal{A}$ se le asocia la retícula booleana completa R-Nat $\in \mathcal{B}$. A continuación se estudiará la asignación de morfismos. Sean $\phi : R \to S$ un morfismo de $\mathcal{A}$ y ${}_s\Delta$ una familia de S-módulos izquierdos, se denotará como Δ_ϕ a la siguiente clase de R-módulos izquierdos: $\Delta_\phi = \{M_\phi \in R\text{-Mod} \mid {}_sM \in {}_s\Delta\}$. Ahora bien, supongamos que ${}_s\Delta \in S$-Nat, por lo que a cada $\phi \in \mathcal{A}$ se le asocia la siguiente función $\phi^* : S\text{-Nat} \to R\text{-Nat}$ dada por: $\phi^*({}_s\Delta) = \langle \Delta_\phi \rangle$. Los siguientes resultados mostrarán que $\phi^* \in \mathcal{B}$.

Lema 3.2.1. *Sea $\phi : R \to S$ un morfismo de $\mathcal{A}$ con $I = Nuc\ \phi$. Δ_ϕ es una clase de R-módulos izquierdos cerrada bajo: (a) submódulos, (b) copias isomorfas y (c) sumas directas.*

Prueba. (a) Sea $M_\phi \in \Delta_\phi$ y N_ϕ submódulo de M_ϕ. Como ${}_sM \in {}_s\Delta$ entonces ${}_sN \in {}_s\Delta$. Por lo tanto $N_\phi \in \Delta_\phi$. (b) Sea $M_\phi \in \Delta_\phi$ y $M' \in R$-Mod tal que $M \overset{f}{\cong} M'$. Supongamos que $s \in I$, $y \in M'$ y $x \in M_\phi$ tal que $y = f(x)$. Como $sy = sf(x) = f(sx) = 0$ entonces $IM' = 0$ y por lo tanto M' esta en la imagen de $\mathcal{F}_\phi$, sea ${}_sM' \in S$-Mod tal que $\mathcal{F}_\phi({}_sM') = M'$. Además ${}_sM' \cong {}_sM \in {}_s\Delta$, por lo que $M' \in \Delta_\phi$. (c) Sea $\{M^\alpha_\phi\}_{\alpha\in A}$ una subfamilia de Δ_ϕ. Como $\oplus_{\alpha\in A} M^\alpha_\phi = (\oplus_{\alpha\in A}\, {}_sM^\alpha)_\phi$ y $\oplus_{\alpha\in A}\, {}_sM^\alpha \in {}_s\Delta$ entonces $\oplus_{\alpha\in A} M^\alpha_\phi \in \Delta_\phi$. □

Lema 3.2.2. *Sea $\phi : R \to S$ un morfismo de $\mathcal{A}$ con $I = Nuc\ \phi$. Para $M \in R$-Mod, se define $An_M(I) = \{m \in M \mid Im = 0\}$. Entonces:*

(i) $\langle \Delta_\phi \rangle = \{M \in R\text{-}Mod \mid \textit{existe } N_\phi \in \Delta_\phi \textit{ tal que } N_\phi \subseteq_e M\}$

(ii) $\langle \Delta_\phi \rangle = \{M \in R\text{-}Mod \mid An_M(I) \subseteq_e M \textit{ y } An_M(I) \in {}_s\Delta\}$

Prueba. (i) Como Δ_ϕ es cerrada bajo submódulos, copias isomorfas y sumas directas entonces al reescribir el teorema 1.1.10 se tiene la igualdad. (ii) Como I es un ideal bilateral entonces $An_M(I)$ es un R-submódulo de M. Además, por la forma en que se construye, $An_M(I)$ es un S-módulo. $(\subseteq)$ Al reescribir el inciso (i) del teorema 1.1.10, tenemos la siguiente igualdad: $\langle \Delta_\phi \rangle = \{M \mid$

existe $N \in {}_s\Delta$ y $M \hookrightarrow EN_\phi\}$. Sea $M \in \langle\Delta_\phi\rangle$ y $N \in {}_s\Delta$ como arriba. Como $M \cap N_\phi$ es un submódulo de N_ϕ entonces $M \cap N$ es un submódulo de N y por lo tanto $M \cap N \in {}_s\Delta$. Además, $M \cap N_\phi \subseteq An_M(I)$. En R-Mod, $M \cap N_\phi \subseteq_e M$ y por lo tanto $M \cap N_\phi \subseteq_e An_M(I) \subseteq_e M$. Así que en S-Mod, $M \cap N \subseteq_e An_M(I)$ y entonces $An_M(I) \in {}_s\Delta$. Por lo tanto M esta en la clase de la derecha. ($\supseteq$) Sea $M \in R$-Mod tal que $An_M(I) \subseteq_e M$ y $An_M(I) \in {}_s\Delta$. Entonces $An_M(I) \in \Delta_\phi$, por lo que $M \in \langle\Delta_\phi\rangle$. □

Corolario 3.2.3. Sea ${}_s\Upsilon$ una familia de S-módulos izquierdos. Supongamos que ${}_s\Delta = \langle {}_s\Upsilon\rangle$. Entonces $\langle\Delta_\phi\rangle = \langle\Upsilon_\phi\rangle$. En particular si ${}_s\Upsilon = \{{}_sM\}$ entonces $\langle\Delta_\phi\rangle = \langle M_\phi\rangle$.

Prueba. Como $\Upsilon_\phi \subseteq \Delta_\phi$ entonces $\langle\Upsilon_\phi\rangle \leq \langle\Delta_\phi\rangle$. Ahora bien, supongamos que $L \in \langle\Delta_\phi\rangle$. Por el lema anterior, existe $N_\phi \in \Delta_\phi$ tal que $N_\phi \subseteq_e L$. Como ${}_sN \in {}_s\Delta$ entonces existe $\{{}_sH_j\}_{j\in J}$ una familia de submódulos de ${}_sN$ que pertenecen a la familia ${}_s\Upsilon$ tal que $\oplus_j {}_sH_j \subseteq_e {}_sN$. Así que $\oplus_j({}_sH_j)_\phi = (\oplus_j {}_sH_j)_\phi \subseteq_e N_\phi$. Por lo que existe $\{({}_sH_j)_\phi\}_{j\in J}$ una familia de submódulos de L tal que $\oplus_j({}_sH_j)_\phi \subseteq_e L$ pues $N_\phi \subseteq_e L$ y por lo tanto $L \in \langle\Upsilon_p\rangle$ □

Proposición 3.2.4. *Sean ${}_s\Delta$ y ${}_s\Delta' \in S$-Nat. Para $\phi \in \mathcal{A}$ se define la siguiente función: $\phi^* : S\text{-Nat} \to R\text{-Nat}$ mediante $\phi^*({}_s\Delta) = \langle\Delta_\phi\rangle$. Entonces: $\phi^*({}_s\Delta) \leq \phi^*({}_s\Delta')$ si y solo si ${}_s\Delta \leq {}_s\Delta'$.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Sean ${}_s\Delta$ y ${}_s\Delta'$ clases naturales de S-Nat. Supongamos que ${}_s\Delta \leq {}_s\Delta'$ entonces $\Delta_\phi \leq \Delta'_\phi$ y por lo tanto $\phi^*({}_s\Delta) \leq \phi^*({}_s\Delta')$.
($\Leftarrow$) Por otro lado, supongamos que $\phi^*({}_s\Delta) \leq \phi^*({}_s\Delta')$ y ${}_sM \in {}_s\Delta$. Como $M_\phi \in \phi^*({}_s\Delta') = \langle\Delta'_\phi\rangle$ entonces, por el lema anterior, existe $N_\phi \in \Delta'_\phi$ tal que $N_\phi \subseteq_e M_\phi$. En S-Mod, tenemos que ${}_sN \in {}_s\Delta'$ y que ${}_sN \subseteq_e {}_sM$. Por lo tanto $M \in {}_s\Delta'$ y por lo tanto ${}_s\Delta \leq {}_s\Delta'$. □

Corolario 3.2.5. Para $\phi \in \mathcal{A}$ se define $\phi^* : S$-Nat $\to R$-Nat mediante $\phi^*({}_s\Delta) = \langle\Delta_\phi\rangle$. Entonces:

(i) $\phi^*(0) = 0$

(ii) ϕ^* es inyectiva

(iii) La imagen de ϕ^* es convexa

Prueba. (*i*) Es claro.
(*ii*) Supongamos que $\phi^*({}_s\Delta) = \phi^*({}_s\Delta')$. Por el inciso anterior ${}_s\Delta \leq {}_s\Delta'$ y ${}_s\Delta' \leq {}_s\Delta$. Así que ${}_s\Delta = {}_s\Delta'$ y por lo tanto ϕ^* es inyectiva.
(*iii*) Sean ${}_s\Delta$ una clase natural de S-Nat y Δ una clase natural de R-Nat tal que $\Delta \leq \phi^*({}_s\Delta)$. Se define la clase de S-módulos izquierdos ${}_s\Delta'$ como sigue: ${}_s\Delta' = \{{}_sM \in {}_s\Delta \mid M_\phi \in \Delta\}$. A continuación se probará que ${}_s\Delta'$ es una clase natural de S-Nat. Para los siguientes incisos, supongamos ${}_sM \in {}_s\Delta'$. (*a*) Sea ${}_sN$ un submódulo de ${}_sM$. Como ${}_sM \in {}_s\Delta$ entonces ${}_sN \in {}_s\Delta$. Además, como $M_\phi \in \Delta$ entonces $N_\phi \in \Delta$. (*b*) Sea ${}_sM'$ una copia isomorfa de ${}_sM$. Como ${}_sM \in {}_s\Delta$ entonces ${}_sM' \in {}_s\Delta$. Además, como $M_\phi \in \Delta$ entonces $M'_\phi \in \Delta$. (*c*) Sea $\{{}_sM_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una subfamilia de ${}_s\Delta'$. Es claro que $\oplus_{\alpha\in A}\, {}_sM_\alpha \in {}_s\Delta$. Como $(\oplus_{\alpha\in A}\, {}_sM_\alpha)_\phi = \oplus_{\alpha\in A}({}_sM)_\phi$ entonces $(\oplus_{\alpha\in A}\, {}_sM_\alpha)_\phi \in \Delta$. (*d*) Sea ${}_sM'$ una extensión esencial de ${}_sM$. Como ${}_sM \in {}_s\Delta$ entonces ${}_sM' \in {}_s\Delta$. Además, como $M_\phi \in \Delta$ entonces $M'_\phi \in \Delta$. Por lo tanto ${}_s\Delta'$ es una clase natural de S-Nat. Ahora bien, vamos a probar que $\phi^*({}_s\Delta') = \Delta$. Por el lema anterior, se tiene que: $\phi^*({}_s\Delta') = \{M \in R\text{-Mod} \mid \text{existe } N_\phi \in ({}_s\Delta')_\phi \text{ y } N_\phi \subseteq_e M\}$ $= \{M \in R\text{-Mod} \mid \text{existe } N_\phi \in \Delta \text{ y } N_\phi \subseteq_e M\}$. Como Δ es cerrada bajo extensiones esenciales entonces $\phi^*\,{}_s\Delta' \leq \Delta$. Por otro lado, sea $M \in \Delta$. Como $M \in \phi^*\,{}_s\Delta$ entonces existe $N_\phi \in ({}_s\Delta)_\phi$ tal que $N_\phi \subseteq_e M$, por lo que $N_\phi \in \Delta$. Es claro que ${}_sN \in {}_s\Delta$. Por lo que ${}_sN \in {}_s\Delta'$ y por lo tanto $N_\phi \in ({}_s\Delta')_\phi$. Así que $M \in \phi^*({}_s\Delta')$ y entonces $\Delta \leq \phi^*({}_s\Delta')$. □

Corolario 3.2.6. Para $\phi \in \mathcal{A}$ se define: $\phi^* : S\text{-Nat} \to R\text{-Nat}$ mediante $\phi^*({}_s\Delta) = \langle\Delta_\phi\rangle$. Entonces ϕ^* es un morfismo de retículas completas, es decir, ϕ^* preserva infímos y supremos

Prueba. Sea $\{{}_s\Delta_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de clases naturales de S-Nat. (i) Como ϕ^* preserva el orden se tiene que: para cada $\alpha \in A$, $\phi^*(\bigwedge_{\alpha\in A} {}_s\Delta_\alpha) \leq \phi^*({}_s\Delta_\alpha)$ y por lo tanto $\phi^*(\bigwedge_{\alpha\in A} {}_s\Delta_\alpha) \leq \bigwedge_{\alpha\in A} \phi^*({}_s\Delta_\alpha)$. Ahora bien, como la imagen de la función ϕ^* es convexa y $\phi^*(\bigwedge_{\alpha\in A} {}_s\Delta_\alpha) \leq \bigwedge_{\alpha\in A} \phi^*({}_s\Delta_\alpha) \leq \phi^*({}_s\Delta_\alpha)$ entonces existe ${}_s\Delta \in S$-Nat tal que $\phi^*({}_s\Delta) = \bigwedge_{\alpha\in A} \phi^*({}_s\Delta_\alpha)$. Además ${}_s\Delta$ es única pues ϕ^* es inyectiva. Por la proposición 3.2.4 se tiene que, $\bigwedge_{\alpha\in A} {}_s\Delta_\alpha \leq {}_s\Delta \leq {}_s\Delta_\alpha$ para toda α. Así que ${}_s\Delta = \bigwedge_{\alpha\in A} {}_s\Delta_\alpha$. Por lo tanto $\phi^*(\bigwedge_{\alpha\in A} {}_s\Delta_\alpha) = \bigwedge_{\alpha\in A} \phi^*({}_s\Delta_\alpha)$. Análogamente ϕ^* preserva supremos. Por lo que ϕ^* es un morfimos de retículas completas. □

Como consecuencia de los corolarios anteriores se tiene que si $\phi \in \mathcal{A}$ entonces $\phi^* \in \mathcal{B}$.

Lema 3.2.7. *Sea Z_2 el radical de Goldie. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) Si $\phi \in \mathcal{A}$ y ${}_s\Delta \in S$-Nat$_\mathcal{T}$ entonces $\phi^*({}_s\Delta) \in R$-Nat$_\mathcal{T}$

(ii) Si $\phi \in \mathcal{A}^*$ y $\Delta \in S$-Nat$_\mathcal{F}$ entonces $\phi^*({}_s\Delta) \in R$-Nat$_\mathcal{F}$

(iii) En particular, $\phi^*({}_s\mathbb{T}_{Z_2}) \leq {}_R\mathbb{T}_{Z_2}$ y $\phi^*({}_s\mathbb{F}_{Z_2}) \leq {}_R\mathbb{F}_{Z_2}$

Prueba. (i) Sean ${}_s\Delta \in S$-Nat$_\mathcal{T}$ y $M \in \phi^*({}_s\Delta)$. Por el lema ϕ^* se tiene que existe ${}_sN \in {}_s\Delta$ tal que $N_\phi \subseteq_e M$. Observemos que como conjuntos, ${}_sN = Z_2({}_sN) \subseteq Z_2(N_\phi)$. Por lo que $Z_2(N_\phi) = N_\phi$. Como $N_\phi \in \mathbb{T}_{Z_2}$ entonces $M \in Tor_{Z_2}$. Así que $\phi^*({}_s\Delta) \in R$-Nat$_\mathcal{T}$. (ii) Sean ${}_s\Delta \in S$-Nat$_\mathcal{F}$ y $M \in \phi^*({}_s\Delta)$. Por el lema ϕ^* se tiene que existe ${}_sN \in {}_s\Delta$ tal que $N_\phi \subseteq_e M$. Observemos que como conjuntos, $0 = Z_2({}_sN) = Z_2(N_\phi)$. Como $N_\phi \in \mathbb{F}_{Z_2}$ entonces $M \in \mathbb{F}_{Z_2}$. Así que $\phi^*({}_s\Delta) \in R$-Nat$_\mathcal{F}$. □

Como consecuencia de los resultados anteriores se tiene que:

Teorema 3.2.8. *La asignación de la categoría $\mathcal{A}$ a la categoría $\mathcal{B}$ dada por: a cada anillo $R \in \mathcal{A}$ se le asocia la retícula booleana completa R-Nat $\in \mathcal{B}$ y a cada morfimo*

$\phi \in \mathcal{A}$ se le asocia el morfismo $\phi^* \in \mathcal{B}$, es un funtor contravariante. Además $\phi^*(S\text{-}Nat_{\mathcal{T}}) \subseteq R\text{-}Nat_{\mathcal{T}}$. Si $\phi \in \mathcal{A}^*$ entonces se tiene, además, que $\phi^*(S\text{-}Nat_{\mathcal{F}}) \subseteq R\text{-}Nat_{\mathcal{F}}$.

Al funtor del teorema anterior, se le denotará como Σ. Así que para cada anillo R de $\mathcal{A}$, $\Sigma(R)$ es la retícula booleana R-Nat y para cada morfismo de anillos ϕ de $\mathcal{A}$, $\Sigma(\phi) = \phi^*$. Además observemos que la asignación dada por: a cada anillo R de $\mathcal{A}$ se le asocia R-Nat$_{\mathcal{T}}$ es un subfuntor de Σ. A este subfuntor de Σ, le denotaremos $\Sigma_{\mathcal{T}}$. La asignación dada por: a cada anillo R de $\mathcal{A}^*$ se le asocia R-Nat$_{\mathcal{F}}$ es un subfuntor de Σ. A este subfuntor se le denotará como $\Sigma_{\mathcal{F}}$.

3.3 Clases naturales universales

Recordemos que para cada anillo R de $\mathcal{A}$, $\Sigma(R)$ es la retícula booleana R-Nat y para cada morfismo de anillos ϕ de $\mathcal{A}$, $\Sigma(\phi) = \phi^*$.

Proposición 3.3.1. *Sea $\phi : R \to S$ un morfismo de $\mathcal{A}$ y sea $\Delta(S) \in \Sigma(S)$ y $\Delta(R) \in \Sigma(R)$ tal que $\phi^*\Delta(S) \subseteq \Delta(R)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Para todo ${}_sM \in c\,{}_s\Delta(S)$ se tiene que $M_\phi \notin \Delta(R)$

(ii) Para todo ${}_sM \in S$-Mod, y para toda descomposición ${}_sN \oplus {}_sK \subseteq_e {}_sM$ con ${}_sN \in \Delta(S)$ y ${}_sK \in c\Delta(S)$ entonces $N_\phi \oplus K_\phi \subseteq_e M_\phi$ con $N_\phi \in \Delta(R)$ y $K_\phi \in c\Delta(R)$.

(iii) $\phi^*(c\Delta(S)) \subseteq c\Delta(R)$.

Prueba. *(i)* $\Rightarrow$ *(iii)* Supongamos que $\phi^*(c\Delta(S)) \not\subseteq c\Delta(R)$. Entonces existe ${}_sM \in c\Delta(S)$ tal que $M_\phi \notin c\Delta(R)$. Por definición de clase complementaria, existe N_ϕ, un submódulo de M_ϕ, tal que $N_\phi \in \Delta(R)$. Así que existe ${}_sN \in \Delta(S)$ tal que $N_\phi \in \Delta(R)$. Lo cual contradice la hipótesis. *(iii)* $\Leftrightarrow$ *(ii)*. Es claro. *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* Sea ${}_sM \in c\Delta(S)$. Por hipótesis, $M_\phi \in c\Delta(R)$. Por lo que $M_\phi \notin \Delta(R)$. $\square$

Definición 3.3.2. Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$, una asignación Δ, que a cada anillo $R \in \mathcal{C}$ le asocia una clase natural $\Delta(R) \in \Sigma(R)$ se llama *clase natural $\mathcal{C}$-universal* si para todo morfismo $\phi : R \to S$ de $\mathcal{C}$ se cumplen las siguientes condiciones: (a) Si ${}_sM \in \Delta(S)$ entonces $M_\phi \in \Delta(R)$ (b) Si ${}_sN \in c\Delta(S)$ entonces $N_\phi \in c\Delta(R)$. Si $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ entonces Δ se llama *clase natural universal.*

Las condiciones (a) y (b) de la definición anterior son equivalentes a las siguientes condiciones para todo morfismo $\phi : R \to S$ de anilos de $\mathcal{C}$: (a') $\phi^*\Delta(S) \leq \Delta(R)$ y (b') $\phi^*c\Delta(S) \leq c\Delta(R)$.

Ejemplo 3.3.3. Sea Z_2 el radical de Goldie. A cada anillo $S \in \mathcal{A}^*$, se le asocia la clase natural $\mathbb{T}_{Z_2}(S)$, que consiste de los S-módulos de torsión de Goldie. Recordemos que $c\mathbb{T}_{Z_2}(S) = \mathbb{F}_{Z_2}(S)$. Si $\phi : R \to S$ es un morfismo de $\mathcal{A}^*$ entonces por el lema de 3.2.7, es claro que: $\phi^*(\mathbb{T}_{Z_2}(S)) \leq \mathbb{T}_{Z_2}(R)$ y $\phi^*(\mathbb{F}_{Z_2}(S)) \leq \mathbb{F}_{Z_2}(R)$. Así que $\mathbb{T}_{Z_2}$ es una clase natural $\mathcal{A}^*$-universal. Además $\mathbb{F}_{Z_2}$ también lo es.

Ahora bien, veamos como se pueden construir otras clases naturales $\mathcal{C}$-universales. Primero, dada Δ una asignación que manda anillos a clases naturales, se define la asignación $c\Delta$, a cada anillo le asocia el complemento de $\Delta(R)$ en $\Sigma(R)$. Por otro lado, si consideramos al radical de Goldie y la teoría de torsión $(Z_2, \mathbb{T}_{Z_2}, \mathbb{F}_{Z_2})$ se pueden definir las siguientes asignaciones:

(i) Δ_t, a cada anillo le asocia la clase $t(\Delta(R))$.

(ii) Δ_f, a cada anillo le asocia la clase $f(\Delta(R))$.

Además, si Δ_1 y Δ_2 son dos asiganciones como arriba se pueden definir otras asignaciones:

(i) $\Delta_1 \wedge \Delta_2$, a cada anillo le asocia la clase $\Delta_1(R) \wedge \Delta_2(R)$

(ii) $\Delta_1 \vee \Delta_2$, a cada anillo le asocia la clase $\Delta_1(R) \vee \Delta_2(R)$

De la definición de clase natural $\mathcal{C}$-universal, es claro que:

Proposición 3.3.4. *Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$. Si Δ es una clase natural $\mathcal{C}$-universal entonces $c\Delta$ también lo es.*

Proposición 3.3.5. *Si Δ es una clase natural universal entonces Δ_t y Δ_f con clases naturales $\mathcal{A}^*$-universales.*

Prueba. Sea $\phi : R \to S$ un morfismo de $\mathcal{A}$. (i) Si $_sM \in \Delta_t(S)$ entonces $Z_2(_sM) = {_sM}$. Como $Z_2(_sM) = Z_2(M_\phi)$ entonces $Z_2(M_\phi) = M_\phi$. Por lo que $M_\phi \in \Delta_t(R)$. Ahora bien, sea $_sN \in c\Delta_t(S)$. Supóngamos existe $_sN$, submódulo de $_sM$, tal que $N_\phi \in \Delta_t(R)$, es decir, $Z_2(N_\phi) = N_\phi$. Como $Z_2(_sN) = Z_2(N_\phi)$ entonces $_sN \in \Delta_t(S)$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $N_\phi \notin \Delta_t(R)$. Es decir, $M_\phi \in c\Delta_t$. (ii) Si $_sM \in \Delta_f(S)$ entonces $Z_2(_sM) = 0$. Como $Z_2(_sM) = Z_2(M_\phi)$ entonces $Z_2(M_\phi) = 0$. Por lo que $M_\phi \in \Delta_f(R)$. Ahora bien, sea $_sN \in c\Delta_f(S)$. Supóngamos existe $_sN$, submódulo de $_sM$, tal que $N_\phi \in \Delta_f(R)$, es decir, $Z_2(N_\phi) = 0$. Como $Z_2(_sN) = Z_2(N_\phi)$ entonces $_sN \in \Delta_f(S)$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $N_\phi \notin \Delta_f(R)$. Es decir, $M_\phi \in c\Delta_f$. □

Proposición 3.3.6. *Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$. Entonces:*

(i) Las clases naturales $\mathcal{C}$-universales son cerradas bajo supremos e infímos arbitrarios.

(ii) En particular, si Δ_1 y Δ_2 son clases naturales $\mathcal{C}$-universales entonces: $\Delta_1 \wedge \Delta_2$ y $\Delta_1 \vee \Delta_2$ son clases naturales $\mathcal{C}$-universales.

(iii) Se define $\Delta_1 + \Delta_2$ como $\Delta_1 + \Delta_2 = [\Delta_1 \vee \Delta_2] \wedge c[\Delta_1 \vee \Delta_2]$. Entonces $\Delta_1 + \Delta_2$ es una clase natural $\mathcal{C}$-universal.

Prueba. (i) Sea $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de clases naturales $\mathcal{C}$-universales. Como ϕ^* es un morfismo de retículas completas, entonces, ϕ^* conmuta con infimos y supremos. Así que $\phi^*[\bigvee_\alpha \Delta_\alpha(S)] = \bigvee_\alpha \phi^*[\Delta_\alpha(S)] \leq \bigvee_\alpha \Delta_\alpha(R) = \phi^*[\bigvee_\alpha {_s\Delta_\alpha}(R)]$. Para la clase complementaria, vamos a utilizar las leyes de DeMorgan. $\phi^*\{c[\bigvee_\alpha \Delta_\alpha(S)]\} = \phi^*\{\bigwedge_\alpha c\Delta_\alpha(R)\} = \bigwedge_\alpha\{\phi^*[c\Delta_\alpha(S)]\} \leq \bigwedge_\alpha[c\Delta_\alpha(R)] = c[\bigvee_\alpha \Delta_\alpha(R)]$. Así que $\phi^*\{c[\bigvee_\alpha \Delta_\alpha(S)]\} \leq$

$c[\bigvee_\alpha \Delta_\alpha(R)]$. De manera ánaloga se prueba para los infimos. Los incisos (ii) y (iii) son consecuencia del (i) y de la proposición anterior. □

A continuación se darán más ejemplos de clases naturales universales.

Se denotará como sCu, $s\mathcal{A}\mathrm{b}$ y $s\mathcal{DF}$ a la clase de los S-módulos cuadrados, abelianos y directamente finitos, respectivamente. Dado un anillo S de $\mathcal{A}$, consideremos las siguientes clases: $\mathcal{LDF}(S)$, la clase natural que consiste de los S-módulos localmente directamente finitos, $I(S)$, la clase natural que consiste de los S-módulos de tipo I, $II(S)$, la clase natural que consiste de los S-módulos de tipo II, $III(S)$, la clase natural que consiste de los S-módulos de tipo III y $ccCu(S)$, la clase natural que consiste de los S-módulos sCu-densos. Recordemos que $I(S)$ y los módulos sCu-densos son complementos en $\Sigma(S)$ y que $\mathcal{LDF}(S)$ y $III(S)$ también son complementos en $\Sigma(S)$. Además, las clases naturales $\mathcal{LDF}(S)$ y $I(S)$ son generadas por los S-módulos directamente finitos y abelianos respectivamente. También la clase natural $III(S)$ consiste de los módulos esencialmente $sCu_{\mathcal{I}}$-densos. Además $II(S) = \mathcal{LDF}(S) \wedge ccCu(S)$. Se denotará como I, II, III a las asignaciones que se describieron.

Lema 3.3.7. *Sea $\phi : R \to S$ un morfismo de $\mathcal{C}$. Entonces:*

(i) ${}_sM$ es un módulo cuadrado (idempotente) si y solo si M_ϕ lo es

(ii) ${}_sM$ es un módulo abeliano si y solo si M_ϕ lo es

(iii) ${}_sM$ es un módulo directamente finito si y solo si M_ϕ lo es

Prueba. (i) Si ${}_sM$ es un módulo cuadrado existen ${}_sP$ y ${}_sQ$ dos submódulos de ${}_sM$ tales que ${}_sP \cong {}_sQ$ y ${}_sM = {}_sP \oplus {}_sQ$. Al cambiar el anillo tenemos que: $M_\phi = ({}_sP)_\phi \oplus ({}_sQ)_\phi$ y que $({}_sP)_\phi \cong ({}_sQ)_\phi$. Por lo que M_ϕ es cuadrado. Análogamente si M_ϕ es cuadrado entonces ${}_sM$ lo es. (ii) Supongamos que ${}_sM$ es abeliano y sea N_ϕ un submódulo de M_ϕ. Si N_ϕ es cuadrado entonces ${}_sN$ tambien lo es. Por lo que ${}_sN = 0$ y por lo tanto N_ϕ también. Así que M_ϕ es abeliano. Con el mismo argumento si M_ϕ es abeliano entonces ${}_sM$ también lo es. (*iii*) Sea ${}_sM$ un módulo directamente finito. Supongamos que EM_ϕ contiene un sumando directo cuadrado e idempotente, distinto de cero, llamemosle N_ϕ. Existen H_ϕ y K_ϕ submódulos de N_ϕ tales que $H_\phi \oplus K_\phi = N_\phi$ y $H_\phi \cong K_\phi \cong N_\phi$. Ahora bien, como $M_\phi \subseteq_e (E\,{}_sM)_\phi \subseteq_e EM_\phi$ entonces por el lema 2.2.2 existe un submódulo distinto de cero, que es cuadrado idempotente en $(E\,{}_sM)_\phi$ y por lo tanto existe un sumando directo de $E\,{}_sM$, que es cuadrado idempotente. Lo cual es una contradicción. Por lo que M_ϕ es directamente finito. Análogamente si M_ϕ es directamente finito entonces ${}_sM$ lo es. $\square$

Proposición 3.3.8. *Las asignaciones I, II y III son clases naturales universales.*

Prueba. Sea $\phi : R \to S$ un morfismo de $\mathcal{A}$. Por el corolario del lema 3.2.2, se tiene que $\phi^*(I(S)) = \phi^*(\langle {}_s\mathcal{A}\mathrm{b}\rangle) = \langle \mathcal{A}\mathrm{b}_\phi\rangle \leq \langle {}_R\mathcal{A}\mathrm{b}\rangle = I(R)$ y $\phi^*(\mathcal{LDF}(S)) = \phi^*(\langle {}_s\mathcal{DF}\rangle) = \langle \mathcal{DF}_\phi\rangle \leq \langle {}_R\mathcal{DF}\rangle = \mathcal{LDF}(R)$. Ahora bien, supongamos que ${}_sM$ es un módulo $s\mathcal{C}u$-denso. Sea N_ϕ un submódulo de M_ϕ. Como ${}_sM \in cc(s\mathcal{C}u)$ entonces exite ${}_sH$, un submódulo cuadrado de ${}_sN$. Por el lema anterior, H_ϕ es un submódulo cuadrado de N_ϕ. Por lo que M_ϕ es un módulo $\mathcal{C}u$-denso. Así que $\phi^*(cc\mathcal{C}u(S)) \leq cc\mathcal{C}u(R)$. Por otro lado, supongamos que ${}_sM$ es un módulo de tipo III, es decir, un submódulo esencialmente $s\mathcal{C}u$-denso. Sea N_ϕ un submódulo de M_ϕ. Como ${}_sM$ es un módulo de tipo III, entonces existe ${}_sH$ un submódulo de $E\,{}_sN$ tal que es cuadrado e idempotente. Así que H_ϕ es un submódulo cuadrado e idempotente de $(E\,{}_sN)_\phi \subseteq_e EN_\phi$. Por lo que M_ϕ es un módulo $\mathcal{C}u$-idempotente. Así que $\phi^*(cc\mathcal{C}u(S)) \leq cc\mathcal{C}u(R)$ y $\phi^*(III(S)) \leq III(R)$. Por lo tanto I, III, $cc\mathcal{C}u$ y $\mathcal{LDF}$ son clases naturales universales. Además como $II(S) = \mathcal{LDF} \wedge cc(\mathcal{C}u)$ entonces II también es una clase natural universal. $\square$

Ahora bien, se denotará como $s\mathcal{AT}$ y $s\mathcal{U}$ a la clase de los S-módulos atómicos y uniformes, respectivamente. Dado un anillo S de $\mathcal{A}$, consideremos las siguientes clases: $A(S)$, la clase natural que consiste de los S-módulos moleculares, $B(S)$, la clase natural que consiste de los S-módulos sin fondo, $C(S)$, la clase natural que consiste de los S-módulos continuos y $D(S)$, la clase natural que consiste de los S-módulos discretos. Recordemos que $A(S)$ y $B(S)$ son complementos en $\Sigma(S)$ y que $C(S)$ y $D(S)$ también son complementos en $\Sigma(S)$. Además, las clases naturales $A(S)$ y $D(S)$ son generadas por los módulos S-átomicos y uniformes respectivamente. Se denotará como A, B, C y D a las asignaciones que se describieron. La asignación $C \wedge A$ se denotará como CA.

Lema 3.3.9. *Sea $\phi : R \to S$ un morfismo de $\mathcal{C}$. Entonces:*

(i) ${}_sM$ es un módulo atómico si y solo si M_ϕ lo es

(ii) ${}_sM$ es un módulo uniforme si y solo si M_ϕ lo es

Prueba. (i) Sea ${}_sM$ un módulo atómico, entonces $\langle {}_sM \rangle$ es un átomo en la retícula $\Sigma(S)$. Supongamos que $\Delta \in \Sigma(R)$ tal que $\Delta \leq \langle M_\phi \rangle = \phi^*(\langle {}_sM \rangle)$. Como la imagen de ϕ^* es convexa entonces existe ${}_s\Delta$ tal que $\phi^*({}_s\Delta) = \Delta$. Así que $\phi^*({}_s\Delta) \leq \phi^*(\langle {}_sM \rangle)$, como ${}_sM$ es atómico y por el lema 3.2.4 se tiene que ${}_s\Delta = \langle {}_sM \rangle$. Por lo que $\Delta = \phi^*(\langle {}_sM \rangle)$ y por lo tanto M_ϕ es un módulo atómico. Ahora supongamos que M_ϕ es atómico. Sea ${}_sN$ un submódulo de ${}_sM$,entonces se tiene que $\langle M_\phi \rangle = \langle N_\phi \rangle$. Es decir que $\phi^*(\langle {}_sM \rangle) = \phi^*(\langle {}_sN \rangle)$. Como ϕ^* es inyectiva entonces $\langle {}_sM \rangle = \langle {}_sN \rangle$. Por lo que ${}_sM$ es un módulo atómico. (ii) Por la proposición 3.1.7, se tiene que ${}_sM$ es uniforme si y solo si M_ϕ lo es. $\square$

Proposición 3.3.10. *Las asignaciones A, B, C, D y CA son clases naturales universales.*

Prueba. Sea $\phi : R \to S$ un morfismo de $\mathcal{A}$. Por el corolario del lema 3.2.2, se tiene que $\phi^*(A(S)) = \phi^*(\langle {}_s\mathcal{AT} \rangle) = \langle \mathcal{AT}_\phi \rangle \leq \langle {}_R\mathcal{AT} \rangle = A(R)$ y $\phi^*(D(S)) = \phi^*(\langle {}_s\mathcal{U} \rangle) = \langle \mathcal{U}_\phi \rangle \leq \langle {}_R\mathcal{U} \rangle = D(R)$. Ahora bien, Sea ${}_sM \in \mathcal{B}(S)$ entonces ${}_sM$ es un módulo ${}_s\mathcal{AT}$-libre. Sea N_ϕ un submódulo de M_ϕ y supongamos que N_ϕ es un submódulo atómico. Por la afirmación (1) ${}_sN$ es un submódulo de ${}_sM$ que es atómico. Lo cual es una contradicción, así que N_ϕ no es atómico. Por lo tanto M_ϕ es un módulo ${}_R\mathcal{AT}$-libre y entonces $M_\phi \in B(R)$. El mismo argumento se repite para los módulos $\mathcal{U}$-libres. Así que $\phi^*(B(S)) \leq B(R)$ y $\phi^*(C(S)) \leq C(R)$. Por lo tanto A, B, C, D son clases naturales universales. Además como $CA = C \wedge A$ entonces CA también es una clase natural universal. □

Observación 3.3.11. Sea $\mathcal{C}$ una subcatergoría de $\mathcal{A}$. Como $\Sigma(R)$ es una retícula de Boole para $R \in \mathcal{C}$ entonces se puede expresar a cada clase natural α como $\alpha = (\Delta \wedge \alpha) \vee (\Delta \wedge c\alpha)$. Así que para cada $\Delta \in \Sigma(R)$ tenemos la siguiente descomposición: $\Sigma(R) = \Sigma_\Delta(R) \oplus \Sigma_{c\Delta}(R)$, donde $\Sigma_\Delta(R) = [0, \Delta]$. Ahora bien, consideremos una asignación Δ que a cada anillo R le asocia una clase natural $\Delta(R) \in \Sigma(R)$. Dada tal Δ, consideremos la siguiente asignación: $\Sigma_\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ definida por $\sigma_\Delta(R) = [0, \Delta(R)]$

Definición 3.3.12. Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$ y $\{\Sigma_i : \mathcal{C} \to \mathcal{B}\}$ una familia de subfuntores de Σ, tal que para cada $R \in \mathcal{C}$ se cumplen las siguientes condiciones: (i) $\Sigma_i(R)$ es una subretícula convexa y $\{i \in I \mid \Sigma_i(R) \neq 0\}$ es un conjunto. (ii) $\Sigma(R) \cong \prod_{i \in I} \Sigma_i(R)$ como retículas de Boole, donde las operaciones son coordenada a coordenada. A menudo, para simplificar se va a sustuir $\cong$ por $=$ y se va identificar a $\Sigma(R) = \prod_{i \in I} \Sigma_i(R)$ bajo el siguiente isomorfismo: Al elemento $1 \in \Sigma(R)$ se le asocia el elemento $(e_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \Sigma_i(R)$. Entonces, para $y \in \Sigma(R)$, y se expresa como $y = \bigvee\{y \wedge e_i \in I\}$. Por lo que, a y le corresponden las coordenadas $(y \wedge e_i)_{i \in I}$. (iii) Si $\phi : R \to S$ es un morfismo de $\mathcal{C}$ entonces $\phi^*(\Sigma_i(S)) \subseteq \Sigma_i(R)$.

Teorema 3.3.13. *Sean $\mathcal{C}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$ y $\{\Delta_i : \mathcal{C} \to \mathcal{B} \mid i \in I\}$ una familia de asignaciones que manda a cada anillo a una retícula booleana como en la observación anterior. Para cada anillo R fijo, se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Para todo $M_i \in \Delta_i(R)$, si $i \neq j$ entonces $M_i \cap M_j = 0$. Además para todo $M \in$ R-Mod, existe una familia de submódulos $\{M_i \in \Delta_i(R)\}$ tal que $\oplus_{i \in I} M_i \subseteq_e M$.

(ii) $\bigvee_i \Delta_i(R) = 1$ y para toda $i \neq j$ se tiene que $\Delta_i(R) \wedge \Delta_j(R) = 0$.

(iii) $\Sigma(R) \cong \prod_{i\in I} \Sigma_{\Delta_i}(R)$ *es una descomposición en suma directa de retículas completas convexas.*

Prueba. Primero observemos que, como $\{\Delta_i(R) \neq 0\}_{i\in I} \subseteq \Sigma(R)$ entonces $\{\Delta_i(R) \neq 0\}_{i\in I}$ es un conjunto, por lo que $\{i \in I \mid \Delta_i(R) \neq 0\}$ también lo es. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Sea $i \neq j$, es claro que $\Delta_i(R) \wedge \Delta_j(R) = 0$ si y solo si $M_i \cap M_j = 0$ para toda $M_i \in \Delta_i$ y $M_j \in \Delta_j$. Ahora bien, sea $M \in R$-Mod y supongamos que existen M_i submódulos de M tal que $M_i \in \Delta_i(R)$ y $\oplus M_i \subseteq_e M$. Por la proposición 1.2.2, se tiene que $M \in \langle \oplus_i M_i \rangle \leq \bigvee_i \langle M_i \rangle \leq \bigvee_i \Delta_i(R)$. Por lo tanto $1 = \bigvee_i \Delta_i(R)$. Por otro lado, supongamos que $1 = \bigvee_i \Delta_i(R)$. Por el teorema 1.3.1, se tiene para todo $M \in R$-Mod, existe una familia de submódulos $\{M_i \in \Delta_i(R)\}$ tal que $\oplus M_i \subseteq_e M$. $(ii) \Rightarrow (iii)$ Como $\bigvee_i \Delta_i(R) = 1$, cada $\alpha \in R$-Nat, se expresa como $\alpha = \bigvee_i \alpha \cap \Delta_i$. Se define la siguiente función: $\psi : \Sigma(R) \to \prod_i \Sigma_{\Delta_i}(R)$ como $\psi(\alpha) = (\alpha \wedge \Delta_i(R))_i$. Es claro que ψ es un morfismo de retículas. Ahora veamos que es biyectiva. Sea $(\alpha_i)_i \in \prod_i \Sigma_{\Delta_i}(R)$. Si $\alpha = \bigvee_i \alpha_i$ entonces $\psi(\alpha) = (\alpha \wedge \Delta_i(R))_i = (\bigvee_i [\alpha_i \wedge \Delta_i(R)])_i$ pues $\Sigma_{\Delta_i}(R)$ es una retícula completa convexa. Como consecuencia de la hipótesis tenemos que: $\alpha_i \wedge \Delta_i = \alpha_i$ y $\alpha_j \wedge \Delta_i = 0$ para $i \neq j$ entonces $\psi(\alpha) = (\alpha_i)_i$ y por lo tanto ψ es suprayectiva. Supongamos que $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ entonces para cada $i \in I$ se tiene $\alpha_i \in \Delta_i(R) = \beta_i \in \Delta_i(R)$ entonces $\alpha = \bigvee_i \alpha_i \in \Delta_i(R) = \bigvee_i \beta_i \in \Delta_i(R) = \beta$. Por lo que ψ es inyectivo y por lo tanto ψ es un isomorfismo de retículas. Así que $\Delta_i(R) \wedge \Delta_j(R) = 0$. $\Sigma(R) \cong \prod_i \Sigma_{\Delta_i}(R)$ es una descomposición de suma directa de retículas completas convexas. $(iii) \Rightarrow (ii)$ Si idetificamos a $\Sigma(R) = \prod_i \Sigma_{\Delta_i}(R)$ mediante el isomorfismo anterior, entonces a $1 \in \Sigma(R)$ se le asocia las coordeenadas $(e_i)_i \in \prod_i \Sigma_{\Delta_i}(R)$. Por lo que $1 = \bigvee_i e_i = \bigvee_i \Delta_i$. Además $\Delta_i(R) \wedge \Delta_j(R) = 0$. □

Teorema 3.3.14. *Supongamos que se cumple algunas de las condiciones equivalentes del teorema anterior para todo anillo $R \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. Sean R, S dos anillos de $\mathcal{C}$ y $\phi : R \to S$ un morfismo de anillo de $\mathcal{C}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Para cualquier $i \in I$ y $_SM \in \Delta_i(S)$ se tiene que $M_\phi \in \Delta_i(R)$

(ii) $\phi^*(\Sigma_{\Delta_i}(S)) \subseteq \Sigma_{\Delta_i}(R)$ *y* $\Sigma = \prod_{i\in I}\Sigma_{\Delta_i} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ *es un producto directo de subfuntores* $\Sigma_{\Delta_i} \leq \Sigma$.

Prueba. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sea ${}_s\Delta \in \Sigma_{\Delta_i}(S)$ entonces $\phi^*({}_s\Delta) = \langle\{M_\phi \mid {}_sM \in {}_s\Delta\}\rangle$. Por hipótesis, si ${}_sM \in {}_s\Delta \leq \Delta_i(S)$ entonces $M_\phi \in \Delta_i(R)$. Por lo que $\phi^*({}_s\Delta) \leq \Delta_i(R)$ y por lo tanto $\phi^*({}_s\Delta) \in \Sigma_{\Delta_i}(R)$. Ahora bien, observemos que $\Sigma_{\Delta_i} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ es un subfuntor de Σ para toda $i \in I$. Por la condición (iii) del teorema anterior, se tiene que $\Sigma(R) = \prod_{i\in I}\Sigma_{\Delta_i}(R)$. Además si consideramos la función $\phi^* : \prod_{i\in I}\Sigma_{\Delta_i}(S) \to \prod_{i\in I}\Sigma_{\Delta_i}(R)$ dada por $\phi^*(\alpha_{i\in I}) = (\phi^*(\alpha_i))_{i\in I}$. Es claro que es ϕ^* es un morfismo de retículas y ϕ^* es completa pues las operaciones de retícula booleana se realizan coordenada a coordenada. Por lo que $\Sigma = \prod_{i\in I}\Sigma_{\Delta_i}$ es un producto directo de subfuntores. $(ii) \Rightarrow (i)$ Para $i \in I$, sea ${}_sM \in \Delta_i(S)$ entonces $M_\phi \in \phi^*(\langle {}_sM\rangle) \in \phi^*(\Sigma_{\Delta_i}(S))$. Así que $\phi^*(\langle {}_sM\rangle) \leq \Delta_i(R)$ y por lo tanto $M_\phi \in \Delta_i(R)$. □

Si I es finito entonces el producto directo se sustituye por la suma directa.

Corolario 3.3.15. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$ y sea Δ una clase natural $\mathcal{C}$-universal. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:

(i) Para ${}_sM \in S$-Mod, existen ${}_sN$ y ${}_sK$ submódulos de ${}_sM$ tales que ${}_sN \in \Delta(S)$, ${}_sK \in c\Delta(S)$ y además se tiene que ${}_sN \oplus {}_sK \subseteq_e {}_sM$. Así que $E\,{}_sM = E\,{}_sN \oplus E\,{}_sK$.

(ii) Si $\phi : R \to S$ es un morfismo de anillos de $\mathcal{C}$ entonces se tiene que: $(E\,{}_sM)_\phi = (E\,{}_sN)_\phi \oplus (E\,{}_sK)_\phi \subseteq_e EM_\phi$ donde $(E\,{}_sN)_\phi \in \Delta(R)$ y $(E\,{}_sK)_\phi \in c\Delta(R)$.

(iii) $\Sigma = \Sigma_\Delta \oplus \Sigma_{c\Delta}$ es una suma directa de subfuntores de Σ restringida a $\mathcal{C}$, es decir, si $\phi \in \mathcal{C}$ entonces $\phi^* : \Sigma(S) = \Sigma(\Delta)(S) \oplus \Sigma_\Delta(S) \to \Sigma(R) = \Sigma(\Delta)(R) \oplus \Sigma_\Delta(R)$ y además se tiene que $\phi^*(\Sigma_\Delta(S)) \subseteq \Sigma_\Delta(R)$ y $\phi^*(\Sigma_{c\Delta}(S)) \subseteq \Sigma_{c\Delta}(R)$.

Corolario 3.3.16. Sea Z_2 el radical de Goldie y $(Z_2, \mathbb{T}_{Z_2}, \mathbb{F}_{Z_2})$ la teoría de torsión de Goldie. Entonces:

(i) Para ${}_sM \in S$-Mod, existe ${}_sK$ submódulo de ${}_sM$ tal que $Z_2({}_sK) = 0$ y $Z_2({}_sM) \oplus {}_sK \subseteq_e {}_sM$.

(ii) Si $\phi : R \to S$ es un morfismo de anillos de $\mathcal{A}^*$ entonces se tiene que: $(Z_2\,{}_sM)_\phi \oplus K_\phi \subseteq_e M_\phi$ con $Z_2 M_\phi = (Z_2\,{}_sM)_\phi$ y $ZK_\phi = 0$.

(iii) $\Sigma = \Sigma_{\mathcal{T}} \oplus \Sigma_{\mathcal{F}}$ es una suma directa de subfuntores de Σ restringida a $\mathcal{A}^*$, es decir, si $\phi \in \mathcal{A}^*$ entonces se tiene que: $\phi^*(\Sigma_{\mathcal{T}}(S)) \subseteq \Sigma_{\mathcal{T}}(R)$ y $\phi^*(\Sigma_{\mathcal{F}}(S)) \subseteq \Sigma_{\mathcal{F}}(R)$. Además $\Sigma_{\mathcal{T}}(S) = [0, \mathbb{T}_G(S)] = \Sigma_{\mathbb{T}_G}(S)$ y $\Sigma_{\mathcal{F}}(S) = [0, \mathbb{F}_G(S)] = \Sigma_{\mathbb{F}_G}(S)$.

Corolario 3.3.17. Consideremos las clases naturales universales I, II y III. Entonces:

(i) Para $S \in \mathcal{A}$ se tiene que: $I(S) \wedge II(S) = 0$, $II(S) \wedge III(S) = 0$ y $I(S) \wedge III(S) = 0$. Además $I(S) \vee II(S) \vee III(S) = 1$.

(ii) Para todo ${}_sM \in S$-Mod, existen ${}_sM_I$, ${}_sM_{II}$ y ${}_sM_{III}$ submódulos de ${}_sM$ tales que ${}_sM_I \in I(S)$, ${}_sM_{II} \in II(S)$, $M_{III} \in III(S)$ y $M_I \oplus M_{II} \oplus M_{III} \subseteq_e M$. Por lo que $E\,{}_sM = E\,{}_sM_I \oplus E\,{}_sM_{II} \oplus E\,{}_sM_{III}$ es una descomposición en suma directa de los tipos I, II y III, única salvo superspectividad.

(iii) Si $\phi : R \to S$ es un morfismo de $\mathcal{A}$ se tiene la siguiente descomposición: $M_{I_\phi} \oplus M_{II_\phi} \oplus M_{III_\phi} \subseteq_e M_\phi$. Entonces: $EM_{I_\phi} \oplus EM_{II_\phi} \oplus EM_{III_\phi} = EM_\phi$

(iv) Para todo $R \in \mathcal{A}$, $\Sigma(R) = \Sigma_I(R) \oplus \Sigma_{II}(R) \oplus \Sigma_{III}(R)$ es una descomposición en suma directa de subretículas convexas.

Corolario 3.3.18. Consideremos las clases naturales universales A y B. Entonces

(i) Para todo ${}_sM \in S$-Mod, existen ${}_sM_A$ y ${}_sM_B$ submódulos de ${}_sM$ tales que ${}_sM_A \in A(S)$, $M_B \in B(S)$ y ${}_sM_A \oplus {}_sM_B \subseteq_e M$. Por lo que $E\,{}_sM = E\,{}_sM_A \oplus E\,{}_sM_B$ es una descomposición en suma directa de los tipos A y B, única salvo superspectividad.

(ii) Si $\phi : R \to S$ es un morfismo de $\mathcal{A}$ se tiene que: $M_{A_\phi} \oplus M_{B_\phi} \subseteq_e M_\phi$. Por lo tanto $EM_{A_\phi} \oplus EM_{B_\phi} = EM_\phi$

(iii) Para todo $R \in \mathcal{A}$, $\Sigma(R) = \Sigma_A(R) \oplus \Sigma_B(R)$ es una descomposición en suma directa de subretículas convexas.

Corolario 3.3.19. Consideremos las clases naturales universales CA, B y D. Entonces:

(i) Para $S \in \mathcal{A}$ se tiene que: $CA(S) \wedge B(S) = 0$, $B(S) \wedge D(S) = 0$ y $D(S) \wedge CA(S) = 0$. Además $CA(S) \vee B(S) \vee D(S) = 1$

(ii) Para todo ${}_sM \in S$-Mod, existen ${}_sM_{CA}$, ${}_sM_B$ y ${}_sM_D$ submódulos de ${}_sM$ tales que ${}_sM_{CA} \in I(S)$, ${}_sM_B \in II(S)$, $M_D \in III(S)$ y $M_{CA} \oplus M_B \oplus M_D \subseteq_e M$. Por lo que $E\,{}_sM = E\,{}_sM_A \oplus E\,{}_sM_B \oplus E\,{}_sM_D$ es una descomposición en suma directa de los tipos CA, B y D, única salvo superspectividad.

(iii) Si $\phi : R \to S$ es un morfismo de $\mathcal{A}$ se tiene que: $M_{CA_\phi} \oplus M_{B_\phi} \oplus M_{D_\phi} \subseteq_e M_\phi$. Por lo tanto $EM_{CA_\phi} \oplus EM_{B_\phi} \oplus EM_{D_\phi} \subseteq_e EM_\phi$

(iv) Para todo $R \in \mathcal{A}$, $\Sigma(R) = \Sigma_{CA}(R) \oplus \Sigma_B(R) \oplus \Sigma_D(R)$ es una descomposición en suma directa de subretículas convexas.

Definición 3.3.20. Sea $M \in R$-Mod. La dimensión infinita de Goldie de M es el número cardinal $GdM = sup\{|I|$ tal que existe una familia de submódulos distintos de cero $\{M_i\}_{i\in I}$ tal que $\Sigma_{i\in I} M_i = \oplus_{i\in I} M_i\}$.

A continuación se mencionarán algunas propiedades:

(a) Si N es submódulo de M, entonces $GdN \leq GdM$.

(b) Si $N \subseteq_e M$ entonces $GdN = GdM$.

(c) $Gd(\oplus_{j\in J} M_j) = \Sigma_{j\in J} GdM_j$ y

(d) $GdR \leq |R|$.

Definición 3.3.21. Sea $M \in R$-Mod y un cardinal $\aleph$ con $\aleph = 1$ o $\aleph_0 \leq \aleph$. Se dice que M tiene dimensión local de Goldie $\aleph$, si para todo submódulo N de M, existe $0 \neq H$ submódulo de N tal que $GdH = \aleph$

Para $\aleph = 1$, o para cualquier cardinal infinito $\aleph \geq \aleph_0$, y para cualquier anillo R se define: $\Delta_\aleph(R) = \{M \in R\text{-Mod} \mid M \text{ es de dimensión local } \aleph\}$, la clase de módulos que tienen dimensión local de Goldie $\aleph$. Supongamos que $\aleph = 1$. Si $M \in R$-Mod entonces cualquier submódulo de M que tenga dimensión de Goldie igual a 1 es uniforme. Por lo que $\Delta_1(R) = D(R)$.

Teorema 3.3.22. *Para $\aleph = 1, \aleph_0, \aleph_1, \ldots$, se tiene que:*

(i) *Para $R \in \mathcal{A}$, $\Delta_\aleph(R)$ es una clase natural, además existe un cardinal $\rho(R)$ tal que $\Delta_\aleph(R) = 0$ y $\Sigma_{\Delta_\aleph}(R) = 0$ para todo $\aleph \geq \rho(R)$.*

(ii) *$\Delta_\kappa(R) \wedge \Delta_\aleph(R) = 0$ para todo $\kappa \neq \aleph$ y $\bigvee_\aleph \Delta_\aleph(R) = \bigvee_{\aleph < \rho(R)} \Delta_\aleph(R) = 1$*

(iii) *$\Delta_\aleph$ es una clase natural universal*

(iv) *Para toda $R \in \mathcal{A}$, existen submódulos $M_\aleph$, que son máximos con respecto a pertenecer a $\Delta_\aleph$ y tales que $\Sigma_\aleph M_{\Delta_\aleph} = \oplus M_{\Delta_\aleph} \subseteq_e M$. Además $EM = E(\oplus_\aleph M_\aleph)$.*

(v) *Si $\phi : R \to S$ es un morfismo de $\mathcal{A}$, se tiene que: si $\oplus_\aleph\, {}_sM_\aleph \subseteq_e {}_sM$ entonces $\oplus_\aleph({}_sM_\aleph)_\phi \subseteq_e M_\phi$ con $({}_sM_\aleph)_\phi \in \Delta_\aleph$.*

(vi) *$\Sigma = \prod_\aleph \Sigma_{\Delta_\aleph} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un producto directo de subfuntores de Σ. En particular, si $R \in A$ entonces $\Sigma(R) \cong \prod_\aleph \Sigma_{\Delta_\aleph}(R)$ es un producto directo de retículas convexas y completas con $\Sigma_{\Delta_\aleph}(R)$ subretículas booleanas. Además si $\phi \in \mathcal{A}$ entonces $\phi^*(\Sigma_{\Delta_\aleph}(S)) \subseteq \Sigma_{\Delta_\aleph}(R)$.*

Prueba. (*i*) Es claro de la definición que $\Delta_{\aleph}(R)$ es cerrada bajo submódulos y copias isomorfas. Supongamos que $M \in \Delta_{\aleph}(R)$ y $M \subseteq_e M'$. Sea N un submódulo de M'. Existe H un submódulo de $N \cap M$ tal que $GdH = \aleph$. Ahora bien, sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos que tiene dimensión local de Goldie igual a $\aleph$. Sea N un submódulo de $\oplus M_i$. Por el argumento a la proyección, si $0 \neq x \in N$ entonces existe $r \in R$ y $y \in M_i$ para alguna i tal que $Rrx \cong Ry$. Por lo que existe H un submódulo de Rrx tal que H tiene dimensión de Goldie igual a $\aleph$. Así que $\Delta_{\aleph}(R)$ es una clase natural. Por otro lado, sea $\rho(R) = sup\{Gd(R/L) \mid L$ es un ideal izquierdo de $R\}$ y $\aleph > \rho$. Supongamos que $\Delta_{\aleph}(R) \neq 0$ y sea $M \in \Delta_{\aleph}(R)$ entonces existe N, un submódulo de Rx un submódulo cíclico de M tal que $GdN = \aleph$. Por lo que $\aleph = GdN \leq Gd(Rx) \leq \rho(R)$. Lo cual es una contradicción. Así que $\Delta_{\aleph}(R) = 0$.
(*ii*) Sea $\kappa < \aleph$ y supongamos que $0 \neq \Delta_{\kappa}(R) \wedge \Delta_{\aleph}$. Sea $0 \neq M \in \Delta_{\kappa}(R) \wedge \Delta_{\aleph}$, entonces existe N un submódulo de M tal que $GdN = \kappa$ y como $N \in \Delta_{\aleph}$ entonces existe H submódulo de N tal que $GdH = \aleph$. Por lo que $\aleph < \kappa$. Lo cual es una contradicción. Por lo que $\Delta_{\kappa}(R) \wedge \Delta_{\aleph}(R) = 0$. Ahora bien, sea $M \in R$-Mod. Por el Lema de Zorn, para cada cardinal $\aleph$, existe $M_{\aleph}$ submódulo de M tal que $M_{\aleph} \in \Delta_{\aleph}(R)$ y $M_{\aleph}$ es máximo con esta propiedad. Así que $\Sigma_{\aleph} M_{\aleph} = \oplus_{\aleph} M_{\aleph}$. Sea K un pseudocomplemento de $\oplus_{\aleph} M_{\aleph}$ en M. Si $0 \neq U$ es un submódulo uniforme de M, entonces $M_1 \oplus U \in \Delta_1(R)$, lo cual contradice el hecho de que M_1 sea máximo. Por lo que K no contiene submódulos uniformes, es decir, si $0 \neq N$ submódulo de K entonces $GdN \geq 2$. En particular, K no es uniforme, por lo que $GdK > 1$. Sea $\kappa = GdK$, entonces $K \in \Delta_{\kappa}$. Así que $M_{\kappa} \oplus K \in \Delta_{\kappa}$. Lo cual contradice la máximilidad de M_{κ}. Por lo que $K = 0$ y por lo tanto $\oplus_{\aleph} M_{\aleph} \subseteq_e M$. Así que $\bigvee_{\aleph} \Delta_{\aleph} = 1$.
(*iii*) Sea $\phi : R \to S$ un morfismo de $\mathcal{A}$. Es claro que si ${}_sM \in S$-Mod entonces $GdM_{\phi} = Gd\,{}_sM$. Así que $\phi^{*}\,{}_s\Delta_{\aleph}(R) \leq \Delta_{\aleph}(R)$ Por otro lado, $c\Delta_{\aleph}(R) = \{M \in R$-Mod $\mid$ para todo submódulo N de M, $GdN \neq \aleph\}$. Sea ${}_sM \in c\Delta_{\aleph}(S)$ y N_{ϕ} submódulo de M_{ϕ}. Como $Gd\,{}_sN = GdN_{\phi}$ entonces $GdN_{\phi} \neq \aleph$. Por lo que $M_{\phi} \in c\Delta_{\aleph}(R)$. Así que $\phi^{*}(c\Delta_{\aleph}(S)) \leq c\Delta_{\aleph}(R)$. □

66

Capítulo 4

Ejemplos

Primero, comenzaremos con ejemplos de anillos, cuyo ideal $Z(R)$ es el único ideal máximo y esencial en el anillo. Estos anillos servirán para construir módulos de torsión de Goldie, que sean módulos sin fondo.

Ejemplo 1. Sea D un dominio conmutativo de ideales principales. Si $x \in D$, se denotará como (x) al ideal principal generado por x en D. Sean p un elemento primo y $n \in \mathbb{N}$, se define $R = D/(p^n)$. Tenemos entonces que R es un anillo conmutativo con 1 que satisface las siguientes condiciones:

(i) $(p)/(p^n)$ es un ideal máximo

(ii) $Z(R) = (p)/(p^n)$

(iii) $Z(R) \subseteq_e R$ y por lo tanto $Z_2(R) = R$

Ejemplo 2. Para p un número primo e indeterminadas $\{x, y\}$, sea R el algebra libre $\mathbb{Z}_{p^2}\{x, y\}$ sujeta a las siguientes relaciones: $xy = yx = x^2 = y^2 = 0$. Observemos que todo elemento de R es de la forma $r = a_0 + a_1x + a_2y$ donde a_0, a_1 y a_2 son elementos de $\mathbb{Z}_{p^2}$. Observemos que R no es uniforme, pues $Rx \cap Ry = 0$. Ahora bien, R es un anillo conmutativo con 1 que satisface las siguientes condiciones:

(i) $Z(R) = p\mathbb{Z}_{p^2} + \mathbb{Z}_{p^2}x + \mathbb{Z}_{p^2}y$

(ii) $Z(R) \subseteq_e R$ y por lo tanto $Z_2(R) = R$

(iii) $Z(R)$ es un ideal máximo

A continuación se muestra la construcción hecha por Dauns para exhibir ejemplos de módulos de torsión de Goldie, que son módulos sin fondo y continuos.

Ejemplo 3. Sea $\{T_i\}_{i\in I}$ una familia infinita de anillos tal que $Z(T_i)$ es el único ideal máximo y esencial en T_i para toda $i \in I$. Vamos a denotar como P_i al ideal $Z(T_i)$. Consideremos el siguiente anillo: $T = \prod_{i\in I} T_i$ y $S = \oplus_{i\in I} T_i$. Recordemos que si $t = (t_i)_{i\in I} \in T$ entonces $sop(t) = \{i \in I \mid t_i \neq 0\}$, para $t \in T$ se defíne el conjunto $Y(t)$ como $Y(t) = \{i \in I \mid t_i \in P_i\}$. Se sabe que si $t_i \in T_i$ pero $t_i \notin P_i$ entonces t_i es invertible. Por lo que $I \setminus Y(t) \subseteq sop(t)$. Finalmente, sea $R = T/S$, si $\overline{t} \in R$ entonces $\overline{t} = (t_i)_{i\in I} + S$ donde $t_i \in T_i$. A continuación, se probará que se cumplen las siguientes propiedades:

(i) Si $\overline{t} = t + S \in R$ entonces $An_R(\overline{t}) = (\prod_{i\in Y(t)} An_{T_i}(t_i) + S)/S$

(ii) $Z(R) = (\prod_{i\in I} P_i + S)/S$

(iii) $Z(R) \subseteq_e R$ y por lo tanto $Z_2(R) = R$

(iv) R es un módulo sin fondo

(*i*) Sea $0 \neq \overline{r} = r + S \in (\prod_{i\in Y(t)} An_{T_i}(t_i) + S)/S$ entonces $sop(r) \subseteq Y(t)$. Si $i \in sop(r)$ entonces se tiene que $r_i t_i = 0$ pues $r_i \in An_{T_i}(t_i)$. Así que $\overline{r}\overline{t} = 0$. Por otro lado, sea $0 \neq \overline{r} = r + S \in An_R(\overline{t})$, entonces $\overline{rt} = \overline{0}$, es decir, $sop(rt)$ es finito. Sea $r'_i = r_i$ para toda $i \in Y(t) \cap \{i \in I \mid r_i \in An_{T_i}(t_i)\}$ y $r'_i = 0$ en otro caso. Veamos que $r + S = r' + S$, para eso basta ver que $[(I \setminus Y(t)) \cup \{i \in I \mid r_i \notin An_{T_i}(t_i)\}] \cap sop(r)$ es finito. Observemos que para toda $i \in I \setminus Y(t)$, t_i es invertible; por lo que $sop(r) \cap (I \setminus Y(t))$ es finito pues de lo contrario $sop(rt)$ no es finito. Si $0 \neq r_i \notin An_{T_i}(t_i)$ entonces $r_i t_i \neq 0$. Como $sop(rt)$ es finito entonces $\{i \in I \mid r_i \notin An_{T_i}(t_i)\}$ es finito. Así que $r + S = r' + S \in (\prod_{i\in Y(t)} An_{T_i}(t_i) + S)/S$.

(ii) Sea $\bar{t} \in (\prod_{i \in I} P_i + S)/S$ vamos a demostrar que $An_R(\bar{t}) \cap R\bar{r} \neq 0$ para todo ideal ciclico $R\bar{r}$. Como $t_i \in P_i$ entonces $An_{T_i}(t_i) \cap T_i r_i \neq 0$ para toda $i \in sop(r)$. Para cada $i \in sop(r)$, seleccionemos $0 \neq k_i r_i \in An_{T_i}(t_i) \cap T_i r_i$. Sea $k = (k_i r_i)_{i \in I}$. Si $i \in sop(k) = sop(r)$ se tiene que $k_i r_i \neq 0$ y además $k_i r_i t_i = 0$. Por lo que $krt = 0$ y entonces $\overline{kr}\bar{t} = 0$. Observemos que $sop(kr) = sop(r)$. Por lo que $\overline{kr} \neq 0$. Es decir $0 \neq \overline{kr} \in An_R(\bar{t}) \cap R\bar{r}$. Por otro lado, sea $\bar{t} \in Z(R)$, entonces $(\prod_{i \in Y(t)} An_{T_i}(t_i) + S)/S \subseteq_e R$. Sea $t'_i = t_i$ para toda $i \in Y(t)$ y $t'_i = 0$ en otro caso. Veamos que $t + S = t' + S$, para eso basta ver que $I \setminus Y(t)$ es finito. Supongamos que $|I \setminus Y(t)| \geq \aleph_0$. Sea $k \in T$ tal que $sop(k) \subseteq (I \setminus Y(t))$. Si $\bar{r} \in An_R(\bar{t})$ entonces $sop(r) \subseteq Y(T)$, por lo que $R\bar{k} \cap R\bar{r} = 0$ para todo $\bar{r} \in An_R(\bar{t})$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $I \setminus Y(t)$ es finito.

(iii) Sea $0 \neq \bar{r} \in R$, para toda $i \in sop(r)$, se tiene que $P_i \cap T_i r_i \neq 0$. Para cada $i \in sop(r)$, seleccionemos $0 \neq t_i r_i \in P_i \cap T_i r_i$, si $i \notin sop(r)$ entonces fijamos $t_i = 0$. Sea $t = (t_i)_{i \in I}$, entonces $sop(t) = sop(r) = sop(rt)$, además $tr \in (\prod_{i \in I} P_i + S)/S$. Por lo que $0 \neq \overline{tr} \in Z(R)$. Así que $Z(R) \subseteq_e R$.

(iv) Supongamos que R contiene un ideal izquierdo I tal que es atómico. Sea $0 \neq \bar{t} \in I$ y sean A y B tales que $sop(t) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ y $|A| = |B|$. Ahora bien, se definen $\bar{t}_A = t_A + S$ y $\bar{t}_B = t_B + S$ como sigue: $(t_A)_i = t_i$ para toda $i \in A$ y $(t_A)_i = 0$ en otro caso y $\bar{t}_B$ donde $(t_B)_i = t_i$ para toda $i \in B$ y $(t_B)_i = 0$ en otro caso. Es claro que $\bar{t}_A$ y $\bar{t}_B$ pertencen a $R\bar{t}$. Como I es atómico entonces $\langle R\bar{t}_A \rangle = \langle R\bar{t}_B \rangle$. Así que $R\bar{t}_A \hookrightarrow E((R\bar{t}_B)^{(X)})$. Por el argumento de la proyección se tiene que $R\bar{t}_A \cong R\bar{r}\bar{t}_B$ para alguna $\bar{r} \in R$ y además $An_R(\bar{t}_A) = An_R(\bar{t}_B)$. Lo cual es una contradicción pues $sop(\bar{t}_A) = A$ y $sop(\bar{t}_B) = B$. Por lo que el ideal I no es atómico. Así que R no contiene ideales izquierdos atómicos y entonces R es un módulo sin fondo y por lo tanto continuo.

Ejemplo 4. Para p un número primo e indeterminadas $\{x, y\}$, sea R el algebra libre $\mathbb{Z}_{p^2}\{x, y\}$. Si $\tau \in R$, se dice que es un término si se puede expresar de la siguiente forma: $\tau = x^{\epsilon(1)} y^{\eta(1)} x^{\epsilon(2)} y^{\eta(2)} \cdots x^{\epsilon(n)} y^{\eta(n)}$, donde $x^0 = y^0 = 1$, $1 \leq \epsilon(2), \epsilon(3), \ldots, \epsilon(n)$ y $1 \leq \eta(2), \eta(3), \ldots, \eta(n-1)$ pero $\epsilon(1), \eta(n) = 0, 1, 2, \ldots$

Un monomio de R es una constante por un término, es decir, $k\tau = \tau k$ con $k \in \mathbb{Z}_{p^2}$. Observemos que R es de la siguiente forma: $R = \oplus\{\mathbb{Z}_{p^2}\tau \mid \tau \text{ es un término }\}$. El grado de un término es $grad(\tau) = \epsilon(1) + \eta(1) + \cdots + \epsilon(n) + \eta(n)$. Todo elemento $r \in R$ es de la forma $r = r_1 + pr_2$ donde $p \nmid r_1$ y $p \nmid r_2$. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $Z(R) = pR$

(ii) $Z(R) \subseteq_e R$ y por lo tanto $Z_2(R) = R$

(iii) R es de tipo III

(i) Sean $r = r_1 + pr_2 \in R$ y $s = s_1 + ps_2 \in An_R(r)$ entonces se tiene que $(s_1 + ps_2)(r_1 + pr_2) = 0$. Por lo que $r_1s_1 = 0$ y $(r_1s_2 + r_2s_1) = 0$. Si $r_1 \neq 0$ entonces $s_1 = 0$, y por lo tanto $s_2r_1 = 0$, lo cual implica que $s_2 = 0$. Así que $p \nmid r$ si y solo si $r_1 \neq 0$ si y solo si $An_R(r) = 0$. Además $p \mid r$ si y solo si $r_1 = 0$ si y solo si $An_R(r) = pR$. Así que $Z(R) = pR$.
(ii) Es claro.
(iii) Primero observemos lo siguiente: por el lema de Zorn, existe $\{Rx_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia numerable infinita de ideales cíclicos que es independiente y máxima con esta propiedad en R, entonces $\oplus_\alpha Rx_\alpha \subseteq_e R$. Supongamos que $w \in R$ tal que $p \nmid w$, entonces el siguiente morfismo: $f : R \to Rw$ dado por $f(r) = rw$ es isomorfismo pues $An_R(w) = 0$. Por lo que se tiene que $\oplus_\alpha Rx_\alpha w \subseteq_e Rw$. Ahora bien, supongamos que $p \mid w$, entonces $w = pv$ y $p \nmid v$. Consideremos a la siguiente suma de ideales cíclicos: $\oplus_\alpha Rx_\alpha pv$. Sea K un pseudocomplemento de $\oplus_\alpha Rx_\alpha pv$ en Rpv, así que $\oplus_\alpha Rpx_\alpha v \oplus K \subseteq_e Rpv$. Por el lema de Zorn, existe $\{Ry_\beta\}_{\beta\in B}$ una familia independiente máxima de submódulos cíclicos en K, entonces $\oplus_\beta Ry_\beta \subseteq_e K$. Como $pK \subseteq Rp^2v = 0$ entonces $Rpy_\beta = 0$. En particular, $py_\beta = 0$, es decir, $y_\beta = pz_\beta$ tal que $p \nmid z_\beta$. Así que tenemos que $(\oplus_\alpha Rpx_\alpha v) \oplus (\oplus_\beta Ry_\beta) \subseteq_e Rpv$ y por lo tanto $(\oplus_\alpha Rpx_\alpha v) \oplus (\oplus_\beta Rpz_\beta) \subseteq_e Rpv$. Así que hemos visto que: para cada ideal cíclico Rv, existe una familia infinita numerable e independiente de ideales cíclicos cuya suma esta contenida esencialmente en el cíclico Rv. Finalmente, sea L un ideal izquierdo de R, vamos a demostrar

que $E(L)$ contiene un cuadrado idempotente. Por la observación anterior, se tiene que

existe una familia numerable infinita de idelaes cíclicos que es independiente y tal que $[\oplus_{i\in I} Rw_i] \oplus [\oplus_{j\in J} Rpv_j] \subseteq_e L$ donde $p \nmid w_i$ y $p \nmid v_j$; además $|I| = |J| = \aleph_0$. Para cada caso, hacemos una partición: Sean I_1, I_2, J_1 y J_2 tales que $J = J_1 \cup J_2$, $I = I_1 \cup I_2$ y además $J_1 \cap J_2 = \emptyset$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, por último $|I_1| = |I_2| = |J_1| = |J_2| = \aleph_0$. Es claro que $R \cong Rw_i$ para toda $i \in i$ y que $R/pR \cong Rv_j$ para toda $j \in J$. Por la elección de la partición se tiene que $E(L) = E[\oplus_{i\in I} Rw_i] \oplus E[\oplus_{j\in J} Rpv_j] E[\oplus_{i\in I_1} Rw_i \oplus \oplus_{j\in J_1} Rv_i] \oplus E[\oplus_{i\in I_2} Rw_i \oplus \oplus_{j\in J_2} Rv_i]$ es un cuadrado idempotente. Por lo que R es de tipo III.

El siguiente ejemplo muestra que para cada cardinal $\aleph$ existe un anillo R tal que $\Delta_{\aleph}(R) \neq 0$.

Ejemplo 5. Sean F un campo y X un conjunto tal que $2 \leq |X| = \aleph$. Consideremos el algebra libre $R = F\{X\}$. A continuación vamos a ver que $Gd(R) = \aleph$. Primero, observemos que la siguiente familia de cíclicos es independiente: $\{Rx\}_{x\in X}$. Así que $\aleph \leq Gd(R)$. Ahora bien, sea $\{H_i\}_{i\in I}$ una familia independiente de ideales izquierdos, vamos a demostrar que $|I| \leq \aleph$. Para cada $i \in I$, consideremos un ideal cíclico de H_i, digamos Ra_i con $0 \neq a_i \in H_i$. Ahora, consideremos la familia independiente $\{Ra_i\}$, es claro que $Ra_i \cong Rx$ con $x \in X$. Por lo que $|I| \leq |X|$. Así que $Gd(R) = \aleph$. Por otro lado, si $0 \neq a \in R$ entonces $Ra \cong R$, por lo que $Gd(Ra) = \aleph$. Así que $0 \neq R \in \Delta_{\aleph}(R)$. Observemos también que si L es un ideal izquierdo de R tal que $\oplus_{i\in I} Rx_i \subseteq_e R$ con $|I| = \aleph$, entonces $Gd(L) = Gd(R) = \aleph$ por las propiedades de la dimensión de Goldie.

Ejemplo 6. Sean $\aleph$ un cardinal infinito y F una nillo para todo ordinal $i < \aleph$ fijamos $F_i = F$. Se define el $\aleph$-producto S de la familia $\{F_i\}_{i<\aleph}$ como $S = \{t \in \prod_{i<\aleph} F_i \mid |sop(t)| < \aleph\}$. Por ejemplo, si consideramos al cardinal $\aleph_0$ entonces S es la suma directa. Ahora, consideremos a $P \subseteq \prod_{i<\aleph} F_i$, el subanillo del producto directo formado por los vectores que son eventualmente constantes, es decir, $P = \{(p_i)_{i<\aleph} \in$

$\prod_{i<\aleph} F_i \mid$ existe $j < \aleph$ tal que $p_j = p_k$ para toda $k > j\}$. Es claro que S es un ideal izquierdo de P. Sea $R = P/S$. Supongamos que $p = (p_i)_{i<\aleph}, q = (q_i)_{i<\aleph} \in P$, $\overline{p} = \overline{q}$ si y solo si existe $j < \aleph$ tal que $p_k = q_k$ para toda $k > j$. Entonces $|R| = \aleph$. Ahora bien, sea $0 \neq \overline{a} \in R$ donde $a = (a_i)_{i<\aleph} \in P$. Entonces $|sop(a)| = \aleph$ y además existe $k < \aleph$ tal que a se hace constante a partir de k. Sea $X = sop(a)$ y consideremos una partición de X como sigue: $X = \cup_{i<\aleph} X_i$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ y $|X_i| = \aleph$. Para cada $i < \aleph$, se puede definir $\chi_i \in P$ tal que $\overline{\chi_i} \neq \overline{\chi_j}$ para toda $i \neq j$ y además tal que a partir de k, χ_i sea un vector constante. Además, para toda $i < \aleph$, $j < k$ y $j \in X_i$ se tiene que $(\chi_i)_j = 1$ y si $j < k$ y $j \notin X_i$ se tiene que $(\chi_i)_j = 0$. Consideremos la siguiente familia de ideales cíclicos de $R\overline{a}$: $\{R\overline{\chi_i a_i}\}_{i<\aleph}$. Entonces $\{R\overline{\chi_i a_i}\}_{i<\aleph}$ es una familia independiente. Así que $\aleph \leq Gd(R\overline{a})$. Como $GdR \leq |R|$, se tiene que $\aleph \leq Gd(R\overline{a}) \leq |R| = \aleph$. Por lo que $Gd(R\overline{a}) = \aleph$. Así que $R \in \Delta_\aleph(R)$.

Ejemplo 7. Sea $R = \mathbb{Z}_2^{\aleph_0}/\mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)}$. Primero, observemos que R es un anillo de Boole. Por lo tanto R es conmutativo, todo elemento es idempotente y si $a \in R$ se tiene la siguiente descomposición: $R = Ra \oplus R(1-a)$. Ahora bien, por la observación es claro que si $a \in R$ entonces $An_R(a) = R(1-a)$. Además se tiene que se satisfacen las siguientes condiciones

(i) $Z(R) = 0$

(ii) R es un módulo sin fondo continuo

(iii) R es un módulo de tipo I

(i) Si $0 \neq a \in R$, entonces $An_R(a) = R(1-a)$. Como $Ra \cap R(1-a) = 0$ entonces $An_R(a)$ no es esencial. Por lo que $Z(R) = 0$.
(ii) Utilizando el mismo argumento que en el inciso *(iii)* del ejemplo 3, se tiene que R es un R-módulo izquierdo sin fondo y continuo.
(iii) Para demostrar que R es de tipo I, basta ver que ningún ideal izquierdo cíclico es un cuadrado. Sean a y $b \in R$ tales que $a \neq b$. Supongamos que $Ra \cong Rb$ y $Ra \cap Rb = 0$, entonces se tiene que $An_R(a) = An_R(b)$. Es decir $R(1-a) = R(1-b)$.

Por lo que $R = Ra \oplus R(1-b)$ y entonces $b \in Ra$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto no existen ideales cíclicos cuya intersección sea cero y además que sean isomorfos. Así que R no contiene cuadrados y por lo tanto es de tipo I.

Ejemplo 8. Sea F un campo y fijemos $F_i = F$ para $i \in I$ con $\aleph < |I|$. Denotamos como T al producto directo $T = \prod_{i \in I} F_i$ y a S como el $\aleph$-producto de T, es decir, $S = \{t \in T \mid |sop(t)| < \aleph\}$. Ahora bien sea $P = \{t \in T \mid |sop(t)| \leq \aleph\}$. Es claro que $S \subseteq P$. Consideremos al siguiente anillo $R = T/S$ y al ideal P/S de R. Además $P/S \subseteq_e R$ Entonces con el mismo argumento que en el ejemplo 6 se tiene que $P/S \in \Delta_{\aleph}(R)$.

74

Apéndice A

Algunos teoremas

A.1 Argumento de la proyección

Teorema A.1.1 (Teorema del argumento de la proyección). *Sea* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ *una familia en R-Mod,* $0 \neq x \in E(\oplus M_\alpha)$*. Entonces existe* $t \in R$*,* $\alpha \in \Gamma$ *y* $0 \neq x_\alpha \in M_\alpha$ *tales que* $0 \neq Rtx \cong Rx_\alpha$ *con* $An_R(tx) = An_R(x_\alpha)$

Prueba. Denotamos como $p_\alpha : \oplus M_\alpha \to M_\alpha$ a la función proyección, y si $x \in \oplus M_\alpha$ denotamos como $sop(x)$ al soporte de x. Como $\oplus M_\alpha \subseteq_e E(\oplus M_\alpha)$, si $0 \neq x \in E(\oplus M_\alpha)$ entonces existe $r \in R$ tal que $rx \neq 0$ y $rx \in \oplus M_\alpha$. Como $| sop(rx) |$ es finita, haremos la demostración por inducción. Supon-
gamos que $| sop(rx) |= 1$, entonces existe una sola $\alpha \in \Gamma$ tal que $p_\alpha(rx) \neq 0$. Si $x_\alpha = p_\alpha(rx)$ entonces $Rrx \cong Rx_\alpha$ y $An_R(rx) = An_R(x_\alpha)$. Ahora bien, supongamos que si $0 <| sop(tx) |< n$ para alguna t entonces existe $\alpha \in \Gamma$ y $0 \neq x_\alpha \in M_\alpha$ tales que $Rtx \cong Rx_\alpha$ con $An_R(tx) = An_R(x_\alpha)$.
Supongamos que $| sop(tx) |= n$. Primero, supongamos que existe $\alpha \in sop(rx)$ tal que $An_R(rx) = An_R(p_\alpha(rx))$. Sea $0 \neq x_\alpha = p_\alpha(rx)$ y por lo tanto $Rrx = Rx_\alpha$. Ahora, supongamos que para toda $\alpha \in sop(rx)$ se tiene que $An_R(rx) \neq An_R(p_\alpha(rx))$. Sea $s \in An_R(p_{\alpha_0}(rx)) \backslash An_R(rx)$ para alguna $\alpha_0 \in sop(rx)$. Entonces $p_{\alpha_0}(srx) = 0$ y además $rsx \neq 0$. Por lo que $0 <| sop(srx) |< n$. Por hipótesis de

inducción, existen $\alpha \in \Gamma$ y $0 \neq x_\alpha \in M_\alpha$ tales que $Rsrx \cong Rx_\alpha$ con $An_R(srx) = An_R(x_\alpha)$. □

A.2 Teorema de Bumby

Teorema A.2.1 (Teorema de Bumby). *Sean $B \subseteq A \in R$-Mod tales que ambos son inyectivos y existe un monomorfismo $f : A \hookrightarrow B$. Entonces $A \cong B$.*

Prueba. Como B es inyectivo entonces $A = H \oplus B$ para alguna $H \subseteq A$. A continuación se desmostrará por inducción que $\{H, fH, , f^2H, \ldots\}$ es una familia independiente de submódulos de A. Primero, como $f(H) \subseteq B$ $H \cap f(H) = 0$ y entonces $\{H, fH\}$ es independiente. Supongamos que $\{H, fH, , f^2H, \ldots, f^nH\}$ es independiente para alguna $n > 0$. Ahora bien, $\{fH, , f^2H, \ldots, f^{n+1}H\}$ es independiente pues si $x \in f^{n+1}H \cap (fH \oplus f^2H \oplus \cdots f^nH$ entonces $x = f(f^nh_0) = f(h_1 + fh_2 + \cdots + f^{n-1}h_{n-1})$ con $h_j \in H$. Como f es monomorfismo y $fH \subseteq B$, entonces $h_1 = 0$. Por lo que $f^nh_0 \in fH \oplus f^2H \oplus \cdots f^{n-1}H$ y por lo tanto $f^nh_0 = 0$ y $x = 0$. Ahora tenemos que: $H \cap (fH \oplus f^2H \oplus \cdots f^{n+1}H) \subseteq H \cap B = 0$. Así que $\{H, fH, , f^2H, \ldots, \}$ es independiente.

Sea $P = H \oplus fH \oplus f^2H \oplus \cdots$ y obsevemos que $P = H \oplus fP$. Como $E(fP) \subseteq B$ entonces $B = E(fP) \oplus K$ para algun submódulo $K \subseteq B$. Ahora bien como $P = H \oplus fP \subseteq_e H \oplus E(fP)$ entonces $E(P) = H \oplus E(fP)$. Como $fP \cong P$ entonces $E(fP) \cong E(P) = H \oplus E(fP)$. Así, tenemos que : $A = H \oplus B = H \oplus E(fP) \oplus K \cong E(fP) \oplus K = B$. □

Corolario A.2.2. Sean A y $A' \in R$-Mod tales que A es isomórfo a un submódulos de A' y A' es isomórfo a un submódulo de A, entonces $A \cong A'$.

Prueba. Supongamos que $A \cong B' \subseteq A'$ y que $A' \cong B \subseteq A$. Observemos que B es inyectivo y consideremos el siguiente monomorfismo: $A \cong B' \subseteq A' \cong B$. Por el teorema anterior, $A \cong B \cong A'$. □

A.3 Suma fibrada

Definición A.3.1. Sea $g_1 : N \longrightarrow N_1$ y $g_2 : N \longrightarrow N_2$ dos homomorfismos en $R-$ Mod. Un diagrama conmutativo en $R-$ Mod

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g_2} & N_2 \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ N_1 & \xrightarrow[q_1]{} & Q \end{array}$$

es llamada suma fibrada para el par (g_1, g_2) si, para todo par de homomorfismos

$$h_1 : N_1 \longrightarrow Y,\ h_2 : N_2 \longrightarrow Y \text{ con } h_1 g_1 = h_2 g_2,$$

existe un único homomorfismo $h : Q \longrightarrow Y$ con $hq_1 = h_1$ y $hq_2 = h_2$.

Nuevamente, Q está determinado de manera única salvo isomorfismo. La suma fibrada es también llamada suma amalgamada o cuadrado cocartesiano.

Proposición A.3.2. *Para todo par $g_1 : N \longrightarrow N_1$, $g_2 : N \longrightarrow N_2$ de homomorfismos en $R-$ Mod la suma fibrada existe.*

Con inyecciones $\epsilon_i : N_i \longrightarrow N_1 \oplus N_2$, $i = 1, 2$, obtenemos un homomorfismo

$$q^* : \epsilon_1 g_1 + \epsilon_2 g_2 : N \longrightarrow N_1 \oplus N_2.$$

Con homomorfismos canónicos $\bar{\epsilon}_i : N_i \longrightarrow N_1 \oplus N_2 \longrightarrow Conuc\ q^*$ el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g_2} & N_2 \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\epsilon}_2} \\ N_1 & \xrightarrow[\bar{\epsilon}_1]{} & Conuc\ q^* \end{array}$$

es la suma fibrada para el par (g_1, g_2). Por construcción,

$$\text{Im } q^* = (g_1\epsilon_1 + g_2\epsilon_2)(N) = \{(g_1(n), g_2(n)) \mid n \in N\} \subseteq N_1 \oplus N_2,\ y$$
$$\text{Conuc } q^* = N_1 \oplus N_2 / \text{Im } q^*.$$

Prueba. Supongamos que para $i = 1,2,$ tenemos homomorfismos $h_i : N_i \longrightarrow Y$ con $h_1g_1 = h_2g_2$. Entonces obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "q^*"] & N_1 \oplus N_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_1\pi_1 - h_2\pi_2"'] & Conuc\ q^* \\ & Y & \end{tikzcd}$$

con $(h_1\pi_1 - h_2\pi_2)q^* = (h_1\pi_1 - h_2\pi_2)(g_1\epsilon_1 + g_2\epsilon_2) = h_1g_1 - h_2g_2 = 0$. Por lo que existe un único homomorfismo $h : Conuc\ q^* \longrightarrow Y$, con lo cual obtenemos el diagrama deseado. $\square$

Proposición A.3.3. *Si el diagrama conmutativo en* $R-$Mod*:*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & N_2 \arrow[d, "g_2"] \\ N_1 \arrow[r, "g_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

representa el diagrama de la suma fibrada, entonces:

Tenemos el diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & N_2 \arrow[r] \arrow[d, "g_2"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ N_1 \arrow[r, "g_1"'] & Q \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Prueba. De la proposición anterior tenemos que

$$\text{Im}\ q^* = \{(f_1(n), f_2(n)) \mid n \in N\}$$

con lo que obtenemos el homomorfismo

$$g : Q = N_1 \oplus N_2 / \text{Im}\ q^* \longrightarrow N_2 / f_2(N),\ (n_1, n_2) + \text{Im}\ q^* \mapsto n_2 + f_2(N),$$

lo que nos conduce al diagrama deseado

$$\begin{array}{ccccccc} N & \xrightarrow{f_2} & N_2 & \longrightarrow & N_2/f_2(N) & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_2} & & \| & & \\ N_1 & \xrightarrow{g_1} & Q & \xrightarrow{g} & N_2/f_2(N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

□

80

Apéndice B

Radical de Goldie

B.1 Prerradicales

Definición B.1.1. Sea $r : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ un funtor. Se dice que r es un *prerradical* si rM es un submódulo de M y $f(rM) \subseteq rM'$ para todo $f : M \to M'$ morfismo de módulos.

Ejemplos B.1.2. Sea R un anillo con 1

(i) $Soc(M) = \Sigma\{S_\alpha \mid S_\alpha \subseteq M \text{ y } S_\alpha \text{ es simple }\}$

(ii) $J(M) = \cap\{N \mid N \text{ es submódulo de } M \text{ y } N \text{ es máximo}\}$

(iii) Si I es un ideal izquierdo de R entonces $r_I(M) = IM$

(iv) $Z(M) = \{m \in M \mid An_R(m) \subseteq_e R\}$

Si $R = \mathbb{Z}$ y G un grupo abeliano,

(v) $t(G) = \{x \in G \mid o(x) < \infty\}$.

(vi) $d(G) = \Sigma\{N \mid N \text{ es divisble de } G\}$

Se denota como R-pr a la clase de todos los prerradicales. En R-pr se define un orden parcial dado por: si r y $t \in R$-pr, se dice que $r \leq t$ si $rM \subseteq tM$. R-pr tiene elemento mayor, que se denota $\underline{1}$, y tiene elemento menor, que se denota $\underline{0}$. Además si $\mathcal{C} = \{r_\alpha\}_\alpha$ es una familia de prerradicales se caracteriza el ínfimo y supremo como sigue: $\bigvee \mathcal{C}(M) = \Sigma_\alpha r_\alpha M$ y $\bigwedge \mathcal{C}(M) = \cap_\alpha r_\alpha M$. También se definen dos operaciones en R-pr. Sean r y $t \in R$-pr. La operación producto es $rt(M) = r(tM)$ y la operación dos puntos es $(r : t)(M)$ es el único submódulo de M tal que $(r : t)(M)/rM = t(M/rM)$.

Definición B.1.3. Sea r un prerradical. Se dice que r es ***idempotente*** si $rr = r$ y se dice que r es ***radical*** si $(r : r) = r$

Ejemplos B.1.4. Si N es un submódulo totalmente invariante de M, entonces se definen los siguientes prerradicales: (a) $\alpha_N^M(K) = \Sigma\{f(N) \mid f \in Hom_R(M,K)\}$ y (b) $\omega_N^M(K) = \cap\{f^{-1}(N) \mid Hom_R(K, M)\}$. Así que α_M^M es un prerradical idempotente y ω_0^M es un radical.

Definición B.1.5. Sea r un prerradical. Se dice que r es un prerradical exacto izquierdo si para todo submódulo N de M, $rN = rM \cap N$.

Observemos que todo prerradical exacto izquierdo es idempotente.

Ejemplos B.1.6. Sea R un anillo con 1

(i) El prerradical Z es exacto izquierdo

(ii) El prerradical Soc es exacto izquierdo

B.2 Propiedades del radical de Goldie

Proposición B.2.1. *Sea $M \in R$-Mod se tiene que*

(i) Para todo submódulo $N \subseteq_e M$, $Z(N) \subseteq_e Z(M)$.

(ii) $Z(M) \subseteq_e Z_2(M)$.

(iii) Para todo submódulo $N \subseteq_e M$, $Z_2(N) \subseteq_e Z_2(M)$

(iv) $Z(M/Z_2(M)) = 0$.

Prueba. (i) Sea $K \subseteq Z(M)$. Como $K \cap N \neq 0$ existe $0 \neq x \in K \cap N$ tal que $An_R(x) \subseteq_e R$. Por lo tanto $K \cap Z(N) \neq 0$.
(ii) Sea $K \subseteq Z_2(M)$ tal que $K \cap Z(M) = 0$. Si $x \in K$ entonces $(Z(M) : x) \subseteq_e R$. Ahora bien, si $r \in (Z(M) : x)$ entonces $rx \in Z(M) \cap K$. Por lo que $rx = 0$, así que $r \in An_R(x)$. Es decir, $An_R(x) = (Z(M) : x) \subseteq_e R$. Por lo tanto $x \in Z(M)$ y entonces $x = 0$. Así $K = 0$.
(iii) Por los incisos anteriores tenemos que $Z(N) \subseteq_e Z(M) \subseteq_e Z_2(M)$. Así que $Z(N) \subseteq_e Z_2(M)$. Como $Z(N) \subseteq Z_2(N) \subseteq Z_2(M)$ entonces $Z_2(N) \subseteq_e Z_2(M)$.
(iv) Sea $[x] \in Z(M/Z_2(M))$ entonces $(Z_2(M) : x) \subseteq_e R$. Por el inciso anterior, $Z(M) \subseteq_e Z_2(M)$ entonces $(Z(M) : x) \subseteq_e (Z_2(M) : x)$. Así que $(Z(M) : x) \subseteq_e R$ y por lo tanto $x \in Z_2(M)$. Por lo que $[x] = 0$. □

Observación B.2.2. Por el inciso (iv) de la proposición B.2.1, tenemos que Z_2 es un radical. Al radical Z_2 se le llama el radical de Goldie.

Corolario B.2.3. Sea $M \in R$-Mod. Entonces $E(Z_2(M)) = Z_2(E(M))$.

Prueba. A continuación se probará que $Z_2(E(M))$ es inyectivo. Sea I un ideal izquierdo tal que $I \subseteq_e R$ y $f : I \to Z_2(E(M))$. Como $E(M)$ es inyectivo, f induce un morfismo $\overline{f} : R \to E(M)$ tal que $\overline{f}\,|_I = f$. Además, como $f(I) \subseteq E(M)$ se induce un morfismo de $g : R/I \to E(M)/Z_2(E(M))$ dado por $g(x+I) = \overline{f}(x) + Z_2(E(M))$. Asi que, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\pi_1} & R/I & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle \overline{f}}\big\downarrow & & {\scriptstyle g}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Z_2(EM) & \xrightarrow{i} & E(M) & \xrightarrow{\pi_2} & E(M)/Z_2(E(M)) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Como $I \subseteq_e R$ entonces $(I : x) \subseteq_e R$ para todo $x \in R$. Por lo tanto $An_R([x]) \subseteq_e R$ para toda $[x] \in R/I$. Así que $Z(R/I) = R/I$. Como $Z(E(M)/Z_2(EM)) = 0$ por el inciso anterior, entonces $g = 0$. Así que $\overline{f}(R) \subseteq Z_2(E(M))$. Por lo que $Z_2(E(M))$ es inyectivo. Por la proposicion anterior se tiene que $Z_2(M) \subseteq_e Z_2(E(M))$. Así que $E(Z_2(M)) = Z_2(E(M))$. $\square$

Bibliografía

[1] Anderson, Frank; Fuller, Kent; *Rings and categories of modules*; Springer-Verlag New York-Berlin, 1991

[2] Alvarado, Alejandro; Rincón, Hugo; Ríos, José; *Natural classes, left exact preradicals and flat Epimorphims*; Communications in Algebra 31(2) (2003) 819-830

[3] Birkhoff, Garrett; *Lattice theory*; American Mathematical Society Colloquim Publications 25, Providence, 1967

[4] Bo, Stenstrom; *Ring of quotients, an introduction to methods of ring theory*; Springer-Verlag New York-Berlin, 1975

[5] Bumby, Richard; *Modules which are isomorphic to submodules of each other*; Arch. Math. Basel 16 (1965) 184-185

[6] Dauns, John; Fuchs, Laszlo; *Infinite Goldie Dimnesions*; Journal of Algebra 115 (1988) 297-302

[7] Dauns, John; *Torsion free modules*; Annali di Matematica Pura ed Applicata 4(154) (1989) 49-81.

[8] Dauns, John; *Torsion free types*; Fundamenta Mathematicae 139 (1991) 99-117

[9] Dauns, John; *Classes of modules*; Forum Mathematicum 3 (1991) 327-338

[10] Dauns, John; *Module types*; Rocky Mountain Journal of Mathematics 27(2) (1997) 503-557

[11] Goodearl, K.R.; *Ring theory nonsingular rings and modules*; Marcel Dekker, 1967

[12] Goodearl, K.R.; Boyle, Ann K.; *Dimension theory for nonsingular inyective modules*; Memoir American Mathematical Society 7(177) Providence, RI, 1976

[13] Jech, Thomas; *Set theory*; Springer-Verlag New York-Berlin, 1997

[14] Raggi; Ríos; Rincón; Fernandez-Alonso; Signoret *The Lattice structure of pre-radicals* Communications in algebra 30(3) (2002) 1533-1544

[15] Ríos, José; Tapia, Gustavo *A general theory of types for nonsigular inyecive modules* Communications in Algebra 20(8) (1992) 2337-2364