



01174
4

Universidad Nacional Autónoma de México

**Facultad de Ingeniería
División de Estudios de Posgrado**

**“Integridad mecánica de pozos terminados en
formaciones no consolidadas”**

TESIS
**Que para obtener el grado de
Maestro en Ingeniería (Petrolera)**

Presenta
JOSÉ GUADALUPE IBARRA QUINTERO

Tutor: Dr. Daniel García Gavito

Ciudad Universitaria, México D.F.

2003

A



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

La caída de presión que se genera en un yacimiento con formaciones no consolidadas debido a la producción de los fluidos que contiene ocasiona una compactación de la formación del yacimiento este fenómeno provoca cargas radiales y axiales sobre la pared de la tubería de revestimiento (TR); si estas cargas son lo suficientemente grandes pueden provocar daño en la TR y una pérdida en la capacidad de producción de los pozos. Los costos asociados con el deterioro de la TR son grandes y puede poner en peligro la factibilidad económica de la explotación de hidrocarburos.

El objetivo de este trabajo es el de identificar las cargas a las que se encuentra sujeto el pozo después de su terminación y evaluar sus efectos sobre TR, lo anterior se obtuvo mediante el análisis de los cambios en los estados de esfuerzos que actúan sobre la tubería de revestimiento y la compactación que sufre la formación productora, debidos a el depresionamiento del yacimiento causado por la producción de los hidrocarburos.

Se obtuvieron modelos analíticos que permiten estudiar la integridad mecánica de las tuberías de revestimiento en formaciones no consolidadas. Se investigaron tres tipos de falla de la tubería de revestimiento; falla por pandeo, deformación radial y colapso por carga mecánica.

La presión que produce pandeo en la tubería de revestimiento es más crítica cuando los intervalos de producción son de gran espesor y combinados con diámetros pequeños de tubería cementada.

Problemas de integridad mecánica provocados por la deformación radial de la tubería, son más probables en tuberías de diámetros grandes.

Se obtuvieron resultados que indican que en una tubería de revestimiento cementada en presencia de una formación no consolidada de gran espesor, primero se presentara falla por pandeo, al incrementarse el grado de consolidación de la formación se reduce el riesgo de que se presente pandeo de la tubería. También se puede concluir, que antes de que se presente falla por deformación radial se presentaran primero ya sea la falla por pandeo o falla por colapso debido a carga mecánica en la tubería de revestimiento.

CONTENIDO

Capítulo		Página
I	Introducción.	1
II	Revisión de la Literatura.	3
	II.1. Definición de esfuerzo.	3
	II.2. Origen del Colapso de TR's.	5
	II.3. Deformación.	8
	II.4. Compactación y subsidencia.	14
III	Desarrollo de la metodología.	20
	III.1. Agujero cilindrico en un material infinito.	20
	III.2. Análisis de la compactación que sufre la formación productora debida al depresionamiento del yacimiento.	24
	III.3. Colapso de la TR relacionado con la compactación del yacimiento.	25
	III.3.1. Modelo de Cam- Clay.	25
	III.3.2. Modelo d compactación poro elástico.	28
	III.4. Deformación radial.	34
	III.5. Dedución del esfuerzo axial.	46
IV	Análisis de resultados	52
	IV.1. Colapso de tuberías de revestimiento.	52
	IV.2. colapso de tuberías de revestimiento por efecto de pandeo.	53

Capítulo	Página
IV.3. Análisis de la deformación radial.	59
IV.3.1. Cálculos de deformación radial con módulo de Young de la formación constante.	63
IV.3.2. Cálculos de deformación radial para diferentes propiedades de la formación productora.	68
IV.3.3. Cálculos de deformación radial para diferentes espesores de pared de la tubería.	74
IV.4. Análisis de la integridad mecánica de la tubería de revestimiento por el efecto de colapso.	76
IV.5. Comparación de los diferentes criterios de falla de la tubería.	78
V Conclusiones y recomendaciones	83
Referencias.	85
Nomenclatura	87
Apéndices.	88
A. Esfuerzo axial, radial y tangencial.	88
B. Esfuerzos principales.	97
C. carga crítica de pandeo.	102

CAPÍTULO I.

INTRODUCCIÓN.

El depresionamiento que se presenta en los yacimientos, debido a la producción de los fluidos que contiene, ocasiona una disminución en la presión de poro; este fenómeno puede ocasionar que se presente una compactación de la formación del yacimiento, así como la subsidencia de la superficie del yacimiento.

La reducción de la presión en el yacimiento es más grande en la vecindad del pozo y se incrementa con el tiempo y con el incremento en la producción; como la reducción en la presión de poro causa compactación de la formación que contiene los fluidos en el yacimiento, se presentan cargas radiales y axiales sobre el pozo; si estas cargas son lo suficientemente grandes pueden provocar daño en la TR y una pérdida en la capacidad de producción de los pozos. Los costos asociados con el deterioro de la TR son grandes y puede poner en peligro la factibilidad económica de la explotación de hidrocarburos.

La determinación de la compactación del yacimiento y las cargas que se presentan sobre el pozo no son simples de identificar. Las mediciones de campo de la compactación y de las cargas sobre el pozo son difíciles de realizar, debido al tiempo que se requiere para que estas cargas se manifiesten y a la dificultad técnica de su medición.

Los esfuerzos inducidos por el cambio en la presión de poro usualmente son calculados bajo la suposición que las deformaciones de la roca son uniaxiales sin inducir deformación a lo largo de la dirección horizontal. Algunos cálculos se pueden realizar con la suposición de que el espesor del yacimiento es pequeño, que la profundidad es razonablemente grande y que la rigidez es cercana a la confinación de la formación, como lo presenta Geertsma¹⁰.

PAGINACIÓN DISCONTINUA

El propósito esencial de esta tesis es el de identificar las cargas a las que se encuentra sujeto el pozo después de su terminación y evaluar sus efectos sobre la tubería de revestimiento y el cemento, para con esto poder garantizar que se mantenga la integridad mecánica e hidráulica de los elementos que conforman la terminación de los pozos, como son la tubería de revestimiento y el cemento.

Lo anterior se pretende lograr mediante el análisis de los cambios en los estados de esfuerzos que actúan sobre la tubería de revestimiento y la compactación que sufre la formación productora, debidos al depresionamiento del yacimiento causado por la producción de los hidrocarburos.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LA LITERATURA

II.1. Definición de esfuerzo.

El concepto de esfuerzo se refiere a la capacidad que posee un cuerpo para soportar una carga por unidad de área. Dependiendo de la dirección en la cual se aplica la fuerza con relación a la superficie, se obtienen los esfuerzos normales o de corte. En el caso de un pozo que fue perforado y cementada un TR, se encuentra sujeto a los esfuerzos como se muestra en la figura II.1.

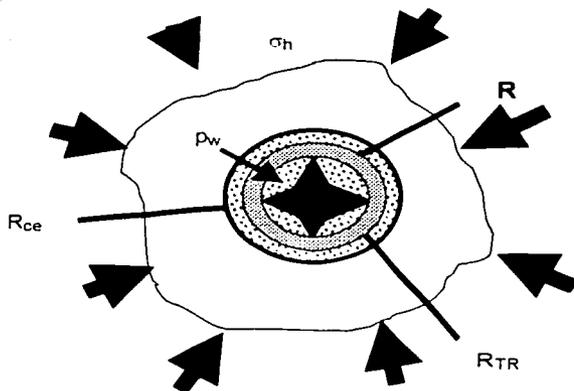


Fig. II.1. Plano de un pozo terminado

Timoshenko y Goodier (1970) presentaron las ecuaciones siguientes, para el cálculo del estado de esfuerzos en un tubo de radio interno R_i y radio externo R_o , sujeto a una presión interna p_i y una presión externa p_o .

$$\sigma_{pp} = \frac{p_o R_o^2 - p_i R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} + \frac{R_o^2 R_i^2 (p_i - p_o)}{R_o^2 - R_i^2} \frac{1}{\rho^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p_o R_o^2 - p_i R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} - \frac{R_o^2 R_i^2 (p_i - p_o)}{R_o^2 - R_i^2} \frac{1}{\rho^2}$$

Para un radio infinito, estas ecuaciones convergen a la solución de Lamé. Si P_{TR} es la presión en la interface TR-Cemento y P_{cem} es la de la interface Cemento-Roca, el estado de esfuerzos en la TR, cemento y roca pueden escribirse respectivamente como:

$$Cemento \begin{cases} R_i = R_{TR}; P_i = P_{TR} \\ R_o = R_{cem}; p_o = P_{cem} \end{cases} \begin{cases} \sigma_{pp} = \frac{P_{cem} R_{cem}^2 - P_{TR} R_{TR}^2}{R_{cem}^2 - R_{TR}^2} + \frac{R_{TR}^2 R_{cem}^2 (P_{TR} - P_{cem})}{R_{cem}^2 - R_{TR}^2} \frac{1}{\rho^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{P_{cem} R_{cem}^2 - P_{TR} R_{TR}^2}{R_{cem}^2 - R_{TR}^2} - \frac{R_{TR}^2 R_{cem}^2 (P_{TR} - P_{cem})}{R_{cem}^2 - R_{TR}^2} \frac{1}{\rho^2} \end{cases}$$

$$TR \begin{cases} R_i = R; P_i = P_w \\ R_o = R_{TR}; p_o = P_{TR} \end{cases} \begin{cases} \sigma_{pp} = \frac{P_{TR} R_{TR}^2 - P_w R^2}{R_{TR}^2 - R^2} + \frac{R^2 R_{TR}^2 (P_w - P_{TR})}{R_{TR}^2 - R^2} \frac{1}{\rho^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{P_{TR} R_{TR}^2 - P_w R^2}{R_{TR}^2 - R^2} - \frac{R^2 R_{TR}^2 (P_w - P_{TR})}{R_{TR}^2 - R^2} \frac{1}{\rho^2} \end{cases}$$

$$Roca \begin{cases} R_i = R_{cem}; P_i = P_{cem} \\ R_o = R''; p_o = \sigma_h \end{cases} \begin{cases} \sigma_{pp} = \sigma_h \left[1 - \frac{R_{cem}^2}{\rho^2} \right] + \frac{P_{cem} R_{cem}^2}{\rho^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_h \left[1 - \frac{R_{cem}^2}{\rho^2} \right] - \frac{P_{cem} R_{cem}^2}{\rho^2} \end{cases}$$

Los pasos asociados con la perforación y la terminación se muestran en las figuras II.2 y II.3.

Los estados a y b corresponden a la fase de perforación donde la presión del pozo es gradualmente reducida desde el esfuerzo horizontal mínimo (σ_h) (estado inicial) hasta la densidad de lodo (ρ_{mud}).

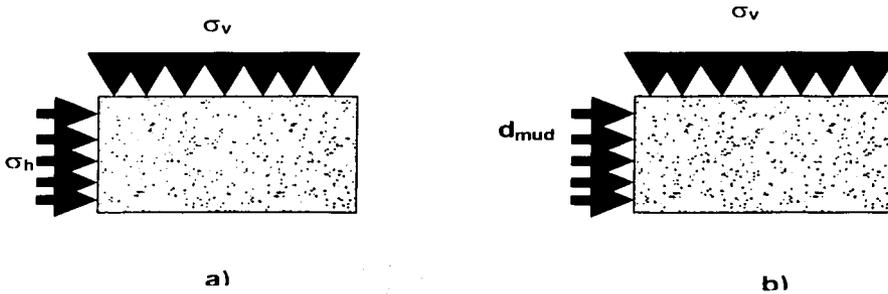


Fig. II.2. Pasos asociados con la perforación

La fase c corresponde al pozo con la TR sin cementar (con presión de ρ_{mud}), la presión del pozo es gradualmente incrementada al peso de la columna de cemento (ρ_{cem}) fase d.

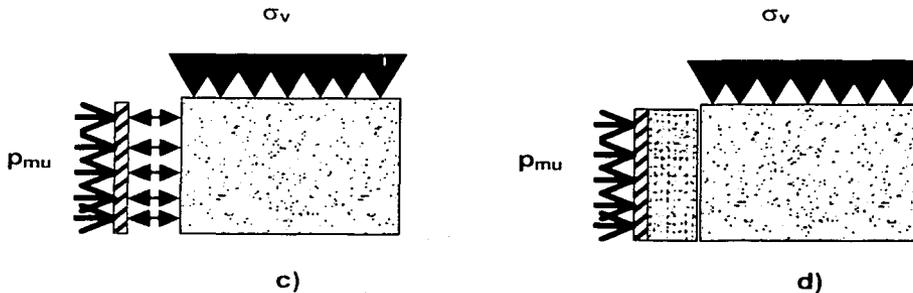


Fig. II.3. Pasos asociados con la terminación

II.2. Origen del colapso de TR's.

El colapso de TR's es un fenómeno que resulta de un movimiento anormal transversal en la formación. Estos desplazamientos son de tres tipos: compactación, resbalamiento y deslizamiento de discontinuidades.

Existen cinco posibles mecanismos responsables del daño a la TR.

➤ Cortante.

El corte de la TR es causada por el corte de la roca. El corte de la roca es causado por cambios en esfuerzos y presión a los que se encuentra sujeta la roca, inducido por las actividades realizadas en la recuperación de los hidrocarburos del yacimiento, tales como el depresionamiento, inyección y el calentamiento.

Las deformaciones de la TR en corte se puede presentar además donde se intercepta con un corte activo, falla o deslizamiento de la superficie (figura II.4a). El desplazamiento de esfuerzo local puede conducir a la obstrucción de los trabajos en las operaciones y fallar la TR.

➤ Tensión.

La TR puede fallar en tensión debido a la elongación de la formación (figura II.4b).

➤ Compresión axial.

En la compactación del yacimiento, la TR puede experimentar pandeo y colapso como un resultado de la compresión axial. Esto puede conducir a una excesiva curvatura y restricciones en el diámetro interior de la TR, causando problemas en posibles trabajos que se requieran realizar (figura II.4c).

➤ Compresión lateral.

La TR toma forma elíptica, cuando las cargas no son uniformes en la dirección lateral, como se muestra en la figura II.4d. La forma ovalada que toma la TR, provoca una reducción en el diámetro interior y puede derivar en la obstrucción para poder llevar a cabo trabajos en el interior de la TR.

➤ Pandeo.

El pandeo de la TR se puede presentar cuando se presenta una compactación del yacimiento, produciendo en la TR el efecto de pata de perro en la tubería. Este efecto es esquematizado en la figura II.4e.

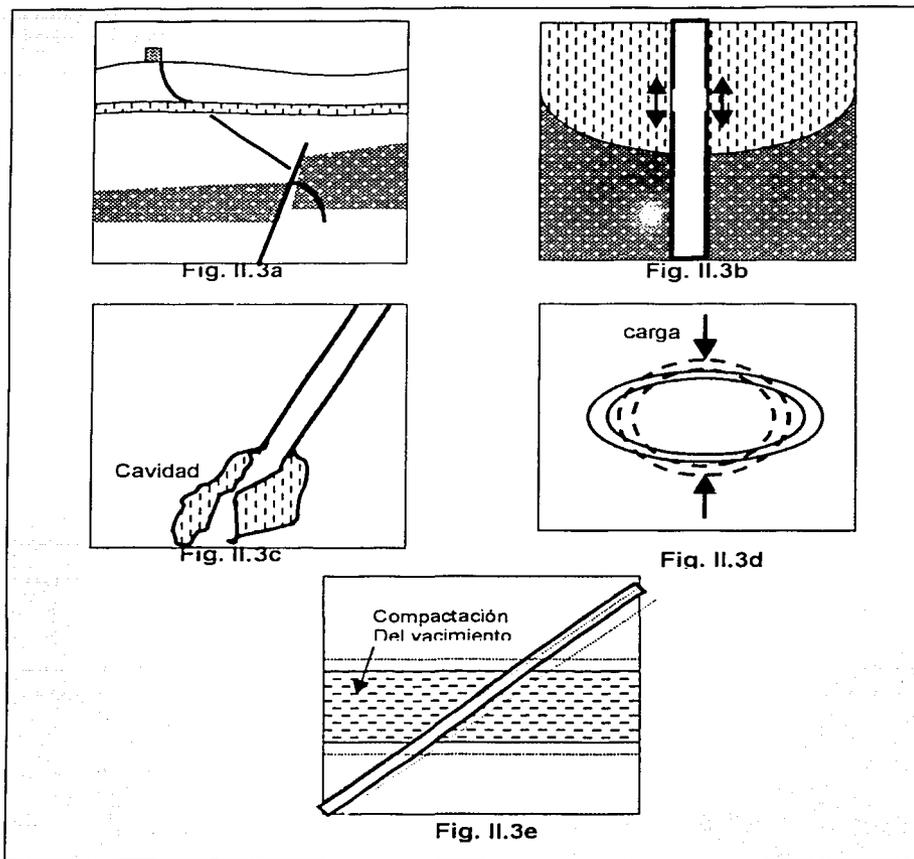


Fig. II.4. Mecanismos responsables del daño a la TR.

II.3. Deformación.

La deformación, es la relación existente entre la nueva magnitud o forma de un elemento y su configuración original o no alterada, cuando se ha sometido a fuerzas externas, como se muestra en la figura II.5. Existen diversas medidas de deformación (Cauchy, Green, Hencky y Almansi).

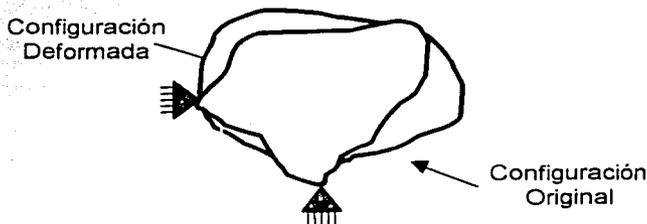


Fig. II.5. Esquema de Deformación

La deformación total se supone que consiste de una parte elástica y una parte plástica. La deformación elástica está relacionada al incremento del esfuerzo. Si presenta una deformación en la roca, para la cual ocurren cambios irreversibles, este punto se define como el punto de cedencia.

Veeken et al.¹⁵ (1994) presentaron un trabajo, "Experimental modelling of casing deformation in a compacting reservoir", en el cual se realiza un estudio de la deformación de TR donde la deformación de la TR en la compactación del yacimiento es modelada experimentalmente asistido con el diseño de una terminación con un registrador de compactación tolerada, instalada a la profundidad de la formación de arena no consolidada del yacimiento. Pudieron observar que la compactación causa pandeo severo en la TR si la resistencia lateral de la TR es insuficiente. Los resultados experimentales obtenidos en este trabajo, indican que el daño a la TR por compactación del yacimiento puede ser reducido, previendo un adecuado soporte lateral, cambio en la desviación del agujero y usando TR de espesor de pared mayor.

En este trabajo se pueden identificar parámetros que influyen en la deformación de la TR, los más importantes son:

- Agujero: Desviación y pata de perro inicial.
- TR: Espesor de pared, grado del acero, conexiones y política de perforación.
- Formación: dureza, deformación, heterogeneidad en la interface TR-Formación, tipo de cemento, cavitación, empacamiento de grava, esfuerzos en la interface.

Morita et al.¹³ (1986) publicaron un trabajo donde se desarrolló un método rápido para determinar subsidencia, compactación del yacimiento y esfuerzos in-situ inducidos por el depresionamiento del yacimiento.

En este trabajo, se realiza el estudio para encontrar un grupo de parámetros que controlan los esfuerzos in-situ, subsidencia y la compactación en el yacimiento. Este grupo de parámetros fue usado para analizar los resultados del cálculo numérico generados por un modelo de tres dimensiones, no lineal y de elemento finito. La aplicación de este trabajo es para control de producción de arena, problemas de pandeo de TR, diseño de trabajos de fracturamiento hidráulico y problemas de subsidencia.

Suposiciones y método de calculo empleado por N. Morita et al.¹³ (1986).

El esfuerzo in-situ se descompone en dos partes, esfuerzo original in-situ y esfuerzo in-situ inducido por el cambio en la presión de poro.

$$\sigma_{I'} = \sigma_{I'o} + \Delta\sigma_{I'} \quad \text{II.1}$$

y

$$\sigma_{II} = K\sigma_{I'o} + \Delta\sigma_{II} \quad \text{II.2}$$

Donde K es el coeficiente de variación del esfuerzo afectado por la forma de grano de la roca, distribución y tamaño del grano, proceso de sedimentación, presencia de la relación de Poisson, fuerzas tectónicas, temperatura y presión de poro, $\Delta\sigma_v$ y $\Delta\sigma_H$ son los componentes del esfuerzo in-situ inducido por el cambio en la presión de poro. Se supone deformación de roca elástica.

Se considera forma de disco para el cálculo, como se muestra en la figura II.6.

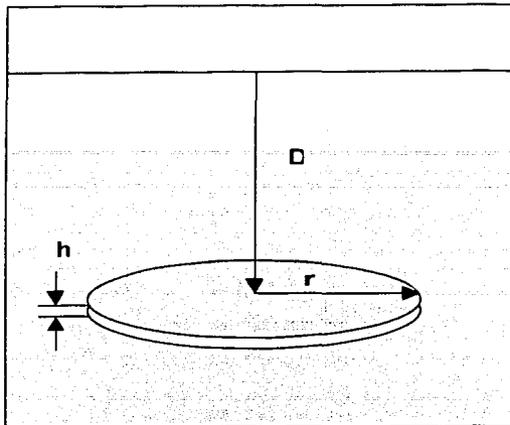
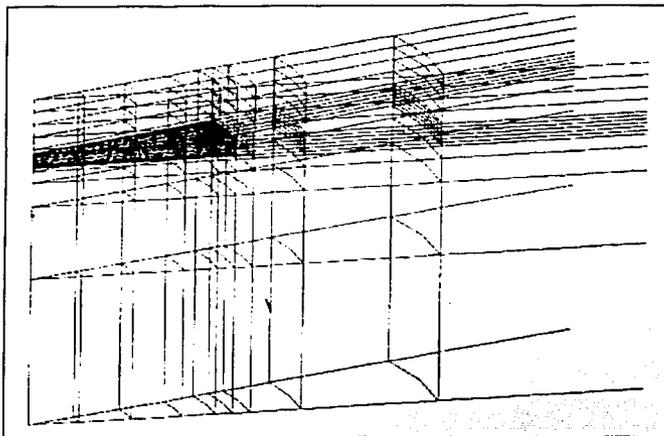


Fig. II.6. Configuración del Yacimiento¹³.

El yacimiento se localiza a una profundidad D desde la superficie y tiene un radio r y un espesor h .

En la figura II.7 se muestra las mallas del elemento finito empleado en este trabajo. La sección entrampada es el yacimiento y tiene diferentes módulos elásticos para las formaciones. La presión de poro de la sección del yacimiento se reduce para calcular el cambio en la deformación y el esfuerzo del yacimiento y las formaciones adyacentes. Los cálculos se realizaron para un pozo con y sin tubería cementada en agujero. Sin embargo los resultados calculados con TR no se muestran en este trabajo, debido a que los efectos sobre el estado de esfuerzos y la compactación del yacimiento fueron triviales.

Fig. II.7. Mallas del elemento finito¹³.

Morita et al.¹³ (1986) emplea el análisis de parámetros para encontrar una serie de grupos de parámetros que afectan el desplazamiento y los esfuerzos; las formas de las ecuaciones encontradas para el cálculo del desplazamiento, la compactación y los esfuerzos son las siguientes:

Compactación en el centro del yacimiento.

$$\Delta c = C_1 \frac{1 + \mu R}{1 + \mu R} b \beta h \Delta p \quad \text{II.3}$$

Esfuerzo total en el centro del yacimiento.

$$\Delta \sigma_{1R} = C_2 \beta \Delta p \quad \text{II.4}$$

Esfuerzo total en el estrato impermeable.

$$\Delta \sigma_{1C} = \frac{1}{2} (\Delta \sigma_{1u} + \Delta \sigma_{1l}) \quad \text{II.5}$$

$$\Delta \sigma_{HC} = \frac{1}{2} (\Delta \sigma_{Hu} + \Delta \sigma_{Hl})$$

Diferencia total de esfuerzos entre la cima de la formación y en cualquier posición hasta su base.

$$\frac{1}{2}(\Delta\sigma_{IIU} + \Delta\sigma_{III}) - \Delta\sigma_{IIR} = C_3\beta \frac{1-2\mu_R}{1-\mu_R} \Delta p \quad \text{II.6}$$

Donde las constantes C_i son función del módulo de corte, radio del yacimiento, espesor del yacimiento, relación de poisson y profundidad del yacimiento. Las constantes son obtenidas de gráficas de las relaciones de los parámetros mencionados en diferentes condiciones.

Se han realizado otros estudios acerca de la deformación de la TR en donde se establece la relación entre la compactación del yacimiento y el deterioro de la TR mediante un análisis estático, un modelo de elemento finito, el análisis de deformación de la TR y la corrida de registros realizados a TRs colapsadas. La deformación de la TR esta relacionada principalmente al incremento en la deformación en la vecindad del pozo, inclinación del pozo y el diámetro de la TR. Además se han obtenido correlaciones útiles para estimar probabilidades futuras de deformación de TR como una función de las variables el yacimiento y parámetros del pozo. En un estudio realizado en el campo de Ekofisk, en Mar del Norte se pudo concluir que el deterioro de la TR inducido por la compactación del yacimiento puede ser minimizado mediante un programa de mantenimiento de la presión, para reducir la deformación.

El deterioro de la TR puede ser resultado de la compactación del yacimiento. Es a menudo difícil la identificación del mecanismo de deterioro de la TR. En la figura II.8 se ilustran las cargas resultantes en la TR debidas a la compactación de la roca del yacimiento.

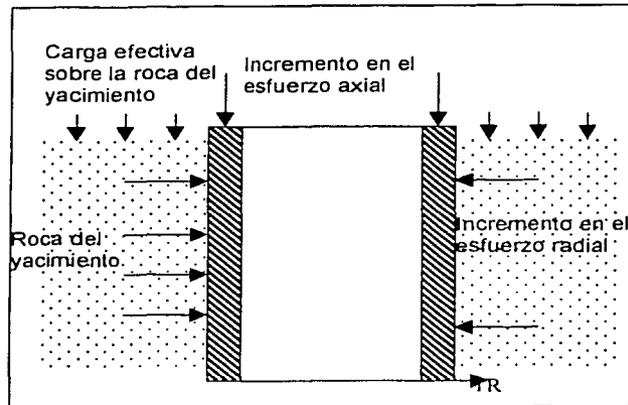


Fig. II.8. del deterioro de la TR como resultado de la compactación de la roca del yacimiento.

Se pueden presentar tres tipos de compactación del yacimiento:

- Reducción en la presión de poro debido a la producción del yacimiento.
- Incremento en la carga efectiva sobre la roca del yacimiento.
- Cuando la roca del yacimiento es compactada por el incremento de la carga.

Los mecanismos de modelo de falla en la TR pueden dividirse en dos áreas: inestabilidad estructural, modelos de falla relacionados a los esfuerzos inherentes de la TR.

En muchos casos de TR no se cementa a lo largo de toda su longitud; en estos casos se incrementa la probabilidad de que se presenten problemas de pandeo, cuando se encuentran sujetas a grandes cargas axiales como resultado de la compactación del yacimiento.

Da Silva y Debande⁷ (1990), elaboraron un análisis del colapso de la TR asociado con la compactación del yacimiento y la subsidencia de la sobrecarga. En este trabajo se pudo observar que, la declinación de la presión asociada con la producción induce compactación del tamaño del poro en el yacimiento, y la subsidencia de la sobrecarga en muchos campos en Mar del Norte. Se han desarrollado técnicas numéricas que describen el mecanismo de

falla de la TR en la compactación del yacimiento asociada a la sobrecarga. Un modelo de elemento finito en tres dimensiones (3D) se emplea para simular y predecir la posible falla de la TR.

En el trabajo "Casing Shear: Causes, Cases, Cures" presentado por Dusseault et al^B. (2001) se presenta un estudio del corte de la TR causado por los cambios en los esfuerzos y la presión que actúan sobre la tubería, estos cambios son inducidos por la depresionamiento del yacimiento ocasionado por la explotación de los hidrocarburos, la inyección de fluidos o el calentamiento del yacimiento para aplicar un sistema de recuperación secundaria o mejorada. También se menciona que, los mecanismos de deformación de la TR son localizados cortes horizontales en interfaces litológicas frágiles; se localizan cortes horizontales en parte superior del intervalo productor o de inyección y se presenta pandeo de la tubería dentro de la sección del intervalo productor o de inyección.

La inyección conduce a cizallamiento por dos mecanismos:

- Alta presión reduce el esfuerzo efectivo normal como se puede ver en la ecuación II.7:

$$\tau_{\max} = c' + \sigma_n' \tan \phi' \quad \text{II.7}$$

Donde: τ_{\max} es el máximo esfuerzo de corte que soporta el plano antes deslice, c' es la cohesión de la roca, σ_n' es el esfuerzo normal efectivo a través del plano que desliza y ϕ' es el ángulo de fricción interna.

- La expansión del yacimiento conduce a cizallamiento cerca de la interface donde los esfuerzos son concentrados.

II.4. Compactación y subsidencia.

Cuando se produce petróleo o gas en yacimientos profundos, la presión del fluido generalmente declina. Al reducir la presión de poro en la roca del yacimiento, causará que ésta se contraiga y el yacimiento se compacte. La compactación del yacimiento puede entonces ocasionar subsidencia en la superficie.

Muchos yacimientos de petróleo y gas experimentarán sólo un pequeño grado de compactación y la correspondiente subsidencia en la superficie será imperceptible. Para observar un considerable grado de subsidencia, uno o varias de las siguientes condiciones deben estar presentes:

- La caída de presión del yacimiento debe ser considerable. La afluencia de agua, por ejemplo, reducirá el efecto de la compactación.
- La roca del yacimiento debe ser altamente compresible. La compactación es más probable que se presente en rocas débiles y no consolidadas.
- El yacimiento debe tener un espesor considerable, debido a que la compactación del yacimiento normalmente es de un porcentaje bajo. Sin embargo, la zona agotada debe ser considerada completa. Un acuífero adyacente contribuirá a la compactación, y también una parte de la sobrecarga si drena el yacimiento.
- El yacimiento debe tener una extensión areal comparable con el espesor del yacimiento, para que el cubrimiento de la roca no escude la compactación (efecto viga).

Considerando las condiciones anteriores, deberíamos esperar sólo unos pocos yacimientos con severos problemas de subsidencia, y eso ha sido la experiencia a nivel mundial. Por supuesto, la subsidencia no siempre es detectada. Por otra parte, si la subsidencia es experimentada, esto puede tener serias consecuencias

Cada caso en la historia es único, así como los yacimientos son también todos diferentes y su vez lo es la roca subyacente a ellos. Si la geología es compleja, y muchas veces lo es, el comportamiento de la masa de roca debe ser complejo también. Algunas veces la subsidencia está asociada con grietas y temblores, pero se conoce de muchos comportamientos apacibles cuando se desarrolla un cono de subsidencia. Existe sin embargo, un aspecto que parece ser típico para el comportamiento de la subsidencia, esto es, la dependencia del tiempo. Si el yacimiento y la sobrecarga se asumen con un comportamiento elástico, deberíamos esperar que la subsidencia siga a la caída de presión del yacimiento. En lugar de eso, observamos un cierto tiempo de demora antes que se desarrolle la subsidencia, y esta demora puede estar en el orden de varios años. Existen varios mecanismos que pueden causar esta dependencia del tiempo; los más importantes son:

- Comportamiento visco-plástico o visco-elástico del yacimiento y de la roca subyacente (efecto de repteo).
- Drenaje de capa o estrato de lutitas y/o arcillas.
- Comportamiento transitorio debido a cambios en la rata de carga.
- Heterogeneidad y no-linealidad en las propiedades mecánicas.

La importancia relativa de estos efectos tiene que ser considerada para cada caso.

El grado de compactación de un yacimiento, por supuesto, dependerá primero de las propiedades mecánicas de la roca y de la caída de presión. El alcance de la compactación para la subsidencia en la superficie, dependerá de las rocas subyacentes y de factores geométricos tales como las dimensiones del yacimiento comparadas con la profundidad. Un completo estudio de subsidencia incluyendo modelaje y predicción, es generalmente una tarea muy complicada, e involucra el uso de avanzadas técnicas de simulación.

II.4.1. Compactación del yacimiento.

El modelo básico para estudiar que ocurre en el yacimiento es el de deformación por compactación uniaxial. En el laboratorio esto puede en un principio ser realizado con una muestra cilíndrica confinada en una celda rígida colocada verticalmente para simular la presión de sobrecarga. Si el fluido se extrae causa una caída de presión Δp_r , el efecto de la sobrecarga se incrementará correspondientemente y la muestra se compactará.

II.4.2. Inducción del desplazamiento debido a la subsidencia del yacimiento.

Cuando las dimensiones laterales del yacimiento son muy grandes en comparación con el espesor vertical, la máxima compresión asociada con el abandono del fluido puede ser asumida que ocurre en la dirección vertical. La compactación vertical, Δh , del yacimiento puede ser descrita aproximadamente con la siguiente expresión.

$$\Delta h/h = C_m \Delta p$$

II.8

Donde h = espesor original del yacimiento, C_m = coeficiente de compactación uniaxial del material, y Δp = cambio de presión en el yacimiento.

La subsidencia se refiere al desplazamiento que puede producirse en la superficie debido a la compactación del yacimiento. El grado con el que la compactación de la superficie es transferida al desplazamiento de la superficie depende de la extensión areal del yacimiento y de la profundidad a la que se encuentre el yacimiento.

Solución analítica. El resultado del desplazamiento de la superficie para compactación subsuperficial puede obtenerse aplicando el concepto de deformación de núcleos para mecánica continua descrita por Geertsma¹¹. La deformación volumétrica en un punto, causado por la reducción local de la presión de poro, es tratada como un centro de compresión en una mitad de la cara. Esto produce un correspondiente desplazamiento en la superficie libre. La deformación total de la superficie causado por la variación en la reducción de la presión dentro de una forma arbitraria de yacimiento es dada integrando la contribución de todos los puntos de compresión sobre el volumen del yacimiento como sigue.

$$s_x(x_o, y_o) = -\frac{C_m}{\pi} (1-\mu) \int_V \frac{x_o - x}{[(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2 + z^2]^{3/2}} \Delta p(x, y, z) \Delta V \quad \text{II.9a}$$

$$s_y(x_o, y_o) = -\frac{C_m}{\pi} (1-\mu) \int_V \frac{y_o - y}{[(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2 + z^2]^{3/2}} \Delta p(x, y, z) \Delta V \quad \text{II.9b}$$

$$s_z(x_o, y_o) = -\frac{C_m}{\pi} (1-\mu) \int_V \frac{z}{[(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2 + z^2]^{3/2}} \Delta p(x, y, z) \Delta V \quad \text{II.9c}$$

En las ecuaciones anteriores s_x y s_y son los desplazamientos horizontales y s_z es el desplazamiento vertical en la posición (x_o, y_o) sobre la superficie como se muestra en la figura II.9, $\Delta p(x, y, z)$ define la caída de presión que se produce dentro del volumen del yacimiento, V , del yacimiento, donde el gradiente de subsidencia vertical es mayor.

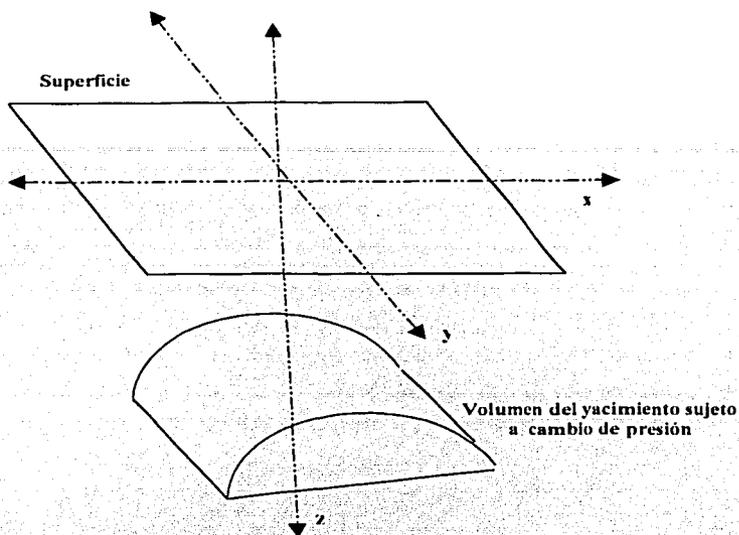


Figura II. 9. Desplazamiento superficial debido a la compactación del yacimiento¹¹.

En la figura II.10, se muestra el desplazamiento para un modelo de yacimiento de forma de disco, a una profundidad igual a su tamaño radial, sujeto a una caída de presión uniforme. La subsidencia superficial vertical es máxima en el centro y disminuye a un valor menor del 20% del máximo a una distancia cercana a dos veces al radio del yacimiento. El desplazamiento horizontal excede 40% de la máxima subsidencia vertical cerca del extremo

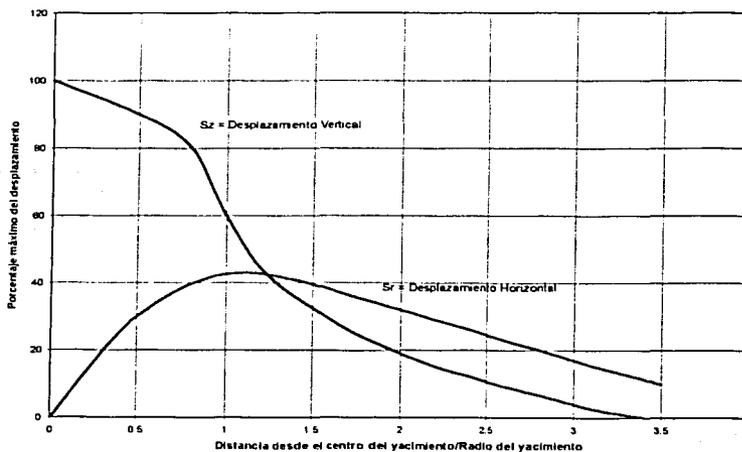


Figura II.10. Subsidencia para un modelo de yacimiento en forma de disco¹¹.

Para aplicar las fórmulas de compactación el problema principal es obtener valores promedios razonables para los parámetros de interés. Generalmente la distribución de presión no será uniforme, al igual que las propiedades mecánicas. Si se está interesado en la compactación máxima en el centro del yacimiento, entonces se deben buscar valores típicos para esa zona. La utilización de valores promedios para todo el yacimiento puede dar resultados erróneos.

CAPÍTULO III.

DESARROLLO DE LA METODOLOGIA.

Análisis del cambio en el estado de esfuerzos que actúan sobre la tubería de revestimiento, provocado por el depresionamiento del yacimiento.

III.1. Agujero cilíndrico en un material infinito.

Los esfuerzos y los desplazamientos pueden ser determinados empleando simuladores numéricos para, el caso de un agujero cilíndrico en un material elástico-plástico sujeto a esfuerzos in-situ. El material se considera que es lineal elástico, perfectamente plástico, con una superficie de falla definida por el criterio de Mohr Coulomb, y ambos asociados a (dilatación = ángulo de fricción) y no asociado (dilatación = 0) y reglas de flujo son empleadas.

La solución analítica para este problema fue encontrada por Salencon (1969), el radio de la zona de esfuerzo, R_o , puede ser expresada, en los siguientes términos:

$$\frac{R_o}{a} = \left[\frac{2 \left(1 + \frac{q}{P_o} k_p \right)}{K_p + 1 \frac{P_i}{P_o} + \frac{q}{P_o} k_p} \right]^{k_p} \quad \text{III.1}$$

en donde "a" es el radio del pozo, " P_o " es el valor absoluto del esfuerzo isotrópico in-situ, " P_i ", es la presión dentro del agujero, y

$$K_p = \frac{1 + \text{sen} \phi}{1 - \text{sen} \phi} \quad \text{III.2}$$

$$k_p = \frac{1}{K_p - 1} \quad \text{III.3}$$

$$q = 2c\sqrt{K_p} \quad \text{III.4}$$

el esfuerzo radial en la interface elástica/plástico puede ser escrito como:

$$\frac{\sigma_{re}}{P_o} = -\frac{1}{K_p + 1} \left(2 - \frac{q}{P_o} \right) \quad \text{III.5}$$

Los esfuerzos en la zona plástica tienen la forma:

$$\frac{\sigma_r}{P_o} = \frac{q}{P_o} k_p - \left(\frac{P_i}{P_o} + \frac{q}{P_o} k_p \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{K_p - 1} \quad \text{III.6}$$

$$\frac{\sigma_\theta}{P_o} = \frac{q}{P_o} k_p - K_p \left(\frac{P_i}{P_o} + \frac{q}{P_o} k_p \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{K_p - 1} \quad \text{III.7}$$

En donde "r" es la distancia desde el centro del agujero.

Los esfuerzos en la zona elástica son:

$$\frac{\sigma_r}{P_o} = -1 + \left(1 - \frac{\sigma_{re}}{P_o} \right) \left(\frac{R_o}{a} \frac{a}{r} \right)^2 \quad \text{III.8}$$

$$\frac{\sigma_\theta}{P_o} = -\frac{\sigma_r}{P_o} - 2 \quad \text{III.9}$$

El comportamiento de los esfuerzos es mostrado en la figura III.1 de forma cualitativa, en donde se puede observar que a medida que se aleja del centro del agujero la variación del esfuerzo radial disminuye.

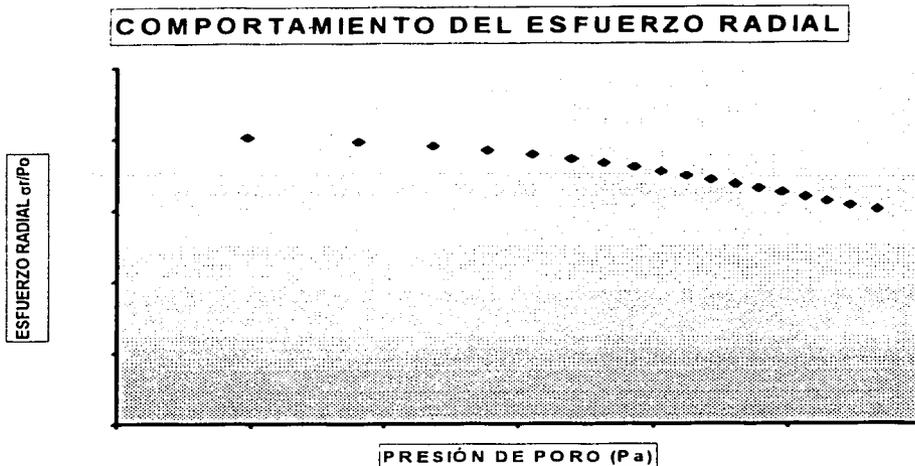


Figura III.1. Comportamiento del esfuerzo radial

Los desplazamientos en la región elástica son presentados como:

$$\frac{u_r}{a} = \frac{P_o}{2G} \left(1 + \frac{\sigma_{rc}}{P_o} \right) \left(\frac{R_o}{a} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right) \quad \text{III.10}$$

y, en la región plástica, como:

$$\frac{u_r}{a} = \frac{P_o}{2G} \frac{r}{a} \chi \left(\frac{r}{a} \right) \quad \text{III.10a}$$

en donde

$$\begin{aligned} \chi \left(\frac{r}{a} \right) &= (2\mu - 1) \left(1 + \frac{q}{P_o} k_p \right) \\ &+ \frac{(1 - \mu)(K_p^2 - 1)}{K_p + K_{ps}} \left(\frac{P_1}{P_o} + \frac{q}{P_o} k_p \right) \left(\frac{R_o}{a} \right)^{K_p \cdot K_{ps}} \left(\frac{r}{a} \right)^{-K_{ps} - 1} \\ &+ \left[(1 - \mu) \frac{K_p K_{ps} + 1}{K_p + K_{ps}} - \mu \right] \left(\frac{P_1}{P_o} + \frac{q}{P_o} k_p \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{K_p - 1} \end{aligned} \quad \text{III.11}$$

y

$$K_{ps} = \frac{1 + \text{sen } \psi}{1 - \text{sen } \psi}$$

III.12

En estas ecuaciones, μ es la relación de poisson, ψ es el ángulo de dilatación, y G es el módulo de corte.

El comportamiento del efecto que tiene la caída de presión en la deformación es mostrado en la figura III.2, en la cual se puede concluir que a medida que se aleja del centro del agujero el efecto de la caída de presión sobre la deformación del material disminuye.

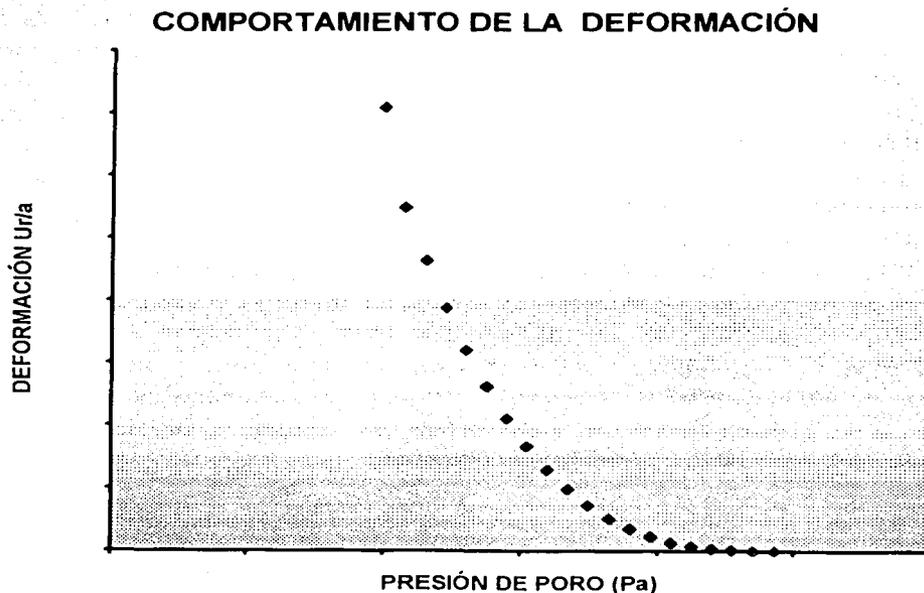


Figura III.2. Comportamiento de la deformación.

III.2. Análisis de la compactación que sufre la formación productora debida al depresionamiento del yacimiento.

Un análisis riguroso de la compactación inducida que provoca la deformación de la TR requiere datos volumétricos del yacimiento, y datos de sobrecarga como función del tiempo; en muchas ocasiones esto resulta impráctico o difícil de obtener. Este problema puede resolverse empleando un método estático aplicado a un número grande de pozos, con el uso de correlaciones empíricas que involucren las variables que afectan la deformación de la TR.

Los esfuerzos y las deformaciones en el yacimiento son los factores dominantes en la deformación de la TR.

Con el incremento del esfuerzo efectivo el tamaño de poro sufre una disminución volumétrica, lo cual se puede atribuir al colapso del poro. Este fenómeno puede ser descrito mediante las leyes de elástico-plástico y esfuerzo-deformación. Estas leyes son implementadas dentro del sistema del elemento finito, especialmente aplicada a la geomecánica y a la geología. Para el análisis de estabilidad del pozo, estabilidad de la TR, subsidencia y compactación, se emplea el concepto de esfuerzo efectivo e incluye la presión de poro como un grado adicional de libertad.

El cizallamiento de la formación que acompaña a la compactación del yacimiento puede inducir cizalle en la TR. La compactación es una disminución en el volumen del yacimiento inducido por la reducción de la presión de poro, usualmente asociado con el depresionamiento. El decremento de la presión causa un incremento en las fuerzas de grano con grano, y la compactación del yacimiento ocurre como consecuencia de ese contacto compresivo. Si el yacimiento se comporta como un material lineal elástico, se puede considerar un coeficiente de compresibilidad constante.

III.3. Colapso de la TR relacionado con la compactación del yacimiento.

La reducción en la presión de poro en una formación productora provoca que exista compresibilidad de la formación y las pobres cualidades de soporte lateral, produce deformación y compactación que se encuentra asociada con la deformación en la tubería de revestimiento.

Para el problema en estudio F_{crit} debe ser expresado como, ver apéndice C:

$$F_{crit} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \tag{III.13}$$

El momento de inercia de una tubería cilíndrica es calculado con:

$$I = \frac{\pi}{4} (R_o^4 - R_i^4) \tag{III.14}$$

En el análisis del efecto que tiene la compactación de la formación sobre la tubería de revestimiento se emplearon dos diferentes modelos de compactación, a continuación se muestran las deducciones para obtener las relaciones que nos permiten calcular el comportamiento de la presión de colapso de la tubería de revestimiento.

III.3.1. Modelo Cam-Clay.

En cualquier instante una columna sujeta a una fuerza axial como se ilustra en la figura III.3, y con ayuda de un balance de fuerzas se puede obtener una relación para obtener la fuerza o carga crítica de pandeo que actúa sobre la tubería³.

$$F_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{III.15}$$

donde:

E: Módulo elástico del acero.

I: Momento de inercia de la sección.

L: Longitud de la TR no soportada.

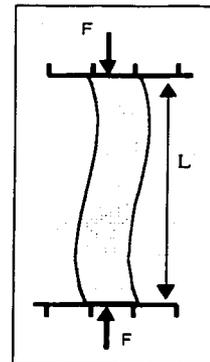
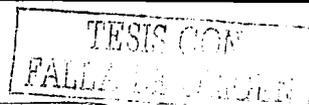


Figura III.3



En un modelo de Cam-Clay la presión de colapso se puede expresar con la siguiente relación:

$$p(t) = \sigma_v^o - (\sigma_v^o - p_R) \exp\left[\frac{1+e_v}{\lambda} \varepsilon_v(t)\right] \quad \text{III.16}$$

donde:

σ_v^o : peso de la sobrecarga.

p_R : presión de yacimiento.

λ : coeficiente de compresibilidad de la formación.

$\varepsilon_v(t)$: deformación vertical.

considerando que:

$$\sigma_{rv} + \sigma_{ov} = 2p(t) \quad \text{III.17}$$

Y asumiendo que la presión en ambos lados de la TR es igual a la presión del yacimiento, además de que en cualquier punto de la TR, la deformación vertical puede ser expresada como:

$$\varepsilon_v(t) = \frac{1}{E_{TR}} [\sigma_v(t) - \nu_{TR} (\sigma_{rv} + \sigma_{ov})] \quad \text{III.18}$$

Se puede obtener que:

$$\sigma_v(t) = \varepsilon_v(t) E_{TR} + 2\nu_{TR} p(t) \quad \text{III.19}$$

Por lo tanto

$$F_v(t) = \varepsilon_v(t) E_{TR} + 2\nu_{TR} p(t) A_{TR} \quad \text{III.20}$$

Para el caso en el que la deformación del yacimiento es considerable el segundo término de la anterior ecuación puede ser despreciable en comparación con el primer término, por lo tanto sustituyendo la relación para la deformación en la ecuación de la presión de pandeo se obtiene que:

$$p(t) = \sigma_v^o - (\sigma_v^o - p_R) \exp \left[\frac{1 + e_o}{\lambda} \frac{F_v(t)}{E_{TR}} \right] \tag{III.21}$$

Ahora sustituyendo la relación para la fuerza crítica en la anterior ecuación se obtiene:

$$p(t) = \sigma_v^o - (\sigma_v^o - p_R) \exp \left[\frac{1 + e_o}{\lambda} \frac{4\pi^2 I}{L^2} \right] \tag{III.22}$$

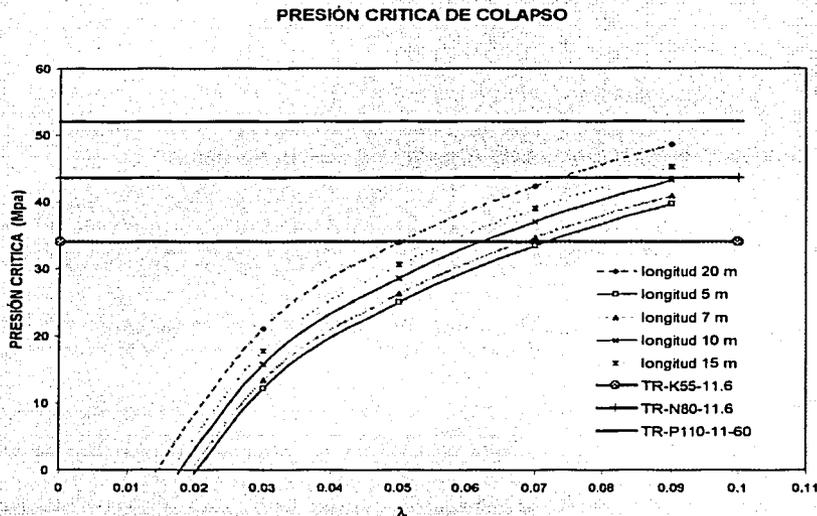


Figura III.4. Comportamiento de la presión de pandeo para un modelo de Cam-Clay.

La expresión III.22 permite evaluar el comportamiento de la presión de pandeo de la tubería de revestimiento y su comportamiento se muestra en la figura III.4, en la cual se puede observar que a medida en que se incrementa la longitud del intervalo de la tubería que se encuentra en contacto con la formación que esta sufriendo el efecto de compactación, se presentan valores de presión de pandeo las cuales se encuentra sujeta la tubería de revestimiento.

Esta figura también permite evaluar, para estas condiciones y características de la formación, si algunas tuberías pudieran resistir este cambio de presión de colapso actuando sobre ellas.

III.3.2. Modelo de compactación poro elástico.

En un material poro elástico la compactación del yacimiento se modela de la forma siguiente:

$$-\frac{\Delta h}{h} = \frac{\alpha_p}{\alpha} [(\sigma_z - \sigma_v) - \alpha(p - p_R)] \quad \text{III.23}$$

ó

$$\frac{\Delta h}{h} = \varepsilon_v = C_m \Delta p \quad \text{III.23}^a$$

Por lo tanto combinando las ecuaciones anteriores se obtiene que:

$$-\varepsilon_v = \frac{\alpha_p}{\alpha} [(\sigma_z - \sigma_v) - \alpha(p - p_R)] \quad \text{III.24}$$

Despejando la presión, y considerando a esta como la presión de pandeo de la TR:

$$p = \frac{\sigma_z - \sigma_v}{\alpha} + \frac{\varepsilon_v}{\alpha_p} + p_R \quad \text{III.25}$$

De esta forma se obtiene la presión crítica de pandeo para el modelo de compactación poro elástico. Considerando que la fuerza vertical que actúa sobre la TR, se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$F_v = (E_{TR} \varepsilon_v + \mu_{TR} (\sigma_t + \sigma_r)) A_{TR}$$

ó

$$F_v = E_{TR} \varepsilon_v A_{TR} + \mu_{TR} (\sigma_t + \sigma_r) A_{TR} \quad \text{III.26}$$

De la anterior ecuación se puede obtener, la expresión para poder modelar el comportamiento de la deformación vertical que sufre la tubería en función de los esfuerzos



Radial y tangencial, así como de la fuerza vertical actuando sobre la sección de tubería expuesta al cambio de presión del yacimiento.

$$\varepsilon_v = \frac{F_v}{E_{TR} A_{TR}} + \frac{\mu_{TR}(\sigma_t + \sigma_r)}{E_{TR}} \quad \text{III.27}$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación III.25 de la presión considerada para la presión de colapso

$$p(t) = \frac{\sigma_{zz} - \sigma_v}{\alpha} + \frac{F_v}{E_{TR} A_{TR}} - \frac{\mu_{TR}(\sigma_t + \sigma_r)}{E_{TR}} + p_{yac} \quad \text{III.28}$$

Agrupando términos:

$$p(t) = \frac{\sigma_{zz} - \sigma_v}{\alpha} + \frac{F_v - \mu_{TR} A_{TR}(\sigma_t + \sigma_r)}{\alpha_p E_{TR} A_{TR}} + p_{yac} \quad \text{III.29}$$

Considerando que la fuerza vertical se expresa como:

$$F_v = \frac{4\pi^2 E_{TR} I}{L^2} \quad \text{III.30}$$

Y sustituyendo la expresión para F_v , se obtiene:

$$p(t) = \frac{\sigma_{zz} - \sigma_v}{\alpha} + \frac{\frac{4\pi^2 E_{TR} I}{L^2} - \mu_{TR} A_{TR}(\sigma_t + \sigma_r)}{\alpha_p E_{TR} A_{TR}} + p_{yac}$$

Agrupando:

$$p(t) = \frac{\sigma_{zz} - \sigma_v}{\alpha} + \frac{4\pi^2 E_{TR} I - \mu_{TR} A_{TR} L^2 (\sigma_t + \sigma_r)}{\alpha_p E_{TR} A_{TR} L^2} + p_{yac}$$

ó

$$p(t) = \frac{\sigma_z - \sigma_v}{\alpha} + \frac{4\pi^2 I}{\alpha_p A_{TR} L^2} - \frac{\mu_{TR}(\sigma_t + \sigma_r)}{\alpha_p E_{TR}} + p_{vac} \quad \text{III.31}$$

Si consideramos que el esfuerzo axial, puede ser representado en función del esfuerzo axial geostático y la presión del yacimiento como se muestra a continuación:

$$\sigma_z = \sigma_v - \alpha p(t) \quad \text{III.32}$$

Evaluando los esfuerzos radial y tangencial, obtenidos de la solución de lame que se muestran en el anexo A, evaluados para la condición de $p_i = p_o$, se obtiene que:

$$\sigma_\theta + \sigma_r = 2p(t) \quad \text{III.33}$$

Sustituyendo las expresiones III.32 y III.33 en III.31, se obtiene:

$$p(t) = \frac{\sigma_v - \alpha p(t) - \sigma_v}{\alpha} + \frac{4\pi^2 I}{\alpha_p A_{TR} L^2} - \frac{2\mu_{TR} p(t)}{\alpha_p E_{TR}} + p_{vac}$$

Simplificando:

$$p(t) = -p(t) + \frac{4\pi^2 I}{\alpha_p A_{TR} L^2} - \frac{2\mu_{TR} p(t)}{\alpha_p E_{TR}} + p_{vac} \quad \text{III.34}$$

Agrupando los términos de $p(t)$:

$$p(t) + p(t) + \frac{2\mu_{TR} p(t)}{\alpha_p E_{TR}} = \frac{4\pi^2 I}{\alpha_p A_{TR} L^2} + p_{vac} \quad \text{III.35}$$

Factorizando:

$$2p(t) \left(1 + \frac{\mu_{TR}}{\alpha_p E_{TR}} \right) = \frac{4\pi^2 I}{\alpha_p A_{TR} L^2} + p_{vac}$$

$$p(t) \left(\frac{2\alpha_p E_{TR} + 2\mu_{TR}}{\alpha_p E_{TR}} \right) = \frac{4\pi^2 I + \alpha_p A_{TR} L^2 p_{vac}}{\alpha_p A_{TR} L^2}$$

$$p(t) = \left(\frac{4\pi^2 I + \alpha_p A_{TR} L^2 p_{vac}}{\alpha_p A_{TR} L^2} \right) \left(\frac{\alpha_p E_{TR}}{2\alpha_p E_{TR} + 2\mu_{TR}} \right)$$

$$p(t) = \frac{4\pi^2 I E_{TR} + \alpha_p A_{TR} L^2 E_{TR} p_{vac}}{A_{TR} L^2 (2\alpha_p E_{TR} + 2\mu_{TR})} \quad \text{III.36}$$

Finalmente se obtiene:

$$p(t) = \frac{2\pi^2 I E_{TR}}{A_{TR} L^2 (\alpha_p E_{TR} + \mu_{TR})} + \frac{\alpha_p L^2 p_{vac}}{2(\alpha_p E_{TR} + \mu_{TR})} \quad \text{III.36a}$$

La ecuación anterior, permite obtener el comportamiento de la presión de colapso a la cual se encuentra la tubería de revestimiento como una función de la presión inicial del yacimiento, la resistencia de la tubería, así como la geometría de la tubería.

Donde:

$$I = \frac{\pi}{4} (R_{TR}^4 - R^4)$$

α : coeficiente de biot.

α_p : coeficiente irrotacional de presión de poro, y se puede obtener con la siguiente relación.

$$\alpha_p = \frac{3\alpha}{3K_B + 4G} \quad \text{III.37}$$

σ_v : esfuerzo vertical geostático.

K_B : módulo volumétrico.

G : módulo de corte.

La ecuación III.36a muestra que uno de los factores que influyen en el comportamiento de la presión crítica de colapso de la tubería; es la longitud de la tubería de revestimiento, que se

encuentra en contacto con la formación productora, lo mencionado anteriormente se muestra en la figura III.5. En la figura se puede observar que a medida que se incrementa la longitud de la tubería de revestimiento que se encuentra en contacto con la formación productora, disminuye el valor de la presión crítica en la cual se puede presentar pandeo en la tubería, dicho pandeo puede producir que exista una restricción dentro de la tubería o que la tubería sufra un colapso.

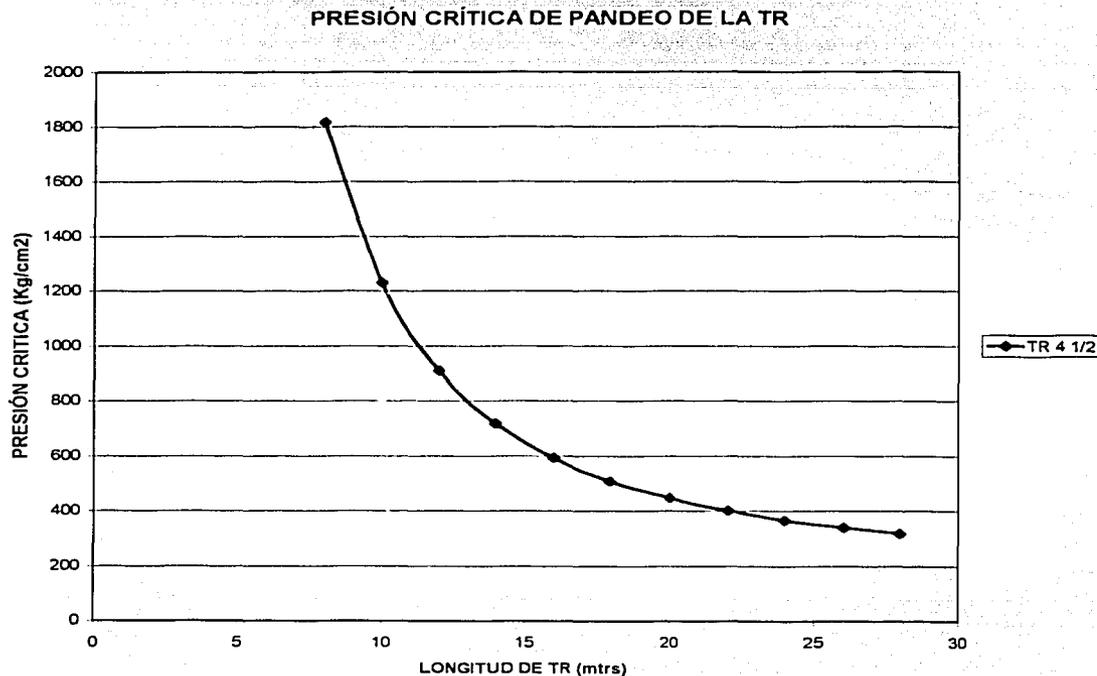


Figura III.5

Otra de las variables que influyen en el comportamiento de la presión crítica de colapso es el diámetro de la tubería.

En la figura III.6, se observa que a medida que se incrementa el diámetro de la tubería de revestimiento, se incrementa el valor de la presión que se requiere para que pueda

presentarse la condición de pandeo en la tubería de revestimiento, por lo anterior se puede considerar que en tuberías de mayor diámetro es más difícil que se pueda presentar el pandeo.

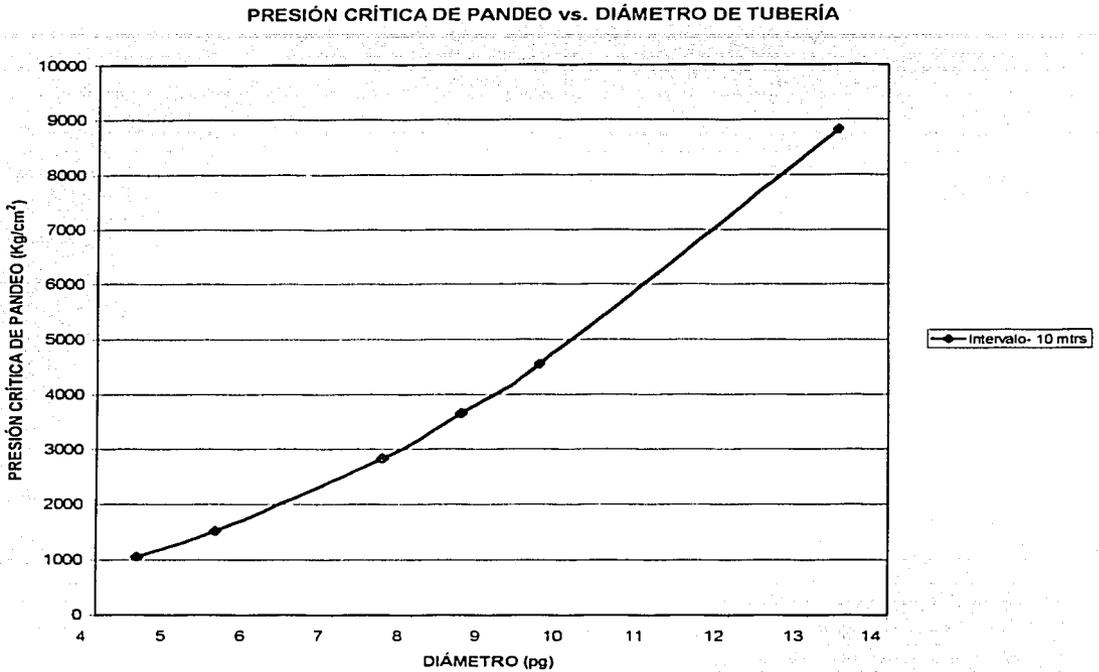


Figura III.6

III.4. Deformación radial.

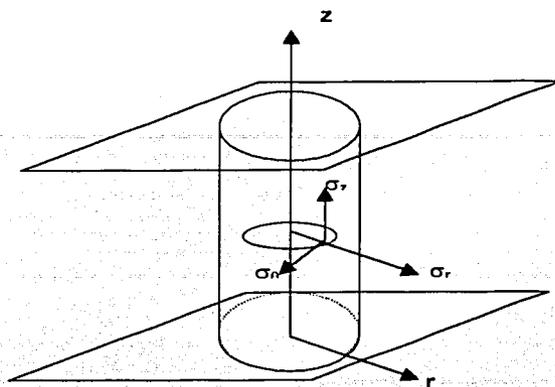


Figura III.7

Si un cilindro circular cuya pared tiene un espesor constante está sometido a la acción de unas presiones, interna y externa, uniformemente distribuidas, la deformación que se produce es simétrica alrededor del eje del cilindro y no varía a lo largo de su longitud.

Partiendo de las ecuaciones de deformación, radia, tangencial y axial.

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{E}\right)[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{1}{E}\right)[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

III.38

$$\varepsilon_3 = \left(\frac{1}{E}\right)[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

De las ecuaciones III.38, se puede despejarlos esfuerzos en las direcciones radial y tangencial.

$$\sigma_r = E\varepsilon_r + \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)$$

III.39

$$\sigma_\theta = E\varepsilon_\theta + \mu(\sigma_z + \sigma_r)$$

III.40

Sustituyendo en la ecuación III.39 la ecuación III.40 se obtiene:

$$\sigma_r = E\varepsilon_r + \mu[E\varepsilon_\theta + \mu(\sigma_z + \sigma_r) + \sigma_z] \quad \text{III.41}$$

Reagrupando

$$\sigma_r = E\varepsilon_r + \mu[E\varepsilon_\theta + \mu\sigma_z + \mu\sigma_r + \sigma_z]$$

$$\sigma_r = E\varepsilon_r + \mu E\varepsilon_\theta + \mu^2\sigma_z + \mu^2\sigma_r + \mu\sigma_z$$

$$\sigma_r = E\varepsilon_r + \mu E\varepsilon_\theta + (\mu^2 + \mu)\sigma_z + \mu^2\sigma_r$$

$$\sigma_r(1 - \mu^2) = E\varepsilon_r + \mu E\varepsilon_\theta + (\mu^2 + \mu)\sigma_z$$

Finalmente se obtiene una expresión del esfuerzo radial en función de las deformaciones radial y tangencial.

$$\sigma_r = \frac{E\varepsilon_r + \mu E\varepsilon_\theta + (\mu^2 + \mu)\sigma_z}{(1 - \mu^2)} \quad \text{III.42}$$

ó

$$\sigma_r = \frac{E\varepsilon_r + \mu E\varepsilon_\theta + (\mu^2 + \mu)\sigma_z}{(1 - \mu)(1 + \mu)} \quad \text{III.42a}$$

Sustituyendo la expresión del esfuerzo radial obtenido con la ecuación III.42a, en la ecuación III.40.

$$\sigma_\theta = E\varepsilon_\theta + \mu\left(\sigma_z + \frac{E\varepsilon_r + \mu E\varepsilon_\theta + (\mu^2 + \mu)\sigma_z}{(1 - \mu)(1 + \mu)}\right) \quad \text{III.43}$$

Simplificando:

$$\sigma_{\theta} = E\varepsilon_{\theta} + \mu \left(\frac{\sigma_z(1-\mu)(1+\mu) + E\varepsilon_r + \mu E\varepsilon_{\theta} + (\mu^2 + \mu)\sigma_z}{(1-\mu)(1+\mu)} \right)$$

$$\sigma_{\theta} = E\varepsilon_{\theta} + \frac{\mu\sigma_z(1-\mu)(1+\mu) + \mu E\varepsilon_r + \mu^2 E\varepsilon_{\theta} + \mu^2(1+\mu)\sigma_z}{(1-\mu)(1+\mu)}$$

$$\sigma_{\theta} = E\varepsilon_{\theta} + \mu\sigma_z + \frac{\mu^2\sigma_z}{(1-\mu)} + \frac{\mu E\varepsilon_r + \mu^2 E\varepsilon_{\theta}}{(1-\mu)(1+\mu)}$$

$$\sigma_{\theta} = E\varepsilon_{\theta} + \frac{\mu\sigma_z}{(1-\mu)} + \frac{\mu E\varepsilon_r + \mu^2 E\varepsilon_{\theta}}{(1-\mu)(1+\mu)}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E\varepsilon_{\theta}(1-\mu)(1+\mu) + \mu\sigma_z(1+\mu) + \mu E\varepsilon_r + \mu^2 E\varepsilon_{\theta}}{(1-\mu)(1+\mu)}$$

Finalmente se obtiene la expresión para el esfuerzo tangencial en función de las deformaciones radial y tangencial.

$$\sigma_{\theta} = \frac{E\varepsilon_{\theta} + \mu E\varepsilon_r + \sigma_z\mu(1+\mu)}{(1-\mu)(1+\mu)} \quad \text{III.44}$$

Las deformaciones radial y tangencial, como función de la deformación radial³ es expresada como sigue:

$$\text{Si } \varepsilon_r = u' \text{ y } \varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} \quad \text{III.45}$$

Sustituyendo las expresiones III.45 en las III.43 y III.44:

$$\sigma_r = \frac{Eu' + \mu E \frac{u}{r} + \mu(1+\mu)\sigma_z}{(1-\mu)(1+\mu)} \quad \text{III.46}$$

Reagrupando:

$$\sigma_r = \left[u' + \mu \left(\frac{u}{r} \right) + \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] \left[\frac{E}{(1-\mu)(1+\mu)} \right] \quad \text{III.47}$$

y

$$\sigma_\theta = \left[\left(\frac{u}{r} \right) + \mu u' + \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] \left[\frac{E}{(1-\mu)(1+\mu)} \right] \quad \text{III.48}$$

De un balance de fuerzas (ver apéndice A) en la dirección radial se puede obtener que:

$$\sigma'_r + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad \text{III.49}$$

Derivando la expresión III.47 con respecto a r:

$$\sigma'_r = \left[u'' + \mu \left(\frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] \left[\frac{E}{(1-\mu)(1+\mu)} \right] \quad \text{III.50}$$

Sustituyendo las expresiones III.47, III.48 y III.49 en III.50:

$$\left[u'' + \mu \left(\frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] \left[\frac{E}{(1-\mu)(1+\mu)} \right] + \frac{1}{r} \left[u' + \mu \left(\frac{u}{r} \right) + \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] \left[\frac{E}{(1-\mu)(1+\mu)} \right] - \frac{1}{r} \left[\left(\frac{u}{r} \right) + \mu u' + \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] \left[\frac{E}{(1-\mu)(1+\mu)} \right] = 0 \quad \text{III.51}$$

Simplificando:

$$\left[u'' + \mu \left(\frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[u' + \mu \left(\frac{u}{r} \right) + \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] - \frac{1}{r} \left[\left(\frac{u}{r} \right) + \mu u' + \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] = 0$$

Finalmente:

$$\left[u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] = 0 \quad \text{III.52}$$

o bien:

$$u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = - \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \quad \text{III.52a}$$

La expresión describe el comportamiento de la deformación radial de un cilindro sujeto a presión interna y externa, uniformemente distribuidas, y a una carga axial.

La ecuación III.52a puede ser expresada como:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right) = - \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \quad \text{III.53}$$

Integrando la expresión anterior con respecto a r , se obtiene que:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) = - \frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} + A$$

Reagrupando:

$$\frac{d}{dr} (ru) = \left(- \frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} + A \right) r \quad \text{III.54}$$

Integrando nuevamente con respecto a r :

$$ru = \left(- \frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} + A \right) \frac{r^2}{2} + B$$

Despejando para la deformación:

$$u = \frac{A}{2} r + \frac{B}{r} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E} \sigma_z r \quad \text{III.55}$$

Para obtener los valores de las constantes A y B, es necesario establecer las condiciones de frontera, para el problema que estamos estudiando las condiciones de frontera establecidas son las siguientes:

- Se considera que la presión tanto fuera como dentro de la tubería de revestimiento son iguales, por lo que se puede considerar que; el valor del esfuerzo radial en el radio interno de la tubería es igual a la presión interna, esto es:

$$(\sigma_r)_{r=r_i} = p_i \quad \text{III.56}$$

- Se considera que, dado que la formación esta generando una carga sobre la tubería de revestimiento, ocasionada por la compactación que sufre la formación productora, por lo que dicha carga no permitirá deformación de la tubería de revestimiento hacia el exterior de la tubería, esto implica considerar que la tubería solo sufre deformación hacia el interior de la misma, matemáticamente se expresa como que, la deformación en el radio externo es nula.

$$u(r)_{r=r_o} = 0 \quad \text{III.57}$$

Es importante mencionar que se hace la suposición de que, la presión existente dentro de la tubería de revestimiento es igual a la presión que existe en la pared externa de la tubería.

Para evaluar las condiciones de frontera, que nos permitan determinar los valores de las constantes de integración que resultan de la solución para el modelo de deformación radial, se considera que:

La deformación en el caso de fuerzas o cargas actuando en dos direcciones perpendiculares, el alargamiento en una de las direcciones depende no solamente del esfuerzo en esa dirección, sino también del esfuerzo existente en la dirección perpendicular. El alargamiento

unitario en la dirección radial debido al esfuerzo radial, σ_r , será $\frac{\sigma_r}{E}$. El esfuerzo tangencial,

σ_θ , produce una contracción unitaria en la dirección radial, cuyo valor es $\mu \frac{\sigma_\theta}{E}$; por lo tanto,

al actuar ambos esfuerzos σ_r y σ_θ , simultáneamente, el alargamiento unitario en la dirección radial será:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_\theta}{E} \quad \text{III.58}$$

Y en la dirección tangencial será:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} - \mu \frac{\sigma_r}{E} \quad \text{III.59}$$

Por lo que obtienen expresiones para los esfuerzos radial y tangencial, como función de la deformación radial, lo cual se obtuvo con las ecuaciones III.47 y III.48, las cuales se muestran a continuación:

$$\sigma_r = \left[u' + \mu \left(\frac{u}{r} \right) + \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] \left[\frac{E}{(1-\mu)(1+\mu)} \right] \quad \text{III.60}$$

y

$$\sigma_\theta = \left[\left(\frac{u}{r} \right) + \mu u' + \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] \left[\frac{E}{(1-\mu)(1+\mu)} \right] \quad \text{III.61}$$

Evaluando la ecuación que modela el comportamiento de la deformación radial (ecuación III.55), para la condición de frontera III.57.

$$u = \frac{A}{2} r + \frac{B}{r} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E} \sigma_z r$$

Evaluando con la condición de frontera:

$$0 = \frac{A}{2} r_o + \frac{B}{r_o} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E} \sigma_z r_o \quad \text{III.62}$$

Despejando A

$$\frac{A}{2} r_o = -\frac{B}{r_o} + \frac{\mu(1+\mu)}{2E} \sigma_z r_o$$

$$A = \frac{\mu(1+\mu)}{E} \sigma_z - \frac{2B}{r_o^2} \tag{III.63}$$

Para obtener el valor de la otra constante se evalúa la condición de frontera $(\sigma_r)_{r=r_i} = P_i$, en la ecuación III.47.

Derivando la ecuación III.55, con respecto a r:

$$u' = \frac{A}{2} - \frac{B}{r^2} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E} \sigma_z \tag{III.64}$$

Sustituyendo en la ecuación III.47, la ecuaciones III.55 y III.64:

$$\sigma_r = \left[\frac{A}{2} - \frac{B}{r^2} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E} \sigma_z + \frac{\mu}{r} \left(\frac{A}{2} r + \frac{B}{r} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E} \sigma_z r \right) + \sigma_z \frac{(\mu^2 + \mu)}{E} \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right] \tag{III.65}$$

Simplificando:

$$\sigma_r = \left[\frac{A}{2} - \frac{B}{r^2} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E} \sigma_z + \frac{A\mu}{2} + \frac{B\mu}{r^2} - \frac{\mu^2(1+\mu)}{2E} \sigma_z + \sigma_z \frac{(\mu^2 + \mu)}{E} \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right]$$

$$\sigma_r = \left[\frac{A}{2} (1+\mu) - \frac{B}{r^2} (1-\mu) + \sigma_z \left(\frac{(\mu^2 + \mu)}{E} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E} - \frac{\mu^2(1+\mu)}{2E} \right) \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right]$$

$$\sigma_r = \left[\frac{A}{2} (1+\mu) - \frac{B}{r^2} (1-\mu) + \sigma_z \left(\frac{2\mu(1+\mu) - \mu(1+\mu) - \mu^2(1+\mu)}{2E} \right) \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right]$$

$$\sigma_r = \left[\frac{A}{2} (1+\mu) - \frac{B}{r^2} (1-\mu) + \sigma_z \left(\frac{\mu(1+\mu) - \mu^2(1+\mu)}{2E} \right) \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right]$$

$$\sigma_r = \left[\frac{A}{2}(1+\mu) - \frac{B}{r^2}(1-\mu) + \sigma_z \left(\frac{\mu + \mu^2 - \mu^2 - \mu^3}{2E} \right) \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right]$$

$$\sigma_r = \left[\frac{A}{2}(1+\mu) - \frac{B}{r^2}(1-\mu) + \sigma_z \left(\frac{\mu - \mu^3}{2E} \right) \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right]$$

Finalmente se obtiene la expresión para el esfuerzo radial.

$$\sigma_r = \left[\frac{A}{2}(1+\mu) - \frac{B}{r^2}(1-\mu) + \sigma_z \left(\frac{\mu - \mu^3}{2E} \right) \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right] \quad \text{III.66}$$

La expresión anterior puede ser simplificada finalmente como:

$$\sigma_r = \left[\frac{A}{2}(1+\mu) - \frac{B}{r^2}(1-\mu) + \sigma_z \left(\frac{\mu(1-\mu^2)}{2E} \right) \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right] \quad \text{III.66a}$$

Multiplicando términos:

$$\sigma_r = \frac{A}{2}(1+\mu) \frac{E}{1-\mu^2} - \frac{B}{r^2}(1-\mu) \frac{E}{1-\mu^2} + \sigma_z \left(\frac{\mu(1-\mu^2)}{2E} \right) \frac{E}{1-\mu^2}$$

$$\sigma_r = \frac{A}{2}(1+\mu) \frac{E}{(1-\mu)(1+\mu)} - \frac{B}{r^2}(1-\mu) \frac{E}{(1-\mu)(1+\mu)} + \sigma_z \left(\frac{\mu(1-\mu^2)}{2E} \right) \frac{E}{1-\mu^2}$$

Agrupando se obtiene que:

$$\sigma_r = \frac{A}{2} \frac{E}{(1-\mu)} - \frac{B}{r^2} \frac{E}{(1+\mu)} + \frac{\mu}{2} \sigma_z \quad \text{III.67}$$

Finalmente el esfuerzo radial se expresa como:

$$\sigma_r = A \frac{E}{2(1-\mu)} - B \frac{E}{r^2(1+\mu)} + \frac{\mu}{2} \sigma_z \quad \text{III.67a}$$

Sustituyendo la condición de frontera III.56.

$$-p_i = A \frac{E}{2(1-\mu)} - B \frac{E}{r_i^2(1+\mu)} + \frac{\mu}{2} \sigma_z$$

Despejando la constante A:

$$A \frac{E}{2(1-\mu)} = -p_i + B \frac{E}{r_i^2(1+\mu)} - \frac{\mu}{2} \sigma_z$$

$$A = B \frac{2(1-\mu)}{r_i^2(1+\mu)} - \frac{\mu(1-\mu)}{E} \sigma_z - \frac{2p_i}{E} (1-\mu) \quad \text{III.68}$$

Igualando las ecuaciones III.63 y III.68, se tiene que:

$$B \frac{2(1-\mu)}{r_i^2(1+\mu)} - \frac{\mu(1-\mu)}{E} \sigma_z - \frac{2p_i}{E} (1-\mu) = \frac{\mu(1+\mu)}{E} \sigma_z - \frac{2B}{r_o^2}$$

Agrupando términos:

$$B \left(\frac{2(1-\mu)}{r_i^2(1+\mu)} + \frac{2}{r_o^2} \right) = \frac{\mu(1+\mu)}{E} \sigma_z + \frac{\mu(1-\mu)}{E} \sigma_z + \frac{2p_i}{E} (1-\mu)$$

Factorizando:

$$B \left(\frac{2r_o^2(1-\mu) + 2r_i^2(1+\mu)}{r_i^2 r_o^2 (1+\mu)} \right) = \frac{\mu}{E} \sigma_z ((1+\mu) + (1-\mu)) + \frac{2p_i}{E} (1-\mu)$$

$$B \left(\frac{2r_o^2 - \mu 2r_o^2 + 2r_i^2 + \mu 2r_i^2}{r_i^2 r_o^2 (1+\mu)} \right) = \frac{\mu}{E} \sigma_z (1+\mu+1-\mu) + \frac{2p_i}{E} (1-\mu)$$

Simplificando:

$$B \left(\frac{2r_o^2(1-\mu) + 2r_i^2(1+\mu)}{r_i^2 r_o^2 (1+\mu)} \right) = \frac{2\mu}{E} \sigma_z + \frac{2p_i}{E} (1-\mu)$$

Despejando la constante B:

$$B = \left(\frac{\mu}{E} \sigma_z + \frac{p_i}{E} (1-\mu) \right) \left(\frac{r_i^2 r_o^2 (1+\mu)}{r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)} \right)$$

$$B = (\mu \sigma_z + p_i (1-\mu)) \left(\frac{r_i^2 r_o^2 (1+\mu)}{E [r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)]} \right)$$

Finalmente se obtiene la expresión con la cual se puede evaluar el valor de la constante B, la cual es la siguiente:

$$B = \left(\frac{\mu \sigma_z r_i^2 r_o^2}{(1-\mu)} + p_i r_i^2 r_o^2 \right) \left(\frac{(1-\mu^2)}{E [r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)]} \right) \quad \text{III.69}$$

Sustituyendo la ecuación III.69 en la ecuación III.63:

$$A = \frac{\mu(1+\mu)}{E} \sigma_z - \frac{2}{r_o^2} B$$

$$A = \frac{\mu(1+\mu)}{E} \sigma_z - \frac{2}{r_o^2} \left(\frac{\mu \sigma_z r_i^2 r_o^2}{(1-\mu)} + p_i r_i^2 r_o^2 \right) \left(\frac{(1-\mu^2)}{E [r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)]} \right)$$

Simplificando:

$$A = \frac{\mu(1+\mu)}{E} \sigma_z - \frac{2}{E} \left(\frac{\mu \sigma_z}{(1-\mu)} + p_i \right) \left(\frac{(1-\mu^2) r_i^2}{r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)} \right)$$

Agrupando términos y factorizando:

$$A = \sigma_z \left(\frac{\mu(1+\mu)}{E} - \frac{2}{E} \frac{\mu}{(1-\mu)} \frac{(1-\mu^2)r_i^2}{r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)} \right) - \frac{2}{E} p_i \frac{(1-\mu^2)r_i^2}{r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)}$$

$$A = \sigma_z \left(\frac{\mu(1+\mu)(1-\mu)[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)] - 2\mu(1-\mu^2)r_i^2}{E(1-\mu)[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]} \right) - \frac{2p_i r_i^2(1-\mu^2)}{E[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]}$$

$$A = \sigma_z \left(\frac{\mu(r_o^2 - r_o^2\mu + r_i^2 + r_i^2\mu) - 2\mu r_i^2}{E(1-\mu)[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]} \right) - \frac{2p_i r_i^2(1-\mu^2)}{E[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]}$$

Simplificando:

$$A = \left[\sigma_z \left(\frac{\mu r_o^2 - r_o^2 \mu^2 + \mu r_i^2 + r_i^2 \mu^2 - 2\mu r_i^2}{(1-\mu)} \right) - 2p_i r_i^2 \right] \left[\frac{(1-\mu^2)}{E[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]} \right]$$

$$A = \left[\sigma_z \left(\frac{r_o^2(\mu - \mu^2) - r_i^2(\mu - \mu^2)}{(1-\mu)} \right) - 2p_i r_i^2 \right] \left[\frac{(1-\mu^2)}{E[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]} \right]$$

Finalmente, la siguiente expresión permite obtener el valor de la constante A, como una función de la geometría de la tubería y la presión.

$$A = [\sigma_z \mu (r_o^2 - r_i^2) - 2p_i r_i^2] \left[\frac{(1-\mu^2)}{E[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]} \right] \quad \text{III.70}$$

Por lo tanto la ecuación con la cual se modela la deformación radial es:

$$u = Ar + \frac{B}{r} - \frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{2E} r$$

Donde las constantes A y B son función de los radios interno y externo, de la presión del yacimiento, del esfuerzo axial y de las propiedades mecánicas del acero de la tubería de revestimiento dadas por:

$$A = [\sigma_z \mu (r_o^2 - r_i^2) - 2p_i r_i^2] \left[\frac{(1-\mu^2)}{E[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]} \right]$$

$$B = \left(\frac{\mu \sigma_z r_i^2 r_o^2}{(1-\mu)} + p_i r_i^2 r_o^2 \right) \left(\frac{(1-\mu^2)}{E [r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)]} \right)$$

III.5. Deducción del esfuerzo axial.

Para obtener una ecuación que nos represente el comportamiento del esfuerzo axial para el modelo que estamos planteando, haremos uso de las ecuaciones de la ley de hook³.

$$\sigma_z = E \varepsilon_z + \mu (\sigma_r + \sigma_\theta)$$

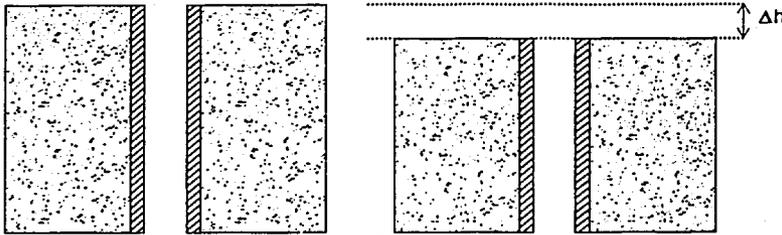


Figura III.8

La figura III.8, considera que la compactación que sufre la formación productora debido al depresionamiento del yacimiento, provocado por la producción de los hidrocarburos, es transmitida a la tubería de revestimiento, esto es, la misma compactación que sufre la formación, la sufre la tubería de revestimiento.

El esfuerzo radial para nuestro modelo es:

$$\sigma_r = A \frac{E}{2(1-\mu)} - B \frac{E}{r^2(1+\mu)} + \frac{\mu}{2} \sigma_z$$

Para obtener una expresión para el esfuerzo tangencial, se emplea la ecuación III.19.

$$\sigma_\theta = \left[\left(\frac{u}{r} \right) + \mu u' + \left(\frac{\mu(1+\mu)\sigma_z}{E} \right) \right] \left[\frac{E}{(1-\mu)(1+\mu)} \right]$$

Y sustituyendo la expresión de la deformación y la derivada de la deformación:

$$u = \frac{A}{2}r + \frac{B}{r} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E}\sigma_z r$$

y

$$u' = \frac{A}{2} - \frac{B}{r^2} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E}\sigma_z$$

Sustituyendo las expresiones de la deformación y la derivada de la deformación en la expresión para el esfuerzo tangencial.

$$\sigma_\theta = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{A}{2}r + \frac{B}{r} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E}\sigma_z r \right) + \mu \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{r^2} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E}\sigma_z \right) + \sigma_z \frac{(\mu^2 + \mu)}{E} \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right] \quad \text{III.71}$$

Agrupando términos.

$$\sigma_\theta = \left[\frac{A}{2} + \frac{B}{r^2} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E}\sigma_z + \frac{\mu A}{2} - \frac{\mu B}{r^2} - \frac{\mu^2(1+\mu)}{2E}\sigma_z + \sigma_z \frac{(\mu^2 + \mu)}{E} \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right]$$

Simplificando:

$$\sigma_\theta = \left[\frac{A}{2}(1+\mu) + \frac{B}{r^2}(1-\mu) + \frac{\mu(1+\mu)}{E}\sigma_z \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} \right) \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right]$$

$$\sigma_\theta = \left[\frac{A}{2}(1+\mu) + \frac{B}{r^2}(1-\mu) + \frac{\mu(1+\mu)}{E}\sigma_z \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} \right) \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right]$$

$$\sigma_\theta = \left[\frac{A}{2}(1+\mu) + \frac{B}{r^2}(1-\mu) + \frac{\mu(1+\mu)}{2E}\sigma_z(1-\mu) \right] \left[\frac{E}{1-\mu^2} \right]$$

Factorizando:

$$\sigma_{\theta} = \left[\frac{A}{2} (1 + \mu) \frac{E}{(1 - \mu)(1 + \mu)} + \frac{B}{r^2} (1 - \mu) \frac{E}{(1 - \mu)(1 + \mu)} + \frac{\mu(1 + \mu)}{2E} \sigma_z (1 - \mu) \frac{E}{(1 - \mu)(1 + \mu)} \right]$$

Finalmente simplificando se puede obtener la expresión para el esfuerzo tangencial, como una función de las constantes A y B.

$$\sigma_{\theta} = \left[\frac{A}{2} \frac{E}{(1 - \mu)} + \frac{B}{r^2} \frac{E}{(1 + \mu)} + \frac{\mu}{2} \sigma_z \right] \quad \text{III.72}$$

ó

$$\sigma_{\theta} = \left[A \frac{E}{2(1 - \mu)} + B \frac{E}{r^2(1 + \mu)} + \frac{\mu}{2} \sigma_z \right] \quad \text{III.72a}$$

Sustituyendo en la ley de hook para el esfuerzo axial, las expresiones para el esfuerzo radial y tangencial.

$$\sigma_z = E \varepsilon_z + \mu \left[A \frac{E}{2(1 - \mu)} - B \frac{E}{r^2(1 + \mu)} + \frac{\mu}{2} \sigma_z + A \frac{E}{2(1 - \mu)} + B \frac{E}{r^2(1 + \mu)} + \frac{\mu}{2} \sigma_z \right] \quad \text{III.73}$$

Simplificando:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z + \mu \left[A \frac{E}{(1 - \mu)} + \mu \sigma_z \right]$$

$$\sigma_z = E \varepsilon_z + A \frac{\mu E}{(1 - \mu)} + \mu^2 \sigma_z$$

Despejando esfuerzo axial.

$$\sigma_z - \mu^2 \sigma_z = E \varepsilon_z + A \frac{\mu E}{(1 - \mu)}$$

$$\sigma_z (1 - \mu^2) = E \varepsilon_z + A \frac{\mu E}{(1 - \mu)}$$

La siguiente expresión permite evaluar el esfuerzo axial para las condiciones de frontera que fueron establecidas para nuestro problema.

$$\sigma_z \frac{(1-\mu^2)}{E} = \varepsilon_z + \frac{\mu}{(1-\mu)} A \quad \text{III.74}$$

La expresión anterior, es una función de la constante de integración A, y como la constante A es función del esfuerzo, será necesario el sustituir en la expresión III.74 la expresión III.70 para obtener la ecuación para el esfuerzo axial, por lo tanto se tiene que:

$$\sigma_z \frac{(1-\mu^2)}{E} = \varepsilon_z + \frac{\mu}{(1-\mu)} [\sigma_z \mu (r_o^2 - r_i^2) - 2\rho_i r_i^2 \left[\frac{(1-\mu^2)}{E [r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)]} \right]] \quad \text{III.75}$$

Multiplicando:

$$\sigma_z \frac{(1-\mu^2)}{E} = \varepsilon_z + \left[\frac{\sigma_z \mu^2 (r_o^2 - r_i^2) (1-\mu^2) - 2\mu\rho_i r_i^2 (1-\mu^2)}{E(1-\mu)[r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)]} \right]$$

Agrupando:

$$\sigma_z \frac{(1-\mu^2)}{E} = \varepsilon_z + \frac{\sigma_z \mu^2 (r_o^2 - r_i^2) (1-\mu^2)}{E(1-\mu)[r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)]} - \frac{2\mu\rho_i r_i^2 (1-\mu^2)}{E(1-\mu)[r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)]}$$

$$\sigma_z \frac{(1-\mu^2)}{E} - \frac{\sigma_z \mu^2 (r_o^2 - r_i^2) (1-\mu^2)}{E(1-\mu)[r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)]} = \varepsilon_z - \frac{2\mu\rho_i r_i^2 (1-\mu^2)}{E(1-\mu)[r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)]}$$

Factorizando los términos correspondientes a σ_z .

$$\sigma_z \frac{(1-\mu^2)}{E} \left[1 - \frac{\mu^2 (r_o^2 - r_i^2)}{(1-\mu)[r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)]} \right] = \varepsilon_z - \frac{2\mu\rho_i r_i^2 (1-\mu^2)}{E(1-\mu)[r_o^2 (1-\mu) + r_i^2 (1+\mu)]}$$

$$\sigma_z = \frac{(1-\mu^2)}{E} \left[\frac{(1-\mu)[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)] - \mu^2(r_o^2 - r_i^2)}{(1-\mu)[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]} \right] = \varepsilon_z - \frac{2\mu p_i r_i^2 (1-\mu^2)}{E(1-\mu)[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]}$$

Reagrupando términos:

$$\sigma_z = \frac{(1-\mu^2)}{E} \left[\frac{(1-\mu)r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1-\mu)(1+\mu) - \mu^2(r_o^2 - r_i^2)}{(1-\mu)[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]} \right] = \varepsilon_z - \frac{2\mu p_i r_i^2 (1-\mu^2)}{E(1-\mu)[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]}$$

$$\sigma_z = \frac{(1-\mu^2)}{E[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]} \left[\frac{r_o^2 - 2r_o^2\mu + r_o^2\mu^2 + r_i^2 - r_i^2\mu^2 - r_o^2\mu^2 + r_i^2\mu^2}{(1-\mu)} \right] =$$

$$\varepsilon_z - \frac{2\mu p_i r_i^2 (1-\mu^2)}{E(1-\mu)[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]}$$

Simplificando:

$$\sigma_z = \left[\frac{(1-\mu^2)}{E[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]} \right] \left[\frac{r_o^2 + r_i^2 - 2r_o^2\mu}{(1-\mu)} \right] = \varepsilon_z - \frac{2\mu p_i r_i^2}{(1-\mu)} \frac{(1-\mu^2)}{E[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]}$$

$$\sigma_z = \left[\frac{(1-\mu^2)(r_o^2 + r_i^2 - 2r_o^2\mu)}{E(1-\mu)[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]} \right] = \varepsilon_z - \frac{2\mu p_i r_i^2}{(1-\mu)} \frac{(1-\mu^2)}{E[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]}$$

Finalmente despejando el esfuerzo axial:

$$\sigma_z = \left[\varepsilon_z - \frac{2\mu p_i r_i^2}{(1-\mu)} \frac{(1-\mu^2)}{E[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]} \right] \left[\frac{E(1-\mu)[r_o^2(1-\mu) + r_i^2(1+\mu)]}{(1-\mu^2)(r_o^2 + r_i^2 - 2r_o^2\mu)} \right] \quad \text{III.76}$$

En la expresión anterior se puede evaluar el comportamiento del esfuerzo axial, como una función de la deformación axial, la presión del yacimiento y la geometría de la tubería de revestimiento.

Para evaluar el valor de ε_z , se considera el yacimiento como una formación poco consolidada, y se emplea el siguiente modelo (ecuación III.23a).

$$\varepsilon_z = C_m \Delta p$$

Donde:

$$C_m = \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{(1 - \mu)} E = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{1 - 2\mu}{E} \quad \text{III.77}$$

CAPÍTULO IV.

ANÁLISIS DE RESULTADOS.

IV. Colapso de la Tubería de Revestimiento.

El colapso de tuberías de revestimiento, es un fenómeno que resulta de un movimiento anormal transversal en la formación. Estos desplazamientos son de tres tipos: compactación, resbalamiento y deslizamiento de discontinuidades.

La falla de la tubería de revestimiento, también puede ser un resultado de la compactación del yacimiento, el fenómeno de compactación resulta más crítico para formaciones poco consolidadas o no consolidadas.

Dependiendo de la geometría del pozo (vertical, desviado, horizontal), son reconocidos cinco mecanismos como responsables del colapso de la tubería de revestimiento⁸: pandeo, torsión, tracción, compresión no uniforme y corte.

Existe gran dificultad para poder identificar el mecanismo por el cual la tubería de revestimiento falla. En figura IV.1, se ilustran, las cargas resultantes sobre la tubería de revestimiento, como resultado de la compactación de la roca del yacimiento.

La variedad de modelos de mecanismos de falla de la tubería de revestimiento pueden ser divididos en dos áreas:

- Inestabilidad estructural (pandeo).
- Modelos de falla relacionados a la deformación inherente de la tubería de revestimiento.

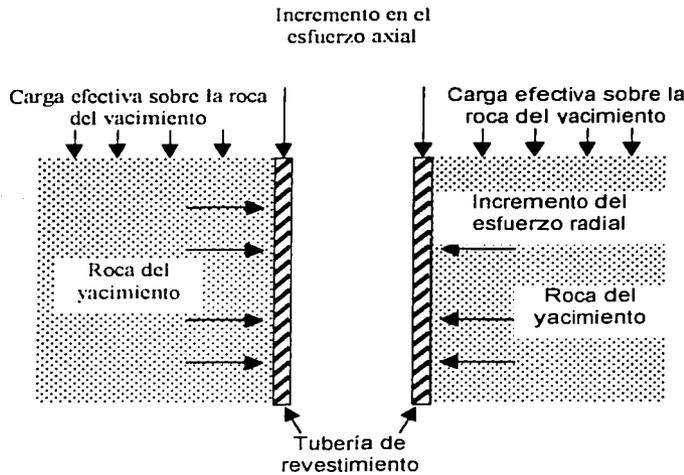


Figura IV.1. Ilustración de la falla de la TR, como resultado de la compactación.

IV.2. Colapso de tuberías de revestimiento por el efecto de pandeo.

En el análisis del pandeo, se emplea el modelo determinado en el capítulo III, la presión crítica a la que se puede presentar el pandeo de la tubería de revestimiento esta dada por la ecuación III.36a, que es la expresión de la presión crítica en un modelo de compactación poro-elástico, para la formación productora.

A continuación se presentan los resultados obtenidos empleando el modelo con el cual se puede modelar el comportamiento de la presión crítica de colapso de la tubería de revestimiento como efecto del pandeo de la tubería. Para modelar el comportamiento de la presión crítica se emplean los siguientes datos:

DIÁMETRO INTERNO (pg)	DIÁMETRO EXTERNO (pg)
4	4 1/2
5.012	5 1/2
6.969	7.625
8.017	8 5/8
9.001	9 5/8
12.715	13 3/8

Tabla IV.1 Diámetro de Tuberías de revestimiento

LONGITUD DE TR (mtrs)
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24

Tabla IV.2. Longitud de tuberías de revestimiento

RELACIÓN DE POISSON	0.3
MÓDULO DE YOUNG (kg/cm²)	2150000

Tabla IV.3. Propiedades de la TR

RELACION DE POISSON	0.45
MÓDULO DE YOUNG (Gpa)	0.01-0.1
MÓDULO DE CORTE (Gpa)	0.0034-0.034
MÓDULO VOLUMETRICO (Gpa)	0.033-0.33
COEFICIENTE DE BIOT	0.45

Tabla IV.4. Propiedades de la formación

PRESIÓN INICIAL DE YACIMIENTO
450 Kg/cm ²

Con la información que se presenta en las tablas IV.1, IV.2, IV.3 y IV.4, y empleando la ecuación III.11, se obtienen los siguientes resultados.

E _(formación) =0.1 Gpa					
Kg/cm ²	Kg/cm ²	Kg/cm ²	Kg/cm ²	Kg/cm ²	Kg/cm ²
4.5	5 1/2	7 5/8	8 5/8	9 5/8	13 3/8
6038.98	8980.93	17192.75	22304.25	27902.08	54599.53
2752.91	4060.44	7710.14	9981.92	12469.84	24335.38
1602.78	2338.27	4391.22	5669.10	7068.56	13742.92
1070.44	1541.15	2855.04	3672.88	4568.53	8840.13
781.26	1108.15	2020.57	2588.52	3210.50	6176.88
606.90	847.06	1517.41	1934.68	2391.64	4571.03
493.73	677.60	1190.84	1510.31	1860.18	3528.77
416.14	561.43	966.95	1219.37	1495.80	2814.20
360.65	478.32	806.80	1011.26	1235.17	2303.07
319.58	416.84	688.30	857.28	1042.33	1924.89
288.35	370.07	598.18	740.17	895.66	1637.26

Tabla IV.5. Presión crítica por efecto de pandeo, E_(formación)=0.1 Gpa.

Los datos mostrados en la tabla IV.5, son representados en las siguientes gráficas.

PRESIÓN CRÍTICA DE PANDEO DE LA TR E_(formación)=0.1 Gpa

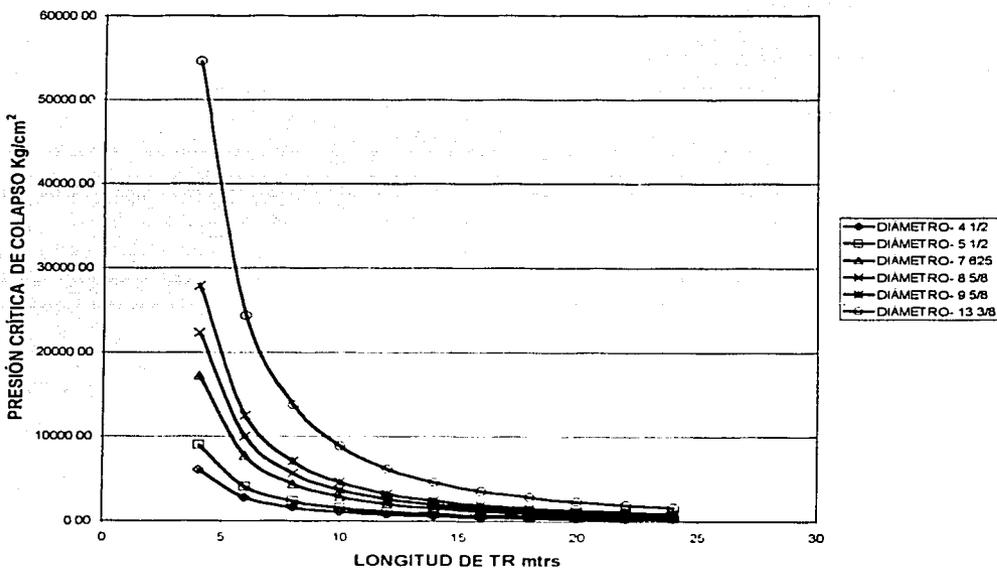


Figura IV.2. Comportamiento de la presión crítica por efecto de pandeo.

PRESIÓN CRÍTICA DE PANDEO PARA TR DE 4 1/2'

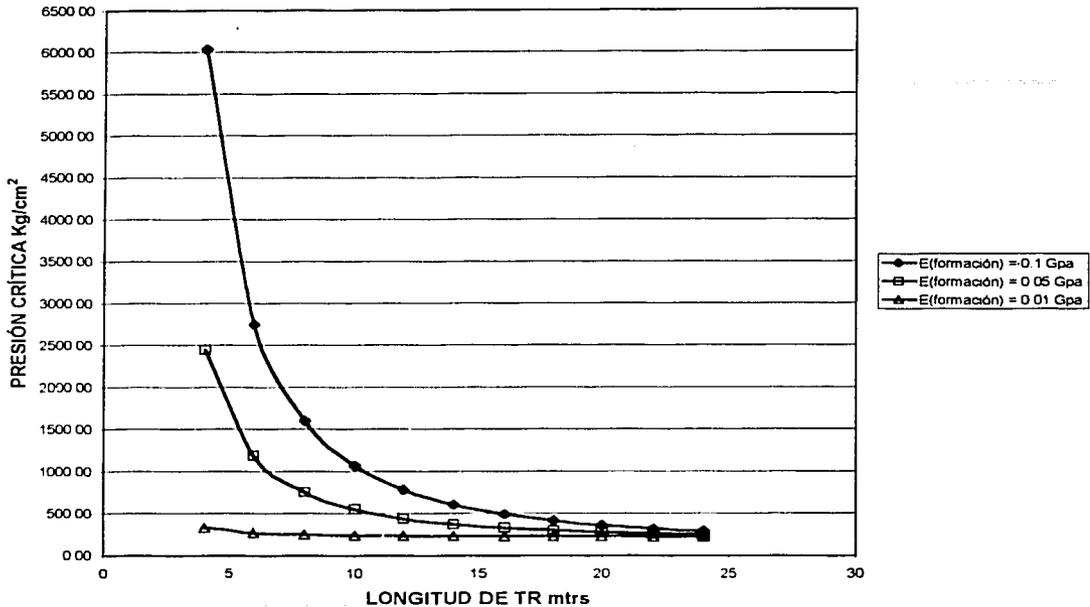


Figura IV.3. Comportamiento de la presión crítica de pandeo, para una tubería de revestimiento de 4 1/2'.

En las figura IV.2 y figura IV.3, se muestra que la presión de colapso por pandeo se incrementa por tres variables:

- Inicialmente, si se incrementa el diámetro de la tubería de revestimiento, la presión crítica también aumenta, por lo que se puede aseverar que en una tubería de menor diámetro, este fenómeno se presenta con mayor facilidad, mencionado en la oración anterior es también ilustrado en las figuras IV.4 y IV.5. La figura IV.4, ilustra el comportamiento de la presión crítica, variando el diámetro de la tubería, para una longitud de intervalo productor de 12 metros.
- Una segunda variable es la longitud de la tubería que se encuentra en contacto con la formación productora, en otras palabras, si se tiene un intervalo productor de mayor longitud, es más probable que se presente el efecto de pandeo de la tubería de

revestimiento provocando colapso en la misma. Para longitudes muy pequeñas de intervalo productor, es muy difícil que se presente este fenómeno, esto es por que se tiene muy poca compactación de la formación. En la figura IV.5, se presentan curvas del comportamiento de la presión crítica para diferentes intervalos de producción, en las curvas de la figura se puede observar que, a medida que la longitud del intervalo productor se incrementa, la curva del comportamiento de la presión crítica se desplaza hacia la parte inferior. Las curvas que presentan mayores valores de presión crítica, son las curvas para longitudes del intervalo productor de menor magnitud.

- Las propiedades de la formación, pueden también incrementar la posibilidad de que se presente el efecto de pandeo en la tubería de revestimiento, si el pozo se encuentra terminado en una formación productora no consolidada, el efecto de compactación de la formación se ve más acentuado en este tipo de formaciones. El incremento en el grado de compactación de la formación provoca que se tengan mas posibilidades de que en la tubería de revestimiento se presenten problemas por pandeo de la misma.

Las condiciones más críticas para las cuales se puede presentar pandeo en la tubería se presentan cuando se tiene una tubería de diámetro pequeño, un intervalo productor muy grande y formación productora no consolidada.

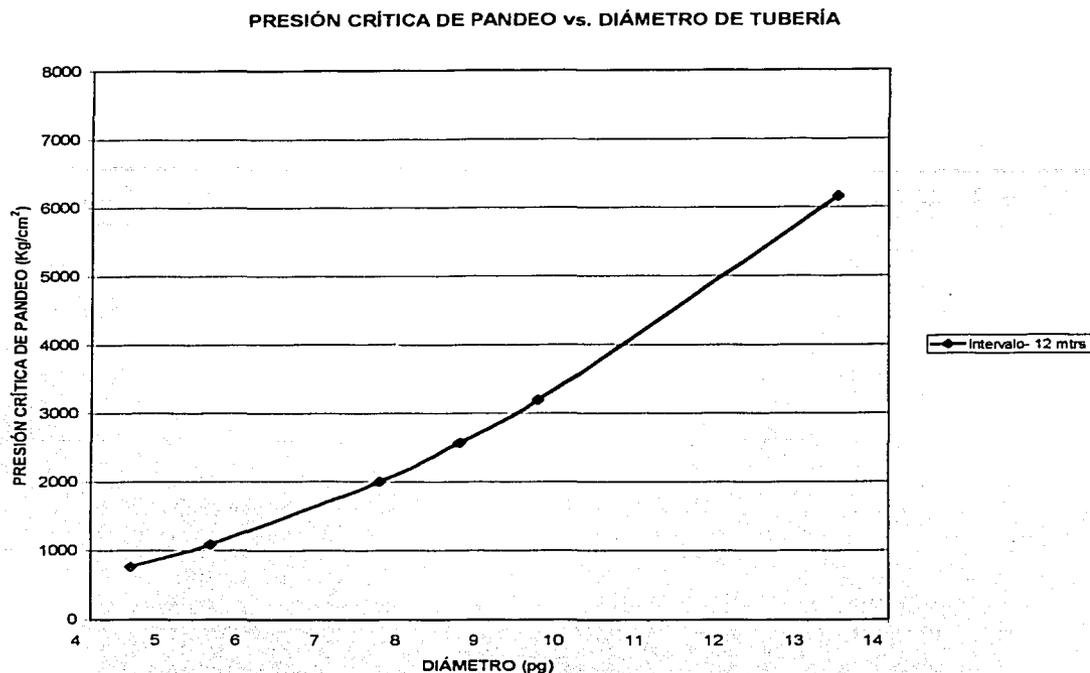


Figura IV.4. Comportamiento de la presión crítica de pandeo, para intervalo productor de 12 mtrs.

Otra forma de analizar el comportamiento de la presión crítica de colapso para la tubería de revestimiento, es manteniendo constante la longitud del intervalo productor, para de esta forma poder analizar su comportamiento a medida que varía el diámetro de la tubería. Se puede observar en las figuras IV.4 y IV.5, que a medida que se incrementa el diámetro de la tubería, la presión crítica de colapso también se incrementa, por lo que se puede asegurar que una tubería de mayor diámetro puede proveer una mejor integridad mecánica para evitar el efecto de pandeo en un pozo terminado en formaciones no consolidadas.

PRESIÓN CRÍTICA PARA EL PANDEO vs. DIÁMETRO DE TUBERÍA

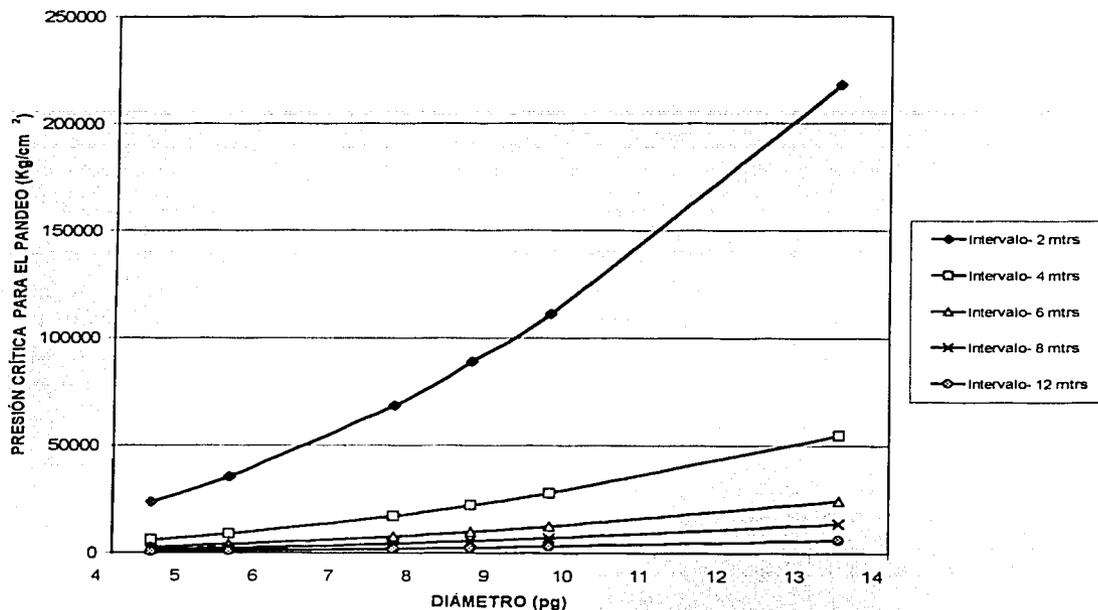


Figura IV.5. Comportamiento de la presión crítica de pandeo, para intervalos productores de 2, 4, 6, 8, y 12 mtrs.

IV.3. Análisis de la deformación radial.

Para el análisis de la deformación radial, se hacen las siguientes consideraciones:

- Se considera a la tubería de revestimiento como un cilindro circular cuya pared tiene un espesor constante, está sometido a la acción de una presión, interna y externa, uniformemente distribuidas, la deformación que se produce es simétrica alrededor del eje de la tubería de revestimiento.
- La compactación que sufre la formación productora, es la misma que sufre la tubería de revestimiento.

- La presión en el interior de la tubería de revestimiento es la misma en la pared externa de la tubería.
- La tubería de revestimiento es considerada como un material dúctil.
- El comportamiento de la deformación se modela con la ley de hook.

La deformación radial que sufre la tubería de revestimiento es modelado con las expresiones obtenidas en el capítulo III.

La ecuación con la cual modelamos la deformación radial es:

$$u = \frac{A}{2} r + \frac{B}{r} - \frac{\mu(1+\mu)}{2E} \sigma_z r$$

Donde las constantes A y B son obtenidas con las condiciones de frontera:

- Se considera que el valor del esfuerzo radial en el radio interno de la tubería es igual a la presión interna, esto es:

$$(\sigma_r)_{r=r_i} = p_i$$

- Se considera que la deformación en el radio externo es nula.

$$u(r)_{r=r_o} = 0$$

y se obtienen para las constantes A y B, las siguientes expresiones:

$$A = [\sigma_z \mu (r_o^2 - r_i^2) - 2 p_i r_i^2] \left[\frac{(1 - \mu^2)}{E [r_o^2 (1 - \mu) + r_i^2 (1 + \mu)]} \right]$$

$$B = \left(\frac{\mu \sigma_z r_i^2 r_o^2}{(1 - \mu)} + p_i r_i^2 r_o^2 \right) \left(\frac{(1 - \mu^2)}{E [r_o^2 (1 - \mu) + r_i^2 (1 + \mu)]} \right)$$

Los cálculos se realizaron con los siguientes datos para las variables que intervienen en el modelo que se desarrollo en el capitulo III, para la modelación de la deformación radial de la tubería de revestimiento.

Interno (pg)	Externo (pg)
4	4 1/2
5.012	5 1/2
6.969	7.625
8.017	8 5/8
9.001	9 5/8
12.715	13 3/8

Tabla IV.6. Diámetros de tuberías

MÓDULO DE YOUNG DE LA FORMACIÓN	0.01-0.1 Gpa
--	--------------

RELACIÓN DE POISSON DE LA FORMACIÓN	0.45
--	------

RELACIÓN DE POISSON	0.3
MÓDULO DE YOUNG (kg/cm²)	2150000
MÓDULO DE CORTE (kg/cm²)	800000
MÓDULO VOLUMETRICO (kg/cm²)	160000
COEFICIENTE DE BIOT	0.9

Tabla IV.7. Datos de la tubería.

Presión del Yacimiento (Kg/cm ²)		Δp (Kg/cm ²)
450		0
435		15
420		30
405		45
390		60
375		75
360		90
345		105
..		...
240		210
225		225
210		240
195		255
180		270
165		285

Tabla IV.8. presión del yacimiento.

Los cálculos de la deformación radial se realizaron de la siguiente forma:

- 1.- Considerando el módulo de Young constante. Para diferentes diámetros de tubería de revestimiento
- 2.- Variando el módulo de Young, considerando una formación no consolidada con valores de 0.01 a 0.1.
- 3.- para tuberías del mismo diámetro exterior, pero diferentes diámetros internos.

IV.3.1. Cálculos de deformación radial con módulo de young de la formación constante.

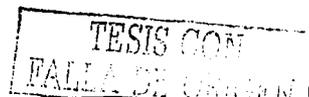
Los resultados obtenidos para el comportamiento de la deformación radial, para un módulo de young constante de 0.01 Gpa, son mostrados a continuación, los resultados son presentados para diferentes diámetros de tubería de revestimiento.

Presión del yacimiento (Kg/cm ²)	Comportamiento de la deformación (pg)					
	Módulo de young de la formación					0.01 Gpa
	13 3/8	9 5/8	8 5/8	7 5/8	5 ½	4 ½
450	7.412E-05	6.09097E-05	6.159E-05	5.05512E-05	4.668E-05	3.83866E-05
435	0.007995	0.006570523	0.0066439	0.005453114	0.0050358	0.00414088
420	0.015916	0.013080137	0.0132262	0.010855678	0.0100249	0.008243374
405	0.0238369	0.019589751	0.0198085	0.016258241	0.0150139	0.012345867
390	0.0317578	0.026099364	0.0263908	0.021660804	0.020003	0.016448361
375	0.0396787	0.032608978	0.0329731	0.027063368	0.0249921	0.020550855
360	0.0475997	0.039118592	0.0395554	0.032465931	0.0299812	0.024653348
345	0.0555206	0.045628205	0.0461377	0.037868494	0.0349703	0.028755842
330	0.0634415	0.052137819	0.05272	0.043271058	0.0399594	0.032858336
315	0.0713624	0.058647433	0.0593023	0.048673621	0.0449484	0.036960829
300	0.0792834	0.065157046	0.0658846	0.054076184	0.0499375	0.041063323
285	0.0872043	0.07166666	0.0724669	0.059478748	0.0549266	0.045165816
270	0.0951252	0.078176274	0.0790492	0.064881311	0.0599157	0.04926831
255	0.1030462	0.085119861	0.0856315	0.070283874	0.0649048	0.053370804
240	0.1109671	0.091195501	0.0922138	0.075686438	0.0698939	0.057473297
225	0.118888	0.097705115	0.0987961	0.081089001	0.074883	0.061575791
210	0.1268089	0.104214728	0.1053784	0.086491564	0.079872	0.065678285
195	0.1347299	0.110724342	0.1119607	0.091894128	0.0848611	0.069780778
180	0.1426508	0.117233956	0.1185429	0.097296691	0.0898502	0.073883272
165	0.1505717	0.123743569	0.1251252	0.102699254	0.0948393	0.077985766

Tabla IV.9. Resultados del comportamiento de la deformación radial, para E=0.01 Gpa.

Los resultados obtenidos en la deformación radial, en tuberías de revestimiento de diferentes diámetros y que se presentan en la tabla IV./, también son presentados en las figuras IV.6 y IV.7.

En la figura IV.6, se puede observar que a medida que se incrementa la caída de presión dentro del yacimiento, existirá un mayor efecto en la deformación radial, el efecto es que la deformación se incrementa.



COMPORTAMIENTO DE LA DEFORMACIÓN RADIAL

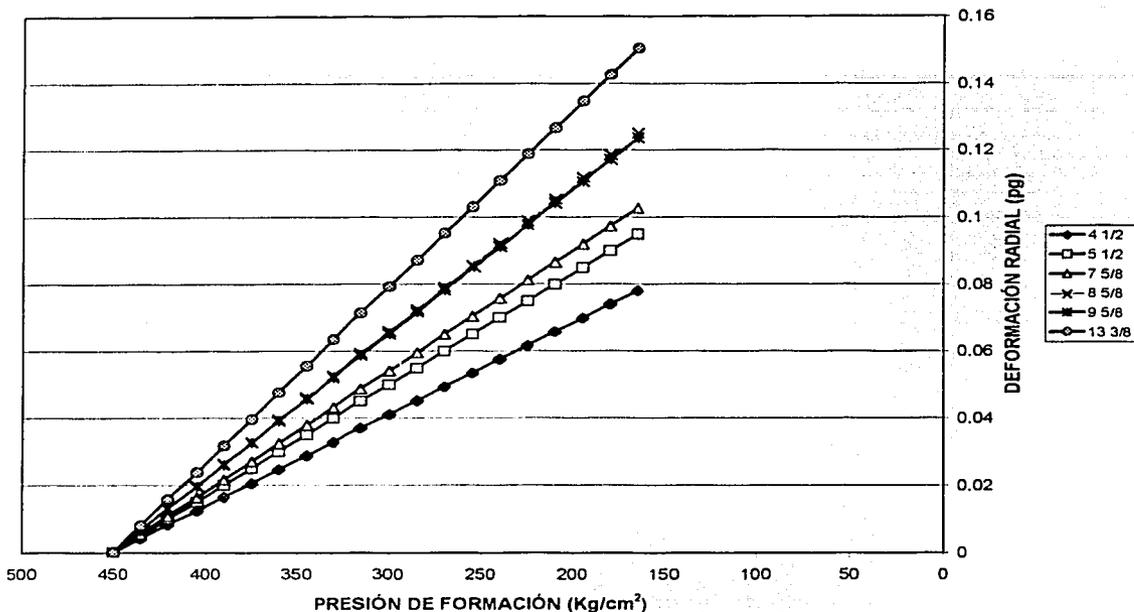


Figura IV.6. Comportamiento de la deformación radial, para una tubería de diámetros de 4 1/2, 5 1/2, 7 5/8, 8 5/8, 9 5/8 y 13 3/8.

La figura IV.6, muestra las curvas correspondientes a la deformación radial, en diámetros de tuberías de revestimiento de 4 1/2, 5 1/2, 7 5/8, 8 5/8, 9 5/8 y 13 3/8, las curvas mostradas en la figura muestran que si el diámetro de la tubería aumenta la magnitud de la curva también aumenta, el comportamiento de la deformación radial se desplaza hacia un valor mayor, lo que quiere decir que problemas provocados por deformación de la tubería son más probables en tuberías de diámetros mayores.

Otra forma de ilustrar el comportamiento de la deformación radial, es comparando la reducción en el diámetro interno de la tubería de revestimiento con el diámetro trabajo mínimo especificado en las tablas de tubería de revestimiento presentadas por el API. Esto se aprecia en la figura IV.7.

COMPORTAMIENTO DEL DIÁMETRO INTERNO

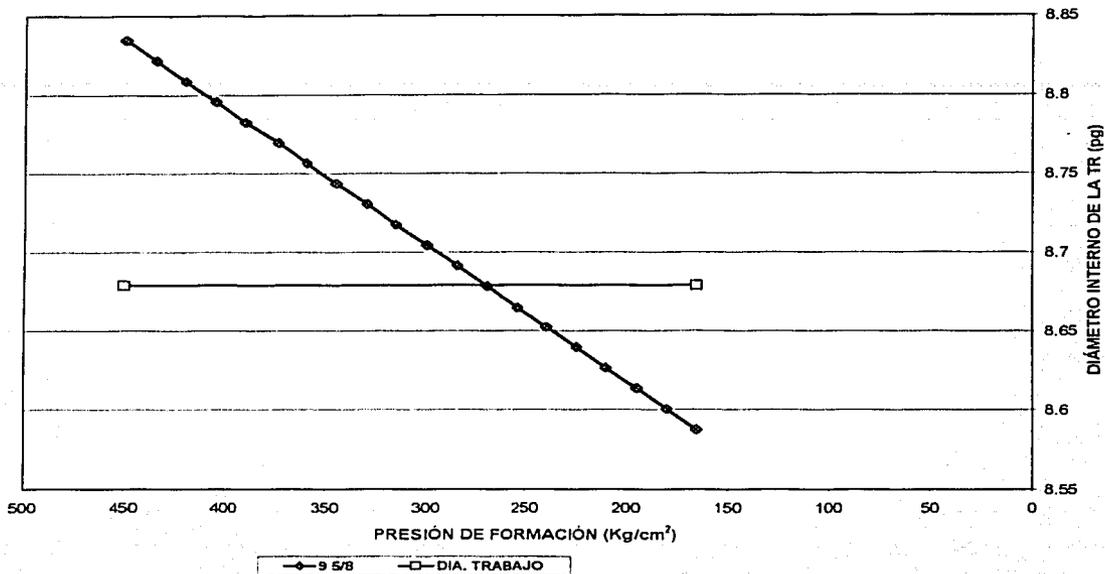
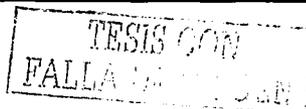


Figura IV.7. Comportamiento del diámetro interno de la tubería de revestimiento, para un diámetro de 9 5/8.

En la figura IV.7, se presenta el comportamiento del diámetro interno de la tubería de revestimiento de 9 5/8, la línea horizontal representa el diámetro mínimo de trabajo de la tubería en cuestión, se puede observa que se presenta una reducción en el diámetro interno, cuando la presión del yacimiento (para nuestro ejemplo) se reduce a 270 Kg/cm² aproximadamente, entonces, el diámetro interno de la tubería se reduce a un valor igual al diámetro mínimo de trabajo de la tubería en estudio, por lo que con esto, se puede decir que la tubería en este punto técnicamente no permite se pueda realizar operación alguna dentro de ella.

En la siguiente figura se presenta el comportamiento del diámetro interno para diferentes diámetros de tuberías sujetas a las mismas condiciones de presión, y considerando que las propiedades de la formación productoras son las mismas a las cuales se encuentran las diferentes tuberías.



COMPORTAMIENTO DEL DIÁMETRO INTERNO

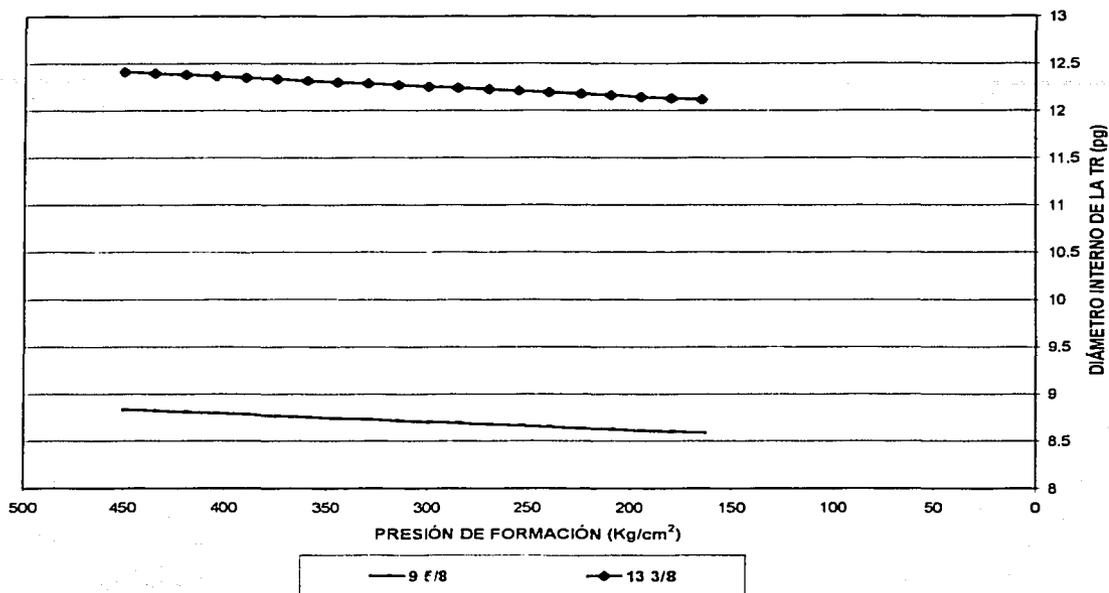


Figura IV.8. Comportamiento del diámetro interior de la tubería de revestimiento para diámetros de tubería de 9 5/8 y 13 3/8.

Empleando las figuras IV.8, IV.9 y IV.10, se puede comparar en que punto de la vida productiva del yacimiento se alcanza la condición para la cual la tubería presenta problemas para realizar operaciones dentro de ella, es importante aclarar que puede o no presentarse la condición en la cual la reducción en el diámetro interior ya no permita que se pueda operar dentro de la tubería de revestimiento.

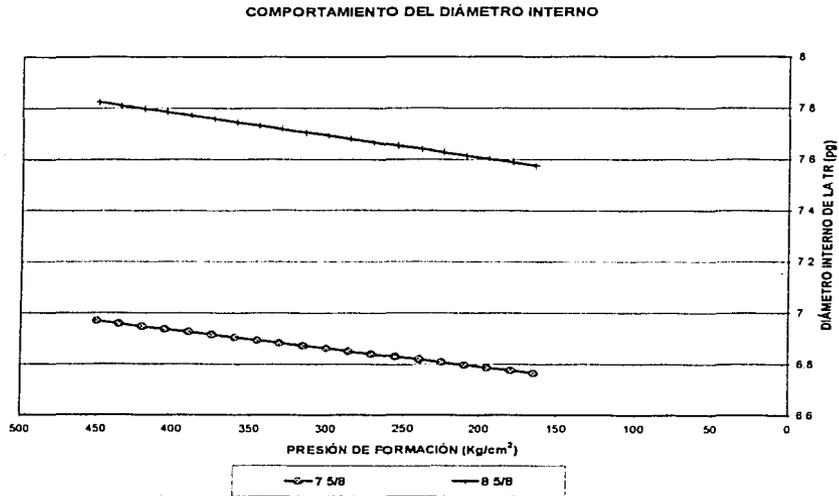


Figura IV.9. Comportamiento del diámetro interior de la tubería de revestimiento para diámetros de tubería de 7 5/8 y 8 5/8.

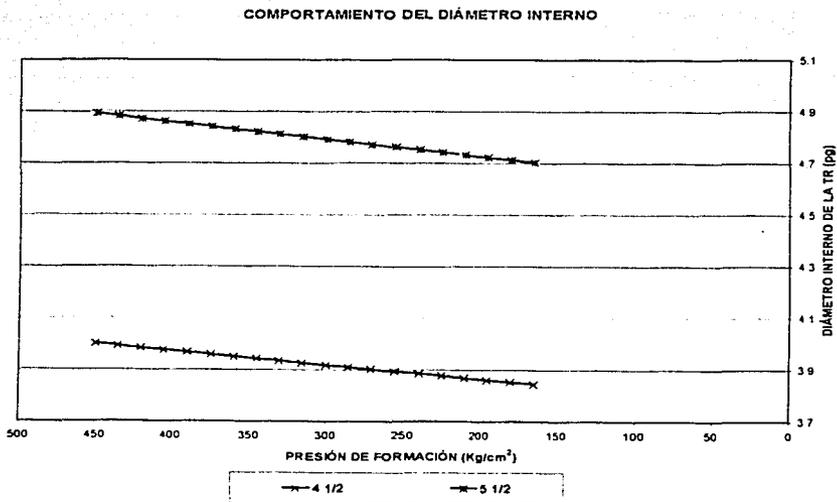


Figura IV.10. Comportamiento del diámetro interior de la tubería de revestimiento para diámetros de tubería de 5 1/2 y 4 1/2.

Para que se puedan presentar problemas ocasionados por la reducción del diámetro interior, es necesario que se presenten varias condiciones. Por lo cual es necesario realizar un análisis variando algunas de las otras variables que intervienen en el modelo desarrollado en el capítulo III.

IV.3.2. Cálculos de deformación radial para diferentes propiedades de la formación productora.

Una de las variables más importantes que influyen en la deformación radial son las propiedades de la formación, a medida que se tengan formaciones menos consolidadas es más factible que se presente deformación en la tubería de revestimiento. Este efecto se trata de ilustrar más claramente con los siguientes cálculos. Al realizar el análisis se empleó la información que se encuentra en la tabla IV.10, así mismo los resultados obtenidos para el comportamiento de la deformación radial con el modelo desarrollado, se presentan en la misma tabla.

Presión del Yac.	E = 0.01 Gpa De la formación		E = 0.05 Gpa De la formación		E = 0.51 Gpa De la formación	
Comportamiento de la deformación radial (pg)						
Diámetro de las tuberías (pg)						
Kg/cm ²	9 5/8	13 3/8	9 5/8	13 3/8	9 5/8	13 3/8
450	0.000061	0.000074	0.000061	0.000074	0.000061	0.000074
435	0.006571	0.007995	0.001361	0.001656	0.000710	0.000864
420	0.013080	0.015916	0.002662	0.003239	0.001359	0.001654
405	0.019590	0.023837	0.003962	0.004821	0.002008	0.002444
390	0.026099	0.031758	0.005262	0.006403	0.002657	0.003234
375	0.032609	0.039679	0.006562	0.007985	0.003307	0.004023
360	0.039119	0.047600	0.007863	0.009567	0.003956	0.004813
300	0.065157	0.079283	0.013064	0.015896	0.006552	0.007973
285	0.071667	0.087204	0.014364	0.017478	0.007201	0.008763
270	0.078176	0.095125	0.015664	0.019061	0.007851	0.009553
255	0.084686	0.103046	0.016965	0.020643	0.008543	0.010342
240	0.091196	0.110967	0.018265	0.022225	0.009149	0.011132
225	0.097705	0.118888	0.019565	0.023807	0.009798	0.011922
210	0.104215	0.126809	0.020866	0.025389	0.010447	0.012712
195	0.110724	0.134730	0.022166	0.026972	0.011096	0.013502
180	0.117234	0.142651	0.023466	0.028554	0.011745	0.014292
165	0.123744	0.150572	0.024767	0.030136	0.012394	0.015082

Tabla IV.10. Comportamiento de la deformación radial, para diferentes módulos de young de la formación.

Los resulta que se muestran en la tabla IV.10, son gráficamente ilustrados en la figura IV.11:

COMPORTAMIENTO DE LA DEFORMACIÓN RADIAL

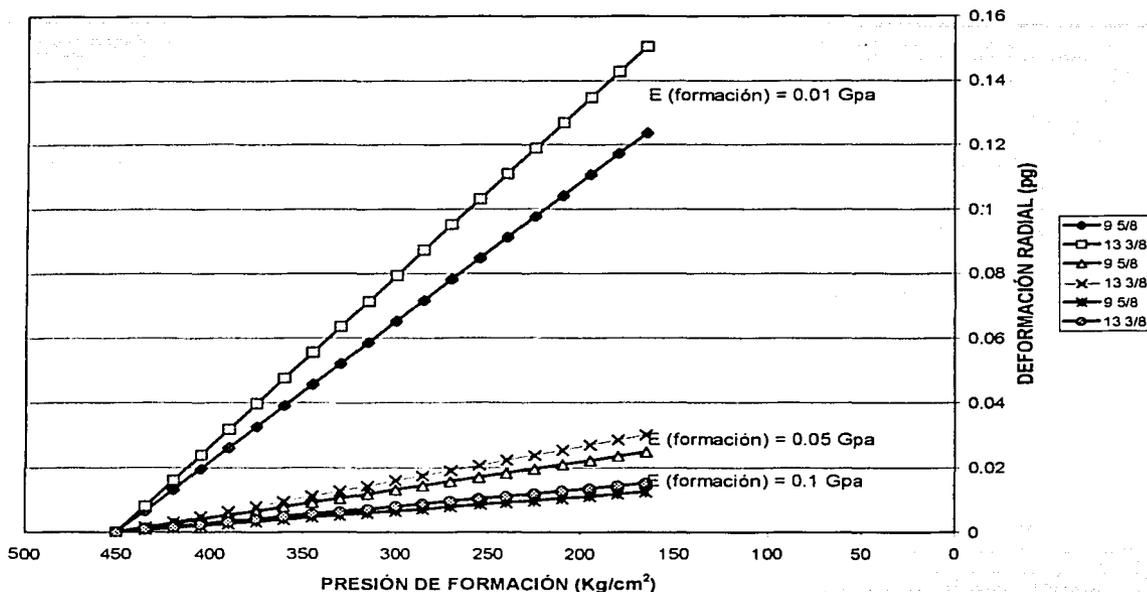


Figura IV.11. Comportamiento de la deformación radial, para diferentes módulos Young.

La figura IV.11, permite observar que, si se disminuye el valor en el módulo de Young (esto es que la formación es menos consolidada), se presenta un incremento en la deformación radial que sufre la tubería, la gráfica presenta curvas para el mismo diámetro de tubería pero para diferentes propiedades de la formación productora, y se observa que la misma tubería se deforma en mayor medida si la formación es menos consolidada.

Otra forma de analizar el efecto que tienen las propiedades de la formación productora sobre la deformación radial que sufre la tubería es comparar la reducción en el diámetro interno que sufre la tubería, los resultados obtenidos se presentan en la tabla IV.11.

Presión de Yac. Kg/cm ²	Tubería de 9 5/8 pg		
	E=0.01 Gpa	E=0.05 Gpa	E=0.1 Gpa
450	8.8348782	8.8348782	8.8348782
435	8.821859	8.8322776	8.8335799
420	8.8088397	8.829677	8.8322816
405	8.7958205	8.8270764	8.8309834
390	8.7828013	8.8244758	8.8296851
375	8.769782	8.8218752	8.8283868
360	8.7567628	8.8192746	8.8270886
345	8.7437436	8.816674	8.8257903
330	8.7307244	8.8140734	8.824492
315	8.7177051	8.8114728	8.8231938
300	8.7046859	8.8088722	8.8218955
285	8.6916667	8.8062716	8.8205972
270	8.6786475	8.803671	8.819299
255	8.6656282	8.8010704	8.8179141
240	8.652609	8.7984698	8.8167024
225	8.6395898	8.7958692	8.8154042
210	8.6265705	8.7932686	8.8141059
195	8.6135513	8.790668	8.8128076
180	8.6005321	8.7880674	8.8115094
165	8.5875129	8.7854668	8.8102111

Tabla IV.11. Comportamiento en el diámetro interno de una tubería de 9 5/8, para $E_{\text{formación}} = 0.01, 0.05 \text{ y } 0.1 \text{ Gpa}$.

Los resultados presentados en la tabla IV.11, también son presentados de forma gráfica en la siguiente figura.

COMPORTAMIENTO DEL DIÁMETRO INTERNO

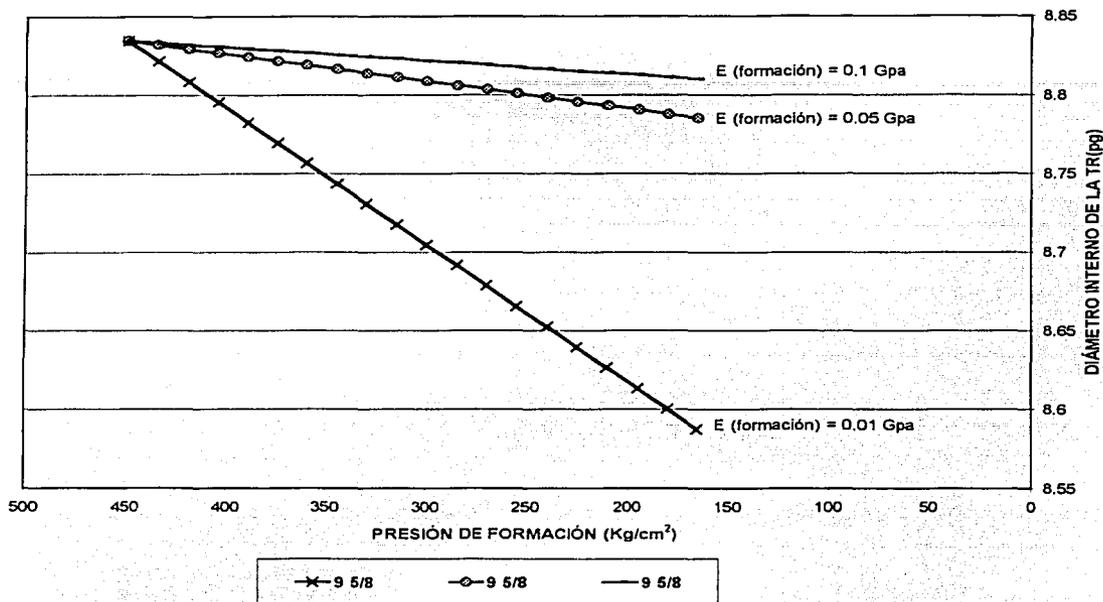


Figura IV.12. Comportamiento del diámetro interno de la tubería de 9 5/8, para E_{formación} = 0.01, 0.05 y 0.1 Gpa.

La figura IV. 12, muestra que a medida que formación es considerada menos consolidada se incrementa la magnitud en la reducción en el diámetro interior de la tubería.

Para analizar como se ven afectadas las dimensiones mínimas necesarias para realizar operaciones dentro de la tubería, se modela el comportamiento de la reducción del diámetro para diferentes tipos de formación, para el ejemplo mostrado a continuación se emplea una tubería de revestimiento de diámetro de 13 3/8 pulgadas.

Los cálculos realizados se muestran en la siguiente tabla:

Presión de Yac. Kg/cm ²	Tubería de 13 3/8 pg		
	E=0.01 Gpa	E=0.05 Gpa	E=0.1 Gpa
450	12.414852	12.414852	12.41485177
435	12.39901	12.411687	12.41327203
420	12.383168	12.408523	12.41169229
240	12.193066	12.37055	12.39273543
225	12.177224	12.367386	12.3911557
210	12.161382	12.364221	12.38957596
195	12.14554	12.361057	12.38799622
180	12.129698	12.357892	12.38641648
165	12.113857	12.354728	12.38483674

Tabla IV.12. Comportamiento en el diámetro interno de una tubería de 13 3/8 pg, para E_{formación}= 0.01, 0.05 y 0.1 Gpa.

Los resultados de la tabla IV.12, se muestran gráficamente en la siguiente figura.

COMPORTAMIENTO DEL DIÁMETRO INTERNO

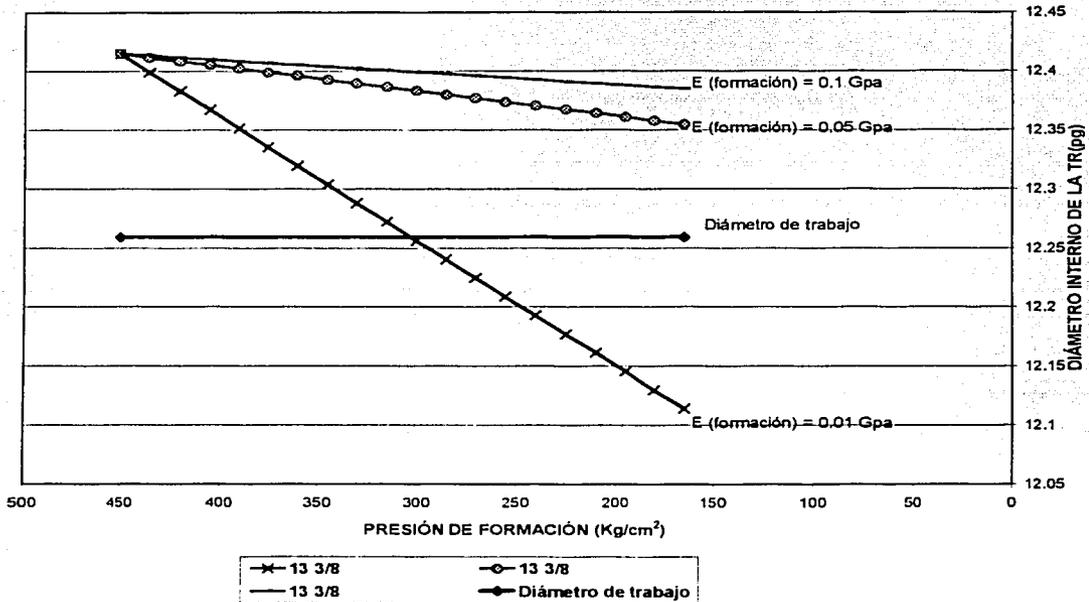


Figura IV.13. comportamiento en el diámetro interno de una tubería de 13 3/8, para E_{formación}= 0.01, 0.05 y 0.1 Gpa.

Con ayuda de la figura IV.13, se observa que para las condiciones establecidas en el ejemplo, en una tubería de diámetro de 13 3/8, la reducción en el diámetro interno de la tubería alcanza un valor menor que el diámetro mínimo de trabajo, solamente para la tubería que se encuentra en contacto con la formación que tiene valor para el módulo de Young de 0.01 Gpa, por lo anterior se puede decir que en formaciones no consolidadas existe un alto porcentaje de posibilidades de que se presenten condiciones donde la tubería va a presentar problemas de integridad mecánica.

Con los anteriores resultados se puede decir que problemas de integridad mecánica asociados al pozo son más probables en formaciones no consolidadas, además de diámetros grandes de tuberías de revestimiento. La combinación de una formación productora no consolidada y una tubería de revestimiento de diámetro relativamente grande, incrementa la probabilidad de que se presenten problemas en la integridad de la tubería por el efecto de deformación radial de la misma.

IV.3.3. Cálculos de deformación radial para diferentes espesores de pared de la tubería.

Para analizar de mejor manera el modelo establecido para la deformación radial de la tubería, se realiza un análisis de la deformación para tuberías del mismo diámetro exterior pero con diferentes valores de diámetro interno. Los resultados obtenidos en estas condiciones se muestran a continuación:

COMPORTAMIENTO DE LA DEFORMACIÓN RADIAL

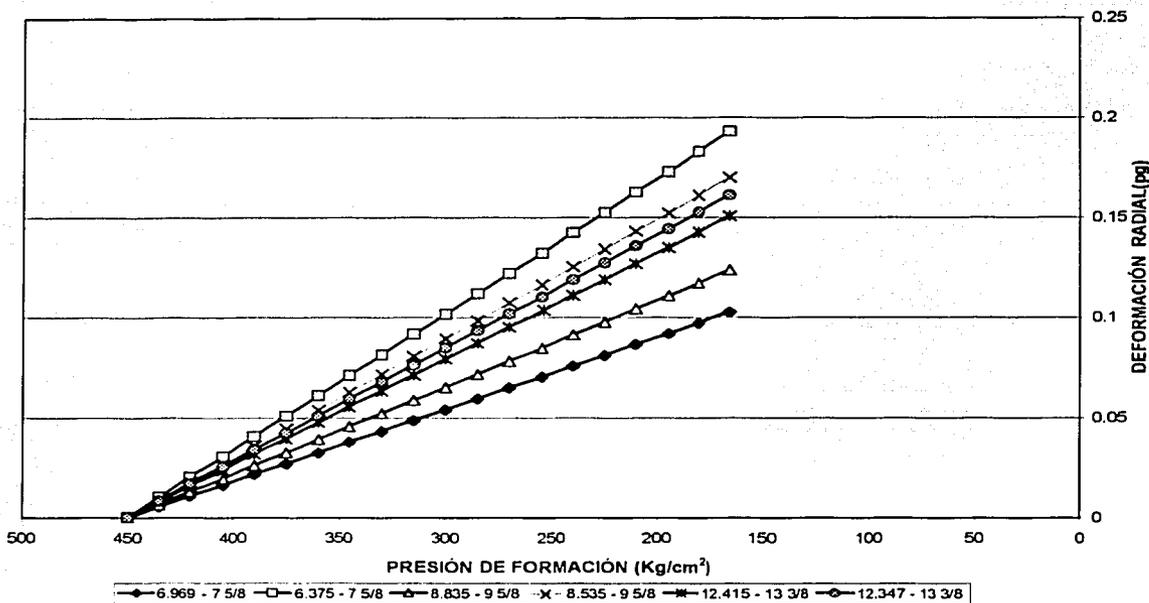


Figura IV.14. Deformación radial, para tuberías con diferentes espesores de pared.

En las curva de la figura IV.14, se observa que para una tubería del mismo diámetro exterior, pero para diferentes espesores de pared, se tiene que en tuberías de mayor espesor de pared se presenta un valor más grande de la deformación-radial que sufre la tubería.

Otra manera de ilustrar lo anterior se presenta en la figura siguiente.

COMPORTAMIENTO DE LA DEFORMACIÓN ATRAVÉS DEL ESPESOR DE PARED, PARA LA PRESIÓN FINAL

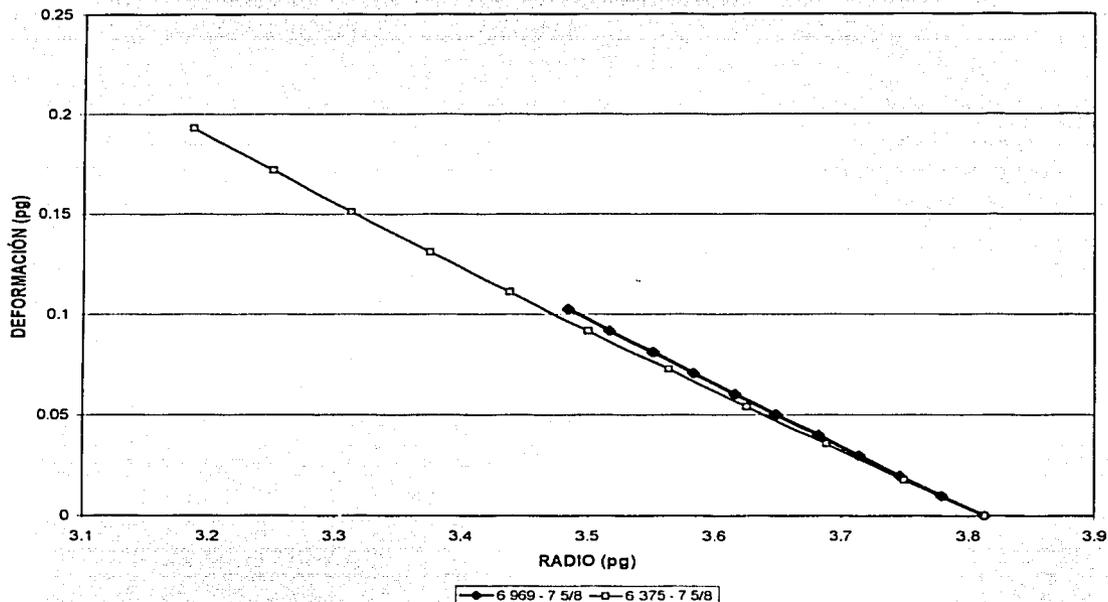


Figura IV.15. Deformación radial para una tubería de 7 5/8, para las condiciones finales de presión de yacimiento.

Se puede observar que para una tubería de diferente espesor de pared, se presenta un valor de deformación radial mayor a medida que se incrementa el espesor de pared de la tubería.

IV.4. análisis de la integridad mecánica de la tubería de revestimiento por el efecto de colapso.

En el análisis del posible colapso que le puede ocurrir a la tubería de revestimiento en un pozo terminado en una formación no consolidada, se emplea el criterio de Von Mises (ver apéndice B), y considerando que el esfuerzo axial es nulo, el criterio se simplifica de la siguiente manera:

$$(\sigma_{\theta} - \sigma_r)^2 = 2\sigma_y^2$$

donde:

σ_y es la cedencia de la tubería.

Evaluando los esfuerzos radial y tangencial con el modelo obtenido en el capítulo III, se obtienen los siguientes resultados:

Criterio de cedencia de Von Mises			
Presión de formación	$E_{(formación)}$ 1 Gpa	$E_{(formación)}$ 0.1 Gpa	$E_{(formación)}$ 0.05 Gpa
Kg/cm ²	Kg/cm ²	Kg/cm ²	Kg/cm ²
450	169.00	169.00	169.00
440	285.69	1970.10	3776.84
430	402.39	3771.21	7384.68
420	519.08	5572.31	10992.51
410	635.78	7373.41	14600.35
400	752.47	9174.51	18208.19
390	869.16	10975.61	21816.02
380	985.86	12776.71	25423.86
370	1102.55	14577.82	29031.70
360	1219.24	16378.92	32639.54
350	1335.94	18180.02	36247.37
340	1452.63	19981.12	39855.21
330	1569.32	21782.22	43463.05
320	1686.02	23583.33	47070.88
310	1802.71	25384.43	50678.72
300	1919.40	27185.53	54286.56
290	2036.10	28986.63	57894.39
280	2152.79	30787.73	61502.23
270	2269.48	32588.83	65110.07
260	2386.18	34389.94	68717.91

Tabla IV.13. Resultados del criterio de Von Mises.

Los resultados obtenidos en el criterio de cedencia y que son mostrados en la tabla anterior se presentan en la siguiente figura.

CRITERIO DE CEDENCIA DE VON MISES TR P110 DIÁMETRO 4 1/2

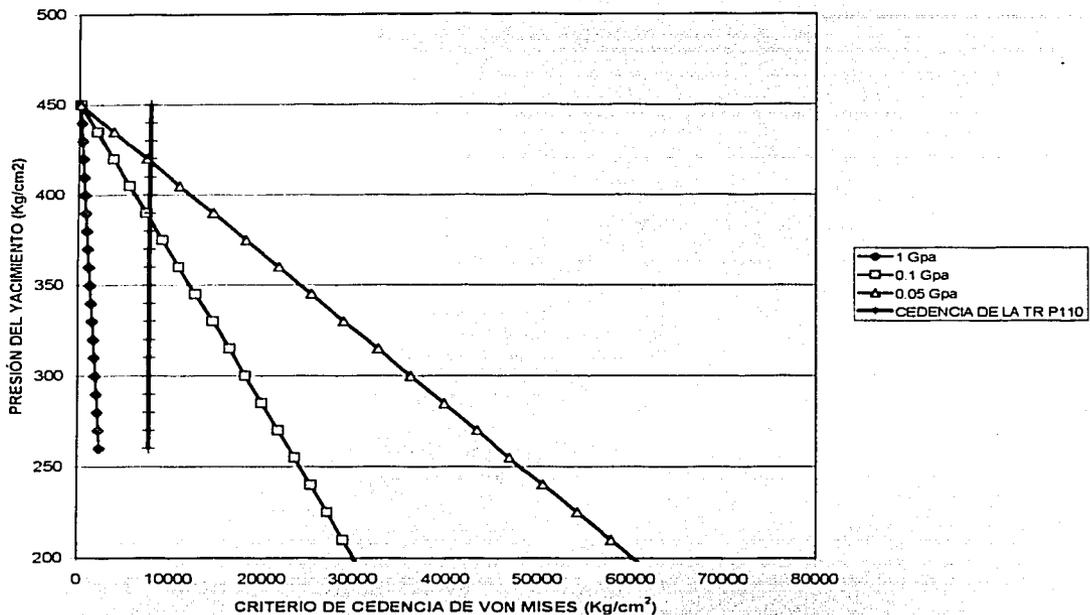


Figura IV. 16. Criterio de cedencia de Von Mises para una TR p110, diámetro 4 1/2

En la figura IV.16, se presentan los resultados obtenidos para una TR de 4 1/2 de diámetro, para diferentes grados de consolidación de la formación se puede observar que a medida que se tiene una formación menos consolidada el efecto de colapso de la TR se incrementa, en la figura la línea vertical indica la cedencia mínima de una tubería p110 API, con esto se puede ilustrar el momento en el que la tubería sufre colapso. En el punto donde la línea vertical se cruza con las curvas del comportamiento del criterio de Von Mises, en ese punto se tendrán problemas de integridad mecánica de la tubería, causado por el efecto de colapso por la combinación de esfuerzos radial y tangencial que se encuentran actuando sobre la tuberías, los esfuerzos son evaluados con el modelo obtenido en el capítulo III.

Otra forma de analizar el comportamiento del esfuerzo de cedencia es variando los diámetros de la tubería, manteniendo constantes las propiedades de la formación. En la figura IV.17, se presenta lo mencionado, en la figura se observa que una tubería de mayor diámetro provee una mejor integridad mecánica.

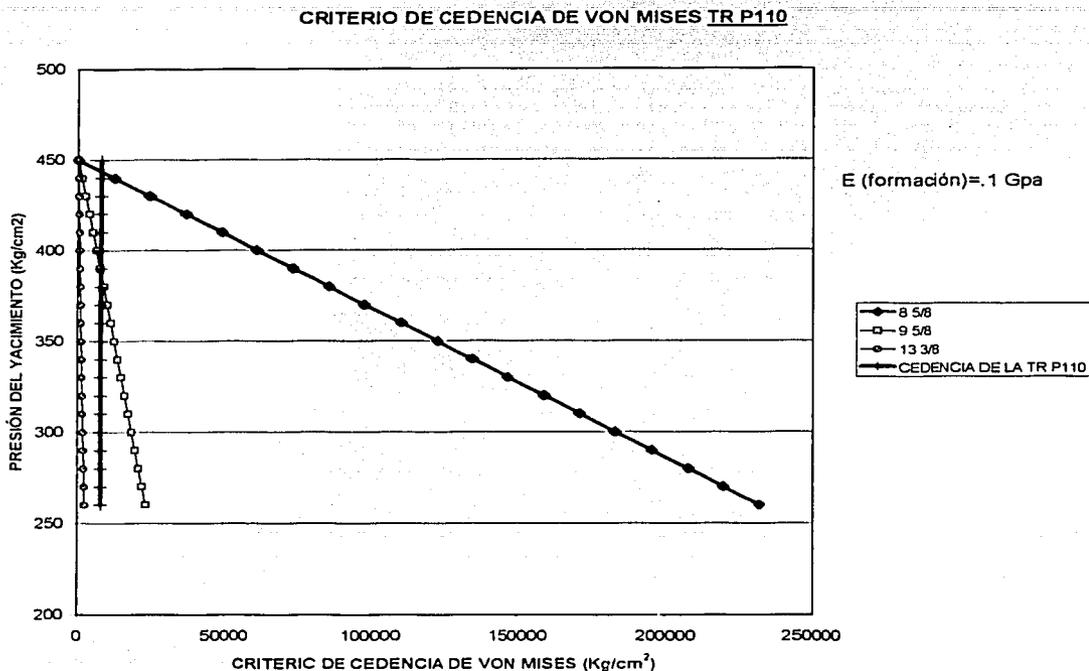


Figura IV.17. Criterio de cedencia de Von Mises TR P110, para diferentes diámetros de tubería.

IV.5. Comparación de los diferentes criterios de falla de la tubería.

Para determinar cual de los criterios de falla es el principal causante de la falla de la tubería, se requiere comparar los resultados obtenidos para cada uno de los criterios, y de ahí determinar cual de ellos es el principal causante de falla en la integridad mecánica de la tubería de revestimiento, la comparación de los criterios de falla se realiza de dos formas, la primera comparando el criterio de pandeo de la TR con el de colapso (criterio de cedencia de Von Mises), para lo cual se presenta la siguiente figura.

CRITERIO DE FALLA PARA TR DE 4 1/2 (pg)

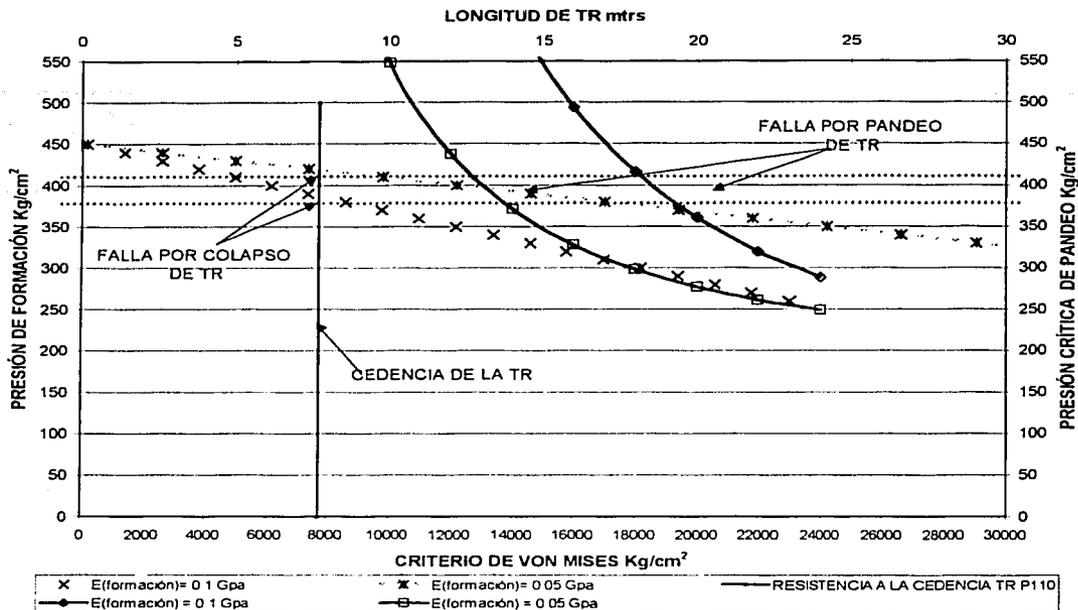


Figura IV.18. Comparación de los criterios de falla de la TR de 4 1/2, pando y colapso.

En la figura IV.18, se puede observar lo siguiente:

- Si se considera una longitud del intervalo productor de 10 metros, se presenta que, primero se presentara falla por colapso de la tubería provocado por los esfuerzos que se encuentran actuando sobre la misma.
- Si se considera un intervalo productor de 20 metros, se presentara primero falla por pandeo de la tubería de revestimiento.

Una segunda forma empleada para comparar los criterios de falla es, comparar el criterio de pandeo con el criterio de deformación radial de la tubería, para poder ilustrarlo se presenta la figura siguiente:

TR con FALLA por RIGIDEZ

CRITERIO DE FALLA PARA TR DE 4 1/2 (pg)

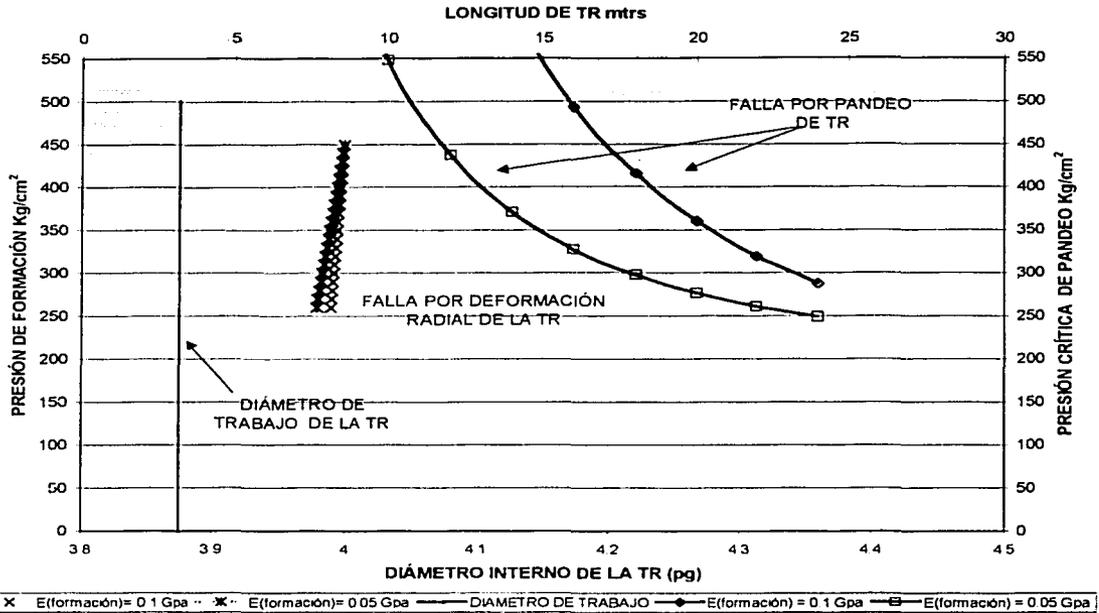
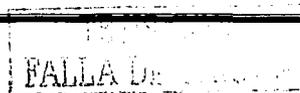


Figura IV.19. Comparación de los criterios de falla de la TR de 4 1/2, pandeo y deformación radial.

En la figura IV.19, se observa que primero se presentara falla mecánica de la tubería de revestimiento por el efecto de pandeo, considerando intervalos productores mayores de 12 metros, para intervalos productores pequeños ninguno de los dos criterios de falla ilustrados en la figura IV.19, por lo que se puede concluir que en formaciones no consolidadas el efecto de pandeo de la tubería de revestimiento es el que tiene mayor probabilidad de que se presente primero.

A continuación se presentan las comparaciones de los criterios de falla para una tubería de 13 3/8 pulgadas, la figura IV.20 presenta la comparación del criterio de falla de pandeo con el de colapso, y la figura IV.21, la comparación del criterio de falla de pandeo con el de deformación radial.



CRITERIO DE FALLA PARA TR DE 13 3/8 (pg)

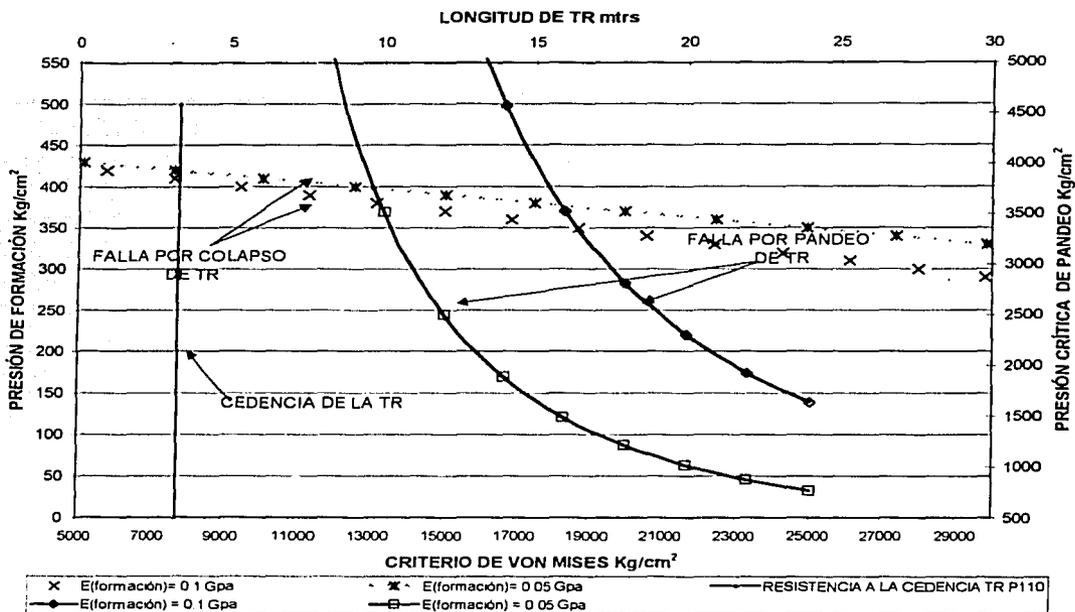


Figura IV.20. Comparación de los criterios de falla de la TR de 13 3/8, pandeo y colapso.

En la figura anterior se observa que en la tubería de 13 3/8, no se presenta la falla por pandeo, para las condiciones establecidas, sin embargo para la misma tubería si se presenta falla por el efecto de colapso, el valor de la presión para la cual se presenta el colapso de la tubería se puede observar en el punto donde la línea vertical, que representa el valor de cedencia de la tubería cruza a las curvas de colapso de la tubería.

CRITERIO DE FALLA PARA TR DE 13 3/8 (pg)

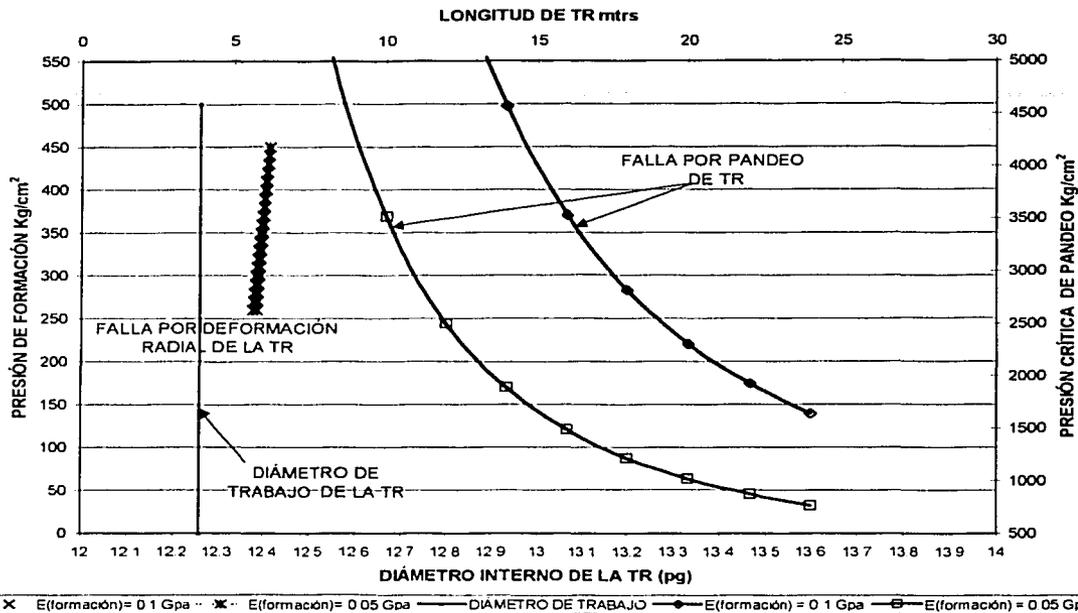


Figura IV.21. Comparación de los criterios de falla de la TR de 13 3/8, pandeo y deformación radial.

La figura IV.21, muestra que para las condiciones establecidas no se presenta falla por ninguno de los dos criterios.

CAPÍTULO V.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Se desarrollaron modelos analíticos para estudiar la integridad mecánica de las tuberías de revestimiento cementadas en formaciones no consolidadas. Se investigaron tres tipos de falla de la tubería de revestimiento:

- a) Falla por pandeo.
- b) Deformación radial.
- c) Colapso por carga mecánica.

En yacimientos en donde se sufre compactación, se puede inducir alguno de los tres tipos de fallas en la tubería de revestimiento mencionados anteriormente.

La presión crítica que provoca pandeo en la tubería de revestimiento es más crítica cuando los intervalos de producción son de gran espesor y combinados con diámetros pequeños de tubería cementada, el valor de la presión crítica necesaria para producir pandeo en la tubería de revestimiento se incrementa a medida que se cuenta con tubería de revestimiento de mayor diámetro.

Problemas de integridad mecánica provocados por la deformación radial de la tubería, son más probables en tuberías de diámetros grandes.

La deformación radial en tuberías de revestimiento debidas a la compactación del yacimiento, puede provocar daños en la tubería desde valores no perceptibles hasta valores que impidan que técnicamente se pueda realizar operaciones a través de la tubería. Lo anterior depende del grado de compactación de la roca de la formación productora.

Con base en los resultados obtenidos se puede afirmar que una tubería de revestimiento cementada en presencia de una formación no consolidada de gran espesor, primero se presentara falla por pandeo, al incrementarse el grado de consolidación de la formación se reduce el riesgo de que se presente pandeo de la tubería.

De los mismos resultados obtenidos se puede concluir que en un intervalo productor de una formación no consolidada pero de un espesor pequeño, primero se presentara falla de la tubería de revestimiento por colapso por carga mecánica.

También se puede concluir, que antes de que se presente falla por deformación radial se presentaran primero ya sea la falla por pandeo o falla por colapso debido a carga mecánica en la tubería de revestimiento.

La falla en la tubería de revestimiento puede ser minimizada mediante un programa de mantenimiento de presión del yacimiento.

En yacimientos con formaciones productoras no consolidadas un análisis previo de la compactación que puede sufrir el yacimiento, puede servir de ayuda para la toma de decisiones al momento de realizar el diseño de la tubería de revestimiento que se debe de emplear para poder garantizar la integridad mecánica del pozo, durante toda la vida productiva del mismo.

Un mejor estudio acerca del daño que sufren las tuberías de revestimiento provocado por la compactación del yacimiento, tiene que ser investigado en un modelo experimental a escala de laboratorio.

REFERENCIAS.

1. Bruno, M. S.: "Subsidence Induced Well Failure," artículo SPE 20058 presentado en the 60th California Regional Meeting of the Society of Petroleum Engineers, Ventura, California, abril 1990.
2. Timoshenko, S. y Gere J.M.: Theory of Elastic Stability, Second Edition, Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York City (1961).
3. Timoshenko S. y Goodier: Resistencia de Materiales, Espasa-Calpe S.A, Madrid (1957).
4. Timoshenko S. y Goodier: Theory of Elastic Third Edition, Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York City (1961).
5. Bourgoyne, A.T., Millheim, K.M., Chenever, M.E. Young: Applied drilling Engineering, SPE Textbook series Richardson, Tex. (1991).
6. Charlez, P.T.: Rock Mechanics Vol. 2, Petroleum Applications, Editions Technip, Paris, Francia (1997).
7. da Silva, F. et al.: "Casing Collapse Analysis With Reservoir Compaction and Overburden Subsidence," artículo SPE 20953 presentado en Europec 90, The Hague, Netherlands, (octubre 1990).
8. Dausseault Maurice B., Bruno Michael S. y Barrera John: "Casing Shear: Causes, Cases, Cures". SPE Drilling and completion (Junio 2001) 98-107.
9. de Waal, J.A. y Smits, R. M.: "Prediction of Reservoir Compaction and Surface Subsidence: Fiel Application of a New Model," artículo SPE 14214 presentado en the annual SPE meeting en Las Vegas Septiembre 1985.
10. Geertsma, J.: "Problems of Rock Mechanics in Petroleum Production Engineering," artículo presentado en Firs Cong. Intl. Soc. of Rock Mech. Lisboa (1966).
11. Geertsma, J.: "A Basic Theory of Subsidence Due to Reservoir Compaction: The Homogeneous Case," artículo presentado en Trans. Royal Dutch Society of geologists and Mining Engineers (1973).
12. Geertsma, J.: "Land Subsidence Above Compacting Oil and Gas Reservoirs," Journal of Petroleum Technology (Junio 1973) 734-744.

Referencias

13. Morita N. y Whitfill. A.: "Quick Method to Determine Subsidence, Reservoir Compaction and In-Situ Stress Induced by Reservoir Depletion," Journal of Petroleum Technology (Enero 1989) 71-79.
14. Settari A.: "Reservoir Compaction," artículo SPE 76805 (Agosto 2002)
15. Veecken, C.A.M. y J.P. Wahleitner.: "Experimental Modelling of Casing Deformation in a Compacting Reservoir," artículo presentado en Eurock Delft. A. Balkema, 1994.
16. Wilson, W., T.K. Parkins y J.H. Striegler.: "Axial Buckling Stability of Cemented Pipe," artículo SPE 8254 Presentado en Fall Meeting, Las Vegas, Septiembre 1979.
17. Yudovich A. y Chin L.Y.: "Casing Deformation in Ekofisk," artículo OTC 5623, Proc. Offshore Technology Conference, Houston, Texas, mayo 1988.
18. Rodríguez, N.: "Diseño de Tuberías de Revestimiento por Análisis Triaxial y su Aplicación a Pozos Horizontales," tesis de Maestría en Ingeniería (Petrolera), Mexico D.F., División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
19. Wooley, G.R.: "Reservoir Compaction Loads on Casing and Liners," artículo SPE 13088 presentado en the 59th Annual SPE Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, septiembre 1984.

NOMENCLATURA.

c'	Cohesión de la roca	Kg/cm^2 , Pascales
C_m	Coefficiente de compactación uniaxial.	$(\text{Kg/cm}^2)^{-1}$, (Pascales) ⁻¹
E	Módulo elástico (Módulo de Young)	Kg/cm^2 , Pascales
F_v	Fuerza crítica de colapso	Kg/cm^2 , Pascales
G	Módulo de corte	Kg/cm^2 , Pascales
h	Espesor original del yacimiento	m, pies
I	Momento de inercia	m^4 , pg^4
K_B	Módulo volumétrico	Kg/cm^2 , Pascales
L	Longitud de la TR	m, pies
p_{cem}	Presión en el cemento	Kg/cm^2 , Pascales
p_i	Presión interna	Kg/cm^2 , Pascales
p_o	Presión externa	Kg/cm^2 , Pascales
p_R	Presión del yacimiento	Kg/cm^2 , Pascales
p_{TR}	Presión en la TR	Kg/cm^2 , Pascales
p_{yac}	Presión del yacimiento	Kg/cm^2 , Pascales
r	Distancia radial	m, pies
r_i, R_i	Radio interno	m, pg
r_o, R_o	Radio externo	m, pg
R_{cem}	Radio del cemento	m, pg
R_{TR}	Radio externo de la TR	m, pg
S_x, S_y	Desplazamientos horizontales	m, pg
S_z	Desplazamiento vertical	m, pg
u	desplazamiento	m, pg
α	Coefficiente de biot	
α_p	Coefficiente irrotacional de presión de poro	$(\text{Kg/cm}^2)^{-1}$, (Pascales) ⁻¹
ε	Deformación	
ϕ	Ángulo de fricción interna	
λ	Coefficiente de compresibilidad de la formación	
μ	Relación de poisson	
σ_h	Esfuerzo horizontal	Kg/cm^2 , Pascales
σ_n	Esfuerzo normal	Kg/cm^2 , Pascales
σ_r, σ_{pp}	Esfuerzo radial	Kg/cm^2 , Pascales
$\sigma_t, \sigma_{\theta\theta}$	Esfuerzo tangencial	Kg/cm^2 , Pascales
σ_v	Esfuerzo vertical geostático	Kg/cm^2 , Pascales
σ_v^o	Peso de la sobrecarga	Kg/cm^2 , Pascales
σ_z, σ_{zz}	Esfuerzo vertical	Kg/cm^2 , Pascales
τ	Esfuerzo de corte	Kg/cm^2 , Pascales

Apéndice A

Esfuerzo axial, radial y tangencial¹⁸.

Aplicando la teoría clásica de elasticidad⁴ se puede establecer los esfuerzos radial y tangencial en la pared de la tubería de revestimiento como una función de las presiones interna, (p_i) y externa, (p_o), los radios interno, (r_i) y externo, (r_o) y la distancia radial, (r).

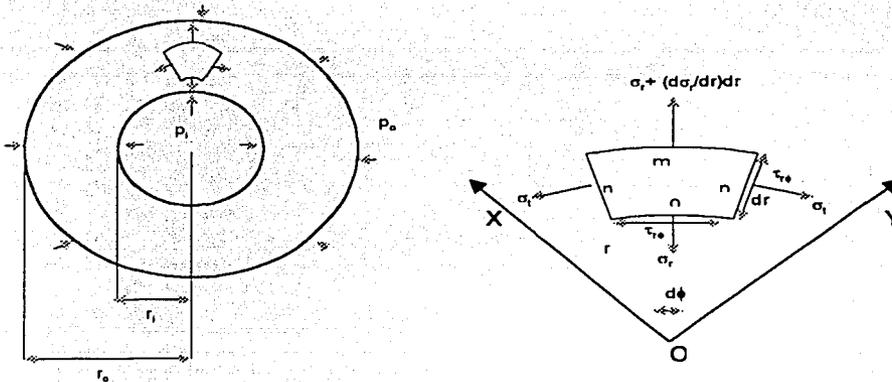


Figura 1-A. distribución de tensiones en un elemento de tubo

De acuerdo a la figura la suma de las fuerzas que actúan en la dirección radial en el elemento es:

$$\sum F_r = (\sigma_r)_m r_m d\phi - (\sigma_r)_o r_o d\phi - (\sigma_r)_p dr \sin(d\phi/2) - (\sigma_r)_n dr \sin(d\phi/2) - (\tau_{r\theta})_p dr \cos(d\phi/2) + (\tau_{r\theta})_n dr \cos(d\phi/2) = 0$$

A-1

La suma de fuerzas en la dirección tangencial es:

$$\sum F_i = -(\sigma_i)_p dr \cos(d\phi/2) + (\sigma_i)_n dr \cos(d\phi/2) - (\tau_{r\phi})_o r_o d\phi + (\tau_{r\phi})_m r_m d\phi + (\tau_{r\phi})_p dr \operatorname{sen}(d\phi/2) + (\tau_{r\phi})_n dr \operatorname{sen}(d\phi/2) = 0 \quad \text{A-2}$$

Cuando $d\phi/2$ es muy pequeño, $\operatorname{sen}(d\phi/2) = d\phi/2$ y $\cos(d\phi/2) = 1$
 Por lo que la ecuación A-1 se expresa como:

$$(\sigma_i)_m r_m d\phi - (\sigma_i)_o r_o d\phi - (\sigma_i)_p dr(d\phi/2) - (\sigma_i)_n dr(d\phi/2) + ((\tau_{r\phi})_n - (\tau_{r\phi})_p) = 0 \quad \text{A-3}$$

Y la ecuación A-2 queda como:

$$((\sigma_i)_n - (\sigma_i)_p) dr - (\tau_{r\phi})_o r_o d\phi + (\tau_{r\phi})_m r_m d\phi + (\tau_{r\phi})_p dr(d\phi/2) + (\tau_{r\phi})_n dr(d\phi/2) = 0 \quad \text{A-4}$$

Dividiendo por $dr d\phi$ las ecuaciones A-3 y A-4:

$$(\sigma_i r)_m - (\sigma_i r)_o - [1/2][(\sigma_i)_n + (\sigma_i)_p] + [(\tau_{r\phi})_n - (\tau_{r\phi})_p] d\phi = 0 \quad \text{A-5}$$

$$[(\sigma_i)_n + (\sigma_i)_p] d\phi + [(\tau_{r\phi})_o r_o - (\tau_{r\phi})_m r_m + [1/2][(\tau_{r\phi})_p + (\tau_{r\phi})_n]] = 0 \quad \text{A-6}$$

Tomando límites cuando $d\phi$ y dr tienden a cero, la ecuación A-5 se reduce a:

$$[\delta(\sigma_i r^2) / \delta r] - \sigma_i + (\delta\tau_{r\phi}) \delta\phi = 0 \quad \text{A-7}$$

Como:

$$[\delta(\sigma_i r) / \delta r] = r \delta(\sigma_i) / \delta r + \sigma_i \quad \text{A-8}$$

Sustituyendo A-8 en A-7 y dividiendo por r

$$[\delta(\sigma_i) / \delta r] + (\sigma_i - \sigma_o) / r + (1/r)[(\delta\tau_{r\phi}) \delta\phi] = 0 \quad \text{A-9}$$

Haciendo lo mismo para la ecuación A-6 se tiene:

$$[\delta(\sigma_i) / \delta\phi] + (\delta\tau_{r\phi} r) / \delta r + \tau_{r\phi} = 0 \quad \text{A-10}$$

Se sabe que:

$$\delta(\tau_{r,\phi}r)/\delta r = (r\delta\tau_{r,\phi}/\delta r) + \tau_{r,\phi} \quad \text{A-10a}$$

Sustituyendo A-2a en A-2 y dividiendo entre r

$$(1/r)(\delta\sigma_r/\delta\phi) + (\delta\tau_{r,\phi}/\delta r) + 2\tau_{r,\phi}/r = 0 \quad \text{A-11}$$

Si la distribución de esfuerzos es simétrica con respecto al origen (figura 1-A), perpendicular al plano X-Y, las componentes del esfuerzo no dependen de ϕ , sino solo del radio r. Por simetría también el esfuerzo cortante $\tau_{r,\phi}$ desaparece y únicamente la ecuación A-9 se conserva.

$$(\delta\sigma_r/\delta r) + (\sigma_r - \sigma_t)/r = 0$$

La solución de las siguientes ecuaciones satisface a la anterior:

$$\sigma_r = (1/r)(\delta\varphi/\delta r) + (1/r^2)(\delta^2\varphi/\delta\phi^2)$$

$$\sigma_t = (\delta^2\varphi/\delta r^2)$$

$$\tau_{r,\phi} = (1/r^2)(\delta\varphi/\delta\phi) - (1/r^2)(\delta^2\varphi/\delta r\delta\phi)$$

Donde φ (función esfuerzo) es función de r y ϕ .

Una condición que satisface la ecuación de compatibilidad, en coordenadas cartesianas es:

$$(\delta^4\varphi/\delta x^4) + 2(\delta^4\varphi/\delta x^2\delta y^2) + (\delta^4\varphi/\delta y^4) = 0$$

La relación entre coordenadas polares y cartesianas es:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\phi = \arctg(y/x)$$

De aquí que

$$\delta\phi/\delta x = (x/r) = \cos\phi$$

$$\delta r/\delta y = (y/r) = \text{sen}\phi$$

$$\delta\phi/\delta x = -y/r^2 = -\text{sen}\phi/r$$

$$\delta\phi/\delta y = -x/r^2 = -\cos\phi/r$$

Como $\varphi = f(r, \phi)$

$$(\delta\varphi/\delta x) = (\delta\varphi/\delta r)(\delta r/\delta x) + (\delta\varphi/\delta\phi)(\delta\phi/\delta x) = (\delta\varphi/\delta r)\cos\phi - (1/r)(\delta\varphi/\delta\phi)\text{sen}\phi$$

La segunda derivada será:

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2} = \left(\frac{\delta}{\delta r} \cos\phi - \frac{1}{r} \text{sen}\phi \right) \left(\frac{\delta\varphi}{\delta r} \cos\phi - \frac{1}{r} \frac{\delta\varphi}{\delta\phi} \text{sen}\phi \right)$$

Desarrollando:

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2} = A - B - C + D$$

Donde:

$$A = \frac{\delta}{\delta r} \cos\phi \frac{\delta\varphi}{\delta r} \cos\phi$$

$$B = \frac{1}{r} \text{sen}\phi \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta\varphi}{\delta r} \cos\phi$$

$$C = \frac{1}{r} \text{sen}\phi \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta\varphi}{\delta r} \cos\phi$$

$$D = \frac{1}{r} \text{sen}\phi \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{1}{r} \frac{\delta\varphi}{\delta\phi}$$

Derivando A, B, C y D

Apéndice A

$$A' = (\delta^2 \varphi / \delta r^2) \cos^2 \phi$$

$$B' = \frac{1}{r} \frac{\delta^2 \varphi}{\delta \varphi \delta r} \operatorname{sen} \phi \cos \phi - \frac{1}{r^2} \frac{\delta \varphi}{\delta \phi} \operatorname{sen} \phi \cos \phi$$

$$C' = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta \phi \delta r} \frac{\operatorname{sen} \phi \cos \phi}{r} - \frac{\delta \varphi}{\delta \phi} \frac{\operatorname{sen} \phi \cos \phi}{r^2}$$

$$D' = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta \phi^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{r^2} + \frac{\delta \varphi}{\delta r} \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{r}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^2} = A' - B' - C' + D'$$

Ordenando términos resulta:

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta r^2} \cos^2 \phi - \frac{2 \delta^2 \varphi}{\delta \phi \delta r} \frac{\operatorname{sen} \phi \cos \phi}{r} + \frac{2 \delta \varphi}{\delta \phi} \frac{\operatorname{sen} \phi \cos \phi}{r^2} + \frac{\delta \varphi}{\delta r} \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{r} + \frac{\delta^2 \varphi}{\delta \phi^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{r^2} \quad \text{A-12}$$

De una manera similar se obtiene $(\delta^2 \varphi / \delta y^2)$; y es igual a:

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta r^2} \operatorname{sen}^2 \phi + \frac{2 \delta^2 \varphi}{\delta \phi \delta r} \frac{\operatorname{sen} \phi \cos \phi}{r} - \frac{2 \delta \varphi}{\delta \phi} \frac{\operatorname{sen} \phi \cos \phi}{r^2} + \frac{2 \delta \varphi}{\delta \phi} \frac{\cos^2 \phi}{r} + \frac{\delta^2 \varphi}{\delta \phi^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{r^2} \quad \text{A-13}$$

Sumando las ecuaciones A-12 y A-13 y utilizando la igualdad trigonométrica de:

$$\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

Se obtiene:

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \varphi}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta \varphi}{\delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2 \varphi}{\delta \phi^2} \quad \text{A-14}$$

Utilizando la identidad:

$$\frac{\delta^4 \varphi}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 \varphi}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 \varphi}{\delta y^4} = \left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right) \left(\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \varphi}{\delta y^2} \right)$$

Transformando la ecuación en coordenadas polares de acuerdo a la ecuación A-14, resulta:

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2}{\delta \phi^2} \right) \left(\frac{\delta^2 \varphi}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta \varphi}{\delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2 \varphi}{\delta \phi^2} \right) = 0$$

$$\frac{\delta^2}{\delta r^2} \left(\frac{\delta^2 \varphi}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta \varphi}{\delta r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} \left(\frac{\delta^2 \varphi}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta \varphi}{\delta r} \right) = 0$$

Trabajando los dos términos de la ecuación anterior por separado en derivadas totales y llamando F y G respectivamente:

$$F = \frac{d^4}{dr^2} + \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

Trabajando el segundo término de la ecuación F, la primera derivada resulta:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{d\varphi}{dr} \frac{1}{r^2}$$

Y la segunda derivada es:

$$H = \frac{1}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r^3} \frac{d\varphi}{dr}$$

Sustituyendo H en F resulta

$$F' = \frac{d^4 \varphi}{dr^4} + \frac{1}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r^3} \frac{d\varphi}{dr}$$

y

Apéndice A

$$G' = \frac{1}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

Sumando F' y G' resulta:

$$0 = \frac{d^4 \varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr}$$

Que es la ecuación de compatibilidad para la distribución de tensiones simétricas respecto a un eje⁴, la cual es una ecuación diferencial ordinaria, que puede reducirse a una ecuación diferencial de coeficientes constantes introduciendo una nueva variable t, tal que $r = e^t$. De ésta manera, puedes obtenerse fácilmente la solución general de la ecuación anterior, la cual tendrá cuatro constantes de integración, las que deberán determinarse mediante las condiciones de frontera. Por sustitución, puede probarse que la solución general es⁴:

$$\varphi = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D \quad \text{A-15}$$

A partir de la cual pueden encontrarse las soluciones de todos los problemas de distribución de tensiones simétricas y fuerzas másicas nulas.

Los componentes de esfuerzos correspondientes se deducen de las ecuaciones de fatiga en función de los alargamientos unitarios³ ε_x y ε_y son:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\delta \varphi}{\delta r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \log r) + 2C \quad \text{A-16}$$

$$\sigma_t = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \log r) + 2C \quad \text{A-17}$$

$$\tau_{r\phi} = 0 \quad \text{A-18}$$

Si no existe ningún agujero en el origen de coordenadas las constantes A y B se anulan⁴, pues de no ser así las componentes de la tensión dadas en A-16 y A-17 serían infinitas para $r = 0$. Resulta, entonces, que una placa sin fuerzas másicas que no presente un agujero en el origen solo admite una distribución de tensión simétrica, aquellas para la cual $\sigma_r = \sigma_t =$ constante; lo que significa que la placa se encuentra en un estado equitensional de tracción o compresión uniforme en todas las direcciones de su plano⁴

Si existe un orificio en el origen, las expresiones A-16 y A-17 permiten obtener soluciones distintas de una tracción o compresión uniforme. Por ejemplo, haciendo $B = 0$, las ecuaciones A-16 y A-17 quedan⁴:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C$$

$$\sigma_t = -\frac{A}{r^2} + 2C$$

A-19

Esta solución se adapta al caso de la distribución de tensiones que se producen en un cilindro hueco sometido a una expresión uniforme interior y exterior. Si r_i y r_o son los radios interior y exterior del cilindro respectivamente y p_i y p_o las presiones uniformes interior y exterior respectivamente, las condiciones de frontera serán:

$$(\sigma_r)_{r=r_i} = -p_i$$

$$(\sigma_r)_{r=r_o} = -p_o$$

Y sustituyendo en la primera de las ecuaciones A-19 se obtienen las siguientes ecuaciones para determinar A y C.

$$\frac{A}{2} + 2C = -p_i$$

$$\frac{A}{2} + 2C = -p_o$$

De donde:

$$A = \frac{r_i^2 r_o^2 (p_o - p_i)}{r_o^2 - r_i^2}$$

$$2C = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

Sustituyendo éstos valores en las ecuaciones B-19 se obtienen las siguientes expresiones para el esfuerzo radial y tangencial⁴:

Apéndice A

$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2 (r^2 - r_o^2) + p_o r_o^2 (r_i^2 - r^2)}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)}$$

$$\sigma_i = \frac{p_i r_i^2 (r_o^2 + r^2) - p_o r_o^2 (r_i^2 + r^2)}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)}$$

Apéndice B

Esfuerzos principales¹⁸.

El estado más general de tensión que pueda existir en un cuerpo está siempre determinado completamente por la especificación de las tensiones principales σ_1 , σ_2 y σ_3 (figura 1-B). Los ejes de la figura se eligen de modo que las relaciones entre los valores algebraicos de las tensiones principales sean³:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

B-1

La teoría de máxima deformación, supone que en un material dúctil la cedencia inicial ya sea cuando la deformación máxima es igual a la deformación correspondiente al punto de cedencia en tensión simple o bien cuando la deformación mínima es igual a la deformación correspondiente al límite de cedencia en compresión simple.

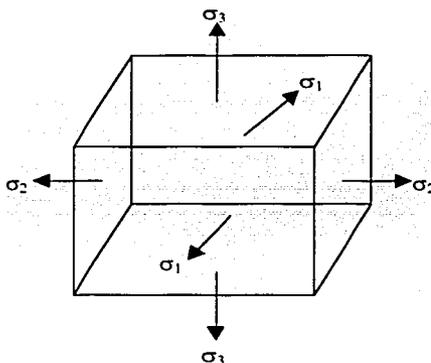


Figura 1-B. Estado general de tensiones en un cuerpo

Observando que la tensión en una dirección produce deformación lateral en las otras direcciones perpendiculares, y utilizando la superposición, se encuentra para las tres

Apéndice B

componentes principales de deformación del elemento de la figura 1-B las siguientes expresiones³:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \left(\frac{1}{E}\right) [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \left(\frac{1}{E}\right) [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \left(\frac{1}{E}\right) [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\tag{B-2}$$

Considerando nuevamente el elemento de la figura 1-B y aplicando el razonamiento de tracción simple se encontró que la energía de deformación por unidad de volumen es:

$$U = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 \sigma_1 + \varepsilon_2 \sigma_2 + \varepsilon_3 \sigma_3)\tag{B-3}$$

Sustituyendo los valores de las componentes de deformación dados por las ecuaciones B-2 la expresión anterior se transforma en:

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)]\tag{B-4}$$

Se sabe que los materiales pueden resistir una presión hidrostática muy grande sin fallo. De aquí que sea lógico descomponer la energía total de deformación en dos partes: la primera como energía de alargamiento o acortamiento por tensión o compresión uniforme y la segunda como energía de deformación de otra clase, y utilizar solo ésta última parte de la energía de distorsión para determinar la condición de tensión límite. Para efectuar esta separación utilizamos la ecuación B-2. Sumando esa ecuación se tiene:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (1 - 2\mu/E)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\tag{B-5}$$

Según la cuál la variación por unidad de volumen es proporcional a la suma de las tres tensiones principales. Si la suma es cero, no hay variación de volumen y el material solo está sometido a la deformación de distorsión.

Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, como en el caso de la presión hidrostática, tenemos:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = (1 - 2\mu/E)p$$

B-6

En éste caso no habrá distorsión y solo existirá tensión o compresión uniformes.

Para el caso general se empleara la notación³.

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = p$$

B-7

Y repartimos cada una de las tres tensiones principales en dos partes como sigue:

$$\sigma_1 = p + \sigma_1$$

$$\sigma_2 = p + \sigma_2$$

$$\sigma_3 = p + \sigma_3$$

B-8

Sumando éstas tres cantidades y utilizando la ecuación B-7 se obtiene:

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$$

Como la suma en la expresión anterior es cero, las tensiones producen solamente distorsión, y las ecuaciones B-8 proporcionan un medio de separar el sistema dado de tensiones en dos sistemas: el primero, tensión o compresión uniformes, que produce sólo variación de volumen, y el segundo, el sistema de tensiones que producen sólo distorsión o deformación propiamente dicha.

Para poder ejemplificar, partiendo de la ecuación B-2, consideremos el caso de tensión simple, figura 2-B1. Sustituyendo $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ en las ecuaciones B-7 y B-8 y se obtiene³:

$$p = (\sigma_1/3)$$

$$p = (2\sigma_1/3)$$

$$\sigma_2' = \sigma_3' = -(\sigma_1/3)$$

Así se puede resolver la tensión en la dirección X en una tensión uniforme figura 2-B2 y una combinación de esfuerzo cortante puro en los planos XY y XZ (figura 2-B3). Se observa que el trabajo de las tensiones que producen sólo distorsión (figura 2-B3) en los desplazamientos originales por la tensión uniforme (figura 2-B2) desaparecen. Con ello las energías de deformación de los casos (2-B2) y (2-B3) son independientes entre sí y la energía total de

Apéndice B

deformación en tensión simple se obtiene sumando la energía de deformación en tensión simple y la energía de deformación de distorsión.

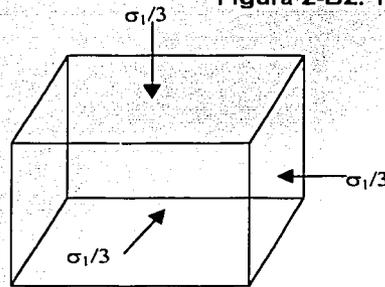
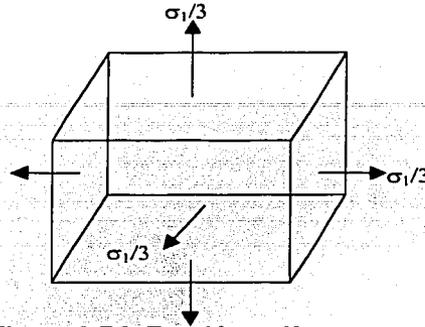
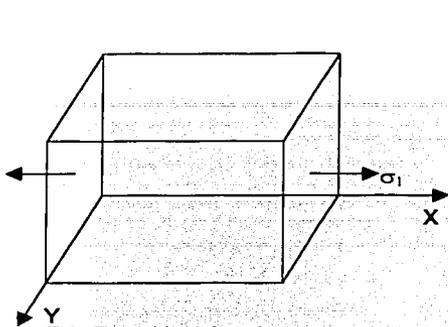


Figura 2-B. Combinación de esfuerzos.

Esta condición es válida también en el caso general en que actúan las tres tensiones principales σ_1 , σ_2 , σ_3 . De ello se desprende que la energía de deformación de distorsión se obtiene restando la energía de deformación correspondiente a tensión uniforme de la energía total de deformación.

Sustituyendo

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

En la ecuación B-4 se obtiene para la energía de deformación de tensión uniforme la expresión siguiente:

$$(1 - 2\mu/6E)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

Según la energía de distorsión en el caso general³ es:

$$U_1 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] - (1 - 2\mu/6E)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad \text{B-9}$$

Agrupando la ecuación anterior obtenemos que:

$$U_1 = (1 + \mu/6E) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$

Esta ecuación puede ser tomada como base para predecir la falla de materiales dúctiles que tengan una pronunciada tensión de punto de fluencia σ_f en tensión simple. De acuerdo con esta teoría, en el caso general de tensiones $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, la cedencia del material comienza cuando la energía de distorsión alcanza el valor de energía de distorsión en el punto de cedencia durante un ensayo de tracción. Esta última cantidad se obtiene sustituyendo en la ecuación B-9 las siguientes igualdades:

$$\sigma_1 = \sigma_f$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

Lo que resulta:

$$U_1 = (1 + \mu/3E)\sigma_f^2 \quad \text{B-10}$$

Luego la cedencia basada en la teoría de energía de distorsión es:

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] = 2\sigma_f^2 \quad \text{B-11}$$

Por conveniencia para los análisis se reemplaza normalmente el esfuerzo de Von Mises. De esta manera, para efectos prácticos, es correcto afirmar que cuando la combinación de esfuerzos principales (axial, radial y tangencial para un cilindro) haga que el esfuerzo Von Mises sea igual a la resistencia de cedencia

Apéndice C.

Carga crítica de pandeo.

En la figura 1.C, se muestra el problema de una sección de tubería, que se encuentra empotrada en su parte inferior y con una carga axial actuando en su parte superior. Si la carga P es menor que su valor crítico, la pieza conservará su forma recta y sufrirá solo compresión axial. La carga crítica se puede definir como la carga axial necesaria para que la sección de tubería tome una forma ligeramente flexada².

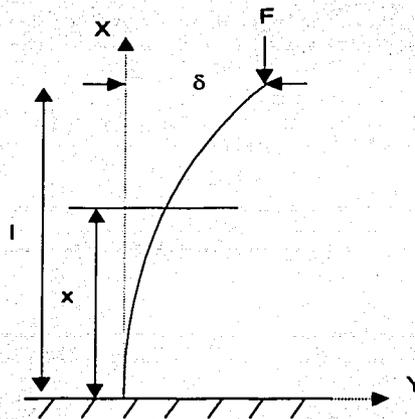


Figura 1.C. Flexión por carga axial de una sección de tubería empotrada en uno de sus extremos.

Esta carga se calcula mediante la ecuación diferencial de la elasticidad². Los ejes se toman como se indica en la figura 1.C, por consiguiente, el momento en la sección de tubería es $P(\delta - y)$ y la ecuación de la elasticidad es:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = p(\delta - y) \quad \text{C-1}$$

Al estar libre el extremo superior, el pandeo se presentará en el plano de menor rigidez a la flexión², la que denominará EI. Siendo:

$$p^2 = \frac{P}{EI} \quad \text{C-2}$$

Por lo tanto sustituyendo C.2 en C.1, se obtiene que:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = p^2 \delta \quad \text{C-3}$$

La solución general de la ecuación anterior es:

$$y = \delta + C_1 \cos px + C_2 \operatorname{sen} px \quad \text{C-4}$$

Donde C_1 y C_2 son las constantes que deben satisfacer a las condiciones en el extremo empotrado:

$$y_{x=0} = 0; \quad \frac{dy}{dx}_{x=0} = 0$$

Estas condiciones se cumplen si:

$$C_1 = -\delta; \quad C_2 = 0$$

Por consiguiente,

$$y = \delta(1 - \cos px) \quad \text{C-5}$$

En el extremo superior se comprueba que:

$$y'_{x=l} = \delta$$

Por lo tanto se debe de cumplir que $\cos pl = 0$, es decir, que:

$$pl = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

C-6

Donde n es un número entero. El valor menor de pl y, por consiguiente de P, que satisface a la ecuación C.6, se obtiene haciendo $n=0$. Por lo tanto, utilizando la ecuación C.2

$$pl = l \sqrt{\frac{p}{EI}} = \frac{\pi}{2}$$

En donde:

$$F_{crit} = P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

C-7

Que es la expresión con la cual se obtiene el valor para el cual la sección de tubería que se encuentra empotrada en uno de sus extremos puede tomar forma curva por flexión.

En el caso de una sección de tubería con los dos extremos empotrados como se muestra en la figura 2.C, existen momentos de reacción sobre los extremos durante el pandeo², la combinación de la fuerza compresora y dichos momentos equivale a aplicar excéntricamente la fuerza compresora F.

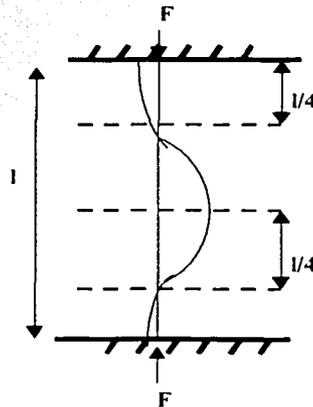


Figura 1.C. Flexión por carga axial de una sección de tubería empotrada en sus extremos.

Los puntos de intersección de la línea de acción F con la elástica lo son de inflexión para ésta, ya que en ellos el momento es nulo. Estos puntos y el punto medio de la pieza dividen a la sección de tubería en cuatro partes, cada uno de los cuales está en las mismas condiciones que la sección de tubería de la figura 1.C. por consiguiente, la carga crítica para la sección de tubería con los extremos empotrados se deduce de la ecuación C.7, sustituyendo $\frac{l}{4}$ en lugar de l , se obtiene:

$$F_{crr} = P_{crr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

C-8