00321

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

43

FACULTAD DE CIENCIAS

"IDENTIFICACION DE ERRORES EN LAS SOLUCIONES TRADICIONALES A LA PARADOJA DE BERTRAND Y APORTACION DE SOLUCIONES CONSISTENTES."

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIO

P R E S E N T A

HÉCTOR HERNÁNDEZ ORTÍZ

DIRECTOR DE TESIS

ACT. JAIME VÁZQUEZ ALAMILLA

MEXICO, D.F. 2003

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "Identificación de errores en las soluciones tradicionales a la paradoja de Bertrand y aportación de soluciones consistentes"

realizado por Hernández Ortíz Héctor

con número de cuenta 09561239-9 , quién cubrió los créditos de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. Jaime Vázquez Alamilla
Propietario	Dr. Luis Antonio Rincón Solís
Propietario	M. en F. Arturo González Yáñez
Suplente	M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes
Suplente	M. en C. José Antonio Flores Díaz

Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

M. en C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

MATEMATICAS

AGRADECIMIENTOS

AL GRAN MATEMÁTICO:

Por haber diseñado el universo de tal forma
que no fuese tan caótico como para impedirnos
estudiarlo ni tan predecible como para evitar
el origen y desarrollo de la probabilidad.

A MIS PADRES:

Por haber originado mi improbable nacimiento
y ayudarme a prolongar mi existencia hasta hoy.

A mi padre: Juan Hernández Meneses.

Por su ejemplo de trabajo, responsabilidad y
ecuanimidad al afrontar adversidades.

*"Mi padre no me señaló como vivir;
simplemente vivió y me permitió observarlo."*
H. W. Beecher

A mi madre: Eugenia Ortiz de Hernández.

Por todo su cuidado, atención e interés abnegado
desplegados desde antes que yo naciera hasta hoy.

*"Jamás en la vida encontraréis ternura mejor,
más profunda, más desinteresada ni verdadera
que la de vuestra madre."*
Honoré de Balzac

A MIS HERMANOS:

Juan y Fernando.

Por su incansable apoyo y sus expresiones alentadoras de estímulo.

"Una casa será fuerte e indestructible cuando esté sostenida por estas cuatro columnas: padre valiente, madre prudente, hijo obediente y hermano complaciente."
Confucio

A MIS MAESTROS:

Por su invaluable instrucción y motivación, especialmente a aquellos que contribuyeron a mi formación en probabilidad y lógica.

En probabilidad, tuve la fortuna de tener como maestro a Jaime Vázquez Alamilla, quien además de enseñarme probabilidad en forma excelente, creyó en mí y me brindó su amable y generosa ayuda como director de tesis.

En lógica, agradezco principalmente a Arturo González Yáñez, quien me inició en el estudio serio y profundo de esta área, y lo hizo de manera tan eficaz que el camino del aprendizaje resultó deleitable.

"Si he visto más allá de lo que han visto otros, ha sido porque me he parado en los hombros de gigantes."
Isaac Newton

"Sin las semillas que los maestros sembraron en mí, ningún fruto se habría producido."

A TODOS LOS QUE ME HAN BRINDADO SU APOYO:

Amigos, compañeros y familiares.

"En verdad no debes nada a ningún hombre; debes todo a todos los hombres."
Gibrán Jalil Gibrán

ÍNDICE

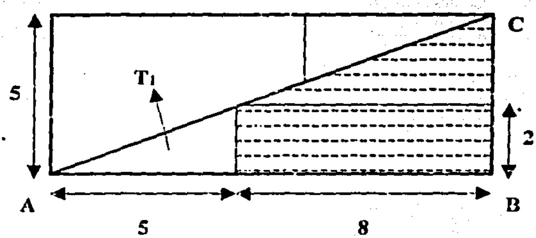
INTRODUCCIÓN

"Nunca consideres el estudio como un deber, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber".

Albert Einstein.

Hace varios años un niño de primaria me pidió que le ayudara con el siguiente problema:

Hallar el área de la figura sombreada.



Como la figura sombreada consta de un triángulo y un rectángulo, basta con obtener la medida de la base que comparten ambas figuras y la altura de cada una de ellas para aplicar simplemente las fórmulas: $A_T = \frac{b \times h}{2}$ y $A_R = b \times h$. La base común mide 8 y la altura del rectángulo mide 2, por lo que el área del rectángulo es: A_R = 8×2=16. La altura h del triángulo se obtiene tomando la altura del rectángulo mayor, y restándole la altura del rectángulo interno: h = 5−2 =3. Así, el área del triángulo es: $A_T = \frac{8 \times 3}{2} = 12$. El área sombreada es la suma de ambas áreas: $A_R + A_T = 16 + 12 = 28$.

Otra forma de resolverlo es calculando el área del triángulo **ABC** y restándole el área del triangulo menor **T1**[1]. Puesto que $A_{TABC} = \frac{13 \times 5}{2} = 32.5$ y el área del triángulo **T1** es: $A_{T1} = \frac{5 \times 2}{2} = 5$ entonces el área buscada es: 32.5–5 = 27.5. ¡*¿Cuál es la respuesta correcta 28 ó 27.5?*!

Lo primero que se me ocurrió fue examinar nuevamente cada procedimiento para ver si había cometido algún error. No hubo ninguno, ambos métodos son totalmente correctos. Fue entonces cuando recurrí a la lógica. La lógica indica que, si se parte de cierto supuesto y, razonando impecablemente, se llega a una conclusión falsa, entonces el supuesto inicial tiene que ser falso. Ahora bien, en los dos métodos de solución del problema examinado se han utilizado razonamientos impecables y, con todo, se llega a una conclusión claramente falsa, a saber, que el área sombreada tiene *dos valores correctos distintos*. Por lo tanto, se puede deducir que partimos de un supuesto falso. ¿Cuál es? La *existencia* de una figura geométrica con las medidas dadas en el problema. Se puede probar que no existe, ni puede existir, una figura que tenga esas dimensiones.[2]

De manera similar, a finales del siglo XIX el matemático europeo Joseph L. F. Bertrand planteó un problema que admite al menos tres soluciones distintas, todas las cuales se consideran correctas. Como no es lógico esperar más de una respuesta correcta,

[1] He llamado **T1** al triángulo menor y **ABC** al triangulo mayor para facilitar la comprensión de los cálculos, pero en el problema original estos triángulos eran anónimos, no tenían nombre ni símbolo de representación.
2 La razón es que si un rectángulo tiene las dimensiones (largo y ancho) indicadas en la figura, no es posible levantar una perpendicular a la base en el punto indicado que tenga su extremo superior en la diagonal y mida dos unidades. Las medidas de la base y la altura del rectángulo obligan a que las figuras internas, a saber, el triángulo y el rectángulo sombreados, tengan unas medidas distintas de las asignadas en el dibujo.

este problema es conocido como 'la paradoja[3] de Bertrand'. El propósito de este trabajo es examinar de cerca dicho problema y sus soluciones.

Se ha dividido esta tesis en tres capítulos, cada uno de los cuales a su vez se compone de varias secciones relacionadas entre sí con un propósito en común. El primer capítulo familiariza al lector con el planteamiento del problema original y los métodos de resolución que proporcionó el propio Bertrand. En la segunda parte se hace un análisis cuidadoso de cada una de esas soluciones, revisando de cerca los argumentos implicados en ellas. El tercer capítulo proporciona nuevas y originales soluciones al problema explicadas paso a paso. Finalmente, se pone de manifiesto la importancia del problema y las posibles consecuencias de su correcta resolución.

Se incluyen tres apéndices, cada uno con información de distinta clase. El primero contiene explicaciones que permiten comprobar la validez de las nuevas soluciones. El segundo, denominado apéndice B, presenta ciertas objeciones que he recibido, directa o indirectamente, respecto de algunos argumentos expuestos y la respuesta a cada una de éstas. En el apéndice C hay demostraciones que, de incluirlas en el desarrollo, hubiesen hecho menos fluida la lectura del texto.

Se recomienda la lectura ordenada y reflexiva de este trabajo, ya que, como escribió Lewis Carroll en la introducción de su famosa obra *El juego de la lógica*: "Se debe comenzar por *el principio*, sin permitirse caer en el común devaneo o esa curiosidad ociosa que nos induce a ir de un lado a otro de un libro[...] Tal vez estos devaneos de lectura sean permisibles en una novela, pues el volumen III de hecho tiene un sentido, aunque no se hayan leído las partes anteriores de la obra; pero en un libro científico esta manera de leer

[3] La expresión paradoja viene del griego (*para*: contra, mas allá de y *doxos*: opinión, creencia) y significa "más allá de lo creíble". En su sentido más general designa una afirmación o 'creencia contraria' a las opiniones aceptadas comúnmente.

resulta verdaderamente demencial; la última parte podría llegar a ser desesperadamente ininteligible si no lee como la secuela de una marcha regular.

No se debe comenzar la lectura de un nuevo capítulo o sección hasta no estar seguros de haber comprendido cabalmente todo lo anterior [...] El lector debe estar consciente de que todo el terreno hasta el momento recorrido ha sido "conquistado", sin que queden a sus espaldas dificultades por resolver; de esta manera la marcha triunfal será muy disfrutable. Quien proceda de otro modo podrá experimentar el hecho de que a medida que avanza su confusión también aumenta, hasta que sentirá la tentación de abandonar la lectura, sumido en un gran fastidio"[4].

A fin de preparar el terreno para 'penetrar en este maravilloso mundo' iniciando por 'el principio', primero se considerará información acerca del origen del problema, sus elementos y su relación con cuestiones afines. Además, se ejemplificarán algunos conceptos que son necesarios para facilitar la comprensión de la exposición.

[4] Lewis Carroll. *El juego de la lógica*, Grupo Editorial Tomo, México, 2002, págs. 9-11.

INFORMACIÓN PRELIMINAR

> **"Cuando un matemático [...] llega a determinadas conclusiones, ¿no pueden ser éstas expresadas en lenguaje común tan plena, clara y definidamente como en fórmulas matemáticas? Si es así, ¿no sería un gran beneficio para personas como yo que se las expresase de este modo, traduciéndolas de los jeroglíficos?".**
> **Michael Faraday (en una carta a Maxwell).**

Se cuenta que cierto día el conocido matemático Paul Adrien Maurice Dirac se hallaba en la mesa de los profesores en Cambridge cuando un recién llegado, para iniciar la conversación, dijo: «Hace mucho viento, profesor». Luego de oír esto Dirac se levantó, fue hasta la puerta, la abrió, miró hacia fuera, se sentó, pensó un momento y luego respondió: «Sí».

En otra ocasión, cuando estaba dando un paseo por las cercanías de un lago en compañía de un colega, éste indicó que había 14 patos en el lago; Dirac respondió: «Quince. Vi uno que iba bajo el agua».

Estas anécdotas[5] de la vida de Paul Dirac ilustran dos características que suelen acompañar la imagen de los matemáticos, a saber, la comprobación de todas las afirmaciones que hacen y la incansable búsqueda de exactitud en los cálculos. Consecuentemente, cuando los matemáticos llegan a un resultado interesante lo prueban antes de difundirlo y éste es sometido a la revisión crítica de otros matemáticos una vez que ha sido publicado. Con mayor razón si el resultado es innovador o parece contradecir de

[5] Ferris, Timothy, *La aventura del universo*, Grijalbo Mondadori, Barcelona, 1990, pág. 252.

algún modo las ideas admitidas, especialmente cuando fueron defendidas por un notable científico o filósofo.

Un ejemplo de ello sucedió en la rama de la matemática llamada probabilidad que estudia los fenómenos aleatorios[6] y sus regularidades. El origen de la teoría de las probabilidades se remonta al siglo XVII, cuando los matemáticos Pascal, Huygens, Fermat y Jacobo Bernoulli, fundaron las bases del cálculo de las probabilidades. Aunque ellos se dedicaron primordialmente a problemas relacionados con los juegos de azar, entendieron la gran importancia filosófica naturalista que tenía la teoría de las probabilidades, ya que en la naturaleza hay fenómenos aleatorios de carácter masivo que pueden ser estudiados desde un punto de vista probabilístico, como por ejemplo la probabilidad de que caiga un rayo en cierto lugar.

En 1812 el famoso astrónomo, físico y matemático Laplace, en el libro "Teoría analítica de las probabilidades", hizo el balance de los logros de la teoría de la probabilidad de su época e incluyó en él sus propios resultados fundamentales.

Los franceses Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665) resolvieron algunos problemas relacionados con los juegos de dados que habían permanecido sin solución durante aproximadamente 300 años. Sin embargo, muchos problemas no pudieron ser resueltos mediante el uso de la probabilidad clásica[7] y, por eso, hubo incertidumbre respecto de en qué casos era aplicable este esquema clásico.

Otro factor que añadió desconcierto es que Laplace en esta obra expuso también la aplicación de la probabilidad a las "ciencias morales": las probabilidades en los

[6] Aquellos en los que interviene el azar.

[7] Se llama clásica porque históricamente fue la primera en ser introducida y está dada por la razón del número de casos favorables sobre el número de casos posibles, siempre y cuando los casos sean todos igualmente probables. Existen otras interpretaciones de la probabilidad, por ejemplo, la *frecuentista*. La cual está establecida por la razón del número de casos en los que se verifica el resultado buscado sobre el número de casos observados, siempre y cuando el proceso se repita un gran número de veces en condiciones similares.

atestiguamientos, en las elecciones, en las resoluciones tomadas en reuniones y en la apreciación de la justa sentencia judicial. Se consideró que como las opiniones humanas suelen ser arbitrarias y, por tanto, no es posible determinar objetivamente sus probabilidades, la teoría probabilística que las pretendía estudiar no era seria. Así que, a mediados del siglo XIX, muchos consideraban la probabilidad como una especie de distracción matemática.

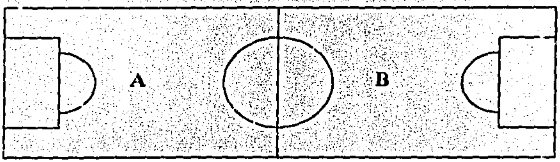
Esto motivó al ruso Pafnuti L. Chebyshev a hacer una separación de aquellas cuestiones que no tenían nada ver con la materia y a elaborar un esquema de la teoría de la probabilidad más preciso con un temario y aparato matemático específico. Lo hizo por medio de cuatro artículos escritos durante el periodo de 1845 a 1887.

Fue en este contexto de discusión cuando el célebre científico francés George Buffon fundó una nueva rama de la teoría de la probabilidad con un artículo presentado en la Academia de Ciencias de París en 1733. Dicha rama es llamada probabilidad geométrica porque los problemas que involucra requieren, para su solución, un método geométrico más que combinatorio[8]. En esta clase de problemas los elementos aleatorios considerados se suponen *uniformemente distribuidos*[9] en un dominio[10] dado. La probabilidad de caer dentro de cualquier zona del dominio está en proporción de su área, longitud, volumen, etcétera. Así que para calcular la probabilidad sólo se tiene que calcular el cociente de la longitud, área o volumen favorable y su respectivo total. Un ejemplo gráfico quizá 'pueda decir más que mil palabras':

---

[8] El análisis combinatorio estudia el cálculo de las distintas formas de enumerar los casos posibles sin tener que contarlos uno por uno.
[9] Esto quiere decir que cada elemento tiene la misma probabilidad de ser elegido, es decir, cada segmento de línea (recta o curva), sección de superficie o fragmento de volumen que puede superponerse o hacerse coincidir con otro, tiene la misma probabilidad que el otro.
[10] El dominio se refiere al conjunto total de elementos de la misma clase considerados en el problema. Pueden ser puntos, líneas, superficies, etcétera.

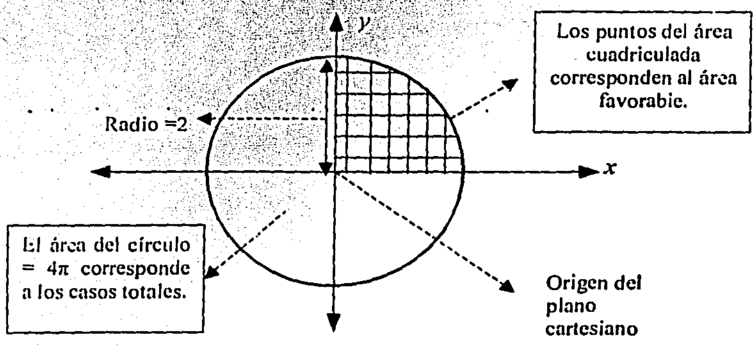
Suponga que se toma una cancha de fútbol dividida exactamente en dos partes iguales. Si se lanza un balón al azar en la cancha (suponiendo que el balón cae obligatoriamente en ella) ¿cuál es la probabilidad de que el balón caiga en una mitad específica de la cancha? No es difícil concluir que es ½, puesto que tiene las mismas posibilidades de caer en cualquiera de las dos secciones.



El balón tiene la misma probabilidad de caer en la sección A o B.

Ahora supóngase que hay un charco en la cancha ¿cómo se puede calcular la probabilidad de que el balón caiga en él? Estableciendo la relación entre la superficie del charco y la superficie de toda la cancha. Si el charco ocupa la tercera parte de la superficie de la cancha la probabilidad será 1/3, si ocupa la quinta parte será 1/5, etcétera.

Tomemos ahora un ejemplo del campo matemático: Si se escoge al azar un punto en un círculo de radio 2 con centro en el origen del *plano cartesiano*, ¿cuál es la probabilidad de que dicho punto se halle en el primer cuadrante del plano?



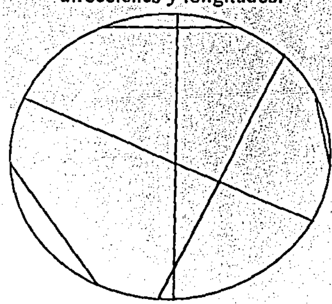
La probabilidad solicitada busca encontrar cuántos de los puntos que hay en el círculo pertenecen al primer cuadrante, es decir, a la parte superior derecha del plano que consta de valores positivos tanto en el eje **x** como en el **y**. Evidentemente la cantidad de puntos favorables es infinita pero, como se puede notar en la gráfica, forman una superficie cuya área es finita. De hecho, es la cuarta parte del área total, por lo que la probabilidad que se pide es: $P = \pi/(4\pi) = 1/4$.

Aunque estos ejemplos pueden resultar muy claros, la teoría de la probabilidad geométrica ha sido criticada en repetidas ocasiones por 'la forma arbitraria como define la probabilidad de eventos'. El matemático francés nacido en 1822, Joseph Louis Bertrand, estaba convencido de que en un evento con un número infinito de puntos, *no se puede dar* ninguna definición de probabilidad que sea objetiva e independiente del método de cálculo.

En su libro sobre teoría de la probabilidad consideró varios problemas de probabilidad geométrica en los que, desde su punto de vista, el resultado depende del método de solución. El problema que se examinará en este trabajo es el más conocido y estudiado de ellos. Para comprender el planteamiento del problema no se requiere más que recordar el significado de las siguientes expresiones:

Cuerda. Es la línea recta que une dos puntos de una circunferencia.

Cuerdas en distintas direcciones y longitudes.



En la lámina se observa que las cuerdas pueden tener diferentes direcciones y ser de distinta longitud. Una cuerda que pase por el centro tendrá la mayor longitud posible, a saber, el doble de lo que mide el radio, esto es, el diámetro. También puede haber cuerdas que unan puntos de la circunferencia muy cercanos entre sí resultando cortas en longitud. El punto que se encuentra justo a la mitad de la cuerda se llama *punto medio*. La *distancia* de un punto p a una cuerda l es la longitud de la recta perpendicular a la cuerda que inicia en p y termina en l.

Triángulo equilátero inscrito en una circunferencia: es el triángulo equilátero (con sus lados de la misma longitud) trazado dentro de una circunferencia de tal forma que sus tres vértices se encuentren sobre ella.

No se pretende que esta obra sea enciclopédica, por lo que no contiene un glosario exhaustivo[11] ni biografías históricas; pero se busca que hasta lectores no matemáticos puedan obtener algún beneficio de ella, por eso se incluyen algunas explicaciones que probablemente parezcan triviales a los matemáticos.

[11] En la matemática, como en otras áreas, con frecuencia el uso y los ejemplos clarifican más los conceptos que las definiciones aisladas. Por eso se presentan diversos ejemplos y analogías.

CAPÍTULO I

LAS SOLUCIONES AL PROBLEMA

"Lo que caracteriza al hombre de ciencia no es la posesión del conocimiento o de verdades irrefutables, sino la investigación desinteresada e incesante de la verdad".

Popper.

En esta sección se expondrá el planteamiento de la paradoja de Bertrand y las tres soluciones que dio. También se presentan las explicaciones más comúnmente aceptadas que han suministrado muchos investigadores de diversas nacionalidades desde hace más de 11 décadas.

I.1 EL PROBLEMA Y SU SOLUCIÓN

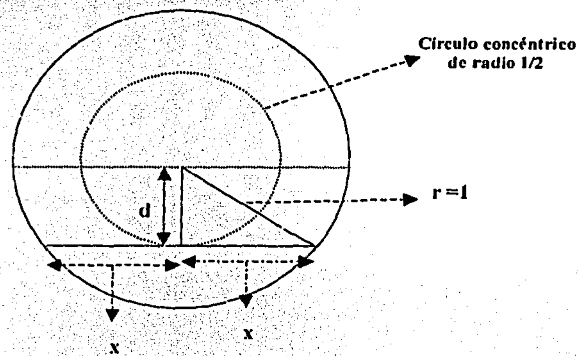
"Mientras una rama de la ciencia presente abundancia de problemas, permanecerá viva. La carencia de problemas significa decadencia o el cese del desarrollo independiente. De la misma manera que toda empresa humana persigue sus objetivos, así también la investigación matemática necesita sus problemas"

David Hilbert

En 1889, un año antes de su muerte, el matemático francés Joseph Louis François Bertrand publicó en su libro *Calcul des Probablilités* el siguiente problema:

Dado un círculo de radio **r**, dibujar al azar una cuerda. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de la cuerda ***l*** sea mayor que la longitud de un lado del triángulo equilátero inscrito? (Dicho lado mide[12] $\sqrt{3}\times r$, para simplificar todos los cálculos se considera el radio $r=1$.)

El propio Bertrand indicó 3 métodos de solución cuyo éxito sobrevive hasta hoy día. Una solución típica[13] es la siguiente: Puesto que toda cuerda tiene un punto medio, se elige al azar dentro de la circunferencia el punto medio de la cuerda. Como cualquier punto en el círculo puede ser elegido, la región posible[14] total corresponde al área de un círculo de radio 1, es decir, $A=\pi\times 1^2=\pi$. Para obtener la región favorable, que está constituida por todos los puntos medios de las cuerdas mayores que $\sqrt{3}$, considérese la siguiente figura:



Como x y d son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 1, por el teorema de Pitágoras se cumple que $x^2+d^2=1^2=1$, por lo que $x=\sqrt{1-d^2}$. Se buscan los

[12] La justificación de esto aparece en el apéndice C.
[13] En realidad, Bertrand no incluye ilustraciones, ni explicaciones detalladas en sus soluciones, pero muchos autores sí lo hacen para hacer más clara la exposición de las soluciones.
[14] Recuérdese que en esta clase de problemas la probabilidad se calcula encontrando el área de la región favorable (el total de puntos de interés en el planteamiento) entre el área de la región posible (el total de puntos considerados).

valores de **d** para los cuales **2x**, es decir, la longitud de la cuerda, sea mayor que $\sqrt{3}$, esto es, $2\sqrt{1-d^2} > \sqrt{3}$. Lo cual implica que:

$$\sqrt{1-d^2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1-d^2 > \frac{3}{4}$$

$$-d^2 > \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

$$d^2 < \frac{1}{4}$$

$$d < \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la región donde la longitud de la cuerda es mayor que $\sqrt{3}$ corresponde al área de otro círculo con el mismo centro, pero de radio igual a ½. Así que la región favorable es $A = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \times \left(\frac{1}{4}\right) = \pi/4$. De modo que la probabilidad buscada se puede expresar como la razón del área favorable al área posible: $P\ (l > \sqrt{3}) = (\pi/4)/\pi = 1/4$.

I.2 OTRAS SOLUCIONES

"Lo blanco y lo negro existen y ambos son verdad. Dejemos a cada cual con su verdad, siempre que sea de buena fe, aunque nuestra verdad nos parezca más noble y mas bella."

Pérez de Ayala.

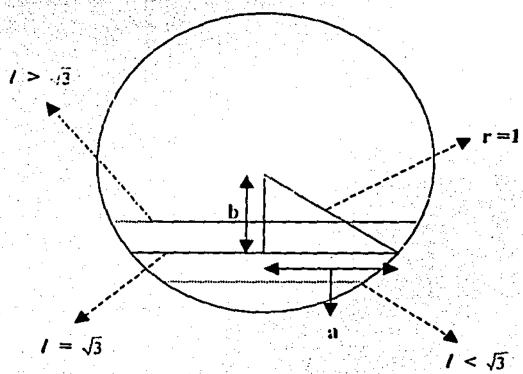
SOLUCIÓN II

"Nuestra cabeza es redonda para permitir al pensamiento cambiar de dirección."

Francis Picabia.

Se dice que el propio Bertrand prefirió la siguiente solución:

Considérese la distancia de la cuerda al centro del círculo, la distancia toma valores en el intervalo (0,1) con igual probabilidad.



Como se puede apreciar en la figura, **a** y **b** son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 1, por lo que 2**a** es mayor que $\sqrt{3}$ cuando **b** es menor que ½. Como **b** es la distancia del centro a la cuerda, se tiene que si **b** está en el intervalo [0,1/2) la cuerda mide más que $\sqrt{3}$. En consecuencia, si la distancia es mayor o igual que ½, es decir, si **b** se encuentra en el intervalo [1/2,1], entonces la cuerda mide igual o menos que $\sqrt{3}$. Puesto que **b** tiene que estar en alguno de los dos intervalos y puede estar en cualquiera de ellos con la misma probabilidad, se puede calcular la probabilidad solicitada realizando el cociente de la longitud de los intervalos favorable y total respectivamente: $P\ (l > \sqrt{3})=$ $(1/2)/1=1/2$.

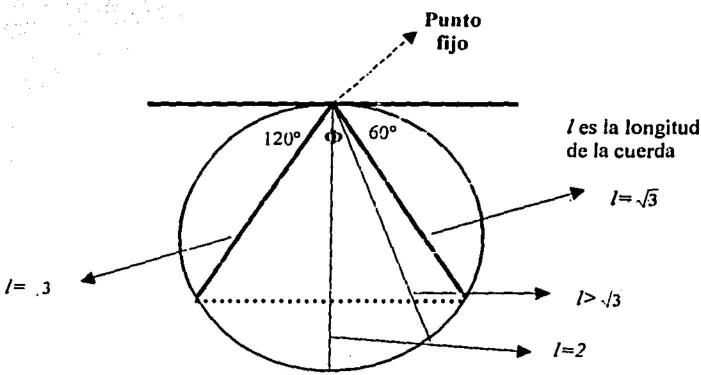
SOLUCIÓN III

"Tres siempre se ponen de acuerdo… si dos de ellos están ausentes."

Proverbio escocés.

Otro método de solución es el siguiente:

Se considera un punto fijo de la circunferencia como uno de los extremos de la cuerda y se elige el ángulo de inclinación de la cuerda al azar con distribución uniforme. Se puede ver el punto fijo como el vértice de un triángulo equilátero.



El ángulo Φ puede variar de 0° a 180°, pero como cada lado del triángulo equilátero mide 3 las cuerdas que exceden tal valor corresponden a los ángulos que oscilan entre 60 y 120 grados. Así, se puede calcular la probabilidad buscada como el cociente entre los ángulos favorables y los ángulos totales: $P(l > \sqrt{3}) = 60/180 = 1/3$.

I.3 EXPLICACIONES COMÚNMENTE ACEPTADAS

"Lo que ha sido creído por todos siempre y en todas partes, tiene todas las posibilidades de ser falso."

Paul Valery.

"Aunque todos los expertos estén de acuerdo, bien pueden estar equivocados."

Bertrand Russell.

Aunque existen otras soluciones con resultados distintos, éstas son las más conocidas. ¿Por qué existen soluciones distintas para el mismo problema? En el capitulo I de *Calcul des Probabilités*, Bertrand mismo explicó: "Entre estas tres respuestas ¿Cuál es la verdadera? Ninguna de las tres es falsa, ninguna es exacta, la pregunta está mal planteada"[15]. A lo largo de más de 110 años se han dado explicaciones como las siguientes:

"La clave para entender la paradoja es darse cuenta que *escoger una cuerda al azar no está definido con precisión.* Hay varias formas de interpretar esta elección aleatoria y cada una de ellas conduce a una respuesta diferente del problema".

Richard Isaac, *The Pleasures of Probability*, pág.120.

"Debido a que el proceso de "dibujar una cuerda al azar" *no es una operación bien definida*, es posible dar muchas respuestas contradictorias".

Arnold Kaufmann, *Curso moderno de cálculo de probabilidades*, pág. 15.

"En estos casos *hay ambigüedad en el enunciado del problema mismo*, de modo que se pueden asignar dos (o más) medidas plausibles al mismo espacio, y estas medidas naturalmente conducen a diferentes probabilidades para los mismos eventos o equivalentes".

[15] Bertrand, Joseph, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villar, Paris,1889, pág. 5.

Henry E. Kyburg, Jr., *Probability Theory*, págs.193, 194.

"La palabra "probabilidad" presupone ciertos experimentos definidos. En muchos problemas no se describe explícitamente el experimento, pero usualmente se hace evidente por el contenido del problema. Sin embargo, en el caso bajo consideración *las palabras "una cuerda elegida al azar" en el enunciado del problema no dan ninguna indicación de un experimento específico*, a menos que se incluyan explicaciones adicionales".

L. E. Maistrov, *Probability Theory: a historical sketch*, pág.235.

"Tal como está el problema no se puede resolver porque *no es claro lo que se quiere decir* con *cuerda aleatoria*".

Sheldon Ross, *A First Course in Probability*, pág. 203.

"Como podemos ver ***fácilmente***, el problema es éste: *el concepto de dibujar una cuerda al azar no está definido* en las condiciones de nuestro problema, y hemos tomado ventaja de esta *ambigüedad* para obtener soluciones a tres distintos problemas más bien que a uno".

B.V. Gnedenko, *The Theory of Probability /Trad. del ruso por B.D. Seckler*, pág.40.

"..*es obvio* que la paradoja se debe tan sólo a que *el problema estará mal planteado mientras no se especifique exactamente cómo interviene el azar en el trazado de la cuerda.* Nada tiene de sorprendente que diversos procedimientos determinen diferentes probabilidades experimentalmente comprobables mediante procedimientos mecánicos como los descritos. He aquí una sencilla analogía. ¿Cuánto se tarda en ir desde su casa a clase? Si no se especifica el medio de transporte para desplazarse ¿sería sorprendente que se obtuvieran distintas respuestas?"

Kai Lai Chung, *Teoría elemental de la probabilidad y los procesos estocásticos*, pág.115.

"Los diferentes resultados fueron considerados una paradoja puesto que se creía que "la elección aleatoria uniforme" determina de forma única la probabilidad en cuestión. La paradoja indica que *puede haber diferentes elecciones uniformes*, todas las cuales son naturales en cierto sentido. Cada uno de los métodos anteriores usa una distribución uniforme (en el círculo, sobre la circunferencia del círculo, y sobre un radio del círculo)".

Gabor J. Szekely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, pág.45.

Después de considerar las últimas dos soluciones examinadas otro autor dice:

"Realmente *estamos tratando con dos problemas distintos.* En la primera solución se supuso que la distancia de la cuerda al centro tiene una distribución uniforme, mientras que en la segunda solución fue la distribución del ángulo la que tomamos como uniforme".

James V. Uspensky, *Introduction to Mathematical Probability*, cap. XII, pág.251.

La siguiente cita textual básicamente resume cuáles son las explicaciones que se han dado:

"Uno podría comentar que estas soluciones *corresponden a tres distintos experimentos.* Esto es verdad, pero no es obvio y, en cualquier caso, demuestra *las ambigüedades asociadas con la definición clásica* asi como *la necesidad de una especificación clara de los eventos de un experimento y el significado de los términos "posible" y "favorable"*."

Athanasios Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Proceses*, pág.10.

(En todas estas citas textuales las negritas y cursivas son mías).

A juzgar por las explicaciones anteriores y muchas otras semejantes se puede decir que la tendencia general es la de acusar al propio planteamiento del problema como el culpable de los diferentes resultados obtenidos. Al hacer esto se está admitiendo implícitamente que *las soluciones examinadas son totalmente correctas*. De hecho, el matemático francés Poincaré fue quien le dio el nombre de 'paradoja de Bertrand' a este problema, y lo hizo después de analizar las soluciones dadas, lo que indica que él mismo consideraba intachables los métodos de solución de su contemporáneo L. F. Bertrand. No sorprende, pues, que muchos investigadores y matemáticos de reconocida capacidad desde hace más de un siglo hayan descrito las soluciones expuestas como 'razonables', 'resueltas con argumentos aparentemente impecables', 'perfectamente plausibles', 'igualmente válidas', etcétera. Tan grande es la confianza que se tiene en las soluciones, que varios autores las presentan como ejercicios con validez incuestionable. Por ejemplo, en un libro[16] reciente aparece como ejercicio lo siguiente:

Paradoja de Bertrand

a) Escoja un punto P al azar dentro de un círculo de radio a. Sea X la longitud de la cuerda de la que P es punto medio. *Demuestre que*[17] $P(X > \sqrt{3}\,a) = 1/4$.

b) Escoja dos puntos independientemente al azar sobre el perímetro de un círculo de radio a. Sea X la longitud de la cuerda que los une. *Demuestre que* $P(X > \sqrt{3}\,a) = 1/3$.

Difícilmente alguien podría poner en tela de juicio los argumentos utilizados en el desarrollo de las 3 soluciones expuestas, ya que hay varios hechos que parecen sugerir su solidez:

---

[16] Geoffrey Grimmett y David Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Oxford University, Clarendon, Tercera Edición, 2001, pág. 237.

[17] Estas cursivas son mías.

- Matemáticos brillantes como Bertrand y Poincaré estaban tan convencidos de la contundencia de las tres respuestas que usaron este problema y otros semejantes para probar que la definición de probabilidad de otro matemático notable (Laplace) no era adecuada ni exacta en tales casos.
- Desde su publicación en 1889 muchos investigadores y estudiosos de la probabilidad han examinado el problema y han llegado a la misma conclusión que su autor original. Por lo tanto, no sería fácil pensar que todos están equivocados.
- Muchos problemas que involucran técnicas de probabilidad geométrica se han resuelto con razonamientos semejantes y no han originado ningún conflicto.
- El desarrollo de la probabilidad ha sido amplio y profundo durante el último siglo y aún con las nuevas herramientas los probabilistas modernos no han señalado conflicto alguno con los resultados obtenidos por Bertrand. De hecho, la generalidad de los autores actuales de libros de probabilidad y estadística concuerda con el punto de vista defendido inicialmente por Bertrand y posteriormente por Poincaré (quien generalizó las paradojas de su coterráneo) de que la definición de probabilidad clásica resulta vaga e inexacta cuando se aplica a problemas como éste.

El objetivo del presente trabajo es mostrar que, en realidad, la verdadera razón por la que las respuestas dadas difieren es porque... al menos dos de ellas son erróneas, pero utilizan razonamientos falaces sumamente engañosos y, por ello, parecen tan contundentes. Sin embargo, no nos limitaremos a exhibir el error de las soluciones, también se proporcionarán nuevas soluciones del problema. No valdría la pena incluir tales soluciones si no fuera porque presentan ciertas peculiaridades. Éstas son que:

1. Los procedimientos de solución que utilizan son análogos a los usados en las respuestas engañosas, pero evidentemente no incurren en el mismo error.
2. Concuerdan todas entre sí indicando de ese modo su solidez
3. Establecen aspectos innovadores en el análisis de resolución de problemas de ese tipo.
4. En cada caso se puede calcular la probabilidad del evento complementario sin usar la probabilidad del evento original y hallar resultados consistentes.

Primeramente se consideran las respuestas presentadas.

CAPÍTULO II

EXAMEN DE LAS SOLUCIONES

"Cuando se llega a una conclusión falsa y ésta es aceptada extensamente, no es fácil renunciar a ella y, cuanto menos se entienda más tenazmente se conserva."
'*Ley de la conservación de la ignorancia*', Georg Cantor.

"Para ser un verdadero investigador de la verdad, es necesario al menos una vez en la vida poner en duda las cosas."
Descartes.

En esta parte se hace una revisión crítica de cada una de las soluciones presentadas anteriormente, examinando y evaluando los argumentos utilizados en cada método de resolución. Se incluyen ejemplos y analogías para facilitar la comprensión de los razonamientos involucrados.

II.1 UNA MIRADA A LA SOLUCIÓN I

"La misión de la ciencia consiste en sustituir las apariencias con los hechos y las impresiones con las demostraciones."

John Ruskin.

En la primera solución se hacen los siguientes supuestos:

1) ***Que cada cuerda tiene un único punto medio y cada punto determina una única cuerda.***

Si no se acepta este supuesto, el problema resuelto (puntos medios favorables entre puntos medios totales) no sería equivalente al problema planteado (cuerdas favorables entre cuerdas totales).

2) ***Que cualquier punto del círculo se elige con la misma probabilidad y cada uno tiene el mismo peso ,es decir, tiene el mismo valor con respecto a los demás.***

De otro modo no se podría resolver el problema utilizando el cociente entre el área favorable (el conjunto de puntos medios de cuerdas menores que $\sqrt{3}$) y el área posible (el total de puntos medios de las cuerdas).

El primer supuesto realmente no se satisface, puesto que el centro del circulo es un punto que no determina una única cuerda, ni siquiera un número finito de cuerdas, sino una infinidad de ellas. Esto repercute en el segundo supuesto, ya que el centro del círculo no tiene el mismo peso que los demás y, en consecuencia, la probabilidad obtenida resulta alterada.

Para ilustrar el problema con un ejemplo más sencillo (caso discreto), supóngase que en una bodega de juguetes hay x cantidad de cajas y se tienen los siguientes datos:

- Cada caja contiene un oso de peluche y ningún oso está sin caja.
- Cada oso es azul o rosa y el color está indicado en la caja por su etiqueta.

Se vacían las cajas en una enorme bolsa y se dejan todas las cajas vacías en la bodega. Observando sólo las cajas vacías hay que responder la siguiente pregunta: si se extrae un oso de la bolsa en forma aleatoria ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

Solución: como cada caja tiene un solo oso, basta con contar el número de cajas para conocer el total de osos y puesto que el color está indicado en la caja, basta con contar cuántas cajas indican color azul para saber cuántos osos azules hay (casos favorables). Suponiendo que fueran 20 cajas y 8 de ellas señalan color azul, la probabilidad buscada es simplemente: P (oso azul)=8/20=4/10=2/5.

Ahora bien, supóngase que, *en realidad*, una de las cajas con etiqueta azul contiene no uno, sino tres osos azules (quizás un poco apretados, pero los contiene). En este caso, la cantidad total de osos sería 22 (19 cajas con 1 y una caja con 3) y la cantidad de osos azules sería 10 (siete cajas con 1 y una con 3), por lo que la verdadera probabilidad sería:
P (oso azul)= 10/20=1/2.Esta probabilidad es *mayor* que la encontrada antes.

Claramente, el hecho de que una caja tenga un 'peso' distinto de las otras –en este caso el triple– altera la probabilidad buscada.

Análogamente, en la primera solución al problema de Bertrand hay una 'caja' (el centro del círculo) que 'pesa' mucho más que las demás. Todos los puntos medios corresponden a una sola cuerda excepto el punto central que corresponde a una infinidad de cuerdas. Así que no sorprende que en este método de solución la probabilidad hallada (1/4) no corresponda a la probabilidad buscada. De hecho, como se ilustra en el ejemplo, la probabilidad real debe ser mayor que ésta.

Observación: Alguien podría pensar que como en un círculo hay una infinidad de puntos se podría omitir el punto del centro sin alterar el área y que, por tanto, la primera respuesta sería correcta si se elimina el punto central. Sin embargo, nótese que el centro del círculo no es un punto cualquiera, tiene un 'peso' que corresponde a *una infinidad de veces* el peso de los otros puntos y, en consecuencia, no puede suprimirse sin alterar la probabilidad involucrada.

II.2 ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN II

> **"Siéntate ante los hechos como un niño, dispuesto a abandonar toda idea preconcebida y a seguir a la naturaleza a cualquier lugar o abismo a donde te quiera conducir, o nunca conseguirás aprender nada."**
>
> **T. H. Huxley.**

La solución que se estudiará a continuación parece ser la favorita de varios matemáticos. Por mencionar un solo ejemplo, desde el punto de vista de Henri Poincaré (*Calcul des Probabilités*, Paris, 1912) si no disponemos de ninguna información preliminar entonces deberíamos aceptar esta solución porque "este es el método que asegura que si dos conjuntos de cuerdas son geométricamente congruentes entonces hay la misma probabilidad de que una cuerda escogida aleatoriamente pertenezca a uno u otro conjunto."[18]

La idea general que comprende el cálculo de una probabilidad es encontrar el cociente entre la cantidad de casos favorables y los totales (equiprobables). Cuando las

[18] **Székely, Gabor J.,** ***Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*****, pág.45.**

cantidades involucradas son finitas no parece haber gran dificultad, el problema surge cuando se trabaja con el infinito.

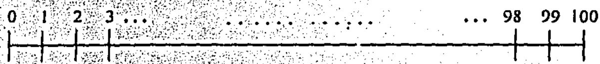
Por ejemplo, si se busca la probabilidad de que al elegir al azar un número natural éste sea par, la cantidad de casos totales es infinita, de hecho es el infinito llamado álef cero[19] (denotado por $\aleph_0$), y también lo es la cantidad de casos favorables. ¿Se diría entonces que la probabilidad requerida es realmente: P (par)= $\frac{\aleph_0}{\aleph_0}$? En tal caso, si uno se atiene a la regla de que 'toda cantidad entre sí misma es igual a 1', se concluiría que la probabilidad de que el número seleccionado sea par es 1, lo cual es absurdo porque eso llevaría a concluir que todos los naturales son pares.

Es evidente que no se puede operar con el infinito como si se tratara de un número entero o real; si ése fuera el caso basándose en el hecho de que para **b** diferente de cero se cumple que **a/b=c** si y sólo si **a=bc**, se halla que la probabilidad podría ser algún resultado tan absurdo como $\pi/3$,7/5, 5, 10000, etcétera, pues $(\pi/3)\aleph_0 = (7/5)\aleph_0 = 5\aleph_0 = 10000\aleph_0 = \aleph_0$.

Sin embargo, se podría resolver el problema diciendo que de cada dos naturales consecutivos uno es par; de cada cuatro, dos son pares y así sucesivamente. De ese modo, se concluiría que la probabilidad solicitada es ½. Este resultado parece muy razonable, aunque 'la cantidad' de casos favorables (en términos de cardinalidad) sea igual a la de casos totales, a saber, $\aleph_0$.

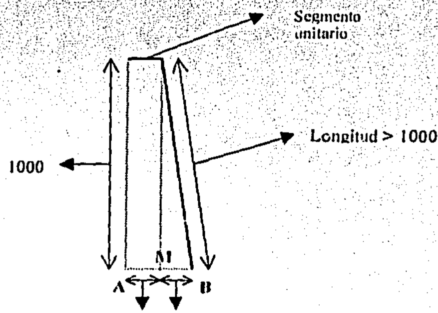
[19] De acuerdo con la teoría de infinitos del matemático alemán Georg Cantor, la cardinalidad o 'número' de elementos de los naturales y de cualquier conjunto que se pueda poner en correspondencia biunívoca (uno a uno) con ellos es $=_0$. La cardinalidad de los números reales y de los puntos de una recta, un plano o de una porción de espacio se considera mayor que la anterior y se simboliza por $=_1$ o por C (el llamado 'continuo').

Por lo tanto, se podría señalar que, en el campo probabilístico, la cantidad de naturales es, en cierto sentido, el doble que la de pares. Análogamente se puede resolver el siguiente problema: Dada una recta de 100 unidades de longitud trazar una perpendicular por un punto tomado aleatoriamente en ella. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho punto pertenezca al segmento [0,1]?



Aun cuando se considera que 'la cantidad' de puntos que hay en el intervalo [0,1] es la misma que la de puntos en el intervalo [0,100], difícilmente se aceptaría que la probabilidad pedida es ½. Más bien, el razonamiento sería que, como el punto puede ser tomado en cualquiera de los 100 segmentos unitarios de la recta con iguales posibilidades, la probabilidad buscada es 1/100. Si se tratara de averiguar la probabilidad de que el punto estuviera en el segmento [0,5], bastaría con efectuar el cociente entre la longitud de dicho segmento y la longitud total obteniendo como resultado 5/100=1/20.

Una vez que se ha entendido el razonamiento anterior no habrá dificultad en resolver éste: Si se toma un punto aleatoriamente en la trayectoria mostrada en la figura, ¿cuál es la probabilidad de que el punto se halle en el segmento unitario señalado?



Ambos segmentos tienen longitud =1

Como se puede apreciar en la figura la trayectoria consta de 2 segmentos de recta: el unitario y otro que corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos menor y mayor miden 1 y 1000 unidades respectivamente. Por lo tanto, la longitud de dicho segmento mide poco más de 1000 unidades, de hecho mide la raíz cuadrada de 1000001.Es evidente que la probabilidad de que el punto seleccionado al azar esté en el segmento unitario es menor que $\frac{1}{1000}$, de hecho es $\frac{1}{\sqrt{1000001}}$. Pero qué hay si alguien afirmara que la probabilidad es ½, ¿le creería? Más aún, si esta persona le presentara una demostración de ello ¿confiaría en la demostración, o pensaría que tal demostración debe contener algún error? Tal 'demostración' en verdad existe, a continuación se detalla.

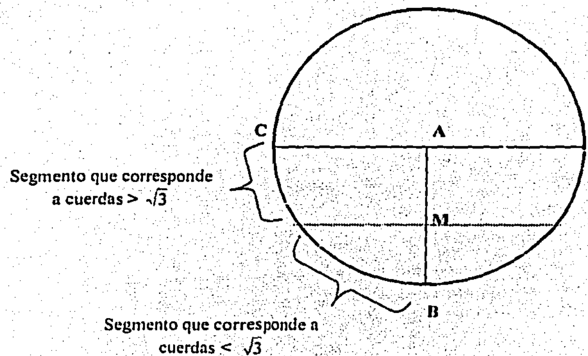
Cada línea perpendicular levantada en el segmento **AB** interseca la trayectoria en un solo punto, ya sea del segmento unitario o del otro segmento. E igualmente, dado un punto en la trayectoria puedo bajar desde él una perpendicular al segmento **AB**, la cual lo tocará en un solo punto. Así, el total de perpendiculares en **AB** corresponde al total de puntos que se puede elegir en la trayectoria. Por lo tanto, se podría considerar la cantidad de perpendiculares posibles en **AB** como los casos totales.

Por otra parte, como **M** es el punto medio de **AB** cada perpendicular alzada en algún punto de **AM** determinará un único punto en el segmento unitario y, por consiguiente, el total de perpendiculares en **AM** corresponde a los casos favorables. De este modo, la probabilidad determinada por los casos favorables entre los totales está dada por el cociente entre la longitud del segmento **AM** y la longitud de **AB**, esto es,

$$P\,(SU) = |\mathbf{AM}| / |\mathbf{AB}| = \tfrac{1}{2}.$$

Esta 'demostración' no sólo es errónea, sino falaz. La falacia utilizada es: "dado un segmento de recta y otro de mayor longitud, como la cantidad de puntos en el menor es la misma que en el mayor, la probabilidad de elegir un punto aleatoriamente en uno de ellos es la misma que en el otro". De esta forma, en vez de comparar las longitudes correspondientes al problema se comparan otras argumentando que 'tienen la misma cantidad de puntos'.

Ésta es precisamente la falacia introducida en la solución 2 de Bertrand, observe con cuidado la ilustración.



Bertrand razona que como la distancia entre **A** y **M** es la misma que la que existe entre **A** y **B**, entonces la probabilidad es ½. Nótese que se comparan las longitudes de **AM** y **AB** en vez de las longitudes de los segmentos correspondientes al problema que, para este caso en particular, son los arcos de circunferencia señalados. Aquí, nuestra 'trayectoria' corresponde al arco **CB** y la recta **AB** es la base sobre la que se sitúan las perpendiculares. Posteriormente, en el capítulo de soluciones se establecerá la longitud que tiene cada uno de los arcos de circunferencia indicados.

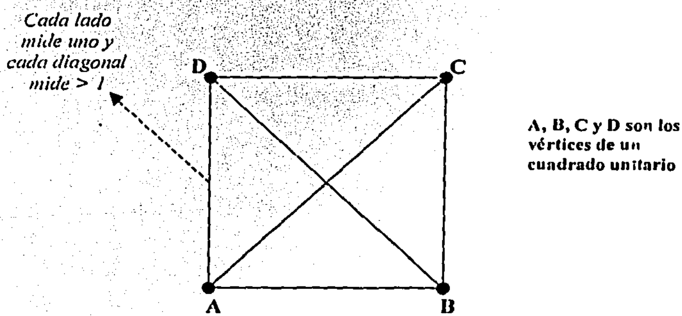
II.3 ¿QUÉ HAY DE LA SOLUCIÓN III?

"No condenes el criterio de otro sólo porque no coincide con el tuyo, lo mas probable es que ambos estén equivocados."

Dandemis.

Finalmente hemos llegado a la tercera solución. Puesto que las dos soluciones anteriores son erróneas uno podría sentirse tentado a pensar que ésta sí es correcta. Sin embargo, hay que recordar que existen más soluciones publicadas, y con distintos resultados, además de las tres que dio Bertrand. De modo que no se puede asegurar *a priori*[20] que ésta sea la solución exacta.

Examinemos, pues, la última solución antes de emitir el veredicto. Para hacerlo, a continuación se dará un ejemplo ilustrativo mucho más simple: considerando la figura, si se toma al azar una recta, ¿cuál es la probabilidad de que su longitud sea >1?



[20] Esta expresión se traduce literalmente por 'lo que viene antes' y se refiere al conocimiento que ya se ha acumulado, hechos que se dan por sentado por conocerlos de antemano.

Suponiendo que alguien se diera a la tarea de contar el total de rectas involucradas, se podría empezar parándose en un vértice, por ejemplo A, y contar las rectas que lo contienen como extremo. En este caso son tres: AB, AC y AD.

Ahora, moviéndose hacia la derecha (es análogo si se hace a la izquierda) y situándose en B, ¿cuántas rectas tienen a B como extremo, sin incluir ninguna de las tres que ya están contadas? Sólo dos: BC y BD.

Hasta este momento se han contado cinco rectas en total; sigamos avanzando y detengámonos en C. Sólo existe una recta con extremo en C que no ha sido incluida en la cuenta, a saber, CD.

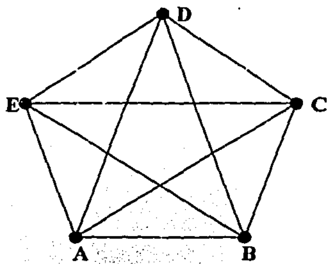
Finalmente, se llega al vértice D y se puede notar que no hay ninguna recta que incluya a D como extremo que no haya sido ya contada. Así, se han sumado seis rectas en total, de las cuales únicamente dos tienen longitud >1, por lo que se concluye que la probabilidad que el problema exige es 2/6=1/3.

Por otra parte, puede advertirse que una vez que uno se ubica en un punto fijo, la cantidad de rectas correspondientes a cada punto sucesivo es gradualmente menor. Además, a partir del punto fijo la probabilidad requerida va cambiando en cada vértice. En A la probabilidad es 1/3, ya que de las tres rectas que inciden en él sólo una (AC) es mayor que 1. En B es ½, pues una de las dos líneas que surgen de él es mayor que 1, explícitamente: es la línea BD. Siguiendo de esta forma se hallan los resultados en todos los vértices. Se puede resumir la información obtenida mostrándola en la tabla siguiente:

PUNTO	RECTAS	PROBABILIDAD
A	3	1/3
B	2	1/2
C	1	0
D	0	--

En forma semejante si se aplica el mismo procedimiento en el problema análogo, pero esta vez usando un pentágono unitario se verifica una tabla similar.

Pentágono unitario



PUNTO	RECTAS	PROBABILIDAD
A	4	1/2
B	3	2/3
C	2	1/2
D	1	0
E	0	--

Para el hexágono unitario la tabla muestra estos datos.

PUNTO	RECTAS	PROBABILIDAD
A	5	2/5
B	4	1/4
C	3	1/3
D	2	1/2
E	1	0
F	0	--

La tabla correspondiente al heptágono es:

PUNTO	RECTAS	PROBABILIDAD
A	6	2/3
B	5	4/5
C	4	3/4
D	3	2/3
E	2	1/2
F	1	0
G	0	--

Como se puede ver en todos estos ejemplos, después de fijar un punto inicial la probabilidad *no es la misma* en cada vértice sucesivo. Por lo tanto, no se puede garantizar sin justificación previa que la probabilidad buscada (de que una recta escogida aleatoriamente tenga longitud >1) sea la misma probabilidad que corresponde al punto fijo inicial.

Aunque, de hecho, en los ejemplos presentados sí coinciden estas probabilidades. Lo que es más, se puede demostrar que, *bajo ciertas condiciones*[21], la probabilidad en el vértice inicial fijado está dada por: (n-3)/(n-1). Mientras que la probabilidad solicitada en el problema resulta ser: $\frac{\left[\frac{n(n-1)}{2}-n\right]}{\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]}$, la cual es equivalente a esta expresión más simple: $1-\frac{2}{(n-1)}$ que a su vez equivale a $\frac{(n-3)}{(n-1)}$,que coincide justamente con la probabilidad calculada en el punto fijado inicialmente[22]. De modo que sí es posible establecer un teorema que garantice

[21] Las condiciones son que el polígono sea regular o que exista simetría respecto al punto tomado como inicial.

[22] Todos estos cálculos se desarrollan en el Apéndice C.

que *si se satisfacen ciertos requisitos iniciales*, basta con calcular la probabilidad en un punto fijo arbitrario para conocer la probabilidad exigida por el problema, pero si alguien recurre a este resultado se espera que por lo menos *lo mencione* en su resolución del problema.

En resumen, la probabilidad calculada para el vértice fijado al principio no incluye los casos favorables y los totales de la figura completa, sino sólo aquellos que lo contienen como vértice. Por consiguiente, no se puede asegurar *a priori* que la probabilidad en el vértice fijo coincida siempre con la probabilidad calculada para todas las rectas involucradas en el problema. No obstante, esto es precisamente lo que hace Bertrand en la tercera solución: calculó la probabilidad en un punto fijado arbitrariamente y la presentó como la probabilidad demandada por el problema sin dar mayor explicación de por qué las probabilidades coinciden.

Esta situación deja lugar a varias posibilidades: ¿Acaso para Bertrand era demasiado obvia la equivalencia entre las probabilidades que no tuvo necesidad de mencionarlo? No descarto esta posibilidad en vista de su amplia capacidad como matemático, pero el hecho de que dos de las soluciones que para él eran *obviamente* correctas en realidad no lo sean, sugiere una respuesta negativa. Además, aunque para él este resultado fuese evidente ¿por qué al *publicarlo* no lo incluyó? ¿Esperaba que fuese igual de claro para *todos* sus lectores?

Otra opción menos halagadora para Bertrand (y, por extensión, para los codefensores de sus ideas) es que incurrió en la siguiente falacia u otra semejante: "Como en cualquier punto que elija en la circunferencia, una vez fijado, obtengo la misma probabilidad, entonces en todos los puntos la probabilidad es la misma y me basta con calcularla en uno solo para resolver el problema".

Aunque Joseph L. Bertrand hubiese llegado al resultado correcto (al cual todavía no se ha llegado) eso no probaría que su método de resolución haya sido correcto. Hay que recordar que llegar a una respuesta correcta no garantiza que el procedimiento sea correcto. Tómese como ejemplo el conocido caso de la cancelación:

Si observo que puedo cancelar el 6 en la expresión: $\frac{16}{64}$ obteniendo el resultado correcto: $\frac{1}{4}$, y puedo hacer lo mismo con el 9 en: $\frac{19}{95}$ y $\frac{49}{98}$, podría concluir erróneamente que dicha 'cancelación cruzada' es correcta puesto que en todos estos casos obtengo los resultados correctos.

¿Cometió Bertrand algún tipo de razonamiento falaz o resolvió el problema correctamente *omitiendo ciertos detalles*? La respuesta a esta pregunta es valiosa, porque si introdujo alguna clase de falacia en esta resolución también, eso significaría que *su 'paradoja' nunca fue resuelta* por él y, muy probablemente, tampoco por sus seguidores, quienes se valieron de las tres contestaciones que publicó en 1889 para defender sus ideas.

Así, es probable que, a pesar de su antigüedad y de todas las 'soluciones' propuestas, la pregunta constituya realmente un problema abierto. Saber esto puede favorecer el interés por abrir el siguiente capítulo: soluciones.

CAPÍTULO III

NUEVAS SOLUCIONES

"Quien sólo haya hecho ejercicios de matemáticas sin haber resuelto ningún problema, es igual a quien sabe mover las piezas del ajedrez sin haber jugado nunca un verdadero juego; lo real en matemáticas es participar en el juego."
Stephen J. Turner.

"Eso es lo que me gusta de Lord Young. Mientras todos ustedes me traen problemas, él me trae soluciones."
Margaret Thatcher.

Como se ha señalado antes, hay más soluciones aparte de las presentadas aquí. Sin embargo, se puede decir que la generalidad de las soluciones se reduce a tres versiones básicas:

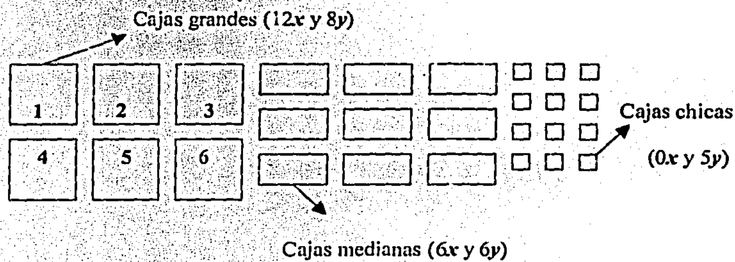
1. Las que comparan áreas
2. Las que comparan longitudes, y
3. Las que comparan ángulos.

A continuación se dará una solución con cada método procurando hacerlo paso a paso para que quede claro el procedimiento empleado y, de ese modo, hacer explícitos los procesos intermedios. Esta forma de proceder evitará incurrir en falacias como las expuestas o bien ayudará a descubrirlas más fácilmente en caso de cometerse algunas.

III.1 SOLUCIÓN I

> **"Cuando publicaba una memoria sobre un asunto nuevo, exponía con sencillez el camino que había recorrido, haciendo observar sus dificultades y vericuetos, y luego de hacer seguir a sus lectores la marcha de su espíritu durante los primeros ensayos, les enseñaba cómo había conseguido encontrar el camino más fácil."**
>
> **Nicolás Caritat de Condorcet (hablando de Leonhard Euler).**

A fin de entender el método empleado en la resolución del problema iniciaré con un ejemplo más fácil de seguir. Supóngase que en una dulcería hay chocolates de tipo x ("para ella") y de tipo y ("para él") metidos en cajas de diferentes tamaños que contienen cierta cantidad de cada tipo como se muestra en la figura.



Las cajas del mismo tamaño contienen igual cantidad de chocolates de un mismo tipo. Dado que todos los chocolates tienen la misma probabilidad de ser elegidos se desea calcular la probabilidad de que si se elige un chocolate al azar sea de tipo x.

La resolución será a través de los siguientes pasos:

1. Contar el total de chocolates
2. Contar los chocolates favorables.

Contar el total de chocolates

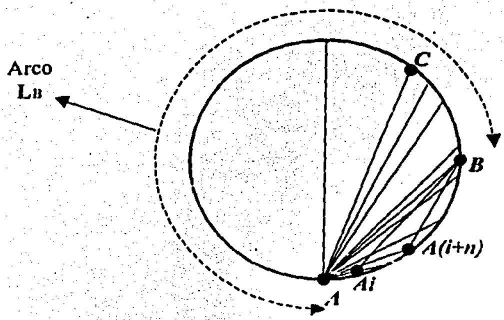
Se puede elegir arbitrariamente una caja (grande, mediana o chica) y después contar los chocolates que contienen todas las cajas de su mismo tamaño. Una vez hecho esto, se hace lo mismo con las cajas de otro tamaño y finalmente con las últimas.

Es claro que al hacer esto no importa realmente por qué tipo de cajas se empiece, si se comienza por las grandes tampoco importa cuál de las 6 grandes sea la primera, con tal que se cuenten todas una sola vez.

Por supuesto, no es necesario abrir cada una de las cajas del mismo tamaño para poder contar los chocolates de su interior. Como todas las del mismo tamaño contienen igual número de dulces basta con contar los de una y multiplicar el resultado por el número de cajas de esa capacidad. Así, por ejemplo, como cada caja grande contiene 20 chocolates, el total de ellos en las seis cajas de mayor tamaño es: $6\times20=120$. Igualmente, se tienen nueve cajas medianas cada una con capacidad para 12 golosinas, lo que suma: $9\times2= 108$. Finalmente, hay 12 cajas pequeñas con 5 chocolates cada una, lo que da por resultado: $12\times5=60$. Por lo tanto, el total de chocolates, sin importar el tamaño de su envoltura, es el resultado de sumar $120+108+60$, lo que equivale a 278.

Vayamos ahora al problema que nos ocupa. Para contar las cuerdas totales se inicia situándose en un punto fijo seleccionado arbitrariamente sobre la circunferencia. Como en el caso de las cajas no importa cuál es el punto inicial de conteo, el resultado no se alterará.

Supóngase que se desea contar todas las posibles cuerdas en la circunferencia unitaria, entonces se toma el punto fijo A como uno de los extremos de las cuerdas sabiendo que el otro extremo puede ser cualquier otro punto de la circunferencia. Observe la figura siguiente:



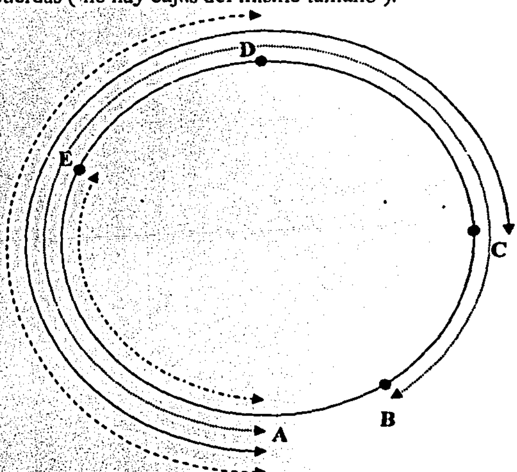
LB es el arco de circunferencia correspondiente a 2π menos el arco *AB* y se denota con *lB* la cantidad de puntos que hay en una línea de longitud B.

A medida que se van eligiendo puntos sucesivos a la derecha de ***A***, es decir, en sentido contrario a las manecillas del reloj, se van contando cuántas posibles cuerdas tienen su extremo allí. Cuando se llegue al punto ***B*** se tendrán tantas cuerdas como puntos hay en el arco de circunferencia **LB**, ya que cada punto de ese arco puedo unirlo con ***B*** y obtener una cuerda distinta. ¿Por qué se excluyen los puntos que pertenecen al arco ***AB***? Porque para llegar a ***B*** antes uno tuvo que ubicarse en cada uno de ellos y al tomarlos como extremo para hacer el conteo se tuvo que unir cada uno de éstos con el punto ***B***. De modo que las cuerdas que inician en algún punto del arco ***AB*** y terminan en ***B***, en realidad, ya fueron contadas. ¿Cuándo? Cuando le tocó su turno a cada uno de dichos puntos. Por ejemplo, la cuerda ***AiB*** fue contada cuando, ubicándose en ***Ai***, se hizo la unión con varios puntos, entre ellos con ***B***. Posteriormente la cuerda $A_{(i+n)}B$ se contó cuando, situándose en $A_{(i+n)}$, se hizo el conteo de las cuerdas que lo tienen como extremo, entre ellas estuvo, evidentemente, la cuerda $A_{(i+n)}B$.

Procediendo de esta forma, al llegar al punto C, se tendrán tantas cuerdas como puntos hay en el arco Lc, el cual equivale a 2π menos el arco AC. La cantidad de cuerdas correspondientes al punto C es, entonces, la misma cantidad de cuerdas que había en A menos las que parten de A y tienen su otro extremo en el intervalo curvilíneo (A,C), *puesto que éstas ya fueron contadas cuando hubo que situarse en cada punto de dicho intervalo*, y así sucesivamente hasta llegar nuevamente al punto A.

En resumen, para contar el total de cuerdas posibles en la circunferencia se debe contar, primero, cuántos puntos hay en la circunferencia unitaria ('cuántas cajas hay') y luego cuántas cuerdas corresponden a cada punto sucesivo que se va tomando ('cuántos chocolates hay en cada caja').

El total de 'cajas' es relativamente fácil de determinar: tantos como puntos hay en la línea de longitud 2π (el perímetro del círculo unitario). El problema surge cuando se quiere determinar 'el número' de cuerdas correspondientes a cada punto en la circunferencia. Como se puede notar en la ilustración, a cada punto le corresponde una cantidad distinta de cuerdas ('no hay cajas del mismo tamaño').



Los arcos que unen al punto A con los distintos puntos de la circunferencia, por ejemplo con B, C, D y E tienen diferentes longitudes.

A cada punto **i** le corresponden tantas cuerdas como puntos hay en su respectivo arco **Li**. La suma de los puntos de todos estos arcos de circunferencia dará el total de cuerdas. Sin embargo, esta clase de 'suma' no es, en absoluto, ordinaria. Se tiene que sumar las siguientes cantidades de puntos:

$1+2+3+.....+ l\pi/2$ (tantos puntos como los que hay en un arco de longitud $\pi/2$) + $(l\pi/2+1)+ (l\pi/2 +2)+(l\pi/2+3)+....+ l\pi$ (tantos puntos como los que hay en un arco de longitud π)+ $(l\pi+1)+ (l\pi +2)+ (l\pi+3)+....+ l2\pi$. (Aquí se pudo haber elegido otras l como $l\pi/3$, $l2$ o l con cualquier longitud entre 0 y 2π; pero, como se verá más adelante, esto no es relevante para el cálculo de la suma).

Al llegar a este paso, se podría pensar en algo así como: "Quizás no tenga sentido buscar el resultado de esta 'suma', puede que sea imposible saber la respuesta de esta operación". Después de todo involucra no sólo el infinito, sino cantidades infinitas 'más grandes' que otras. Y como dijo en cierta ocasión el conocido filosofo francés Voltaire: "El método con el que se pretende someter en todas partes el infinito a cálculos algebraicos está basado en [...] el arte de contar y medir con toda exactitud algo cuya existencia no puede ser concebida.

Por lo tanto, lo lógico es que un hombre cualquiera se ría sin ningún recato cuando se le dice que [...] hay infinitos cuadrados, infinitos cubos e infinitos de infinitos, cada uno mayor que el otro, y que el penúltimo de ellos no es nada comparado con el último."[23]

Sin embargo, por sorprendente que parezca, realmente existe una forma de obtener el resultado de la suma. Antes de que alguno de los lectores se empiece a 'reír sin ningún recato' (si es que no ha iniciado ya) permítanme presentar lo que Voltaire dijo inmediatamente después de lo mencionado:

[23] *Letters on the English*, Nueva York, Collier 1910, pág. 128, citado por David Wells en *El curioso mundo de las matemáticas*, Gedisa, Barcelona, 2000, págs, 184-185.

"Todas estas cosas que, en un principio pueden parecer un desvarío, suponen un esfuerzo inmenso de sutileza y de superación de la mente humana y constituyen el arte de hallar verdades que hasta entonces habían sido desconocidas".

Con ese espíritu pasemos a examinar el método empleado. Como se ha señalado antes, esta clase de suma no parece intuitiva ni mucho menos trivial. Por eso es conveniente examinar un ejemplo ilustrativo antes de proceder a efectuarla.

Supóngase que se tienen 11 cajas ordenadas de acuerdo con la cantidad de canicas que contiene cada una. La primera contiene 1 canica, la segunda dos y así sucesivamente, hasta la última, que contiene 11 canicas. Si se desea conocer el total de canicas que hay en las 11 cajas puede efectuarse la suma: 1+2+3+...+10+11=66. Otra opción es ubicarse en la caja que se encuentra justo en medio[24] y valerse del siguiente procedimiento: sumar el contenido de la primera caja con el de la última y obtener el promedio de las dos, luego la segunda con la penúltima y calcular su promedio, y así sucesivamente hasta agotar los pares de cajas que hay a ambos lados de la caja central. Como la caja que se encuentra al centro también contiene el mismo promedio de canicas, entonces la cantidad total de canicas es igual a la cantidad promedio de las cajas multiplicada por el total de cajas.

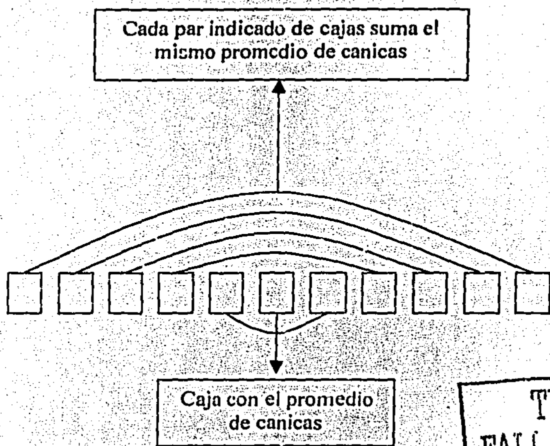
Usando este proceso en nuestro ejemplo de las 11 cajas resulta que el promedio es:

$$\frac{1+11}{2}=\frac{2+10}{2}=\frac{3+9}{2}=\frac{4+8}{2}=\frac{5+7}{2}=6=\text{la cantidad de canicas de la caja central.}$$

Por lo tanto, para saber la suma total de canicas basta con efectuar el producto del promedio con el total de cajas, a saber, 6×11=66.

[24] En realidad, el ejemplo puede hacerse con cualquier número impar de cajas, ya que en cada uno de ellos se puede saber fácilmente cuál es la caja que está justo en medio.

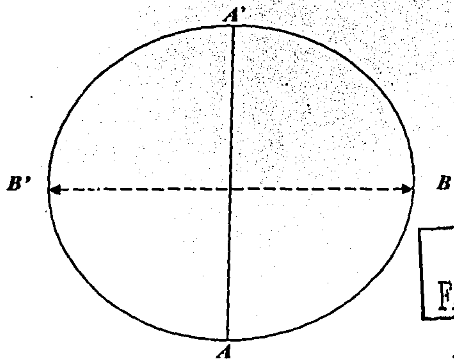
Como se puede notar, es posible conocer el promedio desde el principio simplemente encontrando el número de elementos de la caja central. Así, si el total de cajas fuese de 15, en lugar de 11, el promedio sería 8 y el total de canicas $8\times 15=90$.



Este estilo de conteo, al que se llamará "método del promedio", es clave en la argumentación que se presentará, por lo que se recomienda entenderlo claramente antes de seguir adelante.

Es tiempo de regresar a la suma que permite descubrir cuál es el total de cuerdas definidas en la circunferencia.

Si se levanta un diámetro a través del punto fijo A, se parte la figura en dos semicircunferencias. Si se toma un punto B en una de las semicircunferencias —por ejemplo la de la derecha— y a partir de allí se traza una perpendicular al diámetro, al prolongar dicha recta se hallará un punto B' en la otra mitad de la circunferencia de tal forma que ***B*** y ***B'*** equidistan del punto ***A***, pero también equidistan del otro extremo del diámetro al que se llamará ***A'***.



Nótese que para *cada punto **B*** a la derecha de ***A*** existe otro *único* punto ***B'*** a su izquierda cuya longitud $\mathbf{L_{B'}}$ es igual a la longitud del arco ***AB*** sólo que ubicado a la izquierda de ***A***. Por lo tanto, sin importar dónde se ubique ***B***, la suma de $\mathbf{L_B}$ y $\mathbf{L_{B'}}$ siempre da como resultado 2π, pues $\mathbf{L_B} = 2\pi - \boldsymbol{AB}$ ($\mathbf{L_B}$ es igual 2π menos la longitud del arco ***AB***). Por consiguiente, el promedio requerido es $2\pi/2 = \pi$.

De lo anterior se desprende que, un "camino más fácil"[25] para saber cuántas cuerdas hay en total es multiplicar el número de puntos ***B*** que hay en la circunferencia por π (que resulta de promediar $\mathbf{L_B} + \mathbf{L_{B'}}$) ¿De qué forma se puede efectuar esta multiplicación? Simplemente obteniendo el producto entre la longitud de la circunferencia (a saber, 2π) y π, el cual corresponde al área de un rectángulo de base 2π y altura π. Esto es razonable porque es como si en cada punto de una recta de longitud 2π se levantara una perpendicular de longitud π.

---

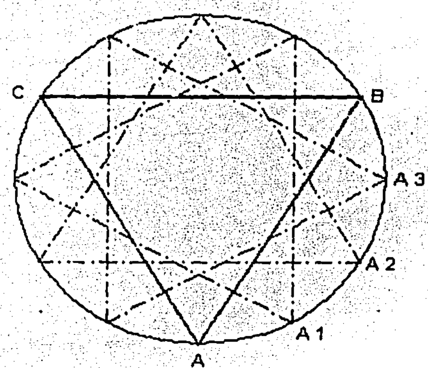
[25] A este 'camino más fácil' se le llamará aquí indistintamente el razonamiento o el método del promedio o simplemente el promedio. Nótese que se ha aplicado sólo en casos donde existe simetría respecto a un elemento central.

De este modo, se concluye (¡Por fin!) que el total de cuerdas posibles es $2\pi\times\pi$, esto es, $2\pi^2$.

Contar los chocolates favorables

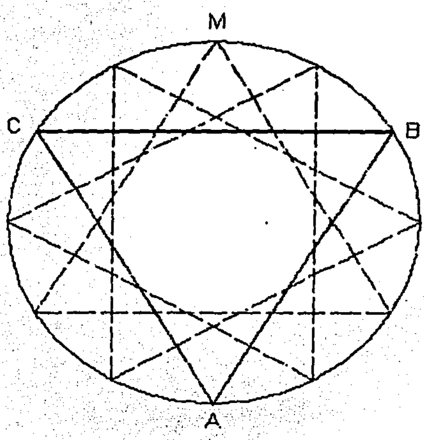
Para encontrar la cantidad de chocolates de la clase x basta con contar cuántos hay en cada tamaño de caja y luego simplemente multiplicar dicho número por el total de cajas correspondientes del mismo tamaño. Así, por ejemplo, si se sabe que hay 12 chocolates del tipo x en cada una de las seis cajas grandes, 6 en cada una de las 9 medianas y 0 en cada una de las 12 chicas; entonces hay en total $12\times6+6\times9+0\times12=72+54+0=108$ golosinas del tipo x. De modo que la probabilidad requerida es **P** =108/278=54/139.

Para resolver de manera similar el problema inicial planteado se utilizará la siguiente figura:



Al ubicarse en los puntos del arco AB ('las cajas grandes'), por ejemplo los puntos A_1, A_2 y A_3, se puede notar que cada uno de ellos tiene tantas cuerdas mayores en longitud a la raíz de 3 como puntos hay en un arco subtendido por un lado del triángulo equilátero. Dicho arco corresponde a $2\pi/3$, entonces cada punto en AB cuya longitud es $2\pi/3$ se multiplica también por $2\pi/3$, que es el arco que subtiende cada lado del triángulo equilátero inscrito.

Ahora bien, si uno se sitúa en algún punto del arco BC observa que le corresponden tantas cuerdas favorables como puntos hay en su arco respectivo cuya longitud varía entre 0 y $2\pi/3$.



Utilizando el hecho de que a *cada par* de puntos en el arco BC simétricos respecto a M le pertenecen tantas cuerdas como puntos hay en el arco de longitud $2\pi/3$, por el razonamiento del promedio se halla que a cada punto en ***BC*** ('las cajas medianas') le tocan '$\pi/3$' cuerdas.

Finalmente, se llega a los puntos que pertenecen al arco ***CA*** ('las cajas chicas'), a los cuales no les toca ninguna cuerda favorable puesto que ya todas fueron contadas en los arcos anteriores.

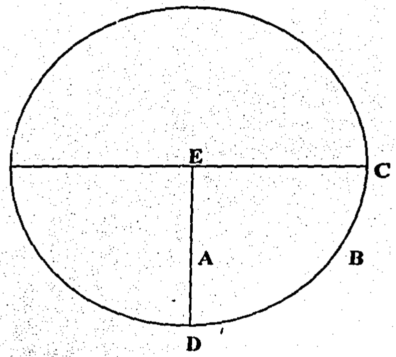
En resumen, la cantidad de cuerdas favorables es: $(2\pi/3)\times(2\pi/3)+(2\pi/3)\times(\pi/3)+(2\pi/3)\times 0=(4\pi^2/9)+(2\pi^2/9)+0=(6\pi^2/9)=2\pi^2/3$. De este modo, comparando el área favorable y el área posible resulta que la probabilidad buscada es: $P=(2\pi^2/3)/(2\pi^2)=1/3$.

A estas alturas alguien puede pensar que este estilo de contar es arbitrario, artificioso y engañoso. A fin de convencer al lector escéptico se realiza el cálculo de los casos desfavorables en el apéndice y consecuentemente también la probabilidad del evento complementario. Como es de esperarse, si el método es consistente, la suma de los casos favorables y desfavorables debe igualar a los totales.

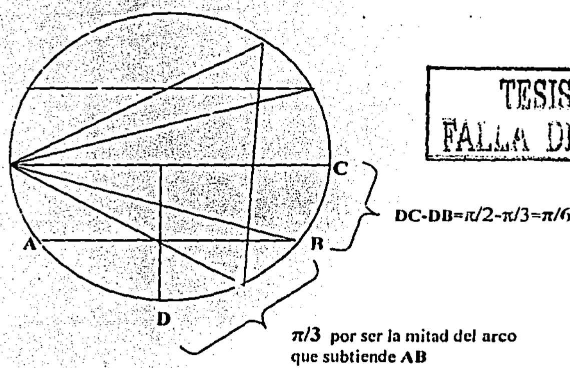
III.2 SOLUCIÓN II

> "Mi objetivo es escribir de modo que permita al lector alcanzar el fondo de las cosas que aprende; incluso iré al origen de la invención para que quien aprende pueda entenderlo como si lo hubiera inventado él mismo."
>
> **Leibniz.**

Esta estrategia de resolución se basa en la comparación entre dos longitudes tal como pretendía hacerlo la solución que se presentó como la segunda respuesta de J. L. Bertrand.



Como se ha examinado ya en el análisis de la solución 2, las longitudes que deben compararse no son las rectas ***AE*** con ***DE***, sino los arcos ***BC*** con ***DC***. ¿Cuánto miden tales segmentos de la circunferencia? Para saberlo examine la siguiente figura.



Como el arco **DC** mide exactamente la cuarta parte del perímetro del círculo unitario, su longitud es $2\pi/4 = \pi/2$. En lo que respecta al arco **DB** se puede notar que es la mitad del arco **AB** el cual mide $2\pi/3$, por lo que **DB** mide $\pi/3$. Sabiendo las longitudes de **DC** y **DB** es fácil calcular la de **BC** como la diferencia entre ellas: **DC-DB**=$\pi/2$-$\pi/3$=$\pi/6$.

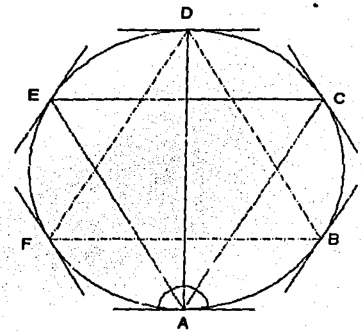
El cociente $\frac{BC}{DC}$ calcula la probabilidad de que una cuerda aleatoria mida más que la raíz de 3 en la semicircunferencia, puesto que compara los puntos correspondientes a dicha cuerda con los que corresponden al total de cuerdas en la semicircunferencia. Por la simetría de la figura se concluye que esta probabilidad coincide con la probabilidad en la circunferencia completa. Por lo tanto, la probabilidad que se averigua es:

P=($\pi/6$)/($\pi/2$)=2/6=1/3. *(¡¡Coincide con el resultado del método anterior!!)*.

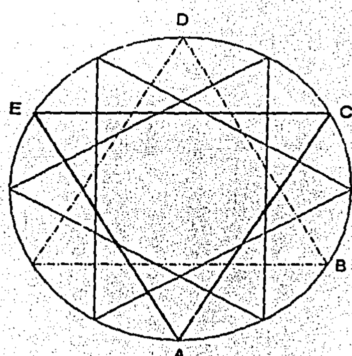
III.3 SOLUCIÓN III

> "Mi amigo G.H. Hardy, que fue profesor de matemáticas puras, me dijo una vez que si él encontraba una prueba de que yo fuera a morirme en cinco minutos, sentiría mucho perderme, pero que esa pena sería superada con creces por el placer de comprobar que la prueba era válida . Yo estuve de acuerdo con él y no me sentí ofendido en absoluto."
> **Bertrand Russell.**

La técnica que se va a usar ahora compara ángulos en vez de longitudes o áreas. La ilustración ayudará a determinar cuáles son los ángulos favorables y compararlos con los totales. Con la expresión ángulos favorables se hace referencia, en este caso, a aquellos ángulos que resultan en cuerdas cuyo largo es mayor o igual a la raíz de 3. Asimismo, los ángulos totales son la totalidad de cuerdas que pueden definirse en la circunferencia unitaria sin importar su longitud.



Se puede dividir la circunferencia en 3 arcos de la misma longitud: ***AC***, ***CE*** y ***EA***. El ángulo Φ equivale a 60°, obsérvese que cada punto en el arco ***AC*** tiene un ángulo favorable de 60°. Por consiguiente, el total de cuerdas cuya longitud es mayor o igual a la raíz de 3 que tienen un extremo en el arco ***AC*** se obtiene al multiplicar 60° por el número de puntos en el arco ***AC***, esto es, $60° \times (2\pi/3)$.



Si ahora se toma como partida el punto *C* y se aplica de nuevo el método del promedio en el arco **CE**, se halla que a cada punto en dicho arco le corresponde un ángulo favorable de 30° .De esta forma, la cantidad de cuerdas deseables en esta sección es: $30° \times (2\pi/3)$.

Finalmente, al ubicarse en un punto cualquiera del arco *EA* se nota que todas las cuerdas cuya extensión es al menos raíz de 3 ya fueron contadas, por lo que el ángulo favorable para estos puntos es cero.

De lo anterior se deduce que la cantidad total de cuerdas favorables es:

$[60° \times (2\pi/3)] + [30° \times (2\pi/3)] + 0 = 90° \times (2\pi/3)$.

Análogamente, la cantidad de cuerdas totales se puede calcular situándose en *A* y observando que la cantidad de cuerdas correspondientes a cada punto sucesivo a la derecha (o izquierda si se cuenta en el otro sentido) de *A* disminuye gradualmente. Utilizando nuevamente el razonamiento del promedio se concluye que a cada punto en la circunferencia le tocan 90°, por lo que el total sería: $90° \times (2\pi)$. Asi, la probabilidad buscada es: $\dfrac{90° \times \left(2\pi/3\right)}{90° \times 2\pi} = \dfrac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = 1/3$.

CONCLUSIONES

> **"Llegará el día en que, por un estudio continuado de muchos siglos, las cosas actualmente ocultas parecerán evidentes, y la posteridad se asombrará de que se nos hayan escapado verdades tan claras."**
> **Séneca.**

Ahora que se ha avanzado hasta aquí alguien podría preguntar 'Si hay realmente *una* respuesta correcta, ¿Por qué, entonces, nadie la encontró en más de un siglo?'.En primer lugar, existe la posibilidad de que alguien se haya dado cuenta de ello e, incluso, pudo haber escrito algo al respecto, pero no es fácil contradecir los resultados de científicos renombrados. En segundo término, el hecho de que muchos investigadores y autores concuerden con estas conclusiones aceptadas durante tanto tiempo no prueba que sean correctas, lo que sí prueba es que *no es trivial* darse cuenta de que son incorrectas.

De modo que, este trabajo estaría ya justificado aunque sólo se propusiese descubrir los errores cometidos en las soluciones de Bertrand aprobadas por tantos matemáticos y por tanto tiempo. La dificultad que implica poner de manifiesto los errores que han estado escondidos durante muchos años llevó a que en la obra de Galileo Galilei *Dialogues Concerning Two New Sciences* su editor lo recomendara del siguiente modo: "Es obligado tributar admiración a todos los que [...] han dirigido su atención a lo conocido para descubrir y corregir errores y falacias de tantas y tantas proposiciones enunciadas por hombres distinguidos y aceptadas durante siglos. Aunque sólo han señalado la mentira y no han llegado a reemplazarla por la verdad, no podemos negar que son, con todo, dignos de encomio, especialmente si consideramos por un momento lo difícil que resulta descubrirla, lo que obligó incluso al príncipe de los oradores[26] a exclamar: *Utinam tam facile possem vera reperire, quam falsa convincere* («Ojalá pudiera descubrir la verdad con la misma facilidad con que refuto la mentira»). Y es obvio que estos últimos siglos se merecen esta alabanza porque, durante el transcurso de los mismos, las artes y las ciencias descubiertas por los antiguos han sido llevadas sin descanso al grado de perfección elevadísimo de que gozan actualmente gracias a las investigaciones y a los experimentos de estas mentes ilustres. Ese desarrollo es particularmente evidente en el caso de las ciencias matemáticas."

Por otra parte, *resolver este problema* de Bertrand en particular es importante porque establece una base para solucionar otros problemas semejantes que él mismo planteó[27] y también algunos que fueron planteados por otros autores. Además, el problema puede tener aplicaciones prácticas, puesto que se ha modelado como un experimento de física. Se tiene una cámara o disco oscuro de cierto radio específico r que detecta como cuerdas del círculo correspondiente aquellos rayos cósmicos que atraviesan el plano del disco. El rayo cósmico penetra a través de una diminuta ventana de entre un número finito de ellas y su trayectoria establece una cuerda de cierta longitud en el círculo detector.

Adicionalmente, las técnicas empleadas al resolver el problema desde distintos enfoques pueden ser útiles para abordar pruebas similares en el campo de la probabilidad geométrica. También, las repercusiones de todo esto pueden edificar un buen principio para hacer una revisión de las discusiones en torno a la definición clásica de probabilidad, ya que uno de lo objetivos primarios de Joseph Louis F. Bertrand, al diseñar este problema, era precisamente el de exhibir *la imposibilidad* de presentar una definición de probabilidad objetiva en el caso de un número infinito de eventos.

---

[26] Se refiere a Cicerón.

[27] Por ejemplo: 'Si se elige al azar un plano del espacio ¿cuál es la probabilidad de que forme un ángulo agudo de menos de 45 grados con el horizonte?' y 'Si se eligen al azar dos puntos sobre la circunferencia, ¿cuál es la probabilidad de que su distancia angular sea inferior a 10 minutos?'.

Por siglos los matemáticos han buscado la certeza de sus resultados a través de la demostración. Sin embargo, lo que ha sucedido con la paradoja de Bertrand justifica el planteamiento de las siguientes preguntas: 'Una vez que se efectúa la demostración de un resultado, ¿se tiene ya la garantía de que el resultado es correcto? ¿Qué hay si la demostración misma es incorrecta? ¿Es necesario hacer una *demostración* de que la demostración está bien hecha? Si ese fuera el caso, ¿cómo podemos asegurar que la *metademostración* (la demostración de la demostración) está también libre de errores? 'Está claro que el proceso de demostrar 'la validez de la demostración' podría extenderse indefinidamente. El análisis de la paradoja de Bertrand presentado aquí puede proveer una buena motivación para introducirse en el problema filosófico de qué es la verdad matemática y cómo distinguir lo verdadero de lo falso aun en las demostraciones.

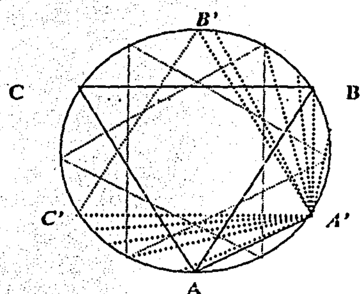
Los métodos presentados podrían también ser manejados para afrontar problemas relacionados con el infinito desde una nueva perspectiva. La suma de una infinidad de elementos que se expuso en la primera solución quizás pueda servir de inspiración para hallar nuevos procedimientos de sumas infinitas en áreas como el cálculo o el análisis matemático. Puesto que mi ignorancia en el amplio campo de las matemáticas es enorme, incluso puede haber aplicaciones que yo mismo ahora ni siquiera sospecho, como dice un proverbio: '*en un jardín crecen más cosas que las que siembra el jardinero*'. Si tan sólo motivara el desarrollo de *una* de tales semillas, mi deseo de arrancar una gota de conocimiento al gran océano de sabiduría oculta que la humanidad tiene ante sí quedaría satisfecho.

APÉNDICE A

«Terminamos la preparación de un artículo y buscamos un clip. Después de abrir una gran cantidad de cajones, finalmente encontramos uno que estaba demasiado torcido para ser usado, de modo que buscamos una herramienta para enderezarlo. Abrimos muchos cajones más y dimos con una caja llena de clips sin usar. Einstein empezó inmediatamente a convertir uno de ellos en herramienta para enderezar el clip torcido. Cuando le pregunté qué estaba haciendo me dijo: "Una vez que me fijo un objetivo, es difícil apartarme de él.".»

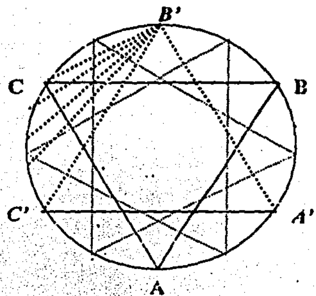
Ernst Strauss.

Ahora, el objetivo será el de calcular la probabilidad de que una cuerda escogida al azar mida menos que la raíz de 3.

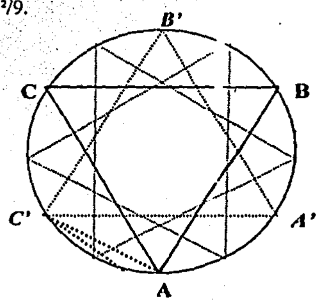


Si se fija el punto **A** y a partir de él se empieza el conteo, se encuentra que al punto A le tocan, a la derecha, $2\pi/3$, que son los puntos correspondientes al arco **AB**, y $2\pi/3$ a la izquierda, que son los que corresponden al arco **AC**, o en total $4\pi/3$. Obsérvese que ***A'*** es el punto central del arco **AB**, por lo que contiene el promedio de los puntos del arco. ¿Cuántos puntos le corresponden? A la derecha tantos como los que hay en el arco ***A'B'***. En lo que se refiere a la parte izquierda de ***A'*** sólo le tocan los del arco ***C'*A**, puesto que los puntos de **A*A'*** ya fueron contados antes de llegar al punto central. De modo que el promedio es: $2\pi/3$ (los del arco ***A'B'***) + $\pi/3$ (los del arco ***C'*A**)= π.

Por el razonamiento del promedio, basta multiplicar este resultado por $2\pi/3$ (el total de puntos en **AB**) para saber los casos favorables en el arco **AB**, a saber, $\pi \times (2\pi/3) = 2\pi^2/3$. Al ubicarse ahora en el arco **BC**, cuya longitud es $2\pi/3$, se encuentra que el punto central coincide con el punto ***B'***, por lo que éste 'contiene' el promedio que se investiga. A ***B'*** le tocan todos los puntos de ***C'B'*** (que son $2\pi/3$) y del otro lado ninguno, ya que los de ***A'B'*** se incluyeron en la cuenta cuando hubo que situarse en cada uno de esos puntos en el recorrido hacia ***B'***. Así, los puntos correspondientes a ***B'*** son $2\pi/3+0 = 2\pi/3$.



De este modo, se descubre que los puntos favorables del arco **BC** son el total por el promedio: $(2\pi/3) \times (2\pi/3) = 4\pi^2/9$.



Es el turno del arco **CA**. El punto central que aporta el promedio es ***C'*** y a éste le corresponden sólo los puntos de ***C'*A** que son $\pi/3$, el método del promedio indica que para obtener los casos favorables se realice el producto de los puntos del arco (que son $2\pi/3$) y los puntos del componente central, en este caso, $\pi/3$. Al hacerlo se obtiene el resultado: $(2\pi/3) \times (\pi/3)= 2\pi^2/9$.

La suma de los casos favorables en los tres arcos da un resultado total de: $2\pi^2/3+4\pi^2/9+2\pi^2/9= 12\pi^2/9= 4\pi^2/3$. Sólo resta hacer el cociente entre estos casos y los totales que son, como se mostró en la solución uno, $2\pi^2$. Por lo tanto, la probabilidad deseada es la siguiente: $(4\pi^2/3)/ 2\pi^2= 2/3$. *¡¡Justo el complemento de 1/3!!*

He realizado lo análogo con las otras dos soluciones encontrando también el feliz resultado, e invito cordialmente a los lectores a efectuarlo por sí mismos.

Si todavía alguien exigiera mayor evidencia: el 'promedio' puede también ser utilizado con éxito para resolver el problema planteado por Bertrand, pero sustituyendo el triángulo equilátero por un triangulo isósceles. De hecho, es posible resolver el problema de Bertrand introduciendo un cuadrado inscrito en lugar de un triángulo inscrito. En todos estos casos los resultados encontrados por medio de las técnicas expuestas son consistentes, no conducen a ninguna contradicción ni tienen consecuencias paradójicas.

APÉNDICE B

ALGUNAS PROBABLES OBJECIONES

"Señor, haz que cuando nos equivoquemos estemos dispuestos a rectificar, y que cuando tengamos la razón, no seamos insoportables."

Peter Marshall.

Cuando alguien ha invertido tiempo y esfuerzo en efectuar cierta investigación, la actitud hacia las críticas o dudas sobre la validez de los resultados presentados tiende a coincidir con la que expresó el escritor alemán Johann Wolfgang von Goethe cuando dijo: "Benefíciennme con sus convicciones, si es que las tienen; pero guárdense sus dudas, pues me bastan las mías."[28] Sin embargo, cualquiera que haya llegado a un resultado correcto puede dar la bienvenida a las pruebas y exámenes a los que tenga que someterse dicho resultado, pues de ese modo verifica su validez y, con frecuencia, profundiza su entendimiento de las cuestiones y consecuencias implicadas por el fruto de su trabajo. Las críticas y objeciones pueden ayudar a desechar ideas o conceptos erróneos y también pueden clarificar los que no lo son. Varios lectores pueden 'observar' aspectos dignos de atención que el propio escritor no percibe inicialmente. Por lo anterior, agradezco a todos aquellos que no se 'guardaron sus dudas' y que hicieron posible incluir este apéndice. A continuación aparecen las objeciones que he recibido y la respuesta a cada una de ellas.

---

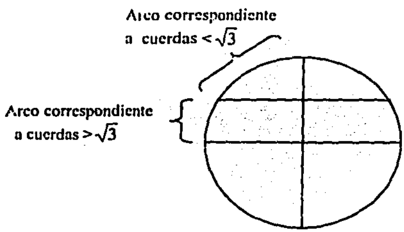
[28] Márquez, Francisco, *Frases célebres*, Edimat, España, 1999.

- ***Creo que el problema puede tener muchas interpretaciones[29], cada una de las cuales conduce a una respuesta única. Me parece que tú estás tomando <u>una</u> de esas interpretaciones y por eso dices que la respuesta es única.***

En realidad, he tomado la primera 'interpretación' de Bertrand y mostrado por qué no es correcta: porque la solución viola una de las hipótesis de las que parte. Después, usando la segunda 'interpretación' del problema de Bertrand, he indicado que, cuando se razona correctamente, se llega a la misma solución que la tercera. Posteriormente, he proporcionado otra forma ('una nueva interpretación') de resolver el problema que conduce a la misma solución en la que coinciden las otras dos. De ese modo, hay por lo menos 3 'interpretaciones *distintas*' que convergen en la solución presentada.

- ***Dependiendo de lo que se entienda por 'elegir al azar' se pueden encontrar soluciones igualmente defendibles. Por ejemplo, la respuesta que resulta en ½ se pueda encontrar trazando todas las cuerdas horizontales[30] y, por simetría, basta comparar los segmentos correspondientes sobre el radio vertical superior.***

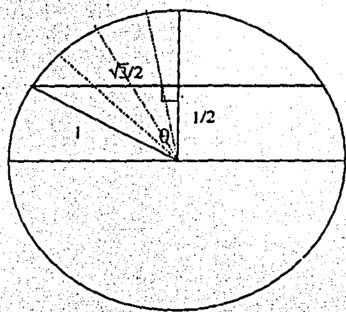
Como se ha explicado en el texto, lo que debe compararse en ese caso, no son los segmentos de recta del radio, sino los arcos de circunferencia indicados. Si se hace esto, la probabilidad resulta ser nuevamente 1/3.



---

[29] Se refiere específicamente a la frase "elegir al azar una cuerda".
[30] Las demás cuerdas se pueden trabajar en forma análoga haciendo una rotación del círculo. De esta forma se pretende eliminar el problema del punto central.

Si alguien insiste en que escoger los arcos de circunferencia indicados en vez de los segmentos rectilíneos es una decisión tomada arbitrariamente, se le invita a considerar la siguiente manera de comparar las cuerdas horizontales.



Al observar la figura se puede notar que, si se mide el ángulo θ a partir del radio vertical superior, cuando llegue a la posición indicada en la ilustración, tomará el valor de 60°, pues el seno de 60° (que se obtiene como resultado del cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa) vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Por consiguiente, a cada ángulo entre 0° y 60° le corresponde un punto sobre la semicircunferencia superior a partir del cual se puede trazar una cuerda menor que $\sqrt{3}$. En forma similar, se puede apreciar que si θ está entre 60° y 90°, el punto que θ determina sobre el arco de circunferencia constituye el extremo de una cuerda horizontal mayor que $\sqrt{3}$.

De lo anterior se puede deducir que otro modo de comparar las cuerdas horizontales es fijándose en los ángulos correspondientes. De esta forma, la probabilidad de que una cuerda horizontal aleatoria sea mayor en longitud a $\sqrt{3}$ es: (90°-60°)/ 90° = 30°/90° = ¡1/3!

Por otra parte, si la respuesta de ½ o cualquier otra respuesta es 'igualmente defendible' que la revelada en el trabajo, ¿no debería *defenderse igualmente*, es decir, mostrando que una comparación de ángulos, longitudes y áreas arrojan el mismo resultado, además de exhibir los errores de las otras soluciones? ¿Alguna de estas otras soluciones 'igualmente defendibles' permite trabajar consistentemente con el problema de Bertrand reemplazando el triángulo equilátero por uno isósceles o por un cuadrado? Asimismo, respecto de calcular independientemente el complemento de las probabilidades en todos estos problemas, ¿también funcionan consistentemente dichas soluciones?

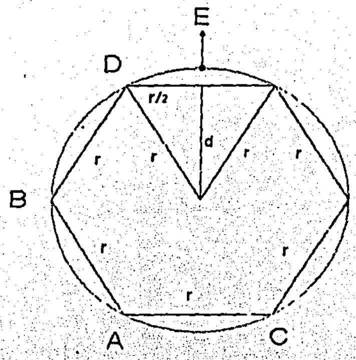
- ***Si realmente pueden emplearse las técnicas utilizadas para resolver otros problemas semejantes por qué no das otros ejemplos de resolución que sean consistentes.***

Un problema muy similar es el siguiente: si se elige una cuerda al azar en un círculo de radio r, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud de dicha cuerda exceda al radio r?

Este problema es mencionado por Frederick Mosteller en su libro *Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions*, en el que se incluyen las siguientes soluciones:

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{3}$

Si se aplica el mismo método de resolución utilizado en esta tesis, la última solución resulta ser la correcta. La explicación que da Mosteller de esta solución es ésta: "Asuma que la cuerda está determinada por dos puntos elegidos de tal manera que sus posiciones están independiente y uniformemente distribuidas sobre la circunferencia del círculo original. Suponga que el primer punto coincide con el punto *A* de la figura. Entonces para que la cuerda sea más corta que el radio, el segundo punto debe caer sobre el arco *BAC*, cuya longitud es 1/3 de la circunferencia. Consecuentemente, la probabilidad de que la cuerda sea más larga que el radio es 1-1/3= 2/3."



Otra forma de obtener dicha probabilidad es situándose en la semicircunferencia superior y comparando los arcos DB con ED, los cuales miden $\pi/3$ y $\pi/2$ respectivamente. Por consiguiente, la probabilidad requerida es: $(\pi/3) / (\pi/2)=2/3$. Lo mismo se obtiene si se compara el ángulo favorable que va de D a B a partir del centro (el cual mide 90°-30° =60°) con el ángulo total de 90°.

- ***En el problema [31] estás suponiendo que los naturales están bien acomodados (I.e. 1, 2, 3, 4, 5,...), pero qué pasa si vaciamos los naturales en una bolsa ¿cómo calcularías ahora la probabilidad de obtener un número par?***

Si se ha calculado correctamente la probabilidad buscada 'suponiendo que los naturales están bien acomodados', ¿acaso debería *modificarse* la probabilidad cuando se 'acomodan' de otra forma? Si existe un cambio en la probabilidad, hay tres opciones:

1. Que se altere la cantidad de casos totales
2. Que se altere la cantidad de casos favorables, y
3. Que se alteren ambas cantidades.

[31] Se refiere al problema de calcular la probabilidad de que, al elegir al azar un número natural, el número elegido sea par. Se considera, por supuesto, que cada par tiene iguales posibilidades de ser elegido.

Es evidente que la cantidad de casos totales (los naturales) es la misma, sin importar la forma de 'acomodarlos'. Por consiguiente, quedan descartadas las opciones 1 y 3. ¿Se modifica la cantidad de casos favorables al ordenar los pares de otra manera? En caso de ser así, la probabilidad aumenta o disminuye. Si aumenta, eso querría decir que *hay más casos favorables* que los considerados en el cálculo ya realizado. ¡Pero en dicho cálculo se consideraron todos los pares! ¿Cómo podría haber *más* pares *que todos* los pares?

También conduce a una inconsistencia la afirmación de que la probabilidad disminuye, pues eso indicaría que cuando están 'bien acomodados' hay *más* pares que cuando están en desorden'. ¿Es razonable suponer que 'desaparecen' algunos pares sólo por acomodarlos en una forma no consecutiva?

Por lo tanto, una vez que se calcula la probabilidad de que un número natural escogido al azar resulte ser par 'suponiendo que los naturales están bien acomodados', no se requiere buscar *otra forma* de calcularla, porque la probabilidad resultante no se altera sólo por cambiar de orden los elementos involucrados.

- ***Hablar de la probabilidad de un punto elegido al azar en un segmento de línea o dentro de alguna superficie es un error conceptual, puesto que si cada punto tiene asignada una probabilidad p>0, entonces como existen una infinidad de puntos en la línea (o región de superficie) la suma de las probabilidades de una cantidad finita de puntos puede rebasar cualquier número natural, particularmente rebasa el número 1, que es la probabilidad del evento seguro.***

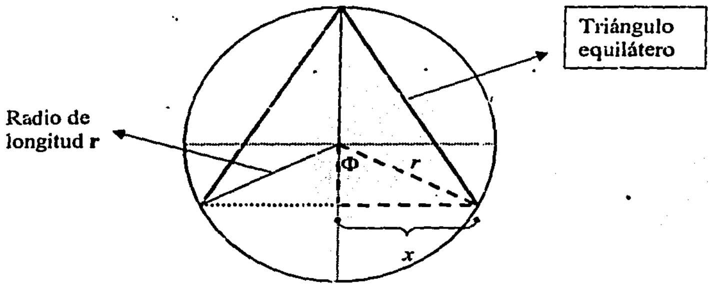
Como se señaló en el trabajo, la probabilidad geométrica en general supone que cada segmento de línea (recta o curva), sección de superficie o fragmento de volumen que puede superponerse o hacerse coincidir con otro, tiene la misma probabilidad que el otro. Se toma el conjunto de puntos en una línea, plano, espacio, etc., como una clase cuya medida corresponde a la longitud en el caso de líneas, al área si son superficies o al volumen si se tratan de cuerpos tridimensionales. De modo que la forma usual de calcular probabilidades en la probabilidad geométrica[32] es tomar los puntos por 'bloques': segmentos de línea, secciones de área, etc. Como estos bloques son una parte de la región total, la razón entre el bloque y el conjunto total se encuentra siempre entre 0 y 1.

Puesto que en la región total cabe un número finito de bloques, se evita el problema de tener una infinidad de probabilidades. Cuando se trata de un número finito de puntos o una cantidad cuya longitud, área o medida en general es cero, se toma la probabilidad como cero y entonces se dice que 'el que un evento tenga probabilidad cero no significa necesariamente que el evento sea imposible.'

[32] Para una explicación más amplia y precisa de esto puede consultarse Reichenbach H., *The Theory of Probability* , University of California Press, EE.UU., 1949.

APÉNDICE C

1. Cada lado de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia mide $r * \sqrt{3}$, donde r es el radio de la circunferencia.



El ángulo Φ mide 60°, por ser la mitad del ángulo central de 120°. Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo se pueden consultar la tablas construidas con ese propósito o utilizar ciertas fórmulas, pero la manera más sencilla y rápida es presionando las teclas apropiadas en una calculadora. El seno de 60° tiene un valor de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo que podemos señalar que sen $60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{r} = \frac{cateto..opuesto}{hipótenusa}$. Al despejar x de la expresión anterior se obtiene $x = r * \frac{\sqrt{3}}{2}$, de donde $2x = r * \sqrt{3}$; pero $2x$ es precisamente lo que mide un lado del triángulo equilátero inscrito.

2. Considérese un polígono regular unitario de n lados. Se toma al azar una de las rectas que parten de un vértice fijo A_1, ¿Cuál es la probabilidad de que dicha recta mida más que la unidad?

Sea A_1 un vértice fijo de un polígono regular de n lados, cada uno de los cuales mide 1. El punto A_1 forma una línea cuando es unido con cada uno de los vértices del polígono, excepto consigo mismo. Por lo tanto, hay n-1 líneas que parten de A_1. ¿Cuántas de estas líneas miden en longitud más que la unidad? Puesto que cada lado del polígono mide 1, al unir con A_1 los 2 vértices más inmediatos A_2 y A_n (el que se halla avanzando en el sentido de las manecillas del reloj y el que está en sentido contrario) obtenemos dos lados del polígono regular, es decir, dos líneas de longitud 1. De hecho, éstas son las únicas líneas de longitud unitaria. Todas las otras rectas unen vértices no consecutivos del polígono regular, por lo que miden más que la unidad. Así, la cantidad de líneas cuya longitud excede a 1 es el total de las líneas que parten de A_1 menos 2, esto es, (n-1)- 2= n-3. Por consiguiente, la probabilidad que se pide es: $p = \frac{n-3}{n-1}$.

3. Si en un n-ágono regular unimos cada vértice con todos los demás por medio de líneas rectas, ¿cuál es la probabilidad de que al elegir una recta al azar ésta sea de longitud mayor que 1?

El total de rectas consideradas incluye los n lados del polígono y sus diagonales (las líneas que unen vértices no consecutivos). Se puede iniciar el conteo a partir de cualquier vértice del polígono. Sea A_1 un vértice arbitrario, este punto forma rectas al unirse con todos los (n-1) vértices restantes de la figura. Por consiguiente, hay n-1 rectas que tienen como extremo al punto A_1. Ahora, se toma el siguiente punto A_2 en sentido contrario a las manecillas del reloj (el sentido no altera el resultado). La línea que une A_2 con A_1 ya fue incluida en el conteo de las n-1 líneas que parten de A_1, por lo que sólo restan n-2. Así que, a A_2 le corresponden n-2 rectas distintas que debemos sumar a las anteriores de A_1 y análogamente A_3 tiene n-3 ,..., A_{n-1} tiene n-(n-1)=1 y A_n tiene 0 (ya todas fueron incluidas en los otros vértices).

En resumen, la cantidad de líneas que corresponde a cada punto A se puede expresar en la tabla siguiente:

Punto	Líneas
1	n-1
2	n-2
3	n-3
4	n-4
.	.
.	.
.	.
n-2	n-(n-2)=2
n-1	n-(n-1)=1
n	n-n = 0

La cantidad total de líneas se obtiene al sumar: (n-1)+ (n-2)+ (n-3) + . . . + 2+1+0. Esto es lo mismo que: $0+1+2+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{2}(n-1)[(n-1)+1] = \frac{1}{2}(n-1)n$.

Por otra parte, como todas las líneas involucradas tienen longitud mayor que 1 con excepción de los lados del *n-ágono*, el número de casos favorables es el total menos el número de lados del polígono, es decir, $\frac{1}{2}(n-1)n - n$. Por lo tanto, la probabilidad que se pide es: $p = \frac{\frac{1}{2}(n-1)n-n}{\frac{1}{2}(n-1)n} = \frac{\frac{n}{2}[(n-1)-2]}{\frac{1}{2}(n-1)n} = \frac{\frac{n}{2}(n-3)}{\frac{1}{2}(n-1)n} = \frac{\frac{n}{2}(n-3)}{\frac{n}{2}(n-1)} = \frac{(n-3)}{(n-1)}$.

BIBLIOGRAFÍA

1. Arley, Niels, *Introduction to the Theory of Probability and Statistics*, John Wiley, Nueva York, 1950.

2. Arley, Niels y Rander Buch, *Introducción a la teoría de la probabilidad y de la estadística*, Versión española de Fernando Bombal G., Alhambra, Madrid, 1968.

3. Bertrand, Joseph, *Calcul des probabilités*,Gauthier-Villar, Paris, 1889.

4. Blom, Gunnar, *Probability and Statistics Theory and Applications*, Springer, Nueva York, 1989.

5. Borovcnik, Manfred y Ramesh Kapadia, *Chance encounters: Probability in Education*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1991.

6. Brémaud, Pierre, *An introduction to Probabilistic Modeling*, Springer, Nueva York, 1988.

7. Chung, Kai Lai ,*Teoría elemental de la probabilidad y los procesos estocásticos*, (Versión española por Luis Bou García),Reverté, Barcelona, 1983.

8. DeGroot, Morris H., *Probabilidad y estadística*, Addison-Wesley Iberoamericana, Segunda Edición, México, 1988.

9. Gnedenko, Boris Vladimirovich , *The Theory of Probability / Traducido del ruso por B.D. Seckler.*, Chelsea Publishing Company, N.Y., 1962.

10. Gnedenko, Boris Vladimirovich ,*The Theory of Probability / Traducido del ruso por George Yankovsky*, Mir Publishers, Moscow, 1969.

11. Grimmett, Geoffrey R. y David Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Oxford, Clarendon, Tercera Edición, 2001.

12. Hamming ,Richard Wesley, *The art of Probability for Scientists and Engineers*, Addison Wesley, Redwood City, California, 1991.

13. Harris, Bernard, *Theory of* Probability, Addisson-Wesley, 1966.

14. Holbrook, John y Kim, Sung Soo, Bertrand's paradox revisited, *The Mathematical Intelligencer* ,Vol. 22,núm.4,págs.16-19,2000.

15. Isaac, Richard, *The Pleasures of Probability*, Springer, New York, 1995.

16. Jurgin, Y., *¿Qué son las matemáticas?*, Ediciones de Cultura Popular, México, 1977.

17. Kaufmann, Arnold, *Curso moderno de cálculo de probabilidades*, Traducido por Enrique Chueca, Urmo, Bilbao, 1977.

18. Kyburg, Henry Ely (Jr.), *Probability Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.

19. Levy, Hyman y Leonard Roth, *Elements of Probability*, Oxford, Clarendon, 1936.

20. Maistrov, Leonio Efimovich, *Probability Theory: A Historical Sketch*, Traducción y edición de Samuel Kotz, Academia, New York, 1974.

21. Mises, Richard Von, *Probability, Statistics and Truth*, Dover Publications, Nueva York, 1981.

22. Mosteller, Frederick,*Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions*, Dover. New York, 1987.

23. Papoulis, Athanasios, *Probability Random Variables, And Stochastic Processes*, McGraw-Hill Publishing Company, 2a edición, New York, 1984.

24. Parzen, Emanuel, *Modern Probability Theory and its Applications*, John Wiley and sons, New York, 1960.

25. Parzen, Emanuel, *Teoría moderna de probabilidades y sus aplicaciones*, Limusa-Wiley, México, 1971.

26. Ross, Sheldon M., *A First Course in Probability*, Prentice-Hall, 5a edición, Nueva York, 1998.

27. Stirzaker, David, *Probability and Random Variables: A Beginner's Guide* Cambridge University, Nueva York, 1999 (Reimpreso 2001).

28. Székely, Gabor J., *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, Traducción por marta Alpar y Eva Unger, D. Reidor, Dordrecht, 1986.

29. Uspensky, James Victor, *Introduction to Mathematical Probability*, McGraw-Hill, Nueva York, 1937.

30. Wadsworth, George P. y Joseph G. Bryan, *Aplicaciones de la teoría de probabilidades y variables aleatorias*, Versión española de A. López Lago, Alhambra, Madrid, 1979.

31. Weaver, Warren , *Lady Luck, The Theory of Probability*, Double Day, Garden City, 1963.

32. Wells, David, *El curioso mundo de las matemáticas*, Gedisa, Barcelona, 2000.

33. Wisniewski, Piotr M., *Ejercicios y problemas de teoría de las probabilidades*, Trillas, México, 1998.