003843

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

JUEGOS TOPOLÓGICOS Y ULTRAFILTROS

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA

RICARDO ARMANDO GONZÁLEZ SILVA

DIRECTOR DE TESIS: DR. SALVADOR GARCÍA FERREIRA

MÉXICO D.F. NOV. 2003

A

JUEGOS TOPOLÓGICOS Y ULTRAFILTROS

B

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todas las personas que me apoyaron en esta etapa de mi vida, cada una de una forma u otra fueron indispensables para la culminación de este trabajo.

Agradezco todo el apoyo que tuve de mi familia, su constante esfuerzo por brindarme sus grandes pensamientos, sentimientos y apoyo económico. A todos ellos gracias por mantener siempre la confianza y fe en mi, necesaria para continuar con mis sueños.

A Rafa agradezco su amistad, su paciencia y sus prestamos económicos. Su paciencia es todo un arte, recuerdo todas esas veces en que se limitaba a escuchar todas mis locuras y excentricidades, este chato, si que hacia que me inspirara para seguir inventando. Gracias amigo Rafa.

Un agradecimiento muy especial a mi amigo Luis Valero, junto con Beatriz Zamora A., Miguel Santoyo M., Santos Hdz. Hdz. y Rosi Cardiel, buenos amigos para la vida y la ciencia. De manera muy excepcional, agradezco a mi amigo Michael Hrŭsák, por sus pláticas tan influyentes, que no solamente me mostró como hace un artista ciencia, sino que me enseñó lo que es trabajar en equipo.

Un agradecimiento colosal para Mireya, Adriana y la Sra. Trini, personas llenas de buen espíritu, quienes con su gran cariño y entusiasmo por la vida, impregnan de buen sentimiento la atmósfera de trabajo. A Norma, le estoy agradecido infinitamente, por compartir y hacer de la locura, fantasía y armonía un pan de cada día.

A mi asesor-amigo Dr. Salvador García Ferreira agradezco su paciencia y apoyo, por hacer que en mis pesquisas, yo mismo encontrara mis habilidades, por hacer que este tiempo se mantuviera un ambiente estimulante de trabajo. Admito que no es fácil llevar la labor de asesor y mucho menos en mi caso. Muchas gracias.

Gracias amigos y amigas. Es para mi un honor tener su amistad.

A los sinodales, por tener la paciencia de leer este trabajo y sus valiosos comentarios, que hicieron que mejorara notablemente; Gracias.

A todo el personal del Instituto de Matemáticas de la UNAM campus Morelia, les estoy muy agradecido, la calidad y calides de cada persona hizo que en esta estancia de mi vida, configurara grandes ideas y sentimientos.

Prefacio

> Las ideas pueden volverse mas complejas cuando
> intentan abarcar un mayor número de situaciones.
> Luego se vuelven a simplificar cuando se
> descubre algún principio subyacente.
> Esa ha sido la historia de la ciencia.

El punto central de este trabajo es el estudio del $\mathcal{G}_p$-juego. Este juego esta definido para cada ultrafiltro libre p de ω. Se estudio su relación con el W-juego de G. Gruehage [Gru] y el $\mathcal{G}$-juego de A. Bouziad [Bo], además con algunos conceptos y operaciones de topología general, con los cuales presenta correlaciones importantes. Los resultados de este trabajo, están muy relacionados con los espacios numerablemente compactos, los ultrafiltros, construcciones infinitas y combinatoria infinita.

El trabajo inicia con una ligera introducción al espacio $\beta\omega$ y la nomenclatura de los juegos mencionados, con esto sólo pretendemos hacer que el trabajo sea autocontenido en buena mediada.

En el segundo capítulo, se enfoca a clasificar los $\mathcal{G}_p$-juegos, usando algunas de las relaciones entre los ultrafiltros y luego a clasificar los ultrafiltros con los $\mathcal{G}_p$-juegos. Este inicia, precisando los vínculos del $\mathcal{G}_p$-juego con los juegos W y $\mathcal{G}$ y además con otros conceptos de topología general. En la siguiente sección, se estudio propiedades en los ultrafiltros, para que el jugador I del $\mathcal{G}_p$-juego tenga estrategia ganadora en algunos subespacios de $\beta(\omega)$ determinados por el RF-orden o el RK-orden. En este proceso, construimos para cada $p \in \omega^*$, el espacio $\Omega(p)$, el cual fue utilizado, para la demostración del teorema que muestra las condiciones en los ultrafiltros p y q, para que se pueda trasladar la estrategia ganadora del jugador I en el $\mathcal{G}_p$-juego al jugador I del $\mathcal{G}_q$-juego. Este es uno de los resultados principales, el otro, es la caracterización de los ultrafiltos que son *Q-punto* usando los $\mathcal{G}_p$-juegos; el cual se prueba usando el resultado anterior junto con uno resultado de [HST]. Finalmente, el capítulo concluye una serie de resultados referentes al espacio $\Omega(p)$.

En el capítulo tres se estudio el proceder de los juegos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}_p$ en el producto de una familia de espacios. Se exponen las implicaciones mas sustanciales al hecho de que jugador I o el jugador II tenga estrategia ganadora en el producto de una familia de espacios (infinita o finita) en estos juegos. Además, se estudian los recíprocos de estos resultados. Primeramente trabajamos con una familia infinita de espacios y luego con familias finitas. Esencialmente, lo que se logra en la primera sección es dar la condiciones necesarias para que el jugador I del $\mathcal{G}$-juego (o el $\mathcal{G}_p$-juego) tenga una estrategia ganadora en el producto de una familia no numerable de espacios, así como las potencias arbitrarias de un espacio fijo. La sección dos, puede visualizarse en tres partes. En la primera, se construyen espacios numerablemente compactos cuyos productos no son $\mathcal{G}$-espacio, en está, generalizamos el resultado de Novák y Terasaka de [Va, Lema 3.1], con el

Teorema 3.2.7. Existe un espacio X numerablemente compacto, tal que $II \uparrow \mathcal{G}(X \times X)$.

Con este resultado, abrimos una serie de preguntas abiertas, las cuales se encuentran al final de capítulo. En la segunda parte, las hipótesis de los resultados son delimitadas por los $\mathcal{G}_p$-juegos, aquí se muestran espacios X y Y en los cuales $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$ y $I \uparrow \mathcal{G}_q(Y)$, pero que no siempre es posible $I \uparrow \mathcal{G}(X \times Y)$, esto depende mucho de como estén relacionados los ultrafiltros p y q. Los resultados de la tercera parte, muestran las condiciones necesarias para que $I \uparrow \mathcal{G}(X \times Y)$ donde X y Y son subespacios específicos de $\beta(\omega)$.

En el último capítulo, mostramos la indeterminación del $\mathcal{G}_p$-juego, asimismo, mostramos que es consistente que los juegos citados en la obra, son indeterminados. En la primera sección, usamos el concepto de árbol, para dar una caracterización del hecho de que el jugador II del $\mathcal{G}_p$-juego (o W o $\mathcal{G}$ juego), tenga una estrategia ganadora (es muy probable que este ya sea conocido). Con esta caracterización y un lema a cerca de los árboles en $(\omega^*)^{<\omega}$, con ciertas propiedades, mostramos que para cada $p \in \omega^*$ existe un espacio en el cual el $\mathcal{G}_p$-juego es indeterminante. Las sección finaliza con la construcción de un espacio numerablemente compacto$X$ tal que $II \uparrow \mathcal{G}_p(x, X)$, para todo $x \in X$ y $p \in \omega^*$. La prueba de la indeterminación de los juegos W, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}_p$ esta en la sección siguiente, para esta, usamos un resultado análogo a la caracterización de estrategia ganadora de II con árboles y una caracterización topológica de la estrategia ganadora del jugador I en un espacio numerable, regular y primero numerable. Cabe mencionar que esta prueba esencialmente fue hecha por P. Nyikos en [Ni]. El capítulo termina con un par de resultados, los cuales muestran que $\mathfrak{c}$ es la mínima cardinalidad de un espacio $X \subseteq \omega^*$ no discreto tal que $I \uparrow \mathcal{G}(X)$.

El material que se presenta en esta tesis, fue realizado en colaboración conjunta con el Dr. Salvador García Ferreira (capítulo 2 y 3) y el Dr. Michael Hrušák (capítulo 4), en la bibliografía podemos encontrar los artículos que estan en colaboración conjunta.

En el proceso de desarrollo de una idea, ésta puede empezar siendo simple, complicarse después y volverse a simplificar. Si se excluye la complejidad, puede que también se excluya el crecimiento.

CONTENIDO

Notación y Convenciones

En las siguientes lineas, enunciamos algunos de los términos y conceptos más usados en este trabajo, con el fin de evitar confusiones y lograr que este trabajo sea lo mas autocontenido posible. En la parte final, se encuentra un indice de los símbolos con su definición o su referencia de pagina.

Al conjunto de los números naturales, 0, 1, 2, ... lo denotamos como ω, este símbolo también lo usamos para representar al primer número ordinal infinito, en este contexto queda claro que escribir $n < \omega$ y $n \in \omega$ representa lo mismo. Para denotar números ordinales lo haremos con las letras α, β, γ, μ y ν y para cardinales con κ y λ. El primer ordinal no numerable es denotado por ω_1 y el cardianal del continuo, 2^ω, es denotado por $\mathfrak{c}$.

Todos los espacios que consideraremos en este trabajo serán Tychonoff (i.e. Hausdorff y completamente regular), salvo que se indique de manera específica sus propiedades. Una sucesión en un espacio X, es denotada como $(x_n)_{n<\omega}$ o como una función $f : \omega \to X$. Para denotar que $\lim x_n = x$, usualmente escribiremos como $x_n \to x$.

Al conjunto de vecindades de un punto x en un espacio X lo denotaremos por $\mathcal{N}(x)$. Si A es un subconjunto de X, y $x \in X$, decimos que x es *punto de acumulación* de A, si para cada $V \in \mathcal{N}(x)$, $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Un espacio se dice que es *numerablemente compacto* si todo subconjunto infinito tiene punto de acumulación. Si un espacio cumple que para todo subconjunto A de X y $x \in \overline{A}$, existe una suceción $(x_n)_{n<\omega}$ en A tal que $x_n \to x$ entonces es llamado un espacio de *Fréchet*. Si pasa que para cada punto $x \in X$, y cada sucesión $(A_n)_{n<\omega}$ de subconjuntos de X con $x \in \overline{A_n}$ para cada $n < \omega$, existe una sucesión $(x_n)_{n<\omega}$ tal que $x_n \in A_n$ y $x_n \to x$, entonces se dice que X es un espacio *estrictamente Fréchet*. Un espacio X se le llama *sequencial* si sucede que para todo subconjunto A de X no cerrado, existe una sucesion $(x_n)_{n<\omega} \subseteq A$ y un punto $x \in X \setminus A$, tal que $x_n \to x$. Cuando en un espacio sucede que la cerradura de todo subconjunto abierto es abierta, entonces es llamado espacio *extremadamente disconexo*. Si ocurre que en cada punto del espacio, la intersección de cualquier conjunto numerable de vecindades, es vecindad del punto, entonces se dice que es un *P-espacio*.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se establecerán las notaciones y convenciones de la tesis. Usaremos principalmente las que se encuentran en los libros [CN], [HS], [KV] y [Wa].

Los objetivos del capítulo son dos: El primero, es dar una breve introducción a la Compactificación de Stone-Čech de ω y el segundo, introducir los conceptos y terminología del $\mathcal{W}$-juego y del $\mathcal{G}$-juego.

Las secciones están escritas de manera muy resumida, sólo se enuncian definiciones y resultados, cuyas demostraciones se pueden encontrar en la bibliografía citada. En la primera sección introducimos el concepto de ultrafiltro (en ω) y enunciamos algunos de sus resultados más generales; esta sección es complementada posteriormente. La sección siguiente está compuesta de dos partes; en la primera de ellas enunciamos algunas de las propiedades topológicas de $\beta(\omega)$ y ω^*, que se derivan de propiedades combinatoriales de ω, así como también algunas propiedades de la extensión de funciones definidas en ω. En la segunda parte de esta sección, definimos los (pre-)ordenes de Rudin-Frolík, Rudin-Keisler y Comfort, enunciamos varias de sus propiedades, además de otros resultados relacionados con las funciones extendidas, también introducimos los conceptos de p-límite y de p-compacidad.

La última sección es referente a los juegos citados; sólo contiene definiciones y algunas observaciones. El objetivo de ésta es introducir la notación que será usada en los siguientes capítulos.

1.1 Resultados básicos en ultrafiltros

Aunque es posible hablar de el concepto de filtro y ultrafiltro de manera muy general, nosotros solo hablaremos de estos conceptos en ω, ya que para los fines de este trabajo, no es necesario mencionar mayores generalizaciones.

Definición 1.1.1. (a). *Un filtro $\mathcal{F}$ en ω es un subconjunto de $\mathcal{P}(\omega)$ tal que*

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$ *y* $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- $F \cap F' \in \mathcal{F}$, *para todo* $F, F' \in \mathcal{F}$; *y*
- *Si* $F \subseteq F' \subset \omega$ *y* $F \in \mathcal{F}$, *entonces* $F' \in \mathcal{F}$.

(b). *Un subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(\omega)$ es base de filtro si*

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{B}$; *y*
- *Para toda subfamilia finita $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$, existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq \bigcap \mathcal{A}$.*

(c). *Un filtro $\mathcal{F}$ en ω es llamado ultrafiltro si:*

- $\mathcal{F}$ *es un filtro en* ω, *y*
- $\mathcal{F}$ *no esta propiamente contenido en otro filtro de* ω.

El conjunto $\mathcal{F}r = \{A \subseteq \omega : |\omega \setminus A| < \aleph_0\}$ es un filtro, el cual es llamado el filtro de Fréchet.

Lema 1.1.2. *Sean $\mathcal{F}$ un filtro en ω y $A \subseteq \omega$. Entonces uno de los siguientes enunciados es cierto.*

(1). *Existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap B = \emptyset$.*

(2). $\{A \cap B : B \in \mathcal{F}\}$ *es base de filtro.*

Se dice que un conjunto $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita, si $\bigcap F \neq \emptyset$, para cada subconjunto finito F de $\mathcal{A}$.

Teorema 1.1.3. *Si $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\omega)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

(1). *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en ω.*

(2). *$\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita y para cada $A \in \mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap B = \emptyset$.*

(3). *$\mathcal{F}$ es maximal con respecto a la propiedad de la intersección finita*

(4). *$\mathcal{F}$ es un filtro en ω y para todo $F \in [\mathcal{P}(\omega)]^{<\omega}$, si $\bigcup F \in \mathcal{F}$, entonces $F \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

(5). *$\mathcal{F}$ es filtro en ω y para todo $A \subseteq \omega$ se tiene que $A \in \mathcal{F}$ o $\omega \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Notemos que para cada $n \in \omega$, el conjunto $\{A \subseteq \omega : n \in A\}$ es un ultrafiltro en ω. A un ultrafiltro de este tipo se le llama ultrafiltro principal. A un ultrafiltro que no es principal, se le llama ultrafiltro libre.

Teorema 1.1.4. *Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en ω. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1). *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro principal.*

(2). *Existe $F \in [\omega]^{<\omega}$ tal que $F \in \mathcal{F}$.*

(3). *$\mathcal{F}r \not\subseteq \mathcal{F}$.*

(4). *$\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

(5). *Existe $n \in \omega$ tal que $\bigcap \mathcal{F} = \{n\}$.*

Los únicos ultrafiltros a los cuales se les pueden definir explícitamente todos sus elementos son los ultrafiltros principales. Por el Teorema 1.1.4.(3), obtenemos que si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro no principal en ω, entonces $\mathcal{F}$ contiene el filtro de Fréchet. Por lo tanto, si el filtro de Fréchet puede ser extendido a un ultrafiltro, entonces concluimos que existen los ultrafiltros no principales. Por ello es que trabajaremos en **ZFC**, ya que el Axioma de Elección nos permite obtener una gran cantidad de ultrafiltros libres. [1]

[1] Existen modelos axiomáticos en los cuales no hay ultrafiltros libres en ω.

Teorema 1.1.5 (ZFC). (Tarski) *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en ω, entonces existe un ultrafiltro p en ω tal que $\mathcal{F} \subseteq p$.*

Corolario 1.1.6. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ filtros en ω tales que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ y $\mathcal{F} \neq \mathcal{H}$. Entonces existe un ultrafiltro p en ω tal que*

$$\mathcal{F} \subset p \quad \text{y} \quad \mathcal{H} \not\subset p.$$

En este trabajo, los filtros los denotaremos por letras como $\mathcal{F}, \mathcal{H}, \ldots$ y los ultrafiltros como $p, q, r, \ldots$

1.2 El espacio topológico $\beta(\omega)$

Existen diferentes formas de construir la compatificación Stone-Čech de un espacio topológico. En el caso de que el espacio sea discreto, su compactificación de Stone-Čech puede ser vista como el conjunto de ultrafiltros sobre el espacio. En este trabajo, tomaremos este enfoque en el espacio discreto ω. Esta sección exhibe algunos resultados de la compactificación de Stone-Čech de ω (denotada por $\beta(\omega)$) y de su residuo $\omega^* = \beta(\omega) \setminus \omega$. Finalizamos con un teorema (el cual usaremos frecuentemente) que enuncia varias propiedades de la extensión de una función de ω a $\beta(\omega)$.

Definición 1.2.1. (a). $\beta(\omega) = \{p : p \text{ es un ultrafiltro en } \omega\}$.

(b). *Para $A \subseteq \omega$, $\hat{A} = \{p \in \beta(\omega) : A \in p\}$.*

Lema 1.2.2. *Sean $A, B \subseteq \omega$. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:*

(1). $\widehat{(A \cap B)} = \hat{A} \cap \hat{B}$.

(2). $\widehat{(A \cup B)} = \hat{A} \cup \hat{B}$.

(3). $\widehat{(\omega \setminus A)} = \beta(\omega) \setminus \hat{A}$.

(4). $\hat{A} = \emptyset$ *si y solo si* $A = \emptyset$.

(5). $\hat{A} = \beta(\omega)$ *si y solo si* $A = \omega$.

(6). $\hat{A} = \hat{B}$ *si y solo si* $A = B$.

Por el inciso (1), los conjuntos de la forma $\hat{A}$ son cerrados bajo intersecciones finitas. Por lo tanto $\{\hat{A} : A \subset \omega\}$ forma una base para una topología en $\beta(\omega)$. Esta es la topología que le daremos al conjunto $\beta(\omega)$.

Para cada $n \in \omega$, el ultrafiltro $\{A \subseteq \omega : n \in A\}$ que pertenece a $\beta(\omega)$, lo identificaremos con n. Así, ω se ve como un subespacio de $\beta(\omega)$.

Teorema 1.2.3. (1). *El espacio* $\beta(\omega)$ *es compacto.*

(2). *Los conjuntos de la forma* $\hat{A}$ *son los conjuntos cerrado-abiertos de* $\beta(\omega)$.

(3). *Para todo* $A \subset \omega$, $\hat{A} = \overline{A}^{\beta(\omega)}$.

(4). *Para todo* $A \subset \omega$ *y todo* $n \in \omega$, $p \in \overline{A}^{\beta(\omega)}$ *si y solo si* $A \in p$.

(5). *El subconjunto* ω *de* $\beta(\omega)$, *es denso. Este esta formado por todos los puntos aislados de* $\beta(\omega)$.

(6). *Si* U *es un conjunto abierto de* $\beta(\omega)$, *entonces también* $\overline{U}^{\beta(\omega)}$ *lo es.*

Teorema 1.2.4. *El espacio* $\beta(\omega)$ *es la compactificación de Stone-Čech de* ω. *Es decir,* ω *es un subespacio denso de* $\beta(\omega)$ *y ademas para cualquier espacio compacto* X *y una función continua de* $f : \omega \to X$, *existe una única extención de* $\beta(\omega)$ *a* X.

Los siguientes resultados son un resumen de algunas propiedades topológicas de $\beta(\omega)$ y ω^*.

Teorema 1.2.5. (1). (B. Pospíšil). *La cardinalidad de* $\beta(\omega)$ *es* $2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

(2). (E. Čech). *La cardinalidad de cualquier conjunto cerrado e infinito de* $\beta(\omega)$ *es* $2^{\mathfrak{c}}$.

(3). *Todo subconjunto abierto no numerable de* $\beta(\omega)$, *tiene cardinalidad* $2^{\mathfrak{c}}$.

Proposición 1.2.6. *El espacio $\beta(\omega)$ es cero-dimensional (tiene una base de cerrado-abiertos) y, por tanto, es totalmente disconexo (los únicos subconjuntos conexos son los que tienen un solo punto).*

Teorema 1.2.7. (1). *Todo subconjunto cerrado-abierto de $\beta(\omega)$ es de la forma $\hat{A}$ para algún subconjunto A de ω.*

(2). *Todo subconjunto abierto de $\beta(\omega)$ que intersecta ω^* tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$.*

(3). (E. Čech). *El espacio ω^* es Hausdorff, compacto y sin puntos aislados.*

Definición 1.2.8. *Sea $A \subseteq \omega$. Entonces $A^* = \hat{A} \setminus A$.*

Teorema 1.2.9. *Sean $A, B \subseteq \omega$ infinitos. Entonces*

(1). *$B^* \subseteq A^*$ si y sólo si $B \setminus A$ es finito.*

(2). *$B^* = A^*$ si y sólo si $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ es finito.*

(3). *$B^* \cap A^* \neq \emptyset$ si y sólo si $A \cap B$ es infinito.*

(4). *$B^* \cap A^* = (B \cap A)^*$.*

(5). *$B^* \cup A^* = (B \cup A)^*$.*

Proposición 1.2.10. *Todo subconjunto cerrado-abierto de ω^* es de la forma A^* para algún $A \subseteq \omega$ infinito. El conjunto $\{A^* : A \in [\omega]^\omega\}$ es una base de ω^* que consiste de cerrados-abiertos.*

Proposición 1.2.11. *Si A^* y B^* son subconjuntos cerrado-abiertos propios de ω^* , entonces existe un automorfismo de $\beta(\omega)$, que manda A^* en B^*.*

Corolario 1.2.12. *La órbita de un punto de ω^* bajo homeomorfismos de $\beta(\omega)$, es un subconjunto denso de ω^*.*

Teorema 1.2.13. *La celularidad y el peso de ω^* es $\mathfrak{c}$.*

Teorema 1.2.14. *Para todo $A \in [\omega]^\omega$, A^* contiene una copia de ω^*.*

Teorema 1.2.15. (1). *Todo G_δ-subconjunto (intersección numerable de conjuntos abiertos) no vacío de ω^* tiene interior no vacío.*

(2). *Toda unión numerable de subconjuntos nunca densos de ω^* es nunca denso (A es nunca denso si $int(cl(A)) = \emptyset$).*

(3). *$\beta(\omega)$ es un espacio extremadamente disconexo (la cerradura de todo subconjunto abierto es abierto), pero ω^* no lo es.*

Si X un espacio Tychonoff y $f : \omega \to X$ es una función continua, su extension Stone-Čech es denotada como $\hat{f} : \beta(\omega) \to \beta(X)$. El Teorema siguiente enuncia algunas propiedades que tiene la extensión de una función con dominio ω y rango un subconjunto de $\beta(\omega)$. Cuando introduzcamos los ordenes en $\beta(\omega)$, veremos más de estas propiedades.

Teorema 1.2.16. *Sean $p \in \omega^*$, $f, g \in \omega^\omega$. Entonces*

(1). $\hat{f}(p) = \{A \subseteq \omega : f^{-1}[A] \in p\}$.

(2). (Frolík) $\hat{f}(p) = p$ *si y solo sí* $\{n < \omega : f(n) = n\} \in p$.

(3). (Frolík) *Si f no tiene puntos fijos, entonces $\hat{f} : \beta(\omega) \to \beta(\omega)$ tampoco tiene puntos fijos.*

(4). *Si además f es un encaje, $\hat{f}(p) = \hat{g}(p)$ si y sólo si $\{n < \omega : f(n) = g(n)\} \in p$.*

(5). *Si $h : \omega \to \omega^*$, entonces $\hat{h}(p) = \{A \subseteq \omega : \{n < \omega : A \in h(n)\} \in p\}$.*

1.2.1 Tres ordenes en $\beta(\omega)$

Los tres ordenes que se introducen en esta sección, han servido para clasificar ultrafiltros, entender parte de la estructura intrínseca de éstos y estudiar propiedades topológicas del espacio $\beta(\omega)$ y de sus subespacios. En esta breve introducción, sólo mencionamos algunas de las propiedades de estos ordenes, que estaremos usando constantemente. Por comodidad, escribiremos orden en lugar de pre-orden u orden parcial.

El Orden Rudin-Keisler en $\beta(\omega)$.

Definición 1.2.17. *Sean p y q ultrafiltros en ω .*

(a). *Decimos que $p \approx q$ si existe una permutación π en ω tal que $\hat{\pi}(p) = q$.*

(b). *(pre-orden Rudin-Keisler). $p \leq_{RK} q$ si existe $f \in \omega^\omega$ tal que $\hat{f}(q) = p$.*

Es fácil demostrar que la relación $\approx$ en $\beta(\omega)$ es una relación de equivalencia y que $\leq_{RK}$ es un pre-orden no anti-simétrico en $\beta(\omega)$. La clase de equivalencia de un elemento p de $\beta(\omega)$ la denotamos por $T(p)$ y le llamaremos el tipo de p. En general, si $S \subseteq \beta(\omega)$, el conjunto de todos lo tipos en S lo denotaremos por $T(S)$, es decir $T(S) = \{T(p) : p \in S\}$.

Teorema 1.2.18. *Para $p, q, r, s \in \beta(\omega)$ y $f \in \omega^\omega$, se cumplen las siguientes propiedades:*

(1). $p \leq_{RK} p$.

(2). *Si $p \leq_{RK} q$ y $q \leq_{RK} r$, entonces $p \leq_{RK} r$.*

(3). *Si $p \approx q$, $q \leq_{RK} r$ y $r \approx s$ entonces $p \leq_{RK} s$.*

(4). *$p \approx q$ si y solo sí $p \leq_{RK} q$ y $q \leq_{RK} p$.*

(5). *$\hat{f}(p) \approx p$ si y solo sí existe $A \in p$ tal que $f|_A$ es uno a uno.*

Observación 1.2.19. *Del Teorema anterior, deducimos que se puede definir de manera natural un orden parcial en $T(\beta(\omega))$, definiendo $T(p) \leq_{RK} T(q)$, si pasa que $p \leq_{RK} q$.*

Definición 1.2.20. *Sean $p, q \in \beta(\omega)$. Decimos que $p <_{RK} q$ si se cumple que $p \leq_{RK} q$ y $p \not\approx q$.*

Por simplicidad, escribiremos RK-minimal, RK-comparable y RK-incomparable en lugar de $\leq_{RK}$-minimal, $\leq_{RK}$-comparable y $\leq_{RK}$-incomparable, respectivamente.

Para $p \in \omega^*$ y $X \subseteq \omega^*$, definimos

(a). $T(p) = \{\hat{f}(p) : f \in Per(\omega)\}$.

(b). $S(p) = \{\hat{f}(p) : f \in \omega^{\nearrow\omega}\}$.

(c). $R(p) = \{\hat{f}(p) : f \in \omega^\omega$ *y* $\exists A \in p$ $(f|_A$ es estrictamente creciente$)\}$.

(d). $I(p) = \{\hat{f}(p) \in \omega^* : f \in \omega^\omega$ no decreciente$\}$.

(e). $P_{RK}(p) = \{q \in \omega^* : q \leq_{RK} p\}$.

(b). $S_{RK}(p) = \{q \in \omega^* : p <_{RK} q\}$.

(c). $P_{RK}(X) = \bigcup\{P_{RK}(q) \in \omega^* : q \in X\}$.

(d). $S_{RK}(X) = \bigcup\{S_{RK}(q) \in \omega^* : q \in X\}$.

Es evidente que, para cada $p \in \omega^*$, $S(p) \subseteq R(p) \subseteq T(p) \subseteq P_{RK}(p)$, $S(p) \subseteq R(p) \subseteq I(p) \subseteq P_{RK}(p)$ y también que $T(p) \cap I(p) = R(p)$. En [HST] se demuestra que $S(p) \neq T(p)$ y que $S(p) \neq I(p)$.

La cardinalidad de algunos de estos subconjuntos se estima en el siguiente Lema.

Lema 1.2.21. *Para cada $p \in \omega^*$, se tiene que*

(1). $|T(p)| = 2^\omega$.

(2). $|P_{RK}(p)| = 2^\omega$.

(3). $|\{q \in \beta(\omega) : p \leq_{RK} q\}| = 2^{2^\omega}$.

(4). $T(p)$ *es un conjunto denso en* $\beta(\omega)$.

Además $|T(\beta(\omega))| = 2^{2^\omega}$.

Definición 1.2.22. *Sea* $p \in \omega^*$.

(a). *Decimos que* p *es un* <u>*P-punto*</u> *si para cada partición* $\{I_n : n < \omega\}$ *de* ω *en conjuntos infinitos que no están en* p, *existe* $A \in p$ *tal que* $|A \cap I_n| < \aleph_0$ *para todo* $n \in \omega$.

(b). *Decimos que* p *es un* <u>*Q-punto*</u> *si para cada partición* $\{I_n : n < \omega\}$ *de* ω *en conjuntos finitos, existe* $A \in p$ *tal que* $|A \cap I_n| \leq 1$ *para todo* $n \in \omega$.

Definición 1.2.23. *Un punto* x *de un espacio* X *se dice que es* <u>*P-punto débil*</u> *si* $x \notin \overline{A}^X$ *para todo subconjunto numerable* $A \subset X \setminus \{x\}$.

W. Rudin probó que existen P-puntos en ω^* bajo **CH**, y S. Shelah dio un modelo en ZFC en el cual ω^* no tiene P-puntos.

Teorema 1.2.24. (Comfort-Negrepontis). *El conjunto* ω^* *es* $(2^\omega)^+$*-dirigido; es decir, para cada* $S \in [\omega^*]^{\leq 2^\omega}$ *existe un* $q \in \omega^*$ *tal que* $p <_{RK} q$ *para toda* $p \in S$.

Teorema 1.2.25. (A. Blass). $MA \models$ *Existe* $T \in [\omega^*]^{2^{\mathfrak{c}}}$ *tal que los elementos de* T *son ultrafiltros RK-minimales en* ω^* *y, por tanto, RK-incomparables entre sí.*

K. Kunen probo la existencia de $\mathfrak{c}$ filtros que son P-puntos débil y RK-incomparables entre sí.

Teorema 1.2.26. (Simon). *Existe un conjunto de cardinalidad* $2^{\mathfrak{c}}$ *de ultrafiltros en* ω *que son puntos débil y RK-incomparables entre si.*

El Orden Rudin-Frolík $\beta(\omega)$

Definición 1.2.27. <u>(pre-orden Rudin-Frolík)</u>. *Para* $p, q \in \omega^*$, *se dice que* $p \leq_{RF} q$, *si existe un encaje* $f : \omega \to \beta(\omega)$ *tal que* $\hat{f}(p) = q$.

Lema 1.2.28. (1). *La relación* $\leq_{RF}$ *es un pre-orden en* ω^*.

(2). *Si* $p, q \in \omega^*$ *y* $p \leq_{RF} q$, *entonces* $p \leq_{RK} q$.

Definición 1.2.29. *Para* $p, q \in \omega^*$, *decimos que* $p <_{RF} q$, *si pasa que* $p \leq_{RF} q$ *y* $p \not\approx q$.

Por simplicidad escribiremos RF-minimal, RF-comparable y RF-incomparable en lugar de $\leq_{RF}$-mimimal, $\leq_{RF}$-comparable y $\leq_{RF}$-incomparable, respectivamente.

Para $p \in \omega^*$ y $X \subseteq \omega^*$, definimos

(a). $P_{RF}(p) = \{q \in \omega^* : q \leq_{RF} p\}$.

(b). $S_{RF}(p) = \{q \in \omega^* : p <_{RF} q\}$.

(c). $P_{RF}(X) = \bigcup\{P_{RF}(q) \in \omega^* : q \in X\}$.

(d). $S_{RF}(X) = \bigcup\{S_{RF}(q) \in \omega^* : q \in X\}$.

Lema 1.2.30. *Sean* $p, p', q, q' \in \omega^*$. *Entonces*

(1). *Si* $p \approx p'$, $q \approx q'$ *y* $p \leq_{RF} q$, *entonces* $p' \leq_{RF} q'$.

(2). $p \approx q$ *si y solo sí* $p \leq_{RF} q$ *y* $q \leq_{RF} p$.

(3). $|P_{RF}(p)| = 2^\omega$ *para cada* $p \in \omega^*$.

(4). $|S_{RF}(p)| = 2^{\mathfrak{c}}$ *para cada* $p \in \omega^*$.

Observación 1.2.31. *Así como en la observación 1.2.19, se puede definir de manera natural en* $T(\beta(\omega))$ *un orden parcial usando* $\leq_{RF}$.

Usando el tercer inciso del Lema 1.2.30, Z. Frolík [Fro] demostró que ω^* no es homogéneo.

Teorema 1.2.32. (Frolík). *Sea $p \in \omega^*$. El conjunto*

$$P_{RF}(p) = \{q \in \omega^*, q \leq_{RF} p\}$$

es linealmente ordenado con el orden $\leq_{RF}$.

Por los Teoremas 1.2.26, 1.2.24 y 1.2.32, obtenemos que $\leq_{RK}$ y $\leq_{RF}$ son distintos, a pesar de que tienen los mismos tipos.

Observación 1.2.33. *Para cada $p \in \omega^*$, tenemos las siguientes implicaciones: p es RK-mimimal en $\omega^* \Longrightarrow p$ es un P-punto de $\omega^* \Longrightarrow p$ es P-punto débil $\Longrightarrow p$ no está en la frontera de un subconjunto numerable y discreto de $\omega^* \Longleftrightarrow p$ es RF-minimal en ω^*.*

Teorema 1.2.34. (Frolík). *Si $p \in \omega^*$ y D es un subconjunto numerable y discreto contenido en $T(p)$, entonces $(\overline{D}^{\beta(\omega)} \setminus D) \cap T(p) = \emptyset$. En particular, $p <_{RF} q$ si y solo si existe un encaje $f : \omega \to \omega^*$ tal que $\hat{f}(p) = q$.*

Teorema 1.2.35. *Si $f, g : \omega \to \omega^*$ son encajes y $p \in \omega^*$, entonces*

(1). (A.R. Blass). *$\hat{f}(p) = \hat{g}(p)$ si y sólo si $\{n < \omega : f(n) = g(n)\} \in p$.*

(2). *$\hat{f}(p) \approx \hat{g}(p)$ si y solo si $\{n < \omega : f(n) \approx g(n)\} \in p$.*

(3). (A.R. Blass). *$\hat{f}(p) \leq_{RK} \hat{g}(p)$ si y solo si $\{n < \omega : f(n) \leq_{RK} g(n)\} \in p$.*

(4). (A.R. Blass). *$\hat{f}(p) <_{RK} \hat{g}(p)$ si y solo si $\{n < \omega : f(n) <_{RK} g(n)\} \in p$.*

(5). (K. Kunen). *$\hat{f}(p) <_{RF} \hat{g}(p)$ si y solo si $\{n < \omega : f(n) <_{RF} g(n)\} \in p$.*

(6). *$\hat{f}(p) \leq_{RF} \hat{g}(p)$ si y solo si $\{n < \omega : f(n) \leq_{RF} g(n)\} \in p$.*

Definición 1.2.36. (Frolík-Katětov) *El producto tensorial de dos ultrafiltros, p y q que están en $\beta(\omega)$, se define como*

$$p \otimes q = \{A \subseteq \omega \times \omega : \{n \in \omega : \{m \in \omega : (n, m) \in A\} \in q\} \in p\}$$

Este es un ultrafiltro que se considera como un elemento de ω^*, ya que $\omega \times \omega$ y ω son homeomorfos.

Lema 1.2.37. (Blass). *Si $p, q \in \omega^*$ y $f : \omega \to T(q)$ es un encaje, se tiene que $p \otimes q \approx \hat{f}(p)$.*

Teorema 1.2.38. *Sean $p, q \in \omega^*$. Entonces*

(1). (Katětov). *$p <_{RF} p \otimes r$ y $r <_{RK} p \otimes r$ para toda $r \in \omega^*$.*

(2). *Si $p <_{RF} q$, entonces $p <_{RF} q \otimes r$ para toda $r \in \omega^*$.*

(3). (Booth). *Si $p <_{RF} q$, entonces $r \otimes p <_{RF} r \otimes q$ para toda $r \in \omega^*$.*

(4). *Si $p <_{RF} q$, entonces $p \otimes r <_{RF} q \otimes r$ para toda $r \in \omega^*$.*

Teorema 1.2.39. (Booth). *Los siguientes resultados son validos para cualesquiera $p, q, r \in \omega^*$.*

(1). *$p \otimes (q \otimes r) \approx (p \otimes q) \otimes r$.*

(2). *Si $q \approx r$, entonces $p \otimes q \approx p \otimes r$.*

(3). *Si $q \approx r$, entonces $q \otimes p \approx r \otimes p$.*

(4). *Si $p \otimes r \approx p \otimes q$ entonces $r \approx q$.*

(5). *Si $p \otimes r \approx q \otimes r$ entonces $p \approx q$.*

El Orden Comfort en ω^*

Para definir el pre-orden de Comfort, necesitamos el concepto de *p-límite*, el cual es una generalización natural de la convergencia de una sucesión. Cuando se escribe $p-\lim x_n = y$ intuitivamente se quiere decir que las x_n's están "frecuentemente cercanas" a y. Lo "cercano" está determinado por las vecindades de y y lo "frecuentemente" está determinado por los elementos de p.

Definición 1.2.40. (Bernstein 1970). *Sean $p \in \beta(\omega)$, $(x_n)_{n<\omega}$ una sucesión en un espacio X y $x \in X$. Entonces $\underline{p-\lim x_n = x}$ si y solo si para toda $U \in \mathcal{N}(x)$, $\{n \in \omega : x_n \in U\} \in p$.*

Observación 1.2.41. *Es fácil probar que para $p \in \omega^*$, una sucesión $(x_n)_{n<\omega}$ en un espacio X y $x \in X$, si se define una función f de ω en X como $f(n) = x_n$ para cada $n \in \omega$, entonces $p-\lim x_n = \hat{f}(p)$, donde $\hat{f} : \beta\omega \to \beta X$ es la extensión de Stone-Čech de f.*

Teorema 1.2.42. *Para $p \in \beta(\omega)$ y $(x_n)_{n<\omega}$ una sucesión en un espacio X. Se tiene que:*

(1). *Si $p-\lim x_n$ existe, entonces es único.*

(2). *Si X es un espacio compacto, entonces existe $p-\lim x_n$ en X.*

Observación 1.2.43. (1). *Si $(x_n)_{n<\omega}$ es una sucesión en un espacio y $x \in X$ es un punto de acumulación de esta sucesión, entonces el siguiente conjunto es un filtro:*

$$\{\{n < \omega : x_n \in V\} : V \in \mathcal{N}(x)\}.$$

(2). *Si $(x_n)_{n<\omega}$ es una sucesión en un espacio X y $x \in X$ es punto de acumulación de esta sucesión, entonces por la observación anterior y la Definición 1.2.40, se tiene que existe $p \in \beta(\omega)$ tal que $p-\lim x_n = x$.*

Definición 1.2.44. (Bernstein). *Un espacio X es* <u>*p-compacto*</u>*, si para cada $f \in X^\omega$, se tiene que $\hat{f}(p) \in X$, donde $p \in \omega^*$.*

En [GS], J. Ginsburg y V. Saks demostraron que todas las potencias de un espacio son numerablemente compactas si y solo sí el espacio es p-compacto para algún $p \in \omega^*$.

Teorema 1.2.45. *Sea $p \in \omega^*$ y X un espacio (Tychonoff). Entonces el espacio*

$$\beta_p(X) = \bigcap\{Y : X \subseteq Y \subseteq \beta(X) \text{ y } Y \text{ es } p-\text{compacto}\}$$

cumple las siguientes propiedades:

(a). *$\beta_p(X)$ es p-compacto.*

(b). *X es denso en $\beta_p(X)$.*

(c). *Para toda función continua* $f : X \to Z$ *con* Z p*-compacto, la extensión* $\hat{f}$ *satisface que* $\hat{f}[\beta_p(X)] \subseteq Z$.

(d). *Todo espacio que satisface* (a), (b) y (c) *es homeomorfo a* $\beta_p(X)$.

Definición 1.2.46. (Comfort). *Sean* $p, q \in \omega^*$. *Entonces* $p \leq_C q$ *si todo espacio* q*-compacto es* p*-compacto.*

No es difícil mostrar que $\leq_C$ es un pre-orden en ω^*. A este orden se le conoce como el orden Comfort en ω^*. Decimos que los ultrafiltros p y q de ω son Comfort equivalentes o que son del mismo tipo de Comfort si se cumple que $p \leq_C q \leq_C p$. A esta propiedad la denotaremos por $q \approx_C p$. Al conjunto de todos los ultrafiltros en ω^* que sean del mismo tipo de Comfort que p lo denotaremos por $T_C(p)$. Es decir, $T_C(p) = \{q \in \omega^* : q \approx_C p\}$.

Teorema 1.2.47. *Si* $p, q \in \omega^*$ *son tales que* $p \leq_{RK} q$, *entonces* $p \leq_C q$.

Teorema 1.2.48. (S. García Ferreira). *Para* $p, q \in \omega^*$, *se tiene que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1). $p \leq_C q$.

(2). $\beta_p(\omega) \subseteq \beta_q(\omega)$.

(3). $p \in \beta_q(\omega)$.

(4). *Existe* $f \in (\beta(\omega))^\omega$ *tal que* $\hat{f}(q) = p \notin f[\omega]$.

(5). $\beta_q(\omega)$ *es* p*-compacto.*

(6). $\beta_q(\omega) \setminus \omega$ *es* p*-compacto.*

Teorema 1.2.49. (S. García Ferreira). *Sean* $p, q \in \omega^*$. *Entonces se cumple lo siguiente:*

(1). *Si* $p \approx_{RK} q$, *entonces* $T_{RK}(q) \subseteq T_C(p) \subseteq \beta_p(\omega)$.

(2). $T_C(p) = \bigcup\{T_{RK}(q) : q \approx_C p\}$.

(3). $\beta_p(\omega) \setminus \omega = \{q \in \omega^* : q \leq_C p\}$.

(4). $|\{T_C(q) : q \leq_C p\}| = 2^\omega$.

(5). $|T_C(p)| = 2^\omega$.

(6). $|\{T_C(p) : p \in \omega^*\}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

(7). $|\{T_C(q) : p \leq_C q\}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

(8). *p es C-minimal* $\Longleftrightarrow$ $\beta_p(\omega) \setminus \omega = T_C(p)$.

Lema 1.2.50. (S. García Ferreira). *Si $p, q, r \in \omega^*$ son tales que $p \leq_C r$ y $q \leq_C r$, entonces $p \otimes q \leq_C r$.*

Corolario 1.2.51. (S. García Ferreira). *Sean $p, q, r, s \in \omega^*$.*

(1). *Si $r \leq_C s$, entonces $r \otimes p \leq_C s \otimes p$ y $p \otimes r \leq_C p \otimes s$.*

(2). *Si $p \leq_C q$ y $r \leq_C s$, entonces $p \otimes r \leq_C q \otimes s$.*

(3). *Si $p \approx_C q$ y $r \approx_C s$, entonces $p \otimes r \approx_C q \otimes s$.*

(4). $p \leq_C q \Longleftrightarrow p \otimes q \approx_C q \Longleftrightarrow q \otimes p \approx_C q$.

Teorema 1.2.52. (S. García Ferreira). *Para todo $p \in \omega^*$ existe $q \in \omega^*$ tal que $p \approx_C q$ y $p <_{RK} q$.*

Lema 1.2.53. (S. García Ferreira). *Sean $p, q \in \omega^*$ y $f \in (\beta(\omega))^\omega$ tales que $\hat{f}(q) = p \notin f[\omega]$. Si además p es un P-punto, entonces $p \leq_{RK} q$.*

Teorema 1.2.54. (S. García Ferreira). *Si $p, q \in \omega^*$ cumplen que $p \leq_C q$ y p es un P-punto débil, entonces $p \leq_{RK} q$. En particular el RK-orden y el C-orden coinciden en el conjunto de los P-puntos débiles.*

1.3 El $\mathcal{W}$-juego y el $\mathcal{G}$-juego

El objetivo de esta sección es introducir los conceptos de $\mathcal{G}$-juego y $\mathcal{W}$-juego, los cuales fueron introducidos por A. Bouziad [Bo] y G. Gruenhage [Gru], repectivamente. Esto lo haremos con una notación un poco diferente a la usada por ellos, la cual nos será muy útil porque abarcaremos más aspectos dentro de la teoría de estos juegos y del juego que será definido en el siguiente capítulo. Estos juegos introducen ciertas clases de espacios, que están muy relacionados entre sí.

En el $\mathcal{G}$-juego y el $\mathcal{W}$-juego, solo hay dos jugadores los cuales denotaremos por I y II. Las reglas en ambos juegos, son las mismas, excepto en la forma como es declarado el ganador:

Sea X un espacio y $x \in X$. Los jugadores, I y II jugarán por turnos. El jugador I juega primero escogiendo $U_0 \in \mathcal{N}(x)$, el jugador II responde escogiendo un punto $x_0 \in U_0$; luego el jugador I escoge $U_1 \in \mathcal{N}(x)$, a lo cual el jugador II contesta tomando $x_1 \in U_1$ y así sucesivamente. Los jugadores juegan una cantidad infinita de veces. El jugador I gana en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego (respect. $\mathcal{W}(x, X) - juego$), si $\{x_n : n < \omega\}$ tiene punto de acumulación en X (respect. $x_n \to x$). De otra manera, decimos que el jugador II es el ganador de el $\mathcal{G}(x, X)$-juego (respect. $\mathcal{W}(x, X)$-juego).

Una estrategia para un jugador es un algoritmo que especifica cada movimiento de éste en cualquier posible situación. Una estrategia es llamada ganadora si al aplicarla el jugador en cuestión gana.

Definición 1.3.1. *Sean X un espacio y $x \in X$.*

(a). *Una estrategia para el jugador I en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego (respect. $\mathcal{W}(x, X)$-juego), es una sucesión de funciones $\sigma = \{\sigma_n : n < \omega\}$, donde $\sigma_n : X^n \to \mathcal{N}(x)$ para cada $n < \omega$.*

(b). *Sea σ una estrategia para el jugador I. Una σ-sucesión es una sucesión $(x_n)_{n<\omega}$ en X tal que $x_n \in \sigma_n(\langle x_0, ..., x_{n-1}\rangle)$, para cada $n < \omega$.*

(c). *Un estrategia $\sigma = \{\sigma_n : n < \omega\}$ en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego (respect. $\mathcal{W}(x, X)$-juego) para el jugador I es llamada estrategia ganadora si cada σ-sucesión tiene punto de acumulación en X (respect. si cada σ-sucesión converge a x).*

Definición 1.3.2. *Sean X un espacio y $x \in X$.*

(a). *Una <u>estrategia</u> para el jugador II en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego (respect. $W(x, X)$-juego), es una sucesión de funciones $\rho = \{\rho_n : n < \omega\}$ donde $\rho_n : X^n \times \mathcal{N}(x)^{n+1} \to X$ es tal que $\rho_n(\langle x_0, ..., x_{n-1}\rangle; \langle V_0, ..., V_n\rangle) \in V_n$, para cada $n < \omega$.*

(b). *Sea ρ una estrategia para el jugador II. Una sucesión $\langle (V_n, x_n) : n < \omega\rangle$ donde $V_n \in \mathcal{N}(x)$ y $x_n \in V_n$ es una <u>ρ-sucesión</u> si $x_n = \rho_n(\langle x_0, ..., x_{n-1}\rangle; \langle V_0, ..., V_n\rangle) \in V_n$, para cada $n < \omega$.*

(c). *Un estrategia $\rho = \{\rho_n : n < \omega\}$ en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego (respect. $W(x, X)$-juego) para el jugador II es llamada <u>estrategia</u> <u>ganadora</u> si en cada ρ-sucesión $\langle (V_n, x_n) : n < \omega\rangle$, la sucesión $\langle x_n : n < \omega\rangle$ no tiene punto de acumulación en X (respect. si la sucesión $\langle x_n : n < \omega\rangle$ no converge a x).*

Definición 1.3.3. *Sean X un espacio y $x \in X$.*

(a). *El símbolo <u>$I \uparrow \mathcal{G}(x, X)$</u> significa que el jugador I tiene una estrategia ganadora en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego. Similarmente se define <u>$II \uparrow \mathcal{G}(x, X)$</u>.*

(b). *El símbolo <u>$I \uparrow \mathcal{G}(X)$</u>, quiere decir que para todo $x \in X$, $I \uparrow \mathcal{G}(x, X)$. Análogamente se define <u>$II \uparrow \mathcal{G}(X)$</u>.*

(c). *El símbolo <u>$I \downarrow \mathcal{G}(x, X)$</u>, quiere decir que el jugador I no tiene estrategia ganadora en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego. De la misma manera se define <u>$II \downarrow \mathcal{G}(x, X)$</u>.*

(d). *<u>$I \downarrow \mathcal{G}(X)$</u> quiere decir que para todo $x \in X$, $I \downarrow \mathcal{G}(x, X)$. Similarmente se define <u>$II \downarrow \mathcal{G}(X)$</u>.*

De manera similar se definen $I \uparrow W(x, X)$, $II \uparrow W(x, X)$, $I \downarrow W(x, X)$, $II \downarrow W(x, X)$, $I \uparrow W(X)$, $II \uparrow W(X)$, $I \downarrow W(X)$ y $II \downarrow W(X)$.

Definición 1.3.4. (G. Gruenhage). *Un espacio X es llamado <u>W-espacio</u> si $I \uparrow W(X)$.*

Definición 1.3.5. (A. Bouziad). *Un espacio X es llamado <u>$\mathcal{G}$-espacio</u> si $I \uparrow \mathcal{G}(X)$.*

En otros trabajos se han usado los nombres de W-espacio y $\mathcal{G}$-espacio (véase [Bo], [Ca] y [Gru]), sin embargo no las usaremos por considerarlas inadecuadas para nuestros propósitos. Utilizaremos en cambio las notaciones de la Definición 1.3.3.

De las definiciones se siguen las implicaciones:

$$\begin{array}{rcl} I \uparrow W(X) & \Longrightarrow & I \uparrow \mathcal{G}(X) \\ II \uparrow W(X) & \Longleftarrow & II \uparrow \mathcal{G}(X) \end{array}$$

Obsérvese que si X es primero numerable, entonces $I \uparrow W(X)$. Por otro lado, la clase de los $\mathcal{G}$-espacios es más grande, por ejemplo, si X es localmente compacto entonces es un $\mathcal{G}$-espacio. No obstante, la clase de los $\mathcal{G}$-espacios no cumplen las mismas propiedades que la de los W-espacios. Por ejemplo, los W-espacios son preservados bajo subespacios, Σ-productos y funciones abiertas, y esto no sucede para los $\mathcal{G}$-espacios.

Dado un juego, uno puede preguntarse si siempre existe un ganador en el juego; es decir ¿existe siempre una estrategia ganadora para uno de los jugadores?. Cuando la respuesta es afirmativa, se dice que el juego es <u>determinante</u>. En el contexto del $\mathcal{G}$-juego, la pregunta se traduce de la siguiente manera: ¿existe un espacio X tal que para todo $x \in X$, $I \downarrow \mathcal{G}(x, X)$ y $II \downarrow \mathcal{G}(x, X)$?. Esta pregunta, se estudia en el Capítulo 4, tanto para los $\mathcal{G}$-juegos, como para los $\mathcal{G}_p$-juegos, que seran definidos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Juegos definidos por ultrafiltros

Usando los conceptos p-límite y $\mathcal{G}$-juego, definiremos para cada $p \in \omega^*$ un juego, que denotaremos como $\mathcal{G}_p$-juego. En este capítulo estudiaremos los $\mathcal{G}_p$-juegos utilizando ciertos subespacios de $\beta(\omega)$, los cuales están definidos por los ordenes Rudin-Keisler y Rudin-Frolík.

Comenzamos la primera sección definiendo el $\mathcal{G}_p$-juego. A partir de esto, enunciamos sus relaciones con el W-juego y el $\mathcal{G}$-juego, mostrando con algunos ejemplos que todos los juegos en cuestión son diferentes. En la sección siguiente, nos interesamos en encontrar condiciones en los ultrafiltros para que el jugador I del $\mathcal{G}_p$-juego tenga estrategia ganadora en ciertos subespacios de $\beta(\omega)$ definidos en términos del RF-orden y RK-orden (Teorema 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3). En particular (en el Teorema 2.2.4), construimos un espacio para cada ultrafiltro $p \in \omega^*$, al cual denotamos por $\Omega(p)$, que sirve para probar que el jugador I del $\mathcal{G}_q$-juego solamente tiene estrategia ganadora en ciertos elementos q de $T(p)$ (en el siguiente capítulo se hace una generalización del espacio $\Omega(p)$). Por otro lado, las condiciones en los ultrafiltros para pasar la estrategia ganadora de un $\mathcal{G}_p$-juego a otro, están dadas mediante el Teorema 2.2.4, el cual nos lleva a obtener el resultado más importante, el Teorema 2.2.5. La aplicación de este Teorema en el Corolario 2.2.7, junto con un resultado de [HST], da una caracterización en términos de juegos de los ultrafiltros en ω que son *Q-puntos*. Finalizamos demostrando algunas propiedades del espacio $\Omega(p)$ y un resultado, que da una cota inferior temporal, para la cardinalidad de un $\mathcal{G}$-espacio contenido en $\beta(\omega)$.

2.1 El $\mathcal{G}_p$-juego

Con el concepto de $\mathcal{G}_p$-juego, para $p \in \omega^*$, se definen nuevas categorías de espacios. La sección esta enfocada a comparar éstas con otras categorías de espacios.

El $\mathcal{G}_p$-juego, es definido de igual manera que el $\mathcal{G}$-juego o el W-juego. Hay dos jugadores, I y II, que van tomando turnos para jugar. El jugador I juega primero, escogiendo $U_0 \in \mathcal{N}(x)$, luego II responde tomando un punto $x_0 \in U_0$; después I elige $U_1 \in \mathcal{N}(x)$, en seguida el jugador II selecciona un punto $x_1 \in U_1$ y así sucesivamente. Los jugadores juegan ω-veces. El jugador I gana en el $\mathcal{G}_p(x, X)$-juego, si $p-\lim x_n$ existe en el espacio X. De lo contrario, decimos que el jugador II gana.

Las definiciones de *estrategia* y *estrategia ganadora* para los jugadores I y II en el $\mathcal{G}_p$-juego, son definidas del la misma manera que las del $\mathcal{G}$-juego (véase 1.3.1, 1.3.2 y 1.3.3); sólo se reemplaza la condición de punto de acumulación por la de p-límite.

Definición 2.1.1. *Un espacio X es llamado $\mathcal{G}_p$-espacio si $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$.*

De las definiciones, se siguen fácilmente las siguientes implicaciones:

$$\begin{array}{ccccc} I \uparrow W(X) & \Longrightarrow & I \uparrow \mathcal{G}_p(X) & \Longrightarrow & I \uparrow \mathcal{G}(X) \\ II \uparrow W(X) & \Longleftarrow & II \uparrow \mathcal{G}_p(X) & \Longleftarrow & II \uparrow \mathcal{G}(X) \end{array}$$

Veamos algunos ejemplos que muestran que los recíprocos de estas implicaciones no son ciertas.

Ejemplo (1). El espacio $X = \beta(\omega)$ muestra que $I \uparrow \mathcal{G}_p(X) \not\Longrightarrow I \uparrow W(X)$ para todo $p \in \omega^*$. Si $X = \omega^*$, es fácil ver que $II \uparrow W(X) \not\Longrightarrow II \uparrow \mathcal{G}_p(X)$.

Ejemplo (2). El espacio $X = \beta(\omega) \setminus P_{RK}(p)$ muestra que $I \uparrow \mathcal{G}(X) \not\Longrightarrow I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$ (véase el Teorema 2.2.1).

Ejemplo (3). Consideremos el espacio $X = \beta(\omega) \setminus S_{RF}(p)$. Veamos que $II \uparrow \mathcal{G}_p(X) \not\Longrightarrow II \uparrow \mathcal{G}(X)$. Probar que $II \uparrow \mathcal{G}_p(X)$ es fácil, ya que el jugador II, solamente tiene que jugar de forma tal que la sucesión resultante del juego sea discreta en X, con esto tendremos que el p-límite de esta sucesión será un elemento de $S_{RF}(p)$ y por lo tanto no esta en X. Ahora, veamos que $II \downarrow \mathcal{G}(\beta(\omega) \setminus S_{RF}(p))$, de hecho, probaremos que $I \uparrow \mathcal{G}(\beta(\omega) \setminus S_{RF}(p))$, Afirmamos que la estrategia del judador I en este caso, es forzar al jugador II a tomar un sucesión $f : \omega \longrightarrow \beta(\omega) \setminus S_{RF}(p)$ que sea un encaje. Aclaremos por que esta es una estrategia ganadora para el jugador I, es decir, veamos que f tiene punto de acumulación en X. Tomemos un ultrafiltro q en ω que sea P-punto débil y $q \notin P_{RF}(p)$, esto es posible ya que $|P_{RF}(p)| = \mathfrak{c}$ y por el Teorema 1.2.26 existe un conjunto de cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$ de ultrafiltros RK-incomparables P-puntos débiles. Además, tenemos por la Observación 1.2.33, que $q \notin S_{RF}(p)$. Ahora bien, se tiene que $\hat{f}(q) \notin S_{RF}(p)$, ya que de otra manera se contradice el Teorema 1.2.32 (véase [CN, Teorema 16.16]). Por lo tanto $\hat{f}(q)$ es un punto en X que esta en la cerradura de $\{f(n) : n < \omega\}$, con lo cual concluimos que I tiene estrategia ganadora en el $\mathcal{G}$-juego en X.

El Teorema 4.1.5, muestra también un espacio en el que no es cierta la implicación $II \uparrow \mathcal{G}_p(X) \Longrightarrow II \uparrow \mathcal{G}(X)$.

El siguiente diagrama muestra cómo se relacionan las categorías de los espacios definidos por estos juegos, con otros conceptos de topología general (para las implicaciones con el W-juego, vease [GN]).

$$
\begin{tikzcd}
 & X \text{ es compacto} \arrow[d] & \\
\begin{array}{c} X \text{ es primero} \\ \text{numerable} \end{array} \arrow[d] & X \text{ es } p\text{-compacto} \arrow[r] \arrow[d] & \begin{array}{c} X \text{ es numerablemente} \\ \text{compacto} \end{array} \arrow[d] \\
I \uparrow W(X) \arrow[r] \arrow[d] & I \uparrow \mathcal{G}_p(X) \arrow[r] & I \uparrow \mathcal{G}(X) \\
\begin{array}{c} X \text{ es estrictamente} \\ \text{Fréchet} \end{array} \arrow[d] & \begin{array}{c} X \text{ es localmente} \\ \text{compacto} \end{array} \arrow[u] & \\
X \text{ es Fréchet} \arrow[d] & & \\
X \text{ es Secuencial} \arrow[d] & & \\
t(X) = \omega & &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{array}{ccccc} X \text{ es extremadamente disconexo} & & & & X \text{ es P-espacio} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ II \uparrow W(X) & \longleftarrow & II \uparrow \mathcal{G}_p(X) & \longleftarrow & II \uparrow \mathcal{G}(X) \end{array}$$

Otra relación que también sale de las definiciones es:

$$X \text{ es estrictamente Fréchet} \iff II \downarrow W(X)$$

2.2 $\mathcal{G}_p$-espacios

El enfoque de esta sección está encaminado en dos sentidos: la clasificación de los $\mathcal{G}_p$-juegos usando las comparaciones de los ultrafiltros, definidas por los órdenes del capítulo anterior. El otro es el opuesto, es decir, buscamos comparar ultrafiltros usando los $\mathcal{G}_p$-juegos. Para esto, tomamos espacios que muestran que si los ultrafiltros satisfacen alguna propiedad, entonces el jugador I (o II) de cada uno de los juegos tiene estrategia ganadora y viceversa.

Teorema 2.2.1. *Sean $p, q \in \omega^*$, $p \neq q$. Entonces $I \uparrow \mathcal{G}_q(\beta(\omega) \setminus P_{RK}(p))$ si y sólo si $q \not\leq_{RK} p$.*

Prueba: Pongamos $X = \beta(\omega) \setminus P_{RK}(p)$.

Necesidad: Fijemos $x \in X$ y sea σ una estrategia ganadora para el jugador I en el $\mathcal{G}_q(x, X)$-juego. Como ω es denso en X, podemos tomar una σ-sucesión $(k_n)_{n<\omega}$ contenida en ω, tal que $k_n \neq k_m$ para $n < m < \omega$. Por hipótesis, $r = q-\lim k_n \in X$. De aquí obtenemos que $r \not\leq_{RK} p$ y $r \approx q$, por lo tanto $q \not\leq_{RK} p$.

Suficiencia: Supongamos que $q \not\leq_{RK} p$ y fijemos x en X. Como X es cero-dimensional, el jugador I puede forzar al jugador II a escoger un subconjunto discreto $\{x_n : n < \omega\}$ de X. Para este conjunto tenemos dos casos:

Caso (i): $A = \{n < \omega : x_n \in \omega\} \in q$. Sin perdidad de generalidad, podemos suponer que $|A| = |\omega \setminus A| = \aleph_0$. Sea $f : \omega \to \omega$ una función inyectiva tal que $f(n) = x_n$ para cada $n \in A$. Es fácil ver que de la definición de p-límite se obtiene que $q-\lim x_n = q-\lim f(n) = \hat{f}(q)$, y además $\hat{f}(q) \approx q$. Con lo cual concluimos que $\hat{f}(q) \in X = \beta(\omega) \setminus P_{RK}(p)$.

Caso (ii): $A = \{n < \omega : x_n \in \omega^*\} \in q$. Nuevamente, sin perdida de generalidad $|A| = |\omega \setminus A| = \aleph_0$. Sea $f : \omega \to \omega^*$ un encaje tal que $f(n) = x_n$ para cada $n \in A$. De la definición de p-límite, se obtiene que $\hat{f}(q) = q-\lim x_n$. Por lo tanto $q \leq_{RF} \hat{f}(q)$. De esta última desigualdad y de nuestra hipótesis, se obtiene que $\hat{f}(q) \in X$. □

También es fácil probar que $II \uparrow \mathcal{G}_q(\beta(\omega) \setminus P_{RK}(p)) \iff q \leq_{RK} p$. Con lo cual se concluye que $I \downarrow \mathcal{G}_q(\beta(\omega) \setminus P_{RK}(p)) \iff II \uparrow \mathcal{G}_q(\beta(\omega) \setminus P_{RK}(p))$.

Cambiando el RK-orden por el RF-orden en el Teorema anterior, obtenemos un resultado análogo cuya demostración es muy similar.

Teorema 2.2.2. *Sean $p, q \in \omega^*$, $p \neq q$. Entonces*

(1). *$I \uparrow \mathcal{G}_q(\beta(\omega) \setminus P_{RF}(p))$ si y sólo si $q \not\leq_{RF} p$.*

(2). *$II \uparrow \mathcal{G}_q(\beta(\omega) \setminus P_{RF}(p))$ si y sólo si $q \leq_{RF} p$.*

El resultado que sigue da una versión en términos de $\mathcal{G}_p$-juegos acerca del hecho de que dos ultrafiltros sean RF-comparables.

Teorema 2.2.3. *Sean $p, q \in \omega^*$, $p \neq q$. Entonces se tiene que p y q son RF-comparables si y solo sí $II \uparrow \mathcal{G}_q(\beta(\omega) \setminus S_{RF}(p))$*

Prueba: Suficiencia: Si p y q son RF-incomparables, entonces $S_{RF}(p) \cap S_{RF}(q) = \emptyset$ (por el Teorema 1.2.32). Por lo tanto, para cada encaje $f : \omega \to \beta(\omega) \setminus S_{RF}(p)$, se tiene que $\hat{f}(q) \notin S_{RF}(p)$, luego $\hat{f}(q) \in \beta(\omega) \setminus S_{RF}(p)$. Con esto tenemos que el jugador I tiene una estrategia ganadora en el $\mathcal{G}_q$-juego, la cual es forzar a que el jugador II tome una sucesión discreta de puntos

Necesidad: Ahora, supongamos que p y q son RF-comparables. En el caso de que $p \leq_{RF} q$, entonces la estrategia del jugador II en el $\mathcal{G}_q$-juego es escoger una sucesión de puntos $(x_n)_{n<\omega}$ en $X \cap \omega^*$ que sea discreta, con esto se tiene que $q <_{RF} q-\lim x_n = x$ y por transitividad, $p <_{RF} x$, por lo tanto $x \notin \beta(\omega) \setminus S_{RF}(p)$. Ahora, supongamos que $q <_{RF} p$. Entonces existe $f : \omega \to \omega^*$ tal que $\hat{f}(q) = p$. Afirmamos que $A = \{n < \omega : p \leq_{RF} f(n)\} \notin q$. Ya que si $A \in q$, entonces para un encaje $g : \omega \to T(p)$, se tiene que $\{n < \omega : g(n) \leq_{RF} f(n)\} \in q$. Por el Teorema 1.2.35.(5), esto implica que $\hat{g}(q) \leq_{RF} \hat{f}(q) = p$. Como $p <_{RK} p \otimes q \approx \hat{g}(q)$, se tiene que $p <_{RK} p$, lo cual es imposible. Por lo tanto $\omega \setminus A \in q$. Ahora, consideremos el siguiente conjunto $B = \{n < \omega : p <_{RF} f(n) \otimes f(n)\}$. Tenemos dos casos.

Caso (i): $B \in q$. Usando que $\omega \setminus A \in q$ y el Teorema 1.2.32, tenemos que el conjunto $\{n < \omega : f(n) \leq_{RF} p\} \in q$. En este caso, la estrategia de II en el $\mathcal{G}_q$-juego es tomar una sucesión de puntos $(x_n)_{n<\omega}$ discreta, contenida en $T(p)$. Luego para $g : \omega \longrightarrow T(p)$ definida como $g(n) = x_n$, se tiene por el Teorema 1.2.35.(5), que $\hat{f}(q) \leq_{RF} \hat{g}(q)$. Es decir $\hat{g}(q) \notin \beta(\omega) \setminus S_{RF}(p)$.

Caso (ii): $B \notin q$. De esto, obtenemos que para cada $n \in \omega \setminus B$, $f(n) \otimes f(n) \notin S_{RF}(p)$. En este caso, la estrategia del jugador II es tomar en el n-esimo paso, $g(n) \in T(f(n) \otimes f(n))$, si $n \in \omega \setminus B$ y un punto arbirtrario cuando $n \in B$. Con esto, se tiene que $\{n < \omega : f(n) <_{RF} g(n)\} \in q$, lo cual implica que $\hat{f}(q) <_{RF} \hat{g}(q)$. Por lo tanto $\hat{g}(q) \notin S_{RF}(p)$. □

El Teorema que a continuación enunciamos, lo utilizaremos en resultados posteriores. Una primera aplicación es en el Teorema 2.2.5 el cual ayuda a dar una caracterización por medio de nuestros juegos de los ultrafiltros que son *Q-punto*.

Teorema 2.2.4. *Para cada $p \in \omega^*$, existe un espacio X tal que $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$ y que $I \downarrow \mathcal{G}_q(X)$, para cada $q \in T(p) \setminus R(p)$. De hecho $II \uparrow \mathcal{G}_q(X)$ para todo $q \in T(p) \setminus R(p)$.*

Prueba: El espacio será construido mediante inducción transfinita. Para cada $f : \omega \longrightarrow \beta(\omega)$, definimos $A_f = \{n < \omega : f(n) \in \omega\}$. Sea $X_0 = \omega$ y $X_1 = R(p)$. Para $\nu < \omega_1$ ordinal límite, sea $X_\nu = \bigcup_{\mu<\nu} X_\mu$. Si $\nu = \mu+1 < \omega_1$, definimos:

$$X_\nu = \{\hat{f}(p) : f : \omega \longrightarrow X_\mu \text{ es un encaje y } f|_{A_f} \text{ es estrictamente creciente}\}.$$

Veamos que $\Omega(p) = \bigcup_{\nu<\omega_1} X_\nu$ es el espacio requerido, cuya topología es la de subespacio de $\beta(\omega)$. La estrategia del jugador I en el $\mathcal{G}_p$-juego, será forzar al jugador II a tomar un subconjunto discreto $\{x_n : n < \omega\}$ de $\Omega(p)$, de tal manera que la subsucesión $\{x_n : x_n \in \omega, n < \omega\}$ sea estrictamente creciente. Por construcción, el p-límite de la sucesión $(x_n)_{n<\omega}$ esta en $\Omega(p)$. Esta estrategia de I es factible ya que $\beta(\omega)$ es un espacio cero-dimensional y $\Omega(p)$ es un subespacio. Por lo tanto, $I \uparrow \mathcal{G}_p(\Omega(p))$. Sea $q \in T(p) \setminus R(p)$. Definiremos una estrategia ganadora para el jugador II en el $\mathcal{G}_q$-juego. Como ω es denso en $\Omega(p)$, el jugador II puede jugar en cada partido un sucesión estrictamente creciente $(x_n)_{n<\omega}$ contenida en ω. Definimos $f:\omega\longrightarrow\omega$ como $f(n)=x_n$ para cada $n<\omega$, y $r=\hat{f}(q)=q-\lim x_n$. Supongamos que $r\in\Omega(p)$, entonces existe una función inyectiva $g:\omega\longrightarrow\omega$ y $A\in p$ tal que $g|_A$ es estrictamente creciente y $\hat{g}(p)=r=\hat{f}(q)$. Como $q\in T(p)$, entonces existe $e\in Per(\omega)$ tal que $\hat{e}(p)=q$. Con lo cual se tiene que $\hat{f}(\hat{e}(p))=\hat{g}(p)$; pero por el Teorema 1.2.35(1), $B=\{n\in A: f(e(n))=g(n)\}\in p$. Sean $m,n\in B$ con $n<m$. Como $g|_A$ es estrictamente creciente, se tiene $g(n)<g(m)$ y por consiguiente $f(e(n))<f(e(m))$. Por otro lado, como f es estrictamente creciente, $e(n)<e(m)$. Esto significa que $e|_B$ es estrictamente creciente, lo cual lleva a una una contradicción. Por lo tanto, $r\notin\Omega(p)$ y entonces $I\downarrow\mathcal{G}_q(\Omega(p))$. □

El siguiente resultado muestra las condiciones en los ultrafiltros p y q, para que se pueda trasladar la estrategia ganadora del jugador I en el $\mathcal{G}_p$-juego al jugador I del $\mathcal{G}_q$-juego. Para llevar acabo la demostración, definimos la concatenación de sucesiones finitas de puntos.

Sean $s_1:n\longrightarrow X$ y $s_2:m\longrightarrow X$ dos sucesiones finitas de puntos en un espacio X $(n,m\in\omega)$, la concatenación de s_1 y s_2 es la función $s_1{}^\frown s_2: n+m\longrightarrow X$ definida como

$$s_1{}^\frown s_2(k)=\begin{cases} s_1(k) & \text{si } k<n,\\ s_2(l) & \text{si } k=n+l \text{ y } k<n+m.\end{cases}$$

Teorema 2.2.5. *Para cada $p\in\omega^*$, se tiene que los siguientes enunciados son equivalentes :*

(1). $q\in R(p)$.

(2). *Para todo espacio X, $I\uparrow\mathcal{G}_p(X)$ si y solo sí $I\uparrow\mathcal{G}_q(X)$.*

Prueba: (1) $\Longrightarrow$ (2). Por el hecho de que $q\in R(p)$ si y solo sí $p\in R(q)$, es suficiente probar que si $I\uparrow\mathcal{G}_p(X)$, entonces $I\uparrow\mathcal{G}_q(X)$. Por hipótesis, existe $f\in Per(\omega)$ y $A\in p$ tal que $f|_A$ es estrictamente creciente y $\hat{f}(p)=q$. Enumeremos A en orden creciente $\{a_n:n<\omega\}$ y sea $b_n=f(a_n)$ para cada $n\in\omega$. Fijemos $x\in X$ y tomemos una estrategia ganadora $\sigma=\{\sigma_n:n<\omega\}$ para el jugador I del $\mathcal{G}_p(x,X)$-juego. Definiremos una estrategia ganadora $\tau=\{\tau_n:n<\omega\}$ para el jugador I del $\mathcal{G}_q(x,X)$-juego. La idea para definir la estrategia de este jugador es la siguiente: Mentalmente él jugará también otro juego en el tablero del $\mathcal{G}_p(x, X)$-juego usando la estrategia σ. Después de un movimiento del jugador II del $\mathcal{G}_q(x, X)$-juego, el jugador I "trasladara" este, a un movimiento del jugador II del $\mathcal{G}_p(x, X)$-juego, responde a este usando σ y luego regresa al tablero del $\mathcal{G}_q(x, X)$-juego trasladando esta respuesta a un movimiento que contesta la jugada anterior del jugador II. Para escribir de manera precisa esto, definimos $x^{(i)} = \emptyset$ si $i = 0$, y $x^{(i)} = \underbrace{\langle x, ..., x\rangle}_{i}$ si $i > 0$,

además sea $h_i = a_i - a_{i-1} - 1$, para cada $i \in \omega \setminus \{0\}$.

Definimos $\tau_n : X^n \to \mathcal{N}(x)$ como:

$$\tau_n(x_0, x_1, ..., x_n) = \begin{cases} X & \text{si } n \in \omega \setminus B. \\ \sigma_{a_i}(x^{(a_0-1)}\frown x_{b_0}\frown x^{(h_1)}\frown x_{b_1}\frown ...\frown x^{(h_{i-1})}\frown x_{b_{i-1}}\frown x^{(h_i)}) \\ \text{si } n = b_i. \end{cases}$$

Ahora, veamos que $\tau = \{\tau_n : n < \omega\}$ es una estrategia ganadora para I en el $\mathcal{G}_q(x, X)$-juego. Sea $(y_n)_{n<\omega}$ una τ-sucesión en X. Consideremos la sucesión definida de la siguiente manera:

$$x_n = \begin{cases} x & \text{si } n \in \omega \setminus A, \\ y_{b_j} & \text{si } n = a_j \text{ para alguna } j \in \omega. \end{cases}$$

Afirmamos que $(x_n)_{n<\omega}$ es una σ-sucesión en X. Si $n \in \omega \setminus A$, entonces

$$x_n = x \in \sigma_n(x_0, x_1, ..., x_{n-1}),$$

y si $n = a_j$ para alguna $j < \omega$, entonces

$$x_n = x_{a_j} = y_{b_j} \in \tau_{b_j}(y_0, y_1, ..., y_{b_j-1}) = \sigma_{a_j}(x^{(a_0-1)}\frown y_{b_0}\frown x^{(h_1)}\frown y_{b_1}\frown ...\frown x^{(h_j-1)}\frown y_{b_{j-1}}\frown x^{(h_j)}).$$

Esto muestra que $(x_n)_{n<\omega}$ es una σ-sucesión. Por hipótesis, existe $y \in X$ tal que $y = p-\lim x_n$. Veamos que $y = q-\lim y_n$. Sea $V \in \mathcal{N}(y)$, entonces $\{n < \omega : x_n \in V\} \in p$. Lo cual implica que $A \cap \{n < \omega : x_n \in V\} = \{a_n : x_{a_n} \in V\} \in p$. Por lo tanto $f[\{a_n : x_{a_n} \in V\}] = \{b_n : x_{b_n} \in V\} \in q$. De donde se sigue que $\{n < \omega : y_n \in V\} \in q$, para cualquier $V \in \mathcal{N}(y)$, es decir $y = q-\lim y_n$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Si $q \notin P_{RK}(p)$, entonces por el Teorema 2.2.1 se tiene que $I \uparrow \mathcal{G}_q(\beta(\omega) \setminus P_{RK}(p))$. Por lo tanto $I \uparrow \mathcal{G}_p(\beta(\omega) \setminus P_{RK}(p))$, pero esto es imposible (ya que contradice el Teorema 2.2.1). Así que $q \leq_{RK} p$. Por un razonamiento análogo, también se prueba que $p \leq_{RK} q$. Por consiguiente $p \approx q$. Si $q \notin R(p)$, entonces por el Teorema 2.2.4, existiría un espacio X tal

que $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$ tal que $I \downarrow \mathcal{G}_q(X)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $q \in R(p)$. □

Con este Teorema y el lema que a continuación anunciamos, daremos una caracterización de los ultrafiltros que son Q-puntos en términos de los $\mathcal{G}_p$-juegos.

Lema 2.2.6. ([HST]). *Sea $p \in \omega^*$. Entonces p es un Q-punto si y solo sí para toda $f \in \omega^\omega$ finita a uno, existe $A \in p$ tal que $f|_A$ es estrictamente creciente.*

Corolario 2.2.7. *Sea $p \in \omega^*$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1). *p es un Q-punto.*

(2). *Para todo espacio X, si $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$, entonces $I \uparrow \mathcal{G}_q(X)$, para todo $q \in T(p)$.*

Prueba: (1) $\Longrightarrow$ (2). Por el Lema 2.2.6, $T(p) = R(p)$. Al aplicar el Teorema 2.2.5, hallamos que si $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$, entonces $I \uparrow \mathcal{G}_q(X)$, para todo $q \in T(p)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Por el Teorema 2.2.5, $T(p) = R(p)$. Luego por el Lema 2.2.6, se concluye que p es un Q-punto. □

Los siguientes resultados, describen algunas propiedades del espacio $\Omega(p)$, las cuales son muy parecidas a las del espacio $\beta_p(\omega)$ (véase [G-F1] y [G-F2]).

Lema 2.2.8. *Sean $p, q \in \omega^*$. Si $q \in \Omega(p)$, entonces $R(q) \subset \Omega(p)$.*

Prueba: Sea $q \in \Omega(p)$. Como $\Omega(p) = \bigcup_{\nu<\omega_1} X_\nu$, entonces existe $\nu < \omega_1$ tal que $q \in X_\nu$. Si $\nu = 1$, entonces $q \in R(p)$, por lo tanto $R(q) \subset \Omega(p)$. Supongamos que para toda $s \in X_\mu$ con $\mu < \nu$, $R(s) \subset \Omega(p)$. Por definición es suficiente analizar el caso en que $\nu = \mu + 1$. Sea $g : \omega \longrightarrow X_\mu$ un encaje tal que $\hat{g}(p) = q$ con $g|_{A_g}$ es estrictamente creciente y tomemos $r \in R(q)$. Por la definición de $R(q)$, existen $h \in Per(\omega)$ y $A \in q$ tales que $\hat{h}(q) = r$ y $h|_A$ es estrictamente creciente. Por lo tanto, $r = \hat{h}(\hat{g}(p))$. Tenemos que la función $\hat{h} \circ g : \omega \longrightarrow \beta(\omega)$ es un encaje. Para probar que $r \in \Omega(p)$, nos falta ver que $\hat{h}\circ g|_{A_{\hat{h}\circ g}}$ es estrictamente creciente y que $\hat{h}\circ g[\omega]\subset\Omega(p)$. Como h es una permutación, hallamos que $A_{\hat{h}\circ g}=A_g$. Si $A_{\hat{h}\circ g}\notin p$, entonces podemos modificar $\hat{h}\circ g$ de tal forma que $A_{\hat{h}\circ g}=\emptyset$. Supongamos que $A_{\hat{h}\circ g}\in p$. Ya que $B=\{n<\omega : g(n)\in\hat{A}\}\in p$, $B\cap A_{\hat{h}\circ g}\in p$. Si $n,m\in B\cap A_{\hat{h}\circ g}$, entonces $g(m),g(n)\in A$. Además, si $n<m$, entonces $h(g(n))<h(g(m))$. Por lo tanto, $\hat{h}\circ g|_{B\cap A_{\hat{h}\circ g}}$ es estrictamente creciente. Podemos modificar $\hat{h}\circ g$, de forma tal que $A_{\hat{h}\circ g}=B\cap A_{\hat{h}\circ g}$. Con esto aseguramos que la función $\hat{h}\circ g$ se estrictamente creciente en $A_{\hat{h}\circ g}$. Solo resta demostrar que la imagen de $\hat{h}\circ g$ esta contenida en $\Omega(p)$. Para esto, es suficiente con probar que $\{n<\omega : \hat{h}(g(n))\in\Omega(p)\}\in p$. Como $B\in p$, entonces para cada $n\in B$, $A\in g(n)$. Así que $\hat{h}(g(n))\in R(g(n))$ pues $h|_A$ es estrictamente creciente. Por la hipótesis inductiva, se tiene que $R(g(n))\subset\Omega(p)$, luego $\hat{h}(g(n))\in\Omega(p)$, para cada $n\in B$. Se concluye que el conjunto $\{n<\omega : \hat{h}(g(n))\in\Omega(p)\}$ es un elemento de p ya que contiene a B. □

Teorema 2.2.9. *Sean $p,q\in\omega^*$. Entonces, $I\uparrow\mathcal{G}_q(\Omega(p))$ si y solo sí $q\in\Omega(p)$.*

Prueba: Necesidad: Sea σ una estrategia ganadora del jugador I en el $\mathcal{G}_q$-juego. Como ω es denso en $\Omega(p)$, entonces es posible encontrar una σ-sucesión $f\in\omega^{\nearrow\omega}$. Luego, por hipótesis tenemos que $\hat{f}(q)\in\Omega(p)$. Ya que $q\in R(\hat{f}(q))$, se sigue del Lema anterior que $q\in\Omega(p)$.

Suficiencia: La estrategia σ del jugador I en el $\mathcal{G}_q$-juego es obligar a que el jugador II tome puntos de tal manera que la sucesión resultante $f:\omega\to\Omega(p)$ sea un encaje y $f|_{A_f}$ es estrictamente creciente. Sea $q\in\Omega(p)$. Si $q\in X_1$, entonces la conclusión se sigue del Teorema 2.2.5. Supongamos que $q\in X_\mu$ y que para toda $s\in X_\nu$ con $\nu<\mu$, I gana con esta estrategia en el $\mathcal{G}_s$-juego. Si μ es un ordinal límite, no tenemos nada que probar. Supongamos que $\mu=\nu+1$ y $q\in X_\mu\setminus X_\nu$. De esto, se tiene que existe un encaje $g:\omega\to X_\nu$ tal que $q=\hat{g}(p)$ y $g|_{A_g}$ es estrictamente creciente. Sea f la sucesión resultante (de acuerdo a la estrategia σ) al jugar el $\mathcal{G}_q$-juego en un punto fijo de $\Omega(p)$. Consideremos la siguiente composición $\hat{f}\circ g:\omega\to\beta(\omega)$. Es claro que $\hat{f}\circ g$ es un encaje, y además $A_{\hat{f}\circ g}\subseteq A_g$. Por lo tanto, si $m,n\in A_{\hat{f}\circ g}$ y $m<n$, entonces $g(m)<g(n)$, luego $\hat{f}(g(m))=f(g(m))<f(g(n))=\hat{f}(g(n))$. Por lo tanto, $\hat{f}\circ g|_{A_{\hat{f}\circ g}}$ es estrictamente creciente. Para concluir que $\hat{f}(q)=\hat{f}(\hat{g}(p))\in\Omega(p)$, solo basta con probar que $\{n<\omega : \hat{f}(g(n))\in\Omega(p)\}\in p$. Ahora bien, si $A\in q$, entonces $B=\{n<\omega : A\in g(n)\}\in p$ pero como además $g(n)\in X_\nu$ y f es una σ-sucesión entonces por hipótesis inductiva,

$\hat{f}(g(n)) \in \Omega(p)$ para cada $n \in B$. $\square$

Corolario 2.2.10. *Para $p, q \in \omega^*$, son equivalentes:*

(a). $q \in \Omega(p)$.

(b). $\Omega(q) \subset \Omega(p)$.

(c). $I \uparrow \mathcal{G}_q(\Omega(p))$.

El Teorema que sigue da una cota inferior para la cardinalidad de un $\mathcal{G}$-espacio no discreto contenido en $\beta(\omega)$. Cabe mencionar, que en último capítulo, utilizando técnicas diferentes mejoraremos este resultado. Recordemos unas definiciones.

Una familia $\mathcal{F} \subset [\omega]^\omega$, se dice que tiene la propiedad de la <u>intersección finita fuerte</u>, si cada subfamilia finita tiene intersección infinita. Un conjunto infinito A es llamado una <u>pseudointersección</u> de $\mathcal{F}$, si $A \subseteq^* F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

$$\mathfrak{p} = \min\{|P| : P \subset [\omega]^\omega \text{ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte y ningun } X \in [\omega]^\omega \text{ es pseudointersección de P }\}$$

Teorema 2.2.11. *Si $\omega \subset X \subset \beta(\omega)$ es un espacio no discreto tal que $I \uparrow \mathcal{G}(X)$, entonces $|X| \geq \mathfrak{p}$.*

Prueba: Supongamos que $\kappa = |X| < \mathfrak{p}$. Sean $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una enumeración de X y $p \in X$. Para cada $\alpha < \kappa$, tomemos $A_\alpha \in p$ con $A_\alpha \notin p_\alpha$. Por hipótesis existe una estrategia ganadora $\sigma = \{\sigma_n : n < \omega\}$ para el jugador I en el $\mathcal{G}_p(p, X)$-juego. Se tiene que $|\{\sigma_n(\langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle) : \langle x_0, x_1, ...x_n\rangle \in X^{n+1}, n < \omega\}| < \mathfrak{p}$, por lo tanto existe $A \in [\omega]^\omega$ tal que $A \subseteq^* \sigma_n(\langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle) \cap \omega$ para cada $\langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle \in X^{n+1}$ y $n \in \omega$. Además $A \subseteq^* A_\alpha$, para cada $\alpha < \kappa$. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $A \notin p$. Consideremos una sucesión $(a_n)_{n<\omega}$, tal que $a_{n+1} \in \sigma_n(\langle a_0, a_1, ..., a_n\rangle) \cap A$ para cada $n < \omega$. Claramente ésta es una σ-sucesión y además $\{a_n : n < \omega\} \subseteq^* A_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$, por lo tanto no tiene puntos de acumulación en X, lo cual contradice que $I \uparrow \mathcal{G}(X)$. Por lo tanto, $|X| \geq \mathfrak{p}$. $\square$

Capítulo 3

Productos y juegos topológicos

En esta parte, estudiaremos los $\mathcal{G}$-juegos y los $\mathcal{G}_p$-juegos en los espacios producto, dando condiciones necesarias (y/o suficientes) en los elementos de una familia de espacios, para que en el espacio producto de la familia, el jugador I o II tenga estrategia ganadora en el juego en cuestión.

En la primera sección, trabajamos con los productos infinitos de espacios. Los primeros resultados muestran las condiciones necesarias para que en el producto de una familia de ω_1 espacios el jugador I pueda tener estrategia ganadora en el $\mathcal{G}$-juego o el $\mathcal{G}_p$-juego (Teorema 3.1.1, 3.1.2 y 3.1.3). Después usando un resultado de Ginsburg y Saks ([GS]), damos varias equivalencias al hecho de que el jugador I tenga estrategia ganadora en el $\mathcal{G}$-juego (o el $\mathcal{G}_p$-juego) en potencias infinitas de un espacio fijo (Corolario 3.1.4 y Corolario 3.1.5). La sección la concluimos con un ejemplo que muestra que no es condición suficiente la conclusión del Teorema 3.1.1.

La sección que sigue, trata sobre productos finitos de espacios. Esta sección puede visualizarse en tres partes. En la primera (Ejemplo 3.2.2, Lema 3.2.5 y Teorema 3.2.7), se construyen espacios numerablemente compactos cuyos productos no son $\mathcal{G}$-espacio. En la segunda parte (Corolario 3.2.8, Teorema 3.2.9, Teorema 3.2.10 y el ejemplo 3.2.11), las hipótesis de los resultados son delimitadas por los $\mathcal{G}_p$-juegos, aquí se muestran espacios X y Y en los cuales $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$ y $I \uparrow \mathcal{G}_q(Y)$, pero que no siempre es posible $I \uparrow \mathcal{G}(X \times Y)$, esto depende mucho de como estén relacionados los ultrafiltros p y q. Los resultados de la tercera parte, muestran las condiciones necesarias para que $I \uparrow \mathcal{G}(X \times Y)$ donde X y Y son subespacios específicos de $\beta(\omega)$.

3.1 Productos infinitos y juegos

Si $\{X_i : i \in J\}$ es una familia de espacios y $X = \prod_{i\in J} X_i$, una base para la topología Tychonoff en X, esta formada por todos los conjuntos de la forma $\bigcap_{i\in F}[i, V_i]$, donde $F \in [J]^{<\omega}$, V_i es un subconjunto abierto de X_i y

$$[j, V] = \{x \in \prod_{i\in J} X_i : x(j) \in V\}.$$

Teorema 3.1.1. *Si $\{X_\mu : \mu < \omega_1\}$ es una familia de espacios tal que $I \uparrow \mathcal{G}(\prod_{\mu<\omega_1} X_\mu)$, entonces existe $A \in [\omega_1]^{\leq\omega}$ tal que X_μ es numerablemente compacto para todo $\mu \in \omega_1 \setminus A$.*

Prueba: Supongamos que existe un conjunto $A \in [\omega_1]^{\omega_1}$ tal que X_μ no es numerablemente compacto, para cada $\mu \in A$. Entonces para cada $\mu \in A$, existe un subconjunto numerable, cerrado y discreto $\{y_n^\mu : n < \omega\}$ de X_μ. Fijemos $x \in X$. Veamos que el jugador II tiene una estrategia ganadora en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego. El jugador I empieza jugando un abierto $V_0 = \bigcap_{\mu\in F_0}[\mu, W_\mu^0]$, donde $F_0 \in [\omega_1]^{<\omega}$ y $W_\mu^0 \in \mathcal{N}(x(\mu))$, para cada $\mu \in F_0$. El jugador II responde tomando $x_0 \in X$ definida de la siguiente manera

$$x_0(\mu) = \begin{cases} x(\mu) & \text{si} \quad \mu \in (\omega_1 \setminus A) \cup F_0, \\ y_0^\mu & \text{si} \quad \mu \in A \setminus F_0. \end{cases}$$

Ahora, el jugador I escoge $V_1 = \cap_{\mu\in F_1}[\mu, W_\mu^1]$, donde $F_1 \in [\omega_1]^{<\omega}$ y $W_\mu^1 \in \mathcal{N}(x(\mu))$, para cada $\mu \in F_1$. El jugador II responde tomando el punto $x_1 \in X$ definido como

$$x_1(\mu) = \begin{cases} x(\mu) & \text{si} \quad \mu \in (\omega_1 \setminus A) \cup F_1, \\ y_1^\mu & \text{si} \quad \mu \in A \setminus F_1, \end{cases}$$

y así sucesivamente. Claramente, $x_n \in V_n = \bigcap_{\mu\in F_n}[\mu, W_\mu^n]$, para cada $n < \omega$. Ya que el conjunto $\bigcup_{n<\omega} F_n$ es numerable, entonces existe $\nu \in A \setminus (\bigcup_{n<\omega} F_n)$. Pero entonces, el conjunto $\{x_n(\nu) : n < \omega\} = \{y_n^\nu : n < \omega\}$ no tiene punto de acumulación en X_ν. Esto implica que el conjunto $\{x_n : n < \omega\}$ no puede tener punto de adherencia en X, lo cual es una contradición. Por lo tanto, A tiene que ser numerable. $\square$

Corolario 3.1.2. *Si $I \uparrow \mathcal{G}(X^{\omega_1})$, entonces X^{ω_1} es numerablemente compacto.*

Prueba: Es una aplicación directa del Teorema anterior al espacio $(X^{\omega_1})^{\omega_1}$, que es homeomorfo a X^{ω_1}. □

La prueba del siguiente Teorema es análoga a la prueba del Teorema 3.1.1

Teorema 3.1.3. *Sea $p \in \omega^*$ y $\{X_\mu : \mu < \omega_1\}$ es un conjunto de espacios tal que $I \uparrow \mathcal{G}_p(\prod_{\mu<\omega_1} X_\mu)$, entonces existe $A \in [\omega_1]^{\leq\omega}$ tal que X_μ es p-compacto para cada $\mu \in \omega_1 \setminus A$.*

Sabemos que la p-compacidad, para $p \in \omega^*$, caracteriza los espacios numerablemente compactos cuyas potencias son numerablemente compactas (este es un resultado de J. Ginsburg y V. Saks [GS]). Esta caracterización y el Teorema 3.1.3 implican lo siguiente:

Corolario 3.1.4. *Para cada espacio X, se tiene que los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1). *$I \uparrow \mathcal{G}(X^\kappa)$, para todo cardinal κ.*

(2). *$I \uparrow \mathcal{G}(X^{2^{\mathfrak{c}}})$.*

(3). *Todas las potencias de X son numerablemente compactas.*

(4). *X es p-compacto, para algún $p \in \omega^*$.*

Prueba: (1) $\Longrightarrow$ (2) es obvio. (3) $\Longleftrightarrow$ (4) es el resultado de J. Ginsburg y V. Saks. (4) $\Longrightarrow$ (1) se siguen del hecho de que la p-compacidad es cerrada bajo productos arbitrarios. Así que solo resta probar que (2) $\Longrightarrow$ (3). Sea $Y = (X^{2^{\mathfrak{c}}})^{\omega_1}$. Este espacio es homeomorfo a $X^{2^{\mathfrak{c}}}$. Por lo tanto se tiene que $I \uparrow \mathcal{G}(Y)$. Luego, por el Corolario 3.1.2, $X^{2^{\mathfrak{c}}}$ es numerablemente compacto. Aplicando una vez mas el resultado de J. Ginsburg y V. Saks, concluimos que todas las potencias de X son numerablemente compactas. □

Corolario 3.1.5. *Sea $p \in \omega^*$ y X un espacio. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados.*

(1). $I \uparrow \mathcal{G}_p(X^\kappa)$, *para todo cardinal* κ.

(2). $I \uparrow \mathcal{G}_p(X^{\omega_1})$.

(3). X *es* p*-compacto.*

En [Gru], G. Gruenhage demostró que el producto numerable de W-espacios es un $W-$espacio. Esto también es valido para los $\mathcal{G}_p$-espacios.

Teorema 3.1.6. *Sean $p \in \omega^*$ y $\{X_i : i < \omega\}$ una familia de espacios. Si $I \uparrow \mathcal{G}_p(X_i)$, para toda $i < \omega$, entonces $I \uparrow \mathcal{G}_p(\prod_{i<\omega} X_i)$.*

Prueba: Sea $\{X_i : i < \omega\}$ una familia que cumple las condiciones del Teorema. Pongamos $X = \prod_{i<\omega} X_i$ y fijemos $x \in X$. Tenemos que, para cada $i < \omega$, existe una estrategia ganadora $\tau^i = \{\tau^i_n : X_i^{n+1} \to \mathcal{N}(x(i)) : n < \omega\}$, para el jugador I en el $\mathcal{G}_p(x(i), X_i)$-juego. Para cada $n < \omega$ y $(y_0, ..., y_n) \in X^{n+1}$, definimos $\sigma_n : X^{n+1} \to \mathcal{N}(x)$ como $\sigma_n(y_0, ..., y_n) = \bigcap_{i\leq n}[i, \tau^i_n(y_0(i), ..., y_n(i))]$. Veamos que el conjunto $\sigma = \{\sigma_n : n < \omega\}$ es una estrategia ganadora para I en el $\mathcal{G}_p(x, X)$-juego. Tomemos una σ-sucesión $(y_n)_{n<\omega}$. Por definición, tenemos que $y_{n+1} \in \sigma(y_0, ..., y_n)$, para cada $n < \omega$, y por lo tanto $y_{n+1}(i) \in \tau^i_n(y_0(i), ..., y_n(i))$, para cada $i, n < \omega$. Es decir, $(y_n(i))_{n<\omega}$ es una τ^i-sucesión, para cada $i < \omega$. Por hipótesis, para cada $i < \omega$, existe $y(i) = p-\lim y_n(i)$. Por lo tanto, tenemos que $y = p-\lim y_n$. Con lo cual concluimos que $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$. □

No es posible extender este teorema a potencias más grandes sin condiciones extras. En efecto, considérese el espacio $X = \beta(\omega)\setminus\{p\}$, donde $p \in \omega^*$; este es un espacio tal que $I \uparrow \mathcal{G}_p(X^\omega)$, pero $I \downarrow \mathcal{G}_p(X^{\omega_1})$. Esto también muestra que no es equivalente que I tenga estrategia ganadora en el $\mathcal{G}_p$-juego en todo punto del espacio, a que el espacio sea p-compacto.

Concluimos la sección con un ejemplo, el cual muestra que no es posible el recíproco del Teorema 3.1.1

Ejemplo 3.1.7. *Existe una familia de espacios* $\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ *tal que* X_α *es numerablemente compacto para toda* $\alpha < \omega_1$, $I \uparrow \mathcal{G}(\prod_{\alpha<\beta} X_\alpha)$ *para toda* $\beta < \omega_1$, *pero* $II \uparrow \mathcal{G}(\prod_{\alpha<\omega_1} X_\alpha)$.

Prueba: Consideremos una familia $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de ultrafiltros en ω que sean RK-incomparables dos a dos (véase el Teorema 1.2.26). Para cada $\alpha < \omega_1$, definimos

$$X_\alpha = \Omega(\{p_\beta : \beta \geq \alpha\})$$

de manera análoga al espacio construido en el Teorema 2.2.4, agregando en cada paso de la construcción, el p_β-límite de los encajes, donde $\beta \geq \alpha$. Es fácil ver que X_α es un espacio numerablemente compacto, para cada $\alpha < \omega_1$.

Afirmación 1: $\bigcap_{\alpha<\omega_1} X_\alpha = \omega$.

Esto se obtiene del hecho de que si $x \in (\bigcap_{\alpha<\omega_1} X_\alpha) \setminus \omega$, entonces x sería un RF-sucesor de algunos ultrafiltros de la familia $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, pero por el Teorema 1.2.32, esto implicaría que hay ultrafiltros RF-comparables en esta familia, lo cual es imposible. De hecho, se obtiene con un razonamiento análogo que para todo $\beta < \omega_1$, $\bigcap_{\beta<\alpha<\omega_1} X_\alpha = \omega$.

Afirmación 2: Para cada $n \in \omega$, sea $c_n \in \prod_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$, tal que $c_n(\alpha) = n$ para todo $\alpha < \omega_1$. El conjunto $\{c_n : n < \omega\}$ es cerrado y discreto en $\prod_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$.

Fácilmente se deduce que es discreto. Veamos que es cerrado. Supongamos que existe $y \in \prod_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ que es punto de acumulación. Esto implica que

$$\{\{n : c_n \in V\} : V \in \mathcal{N}(y)\}$$

es un filtro, por lo tanto existe $q \in \omega^*$ tal que

$$q\text{-}\lim c_n = y$$

pero como $c_n(\alpha)$ es la constante n, entonces $y(\alpha) = q$ para todo $\alpha < \omega_1$, lo cual es imposible por la afirmación 1.

Afirmación 3: Para todo $\gamma < \omega_1$, $I \uparrow \mathcal{G}(\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha)$.

De hecho probaremos que $I \uparrow \mathcal{G}_{p_\gamma}(\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha)$. Nótese que $p_\gamma \in \{p_\beta : \beta \geq \alpha\}$ para toda $\alpha < \gamma$. Por lo tanto el p_γ-límite de cualquier encaje en X_α es un elemento de X_α. Con lo cual se sigue que $I \uparrow \mathcal{G}_{p_\gamma}(X_\alpha)$, para todo $\alpha < \gamma$. Al aplicar el Teorema 3.1.6 obtenemos que $I \uparrow \mathcal{G}_{p_\gamma}(\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha)$.

Afirmación 4: $II \uparrow \mathcal{G}(\prod_{\alpha<\omega_1} X_\alpha)$.

Sea $x \in \prod_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ y supongamos que la jugada n-ésima el jugador I juega $V_n = \bigcap_{\alpha\in F_n}[\alpha, V_\alpha]$, donde $F_n \in [\omega_1]^{<\omega}$ y $V_\alpha \in \mathcal{N}(x(\alpha))$ para cada $\alpha \in F$. La estrategia del jugador II es tomar $x_n \in \prod_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ definida de la siguiente manera

$$x_n(\mu) = \begin{cases} x(\alpha) & \text{si} \quad \alpha \in F_n, \\ n & \text{si} \quad \mu \in \omega_1 \setminus (\bigcup_{m\leq n} F_m). \end{cases}$$

Por la Afirmación 1, se tiene que para $\beta = sup(\bigcup_{n<\omega} F_n)$, el conjunto $\{x_n|_{[\beta,\omega_1)} = n : n < \omega\}$ no tienen puntos de acumulación, por lo tanto el conjunto $\{x_n : n < \omega\}$ es cerrado y discreto. □

3.2 Productos finitos y juegos

Hemos visto en el Teorema 3.1.6 que si el jugador I tiene estrategia ganadora en el $\mathcal{G}_p$-juego en los elementos de una familia numerable de espacios, entonces éste también tiene estrategia ganadora en el $\mathcal{G}_p$-juego del espacio producto. Aquí veremos que esta afirmación no es cierta en los $\mathcal{G}$-juegos aún en el caso de dos espacios.

Es fácil probar que el producto de un espacio compacto y un numerablemente compacto es numerablemente compacto. Sin embargo, J. Novák [1953] y H. Terasaka [1952], mostraron que ésto no es cierto si los espacios son numerablemente compactos (véase [Va, Lema 3.1]). Los siguientes resultados generalizan el ejemplo de Novák y Terasaka ya que muestran espacios numerablemente compactos cuyo producto no es un $\mathcal{G}$-espacio (de hecho el jugador II tiene estrategia ganadora en el $\mathcal{G}$-juego).

Lema 3.2.1. *Existe un familia $\{X_\mu : \mu < \omega_1\}$ de subconjuntos de ω^* y una familia $\{p_\mu : \mu < \omega_1\}$ de puntos en ω^* tal que:*

(1). *p_μ y p_ν son ultrafiltros RK-incomparables para distintos $\mu, \nu < \omega_1$.*

(2). *$X_\mu = \{\hat{f}(p_\mu) : f : \omega \to \bigcup_{\nu<\mu} X_\nu$ es un encaje$\} \subseteq S_{RF}(p_\mu)$, para cada $0 < \mu < \omega_1$.*

(3). *$|X_\mu| \leq \mathfrak{c}$, para cada $\mu < \omega_1$.*

(4). *$X_\mu \cap X_\nu = \emptyset$, para $\mu < \nu < \omega_1$.*

Prueba: Por el Teorema 1.2.26, sabemos que existe un conjunto W de cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$ contenido en ω^* formado por P-puntos débiles y RK-incomparables dos a dos. Además, por el Teorema 1.2.32 tenemos que $S_{RF}(s) \cap S_{RF}(t) = \emptyset$ para distintos $s, t \in W$. Sea $p_0 \in W$ y $X_0 = T(p_0)$. Ahora, supongamos que, para cada $\mu < \theta < \omega_1$, p_μ y X_μ han sido definidos de forma tal que cumplen las condiciones (1)-(4). Sea p_θ es un elemento de $W \setminus \{p_\mu : \mu < \theta\}$. Por la condición (2) y la observación anterior, obtenemos que $S_{RF}(p_\theta) \cap (\bigcup_{\mu<\theta} X_\mu) = \emptyset$ y además del inciso (3), obtenemos que $|\bigcup_{\mu<\theta} X_\mu| \leq \mathfrak{c}$. Así que el conjunto $X_\theta = \{\hat{f}(p_\theta) : f : \omega \to \bigcup_{\mu<\theta} X_\mu$ es un encaje$\}$ satisface las condiciones (2), (3) y (4). Con lo cual concluimos que existe la familia de subconjuntos buscados. □

Z. Frolík demostró que para cada $n > 0$ existe un espacio X tal que X^n es numerablemente compacto, pero que X^{n+1} no lo es (véase [Fro]). Siguiendo la idea de Frolík desmotramos el siguiente resultado para el $\mathcal{G}$-juego.

Ejemplo 3.2.2. *Para cada $1 \leq n < \omega$, existe un espacio X tal que X^n es numerablemente compacto y X^{n+1} no es un $\mathcal{G}$-espacio.*

Prueba: Sea $\{X_\mu : \mu < \omega_1\}$ y $\{p_\mu : \mu < \omega_1\}$ conjuntos que satisfacen las condiciones del Lema 3.2.1. Para $\emptyset \neq I \subseteq \omega_1$, definimos $X_I = \omega \cup (\bigcup_{\mu \in I} X_\mu)$. Usaremos el siguiente resultado, el cual es el Teorema D de [Fro]:

(∗) Sea $\{I_n : n < \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\omega_1)$ una familia de conjuntos no vacíos. Si $\bigcap_{n<\omega} I_n$ no es acotado en ω_1, entonces $\prod_{n<\omega} X_{I_n}$ es numerablemente compacto. Si $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$, entonces $\prod_{n<\omega} X_{I_n}$ no es numerablemente compacto.

Fijemos $n \in \omega \setminus \{0\}$. Para $k \leq n$, sea $I_k = \{\mu < \omega_1 : \mu \not\equiv k \; mod(n+1)\}$. Consideremos la suma topológica $X = \oplus_{k \leq n} X_{I_k}$. Ya que $\bigcap_{1 \leq i \leq n} I_{k_i}$ no es acotado en ω_1, por (∗), $X_{I_{k_1}} \times ... \times X_{I_{k_n}}$ es numerablemente compacto, para cada $k_1, ..., k_n \in n+1$. Esto prueba que $X^n = \bigcup_{k_1,...k_n \in n+1} X_{I_{k_1}} \times ... \times X_{I_{k_n}}$ es numerablemente compacto. Para probar que X^{n+1} no es un $\mathcal{G}$-espacio, es suficiente probar que $I \downarrow \mathcal{G}(X_{I_0} \times X_{I_1} \times ... \times X_{I_n})$. Para cada $k \leq n$, fijemos un punto no aislado $x_k \in X_{I_k}$. Probaremos que el jugador I no tiene estrategia ganadora en el $\mathcal{G}((x_0, ..., x_n), X_{I_0} \times X_{I_1} \times ... \times X_{I_n})$-juego. Sea $\sigma = \{\sigma_m : (X_{I_0} \times X_{I_1} \times ... \times X_{I_n})^m \to \mathcal{N}((x_0, ..., x_n)) : m < \omega\}$ una estrategia para el jugador I. No es difícil probar que, para cada $k \leq n$, el jugador II puede escoger $f_k \in \omega^{\nearrow\omega}$ tal que

$(f_1(m+1), ..., f_n(m+1)) \in \sigma_m((f_1(0), ..., f_n(0)), ..., (f_1(m), ..., f_n(m))),$

para cada $m < \omega$ y para cada $k \leq n$. Supongamos que existe $r \in \omega^*$ tal que $\hat{f}_k(r) \in X_{I_k}$, para toda $k \leq n$. Entonces para cada $k \leq n$, $\hat{f}_k(r) \in X_{\mu_k}$, para algún $\mu_k \in I_k$. Por definición, $p_{\mu_k} \leq_{RF} \hat{f}_k(r) \approx r$, para cada $k \leq n$. El Teorema 1.2.32 implica que $p_{\mu_0} = p_{\mu_1} = ... = p_{\mu_n}$ y por lo tanto $\mu_0 = \mu_1 = ... = \mu_n \in \bigcap_{k \leq n} I_k = \emptyset$, que es una contradicción. Por lo tanto, el conjunto $\{(f_1(m), ..., f_n(m)) : m < \omega\}$ no tiene punto de acumulación en $X_{I_0} \times X_{I_1} \times ... \times X_{I_n}$. Con lo que concluimos que X^{n+1} no es un $\mathcal{G}$-espacio. $\square$

El siguiente ejemplo que veremos muestra dos espacios en los que el jugador I tiene estrategia ganadora en el $\mathcal{G}_p$-juego y el $\mathcal{G}$-juego, pero no tiene estrategia ganadora en el producto de estos dos espacios en el $\mathcal{G}$-juego. Antes veremos algunos Lemas que se usarán constantemente.

Lema 3.2.3. *Sean $p, q \in \omega^*$ y sean $f, g : \omega \to \omega$ funciones inyectivas. Si $p \not\approx q$, entonces (p, q) no es punto de acumulación de $\{(f(n), g(n)) : n < \omega\}$ en $\beta(\omega) \times \beta(\omega)$.*

Prueba: Supongamos lo contrario. Entonces existe $r \in \omega$ tal que $p = \hat{f}(r)$ y $q = \hat{g}(r)$. Por el Teorema 1.2.18.(4), se tiene que $p \approx r$ y $q \approx r$. Por lo tanto $p \approx q$, lo cual es imposible. $\square$

Lema 3.2.4. *Sea $\omega \subseteq X, Y \subset \beta(\omega)$ dos espacios no discretos. Si $T(X) \cap T(Y) = \omega$. Entonces $II \uparrow \mathcal{G}((x, y), X \times Y)$, para todo $(x, y) \in X \times Y \cap \omega^* \times \omega^*$.*

Prueba: Sean $x \in X \cap \omega^*$ y $y \in Y \cap \omega^*$. Sea $(V_n \times W_n)_{n<\omega}$ un sucesión de vecindades básicas de (x, y) en $X \times Y$. Como ω es denso en ambos espacios, podemos encontrar funciones estrictamente crecientes $f, g : \omega \to \omega$ tal que $f(n) \in V_n$ y $g(n) \in W_n$, para cada $n < \omega$, y $f[\omega] \cap g[\omega] = \emptyset$. Por el Lema 3.2.3, el conjunto $\{(f(n), g(n) : n < \omega\}$ no tiene punto de acumulación en el espacio $X \times Y$. Por lo tanto, $II \uparrow \mathcal{G}((x, y), X \times Y)$. $\square$

Lema 3.2.5. *Si X es un espacio numerablemente compacto, $|X| \leq \mathfrak{c}$ y $\omega \subseteq X \subseteq \beta(\omega)$, entonces existe un espacio numerablemente compacto Y tal que $II \uparrow \mathcal{G}(X \times Y \cap \omega^* \times \omega^*)$.*

Prueba: Por el Teorema 1.2.24, podemos encontrar $q \in \omega^*$ tal que para todo $r \in X$, $r <_{RK} q$. Se tiene que $Y = \beta(\omega) \setminus P_{RK}(q)$ es un espacio numerablemente compacto. Y además, $T(X) \cap T(Y) = \omega$, entonces, por el Lema 3.2.4 se concluye que $II \uparrow \mathcal{G}(X \times Y \cap \omega^* \times \omega^*)$. $\square$

El siguiente teorema muestra un espacio numerablemente compacto X, tal que $X \times X$ no es numerablemente compacto en un sentido más fuerte, es decir, el jugador II tiene estrategia ganadora en el $\mathcal{G}$-juego en este producto. Para la prueba de este teorema, usaremos el siguiente lemma, el cual utiliza un espacio que es numerable, denso en si mismo y extremadamente disconexo. Este espacio es definido para un ultrafiltro fijo $p \in \omega^*$ y es denotado como $Seq(p)$. Su conjunto base es $\omega^{<\omega}$, el conjunto de las funciones finitas en ω. Un subconjunto U de $\omega^{<\omega}$ se dice que es abierto si y solo si para cada $t \in \omega^{<\omega}$, $\{n < \omega : t^\frown n\} \in p$ (para mas detalles de $Seq(p)$, véase [DGS], [LS], [BS] o [Va1]).

Lema 3.2.6. *Existe un subespacio X de ω^* que es numerable, denso en si mismo y con la propiedad de que para cada punto $x \in X$, este tiene una sucesión de vecindades $\{V_n : n < \omega\}$ tal que si $\{x_n : n < \omega\} \subset X$ con $x_n \in \bigcap_{m \leq n} V_m$ para cada $n < \omega$, entonces existe una vecindad V de x, tal que $V \cap \{x_n : n < \omega\} = \emptyset$.*

Prueba: Consideremos el espacio $Seq(p)$, con p un ultrafiltro en ω que no es P-punto. Usando el Teorema 1.4.7 de [JvM], podemos tomar una copia homeomorfa de $Seq(p)$ dentro de ω^*. Por lo tanto es suficiente probar que $Seq(p)$ es el espacio buscado.

Como p no es un P-punto, entonces existe una sucesión $\{U_n : n < \omega\} \subset p$ que no tiene pseudointersección en p. Tomemos $x \in Seq(p)$ y $V_n = \{t \in Seq(p) : x \subseteq t \text{ y } t(|x|) \in U_n\}$. Si $(x_n)_{n<\omega}$ es una sucesión tal que $x_n \in \bigcap_{m \leq n} V_m$, entonces $x_n(|x|) \in U_m$, para cada $n > m$. Por lo tanto $W = \{x_n(|x|) : n < \omega\} \notin p$. Así que $U = \omega \setminus W \in p$, esto implica que $V = \{t \in X : x \subseteq t \text{ y } t(|x|) \in U\}$ es una vecindad de x, disjunta de $\{x_n : n < \omega\}$. $\square$

También necesitaremos el concepto de *tipo relativo*, para la prueba del teorema mencionado. Este concepto fue introducido por Z. Frolík y se define como sigue: Si Y es un subconjunto numerable y discreto de ω^* y $p \in Y^* = \overline{Y}^{\beta\omega} \setminus Y$, entonces el tipo de p relativo Y es $T(\hat{h}(p))$, donde $h : Y \to \omega$ es una biyección. Esto lo denotaremos como $T(p, Y)$. Notese que este no depende de la función biyectiva. En general, si $S \subset \omega^*$ y $p \in \omega^*$, se define

$T[p,S] = \{T(p,Y) : Y \in [S]^{\omega}$ y Y es homeomorfo a $\omega\}$. Frolík probo que $T[p,\omega^*]$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Teorema 3.2.7. *Existe un espacio X numerablemente compacto, tal que $II \uparrow \mathcal{G}(X \times X)$.*

Prueba: El espacio X sera la unión de $\{X_\nu : \nu < \omega_1\}$, donde cada X_ν es construido recursivamente. Supongamos que para cada $\mu < \nu < \omega_1$ hemos construido X_μ tal que

1. $X_0 \subseteq \omega^*$ es numerable y denso en si mismo.
2. X_0 es un subconjunto denso de X_μ, para cada $\mu < \nu$.
3. $|X_\mu| \leq \mathfrak{c}$, para cada $\mu < \nu$.
4. $X_\eta \subset X_\mu$, si $\eta < \mu < \nu$.
5. Si $\mu + 1 < \nu$, entonces cada subconjunto numerable y discreto de X_μ tiene un punto de acumulación en $X_{\mu+1}$.
6. Para cada $x \in X_\mu \setminus X_0$, $\{y \in X_\mu : T[x,X_0] \cap T[y,X_0] \neq \emptyset\} = \{x\}$.

Sea X_0 el espacio del Lema 3.2.6. Ahora, definiremos X_ν. Si ν es un ordinal limite, definimos $X_\nu = \bigcup_{\mu<\nu} X_\mu$. Cuando ν es un ordinal sucesor, $\nu = \mu + 1$. Primeramente, enumeramos el conjunto de todos los encajes de ω a X_μ, como $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ (este tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ por la clausula 3). Luego, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, tomamos un punto $p_\alpha \in \overline{f_\alpha[\omega]}^{\beta(\omega)}$ tal que para todo $y \in X_\mu$, $T[p_\alpha, X_0] \cap T[y, X_0] = \emptyset$, y también $T[p_\alpha, X_0] \cap T[p_\beta, X_0] = \emptyset$, para todo $\beta < \alpha$. Usando estos puntos, definimos $X_{\mu+1} = X_\mu \cup \{p_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$.

Notese que el espacio $X = \bigcup_{\nu<\omega_1} X_\nu$ es numerablemente compacto y además satisface que para cada $p \in \omega^*$, $|\{y \in X \setminus X_0 : T(p) \in T[y,X_0]\}| \leq 1$. De hecho, $|\{y \in X : T(p) \in T[y,X_0]\}| \leq \omega$.

Veamos que $II \uparrow \mathcal{G}((x,y), X \times X)$, para cada punto $(x,y) \in X \times X$. Denotemos con Δ el conjunto $\{(x,x) : x \in X_0\}$.

Caso (i): $(x,y) \in X \times X \setminus (X_0 \times X_0)$. Sea $\{(x_n,y_n) : n < \omega\}$ una enumeración de todos los puntos en $X_0 \times X_0$. Para cada $n < \omega$, sea $W_n \in \mathcal{N}((x_n,y_n)) \setminus \mathcal{N}((x,y))$ un cerrado abierto tal que $X_0 \times X_0 \setminus \bigcup_{m\leq n} W_m$ es infinito para cada $n < \omega$ y también $(x_m,y_m) \notin W_n$ para cada $m < n$ (esto es posible, ya que el espacio X_0 es un subespacio de ω^* denso en si mismo).

Sea V_0 el primer movimiento del jugador I. El jugador II responde con el punto $(g(0), h(0)) \in V_0 \cap (X_0 \times X_0)$, y al mimo tiempo, toma un par de cerrado-abiertos A_0 y B_0 tales que:

$A_0 \in \mathcal{N}(g(0)) \setminus \mathcal{N}(x)$,
$B_0 \in \mathcal{N}(h(0)) \setminus \mathcal{N}(y)$ y
$(X_0 \times X_0) \setminus [(A_0 \times X_0) \cup (X_0 \times B_0) \cup \Delta)]$ es infinito.

Inductivamente los jugadores I y II producen una sucesión de puntos $\{(g(n), h(n)) : n < \omega\}$ en $X_0 \times X_0$ y una sucesión de cerrado-abiertos $\{A_n : n < \omega\}$ y $\{B_n : n < \omega\}$, tal que, si lo movimientos del jugador I son denotados por V_n's, entonces:

1. $(g(0), h(0)) \in V_0$,
2. $(g(n), h(n)) \in V_n \cap (X_0 \times X_0 \setminus [\bigcup_{m \le n} W_m \cup \bigcup_{m<n}(A_m \times X_0) \cup (X_0 \times B_m) \cup \Delta])$, para todo $n < \omega$,
3. $A_n \in \mathcal{N}(g(n)) \setminus \mathcal{N}(x)$, para todo $n < \omega$,
4. $B_n \in \mathcal{N}(h(n)) \setminus \mathcal{N}(y)$, para todo $n < \omega$, y
5. $X_0 \times X_0 \setminus [\bigcup_{m \le n} W_m \cup \bigcup_{m \le n}(A_m \times X_0) \cup (X_0 \times B_m) \cup \Delta]$ es infinito, para todo $n < \omega$.

Por por como fue construido el espacio X, el jugador II pude jugar de esta manera, escogiendo los conjuntos A_n's y B_n's de forma tal que satisfacen las condiciones anteriores.

Al final del partido, la sucesión resultante $S(g, h) = \{(g(n), h(n)) : n < \omega\}$ es un conjunto discreto. Además, tenemos que las funciones definidas en cada coordenada, $g, h : \omega \to X_0$ son encajes. Ahora, ya que $(x_n, y_n) \in W_n$ para cada $n < \omega$, entonces ningún punto de $X_0 \times X_0$ esta en la cerradura de $S(g, h)$. Si $(a, b) \in X \times X \setminus X_0 \times X_0$ fuera un punto de acumulación de $S(g, h)$, entonces $T[a, X_0] \cap T[b, X_0] \neq \emptyset$, pero por construcción de X, esto implica que $a = b$. No obstante, como $S(g, h) \cap \Delta = \emptyset$, entonces este punto no puede estar en la cerradura de $S(g, h)$. Por lo tanto $S(g, h)$ es un conjunto cerrado y discreto.

Caso (ii): $(x, y) \in X_0 \times X_0$. Sea $\{(x_n, y_n) : n < \omega\}$ una enumeración de todos los puntos en $X_0 \times X_0 \setminus \{(x, y)\}$ y sea $\{W_n : n < \omega\}$ una sucesión de vecindades como el Caso (i). Además, sean $\{U_n^x : n < \omega\}$ y $\{U_n^y : n < \omega\}$ las sucesiones de vecindades de x y y respectivamente, dadas por el Lema 3.2.6. Si V_n es el n-th movimiento del jugador I, entonces el jugador II jugara como antes, pero con la clausula 2 cambiada, por:

$$(g(n), h(n)) \in V_n \cap (\bigcap_{m\leq n} U^x_m \times U^y_m) \cap (X_0 \times X_0 \setminus [\bigcup_{m\leq n} W_m \cup \bigcup_{m<n}(A_m \times X_0) \cup (X_0 \times B_m) \cup \Delta]).$$

Una vez mas, las sucesión resultante $S(g, h)$ es discreta con g y h encajes. En este caso, el único posible punto de acumulación es el punto (x, y). Pero esto no puede ser, por como son las sucesiones g y h, y de las propiedades de los puntos de X_0. Por lo tanto tenemos que el conjunto $S(g, h)$ es cerrado y discreto. □

En los siguientes resultados cambiamos la condición de numerablemente compacto por la de $\mathcal{G}_p$ y $\mathcal{G}_q$-espacio. Estos muestran que al ir dando diferentes propiedades a p y q, también cambia el ganador en el $\mathcal{G}$-juego.

Hay varias formas de probar el siguiente corolario, una es usando el espacio $\beta_p(\omega)$ (véase 1.2.45 o [G-F1]), la idea de la prueba del Teorema 3.2.5 y el Teorema 2.2.1.

Corolario 3.2.8. *Para cada $p \in \omega^*$, existen subespacios X, Y de $\beta(\omega)$ y $q \in \omega^*$, tales que $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$, $I \uparrow \mathcal{G}_q(Y)$, pero $II \uparrow \mathcal{G}(X \times Y \cap \omega^* \times \omega^*)$.*

Teorema 3.2.9. *Sean $p, q \in \omega^*$ RK-incomparables. Entonces existen espacios X y Y tales que $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$, $I \uparrow \mathcal{G}_q(Y)$ y $II \uparrow \mathcal{G}(X \times Y \cap \omega^* \times \omega^*)$.*

Prueba: Considérese los espacios $X = S_{RF}(p) \cup T(p) \cup \omega$ y $Y = S_{RF}(q) \cup T(q) \cup \omega$. Es fácil probar que $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$ y $I \uparrow \mathcal{G}_q(Y)$. Probaremos que $II \uparrow \mathcal{G}((x, y), X \times Y)$, para $x \in X \cap \omega^*$ y $y \in Y \cap \omega^*$. La estrategia del jugador II en el $\mathcal{G}((x, y), X \times Y)$-juego, es escoger funciones $f, g \in \omega^{\nearrow\omega}$, con $f[\omega] \cap g[\omega] = \emptyset$, esto es posible ya que $\omega \times \omega$ es denso en $X \times Y$. Si $(s, t) \in X \times Y$ es punto de acumulación de $\{(f(n), g(n)) : n < \omega\}$, entonces por el Lema 3.2.3, $s \approx t$. Pero por la forma como son los espacio X y Y, se tiene que $p \leq_{RF} s$ y $q \leq_{RF} t$, que junto con el hecho de que $s \approx t$ y el Teorema 1.2.32, se concluye que p y q son RF-comparables, lo cual es imposible. Por lo tanto el conjunto $\{(f(n), g(n)) : n < \omega\}$ no tiene puntos de acumulación. □

Teorema 3.2.10. *Sean $p, q \in \omega^*$ con $q \in R(p)$. Si X y Y son espacios tales que $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$ y $I \uparrow \mathcal{G}_q(Y)$, entonces $I \uparrow \mathcal{G}_q(X \times Y)$.*

Prueba: La prueba se obtiene de la aplicación de los Teorema 3.1.6 y Teorema 2.2.5. □

Ejemplo 3.2.11. *Sean $p, q \in \omega^*$ con $q \in T(p) \setminus R(p)$. Por el Teorema 2.2.4, se tiene que $I \uparrow \mathcal{G}_p(\Omega(p))$ y que $I \downarrow \mathcal{G}_q(\Omega(p))$. Al jugar el $\mathcal{G}_q((x, y), \Omega(p) \times \Omega(q))$-juego, donde $x \in \Omega(p) \cap \omega^*$ y $y \in \Omega(q) \cap \omega^*$, el jugador I no tiene estrategia ganadora.*

El espacio $\Delta_p = \omega \cup T_C(p)$ con $p \in \omega^*$, nos ayudará a encontrar las implicaciones que surgen al suponer que $I \uparrow \mathcal{G}(X \times Y)$. Usando el Teorema 2.2 y la idea del la demostración del Teorema 3.4 de [G-F1], obtenemos que $I \uparrow \mathcal{G}_p(\Delta_p)$.

Teorema 3.2.12. *Sean $p, q \in \omega^*$. Entonces, $I \uparrow \mathcal{G}(\Delta_p \times \Delta_q)$ si y solo sí $p \in T_C(q)$.*

Prueba: Necesidad: Como $I \uparrow \mathcal{G}(\Delta_p \times \Delta_q)$ entonces por el Lema 3.2.4, se tiene que $T_C(p) \cap \bigcup\{T_{RK}(r) : r \in T_C(q)\} \neq \emptyset$ o $T_C(q) \cap \bigcup\{T_{RK}(s) : s \in T_C(p)\} \neq \emptyset$. Sin perdida de generalidad supongamos que x es un elemento en el primero de estos conjuntos. Por lo cual, se obtienen las siguientes relaciones, $x \approx_C p$ y $x \approx_{RK} r$ para alguna $r \in T_C(q)$, las cuales implican que $p \approx_C r \approx_C q$.

Suficiencia: Como $p \in T_C(q)$, entonces $T_C(p) = T_C(q)$. Por lo tanto, Δ_p y Δ_q son $\mathcal{G}_p$-espacios, y por el Teorema 3.1.6 se concluye que $\Delta_p \times \Delta_q$ es un $\mathcal{G}$-espacio. □

Corolario 3.2.13. *Sean $p, q \in \omega^*$. Si para todo X y Y con $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$ y $I \uparrow \mathcal{G}_q(Y)$ se tiene que $I \uparrow \mathcal{G}(X \times Y)$, entonces p y q son RK-comparables y $p \approx_C q$.*

Prueba: Por el Teorema 3.2.9 se tiene que p y q no son RK-incomparables. Por otro lado, al aplicar el Teorema 3.2.12 a los espacios Δ_p y Δ_q, se concluye que $p \approx_C q$. □

El ejemplo que sigue, muestra que el recíproco del Corolario anterior, no es válido. Para esto, usaremos el siguiente resultado de S. García-Ferreira (véase [G-F1]). Si $r, s, p \in \omega^*$, son tales que r y s son RK-incomparables, $r <_{RK} p$ y $s <_{RK} p$. Entonces $p \otimes r \approx_C p \approx_C p \otimes s$, y además $p \otimes r$ y $p \otimes s$ son RK-incomparables.

Ejemplo 3.2.14. *Sean $s, t \in \omega^*$ RF-mimimal y RK-incomparables (véase [Ku]) y $r \in \omega^*$, tales que $s <_{RK} r$ y $t <_{RK} r$. Consideremos los ultrafiltros $p = s \otimes r$ y $q = t \otimes (s \otimes r)$. Entonces, tenemos que $p <_{RK} q$, $p \approx_C q$ (véase [G-F1]), pero p y q son RF-incomparables y no tiene ningún RF-predecesor en común. Del Teorema 3.2.15 se tiene que $I \downarrow \mathcal{G}(S_{RF}(p) \times S_{RF}(q))$. Por lo tanto, el recíproco de Corolario 3.2.13 no es valido.*

Usando el hecho de que $I \uparrow \mathcal{G}_p(S_{RF}(p))$ para cada $p \in \omega^*$, obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 3.2.15. *Sean $p, q \in \omega^*$. Si $I \uparrow \mathcal{G}(S_{RF}(p) \times S_{RF}(q))$, entonces se cumplen uno de los siguientes enunciados:*

(1). *p y q son RF-comparables.*

(2). *Existe $r \in \omega^*$ tal que $r <_{RF} p$ y $r <_{RF} q$.*

Prueba: Fijemos $(x, y) \in X = S_{RF}(p) \times S_{RF}(q)$. Sea σ una estrategia ganadora del jugador I en el $\mathcal{G}((x, y), X)$-juego. Tomemos $f : \omega \to S_{RF}(p)$ y $g : \omega \to S_{RF}(q)$ encajes, tales que $(f(n), g(n))_{n<\omega}$ es una σ-sucesión. Por hipótesis, que existe $r \in \omega^*$ tal que $\hat{f}(r) \in S_{RF}(p)$ y $\hat{g}(r) \in S_{RF}(q)$. Con lo cual se tienen las relaciones siguientes: $r <_{RF} \hat{f}(r)$, $r <_{RF} \hat{g}(r)$, $p <_{RF} \hat{f}(r)$ y $q <_{RF} \hat{g}(r)$. Al aplicar el Teorema 1.2.32, se obtiene que r y p son RF-comparables y también r y q son RF-comparables. Con lo cual se obtienen los enunciados (1) y (2). $\square$

El siguiente Teorema demuestra que la clausula de (1) del Teorema 3.2.15, es condición suficiente.

Teorema 3.2.16. *Si $p, q \in \omega^*$ y $p \leq_{RF} q$, entonces $I \uparrow \mathcal{G}_p(S_{RF}(p) \times S_{RF}(q))$.*

Prueba: Sean $f : \omega \to S_{RF}(p)$ y $g : \omega \to S_{RF}(q)$ dos encajes. Por transitividad del RF-orden, tenemos que $\hat{f}(q) \in S_{RF}(p)$ y $\hat{g}(q) \in S_{RF}(q)$. Por lo tanto, $(\hat{f}(q), \hat{g}(q))$ es un punto de acumulación de $\{(f(n), g(n)) : n < \omega\}$. Con lo que se concluye que $I \uparrow \mathcal{G}_p(S_{RF}(p) \times S_{RF}(q))$. $\square$

La cláusula (2) del Teorema 3.2.15 es un poco mas débil, pero en algunos casos es suficiente, como se muestra a continuación.

Teorema 3.2.17. *Sean $p, q \in \omega^*$. Supóngase que existe $r \in \omega^*$ y dos encajes $f, g : \omega \to \omega^*$ tales que $\hat{f}(r) = p$ y $\hat{g}(r) = q$ además de que $f(n) <_{RF} p$ y $g(n) <_{RF} q$ para toda $n < \omega$. Entonces $I \uparrow \mathcal{G}_r(S_{RF}(p) \times S_{RF}(q))$.*

Prueba: Sean $e : \omega \to S_{RF}(p)$ y $h : \omega \to S_{RF}(q)$ dos encajes. Usando esto y nuestras hipótesis, se tiene que $f(n) <_{RF} e(n)$ y $g(n) <_{RF} h(n)$ para toda $n < \omega$. Aplicando el Teorema 1.2.35.(5), obtenemos $p = \hat{f}(r) <_{RF} \hat{e}(r)$ y $q = \hat{g}(r) <_{RF} \hat{h}(r)$. Así que, $(\hat{e}(r), \hat{h}(r)) \in S_{RF}(p) \times S_{RF}(q)$ es un punto de acumulación de $\{(e(n), h(n)) : n < \omega\}$. Por lo tanto, $I \uparrow \mathcal{G}_r(S_{RF}(p) \times S_{RF}(q))$. $\square$

Ahora, veremos un ejemplo que muestra que no es suficiente la cláusula (2) del Teorema 3.2.15.

Ejemplo 3.2.18. *Existen $p, q \in \omega^*$ RF-incomparables con RF-predecesor común, tales que $I \downarrow \mathcal{G}(S_{RF}(p) \times S_{RF}(q))$.*

Prueba: Sean $r \in \omega^*$ y $f, g : \omega \to \omega^*$ dos encajes tales que $\{r\} \cup \{f(n) : n < \omega\} \cup \{g(n) : n < \omega\}$ es un conjunto de ultrafiltros RK-incomparables dos a dos y RF-minimales (véase el Teorema 1.2.26, [Si] o [Ku]). Para $p = \hat{f}(r)$ y $q = \hat{g}(r)$, demostraremos que $I \downarrow \mathcal{G}(S_{RF}(p) \times S_{RF}(q))$. Es fácil ver que, por el Teorema 1.2.35.(5), p y q son RF-incomparables, y además $r <_{RF} p$ y $r <_{RF} q$. Probaremos que, para $e : \omega \to S_{RF}(p)$ y $h : \omega \to S_{RF}(q)$ encajes, el conjunto $\{(e(n), h(n)) : n < \omega\}$ no tiene punto de acumulación en $S_{RF}(p) \times S_{RF}(q)$ (nótese que no es posible aplicar el Lema 3.2.4). Por la Observación 1.2.43, es suficiente con demostrar que $(\hat{e}(s), \hat{h}(s)) \notin S_{RF}(p) \times S_{RF}(q)$, para todo $s \in \omega^*$. Al aplicar el Teorema 1.2.32 solo resta analizar los casos en que $r \leq_{RF} s <_{RF} p$ y $r \leq_{RF} s <_{RF} q$.

Caso 1: $s \approx r$. Sea $\sigma : \omega \to \omega$ un biyección tal que $\hat{\sigma}(r) = s$. Entonces, se tiene

$$p = \hat{f}(r) <_{RF} \hat{e}(s) = \hat{e}(\hat{\sigma}(r)) \quad y \quad q = \hat{g}(r) <_{RF} \hat{h}(s) = \hat{h}(\hat{\sigma}(r))$$

Al aplicar el Teorema 1.2.35.(5), obtenemos que

$$A = \{n < \omega : f(n) <_{RF} \hat{e}(\sigma(n))\} \cap \{n < \omega : g(n) <_{RF} \hat{h}(\sigma(n))\} \in r$$

Si $n, m \in A$, entonces

$$\begin{array}{rcl} f(n) & <_{RF} & \hat{e}(\sigma(n)), \\ f(m) & <_{RF} & \hat{e}(\sigma(m)), \\ p & <_{RF} & \hat{e}(\sigma(n)) \text{ y} \\ p & <_{RF} & \hat{e}(\sigma(m)) \end{array}$$

Usando el Teorema 1.2.32 y nuestras hipótesis, se tiene que $f(n)$ y $f(m)$ son RF-comparables, lo cual es una contradicción. Esto prueba que para toda $s \in T(r)$, $\hat{e}(s) \notin S_{RF}(p)$ y $\hat{h}(s) \notin S_{RF}(q)$.

Caso 2: $r <_{RF} s <_{RF} p$ y $r <_{RF} s <_{RF} q$. Sea $j : \omega \rightarrow \omega^*$ un encaje tal que $\hat{j}(r) = s$. Al aplicar el Teorema 1.2.35.(5) a las desigualdades $\hat{j}(r) <_{RF} \hat{f}(r)$ y $\hat{j}(r) <_{RF} \hat{g}(r)$, obtenemos que

$$B = \{n < \omega : j(n) <_{RF} \hat{f}(\sigma(n))\} \cap \{n < \omega : j(n) <_{RF} \hat{g}(\sigma(n))\} \in r,$$

lo cual es imposible ya que $f(n)$ y $g(n)$ son RF-minimal, para cada $n < \omega$. Por lo tanto el conjunto $\{(e(n), h(n)) : n < \omega\}$ no tiene puntos de acumulación, con lo cual se concluimos que , $I \downarrow \mathcal{G}(S_{RF}(p) \times S_{RF}(q))$. □

Las ideas de la demostración del Teorema 3.2.7 motiva los resultados siguientes:

Lema 3.2.19. *Sean $p, q \in \omega^*$ y sean $f, g : \omega \rightarrow \omega^*$ dos encajes. Si p y q no tienen un RF-predecesor común, entonces (p, q) no es punto de acumulación de $\{(f(n), g(n)) : n < \omega\}$.*

Prueba: Supongamos que (p, q) es punto de acumulación de $\{(f(n), g(n)) : n < \omega\}$. Entonces, existe $r \in \omega^*$ tal que $(p, q) = r\text{--}\lim(f(n), g(n))$. Por lo tanto $p = r\text{--}\lim f(n)$ y $q = r\text{--}\lim g(n)$. Como f y g son encajes, se deduce que $r <_{RF} p$ y $r <_{RF} q$, lo cual contradice las hipótesis. □

Corolario 3.2.20. *Si $X, Y \subseteq \omega^*$ son tales que $P_{RF}(X) \cap P_{RF}(Y) = \emptyset$, entonces $II \uparrow \mathcal{G}(X \times Y)$.*

Prueba: Es una aplicación directa del lema anterior. $\square$

Concluimos el capítulo con las siguientes preguntas, las cuales no fue posible responder aún.

Pregunta 3.2.21. *¿ Existen espacios X y Y tal que X es un $\mathcal{G}_p$-espacio para todo $p \in \omega^*$ y Y es un $\mathcal{G}$-espacio, pero $X \times Y$ no es un $\mathcal{G}$-espacio ?.*

Pregunta 3.2.22. *Si $p, q \in \omega^*$ y $p \approx_C p <_{RK} q$ ¿ Existen un $\mathcal{G}_p$-espacio y un $\mathcal{G}_q$-espacio cuyo producto no es un $\mathcal{G}$-espacio ?.*

Pregunta 3.2.23. *Para $n \in \omega^*$, ¿Existe un grupo topológico G tal que G^n es un $\mathcal{G}$-espacio pero G^{n+1} no es un $\mathcal{G}$-espacio?.*

Pregunta 3.2.24. *¿ Existe un grupo topológico G que es un $\mathcal{G}$-espacio y no es un $\mathcal{G}_p$-espacio para cualquier $p \in \omega^*$?.*

Pregunta 3.2.25. *Sean $p, q \in \omega^*$ RK-incomparables. ¿ Existe un grupo topológico $\mathcal{G}_p$-espacio G y un grupo topológico $\mathcal{G}_q$-espacio H, tal que $G \times H$ no es un $\mathcal{G}$-espacio ?.*

Capítulo 4

Indeterminación de los juegos $\mathcal{G}_p$ y $\mathcal{G}$

Un punto interesante dentro de la teoría de juegos (topológicos), es mostrar si un juego es determinante, es decir, saber si siempre pasa que uno de los jugadores tiene estrategia ganadora. En el caso de que esto no suceda, decimos que el juego es inderminante. En este capítulo, mostramos que el $\mathcal{G}_p$-juego es indeterminante, para cada $p \in \omega^*$, y que es consistente que el $\mathcal{G}$-juego también lo sea.

En la primera sección, damos una descripción en términos de árboles, de la hipótesis: el jugador II tiene una estrategia ganadora en el $\mathcal{G}_p$-juego (Teorema 4.1.2). Usando esta caracterización y un lema que enuncia las propiedades de los árboles (en $(\omega^*)^{<\omega}$) numerables cuyas ramas son casi siempre diferentes (Lema 4.1.3), demostramos que para cada $p \in \omega^*$ existe un espacio en el cual el $\mathcal{G}_p$-juego es indeterminante (Teorema 4.1.4). Concluimos la sección con un ejemplo de un espacio X que es numerablemente compacto y de cardinalidad $\mathfrak{c}$, tal que para todo $x \in X$ y $p \in \omega^*$, $II \uparrow \mathcal{G}_p(x, X)$.

La prueba de la indeterminación del $\mathcal{G}$-juego esta en la sección dos (Teorema 4.2.3). Para esto, usamos un resultado en el $\mathcal{G}$-juego que es análogo al Teorema 4.1.2 y una caracterización topológica de la estrategia ganadora del jugador I en un espacio numerable, regular y primero numerable (Lema 4.2.2). El Teorema de la indeterminación del $\mathcal{G}$-juego es un resultado consistente, ya que es cierto bajo la suposición de que $\mathfrak{p} > \omega_1$. Cabe mencionar que esta prueba esencialmente fue hecha por P. Nyikos en [Ni]. La sección termina con un par de resultados, los cuales muestran que $\mathfrak{c}$ es la mínima cardinalidad de un espacio $X \subseteq \omega^*$ no discreto tal que $I \uparrow \mathcal{G}(X)$.

4.1 La indeterminación del $\mathcal{G}_p$-juego

Definición 4.1.1. *Sea X un espacio.*

(1). *Un árbol en X es un conjunto $\mathbb{T} \subseteq X^{<\omega}$, tal que para cada $t \in \mathbb{T}$ y $s \in X^{<\omega}$ con $s \subseteq t$, entonces $s \in \mathbb{T}$.*

(2). *Si $t \in \mathbb{T}$, el conjunto $\{y \in X : t^\frown y \in \mathbb{T}\}$ de los sucesores de t en $\mathbb{T}$, lo denotaremos como $\underline{succ_{\mathbb{T}}(t)}$.*

(3). *Una función $f \in X^\omega$ se dice que es una rama de $\mathbb{T}$, si $f|_n \in \mathbb{T}$ para cada $n \in \omega$. Al conjunto de todos las ramas de $\mathbb{T}$ sera denotado por $[\mathbb{T}]$.*

En varios resultados, veremos que la siguiente caracterización, también es útil para obtener información, cuando el jugador I tenga estrategia ganadora en un espacio en el $\mathcal{G}_p$-juego.

Teorema 4.1.2. *Sea $p \in \omega^*$, X un espacio y $x \in X$. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:*

(1). $II \uparrow \mathcal{G}_p(x, X)$

(2). *Existe un árbol $\mathbb{T} \subseteq X^{<\omega}$ tal que*

- (i). *Para todo $t \in \mathbb{T}$, $x \in \overline{succ_{\mathbb{T}}(t) \setminus \{x\}}$.*
- (ii). *Para todo $f \in [\mathbb{T}]$, no existe el $p-\lim f(n)$ en X.*

Prueba: (1) $\Longrightarrow$ (2). Sea $\rho = \{\rho_n : n < \omega\}$ una estrategia ganadora del jugador II en el $\mathcal{G}_p(x, X)$-juego. Diremos que una sucesión de puntos $\langle x_0, ..., x_n \rangle$ en X es ρ-legal, si existen $V_0, ..., V_n \in \mathcal{N}(x)$, tal que para cada $i \in \{0, ..., n\}$ se tiene que $\rho_i(\langle x_0, ..., x_{i-1}\rangle, \langle V_0, ..., V_i\rangle) = x_i \in V_i$.

Consideremos el árbol siguiente, $\mathbb{T} = \{s \in X^{<\omega} : s \text{ es } \rho - legal\}$. Por la forma como esta definido, se sigue fácilmente que $\mathbb{T}$ cumple (i) y (ii).

(2) $\Longrightarrow$ (1). Sea $\mathbb{T}$ un árbol en $X^{<\omega}$ que cumple las condiciones (i) y (ii). Para cada $n < \omega$, definimos $\rho_n : X^n \times \mathcal{N}(x)^{n+1} \to X$ tal que

$$\rho_n(x_0, ...x_{n-1}; V_0, ..., V_n) \in V_n \cap succ_{\mathbb{T}}(x_0, ..., x_{n-1}).$$

Sea $\rho = \{\rho_n : n < \omega\}$. Es fácil ver que ρ es una estrategia ganadora para el jugador II en el $\mathcal{G}_p(x, X)$-juego, ya que la sucesión resultante en cada partido del $\mathcal{G}_p(x, X)$-juego, es una rama del árbol $\mathbb{T}$, la cual por (ii) no tiene p-límite. $\square$

Para hacer que la prueba de la indeterminanción del $\mathcal{G}_p$-juego sea mas legible, damos a continuación el siguiente lema.

Lema 4.1.3. *Sean $p \in \omega^*$ y $\mathbb{T} \subseteq (\omega^*)^{<\omega}$ un árbol numerable tal que*

(1). *Para cada $t \in \mathbb{T}$, $|succ_{\mathbb{T}}(t)| \geq 2$.*

(2). *Para todo $f \in [\mathbb{T}]$, f es un encaje en ω^*.*

(3). *Si $f, g \in [\mathbb{T}]$ y $f \neq g$, entonces $|f \cap g| < \aleph_0$*

Entonces $\hat{f}(p) \neq \hat{g}(p)$ para cada $f, g \in [\mathbb{T}]$ con $f \neq g$. En particular, el conjunto $p[\mathbb{T}] = \{p-\lim f(n) : f \in [\mathbb{T}]\}$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Prueba: La primera conclusión se obtiene de usar los incisos (2) y (3), junto con el Lema 1.2.35.(1). La segunda conclusión se deduce de lo anterior y del hecho de que el árbol tiene al menos $\mathfrak{c}$ ramas. $\square$

La idea de la demostración del siguiente teorema, es construir un espacio $X \subset \omega^*$ recursivamente, diagonalizando a través de $\mathfrak{c}$ todas las posibles estrategias para los jugadores I y II. Al hacer esto, surgen dos obstáculos. Si no sabemos quien es X, entonces no podemos decir mucho de las estrategias. El otro obstáculo es que habrá al menos $2^{|X|}$ estrategias posibles. Afortunadamente, podemos usar el lema 4.1.2 para capturar suficiente información acerca de las estrategias, con lo cual superaremos el primer obstáculo. Para sobrepasar el segundo obstáculo, haremos que $|X| \leq \mathfrak{c}$, con lo cual tendremos que la cardinalidad de $\{\mathbb{T} \subseteq X^{<\omega} : \mathbb{T}$ satisface las condiciones del lema 4.1.3$\}$ es a lo mas $\mathfrak{c}$.

Teorema 4.1.4. *Para cada $p \in \omega^*$, existe un espacio X numerablemente compacto tal que para todo $x \in X$, $I \downarrow \mathcal{G}_p(x, X)$ y $II \downarrow \mathcal{G}_p(x, X)$.*

Prueba: Fijemos una función biyectiva $\Phi : \mathfrak{c} \to \mathfrak{c} \times \mathfrak{c}$ tal que $\Phi(\alpha) = (\Phi_0(\alpha), \Phi_1(\alpha))$ cumple que $\Phi_0(\alpha), \Phi_1(\alpha) \leq \alpha$, para toda $\alpha < \mathfrak{c}$. Por recursión construiremos para cada $\nu < \mathfrak{c}$, espacios X_ν, Y_ν y una sucesión $\{\mathbb{T}_\alpha^\nu : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de árboles, tales que:

1. $X_0 \subset \omega^*$ numerable y denso en si mismo y $Y_0 = \emptyset$.
2. $X_\eta \subset X_\nu$ y $Y_\eta \subset Y_\nu$, siempre que $\eta < \nu < \mu$.
3. $|X_\nu| \leq |\nu + \omega|$ y $|Y_\nu| \leq |\nu|$, para toda $\nu < \mu$.
4. $X_\nu \cap Y_\eta = \emptyset$, para cada $\nu, \eta < \mu$.
5. $\{\mathbb{T}_\alpha^\nu : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es una enumeración de la colección de todos los árboles contenidos en $X_\nu^{<\omega}$ que cumplen las condiciones del Lema 4.1.3
6. Si $\nu + 1 < \mu$, entonces $X_{\nu+1} \cap p[\mathbb{T}_{\Phi_1(\nu)}^{\Phi_0(\nu)}] \neq \emptyset$ y $Y_{\nu+1} \cap p[\mathbb{T}_{\Phi_1(\nu)}^{\Phi_0(\nu)}] \neq \emptyset$.

La construcción inicia con el espacio X_0, el cual lo obtenemos utilizando el Teorema 1.4.7 de [JvM]. Si μ es un ordinal limite, definimos $X_\mu = \bigcup_{\nu<\mu} X_\nu$ y $Y_\mu = \bigcup_{\nu<\mu} Y_\nu$. Cuando $\mu = \nu+1$, definimos $X_\mu = X_\nu \cup \{p_\nu\}$ y $Y_\mu = Y_\nu \cup \{q_\nu\}$, donde $p_\nu, q_\nu \in \omega^*$ son tales que $p_\nu \neq q_\nu$ y

$$p_\nu, q_\nu \in p[\mathbb{T}_{\Phi_1(\nu)}^{\Phi_0(\nu)}] \setminus (X_\nu \cup Y_\nu).$$

Definimos $X = \bigcup_{\mu<\mathfrak{c}} X_\mu$. Observe que si $\mathbb{T} \subseteq X^{<\omega}$ es un árbol que satisface las condiciones del Lema 4.1.3, entonces existe $\nu < \mathfrak{c}$ tal que $\mathbb{T} \subseteq X_\nu^{<\omega}$, por lo tanto existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\mathbb{T}_\alpha^\nu = \mathbb{T}$. Como Φ es sobreyectiva, entonces existe $\gamma < \mathfrak{c}$ tal que $\mathbb{T}_{\Phi_1(\gamma)}^{\Phi_0(\gamma)} = \mathbb{T}$.

Afirmación 1: X es numerablemente compacto.

Consideremos un subconjunto Y de X numerable, sin perdida de generalidad podemos suponer que Y es discreto. Es fácil ver que existe un árbol $\mathbb{T} \subseteq Y^{<\omega}$ que satisface las condiciones del Lema 4.1.3. Luego por la observación anterior, existe $\gamma < \mathfrak{c}$ tal que $\mathbb{T}_{\Phi_1(\gamma)}^{\Phi_0(\gamma)} = \mathbb{T}$. Por lo tanto p_γ es un punto de acumulación de Y, que pertenece a X.

Afirmación 2: Para cada $x \in X$, $I \downarrow \mathcal{G}_p(x, X)$.

Fijemos $x \in X$ y supongamos que I tiene una estrategia ganadora $\sigma = \{\sigma_n : n < \omega\}$ en el $\mathcal{G}_p(x, X)$-juego. Inductivamente para cada $s \in 2^{<\omega}$ y $n < \omega$, tomamos $x_s \in X$ y $V_n \in \mathcal{N}(x)$ cerrado-abierto, tales que

$$\begin{aligned}
&x_s \in \sigma_{|s|}(x_{s|_0}, x_{s|_1}, \ldots, x_{s||s|-1}),\\
&x_s \notin \{x_r : r \in 2^{\leq |s|} \text{ y } r \neq s\},\\
&x_s \in V_n \text{ para todo } s \in 2^n \text{ y}\\
&x_s \notin V_n \text{ para todo } s \in 2^{<n}.
\end{aligned}$$

Definimos $t_s = \langle x_{s|_0}, x_{s|_1}, x_{s|_2}, \ldots, x_s\rangle$ y $\mathbb{T} = \{t_s : s \in 2^{<\omega}\}$. De la construcción se sigue que $\mathbb{T}$ es un árbol que satisface las condiciones del Lema 4.1.3. Por lo cual, se tiene que existe $\gamma < \mathfrak{c}$ tal que $\mathbb{T}^{\Phi_0(\gamma)}_{\Phi_1(\gamma)} = \mathbb{T}$ y también $f \in [\mathbb{T}]$ tal que $p-\lim f(n) = q_\gamma$. Nótese que f es una σ-sucesión que no tiene p-límite en X. Por lo tanto σ no es estrategia ganadora.

Afirmación 3: Para todo $x \in X$, $II \downarrow \mathcal{G}_p(x, X)$.

Supongamos que existe $x \in X$ y un árbol $\mathbb{T} \subseteq X^{<\omega}$ que satisface las condiciones del Teorema 4.1.2. Construiremos un subárbol $\overline{\mathbb{T}} \subseteq \mathbb{T}$, que sea numerable y que cumpla las condiciones del Lema 4.1.3. Sea $t \in \mathbb{T}$ fijo. Inductivamente, para cada $s \in 2^{<\omega}$ y $n > 0$, tomamos un par de puntos $x_{s^\frown 0} \neq x_{s^\frown 1}$ en X y $V_n \in \mathcal{N}(x)$ un cerrado-abierto, con las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned}
&x_{s^\frown 0}, x_{s^\frown 1} \in succ_{\mathbb{T}}(t^\frown x_{s|_1}{}^\frown x_{s|_2}{}^\frown \ldots {}^\frown x_s),\\
&x_{s^\frown 0}, x_{s^\frown 1} \notin \{x_r : r \in 2^{\leq |s|+1} \setminus \{s^\frown 0, s^\frown 1\}\},\\
&x_{s^\frown 0}, x_{s^\frown 1} \in V_n, \text{ para cada } s \in 2^{n-1} \text{ y } n-1 \geq 0,\\
&x_{s^\frown 0}, x_{s^\frown 1} \notin V_n, \text{ para cada } s \in 2^{<n-1} \text{ y } n-1 > 0.
\end{aligned}$$

Sea $t_s = t^\frown\langle x_{s|_1}, x_{s|_2}, \ldots, x_s\rangle$. Definimos $\overline{\mathbb{T}} = \{t_s : s \in 2^{<\omega}\}$. Por la elección de los puntos x_s's, se sigue que $\overline{\mathbb{T}}$ es un subárbol de $\mathbb{T}$ que además cumple las condiciones del Lema 4.1.3. Por lo tanto, existen $\gamma < \mathfrak{c}$ tal que $\mathbb{T}^{\Phi_0(\gamma)}_{\Phi_1(\gamma)} = \overline{\mathbb{T}}$. Por esto último se tiene que, existe una rama $f \in [\overline{\mathbb{T}}]$ tal que $p-\lim f(n) \in X$. Con esto concluimos, que no existe $x \in X$ tal que el jugador II tenga estrategia ganadora en el $\mathcal{G}_p(x, X)$-juego. $\square$

Si un espacio es numerablemente compacto, naturalmente se tiene que el jugador I del $\mathcal{G}$-juego tiene estrategia ganadora en cualquier punto de este. Pero esto no implica que la tenga en el $\mathcal{G}_p$-juego para algún $p \in \omega^*$. La complejidad del siguiente resultado es que el jugador II tiene estrategia ganadora en el $\mathcal{G}_p$-juego, para cualquier $p \in \omega^*$.

Teorema 4.1.5. *Existe un espacio X que es numerablemente compacto, tal que para todo $x \in X$ y $p \in \omega^*$, $II \uparrow \mathcal{G}_p(x, X)$.*

Prueba: Consideremos el espacio X, definido en el Teorema 3.2.7. Veamos que $II \uparrow \mathcal{G}_p(x, X)$, para cada $p \in \omega^*$ y $x \in X$ fijos. Habiamos obsevado anteriormente que $|\{y \in X : T(p) \in T[y, X_0]\}| \leq \omega$, para cada $p \in \omega^*$. Luego, de esto, tenemos que el conjunto $A = \{q \in X : T(p) \in T[q, X_0]\}$ es numerable. Sea $\{q_i : i < \omega\}$ una enumeración de A, y tomemos para cada $i < \omega$, un encaje $f_i : \omega \to X_0$ tal que $\hat{f}_i(p) = q_i$. La estrategia del judador II es escoger en el n-th paso $g(n) \in X_0 \setminus \{f_0(n), f_1(n), ..., f_n(n)\}$ tal que la función $g : \omega \to X_0$ definida de esta manera es un encaje. Del Teorema 1.2.35.(1), tenemos que $\hat{g}(p) \notin A$. Y como $T(p) \in T[\hat{g}(p), X_0]$, entonces $\hat{g}(p) \notin X$. Con lo cual concluimos que esta es una estrategia ganadora para el jugador II en el $\mathcal{G}_p(x, X)$-juego. □

4.2 La indeterminación del $\mathcal{G}$-juego

Para el $\mathcal{G}$-juego, también existe una caracterización de la estrategia ganadora del jugador II. Esta se demuestra de manera análoga al Teorema 4.1.2, razón por la cual solamente la enunciamos.

Teorema 4.2.1. *Sea X un espacio y $x \in X$. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:*

(1). $II \uparrow \mathcal{G}(x, X)$.

(2). *Existe un árbol $\mathbb{T} \subseteq X^{<\omega}$ tal que*

- (i). *Para todo $t \in \mathbb{T}$, $x \in \overline{succ_{\mathbb{T}}(t) \setminus \{x\}}$.*
- (ii). *Para todo $f \in [\mathbb{T}]$, $f[\omega]$ es cerrado y discreto en X.*

□

Si en el Teorema anterior, reemplazamos el $\mathcal{G}$-juego por el W-juego y la condición (ii), por:

$$\text{Para todo } f \in [\mathbb{T}], \lim f(n) \neq x,$$

entonces obtenemos una caracterización de $II \uparrow W(x, X)$.

Lema 4.2.2. *En un espacio X numerable, se tiene que para cada $x \in X$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1). $\chi(x, X) = \aleph_0$.

(2). $I \uparrow \mathcal{G}(x, X)$.

Prueba: (1) $\Longrightarrow$ (2). Sea $x \in X$ tal que $\chi(x, X) = \aleph_0$. Entonces existe un conjunto de abiertos $\{U_n : n < \omega\}$ que es base local de x. Es fácil demostrar que $\sigma = \{\sigma_n(x_0, ..., x_{n-1}) = \bigcap_{m \leq n} U_m : n < \omega\}$ es una estrategia ganadora para el jugador I en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Supongamos que $\chi(x, X) > \omega$. Sea σ una estrategia de I, y $\{V_n : n < \omega\}$ una enumeración del rango de σ. Como X es cero dimensional, escogemos para cada $n < \omega$ un suconjunto cerrado-abierto U_n, tal que

1. $U_{n+1} \subset U_n$, para cada $n < \omega$.
2. $\bigcap_{n<\omega} U_n = \{x\}$.
3. $U_n \subset V_n$, para cada $n < \omega$.

Como $\chi(x, X) > \omega$, entonces existe una vecindad V de x tal que para todo $n < \omega$, $|U_n \setminus V| = \aleph_0$. Sea $x_n \in U_n \setminus V$, para cada $n < \omega$. Por la manera en que fueron elegidos estos puntos, tenemos que $x \notin \overline{\{x_n : n < \omega\}}$. Ahora bien, para $y \in X \setminus \{x\}$, existe $n < \omega$ tal que $y \notin U_n$. Por ello, $X \setminus U_n$ es vecindad de y, de lo cual se deduce que $|(X \setminus U_n) \cap \{x_n : n < \omega\}| < \aleph_0$. Es decir, $y \notin \overline{\{x_n : n < \omega\}}$. Finalmente, ya que $\{x_n : n < \omega\}$ es una σ-sucesión sin puntos de acumulación, concluimos que σ no es una estrategia ganadora. Como esta fue tomada arbitrariamente, obtenemos que $I \downarrow \mathcal{G}(x, X)$. $\square$

En la demostración de la indeterminación del $\mathcal{G}$-juego, usaremos el número cardinal $\mathfrak{b}$, el cual es mayor o igual que $\mathfrak{p}$. Se define el número cardinal $\mathfrak{b}$, como el cardinal mas pequeño de todos los subconjuntos no acotados en el orden parcial $(\omega^\omega, <^*)$, donde se tiene que para $f, g \in \omega^\omega$, $f <^* g$ si existe $n < \omega$ tal que $f(k) < g(k)$ para toda $k \geq n$ (para mas detalles sobre el cardinal $\mathfrak{b}$ véase [EvD]).

El Teorema 1.12 de P. Nyikos en [Ni] esencialmente es el siguiente teorema. Daremos otra demostración usando el lenguaje de juegos.

Teorema 4.2.3 **($\mathfrak{p} > \omega_1$).** *Para todo subconjunto D de 2^{ω_1} que sea numerable y denso, se tiene que $I \downarrow \mathcal{G}(D)$ y $II \downarrow W(D)$.*

Prueba: Sea D un subconjunto de 2^{ω_1} numerable y denso. Tomemos un punto x en D. La demostración de que I no tenga estrategia ganadora en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego, se deduce del Lema 4.2.2, ya que $\chi(x, D) > \omega$.

Ahora, veamos que $II \downarrow W(x, D)$. Para probar esto, utilizaremos su caracterización en términos de árboles (véase el comentario que sigue al Teorema 4.2.1). Sea $\mathbb{T} \subseteq D^{<\omega}$ un árbol tal que para toda $t \in \mathbb{T}$, $x \in \overline{succ_{\mathbb{T}}(t) \setminus \{x\}}$. Para cada $F \in [\omega_1]^{<\omega}$, definimos

$$[x, F] = \{y \in 2^{\omega_1} : y_{|F} = x_{|F}\}.$$

Como $x \in \overline{succ_{\mathbb{T}}(t) \setminus \{x\}}$, entonces la familia

$$\mathcal{A}_t = \{[x, F] \cap succ_{\mathbb{T}}(t) : F \in [\omega_1]^{<\omega}\}$$

tiene la propiedad de la intersección finita fuerte. Ya que $|\mathcal{A}_t| = \omega_1$ y $p > \omega_1$, entonces existe un conjunto que es pseudointersección de $\mathcal{A}_t$ para cada $t \in \mathbb{T}$. Este conjunto, lo denotaremos como $\{x_n^t : n < \omega\}$. Observe que para cada $F \in [\omega_1]^{<\omega}$, se tiene que $\{x_n^t : n < \omega\} \subseteq^* [F, x]$. Lo cual significa que $\lim x_n^t = x$. Sea S el subárbol de $\mathbb{T}$ definido por estos conjuntos, es decir

$$S = \bigcup \{\{x_n^t : n < \omega\} : t \in \mathbb{T}\}.$$

Para cada $F \in [\omega_1]^{<\omega}$ definimos

$$g_F : S \to \omega \quad \text{donde}$$
$$g_F(t) = min\{k : \text{para todo } m \geq k, x_m^t \in [x, F]\}$$

Sabemos que $\mathfrak{b} > \omega_1$. Por lo tanto, existe $g : S \to \omega$ tal que

$$g \geq^* g_F \quad \text{para todo } F \in [\omega]^{<\omega}$$

Sea $A = \{x_n^t : t \in \mathbb{T} \text{ y } n > g(t)\}$, este conjunto satisface que $\lim A = x$ y además $|A \cap succ_{\mathbb{T}}(t)| = \aleph_0$, para todo $t \in \mathbb{T}$. Con lo cual tenemos que para cualquier rama $f \in [\mathbb{T}]$ tal que $f(n) = x_{m_n}^t$ y $m_n > g(t)$, $\lim f(n) = x$. Por lo tanto, el jugador II no tiene estrategia ganadora en el $W(x, D)$-juego, para todo $x \in D$. □

Usando los implicaciones entre los juegos W, $\mathcal{G}_p$ y $\mathcal{G}$ de la pagina 22, y el Teorema anterior, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.2.4 **($\mathfrak{p} > \omega_1$).** *Existe un grupo topológico numerable en el cual los juegos W, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}_p$, son indeterminantes.*

Con la aplicación del siguiente lema, daremos una cota inferior de la cardinalidad de un $\mathcal{G}$-espacio no trivial, mejorando así el último de los resultados del capítulo dos. El lema, se enuncia solamente para el $\mathcal{G}$-juego, pero este también se pudo haber descrito en términos del $\mathcal{G}_p$-juego.

Lema 4.2.5. *Sea $X \subseteq \omega^*$ y $x \in X$ un punto de acumulación tal que el jugador I tiene una estrategia ganadora en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego. Entonces existe un subconjunto numerable y discreto D en X y un árbol $\mathbb{T} \subseteq D^{<\omega}$, tal que:*

(1). *Para todo $t \in \mathbb{T}$, $|succ_{\mathbb{T}}(t)| \geq 2$.*

(2). *Si $f, g \in [\mathbb{T}]$ y $f \neq g$, entonces $|rng(f) \cap rng(g)| < \aleph_0$.*

(3). *Para cada $f \in [\mathbb{T}]$, f es una succesión de movimientos legales del jugador II con respecto a la estrategia ganadora.*

Prueba: Sea $\sigma = \{\sigma_n : n < \omega\}$ una estrategia ganadora para el jugador I en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego. El conjunto D y el árbol $\mathbb{T}$ los construiremos inductivamente. Sea $d_\emptyset = x$. Para $n = 1$, sean $d_{(0,0)} \neq d_{(0,1)} \in X$ tales que

$$d_{(0,0)},\ d_{(0,1)} \in \sigma_0(\emptyset) \setminus \{x\}$$

Supongamos que para $n \leq k$ y $t \in 2^{\leq k}$, hemos escogido

$$d_t \in \sigma_{|t|}(d_{t|_0}, d_{t|_1}, \ldots, d_{t|_{|t|-1}})$$

y abiertos $U_s^{|s|} \in \mathcal{N}(d_s)$ tales que

$$\begin{aligned} &U_s^{|s|} \cap U_{s'}^{|s'|} = \emptyset, \text{ si } s \neq s' \text{ y } |s| = |s'| \leq k, \\ &d_t \in int(X \setminus \bigcup\{U_s^{|s|} : s \in 2^{<|t|}\}) \text{ y} \\ &x \in int(X \setminus \bigcup\{U_s^{|s|} : s \in 2^{\leq k}\}) = W_k. \end{aligned}$$

Como X es Hausdorff y x es un punto de acumulación, podemos escoger para cada $s \in 2^{k+1}$,

$$d_s \in \sigma_{k+1}(d_{s|_0}, d_{s|_1}, \ldots, d_{s|_k}) \cap W_k$$

y $U_s^{k+1} \in \mathcal{N}(d_s)$, con la propiedad de que

$U_s \cap U_{s'} = \emptyset$ para todo $s, s' \in 2^{k+1}$ con $s \neq s'$ y
$x \in int(X \setminus \bigcup\{U_t^{|t|} : t \in 2^{\leq k+1}\}) = W_{k+1}$.

Sea $D = \{d_s : s \in 2^{<\omega}\}$ y $\mathbb{T} = \{t_s = (d_{s|0}, d_{s|1}, ..., d_s) : s \in 2^{<\omega}\}$. Demostrar que D es un conjunto discreto, se sigue del hecho de que $U_s^{|t|} \cap W_k = \emptyset$ para todo $k < \omega$ y $t \in 2^{\leq k}$. De la construcción se deduce fácilmente que $\mathbb{T}$ es un árbol que cumple las condiciones requeridas. □

Teorema 4.2.6. *Si $X \subseteq \omega^*$ es no discreto y $I \uparrow \mathcal{G}(X)$, entonces $|X| \geq \mathfrak{c}$.*

Prueba: Sea $x \in X$ y σ una estrategia ganadora para el jugador I en el $\mathcal{G}(x, X)$-juego. Por el Lema 4.2.5, existe un conjunto discreto $D \subseteq X$ y árbol $\mathbb{T} \subseteq D^{<\omega}$ que satisface las condiciones de dicho Lema. Observe que por este hecho $|[\mathbb{T}]| = \mathfrak{c}$. Es fácil ver que si $A, B \in [\omega^*]^\omega$ son tales que $A \cup B$ es discreto y el conjunto $B \cap A$ es finito, entonces $A^* = \overline{A} \setminus A$ y $B^* = \overline{B} \setminus B$, son disjuntos. Con este hecho, tenemos que si $f, g \in [\mathbb{T}]$ y $f \neq g$, entonces $rng(f)^* \cap rng(g)^* = \emptyset$. Como $I \uparrow \mathcal{G}(x, X)$, se tiene que cada rama de $\mathbb{T}$ tiene al menos un punto de acumulación, con lo cual concluimos que $|X| \geq \mathfrak{c}$. □

Corolario 4.2.7. *Sean $p \in \omega^*$ y $X \subseteq \omega^*$ sin puntos aislados. Si $I \uparrow \mathcal{G}_p(X)$, entonces $|X| \geq \mathfrak{c}$.*

BIBLIOGRAFÍA

[Be] A. R. Bernstein, *A new kind of compactness for topological spaces*, Fund. Math. 66 (1970), 185-193.

[Bla] A. R. Blass, *Orderings of ultrafilters*, tesis doctoral, Harvard University, 1970.

[BJ] T. Bartoszyński and H. Judah, *Set Theory: On the Structure of the Real Line*, A. K. Peters, 1995.

[Bo] A. Bouziad, *The Ellis theorem and continuity in groups*, Top. Appl. 50 (1993), 73-80.

[BS] A. Blaszczyk and A. Szymański, *Cohen algebras and nowhere dense ultrafilters*, Bulletin of the Polish Acad. of Sciences Math. 49 (2001), 15-25.

[Bt] David D. Booth, *Countably indexed Ultrafilters*, tesis doctoral, University of Wisconsin.

[Ca] J. Cao, *On isocompactness of function spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. 60 (1999) 483-486.

[CN] W. Comfort and S. Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[DGS] A. Dow, A. V. Gubbi and A. Szymański, *Rigid Stone spaces within ZFC*, Proc. of the Amer. Math. Soc. 102 (1988), 745-748.

[E] Ryszard Engelking, *General Topology*, Helderman Belin 1989.

[EvD] Eric K. Van Douwen *The integers and Topology* , en: Handbook of Set-Thoretic Topology, editores Kenneth Kunen y Jerry E. Vaughan, North-Holland, 111-167.

[EvD2] Eric K. Van Douwen *The product of two countably compact topological groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 262 (1980), no. 2 417-427.

[Fro] Z. Frolík, *Sums of ultrafilters*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 87-91.

[G-F1] S. García-Ferreira, *Three orderings on* ω^*, Top. Appl. 50 (1993), 199-216.

[G-F2] S. García-Ferreira, *Comfort types of ultrafilters*, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), 1251-1260.

[GG] S. García-Ferreira y R. A. González-Silva, *Topological games defined by ultrafilters*, aceptado en Top. Appl.

[GG2] S. García-Ferreira, R. A. González-Silva y A. H. Tomita, *Topological games and product spaces*, aceptado en Commentations Mathematicae Universitatis Carolinae.

[GH] R. A. González-Silva y Michael Hrušák, *More on ultrafilters and topological games*, enviado para publicación a Houston Journal of Mathematics.

[GN] J. Gerlits and Z. Nagy, *Some properties of* $C(X)$, *I*, Top. Appl. 14 (1982), 151-161.

[Gru] G. Gruenhage, *Infinite games and generalizations of first countable spaces*, Top. Appl. 6 (1976), 339-352

[GS] J. Ginsburg and V. Saks, *Some applications of ultrafilters in topology*, Pacific J. Math. 57 (1975), 403-418.

[HM1] Klaas P. Hart y Jan van Mill *Countably compact groups with non-countably-compact products*, Gen. Top. and Appl, (1988), 127-131.

[HM2] Klaas P. Hart y Jan van Mill *A countably compact toplogical group* H *such that* $H \times H$ *is not countably compact*, Trans. Amer. Math. soc 323, (1991), no. 2, 811-821.

[HS] Neil Hindman y Dona Stauss, *Algebra in the Stone-Čech Compactification*, De Gruyter Expositions in Mathematics 27.

[HST] M. Hrušák, M. Sanchis y A. Tamariz-Mascarúa *Ultrafilters, Special Functions and Pseudocompactness*, en proceso.

[JvM] Jan van Mill, *An Introduction to* $\beta(\omega)$ en: Handboook of Set-Theoretic Topology, editores Kenneth Kunen y Jerry E. Vaughan, North-Holland, (1984), 505-567.

[Ku] K. Kunen, *Weak P-points in* N^*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 23, Topology, Budapest (Hungary), 741-749.

[KV] *Handboook of Set-Theoretic Topology*, editores Kenneth Kunen y Jerry E. Vaugan, North-Holland.

[LS] W. F. Lindgren and A. Szymański, *A non-pseudocompact product of countably compact spaces via Seq*, Proc. of the Amer. Math. Soc. 125,12 (1997), 3741-3746.

[Ni] P. Nyikos, *Subsetes of* ω^ω *and the Fréchet-Urysohn and* α_i*-properties*, Top. Appl. 48 (1092) 91-116.

[R] W. Rudin, *Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications*, Duque Math. J. 23 (1956), 409-419.

[Si] P. Simon, *Applications of independent linked families*, Topology and applications, Eger (Hungary) 1983, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 41 (1985), 561-580.

[T1] Tomita, Artur H. , *A group under* $MA(numerable)$ *whose square is countably compact but whose cube in not*, Top. Appl 91 (1999), no. 2,91-104.

[T2] Tomita, Artur H. , *On infinite products of countably compact grops*, Proceedings of the Eighth Prage Topological Symposium (1996), 362-370.

[T3] Tomita, Artur H. , *On finite powers of contably compact groups*, Comment. Math. Univ. Carolin. 37 (1996), no. 3 617-626.

[Va] J. E. Vaughan, *Countably compact sequentially compact spaces*, en: Handbook of Set-Theoretic Topology, editores Kenneth Kunen y Jerry E. Vaughan, North-Holland, 571-600.

[Va1] J. E. Vaughan, *Two spaces homeomorphic to $Seq(p)$*, Comment. Math. Univ. Carolinae 42,1 (2001), 209-218.

[Va2] J. E. Vaughan, *A countably compacto, separable space which in not absolutely countably compact*, Comment. Math. Univ. Carolin. 36 (1995), no. 1, 197-201.

[Wa] Rusell C. Walker, *The Stone-Čech Compactification*, Springer-Verlag, (1974).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Simbolos

ω	Conjunto de los numeros naturales.
α, β, γ	Denotan numeros ordinales.
ω_1	Primer cardinal no numerable.
$A \subseteq^* B$	$A \setminus B$ es finito.
$f : A \to B$	Función de A en B.
A^B	Conjunto de funciones de A en B.
$f\vert_C$	Función restringiada a un subconjunto C del dominio.
$\omega^{\nearrow\omega}$	Conjunto de funciones estrictamente crecientes de ω en ω.
$Per(\omega)$	El conjunto de funciones biyectivas de ω en ω.
$\beta(X)$	La Compacttificación de Stone-Čech del espacio X.
$\hat{f}$	La extención de $f : X \to Y$ a $\hat{f} : \beta(X) \to \beta(Y)$ (pag. 7) .
$\overline{Y}^X$, $cl_X(Y)$	La cerradura de Y en el espacio X.
$int(Y)$, Y°	El interior de Y.
$\vert X\vert$	La cardinalidad del conjunto X.
$\mathcal{P}(X)$	$= \{A : A \subseteq X\}$, el conjunto potencia de X.
X^0	$= \{\emptyset\} = 1$.
$X^{<\omega}$	$= \bigcup\{X^n : n < \omega\}$.
$[X]^\alpha$	$= \{A \subseteq X : \vert A\vert = \alpha\}$.
$[X]^{<\alpha}$	$= \{A \subseteq X : \vert A\vert < \alpha\}$.
$[X]^{\leq\alpha}$	$= \{A \subseteq X : \vert A\vert \leq \alpha\}$.
$[X]^{>\alpha}$	$= \{A \subseteq X : \vert A\vert > \alpha\}$.
$[X]^{\geq\alpha}$	$= \{A \subseteq X : \vert A\vert \geq \alpha\}$.
$\leq_{RK}$	El pre-orden Rudin-Keisler (pag. 8).
$\leq_{RF}$	El pre-orden Rudin-Frolík (pag. 10).
$\leq_C$	El pre-orden Comfort (pag. 15).
$p-\lim x_n$	p-limite (pag 13).
$R(p)$, $T(p)$	pag. 9.
$P_{RK}(p)$, $S_{RK}(p)$	pag. 9.
$P_{RK}(X)$, $S_{RK}(X)$	pag. 9.
$P_{RF}(p)$, $S_{RF}(p)$	pag. 11.
$P_{RF}(X)$, $S_{RF}(X)$	pag. 11.
P-punto, Q-punto	pag. 10
$I \uparrow \mathcal{G}$	I tiene estrategia ganadora en el $\mathcal{G}$-juego (pag. 18).
$II \uparrow \mathcal{G}$	II tiene estrategia ganadora en el $\mathcal{G}$-juego (pag. 18).
$\mathbb{T}$	Arbol (pag. 52).