

01124
8



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISIÓN DE INGENIERÍA EN
CIENCIAS DE LA TIERRA

"SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO DE LÍQUIDO EN
SISTEMAS FRACTURADOS CON GEOMETRÍA FRACTAL"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

INGENIERO PETROLERO

PRESENTAN

CORONADO DÍAZ HAYDEE

OLEA URIBE IVAN VINICIO

DIRECTOR: DR. RODOLFO CAMACHO VELÁZQUEZ



Cd. Universitaria, México, D.F.
Noviembre del 2003

a



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

"SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO DE LÍQUIDO EN SISTEMAS
FRACTURADOS CON GEOMETRÍA FRACTAL"

Tesis presentada por:

CORONADO DÍAZ HAYDEE

OLEA URIBE IVAN VINICIO

Dirigida por: Dr. Rodolfo Camacho Velázquez

Jurado del examen profesional:

Presidente: Ing. Manuel Villamar Viguera



Vocal: Dr. Rodolfo Camacho Velázquez



Secretario: M. I. Mario Becerra Zepeda



1er. Suplente: Dr. Víctor Hugo Arana Ortiz



2do. Suplente: M. I. José Martínez Pérez



b



FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN
60-1-1085

SRITA. HAYDEE CORONADO DÍAZ
Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Dr. Rodolfo Camacho Velázquez y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Petrolero:

SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO DE LÍQUIDO EN SISTEMAS FRACTURADOS CON GEOMETRÍA FRACTAL

	RESUMEN
	INTRODUCCIÓN
I	PRINCIPIOS DE LA GEOMETRÍA FRACTAL
II	GENERACIÓN DE FRACTALES
III	SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS
IV	DESARROLLO DEL MODELO DE SIMULACIÓN
V	ANÁLISIS DE RESULTADOS
	CONCLUSIONES
	APÉNDICES
	BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo, le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Cd. Universitaria, D. F., a 13 de octubre de 2003
EL DIRECTOR

M. en C. GERARDO FERRANDO BRAVO

GFB:AGC*gtg

C



FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN
60-1-1084

SR. IVAN VINICIO OLEA URIBE
Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Dr. Rodolfo Camacho Velázquez y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Petrolero:

SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO DE LÍQUIDO EN SISTEMAS FRACTURADOS CON GEOMETRÍA FRACTAL

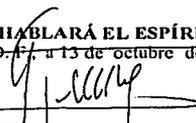
	RESUMEN
	INTRODUCCIÓN
I	PRINCIPIOS DE LA GEOMETRÍA FRACTAL
II	GENERACIÓN DE FRACTALES
III	SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS
IV	DESARROLLO DEL MODELO DE SIMULACIÓN
V	ANÁLISIS DE RESULTADOS
	CONCLUSIONES
	APÉNDICES
	BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo, le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Cd. Universitaria, D.F. a 13 de octubre de 2003
EL DIRECTOR


M. en C. GERARDO FERRANDO BRAVO

GFB/MGC*gtg

d

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mis padres Guillermo Coronado Ramírez y María Consuelo Díaz Ibarra por ser ante todo y sobre todo los mejores amigos que he tenido, gracias por ser un ejemplo de rectitud y honestidad, sin ustedes nunca hubiera llegado hasta aquí creo que nunca les podré expresar lo orgullosa y agradecida que estoy con ambos. Gracias también a mi tía Esperanza Díaz Ibarra por ser siempre una fuente de amor inagotable; sin tus consejos y tu ayuda no hubiera llegado muy lejos, gracias por tener siempre una palabra de apoyo para todos nosotros y por darnos todas esas lecciones de vida que solo tu sabes dar. La vida me ha regalado la oportunidad de tener a mi lado tres padres en lugar de dos, todo lo que soy y seré se los debo a ustedes, les dedico este trabajo.

A mi tía Martha Díaz Ibarra por apoyarme siempre en todo y estar ahí cuando la necesito, gracias por tenerme siempre en tus oraciones. A mi familia en general por reservarme un lugar en sus corazones, muchas gracias.

A mi hermano Guillermo Enrique por haber sido durante mucho tiempo mi mejor amigo y compañero de sueños, te mereces lo mejor y te deseo la mejor de las suertes.

A Ivan Vinicio Olea Uribe por ser mi cómplice en tantas cosas incluyendo este trabajo, gracias por haberme permitido ser parte de tu vida desde hace seis años y por haberme brindado tu amistad desde el primer momento. Te mereces lo mejor en la vida y lo vas a tener porque has trabajado muy duro para lograrlo, te quiero mucho.

A mis amigos Susana Martínez, Armando Hernández, Omar Elizalde, Armando Moreno, Roberto Saldaña, Uriel Díaz, Carlos Zainos y Felipe Altamirano gracias por todos los buenos momentos que tuvimos juntos y por haber sido mi apoyo cuando todo esto empezaba, les deseo la mejor de las suertes.

A todos mis amigos petroleros, muy especialmente a Edmundo Carmona, Pilar Amieva y Rodrigo Cancino, gracias por darme su apoyo y su amistad cuando más lo he necesitado; Erika Guevara, Keyla Ramírez, Lucía Jácome, Rafael Trejo, Arturo Zamora, Fidel Mendoza, Arturo Villegas, Luis Montes de Oca, Omar Amayo gracias por ser mi mejor amigo en la red y por siempre tener las palabras precisas para levantarme el ánimo; Antelmo García, Raymundo Hernández, Ivan

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

e

Arango, Oscar Castillo, Edgar Balderas, Gabriel González, Chamberlayn Beltrán, Hegel Rey; muchas gracias a todos por hacerme sentir siempre como en casa. A todos los que me faltaron una disculpa, siempre los llevaré en mi corazón les ofrezco mi más sincera amistad, gracias por haberme permitido conocerlos.

A todos mis maestros de la Facultad de Ingeniería por dedicar su tiempo a mi educación y por dejarme las más de las veces enseñanzas más valiosas que las encontradas en los libros. Gracias muy en especial al Ing Manuel Vacío por haberme guiado tantas veces y ser muchas veces más que un maestro un buen amigo.

Al M. I. José Antonio González Guevara, gracias por tu amistad, por confiar en mí y permitirme ser parte de tantos proyectos, y los que faltan. Gracias por toda la ayuda sincera que nos has brindado y por todos los consejos que nos has dado.

Al M. I. Néstor Martínez por toda la ayuda que nos brindó en la carrera, gracias por confiar en nosotros.

A mis amigos en el Instituto Mexicano del Petróleo, Ing. Héctor Hernández, Ing. María Berenice Aguilar, Dra. Cecilia Durán, Ing. Blanca Angulo, Ing. Carlos Esquinca, Miriam y Julio por todo lo que me han enseñado en este tiempo, muchas gracias por tener siempre tiempo para darme un buen consejo. Gracias por todo el apoyo que nos brindaron a mí y a Ivan en la realización de este trabajo y por habernos aguantado este último año, ¡Muchas gracias!

A mis amigas Zafiro Damaris González, Mara Isela Fabián, Carolina Casillas, Tania Barrios, Ninoska Casanova, Nancy López, Claudia Velázquez y todas mis compañeras y maestros de la Academia Moderna por haber estado siempre presentes en mi corazón; gracias por todo lo que me enseñaron y por tantos buenos momentos que vivimos juntos. Gracias muy especiales a la maestra Lilia por haber sido la primera en involucrarme en el conocimiento de ciencias de la tierra, mil gracias por su confianza.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por ser mi alma mater y permitirme realizar tantos sueños entre ellos llegar a ser profesionalista.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

f

A la Facultad de Ingeniería por acogerme como una hija y por haberse convertido en mi segunda casa.

Al Dr. Rodolfo Camacho por todo el apoyo brindado al realizar este trabajo, he aprendido mucho de usted. Muchas gracias por habernos dirigido en este trabajo y por toda la paciencia que nos ha tenido.

A mis sinodales Ing, Manuel Villamar, M.I. Mario Becerra, Dr. Victor Hugo Arana y M.I. José Martínez por la dedicación al revisar este trabajo, muchas gracias por todos sus comentarios sobre este trabajo; muchas gracias también por confiar en mí y por haberme enseñado tanto dentro y fuera de las aulas.

Haydee Coronado Díaz

9

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se lo dedico a mi madre, Imelda Uribe, por haberme brindado la confianza y el apoyo para emprender esta que ha sido la más grande de mis aventuras, ya que sin ella nada de esto hubiera sido posible... Gracias por tus palabras de aliento y por tu inmenso cariño. Nunca podré llegar a expresar el gran orgullo y cariño que siento por ti.

Gracias Haydee por ser mi más grande amiga, mi fuerza, mi apoyo y el pilar de mi vida. Te deseo el más grande de los triunfos y el logro de todos tus sueños... sabes que siempre estaré ahí cuando me necesites. Gracias por haberme dado el privilegio de colaborar junto a ti en este trabajo, resultado de un gran esfuerzo y dedicación. Sabes la gran admiración y respeto que siento por ti. Ten fe que todo saldrá bien.

A mis hermanos: Mario, Itzell y Fabiola, gracias por siempre estar ahí cuando los necesité, por ser mis amigos y porque juntos, como familia, pudimos salir adelante a pesar de todo... los quiero mucho.

A toda mi familia gracias por tenerme presente en sus oraciones y por brindarme su ayuda cuando la necesité.

A Mario Olea Ruiz, porque aunque tomaste otro camino aún podemos ser amigos... gracias por tu ayuda y espero conocerte mejor como persona así como espero que tu hagas lo mismo conmigo.

A mis amigos de Tepic: Fernando Espinosa, Jorge Pérez, Arturo González, Sergio Medina, Héctor Camargo, Jesús y Aldo Pérez, Jorge Monraz, Carlos, Armando, Álvaro, Israel, Arsenio, Omar Sánchez, Juan Manuel, Juan Carlos, Abriсте Hernández, Alejandro y Erick, gracias por demostrarme que la amistad puede vencer distancias y diferencias... saben que aunque pase tiempo sin verlos no los olvido y los tengo muy presentes a todos... siempre contarán conmigo... gracias compas.

A mis amigas de Tepic: Verónica, Alma Soffa, Arcelia, Esther, Alejandra y Linda, gracias por su amistad incondicional y su apoyo durante todo este tiempo. Les deseo la mejor de las suertes en sus vidas.

A Efraín, gracias amigo por haberme dado la oportunidad de conocerte... no te preocupes, ya nos encontraremos algún día... espero que estés orgulloso de mí donde quiera que estés...

A César Medina, gracias por enseñarme lo que es nobleza y servicio...

h

A Rodolfo Pérez, gracias por haber sido un buen compañero y amigo...

A Érika Catalina, gracias por haber sido una de mis mejores amigas... te extraño aunque sé que estás conmigo...

A mis compañeros y amigos: Roberto Saldaña, Omar Elizalde, Armando Hernández, Armando Moreno, Edmundo Carmona, Chamberlayn Beltrán, Fidel Mendoza, Arturo Zamora, Arturo Villegas, Rafael Trejo, Antelmo García, Rodrigo Cancino, Omar Amayo, Rafael Magdaleno, Luis Armando Montes de Oca, Gabriel González, Raymundo Hernández, Oscar Castillo, Ricardo Montoya, Iván Arango, y a todos mis compañeros de carrera, muchas gracias porque todos me han brindado su amistad y soporte, y de todos he aprendido algo... gracias amigos.

A mis compañeras y amigas: Susana Martínez, Maribel Monzalvo, Pilar Amieva, Erika Guevara, Keyla Ramírez, Carmen Pérez, Lucía Jácome, y a mi demás compañeras de carrera porque siempre me brindaron su apoyo. Gracias por todo.

A mis amigos: Holguer, Javier, Héctor, Orvil, Francisco, Axel, Karlos, Marino, Alfonso, Sergio y al arquitecto Colín, por soportarme tanto tiempo y por brindarme su amistad sincera... gracias por todas sus palabras de aliento y por los momentos que hicieron de nuestra estadía en esta ciudad una experiencia inolvidable.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ingeniería por abrirme sus puertas y darme la oportunidad de formarme como profesionista y como persona.

Al Dr. Rodolfo Camacho Velázquez en verdad le agradecemos el brindarnos la oportunidad de dirigirnos durante el desarrollo de este trabajo ya que fue una gran experiencia trabajar a su lado. Gracias por todo su apoyo y paciencia.

De manera especial gracias al M.I. José Antonio González Guevara, por haber confiado en nosotros para lograr este trabajo y por brindarnos todo su apoyo en todo momento como profesionista y amigo.

A nuestros sinodales Ing. Manuel Villamar, M. I: Mario Becerra, Dr. Víctor Hugo Arana y M. I. José Martínez gracias por haber hecho de este un mejor trabajo.

Al personal del IMP: M.I. Héctor Hernández García, Ing. Ma. Berenice Aguilar, Dra. Cecilia Durán, Ing. Blanca Angulo, Ing. Carlos Esquinca, Miriam y Julio, muchísimas gracias por todas las facilidades prestadas para la culminación

de este trabajo, por confiar en nuestras capacidades como profesionistas y por la amistad que nos han brindado.

Al M.I. Nestor Martínez Romero por su apoyo y confianza dentro y fuera de las aulas de clase.

A la AIPM por su apoyo durante mi etapa como estudiante.

Ivan Vinicio Olea Uribe

j

CONTENIDO

TEMAS	PAG.
RESUMEN	3
INTRODUCCIÓN	5
CAPÍTULO I. PRINCIPIOS DE LA GEOMETRÍA FRACTAL	7
Definición de fractales.....	7
Los conjuntos de Julia.....	16
El conjunto de Mandelbrot.....	19
CAPÍTULO II. GENERACIÓN DE FRACTALES	21
Transformaciones de afinidad	22
Método de Barnsley	26
Generación sintética de la red de fracturas	31
CAPÍTULO III. SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS	37
Modelo de Chang y Yortsos	38
Trabajo de Acuña	39
Modelo matemático	44
Ecuación generalizada de difusión	47
CAPÍTULO IV. DESARROLLO DEL MODELO DE SIMULACIÓN	53
CAPÍTULO V. ANÁLISIS DE RESULTADOS	64

Solución Numérica del Flujo de Líquido en Sistemas Fracturados con Geometría Fractal

CONCLUSIONES	76
APÉNDICES	78
APÉNDICE A. Método del caminante aleatorio	78
APÉNDICE B. Simulador numérico para medios fracturados con geometría fractal	104
APÉNDICE C. Programa de cómputo para generar conjuntos de julia	114
APÉNDICE D. Glosario	117
REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA	121

RESUMEN

La geometría fractal es hoy en día una herramienta imprescindible para numerosos especialistas pues les ha permitido reformular problemas complejos que por años permanecieron sin solución o bien tratarlos de forma más simplificada. Es así como los biólogos han podido simular el comportamiento de colonias de bacterias simulando sus reglas de supervivencia, los químicos han representado casi a la perfección las formas irregulares que toman los agregados electroquímicos, los físicos han podido estudiar la trayectoria de las partículas suspendidas en el aire y los ingenieros en yacimientos han podido crear medios fracturados sintéticos similares a los yacimientos petroleros reales y reproducir el comportamiento de flujo a través de las fracturas.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un simulador numérico para analizar el comportamiento de la presión en yacimientos fracturados tomando como base la ecuación de Chang y Yortsos la cual está desarrollada utilizando la geometría fractal para definir las características de las fracturas presentes en el yacimiento.

En la primer parte de este trabajo se dan a conocer los principios y conceptos básicos sobre la geometría fractal, así como un pequeño marco histórico sobre el origen de la teoría fractal y la mención de los fractales más representativos o comunes dentro de este rubro.

A continuación, en el capítulo dos, se aborda la generación de medios con características fractales y los diferentes métodos más usados para este fin, así como los aspectos teóricos que involucran.

Después en el siguiente capítulo, se da un marco teórico sobre la simulación numérica para yacimientos naturalmente fracturados aplicando los conceptos que se usan en la geometría fractal. En el capítulo cuatro se desarrolla el modelo de

simulación usando como base la ecuación desarrollada por Chang y Yortsos, utilizando un esquema de solución implícito y considerando un solo pozo.

Finalmente se muestran los resultados obtenidos en el simulador desarrollado en el capítulo cuatro y se interpretan los fenómenos que se están presentando en el comportamiento de la presión para un pozo productor colocado en el centro del yacimiento.

En el primer apéndice se explica el método del caminante aleatorio y se da una vista general a su aplicación en simulación de yacimientos, además de que se muestran los resultados obtenidos al analizar un modelo que fue construido para generar caminatas aleatorias en un medio caótico.

INTRODUCCIÓN

El mundo en el que vivimos está constituido de formas irregulares: las nubes, las rocas, las montañas. Para el estudio de la naturaleza por mucho tiempo se acudió a la simplificación de sus formas por medio de figuras geométricas regulares, es decir, con geometría euclidiana. Con el tiempo, al querer aproximar cada vez más los resultados a la realidad nos damos cuenta que la geometría euclidiana no es precisamente la solución a todos nuestros problemas; si por ejemplo observamos la forma de un helecho notaremos que si aproximamos su forma con rectángulos y triángulos, al hacer un acercamiento a la figura se pierde la forma característica del helecho. Es por eso que se pensó en la posibilidad de objetos geométricos con la propiedad de tener detalle a cualquier escala y que al hacer un acercamiento a una porción del mismo éste será similar a la forma de todo el objeto en sí. En la actualidad a este tipo de objetos los conocemos como fractales, y hace ya más de dos décadas que el mundo científico los utiliza para plantear nuevas reglas para enfrentarse con el reto de conocer y describir la naturaleza.

Un fractal se define como un conjunto de formas generado por un proceso iterativo que se caracteriza por poseer la misma forma a cualquier escala, por tener una longitud infinita, por no ser diferenciable y por tener una dimensión fraccional. Todas estas características llevaron a pensar que se trataba de una anomalía de la geometría euclidiana y que causaría un completo caos geométrico.

En la actualidad es posible para muchas especialidades representar problemas que de otra manera no tendrían solución o que su solución requiere de resolver sistemas de ecuaciones demasiado complejos.

La simulación del flujo de fluidos en medios fracturados es un problema que ha sido resuelto de diferentes maneras, lo ideal sería encontrar el modo de que el flujo a través de fracturas y su comunicación con la matriz sea algo inherente del

sistema y que su solución no genere un número grande de ecuaciones y por lo tanto mucho tiempo y requerimientos computacionales.

En diferentes estudios se ha concluido que las fracturas en un yacimiento se comportan de manera fractal, tanto geométrica como estadísticamente, refiriéndonos con esto último al comportamiento de sus propiedades de conductividad y almacenamiento.

Es posible simular el flujo de fluidos en un medio fracturado con ayuda de una ecuación de difusión que contenga las características fractales del medio, o bien, se puede generar el medio de fracturas con ayuda de algún método iterativo como el propuesto por Barnsley, de manera que se pueda simular el flujo con ayuda de un método de balance de masa o del método de caminante aleatorio.

CAPITULO I.

PRINCIPIOS DE LA GEOMETRÍA FRACTAL

Definición de fractales.

En 1975 Benoit Mandelbrot denominó fractales (del latín fractus, irregular o interrumpido) al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional. Adicionalmente, construyó con ellas un conjunto de nuevas reglas para explorar la geometría de la naturaleza, y las reconoció como herramientas potencialmente útiles para analizar un gran número de fenómenos físicos.

El interés de Mandelbrot en los fractales nace de su inquietud de describir el mundo que lo rodeaba, como lo dice en su libro "La Geometría Fractal de la Naturaleza" *"...¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo frío y árido? Sí, es incapaz de describir la forma de una nube, una montaña, una costa o árbol, porque ni las nubes son esféricas ni las montañas son cónicas ni los árboles cilíndricos... La naturaleza no solamente exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad"*.

Cuando Benoit Mandelbrot publicó en 1975 su primer ensayo sobre fractales no se atrevió realmente a dar una definición matemática formal que caracterizara a estos objetos; simplemente decidió utilizar el término para denominar las formas que compartían la característica común de ser a la vez rugosas y autosimilares. Hacia 1977, el matemático se vio forzado a dar una definición formal que permitiera distinguir con más claridad una entidad fractal. Para hacerlo recurrió al antiguo concepto de dimensión de Hausdorff, el cual se explicará más adelante, y en respuesta al pragmatismo definió, en general, a todos los fractales como el conjunto de formas con dimensión fraccional. Mandelbrot estaba perfectamente

consciente de que esta definición, si bien establecía una frontera bien delimitada con la geometría euclidiana de los conos y las esferas (en la que los cuerpos tienen una dimensión de Hausdorff entera), dejaba una puerta abierta hacia la región del caos geométrico.

Para el desarrollo de su trabajo, Mandelbrot seleccionó a los números complejos como su campo de trabajo, sobre ellos aplicó diversas transformaciones que lo llevaron a descubrir y estudiar diversas formas fractales.

Aunque se considera a Mandelbrot como padre de la geometría fractal, no todo el mérito en el descubrimiento de los fractales se debe a él, sino también a otro gran matemático: el francés Gaston Maurice Julia, cuyo trabajo se describe en el siguiente apartado de este capítulo.

Se ha revisado de forma muy general el origen de los fractales, pero para poder definir a los fractales de una forma más práctica podemos utilizar uno de los ejemplos más representativos de un fractal, la curva construida por la matemática sueca Helge von Koch en 1904. Su dibujo consiste en tomar un triángulo equilátero como figura inicial y añadir en el centro de cada uno de sus lados un nuevo triángulo equilátero tres veces más pequeño que el original, si el proceso se repite un número indefinido de veces se consigue la curva de Koch o copo de nieve (Figura I.1).

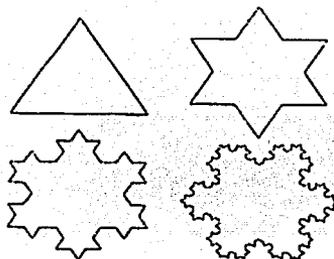


Figura I.1. Se muestra la generación de la curva de Koch por etapas.

Si pudiéramos hacer un acercamiento sobre la imagen final veríamos siempre una figura similar a la inicial y nunca, a ninguna escala que podamos imaginar, se perdería esta propiedad. Conseguimos entonces dibujar una figura que se conoce como autosimilar pues cada una de sus partes es igual a la original.

Si quisiéramos medir la longitud de la curva de Koch nuestra medición dependerá del objeto que usemos para medirla, si el objeto es poco flexible la medición será muy burda y poco aproximada a la realidad.

Como vimos la generación de la curva consiste en un proceso de repetición que añade a cada paso más detalle a la figura y por lo tanto aumenta su longitud extendiéndolo sin límite alguno. Si pudiéramos extender su perímetro podríamos generar una recta de longitud infinita. El resultado es un objeto que a pesar de estar definido sobre una región finita del espacio posee una frontera de extensión ilimitada.

En esta curva, todo punto es un punto de quiebre al que no se puede ajustar una recta tangente con inclinación única; esto la distingue de las curvas suaves con las que estamos más acostumbrados a tratar, en las que en cada punto se puede hacer pasar una tangente; sólo para caracterizar este hecho se puede decir que la curva no es diferenciable.

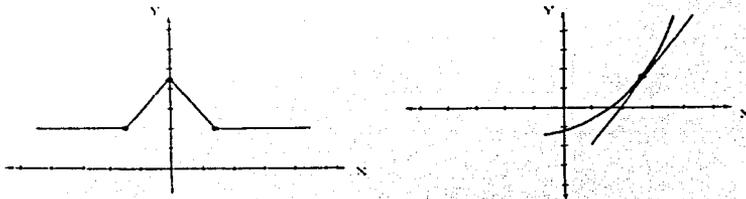
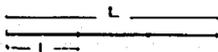


Figura 1.2. Se observa como en una figura fractal, como la de la izquierda, no es posible asociar una tangente, mientras que en una curva suave, como la de la derecha, no representa mayor problema.

Las propiedades que se han visto hasta ahora que poseen los fractales, hacen que sea difícil establecer mecanismos de comparación y clasificación de los mismos. Fue el matemático alemán Félix Hausdorff quien en 1919 introdujo el concepto de "dimensión" con el cual se ha logrado una clasificación de los objetos fractales.

Dentro de la geometría euclidiana estamos acostumbrados a ser capaces de calcular la dimensión de los objetos por medio solamente de sentido común, aunque es posible establecer un método que nos evite dudar sobre la dimensión de un objeto regular. Si se tiene un hilo de longitud $L = 1$ m y lo dividimos en tres pedazos iguales de longitud $l = 1/3$ m, el número de particiones N que se generan se obtiene determinando cuántas veces cabe una parte l en el total L , $N = L/l$.



$$l = \frac{L}{3} \quad \therefore N = \frac{L}{l} = 3$$

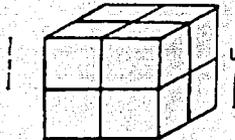
Si repetimos este proceso sobre un cuadrado de lado $L = 1$ m, y se secciona en cuadrados más pequeños de lado $l = 1/2$ m y área $l^2 = 1/4$ m², el número de particiones resulta ahora $N = L^2/l^2$



$$l = \frac{L}{2} \quad \therefore N = \frac{L^2}{l^2} = 4$$

La extensión directa de los resultados anteriores al caso tridimensional nos llevaría a suponer que aquí debe cumplirse que $N = (L/l)^3$, lo que pareciera

indicarnos que basta con elevar L/l a una potencia igual a la dimensión de la figura, lo que se verifica con el ejemplo de un cubo:



$$l = \frac{L}{2} \quad .N = \frac{L^3}{l^3} = 8$$

Al dividir cada lado a la mitad, $l = \frac{L}{2}$, se generan $.N = \frac{L^3}{l^3} = 8$ pequeños cubos de volumen l^3 .

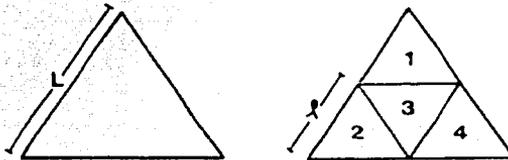
Si generalizamos las relaciones obtenidas podemos decir que en un proceso de división como el descrito, el número de secciones generadas está dado por $N = (L/l)^{df}$, donde df es lo que denominaremos la dimensión de Hausdorff del objeto. Hay que notar que la misma relación debe cumplirse tanto si decidimos seccionar el objeto total como cualquiera de sus partes.

Despejando df nos encontramos con la ecuación 1.1, que nos permite obtener la dimensión de un objeto.

$$df = \frac{\log(N)}{\log(l_r)} \quad (1.1)$$

Por ejemplo, al tomar un triángulo equilátero de lado $L = 1$ y dividirlo en secciones de la mitad de extensión ($l = 1/2$; $L/l = 2$):

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



se obtienen cuatro particiones idénticas ($N=4$); de donde se deduce que como $df = \frac{\log(4)}{\log(2)} = 2$, tratamos con un objeto bidimensional.

Considerando ahora la curva de Koch, una recta de longitud L es dividida en secciones de un tercio de extensión, $l = L/3$, y en el proceso se generan cuatro particiones de tamaño similar ($N = 4$, pues generamos un pico):



Y de la definición de dimensión obtenemos que $df = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2619$, el resultado

es desconcertante pero indiscutible, y es una evidencia más de la singularidad de la forma geométrica que estudiamos. La dimensión de Hausdorff definida de esta manera es una medida de la complejidad y rugosidad del cuerpo, y nos da una idea de su extensión real en el espacio. El copo de nieve de Koch cubre más espacio que una recta ($df = 1$), pero mucho menos que un plano ($df = 2$).

Cada objeto fractal tendrá como característica particular su dimensión (df), a continuación se muestra el ejemplo del triángulo y la carpeta de Sierpinski, dos de los primeros fractales en ser estudiados y aplicados a problemas reales.

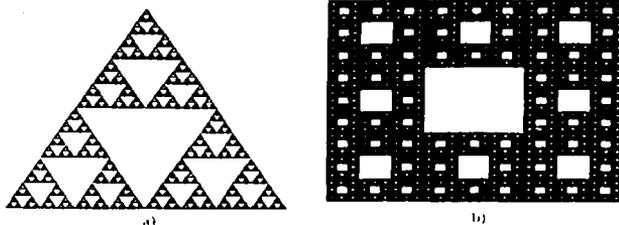
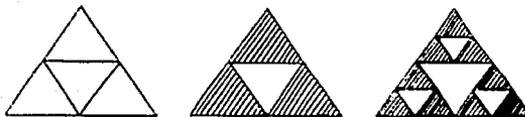


Figura 1.3. a) Triángulo de Sierpinski, y b) carpeta de Sierpinski .

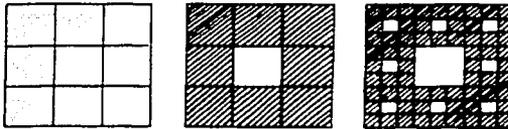
El triángulo de Sierpinski es el resultado de seccionar a toda escala un triángulo equilátero en cuatro particiones similares cuyos lados son tan sólo la mitad de los de la figura original ($L/l = 2$). Una vez hecho esto se extrae la sección central, de forma que queden las tres partes de los vértices ($N = 3$), y sobre éstas se actúa de la misma manera:



Este proceso se repite en cada una de las partes restantes y así se procede hasta el "infinito"; el resultado es similar al que aparece en la figura 1.3a. La dimensión de Hausdorff de la figura se obtiene considerando que cada vez que la longitud del triángulo se reduce a la mitad, aparecen tres triángulos más, por lo tanto:

$$d_f = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1.584$$

De forma análoga puede construirse la carpeta de la figura 1.3b si la iteración (repetición de la misma operación o transformación a toda escala) consiste en dividir a todos los niveles un cuadrado en secciones de un noveno de área ($L/l = 3$), eliminando la participación del centro:



Finalmente se tiene una forma geométrica cuya dimensión también es fraccional:

$$df = \frac{\log(8)}{\log(3)} = 1.893$$

Comparando los resultados obtenidos para las tres figuras estudiadas se hace evidente que la dimensión de Hausdorff cuantifica hasta qué punto el objeto cubre el espacio en el que se encuentra inscrito: mientras la curva de Koch casi no cubre el plano ($df = 1.263$), la carpeta de Sierpinski ($df = 1.893$) lo logra casi completamente.

Los fractales mostraron su utilidad por primera vez cuando se generó con ellos un modelo simple para la aparición de ruido en ciertas líneas de transmisión en sistemas de comunicación digital; esto es, la presencia de breves interrupciones eléctricas que confunden y dificultan la comunicación (del tipo de las que estamos acostumbrados a oír cuando hablamos por teléfono o escuchamos el radio). El análisis de las señales demostró que las interrupciones aparecían como por paquetes, pero dentro de estos paquetes se distinguía una estructura intermitente. Un registro gráfico de las interrupciones dio lugar a un patrón fractal similar al que se obtiene a través del siguiente procedimiento. Tomamos una recta de longitud L y la seccionamos en tres partes idénticas ($l = L/3$), extrayendo después la sección central (nos queda $N = 2$):



Cuando el procedimiento se repite a toda escala:



se obtiene el fractal conocido como conjunto de Cantor en honor a su creador, el matemático alemán Georg Cantor; famoso por su desarrollo de la teoría de conjuntos.

El conjunto o polvo de Cantor tiene una dimensión de Hausdorff menor que la unidad, pues cada vez que la longitud de un segmento se reduce a su tercera

parte, sólo aparecen dos trozos más, $df = \frac{\log(N)}{\log(L)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0.6309$. En otras

palabras, es más que una colección de puntos, pero menos que una línea.

La geometría fractal en la actualidad se ha aplicado a un sinnúmero de problemas, uno de los ejemplos más simples consiste en la medición de la costa de Inglaterra, que como se demostró al analizar la curva de Koch, dependerá del objeto que se use para su medición y de la escala de la imagen que se utilice para medirla por lo que para efectos prácticos se puede decir que su longitud es ilimitada. En particular se ha calculado que la dimensión de Hausdorff de las costas terrestres se encuentra entre 1.15 y 1.35; de nuevo entre la línea y el plano, pero ni una ni otro.

Es importante señalar que los fractales que existen en la naturaleza tienden a ser irregulares y que son autosimilares sólo en sentido estadístico; esto es, si tomamos un conjunto suficientemente grande de objetos de la misma clase y amplificamos una porción de alguno de ellos, es posible que no sea idéntico al original, pero seguramente sí será similar a algún otro miembro de la colección. Su dimensión es fraccional pero se obtiene realizando promedios sobre sus valores en muchas regiones y para muchos cuerpos del mismo tipo. Cuando se amplifica una de las partes de un fractal natural, la propiedad de generar la misma figura, o

alguna similar, tiene límites inferiores y superiores. Los fractales son, en ese sentido, sólo una buena aproximación de la estructura de las formas naturales.

Los conjuntos de Julia

El trabajo pionero en el juego de hacer iteraciones con números complejos fue desarrollado por los matemáticos franceses, Gaston Julia y Pierre Fatou, a principios del siglo pasado. Sus resultados fueron la base sobre la que se construyó la revolución fractal de los ochenta. En particular, Benoit Mandelbrot recuperó su análisis sobre el comportamiento de los números complejos cuando la iteración consiste en elevarlos al cuadrado y sumar una constante al resultado.

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + c$$

donde c es la constante y también es un número complejo. Esta iteración dice simplemente: toma un número y multiplícalo por sí mismo, súmale la constante c que elegiste, y repite lo mismo una y otra vez sobre tus resultados. Por ejemplo, si tomamos como punto inicial $Z_0 = (1, 0)$ y la constante $c = (0, 1)$, al iterar tenemos:

$$Z_1 = Z_0^2 + c = (1,0)(1,0) + (0,1) = (1,1)$$

$$Z_2 = Z_1^2 + c = (1,1)(1,1) + (0,1) = (1,3)$$

$$Z_3 = Z_2^2 + c = (1,3)(1,3) + (0,1) = (-9,1)$$

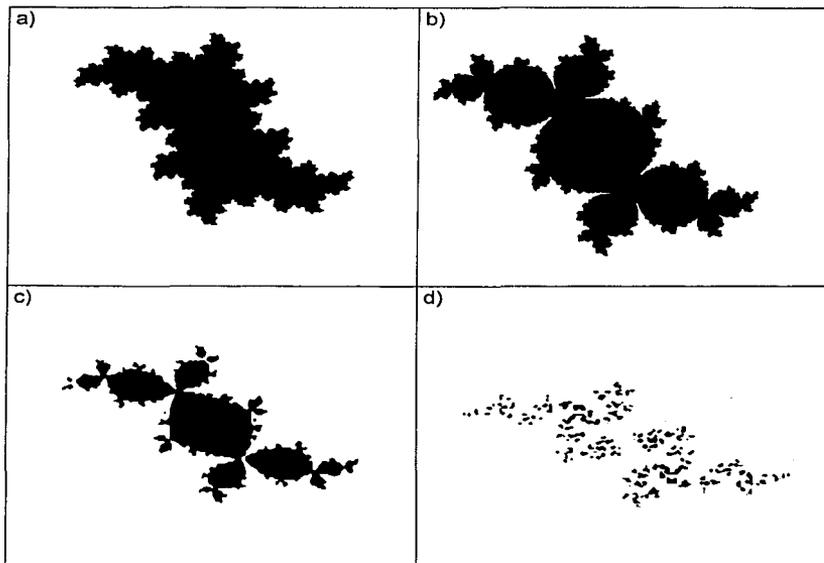
$$Z_4 = Z_3^2 + c = (-9,1)(-9,1) + (0,1) = (80,-17)$$

y así podemos seguir hasta detectar la naturaleza del atractor, es decir, el número al que tiende la ecuación $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ después de un número muy grande de iteraciones, que dependerá del valor de la constante c para este caso. La definición de atractor se analiza más a fondo en el siguiente capítulo.

Desde 1906, Fatou había demostrado que para cada valor de c se obtenían conjuntos de puntos diferentes (figuras 1.4 y 1.5) en los que la aplicación de cada iteración sobre todos los puntos del plano complejo genera órbitas que en su

mayoría terminan cuando $z \rightarrow \infty$, salvo para un conjunto bien definido de puntos. En estos casos, la iteración detecta puntos fijos; órbitas periódicas donde se repite la misma secuencia de números después de cierto número de iteraciones, o puntos que escapan hacia atractores finitos. A este tipo de puntos cuya iteración NO escapa a infinito, se les conoce como puntos prisioneros, mientras los otros son escapistas.

Todos los puntos prisioneros pertenecen al cuerpo de un conjunto de Julia. El conjunto, en sí, sólo está constituido por la curva que separa a los puntos prisioneros de los escapistas; los puntos del conjunto de Julia también son prisioneros.



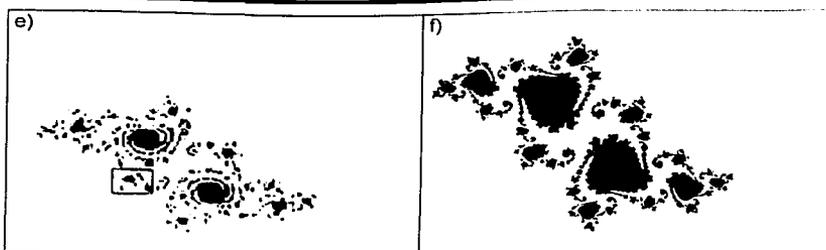


Figura 1.4. Conjuntos de Julia asociados a la iteración $z_{n+1} = z_n^2 + c$. a) $c = (0.12, 0.57)$; b) $c = (-0.12, 0.66)$; c) $c = (0.12, 0.74)$; d) $c = (-0.25, 0.74)$; e) $c = (-0.194, 0.6557)$; f) $c = (0.75, 0.11)$.

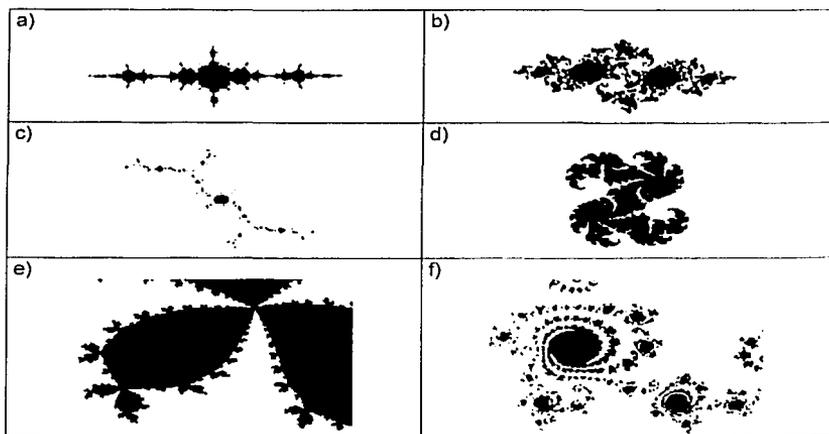


Figura 1.5. Conjuntos de Julia asociados a la iteración $z_{n+1} = z_n^2 + c$. (a) $c = (0.745, 0.113)$; (b) $c = (1.25, 0)$; (c) $c = (-0.1565, 1.0322)$; (d) $c = (0.32, 0.043)$; (e) detalle de la figura 1.4(c) en una ampliación del orden de $1/0.0001$; (f) detalle de la figura 1.4(c) en una ampliación del orden de $1/0.25$.

Con el fin de generar los conjuntos de Julia se construyó un programa de cómputo cuyo código y diseño se encuentra en el Apéndice C de este trabajo.

El conjunto de Mandelbrot

Del análisis de las figuras 1.4 y 1.5 se hace evidente que existen dos clases principales de conjuntos de Julia: aquellos para los cuales el cuerpo está formado por una sola pieza (el área del cuerpo se dice que es conexa), y otros en los que el cuerpo está desmembrado en infinitas colecciones de puntos más o menos aisladas (el área del cuerpo es disconexa). A estos últimos también se les llama conjuntos de Cantor o polvos de Fatou.

Benoit Mandelbrot se dedicó a localizar los valores de la constante c que dan lugar a conjuntos de Julia conexos. Al hacerlo se encontró con que esta colección de valores de c , que en su honor tiene el nombre de conjunto de Mandelbrot, también tenía una estructura sorprendente cuando se representaba en el plano complejo. (Figura 1.6)

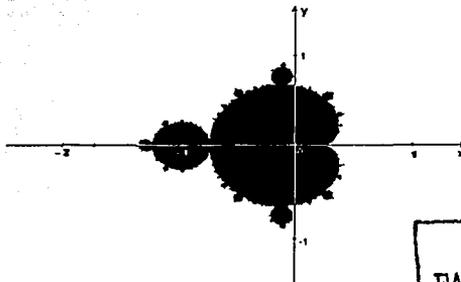
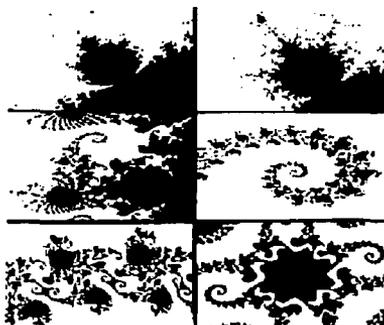


Figura 1.6. Conjunto de Mandelbrot.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 1.7. Detalles de la frontera del conjunto de Mandelbrot.

El conjunto de Mandelbrot parece ser un fractal en el sentido que hasta ahora hemos manejado. La ampliación de un detalle de su frontera da lugar a una forma muy similar a la del conjunto completo, y tal parece que esto se repetirá a cualquier escala. Sin embargo, las cosas no suceden exactamente de esta manera, al ampliar los detalles en la frontera del conjunto de Mandelbrot se observan figuras más intrincadas y complejas que la original. (Figura 1.7). A figuras como ésta se les sigue clasificando como fractales, pero se les agrupa dentro de una clase particular denominada fractales alineales; en ellos se pierde la auto similitud en sentido estricto, pues cada cambio de escala introduce rasgos peculiares.

El conjunto de Mandelbrot es mucho más que una tabla de clasificación para distinguir entre formas conexas y disconexas. En realidad, contiene toda la información sobre las propiedades geométricas de cada conjunto de Julia, pero codificada como en un jeroglífico. En sí mismo es el recipiente de una colección completa de versiones reducidas y deformadas de cada uno de ellos.

CAPITULO II.
GENERACIÓN DE FRACTALES

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La forma de construir objetos fractales es en principio muy simple, consiste en tomar un número sobre el que se hace una operación, repetir lo mismo con el resultado y continuar haciéndolo indefinidamente en los siguientes resultados obtenidos. Formalmente se dice que se hace una iteración y se representa de manera general como:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (II.1)$$

Podemos ejemplificar considerando la operación de elevar un número al cuadrado:

$$x_{n+1} = x_n^2$$

Al aplicarla sobre un valor inicial cualquiera, por ejemplo, $x_0 = 2$, el primer cálculo nos daría $x_1 = (2)^2 = 4$; después $x_2 = (4)^2 = 16$, y $x_3 = (16)^2 = 256$, y así consecutivamente. La secuencia de números se genera como sigue:

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 256 \rightarrow 65536 \rightarrow \dots \rightarrow \infty$$

al punto al que se tiende a llegar después de un número infinito de iteraciones se le llama *atractor*, en el caso del ejemplo anterior el atractor es el infinito. Si el valor inicial cambia, por ejemplo a $x_0 = 0.5$, se tiene que,

$$0.5 \rightarrow 0.25 \rightarrow 0.0625 \rightarrow 0.00390625 \rightarrow \dots \rightarrow 0$$

y el atractor es entonces el número 0.

Si $x_n = 1$, las cosas son un poco distintas, pues el resultado siempre es 1, y no hay manera de salir de ahí; la órbita está constituida por un solo punto al que se le llama *punto fijo*.

A diferencia de la geometría euclidiana, en donde los elementos básicos pueden generarse de manera directa (líneas, círculos, planos, etcétera), en la geometría fractal las formas primarias son conjuntos de procedimientos matemáticos (algoritmos) que se encargan de rotar, trasladar, reescalar o deformar figuras de una manera particular.

Los códigos matemáticos que subyacen en toda estructura fractal son parte de un concepto que los matemáticos denominan transformaciones generales de afinidad en el plano. Éstas no son más que reglas para escalar, rotar, desplazar y, en ocasiones distorsionar un objeto geoméricamente.

Transformaciones de afinidad

La naturaleza de cualquier transformación de afinidad permite clasificar a ésta dentro de dos grandes grupos: lineales y alineales. La diferencia fundamental entre ellas reside en que las primeras respetan las líneas rectas que constituyen la forma geométrica sobre la que se aplican, mientras que las segundas no, y por tanto actúan sobre ellas alterando algo más que su posición, orientación y tamaño.

A manera de ejemplo se puede considerar como objeto inicial un cuadrado de lado L situado en un sistema de referencia como el mostrado en la figura II.1(a), de modo que su vértice inferior izquierdo coincida con el origen.

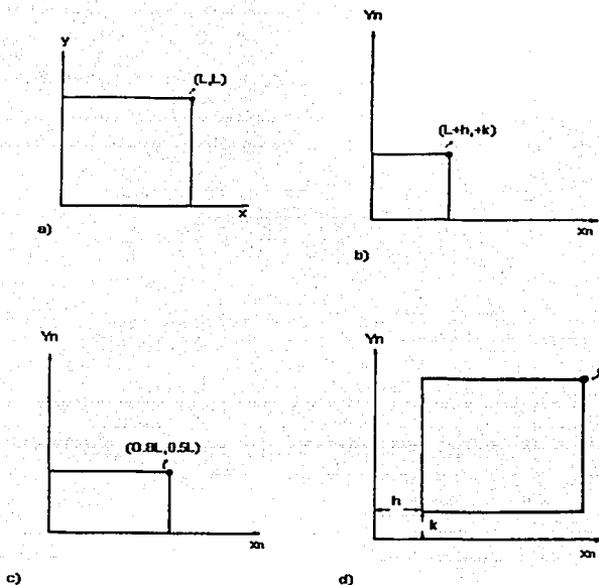


Figura 11.1. las figuras (b), (c) y (d) son el resultado de aplicar transformaciones sobre la figura base (a). b) Transformación de similitud con un factor de escala $r = 0.5$ c) Transformación de afinidad con $r = 0.8$ y $s = 0.5$ d) Desplazamiento

$$x_n = x + h, y_n = y + k$$

Para realizar transformaciones a la figura inicial se pueden considerar las coordenadas (x_n, y_n) como las coordenadas de cada vértice del cuadrado después de haber aplicado la transformación deseada. Si planteamos la siguiente regla:

$$x_n = 0.5x \tag{11.2}$$

$$y_n = 0.5y \quad (II.3)$$

Se aplica para cada vértice:

$$(0,0) \rightarrow (0.5 \times 0, 0.5 \times 0) \rightarrow (0,0)$$

$$(0, L) \rightarrow (0.5 \times 0, 0.5 \times L) \rightarrow (0, L_2)$$

$$(L,0) \rightarrow (0.5 \times L, 0.5 \times 0) \rightarrow (L_2, 0)$$

$$(L, L) \rightarrow (0.5 \times L, 0.5 \times L) \rightarrow (L_2, L_2)$$

con lo que se obtiene el pequeño cuadrado de la figura II.1(b). Para este caso en particular obtenemos un escalamiento en el que la figura se disminuye a la mitad de su tamaño original. Como la figura no ha sido deformada se dice que se ha hecho una transformación de similitud. Si al contrario se utilizan parámetros de escala distintos para cada coordenada y se deforma la figura haciéndola más ancha o más alargada se dice que la figura resultante sigue siendo afín a la inicial. Esta transformación de carácter más general se conoce como transformación de afinidad.

Otra transformación puede consistir en trasladar la figura inicial en dirección de x o de y :

$$x_n = x + h \quad (II.4)$$

$$y_n = y + k \quad (II.5)$$

Para completar las transformaciones debemos ahora considerar los efectos de una rotación. Cuando se desea rotar una figura cuyos puntos se designan con las coordenadas (x, y) , basta aplicar sobre todos ellos la siguiente transformación:

$$X_n = x \cos(A) - y \sin(A) \quad (II.6)$$

$$Y_n = x \sin(A) + y \cos(A) \quad (II.7)$$

El resultado de la aplicación de una rotación se muestra en la figura II.2.

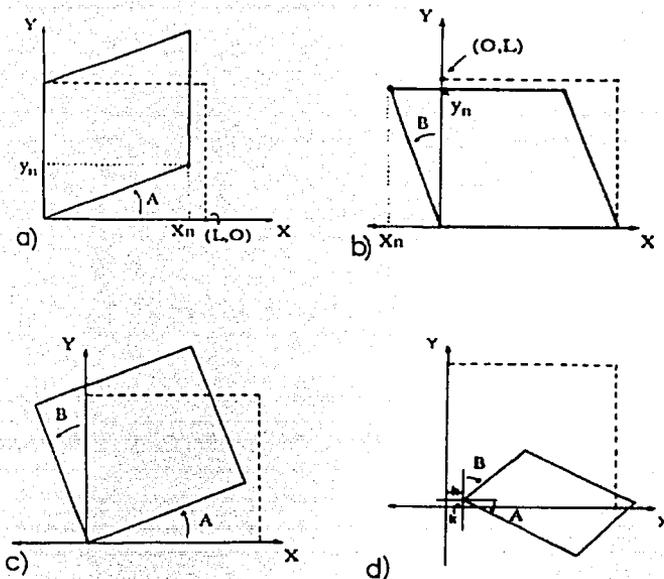


Figura II.2. Se muestran algunos efectos de rotación sobre la figura base representada con línea punteada.

Con esto podemos definir expresiones que agrupen todas las transformaciones posibles,

$$x_n = rx \cos(A) - sy \sin(B) + h \quad (II.8)$$

$$y_n = rx \sin(A) - sy \cos(B) + k \quad (II.9)$$

Todo fractal lineal puede construirse aplicando reiteradamente un conjunto determinado de transformaciones de afinidad lineales sobre cierta región del

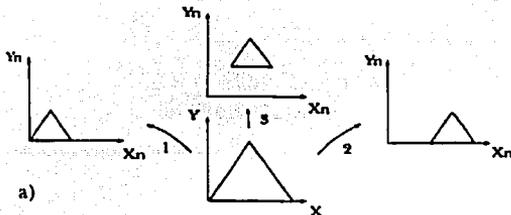
espacio. En ese sentido, todo el detalle de una forma fractal puede quedar almacenado en un conjunto de tablas de transformación que contengan los valores de r , s , A , B , h y k .

Metodo de Barnsley²

En 1988, M. Barnsley y sus colaboradores desarrollaron una estrategia de trabajo que permite reproducir prácticamente cualquier fractal. En el método de Barnsley el trabajo se inicia buscando un conjunto de transformaciones de afinidad, que al aplicarse sobre una figura de base arbitraria, dé lugar a nuevas formas que reproduzcan algo que se parezca a la imagen del fractal que se quiere construir.

Por ejemplo, para reproducir el triángulo de Sierpinski bastaría tomar como base inicial un triángulo y generar tres transformaciones de afinidad que además de reducirlo a la mitad, trasladen los resultados hacia cada uno de sus vértices. Las transformaciones correspondientes pueden condensarse en una tabla como la siguiente:

	r	s	h	k	A	B
1	0.5	0.5	0	0	0	0
2	0.5	0.5	0.5	0	0	0
3	0.5	0.5	0.25	0.5	0	0



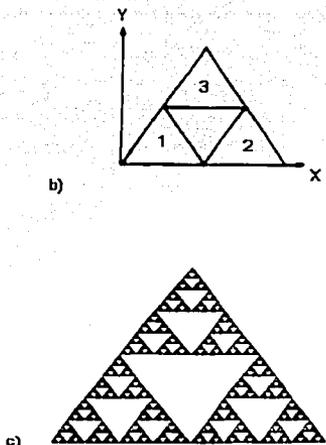


Figura II.3. Transformaciones de afinidad necesarias para generar el triángulo de Sierpinski.

Barnsley y su grupo lograron demostrar que el mismo objetivo podría alcanzarse siguiendo un camino distinto, el cual, al menos desde el punto de vista de la operación por computadora, resulta menos costoso.

El método se basa en imaginar una mesa de ping-pong para tres jugadores formada por canchas triangulares, el juego inicia lanzando una pelota entintada hacia alguna de las canchas y seleccionando un número entre 1 y 3 que corresponda a alguna transformación de afinidad, de manera que el jugador correspondiente deberá lanzar la pelota a las coordenadas resultantes después de aplicar dicha transformación y así sucesivamente hasta que después de un tiempo razonable la figura que se habrá formado en la mesa será la del triángulo de Sierpinski.

La propuesta plantea que para construir un fractal basta con elegir un conjunto inicial arbitrario de datos que puede estar constituido de uno o varios puntos, líneas u objetos geométricos complejos, y a partir de él aplicar reiteradamente las transformaciones de afinidad en un orden seleccionado al azar. Como las transformaciones afines se repiten iteradamente se converge hacia el atractor de los datos el cual es fractal. El resultado será la figura fractal correspondiente al conjunto de transformaciones planteadas y a las probabilidades definidas para cada área, lo que establecerá el número de veces que la pelota de ping-pong caerá en dicho espacio de la cancha.

La técnica de Barnsley también se conoce como el método de sistemas de funciones iteradas o IFS por sus siglas en inglés "*Iterated Function System*". La dificultad del método consiste en encontrar las transformaciones afines adecuadas para la generación de los objetos fractales que nos puedan ser útiles.

La riqueza de los diseños finales que se obtienen puede incrementarse notablemente si se incorpora el uso de transformaciones de afinidad alineales. En este caso la aplicación de un algoritmo deforma las líneas rectas de la figura original, dando lugar a nuevas estructuras cuya apariencia tiene poco que ver con la inicial.

Un fractal se considera aleatorio cuando en su construcción intervienen elementos condicionados por el azar. Por ejemplo, si se plantea como figura inicial un triángulo y se localizan los puntos medios de cada lado para luego desplazarnos verticalmente una distancia d determinada por números aleatorios, si se unen los puntos desplazados se formará después de varias iteraciones una figura de apariencia rugosa y compleja como la mostrada en la figura II.4.

El fractal creado por el método de IFS puede ser determinístico o estocástico. Los fractales determinísticos son generados aplicando las mismas transformaciones afines en cada paso. Los fractales estocásticos se logran cuando las transformaciones afines para cada iteración son elegidas por algún método

aleatorio, entre más aleatoriedad se logre en el método más cercana será la aproximación a la realidad.

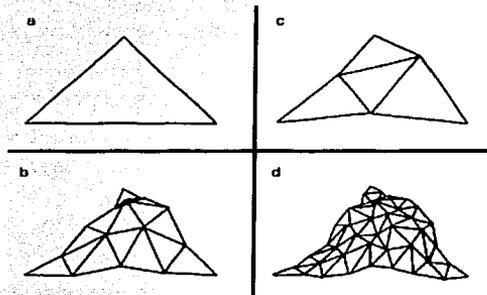


Figura 11.4. Construcción gráfica de una fractal aleatorio.

Existen otros métodos de generación de imágenes desarrollados por B. Mandelbrot y sus colaboradores en los que recurren al uso de los patrones generados en caminatas aleatorias o señales de ruido de radiofrecuencia, para generar los contornos de costas, nubes o macizos rocosos.

Los fractales constituyen como se ha visto una buena aproximación a la realidad, pero en la naturaleza no existe una estructura que pueda ser ampliada un número infinito de veces y siga mostrando la misma forma, siempre encontraremos un límite a nivel microscópico y otro a nivel macroscópico.

Cuando una estructura es muy irregular y no es formalmente autosimilar, su dimensión fractal se calcula normalmente por el *método de la caja*. El resultado que se obtiene también nos da una idea de la capacidad real del objeto para cubrir el espacio en el que está embebido.

El método de la caja consiste en tomar la estructura de interés y colocarla dentro una caja de lado L sobre la que se construye una red regular formada por segmentos más pequeños de longitud l , se cuenta el número N de cajas que

contienen alguna parte de la estructura. El procedimiento se repite utilizando redes cada vez más finas. Es posible establecer una tabla con las cantidades medidas,

L/l	6	12	24
N	23	53	115

Si se toma el logaritmo de ambas cantidades y se grafica $\log(N)$ vs $\log(L/l)$, es posible ajustar sobre los datos una línea recta cuya pendiente es la dimensión fractal df de la figura. En realidad, esto nos indica que existe una relación del tipo:

$$N = (L/l)^{df} \quad (II.10)$$

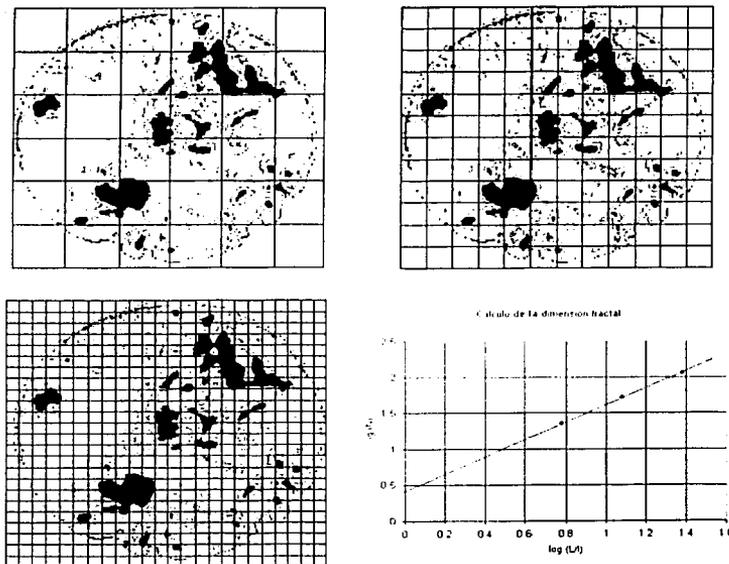


Figura II.5. Cálculo de la dimensión fractal de una de las caras de un núcleo fracturado por el método de la caja. Se realizó el conteo de las zonas más oscuras, con lo cual se obtiene una dimensión fractal de 1.1628

El método de la caja es uno de los más utilizados en ciencias para obtener la dimensión de un objeto, pues ofrece un camino sistemático aplicable a una gran diversidad de formas naturales.

Los fractales no son solamente útiles para describir la geometría de las formas naturales, también nos proveen de nuevas herramientas para analizar sus propiedades dinámicas, por ejemplo la manera en que un fluido se mueve en un medio poroso y/o fracturado.

Generación sintética de la red de fracturas

De acuerdo al método de Barnsley, es posible construir una red sintética de fracturas partiendo de un sistema compuesto de n ecuaciones, en donde por cada iteración se generará un nuevo número de ecuaciones que definen imágenes similares a la original. La creación de una imagen puede reducirse a un conjunto de puntos, de tal modo que para un medio en dos dimensiones se puede partir de un cuadrilátero dividido por una "fractura" como la mostrada en la figura 11.6.

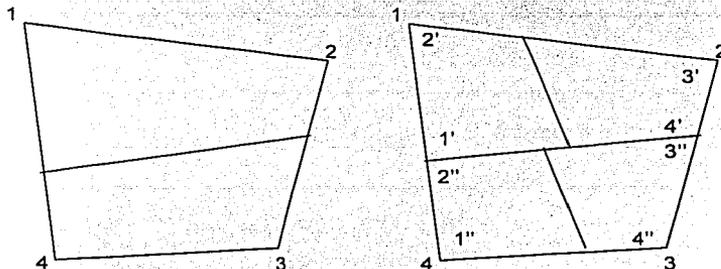


Figura 11.6. Aplicación del método IFS para la generación de redes de fracturas.

A las esquinas de la figura original (1,2,3,4) se les aplica una transformación con la cual se genera una primera generación de la fractura original, inmersa en la nueva imagen (1',2',3',4'). Una segunda transformación a la figura original nos

lleva a generar una nueva primera generación de la fractura original dentro de los puntos (1",2",3",4"). Se observa que la posición de las nuevas fracturas es perpendicular a la fractura original.

Si sucesivamente se aplican las transformaciones a las nuevas figuras generadas se irán creando nuevas generaciones de fracturas orientadas perpendicularmente con relación a la fractura de la figura de la cual fueron obtenidas. Las transformaciones que se mencionan tienen la siguiente forma:

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}xy + c_{14} \quad (II.11)$$

$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}xy + c_{24} \quad (II.12)$$

Dado un punto (x,y) la aplicación de la transformación creará un punto imagen (x',y'). El valor de los ocho coeficientes c_{ij} se obtienen de la siguiente manera: si $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$ son las coordenadas de los cuatro vértices de la figura original y $(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, x'_3, y'_3, x'_4, y'_4)$ son las coordenadas de los cuatro vértices de una de las imágenes generadas, los coeficientes c_{ij} son obtenidos resolviendo el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_1 y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3 y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4 y_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{j1} \\ c_{j2} \\ c_{j3} \\ c_{j4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \\ w'_4 \end{bmatrix}$$

donde $w = x$ cuando $j = 1$ y $w = y$ cuando $j = 2$.

La ventaja del método planteado por Barnsley o "IFS" es que con pequeñas variaciones que se generen a la figura inicial o a alguna de las transformaciones es posible obtener, después de cierto número de iteraciones, un medio completamente distinto cada vez. Por ejemplo, si se plantea una figura inicial simétrica, es decir, un cuadrado con un par de fracturas cuyo cruce pase exactamente por el centro del cuadrado, se generará un medio como el mostrado

en la figura II.7, si se mueve la posición del cruce de las fracturas hacia la esquina inferior derecha se observa en la figura II.8 que la red de fracturas generadas es muy distinta a la anterior. Esta facilidad de controlar la geometría del medio de fracturas con unos cuantos parámetros nos aporta muchas ventajas para generar diferentes escenarios de medios fracturados y poder lograr una mejor aproximación a la realidad.

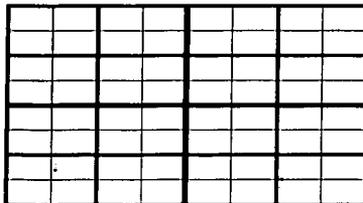


Figura II.7. Generación de una red de fracturas partiendo de una figura con la fractura inicial colocada en el centro.

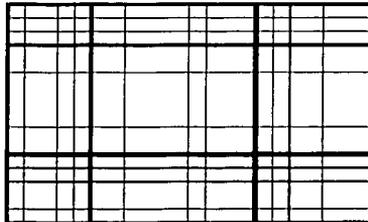


Figura II.8. Generación de una red de fracturas partiendo de una figura con la fractura inicial colocada fuera del centro.

El número de transformaciones utilizadas dependerá de la complejidad del medio que se quiera lograr. La figura II.9 muestra el resultado de generar imágenes fractales con transformaciones más complejas.

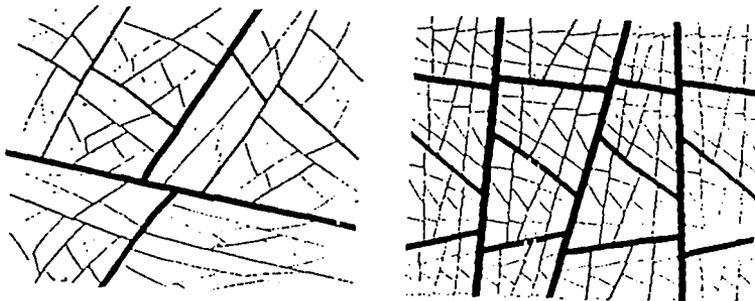


Figura II.9. La imagen de la izquierda fue generada usando tres transformaciones en lugar de dos y la imagen de la derecha fue generada con cuatro transformaciones.

Un procedimiento similar se seguirá para espacios de tres dimensiones solo que el número de transformaciones se incrementará y por lo tanto se tendrán que resolver sistemas de ecuaciones más grandes para cada iteración.

Turcotte³ demostró que cuando la probabilidad de fracturamiento, a la que llamó p_r es constante se tiene una distribución exponencial de tamaños de fragmentos generados. Turcotte estableció que: si ocurre una fragmentación idealizada en un espacio de dimensión d , puede ser descrita como sigue: inicialmente existe un bloque completo sin ningún fracturamiento de masa igual a 1. Este bloque se fractura en s fragmentos de masa $\frac{1}{s}$ en una primera generación de fracturas, la

longitud de la fractura relacionada a cada fragmento generado será $\left(\frac{1}{s}\right)^d$. Un número $p_r s^d$ de fragmentos se fracturarán de nuevo (segunda generación de fracturas) dejando solamente $(1-p_r)s^d$ bloques sin fracturar. Entonces el número de fragmentos creados en esta etapa será de $p_r s^{2d}$. Generalizando, en la $(k+1)$ etapa de fracturamiento, el número de bloques sin fracturar relacionados a

fracturas de tamaño $\left(\frac{1}{s}\right)^d$ es de $(1-p_f)s(sp_f)^k$. Cada fractura está confinada al fragmento en el cual se generó y ninguna fractura pasa a través de otra. Resulta obvio que conforme se avanza en la generación de nuevas fracturas se van haciendo más pequeñas.

La generación de zonas sin fracturar dependerá de la probabilidad que se establezca al fracturamiento de los bloques. El número de fragmentos creados se establece como el total de fragmentos con tamaño igual o mayor a una medida establecida:

$$N\left(\left(\frac{1}{s}\right)^d\right) = \sum_{i=1}^k (1-p_f)s(sp_f)^i = (1-p_f)s \frac{sp_f^k - 1}{sp_f - 1} \left((sp_f)^k - 1\right) \quad (II.13)$$

La dimensión fractal para los medios creados bajo este concepto se puede obtener por medio de la pendiente de la gráfica logarítmica del número de bloques generados en una etapa de fracturamiento contra el tamaño de las fracturas en esta misma etapa (Ec. II.14).

$$D = \frac{\log((sp_f)^{k+u}) - \log((sp_f)^k)}{\log\left(\frac{1}{s^{k+u}}\right) - \log\left(\frac{1}{s^k}\right)} = d' \frac{\log(sp_f)}{\log(s)} \quad (II.14)$$

Es posible aplicar el método de IFS para la generación de medios fracturados aunque la complejidad del método radica en que solo conoceremos los puntos inicial y final de cada fractura creada, y a pesar de estar unidos ambos puntos por una línea recta la obtención de las coordenadas desde las cuales partirá la nueva generación de fracturas no resulta una tarea trivial debido a las mismas características fractales del medio. El uso de una geometría de este tipo requiere del conocimiento de la matriz de conectividad de las fracturas generadas para poder simular el flujo de fluido a través de las fracturas del medio, del mismo modo es necesario conocer el tamaño de cada fractura, lo cual puede asociarse a la etapa en la que fue generada. Este conocimiento se vuelve de mucha utilidad

cuando se requiere hacer pequeñas modificaciones al medio como por ejemplo eliminar fracturas de cierto tamaño dentro de una zona en específico.

Para fines de este trabajo no es necesario construir el medio, aunque su documentación se vuelve necesaria para lograr una mejor explicación de la relación de la geometría de un yacimiento fracturado con la geometría fractal, además de servir como base para futuros trabajos.

CAPITULO III.
SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS
NATURALMENTE FRACTURADOS

Un yacimiento naturalmente fracturado está compuesto de bloques sólidos a los que llamamos matriz y de un sinnúmero de fracturas o grietas de diferentes tamaños posicionadas dentro de lo que podríamos llamar una red caótica. Algo similar se muestra en la figura III.1.



Figura III.1. Red de fracturas.

La simulación de yacimientos es el proceso mediante el cual, con ayuda de un modelo matemático, el ingeniero de yacimientos describe con cierta precisión el comportamiento de los procesos físicos presentes en el yacimiento.

Se utiliza un modelo matemático con base a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales cuya solución es posible en forma numérica y de manera discreta, para lo cual se busca generar un medio que represente a la realidad con

la mayor certeza posible. Para este caso se trata de generar una red sintética de fracturas por medio de la geometría fractal similar a la mostrada en la figura III.2, o bien se busca describir el comportamiento de sus propiedades por medio del uso de parámetros fractales sin necesidad de crear el medio.

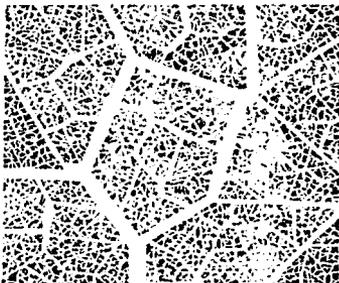


Figura III.2. Red sintética que representa una red de fracturas

Modelo de Chang y Yortsos.

En su artículo Chang y Yortsos⁴ presentan una formulación para una red fractal embebida en una matriz euclidiana. En su trabajo establecen que los yacimientos naturalmente fracturados han sido representados utilizando dos medios, uno para matriz y otro para fractura con base en el modelo de Warren y Root. El modelo de Warren y Root supone que la red de fracturas está conectada, es decir, existe comunicación entre todas las fracturas en el medio, y además se considera que poseen un arreglo geométrico regular (euclidiano). Esta última consideración se aleja de la realidad ya que la red de fracturas en el yacimiento se presenta a varias escalas y con una geometría diferente a la que la geometría euclidiana puede ayudarnos a representar, estas características nos llevan a suponer que es factible aproximar el comportamiento real de un yacimiento fracturado por medio de la geometría fractal.

Chang y Yortsos desarrollaron una ecuación general para flujo de una sola fase en un sistema que contiene un objeto fractal (red de fracturas) embebido en un objeto euclidiano (matriz), a lo cual llaman "yacimientos fractal". Trabajaron con dos sistemas diferentes: uno en el que la matriz no participa y solo las fracturas aportan fluido y otro en el que la matriz se comunica con la red de fracturas aportándole fluido. Para fines de este trabajo se considera el modelo en el que Chang y Yortsos trabajaron utilizando un medio fracturado desconectado de la matriz considerando un fluido ligeramente compresible con lo cual plantearon una extensión de la ecuación de difusión para medios con geometría fractal. (ecuación III.1)

$$c_f \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{m}{\mu} \left(\frac{1}{r^{D-1}} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{III.1})$$

Trabajo de Acuña

Acuña⁵ retoma el trabajo de Chang y Yortsos para representar el comportamiento de la presión en yacimientos naturalmente fracturados, considerando que el fluido es aportado por la red de fracturas. Su investigación se centró en probar numéricamente la ecuación desarrollada por Chang y Yortsos para sistemas fractales, aplicando su estudio a pruebas de presión.

El trabajo de Acuña consistió en generar sintéticamente redes de fracturas usando el algoritmo de IFS para la construcción de objetos fractales. Además de presentar un método de solución novedoso basado en la teoría del caminante aleatorio.

Asimismo hizo un análisis de sensibilidad sobre el número de iteraciones para generar la red de fracturas, el efecto de la posición del pozo dentro de la red, el efecto de modificar la dimensión fractal D y la influencia de las redes bidimensionales y tridimensionales de fracturas sobre la respuesta de presión del

pozo. Cabe señalar que no fue incluido el efecto de diferentes conductividades de las fracturas.

Además, plantea en su trabajo que la simulación de flujo en objetos fractales requiere la consideración de sistemas con el tamaño suficiente para representar el comportamiento fractal, lo que nos lleva a utilizar mucho tiempo de cómputo. Para lidiar con este problema se han estudiado dos métodos de desarrollo: el primero es el llamado método convencional que consiste en resolver por medio de conservación de masa; el segundo método es el basado en la teoría del caminante aleatorio y permite la consideración de sistemas muy grandes sin ocupar muchos requerimientos de cómputo.

a) Solución por conservación de masa.

Para su desarrollo se empieza considerando el flujo de una sola fase, con un fluido isotérmico y casi incompresible, en un sistema de fracturas embebido en roca impermeable. El flujo en cada fractura está dado por la ley de Darcy:

$$Q = \frac{C\rho}{\mu} \frac{\Delta P}{\lambda} \quad (III.2)$$

Donde:

C = KA (permeabilidad por área)

ΔP = caída de presión en la dirección de λ (a través de la fractura)

ρ = densidad del fluido

μ = viscosidad del fluido

λ = longitud de la fractura

Q = gasto del fluido a través de la fractura

Se supone la existencia de un pozo produciendo a gasto constante en una frontera externa infinita; el flujo ocurre solamente a través de las fracturas, a cada fractura se le asigna la misma conductividad $\frac{KA}{\lambda_{ij}}$.

Realizando un balance de materia es posible obtener un esquema discretizado para el nodo i:

$$C_i \rho_i V_i \frac{\Delta P_i}{\Delta t} = \sum_j \rho_j C_j (P_j - P_i) \frac{A}{\mu \lambda_{ij}} - Q \delta_{i,m} \quad (III.3)$$

Donde:

j denota todos los nodos conectados al nodo i

m denota el número del nodo en donde se encuentra el pozo.

C_i = compresibilidad del fluido.

ρ = densidad del fluido.

$V_i = \frac{1}{2} \sum_j A \lambda_{ij}$, donde A es el área perpendicular al flujo de la fractura y λ_{ij} es

la longitud de la fractura que une a los nodos i y j.

ΔP = caída de presión a través de la fractura.

Δt = paso de tiempo.

μ = viscosidad del fluido.

λ_{ij} = longitud de la fractura que une a los nodos i y j.

$C_{ij} = KA$ (permeabilidad por área) en la fractura que une a los nodos i y j.

Q = gasto de fluido en el pozo.

Los nodos definen la intersección entre fracturas, cada uno está asociado a un volumen igual a la suma de la mitad del volumen de las fracturas que convergen al

nodo. Las conexiones entre nodos no tienen volumen, solo una longitud característica y un producto permeabilidad-área.

La mayor desventaja de este método es la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones lineales muy grande. Dependiendo de los nodos que se planteen los requerimientos computacionales irán en aumento.

b) Solución por el método de caminante aleatorio

El método consiste en soltar un caminante a partir del origen de un medio dado, la probabilidad $P(r,t)dr$ de encontrar al caminante entre r y $r+dr$ a un tiempo t está gobernada por la ecuación de difusión.

Para que la simulación sea adecuada a la realidad se requiere de un número muy grande de caminantes aleatorios por lo que Acuña propone una alternativa para disminuir el esfuerzo computacional conocido como aproximación por *enumeración exacta*.

El método de enumeración exacta consiste en plantear que la probabilidad de encontrar a un caminante aleatorio en j a un tiempo t es determinada por la probabilidad de que se encuentre en alguno de sus vecinos más cercanos a un tiempo $t-1$.

Para un medio con n nodos, se construye una matriz de $n \times n$ con las probabilidades de que el caminante pase del nodo i al nodo j en un solo paso. Si existen z nodos conectados al nodo i y la conductividad de todas las fracturas es la misma, entonces la probabilidad es de $\frac{1}{z}$ para cada elemento de la matriz asociado a los nodos directamente conectados al nodo z y de cero para cualquier otro nodo.

Las probabilidades $W(i,j)$ dependen del valor relativo de la conductividad $\frac{KA}{\lambda_{ij}}$ de la fractura ij con respecto a las conectividades de las fracturas conectadas al nodo i .

El tamaño del paso del caminante aleatorio se considera constante, entonces, el medio fracturado en su totalidad debe ser discretizado en segmentos fracturados de la misma longitud; lo que ocasiona un incremento en el número de nodos del sistema.

Si los vectores M_t y M_{t+1} , de tamaño n representan la probabilidad de encontrarse en alguno de los n nodos del sistema a los tiempos t o $t+1$, respectivamente, tenemos:

$$M_{t+1}(i) = \sum_{j=1}^n M_t(j)W(i, j) \quad (\text{III.4})$$

El caminante aleatorio es una aproximación discreta a un proceso continuo que converge al proceso real después de suficientes pasos de tiempo. La tasa de convergencia puede optimizarse si se disminuye el tamaño de los pasos λ_0 . Esto conlleva la discretización del medio en fragmentos fracturados más pequeños.

Se ha observado que si la probabilidad de que un caminante permanezca en su lugar es mayor que cero se acelera la convergencia del proceso de difusión, lo que se explica más adelante (figura III.3(a)), a este proceso se le conoce como *caminante ciego* u *hormiga ciega* como lo mencionan Majid et. al.⁶ al soltar en un laberinto una hormiga ciega, cada vez que pretenda moverse de su lugar considerará que tiene cuatro posibles caminos lo que en ocasiones la puede llevar a permanecer en el mismo lugar si topa con pared. Al contrario si se suelta una *hormiga miope* o un *caminante miope* (figura III.3(b)), se tendrá movimiento a cada paso debido a que la hormiga es consciente de los posibles caminos por los que se puede mover.

Para cuando se tiene recursos computacionales limitados, la aproximación por caminante aleatorio ofrece la posibilidad de estudiar sistemas que de otra manera sería muy difícil analizar por medio de un balance de materia.

Las bases teóricas del método del caminante aleatorio se explican en el Apéndice A de este trabajo.



(a)



(b)

Figura III.3. (a) Trayectoria de una partícula que se comporta como la hormiga ciega (b) Trayectoria de una partícula que se comporta como la hormiga miope

Modelo matemático.

Un modelo matemático consiste en un número determinado de ecuaciones que expresan el principio de conservación de masa y/o energía acopladas con ecuaciones representativas de flujo de fluidos, temperatura y/o la concentración de estos fluidos a través de medios porosos.

El flujo de fluidos en un medio poroso es un fenómeno muy complejo y para representarlo se deben considerar ecuaciones que describan el flujo de fluidos a través de canales de flujo que presentan grandes variaciones.

Las ecuaciones que se emplean en la simulación de yacimientos se obtienen de la combinación de varios principios físicos como son: la ley de la conservación de masa (ecuación de continuidad), la ley de la conservación de energía, la ley de la conservación de momento, ecuaciones de flujo como la Ley de Darcy, ecuaciones de estado, etc.

La formulación que describe el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso es la ecuación de difusión. En objetos fractales generalmente se habla de una difusión anómala que puede ser referida a dos parámetros: la dimensión de masa fractal D y el índice de conductividad θ , como se ha mencionado antes.

La dimensión fractal, como se estudió en el capítulo II se refiere a la dimensión del objeto fractal que en este caso es la red de fracturas y a la cual le corresponde un valor entre 1 y 2 para el caso en el que la matriz (objeto euclidiano en el que está embebida la red de fracturas) se considera de dos dimensiones.

El índice de conductividad, es un parámetro que caracteriza las propiedades de transporte dinámicas del objeto fractal.

Los fractales se componen de fragmentos de todos los tamaños, lo que hace más lento el proceso de difusión. Para explicar esto podemos tomar la teoría desarrollada por Einstein⁷ en 1905, después de estudiar las teorías sobre movimiento browniano. Einstein predijo la distancia que debe recorrer una partícula suspendida en un fluido.

Si suponemos que al inicio se tiene una partícula suspendida en un punto A (figura III.4), después de un tiempo t la partícula se moverá hasta llegar al punto B, el cual se encuentra a una distancia r del punto inicial A; si hacemos mover de nuevo a la partícula durante un tiempo t resultará que la partícula no se encontrará a una distancia r del punto B, sino a otra distancia y así sucesivamente. Se puede calcular el cuadrado de estas distancias después de repetir muchas veces el experimento y calcular su promedio, de forma que llamaremos a ese promedio de cuadrados desplazamiento cuadrático medio $\langle r^2 \rangle$. Einstein predijo que esta cantidad debe comportarse, según transcurre el tiempo, en la forma mostrada en la figura III.5. Esta curva tiene dos secciones. La primera de ellas va de O a N , es decir desde un tiempo inicial hasta un tiempo t , se observa que se comporta como una parábola. Para tiempos mayores que t , la gráfica se comporta como una línea recta. El tiempo es un tiempo extremadamente corto. En mecánica se demuestra que el hecho de que la curva sea una parábola nos indica que en el intervalo entre

el tiempo inicial y el tiempo t la partícula suspendida se comporta como una partícula libre. Esto se desprende de que al colocar la partícula en el fluido, mientras no choque con ninguna de las partículas del fluido, se comportará como partícula libre. Es obvio que este intervalo dura muy poco tiempo. Una vez que empieza a chocar con las partículas del fluido, entonces, según Einstein, la gráfica cambia y debe ser una línea recta. Resulta de la hidrodinámica que un comportamiento rectilíneo de este tipo corresponde a la difusión de la partícula en el fluido. Einstein encontró, además, que la inclinación de la recta depende de varias cantidades: la temperatura del fluido, su viscosidad, las dimensiones de la partícula y el número de Avogadro (número de átomos que contiene un mol de sustancia).



Figura III.4. Resultado del experimento de dejar moverse a una partícula por intervalos iguales de tiempo dentro de un fluido.

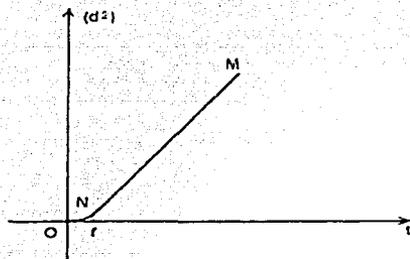


Figura III.5. Gráfica del comportamiento del desplazamiento cuadrático con respecto al tiempo en que se mueve una partícula inmersa en un fluido.

Entonces se puede establecer que para la difusión en sistemas homogéneos el promedio cuadrado de la posición de las partículas difundidas depende del tiempo,

$$\langle r^2 \rangle \propto t \quad (\text{III.5})$$

mientras que para objetos fractales se encontró que se cumple la siguiente relación:

$$\langle r^2 \rangle \propto t^{\frac{2}{2+d}} \quad (\text{III.6})$$

El índice de conductividad está relacionado con la topología del fractal y su conductividad, de modo que un valor de $d = 0$ se refiere a un medio perfectamente conectado en un medio con geometría euclidiana. Para redes fractales d es mayor que cero, lo que refleja la existencia de limitaciones de flujo por encontrarse bloques de diferentes escalas.

Ecuación generalizada de difusión.

Como premisa, se considera que las fracturas están embebidas en una matriz de roca no permeable. La densidad de un cilindro con características fractales de radio r se comporta como una ley de potencias que depende del valor del radio:

$$\rho(r) \propto r^{d-d} \quad (\text{III.7})$$

A la densidad a un radio r le corresponde una porosidad promedio definida como el volumen total disponible de fracturas dividido entre el volumen total al mismo radio. La porosidad entonces varía en función de una ley de potencias y está dada por la siguiente relación:

$$\phi(r) = \phi_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{d-d} \quad (\text{III.8})$$

Donde:

$\phi(r)$ = porosidad de la fractura localizada a un radio r

ϕ_0 = valor de porosidad al radio r_0 .

r = distancia desde el pozo hasta algún punto sobre la fractura

r_0 = distancia mínima considerada en el medio (tamaño de la fractura más pequeña)

D = dimensión fractal

d = dimensión euclídiana

Si se dibuja un círculo de radio r con centro en algún punto sobre la fractura, el volumen de espacios vacíos dentro del círculo crece proporcionalmente con el radio, en este caso $d = 2$ y $D = 1$. Si se tiene un medio euclídiano como el mostrado en la figura III.6, el volumen de poros también se incrementa con el radio (r^2), en este caso $d = 2$ y $D = 2$.

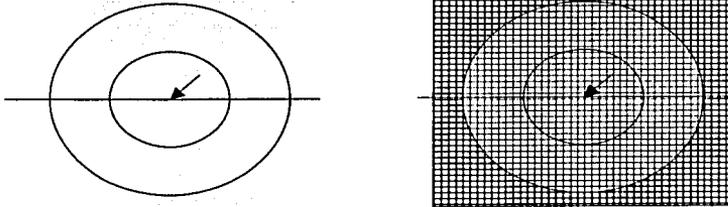


Figura III.6. Medio euclídiano

Un caso más general se muestra en un medio fractal, donde el volumen de espacios vacíos se incrementa en relación con r^D . (figura III.7)

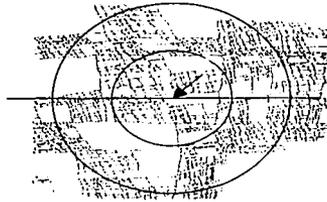


Figura III.7 Medio fractal

Usando el mismo razonamiento se espera que la permeabilidad también varle con respecto al radio r , aunque no solo geométrica sino dinámicamente.

La conductividad de un medio permeable depende del área de flujo conectado y en la permeabilidad del medio. En un medio fractal, el área de flujo es función de una ley de potencias, aunque se deben considerar las propiedades dinámicas de transporte del medio permeable.

La conductividad considerando una sola fase, de acuerdo a Sahimi y Yortsos⁵ puede expresarse como sigue:

$$k(r) = k_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{D-d} \quad (III.9)$$

Donde:

$k(r)$ = porosidad de la fractura localizada a un radio r

k_0 = porosidad de referencia (constante)

r = distancia desde el pozo hasta algún punto sobre la fractura

r_0 = distancia mínima considerada en el medio (tamaño de la fractura más pequeña)

D = dimensión fractal

d = dimensión euclidiana

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

θ = índice de conductividad

Como se observa de acuerdo a las ecuaciones anteriores, la porosidad y permeabilidad no se manejan como valores puntuales, sino que son funciones del radio r .

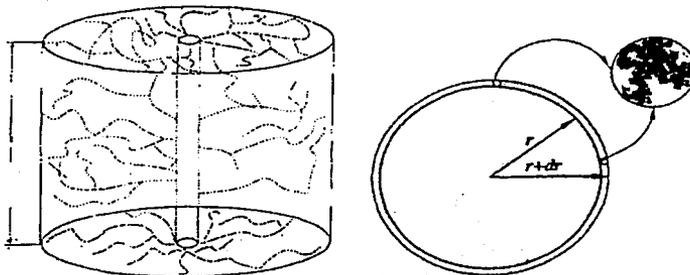


Figura III.8. La figura de la izquierda representa un medio fracturado embebido en una matriz euclidiana de forma cilíndrica. La figura de la derecha se refiere al lugar que se considera como de almacenamiento de fluido.

En este trabajo se está considerando el desarrollo de Chang y Yortsos para lo cual es necesario definir los términos de almacenamiento y de transporte. Se supone que el fluido se almacena en el medio fractal en sitios con volumen V_s y densidad $n(r)$, tal que $n(r)dr$ es el número de lugares en el campo euclidiano encerrados por r y $r+dr$ (como se muestra en la figura III.8). Al gasto volumétrico que atraviesa la celda se le denota como Q_r . Por medio de un balance de materia se tiene:

$$V_s n(r) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho Q_r}{\partial r} = 0 \quad (III.10)$$

Para un fluido ligeramente compresible, la ecuación III.10 queda como:

$$V_s n(r) C_f \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\partial Q_r}{\partial r} = 0 \quad (III.11)$$

De lo anterior es necesario plantear expresiones para la densidad $n(r)$ y para el gasto Qr :

Para la densidad $n(r)$, como el objeto es fractal y el volumen es constante en cada lugar, la densidad n expresa esencialmente la masa fractal por lo que puede ser referida a la dimensión fractal D :

$$n(r) = ar^{D-1} \quad (III.12)$$

En el límite euclidiano ($D = d$) el parámetro a se relaciona directamente con la porosidad de la fractura. De hecho si se plantea que G describe la simetría apropiada ($G = A, 2\pi h, 4\pi$ para simetría rectilínea, cilíndrica y esférica, respectivamente) se observa que:

$$G\phi = aV_s \quad (III.13)$$

Inversamente, si definimos la porosidad de la fractura en este contexto se obtiene:

$$\phi_f = \frac{V_{poros}}{V_{matriz}} = V_s ar^{D-1} \frac{\Delta r}{Gr^{d-1}} \Delta r \quad (III.14)$$

$$\phi_f = aV_s \frac{r^{D-d}}{G} \quad (III.15)$$

Lo que indica que ϕ_f no es constante para un medio fracturado con geometría fractal.

Para el gasto Qr primero se considera la velocidad de flujo q_r :

$$Qr = Gr^{d-1} q_r \quad (III.16)$$

Para obtener q_r utilizamos la ley de Darcy en su forma lineal bajo condiciones de flujo "lento", debido a que esta ley no debe ser afectada por la geometría fractal bajo estas condiciones.

$$q_r = \frac{k_f(r)}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (III.17)$$

En contraste con un objeto euclidiano, la permeabilidad convencional para el flujo de un fluido en un medio fractal no es constante, es decir, es una propiedad local del medio:

$$k_f(r) = \left(\frac{aV_s}{G} \right) m r^{n-d-\theta} \quad (\text{III.18})$$

Donde m es la propiedad local estructural del medio fractal similar a la permeabilidad convencional, y expresa la conectividad y la conductividad del flujo. θ es conocida como el exponente espectral del medio fractal y se define por la geometría del objeto, la relación de θ y D no se conoce a ciencia cierta a pesar que se han realizado algunas conjeturas. Para geometrías euclidianas ($D = d$ y $\theta = 0$) la ecuación anterior se reduce a:

$$m = \frac{k_f}{\phi_f} \quad (\text{III.19})$$

Es posible obtener ya una ecuación para el gasto Q_r :

$$Q_r = \frac{aV_s m}{\mu} \left[r^{D-\theta-1} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{III.20})$$

Para obtener la ecuación de difusión se combinan las ecuaciones III.11, III.12 y III.20, con esto es posible obtener una ecuación que describa el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio fractal en términos de D , θ y m :

$$c_f \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{m}{\mu} \left(\frac{1}{r^{D-1}} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-\theta-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{III.21})$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPITULO IV.
DESARROLLO DEL MODELO DE SIMULACIÓN.

La ecuación de Chang y Yortsos está expresada en coordenadas radiales, para su solución en diferencias finitas se utilizará una malla cartesiana regular por lo que se cambió la ecuación original de coordenadas radiales a coordenadas cartesianas.

$$c_f \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{m}{\mu} \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-n-1} \frac{\partial P}{\partial r} \right) \quad (IV.1)$$

Al realizar la derivada:

$$c_f \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{m}{\mu} \frac{1}{r^{n-1}} \left(r^{n-n-1} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (D-n-1) r^{n-n-2} \frac{\partial P}{\partial r} \right) \quad (IV.2)$$

Después de reducir términos semejantes se tiene:

$$c_f \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{m}{\mu} \left(r^{-n} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (D-n-1) r^{-n-1} \frac{\partial P}{\partial r} \right) \quad (IV.3)$$

Para pasar a coordenadas cartesianas se establecieron las siguientes premisas:

$$P = P(x, y) \quad (IV.4)$$

$$x = x(r, \phi) = r \cos \phi \quad (IV.5)$$

$$y = y(r, \phi) = r \sin \phi \quad (IV.6)$$

Con la ayuda de la regla de la cadena se puede establecer lo siguiente para el cálculo de la primera derivada de P respecto a r:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (IV.7)$$

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Para calcular la segunda derivada de P respecto a r, derivamos la ecuación IV.7 respecto a r:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \quad (IV.8)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \frac{\partial y}{\partial r} \quad (IV.9)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \left[\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right) + \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right] \frac{\partial x}{\partial r} + \left[\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right] \frac{\partial y}{\partial r} \quad (IV.10)$$

De las premisas establecidas, si tomamos las definiciones de "x" y de "y" (ecuaciones IV.5 y IV.6) es posible obtener sus derivadas respecto a r:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \phi \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \text{sen} \phi$$

Sustituimos en las ecuaciones IV.7 y IV.10:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \cos \phi \frac{\partial P}{\partial x} + \text{sen} \phi \frac{\partial P}{\partial y} \quad (IV.11)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \left[\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\cos \phi) + \cos \phi \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right] \cos \phi + \left[\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\text{sen} \phi) + \text{sen} \phi \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right] \text{sen} \phi \quad (IV.12)$$

Pero sabemos que:

$$\cos \phi = \frac{x - x_w}{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} \quad (IV.13)$$

$$\text{sen} \phi = \frac{y - y_w}{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} \quad (IV.14)$$

$$r = \sqrt{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} \quad (IV.15)$$

Es posible con base a las definiciones anteriores resolver las derivadas del cosφ respecto a x y de senφ respecto a y:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} (\cos \phi) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x - x_w}{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} \right) = \\
 &= \frac{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 - (x - x_w) \left(2 \left((x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 \right)^{-1/2} 2(x - x_w) \right)}{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} = \\
 &= \frac{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 - \frac{(x - x_w)^2}{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} \left((x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 \right) - (x - x_w)^2}{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} = \\
 &= \frac{(y - y_w)^2}{\left((x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 \right)^2}
 \end{aligned}
 \tag{IV.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\sin \phi) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y - y_w}{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} \right) = \frac{\left((x - x_w)^2 \right)}{\left((x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 \right)^2}
 \tag{IV.17}$$

Una vez que ya hemos definido todos los términos de la ecuación IV.3 podemos regresar a ella para realizar su desarrollo bajo el método implícito. La malla sobre la cual se va a resolver se muestra en la figura IV.1.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

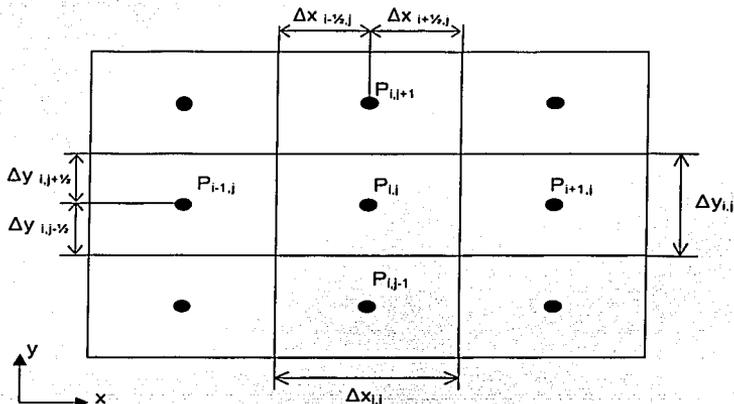


Figura IV.1. Esquema de malla cartesiana empleado para la solución por diferencias finitas.

$$\begin{aligned}
 c_i \frac{\partial P^{n+1}}{\partial t_{i,j}} &= m(r_{i,j})^a \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \phi \right)_{i,j} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_{i,j}} + \cos \phi_{i,j} \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x^2}_{i,j} \right] \cos \phi_{i,j} + \\
 & m(r_{i,j})^a \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \text{sen} \phi \right)_{i,j} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y_{i,j}} + \text{sen} \phi_{i,j} \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial y^2}_{i,j} \right] \text{sen} \phi_{i,j} + \\
 & m(D - \theta - 1)(r_{i,j})^{a-1} \left(\cos \phi_{i,j} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_{i,j}} + \text{sen} \phi_{i,j} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y_{i,j}} \right) \\
 & + q_{i,j} \frac{B_n}{\phi_{i,j} \Delta x \Delta y}
 \end{aligned}$$

(IV.18)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Al expandir las derivadas utilizando diferencias centrales para las derivadas respecto al espacio y por diferencias hacia delante para la derivada respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
 (P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n) = & \frac{m \Delta t}{\mu c_f} (r_{i,j})^{-\theta} \cos \phi_{i,j} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \phi \right)_{i,j} \right) \left(\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta x} \right) + \\
 & \frac{m \Delta t}{\mu c_f} (r_{i,j})^{-\theta} (\cos \phi_{i,j})^2 \left(\frac{P_{i,j+1}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \\
 & \frac{m \Delta t}{\mu c_f} (r_{i,j})^{-\theta} \operatorname{sen} \phi_{i,j} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen} \phi \right)_{i,j} \right) \left(\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \right) + \\
 & \frac{m \Delta t}{\mu c_f} (r_{i,j})^{-\theta} (\operatorname{sen} \phi_{i,j})^2 \left(\frac{P_{i,j+1}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) + \\
 & \frac{m \Delta t}{\mu c_f} (D - \theta - 1) (r_{i,j})^{-\theta-1} \left(\cos \phi_{i,j} \left(\frac{P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta x} \right) + \operatorname{sen} \phi_{i,j} \left(\frac{P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \right) \right) + \\
 & q_{i,j} \frac{B_o \Delta t}{\phi h \Delta x \Delta y c_f}
 \end{aligned}
 \tag{IV.19}$$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Se agrupan los términos semejantes:

$$\begin{aligned}
 p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n = & \left(\frac{m\Delta t}{c_{j,\mu}} (r_{i,j})^{-\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \phi \right)_{i,j} \cos \phi_{i,j} \right) \left(p_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - p_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) + \\
 & \frac{m\Delta t}{c_{j,\mu}} (r_{i,j})^{-\theta} \frac{(\cos \phi_{i,j})^2}{\Delta x^2} (p_{i,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^n + p_{i,j}^{n-1}) + \\
 & \left(\frac{m\Delta t}{c_{j,\mu}} (r_{i,j})^{-\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen} \phi \right)_{i,j} \operatorname{sen} \phi_{i,j} \right) \left(p_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - p_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) + \\
 & \frac{m\Delta t}{c_{j,\mu}} (r_{i,j})^{-\theta} \frac{(\operatorname{sen} \phi_{i,j})^2}{\Delta y^2} (p_{i,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^n + p_{i,j}^{n-1}) + \\
 & (D - \theta - 1) \frac{m\Delta t}{c_{j,\mu}} (r_{i,j})^{-\theta-1} \left(\frac{\cos \phi_{i,j}}{\Delta x} \right) \left(p_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - p_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) + \\
 & (D - \theta - 1) \frac{m\Delta t}{c_{j,\mu}} (r_{i,j})^{-\theta-1} \left(\frac{\operatorname{sen} \phi_{i,j}}{\Delta y} \right) \left(p_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - p_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) + q_{i,j} \frac{B_n \Delta t}{\phi c_{j,\mu} h \Delta x \Delta y}
 \end{aligned} \tag{IV.20}$$

Podemos definir las siguientes variables en base a los coeficientes de las presiones definidos en la ecuación IV.20. Además con base en las definiciones que se hicieron (Ecuaciones IV.13, IV.14 y IV.15) es posible sustituir los valores de $\cos \phi$, $\operatorname{sen} \phi$ y sus derivadas para dejar los coeficientes en función de "x" y de "y".

$$\alpha_{i,j} = \frac{m\Delta t}{c_{j,\mu}} (r_{i,j})^{-\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \phi \right)_{i,j} \cos \phi_{i,j} = \frac{m\Delta t (y_i - y_n)^2 (x_i - x_n)}{c_{j,\mu} \Delta x} \left((x_i - x_n)^2 + (y_i - y_n)^2 \right)^{\left(\frac{\theta-1}{2}\right)} \tag{IV.21}$$

$$\beta_{i,j} = \frac{m\Delta t}{c_{j,\mu}} (r_{i,j})^{-\theta} \frac{(\cos \phi_{i,j})^2}{\Delta x^2} = \frac{m\Delta t (x_i - x_n)^2}{c_{j,\mu} \Delta x^2} \left((x_i - x_n)^2 + (y_i - y_n)^2 \right)^{\left(\frac{\theta-1}{2}\right)} \tag{IV.22}$$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

$$\gamma_{i,j} = \frac{m\Delta t}{c_{f,\mu}} r_{i,j}^{-\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen}\phi \right)_{i,j} \operatorname{sen}\phi_{i,j} = \frac{m\Delta t(x_i - x_w)^2 (y_i - y_w)}{c_{f,\mu}\Delta y} \left((x_i - x_w)^2 + (y_i - y_w)^2 \right)^{\left(\frac{\theta}{2}-1\right)} \quad (IV.23)$$

$$\omega_{i,j} = \frac{m\Delta t}{c_{f,\mu}} r_{i,j}^{-\theta} (\operatorname{sen}\phi_{i,j})^2 = \frac{m\Delta t(y_i - y_w)^2}{c_{f,\mu}\Delta y^2} \left((x_i - x_w)^2 + (y_i - y_w)^2 \right)^{\left(\frac{\theta}{2}-1\right)} \quad (IV.24)$$

$$\delta_{i,j} = (D - \theta - 1) \frac{m\Delta t}{c_{f,\mu}} (r_{i,j})^{\theta-1} \left(\frac{\cos\phi_{i,j}}{\Delta x} \right) = (D - \theta - 1) \frac{m\Delta t(x_i - x_w)}{c_{f,\mu}\Delta x} \left((x_i - x_w)^2 + (y_i - y_w)^2 \right)^{\left(\frac{\theta}{2}-1\right)} \quad (IV.25)$$

$$\lambda_{i,j} = (D - \theta - 1) \frac{m\Delta t}{c_{f,\mu}} (r_{i,j})^{\theta-1} \left(\frac{\operatorname{sen}\phi_{i,j}}{\Delta y} \right) = (D - \theta - 1) \frac{m\Delta t(y_i - y_w)}{c_{f,\mu}\Delta y} \left((x_i - x_w)^2 + (y_i - y_w)^2 \right)^{\left(\frac{\theta}{2}-1\right)} \quad (IV.26)$$

Si se reemplazan estas nuevas variables en la ecuación IV.20, tenemos que:

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n &= (\alpha_{i,j} \left(P_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - P_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \right) + \beta_{i,j} (P_{i,j+1}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1}) + \\ & (\gamma_{i,j} \left(P_{i,i+\frac{1}{2}}^{n+1} - P_{i,i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) + \omega_{i,j} (P_{i,i+1}^{n+1} - 2P_{i,i}^{n+1} + P_{i,i-1}^{n+1}) + \\ & \delta_{i,j} \left(P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1} \right) + \lambda_{i,j} \left(P_{i,i+\frac{1}{2}}^{n+1} - P_{i,i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) + q_{i,j} \frac{B_w \Delta t}{\phi c_f h \Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (IV.27)$$

Si despejamos ahora la presión para el tiempo "n" ($P_{i,j}^n$) nos queda:

$$\begin{aligned} P_{i,j}^n &= (\alpha_{i,j} + \delta_{i,j}) P_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} - (\alpha_{i,j} + \delta_{i,j}) P_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + (\gamma_{i,j} + \lambda_{i,j}) P_{i,i-1}^{n+1} - \\ & (\gamma_{i,j} + \lambda_{i,j}) P_{i,i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \beta_{i,j} P_{i+1,j}^{n+1} - \beta_{i,j} P_{i-1,j}^{n+1} - \omega_{i,j} P_{i,i+1}^{n+1} - \\ & \omega_{i,j} P_{i,i-1}^{n+1} + (1 + 2\beta_{i,j} + 2\omega_{i,j}) P_{i,j}^{n+1} + q_{i,j} \frac{B_w \Delta t}{\phi c_f h \Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (IV.28)$$

Con el fin de obtener la matriz para la solución del sistema de ecuaciones, establecemos nuevas variables:

$$A_{i,j} = \alpha_{i,j} + \bar{\partial}_{i,j}$$

$$B_{i,j} = \gamma_{i,j} + \lambda_{i,j}$$

$$C_{i,j} = \beta_{i,j}$$

$$D_{i,j} = \pi_{i,j}$$

$$E_{i,j} = q_{i,j} \frac{B_n \Delta t}{\phi c_j h \Delta x \Delta y}$$

Sustituyendo en la ecuación IV.28:

$$P_{i,j}^n = A_{i,j} P_{i-1/2,j}^{n+1} - A_{i,j} P_{i+1/2,j}^{n+1} + B_{i,j} P_{i,j-1}^{n+1} - B_{i,j} P_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j} P_{i+1,j}^{n+1} - C_{i,j} P_{i-1,j}^{n+1} - D_{i,j} P_{i,j+1}^{n+1} - D_{i,j} P_{i,j-1}^{n+1} + (1 + 2C_{i,j} + 2D_{i,j}) P_{i,j}^{n+1} + E_{i,j}$$

(IV.29)

Para determinar el valor de las presiones entre celdas, es decir las presiones cuyo subíndice está afectado por $\frac{1}{2}$, se plantea el cálculo de un promedio de las presiones de las celdas contiguas, considerando Δx y Δy constantes:

$$A_{i,j} P_{i-1/2,j}^{n+1} = A_{i,j} \left(\frac{P_{i,j}^{n+1} + P_{i-1,j}^{n+1}}{2} \right) = \frac{A_{i,j}}{2} P_{i,j}^{n+1} + \frac{A_{i,j}}{2} P_{i-1,j}^{n+1}$$

$$A_{i,j} P_{i+1/2,j}^{n+1} = A_{i,j} \left(\frac{P_{i,j}^{n+1} + P_{i+1,j}^{n+1}}{2} \right) = \frac{A_{i,j}}{2} P_{i,j}^{n+1} + \frac{A_{i,j}}{2} P_{i+1,j}^{n+1}$$

$$B_{i,j} P_{i,j-1}^{n+1} = B_{i,j} \left(\frac{P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1}}{2} \right) = \frac{B_{i,j}}{2} P_{i,j}^{n+1} + \frac{B_{i,j}}{2} P_{i,j-1}^{n+1}$$

$$B_{i,j} P_{i,j+1}^{n+1} = B_{i,j} \left(\frac{P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j+1}^{n+1}}{2} \right) = \frac{B_{i,j}}{2} P_{i,j}^{n+1} + \frac{B_{i,j}}{2} P_{i,j+1}^{n+1}$$

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

De modo que obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 P_{i,j}^n = & \frac{A_{i,j}}{2} P_{i,j}^{n+1} + \frac{A_{i,j}}{2} P_{i-1,j}^{n+1} - \frac{A_{i,j}}{2} P_{i,j}^{n+1} - \frac{A_{i,j}}{2} P_{i+1,j}^{n+1} + \frac{B_{i,j}}{2} P_{i,j}^{n+1} + \frac{B_{i,j}}{2} P_{i,j-1}^{n+1} \\
 & - \frac{B_{i,j}}{2} P_{i,j}^{n+1} - \frac{B_{i,j}}{2} P_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j} P_{i+1,j}^{n+1} - C_{i,j} P_{i-1,j}^{n+1} - D_{i,j} P_{i,j+1}^{n+1} - D_{i,j} P_{i,j-1}^{n+1} \\
 & + (1 + 2C_{i,j} + 2D_{i,j}) P_{i,j}^{n+1} + E_{i,j}
 \end{aligned}
 \tag{IV.30}$$

Al eliminar términos nos queda:

$$\begin{aligned}
 P_{i,j}^n = & \frac{A_{i,j}}{2} P_{i,j}^{n+1} - \frac{A_{i,j}}{2} P_{i-1,j}^{n+1} + \frac{B_{i,j}}{2} P_{i,j}^{n+1} - \frac{B_{i,j}}{2} P_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j} P_{i+1,j}^{n+1} - C_{i,j} P_{i-1,j}^{n+1} - D_{i,j} P_{i,j+1}^{n+1} - \\
 & D_{i,j} P_{i,j-1}^{n+1} + (1 + 2C_{i,j} + 2D_{i,j}) P_{i,j}^{n+1} + E_{i,j}
 \end{aligned}
 \tag{IV.31}$$

Agrupando términos semejantes:

$$\begin{aligned}
 P_{i,j}^n = & \left(\frac{A_{i,j}}{2} - C_{i,j} \right) P_{i-1,j}^{n+1} - \left(\frac{A_{i,j}}{2} + C_{i,j} \right) P_{i+1,j}^{n+1} + \left(\frac{B_{i,j}}{2} - D_{i,j} \right) P_{i,j-1}^{n+1} - \left(\frac{B_{i,j}}{2} + D_{i,j} \right) P_{i,j+1}^{n+1} + \\
 & (1 + 2C_{i,j} + 2D_{i,j}) P_{i,j}^{n+1} + E_{i,j}
 \end{aligned}
 \tag{IV.32}$$

Esta ecuación (IV.32) se desarrolla sustituyendo los valores de "i" y de "j" desde 1 hasta el número de celdas en ambas direcciones "x" y "y".

Para terminar con la formulación del problema es necesario además plantear condiciones de frontera, las cuales nos permiten establecer la información correspondiente a la interacción entre el yacimiento y sus alrededores durante su

vida productiva. Para este caso las condiciones de frontera se pueden establecer como sigue:

$$\left(\begin{matrix} a'_{i,m} \\ \mu \end{matrix} \right) \left[r^{n-u-i} \frac{\partial P}{\partial r} \right]_{r=r_n} = Q \quad (IV.33)$$

Estamos considerando que no existe flujo en las fronteras y por lo tanto $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$.

Ahora si podemos desarrollar el sistema de ecuaciones tomando como ejemplo una malla de 3 celdas en dirección x y 3 celdas en dirección de y, con lo cual obtendremos una matriz pentadiagonal como la mostrada en la figura IV.2. Con el fin de expresar la matriz de forma más sencilla definiremos nuevas variables con base en la ecuación IV.32, las cuales se muestran a continuación:

$$F = \frac{A_{i,i}}{2} - C_{i,i}$$

$$G = - \left(\frac{A_{i,j}}{2} + C_{i,j} \right)$$

$$H = \frac{B_{i,i}}{2} - D_{i,i}$$

$$I = - \left(\frac{B_{i,i}}{2} + D_{i,i} \right)$$

$$M = 1 + 2C_{i,i} + 2D_{i,i}$$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

$$\begin{bmatrix}
 M+F+H & I & 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H & M+F & I & 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & H & M+F+I & 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 \\
 F & 0 & 0 & M+H & I & 0 & G & 0 & 0 \\
 0 & F & 0 & H & M & I & 0 & G & 0 \\
 0 & 0 & F & 0 & H & M+I & 0 & 0 & G \\
 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & M+H+G & I & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & H & M+G & I \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & H & M+G+I
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 P_{1,1}^{n+1} \\
 P_{1,2}^{n+1} \\
 P_{1,3}^{n+1} \\
 P_{2,1}^{n+1} \\
 P_{2,2}^{n+1} \\
 P_{2,3}^{n+1} \\
 P_{3,1}^{n+1} \\
 P_{3,2}^{n+1} \\
 P_{3,3}^{n+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 P_{1,1}^n + E_{1,1} \\
 P_{1,2}^n + E_{1,2} \\
 P_{1,3}^n + E_{1,3} \\
 P_{2,1}^n + E_{2,1} \\
 P_{2,2}^n + E_{2,2} \\
 P_{2,3}^n + E_{2,3} \\
 P_{3,1}^n + E_{3,1} \\
 P_{3,2}^n + E_{3,2} \\
 P_{3,3}^n + E_{3,3}
 \end{bmatrix}$$

Figura IV.2. Esquema matricial de solución del modelo numérico para una malla de 3x3 celdas.

CAPITULO V. ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Se generó un simulador con base en el modelo matemático de Chang y Yortsos. El código generado para el simulador se encuentra en el Apéndice B.

Para el programa de cómputo se planteó una malla con el número de celdas en x y en y variables pero con la misma longitud en x y la misma longitud en y para todas las celdas, esto debido a que el modelo de Chang y Yortsos asigna propiedades fractales a cada celda con ayuda de los parámetros de dimensión fractal D y de índice de conductividad θ , de modo que se obtienen propiedades promedio de cada celda, aunque lo ideal sería poder plantear refinamientos en algunas áreas que presenten caídas de presión muy grandes en tiempos cortos. El espesor h del yacimiento se considera constante.

Se considera también un fluido en una sola fase (líquida) ligeramente compresible para lo cual se alimenta al simulador con una tabla de propiedades del fluido en la cual se debe especificar el valor de la compresibilidad del aceite, su factor de volumen y su viscosidad para diferentes presiones.

Otro dato de entrada es una permeabilidad de referencia y una porosidad de referencia, estas servirán para que el simulador obtenga las distribuciones fractales de ambas propiedades en el medio con base a estos valores iniciales, que pueden ser los correspondientes para un modelo euclidiano.

Para poder observar el comportamiento de la presión bajo diferentes valores de dimensión fractal y de índice de conductividad se generaron varias corridas considerando solo estos dos parámetros como variables y dejando constantes los datos de entrada que se muestran en la tabla V.1.

Porosidad de referencia =	0.2		
Permeabilidad de referencia (D) =	4		
Tiempo total (días) =	50		
Paso de tiempo (días) =	1		
Gasto de aceite (BPD) =	-1500		
Presión inicial del yacimiento (psia) =	4500		
Espesor (m) =	30		
Longitud de la celda en x (m) =	1000		
Longitud de la celda en y (m) =	1000		
Número de celdas en x =	11		
Número de celdas en y =	11		
Posición del pozo en la malla =	(6,6)		
Propiedades del fluido			
Presión (psia)	c_r (1/psia)	B_o (m^3/m^3)	μ (cp)
5688	738.4 E-8	1.191	5.999
4977	744.02 E-8	1.197	5.979
4266	745.43 E-8	1.203	5.653
3555	763.01 E-8	1.210	5.326
2844	782.00 E-8	1.217	4.999
2133	835.44 E-8	1.225	4.673

Tabla V.1. Datos empleados en las corridas realizadas con el simulador.

Los valores de las presiones para la celda en donde se encuentra el pozo productor se muestran en las tablas V.2, V.3 y V.4. Se generaron gráficas para un valor de dimensión fractal D fijo y para varios valores de índice de conductividad θ (figuras V.1, V.2 y V.3), así como también para cuando se fijó θ y se hizo variar a D (figuras V.4, V.5 y V.6).

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Dimensión fractal = 1.4					
$\iota = 0.1$		$\iota = 0.3$		$\iota = 0.5$	
Tiempo (Días)	Presión (psia)	Tiempo (Días)	Presión (psia)	Tiempo (Días)	Presión (psia)
1	4495.851591	1	4494.448454	1	4493.892475
2	4487.55969	2	4483.353981	2	4481.680351
3	4475.132598	3	4466.731409	3	4463.368494
4	4458.581824	4	4444.601744	4	4438.963704
5	4437.921849	5	4416.992128	5	4408.474712
6	4413.169857	6	4383.93579	6	4371.912177
7	4384.345435	7	4345.471978	7	4329.288684
8	4351.470263	8	4301.645887	8	4280.618733
9	4314.567814	9	4252.508578	9	4225.918737
10	4273.663075	10	4198.142139	10	4165.282257
11	4228.782318	11	4138.697889	11	4098.786521
12	4180.035225	12	4074.274366	12	4026.488717
13	4127.489158	13	4004.977532	13	3948.450658
14	4071.1973	14	3930.92044	14	3864.738646
15	4011.214405	15	3852.222874	15	3775.423311
16	3947.596773	16	3769.010975	16	3680.57946
17	3880.402346	17	3681.416859	17	3580.285903
18	3809.690953	18	3589.578217	18	3474.625287
19	3735.524676	19	3493.637907	19	3363.708748
20	3657.968374	20	3393.763382	20	3247.638056
21	3577.090331	21	3290.121035	21	3126.510823
22	3492.963033	22	3182.870274	22	3000.427785
23	3405.686472	23	3072.173894	23	2869.492593
24	3315.354421	24	2958.197629	24	2733.811605
25	3222.059548	25	2841.109707	25	2594.512365
26	3125.902515	26	2721.108314	26	2452.019168
27	3026.993109	27	2599.522575	27	2306.51842
28	2925.451364	28	2476.571151	28	2158.192226
29	2821.408663	29	2352.46604	29	2007.218174
30	2715.250571	30	2227.412266	30	1852.019841
31	2608.04036	31	2101.607631	31	1692.31325
32	2499.933332	32	1974.778133	32	1528.160767
33	2391.089716	33	1845.66422	33	1359.626335
34	2281.675631	34	1714.397173	34	1186.775431
35	2171.863917	35	1581.109185	35	1009.675034

Tabla V.2. Resultados para $D = 1.4$ y diferentes valores de índice de conductividad.

Dimensión fractal = 1.6					
$\omega = 0.1$		$\omega = 0.3$		$\omega = 0.5$	
Tiempo (Días)	Presión (psia)	Tiempo (Días)	Presión (psia)	Tiempo (Días)	Presión (psia)
1	4495.876777	1	4494.47217	1	4493.904345
2	4487.629597	2	4483.424604	2	4481.715914
3	4475.256919	3	4466.871215	3	4463.439491
4	4458.756277	4	4444.831713	4	4439.081759
5	4438.124134	5	4417.331568	5	4408.651298
6	4413.355735	6	4384.401972	6	4372.158587
7	4384.444952	7	4346.079783	7	4329.615991
8	4351.384164	8	4302.40747	8	4281.037768
9	4314.164181	9	4253.433044	9	4226.440055
10	4272.774239	10	4199.233512	10	4165.915131
11	4227.20208	11	4139.957786	11	4099.540551
12	4177.519929	12	4075.700452	12	4027.373089
13	4123.751137	13	4006.563293	13	3949.474119
14	4065.905386	14	3932.654984	14	3865.909479
15	4003.993135	15	3854.090764	15	3776.749318
16	3938.026181	16	3770.992095	16	3682.067942
17	3868.0184	17	3683.486309	17	3581.943646
18	3793.98666	18	3591.706245	18	3476.458552
19	3715.951924	19	3495.789878	19	3365.722698
20	3633.940517	20	3395.899081	20	3249.837803
21	3547.985565	21	3292.196085	21	3128.900936
22	3458.131	22	3184.835541	22	3003.012292
23	3364.458337	23	3073.975603	23	2872.274989
24	3267.033338	24	2959.77751	24	2736.79486
25	3165.935218	25	2842.405183	25	2597.671716
26	3061.258482	26	2722.040218	26	2455.355026
27	2953.114758	27	2600.024042	27	2310.030781
28	2841.634559	28	2476.572397	28	2161.880702
29	2726.993508	29	2351.894653	29	2011.082022
30	2610.551874	30	2226.193518	30	1856.111156
31	2492.498425	31	2099.664809	31	1696.633172
32	2373.034569	32	1972.004245	32	1532.710122
33	2252.375454	33	1841.968024	33	1364.405671
34	2130.750838	34	1709.685542	34	1191.78506
35	2008.37075	35	1575.287592	35	1014.915078

Tabla V.3. Resultados para $D = 1.6$ y diferentes valores de índice de conductividad.

Dimensión fractal = 1.8					
$\theta = 0.1$		$\theta = 0.3$		$\theta = 0.5$	
Tiempo (Días)	Presión (psia)	Tiempo (Días)	Presión (psia)	Tiempo (Días)	Presión (psia)
1	4495.90185	1	4494.495876	1	4493.916214
2	4487.698722	2	4483.495154	2	4481.751471
3	4475.378446	3	4467.010762	3	4463.510465
4	4458.923459	4	4445.06101	4	4439.199752
5	4438.310749	5	4417.669563	5	4408.827752
6	4413.51182	6	4384.865414	6	4372.404744
7	4384.492697	7	4346.682844	7	4329.942862
8	4351.214006	8	4303.161376	8	4281.456098
9	4313.631131	9	4254.345732	9	4226.960292
10	4271.694507	10	4200.307591	10	4166.546421
11	4225.350047	11	4141.193165	11	4100.29234
12	4174.62962	12	4077.092782	12	4028.254381
13	4119.508593	13	4008.103726	13	3950.493453
14	4059.949517	14	3934.329961	14	3867.0749
15	3995.914958	15	3855.881837	15	3778.068362
16	3927.368756	16	3772.875782	16	3683.547613
17	3854.277517	17	3685.43399	17	3583.590405
18	3776.612355	18	3593.684087	18	3478.278303
19	3694.350857	19	3497.758806	19	3367.720226
20	3607.479286	20	3397.814153	20	3252.017812
21	3515.994959	21	3294.007808	21	3131.267558
22	3419.922334	22	3186.489345	22	3005.569098
23	3319.309637	23	3075.411973	23	2875.024993
24	3214.205772	24	2960.932158	24	2739.740533
25	3104.681279	25	2843.209263	25	2600.788105
26	2990.831095	26	2722.412819	26	2458.642062
27	2872.777234	27	2599.892255	27	2313.487975
28	2750.671326	28	2475.860297	28	2165.507178
29	2625.655295	29	2350.523632	29	2014.876555
30	2498.257561	30	2224.082649	30	1860.124447
31	2368.719736	31	2096.73122	31	1700.865793
32	2237.306824	32	1968.12029	32	1537.162342
33	2104.308275	33	1837.035146	33	1369.077502
34	1969.606139	34	1703.603474	34	1196.676305
35	1831.936588	35	1567.954932	35	1020.025384

Tabla V.4. Resultados para $D = 1.8$ y diferentes valores de índice de conductividad.

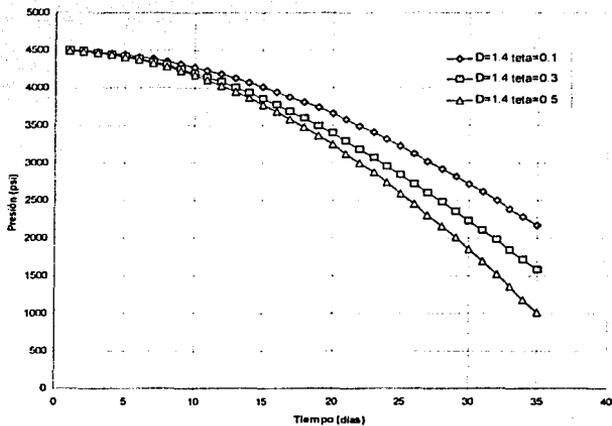


Figura V.1. $D = 1.4$ y θ variable

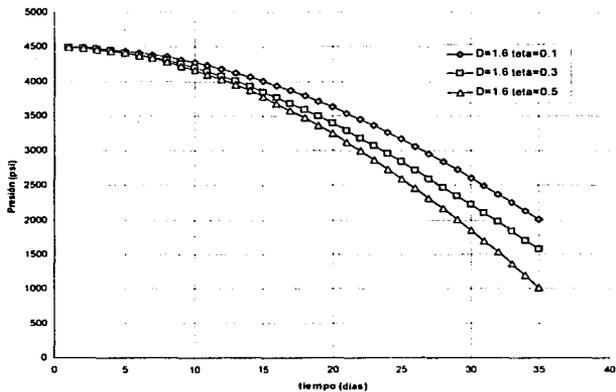


Figura V.2. $D = 1.6$ y θ variable

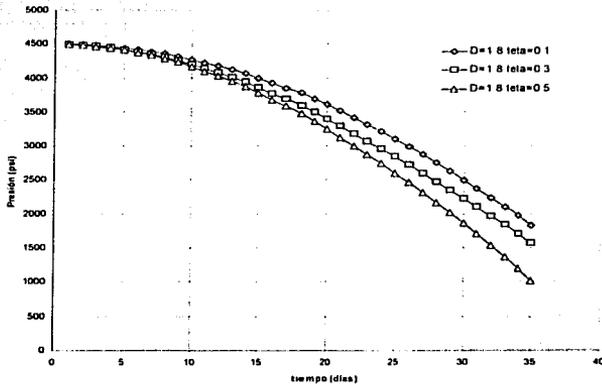


Figura V.3. $D = 1.8$ y θ variable

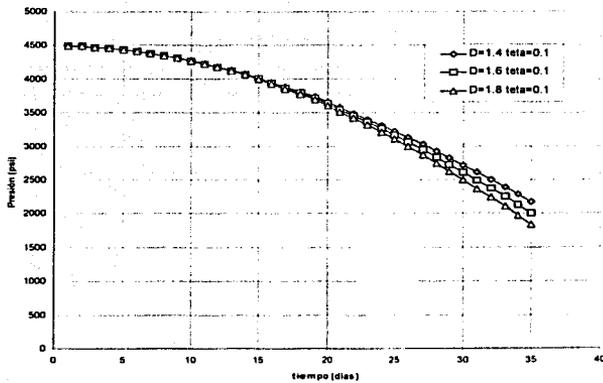


Figura V.4. $\theta = 0.1$ y D variable

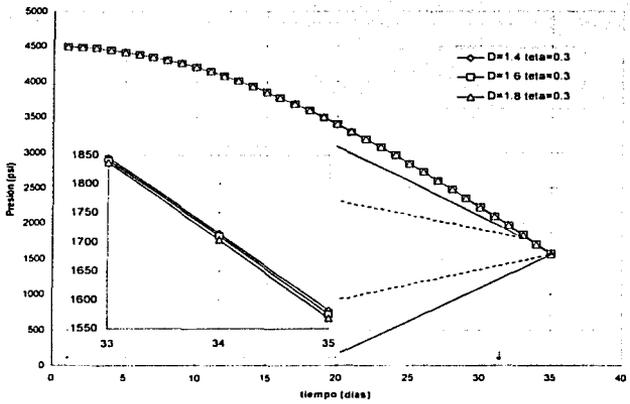


Figura V.5. $\theta = 0.3$ y D variable

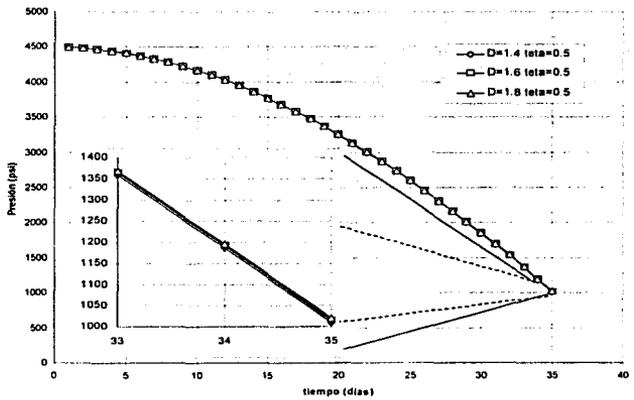


Figura V.6. $\theta = 0.5$ y D variable

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Como se mencionó en el Capítulo III en el desarrollo del modelo matemático de Chang y Yortsos, la dimensión fractal D nos indica que tan fracturado se encuentra el medio y el índice de conductividad θ es un parámetro que nos dice que tan conectadas se encuentran las fracturas. La dimensión fractal D puede tomar valores mayores a 1 y menores a 2, ya que la dimensión euclidiana en la que se está trabajando tiene un valor de 2 (segunda dimensión); el medio se encontrará más fracturado mientras D tome un valor más cercano al valor de la dimensión euclidiana. Por otro lado el índice de conductividad θ toma valores entre 0 y 1; mientras se le asigne un valor más cercano a cero las fracturas se encontrarán más conectadas unas con otras.

En las figuras V.1, V.2 y V.3 observamos que para un valor dado de dimensión fractal D ; la caída de presión en la celda donde se encuentra el pozo aumenta cuando el valor de θ aumenta, es decir que para una densidad de fracturas dada la caída de presión dependerá de qué tan conectadas se encuentran éstas unas con otras, es por esto que para valores de $\theta=0.5$ las caídas de presión fueron más fuertes que para valores de $\theta=0.1$. Esto se debe a que cuando se tiene una menor comunicación entre las fracturas del medio ($\theta=0.5$) el camino que sigue la partícula desde una celda hasta el pozo se vuelve más tortuoso lo que se refleja en un aumento de la caída de presión.

Ahora bien, de las figuras V.4, V.5 y V.6 en donde se compara el efecto de que θ permanezca constante mientras se varía la dimensión fractal, podemos observar que para una dimensión fractal de 1.8 se experimenta una mayor caída de presión que para una D de 1.4. Esto ocurre porque al aumentar el número de fracturas presentes en el medio aumenta el número de posibles caminos que la partícula puede tomar, lo que sucede cuando D es 1.8, a diferencia de cuando la cantidad de fracturas disminuye y se tienen menos opciones de rutas que tomar para llegar de una celda al pozo (el "camino" es más "directo").

También en las figuras V.4, V.5 y V.6 puede observarse que el parámetro θ o índice de conductividad tiene una mayor influencia en las caídas de presión que el parámetro D o dimensión fractal.

En el trabajo de Flamenco y Camacho¹¹ sobre la determinación de parámetros fractales en sistemas fracturados, se describe una metodología para determinar el índice de conductividad y la dimensión fractal a partir de un análisis sobre el comportamiento de la presión en el pozo en el periodo transitorio y en el pseudo-estacionario. Consiste en construir una gráfica doble logarítmica usando ΔP y el tiempo, como se ve en la figura V.7a, y se obtiene la pendiente y la ordenada al origen sobre los puntos que forman parte del periodo transitorio. Como siguiente paso se aproxima una recta sobre los puntos que forman parte del periodo pseudo-estacionario y de igual manera se determinan la pendiente y la ordenada al origen, como se observa en la figura V.7b. Obteniendo esta información se hacen pruebas por ensayo y error¹¹ de donde se pueden obtener D y θ .

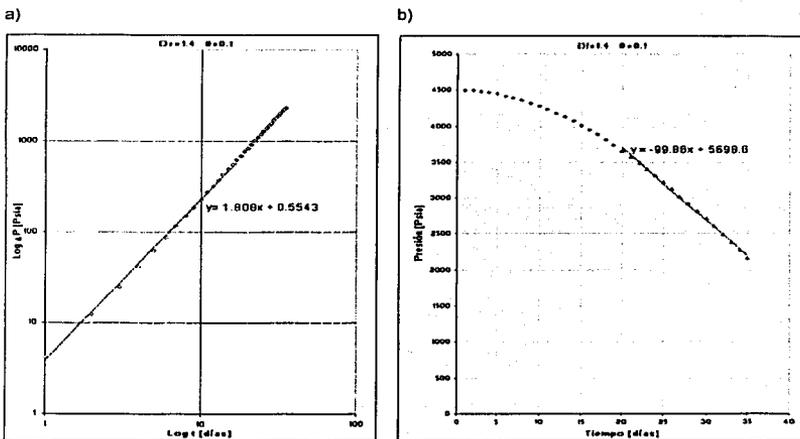


Figura V.7. Se ajusta una recta a los puntos que forman parte del periodo:

- a) Transitorio, y b) Pseudo-Estacionario, de las cuales se obtienen sus pendientes y sus ordenadas al origen para su después uso en la determinación de los parámetros D y θ por ensayo y error.

Con base a este trabajo se calcularon la dimensión fractal y el índice de conductividad para un sistema sin participación de la matriz.

$$P_{wD}(t_D) = \frac{1}{(\theta+2)} \left[-\frac{1}{\nu} + \frac{2(1-\nu)^2}{(2-\nu)} r_{Dc}^{(\theta+2)\nu} \right] + \frac{(\theta+2)(1-\nu)}{r_{Dc}^{(\theta+2)(1-\nu)}} t_D \quad (V.1)$$

$$\nu = \frac{1-D+\theta+1}{\theta+2} \quad (V.2)$$

Donde:

P_{wD} = presión adimensional en la celda donde se encuentra el pozo

t_D = tiempo adimensional

θ = índice de conductividad

r_{Dc} = distancia radial adimensional

D = dimensión fractal

Para determinar los valores de P_{wD} , t_D y r_{Dc} nos apoyaremos en las expresiones utilizadas por Chang y Yortsos⁴:

$$p_D = (p_i - p) \left(\frac{aV_s m}{q\mu r_w^{2-D+\theta}} \right) \quad (V.3)$$

$$t_D = \frac{1-m}{c_1 \mu r_w^{\theta+2}} \quad (V.4)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (V.5)$$



De las cuales podemos observar que contamos con toda la información a excepción del término agrupado $aVsm$, para lo cual emplearemos la siguiente ecuación¹¹:

$$aV_s m = \frac{141.2qB\mu r_w^{m_1(\theta+2)}}{b_2(\theta+2)} \left[-\frac{1}{m_1} + \frac{2(1-m_1)^2}{2-m_1} r_{Dc}^{m_1(\theta+2)} \right] \quad (V.6)$$

donde m_1 se refiere a la pendiente obtenida de la figura V.7a y b_2 se refiere a la ordenada al origen de la recta ajustada en la figura V.7b.

Sustituyendo las ecuaciones V.2 a V.6 en la ecuación V.1 podemos obtener una expresión en función de θ y D.

Para el caso de $D=1.4$ y $\theta=0.1$, se tiene la siguiente información:

$m_1 = 1.808$	$q = 1500$	BPD
$b_1 = 0.5543$	$B_o = 1.52$	m^3/m^3
$m_2 = -99.86$	$\mu = 5.2$	Cp
$b_2 = 5698.6$	$c_f = 7.6301e^{-6}$	Psia ⁻¹
$m = 20$	$r_{De} = 2.22$	
$t_D = 38.8$	$\text{Log}(P_{wD}) = 11.83578706$	

Por medio de ensayo y error, usando las expresiones anteriores se obtuvo:

$$D=1.387406$$

$$\theta=0.095$$

Se observa que los valores obtenidos por este método son cercanos a los introducidos al simulador (0.89% de error para D y 5% de error para θ), con lo que podemos verificar que los resultados que está arrojando el simulador son coherentes.

CONCLUSIONES

La geometría fractal está siendo desarrollada como una herramienta primordial para la simulación del comportamiento de la naturaleza. En la actualidad las características fractales están sentando la base para el surgimiento de un nuevo estudio basado en la simulación del comportamiento de flujo de fluidos en medios porosos y en yacimientos fracturados.

A través de este trabajo pudimos darnos cuenta de la relativa facilidad con la que es posible simular geoméricamente una red de fracturas, aunque, como se mencionó, no resulta trivial la obtención de las transformaciones afines adecuadas.

A pesar de la dificultad que representa la generación de distribuciones areales de porosidad y permeabilidad con el modelo de Chang y Yortsos, se puede observar, gracias a las distribuciones de presiones, que un modelo de difusión con características fractales tiene la capacidad de establecer comunicación rápida y directa de cualquier celda hacia el pozo productor, lo cual es comparable con casos reales de yacimientos altamente fracturados, en los que una caída de presión en el pozo o la surgencia de algún fluido de inyección se refleja primero en celdas a varios kilómetros de distancia y no en las celdas más cercanas al pozo.

Después de analizar los resultados obtenidos con el simulador numérico desarrollado, nos dimos cuenta que un parámetro que afecta en gran manera el comportamiento de presión en el yacimiento es la conexión entre las fracturas del medio que se esté estudiando, y que en un momento dado podría servir como un parámetro de ajuste para modelar el comportamiento del yacimiento. Los parámetros fractales pueden ser obtenidos por un análisis a núcleos y son extrapolados a todo el yacimiento de modo que es posible utilizarlos como variables de ajuste dentro del simulador, aunque se ha establecido un rango ya

probado para yacimientos alrededor del mundo que va de 1.38 a 1.66 aproximadamente, de acuerdo a los resultados obtenidos por Acuña⁵.

También observamos que mientras más alto sea el valor del índice de conductividad, el término de la dimensión fractal se vuelve menos significativo para la caída de presión.

Es necesario incluir más variables al sistema que hemos planteado en este trabajo por ejemplo la participación de la matriz en el flujo del fluido, una malla en tres dimensiones, composición del fluido, contacto de agua, etc. con lo cual será posible examinar casos de yacimientos fracturados existentes en la realidad. Consideramos que este trabajo puede ser tomado como base para trabajos posteriores, es necesario continuar desarrollando métodos que nos permitan realizar un mejor análisis de los yacimientos fracturados para tomar mejores decisiones de su explotación debido a que en nuestro país son la principal fuente de producción.

Gracias al método del caminante aleatorio y a la creación de medios caóticos hemos podido analizar las trayectorias que podrían bien corresponder a las de un fluido a través de un núcleo. Si bien resulta difícil crear medios con la distribución de probabilidades lo suficientemente dinámicas para que el flujo de la partícula sea un poco más fluido y lo suficientemente complejos para representar lo mejor posible un medio poroso real.

APÉNDICES

APÉNDICE A.

MÉTODO DEL CAMINANTE ALEATORIO.

El caos

Los seres humanos siempre nos hemos preocupado por buscar las leyes que rigen la evolución del mundo que nos rodea. Se ha establecido así un conjunto de relaciones que nos permiten predecir el futuro de un sistema si se tiene información confiable sobre su estado presente o pasado. Estas reglas que le señalan a cada sistema el camino a seguir, se denominan deterministas y pueden ser simples o complejas; de ellas, en principio, se espera siempre una fidelidad absoluta, una capacidad predictiva sin límite.

Sin embargo, en los últimos años, gracias al desarrollo de las computadoras y de mejores métodos numéricos para resolver los problemas, se ha encontrado que existen sistemas que, a pesar de estar gobernados por relaciones precisas y bien conocidas (sus ecuaciones deterministas), presentan un comportamiento absolutamente impredecible.

Esta característica de aleatoriedad, es una propiedad intrínseca del sistema que no se evita acumulando más información y, sorprendentemente, su presencia es más una regla que la excepción. El fenómeno ya se ha observado en el estudio de movimientos planetarios, la predicción del clima, el crecimiento de cristales, la evolución de sistemas fisiológicos, algunas reacciones químicas, etcétera.

Caos se puede definir como un conjunto aleatorio de fluctuaciones que aparentemente no pueden ser representadas por una ecuación. Donde parece no haber un patrón y la única forma de asegurar una gráfica sería graficar en el futuro donde el fenómeno que se desea estudiar ya ha sido observado. Es decir, para predecir el futuro se tendría que esperar el futuro.

Muchos sistemas no lineales exhiben un comportamiento caótico porque son muy sensibles a las influencias externas. Un sistema caótico resulta impredecible porque es extraordinariamente sensible a la especificación de las condiciones iniciales a partir de las cuales se quiere estudiar su evolución (Dresden, 1992); cualquier pequeño cambio en el estado inicial tiene dramáticos efectos sobre el comportamiento futuro. Para predecir el fenómeno se necesitaría conocer los datos iniciales con precisión infinita, así como un control extremo del proceso; esto es imposible, independientemente de qué tanto logremos mejorar nuestros aparatos de medición y control, y de qué tan bien conozcamos las relaciones matemáticas que rigen su comportamiento.

La espiral de Lorenz

En 1960, el matemático Edward Lorenz usaba su ordenador Royal McBee para desentrañar la maraña matemática que él mismo había creado con sus doce ecuaciones para predecir el tiempo atmosférico en el Massachusetts Institute of Technology.

Su pasión por el pronóstico atmosférico le vino durante la 2ª Guerra Mundial. Tras su graduación en Matemática Pura en el Dartmouth College en 1938 participó en la contienda diagnosticando el tiempo para las fuerzas aéreas. Transcurrida la guerra, optó por dedicar sus esfuerzos matemáticos aplicándolos a la meteorología.

La predicción del tiempo se debía regir por ecuaciones, al igual que las órbitas de los planetas, satélites y galaxias, quizá más complicadas pero ecuaciones al fin y

al cabo. Para ello escogió 12 funciones, unas establecían el vínculo entre velocidad y viento, otras entre presión y temperatura y así unas cuantas variables más. No le movía un interés meramente físico sino también matemático.

Su trabajo fue en boca en boca por el MIT, llegando a tal punto que se organizaban apuestas sobre los pronósticos que darían las ecuaciones de Lorenz.

Hojeando los rollos y rollos de papel con datos numéricos que escupía su impresora, Lorenz ideó un método para que el ordenador señalara cada minuto del paso de un día imprimiendo una hilera de números.

En 1961, Lorenz cansado de observar ese vaivén numérico salido de la impresora de su ordenador, intentó atajar partiendo de una sucesión anterior pero al traspasar los dígitos sólo tecleó 3 en vez de los 6 originales, esperando que el comportamiento no cambiara.

Los resultados obtenidos trajeron de cabeza a Lorenz pues no eran los esperados y revisó el software y hardware hasta darse cuenta finalmente, que el error lo cometió al truncar el valor inicial de la función cambiando la entrada de 0,506127 a 0,506.

No creyó que una variación tan pequeña pudiera provocar un cambio tan radical de la función al cabo de unas cuantas iteraciones.

Para demostrarlo se puede graficar la función $f(x)=x^2$, en la que se toma el valor de la iteración anterior y se eleva al cuadrado, se hicieron 10 iteraciones realizando dos series: la primera de ellas parte de un valor inicial de $x = 1.0001$ y la segunda de un valor inicial de $x = 1.001$. El comportamiento de las dos es parecido en las primeras iteraciones y progresivamente comienza a variar, desapareciendo cualquier parecido a partir de la iteración número 10.

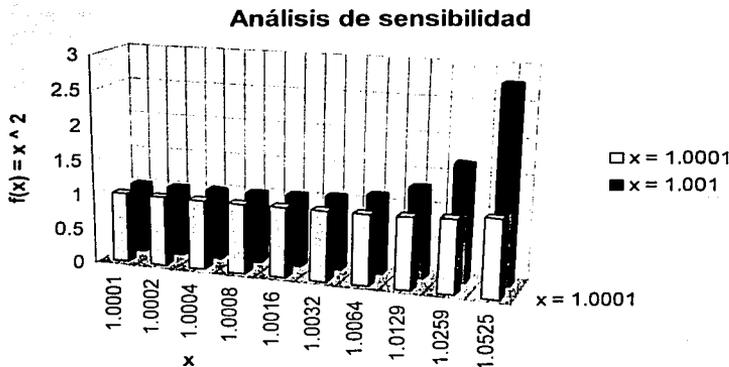


Figura AA.1. Análisis de sensibilidad al realizar la misma operación partiendo de dos valores ligeramente distintos.

Había dado con "el efecto mariposa". Este redondeo insignificante era el aleteo de la mariposa; y el comportamiento anómalo, o digamos inesperado, de la función el huracán que se produciría el próximo mes en Tokio.

Cualquier pronóstico climatológico se deteriora rápidamente por culpa de un viento, de una entrada de aire caliente, por una bajada de presión, por una tormenta inesperada, ese error va creciendo geométricamente y la realidad al día siguiente no es la esperada sino otra totalmente distinta: donde haría sol, llueve; donde llovería, sale el sol; donde se podría ir a la playa, se encierran en el sótano hasta que pase el huracán; etc.

Lorenz llamó a su descubrimiento "Dependencia sensitiva de las condiciones iniciales" y con ello creó la base de una nueva ciencia: el Caos, ciencia que no resurgiría hasta bien pasados los años, cuando los colegas de Lorenz dejaron de ver su descubrimiento como simple distracción matemática y se cercioraron de la grandeza de su trabajo. Fue entonces, cuando el surgimiento del caos se produjo

en el status científico, y todos pretendían verlo, incluso en lugares donde no existía.

Lorenz animado por su descubrimiento, decidió comenzar a experimentar con sus resultados en el campo de las corrientes de fluidos y sus 12 fórmulas se vieron reducidas a 3 simples ecuaciones no lineales.

Sus 3 ecuaciones respondían al funcionamiento de una noria de agua cuyo suministro de agua dista de ser idóneo. El aparentemente sencillo comportamiento de tan simple sistema mecánico se transforma en sorprendentemente complicado cuando el suministro de agua supera al deseado y por los cajones de la noria no se desagua lo suficiente para superar la fricción y seguir con su movimiento y velocidad uniforme.

La velocidad de la noria aumenta y los cajones no se llenan por igual con lo cual llegará un momento que el peso de los cajones que faltan por llenarse vencerá la fricción y la rueda comenzará a girar en sentido contrario y seguirá repitiéndose este proceso de cambio de sentido pero sin una pauta determinada ni predecible. Tanto podrá cambiar 5 veces en 10 minutos como estar otros 10 minutos sin cambiar o cambiar 5 veces en los 3 minutos siguientes. Esta aleatoriedad depende de: el aumento de la velocidad de giro de la rueda, el caudal suministrado, reducción del tiempo de llenado de los cajones, los cajones que no se han llenado vencen a la velocidad de giro.

Lorenz representó gráficamente los resultados obtenidos con sus 3 ecuaciones en una gráfica tridimensional, asignando el valor obtenido de cada ecuación a una de las 3 dimensiones del plano euclidiano.

El gráfico resultante es el conocido actualmente con el nombre de "atractor de Lorenz", el científico se encontró entonces de nuevo con el efecto mariposa en concreto con las alas de la mariposa.

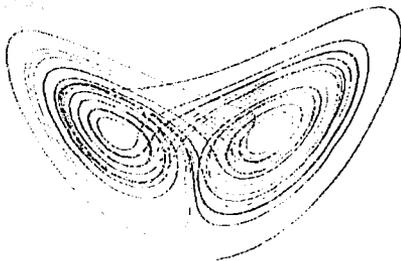


Figura AA.2. Las llamadas "alas de mariposa" encontradas por Lorenz

La línea de la gráfica no se tocaba jamás como se observa en la Figura AA.3, el desorden era total pues ningún punto se repetía ya que no había intersecciones, pero se vislumbró un nuevo tipo de "desorden ordenado": el caos.

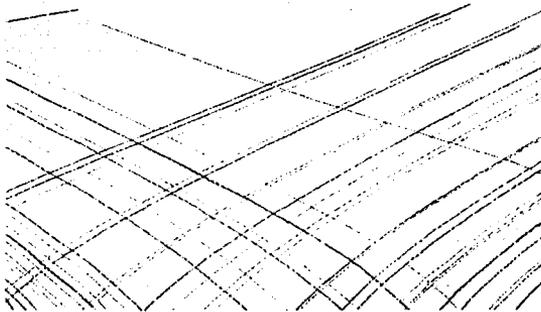


Figura AA.3. Un acercamiento a las "alas de mariposa" de Lorenz.

La imagen es en realidad una vista tridimensional en donde Lorenz encontró que ninguna línea se cruza.

Caos y fractales

La relación entre el caos y los fractales parece ser mucha, después del estudio de ambos se observaría que en problemas que se planteaban como caóticos aparecerían características fractales, lo que ha llevado a que cada vez más áreas de investigación acudan a su estudio para resolver problemas que por siglos se han considerado imposibles de resolver. El caso de las autómatas celulares es un buen ejemplo para observar la relación que existe entre caos y fractales:

Los autómatas celulares fueron utilizados por primera vez por los matemáticos John von Neumann y Stanislaw Ulam en 1948 para representar la reproducción en algunos sistemas biológicos.

Para construirlos basta tomar un arreglo de sitios o celdas, cada una de las cuales se encuentra en un estado que se caracteriza por la asignación de un valor numérico. Por ejemplo, si sólo hay dos estados posibles: vivo-muerto, vacío-leno, etcétera, pueden elegirse los números 0 y 1 para distinguirlos.

Una vez elegido un estado inicial para todo el sistema se procede a estudiar cómo evoluciona en el tiempo. Para ello se definen reglas que establecen cómo cambia el estado de cada celda, considerando su situación y la de sus vecinos más cercanos en la etapa anterior.

Un caso sencillo se presenta cuando consideramos un autómata celular unidimensional en el que cada celda puede estar ocupada por un organismo vivo (1) o estar vacía (0). Si la distribución inicial es al azar; una representación esquemática del sistema se vería de la siguiente manera:

0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Las reglas de evolución temporal que podemos proponer son múltiples. Por ejemplo:

Cada organismo vivo sobrevivirá para la siguiente etapa si y sólo si no lo rodean por ambos lados otros organismos vivos (esto podría representar la competencia). En un sitio vacío aparece un organismo vivo (nacimientos) si al menos un vecino es un organismo vivo.

En términos numéricos esta regla de evolución podría esquematizarse considerando la suma de los números asignados a cada celda y sus dos vecinos más cercanos. La suma tomaría valores entre 0 (todos vacíos) y 3 (todos llenos), y el estado para la siguiente etapa se obtendría consultando una tabla como la siguiente:

Si la suma da		Nuevo estado
0	→	0
1	→	1
2	→	1
3	→	0

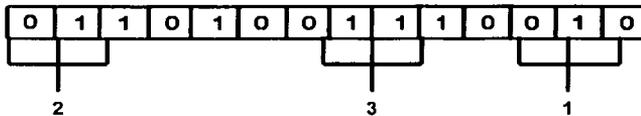


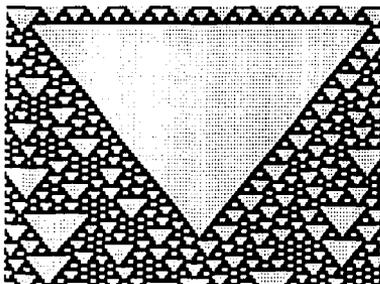
Figura AA.4. Procedimiento en el que se suma el valor de cada celda con el valor de sus dos celdas vecinas para después aplicar las reglas de evolución que se hayan planteado.

Cuando la regla de evolución se aplica a cada celda del sistema inicial se genera la población de la siguiente etapa. Después el procedimiento se repite una y otra vez, y para fines de análisis resulta conveniente dibujar uno tras otro los resultados que se obtienen:

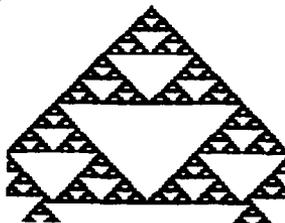
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
2	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Se pueden plantear un sinnúmero de pasos de tiempo con ayuda de la computadora, después de lo cual se obtiene algo similar a lo mostrado en la figura AA.5. Los espacios oscuros corresponden al valor de 1 y los claros al 0.



(b)



(d)



Figura AA.5. Patrones de evolución de una autómatas celular para distintas reglas.

A pesar de haber partido de una situación azarosa y de que la regla de evolución actúa muy localizadamente (sobre una celda y sus dos primeros vecinos), el autómata celular es capaz de generar espontáneamente un patrón complejo que presenta organización y estructura a toda escala. Esto es, el sistema se auto-organiza.

Las características del patrón que se forma se distinguen más claramente cuando se repite el cálculo suponiendo que inicialmente sólo había un organismo vivo situado en una celda central. El resultado de la evolución del autómata (Figura AA.5) es una estructura muy similar al triángulo de Sierpinski. La auto-organización del sistema conduce a la formación de una estructura compleja, autosimilar y con dimensión fraccional.

En la actualidad los autómatas pueden ser utilizados para modelar el flujo de fluidos a través de obstáculos, y cuando se introducen ciertos elementos aleatorios en las reglas que rigen su comportamiento son modelos adecuados para fenómenos tales como la difusión de líquidos a través de medios porosos.

Caminante aleatorio.

El concepto de caminante aleatorio se aplica a un fenómeno cuyo comportamiento depende de probabilidades. Un ejemplo de caminante aleatorio puede ser tan sencillo como el evento de arrojar una moneda al aire, donde la probabilidad de que caiga cara es la misma a que caiga cruz, y estudiar su comportamiento después de repetirlo "n" veces. Sin embargo tomaremos un ejemplo mas visual para explicarlo.

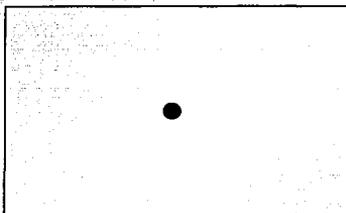
Imaginemos a una partícula colocada sobre una recta:

Si queremos que la partícula sólo pueda desplazarse sobre la recta, tendremos tres posibilidades de avance: 1) moverse hacia la derecha, 2) moverse hacia la izquierda o 3) quedarse en el mismo lugar. Para determinar hacia que dirección se

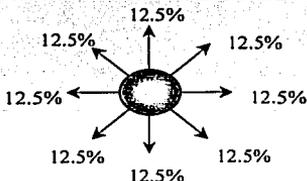
desplazará arrojemos un dado de 6 caras, si el valor resultante es 5 ó 6, la partícula se dirigirá hacia la derecha; si cae 3 ó 4, la partícula se irá a la izquierda; y si obtenemos 1 ó 2 la partícula se quedará en el mismo lugar. En caso de que resulte que la partícula se mueva, ésta lo hará recorriendo una magnitud de distancia "L" a cada paso que dé.

Después de arrojar el dado "n" veces sería imposible determinar que camino siguió la partícula y sólo veríamos una línea continua describiendo su recorrido desde un punto de partida A hasta un punto final B.

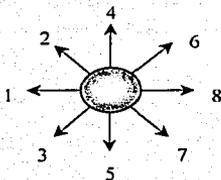
Para poder tener una mejor visión de este problema analicemos a la misma partícula pero ahora la colocaremos en el centro de un plano.



Ahora la partícula tiene un número infinito de direcciones para moverse. Para simplificar este problema estableceremos que la partícula sólo puede moverse en 8 direcciones manejando la misma probabilidad hacia cada una de ellas:



Para elegir hacia que dirección se moverá usaremos ocho boletos numerados sucesivamente y los introduciremos en una tómbola. A continuación sacaremos un boleto a la vez, veremos que número sale y lo regresaremos a la tómbola. La partícula se moverá de acuerdo al número que obtengamos.



Después de sacar boletos "n" veces el recorrido de la partícula podría verse como en la figura AA.6.

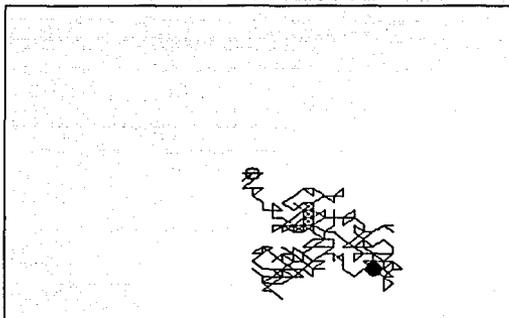


Figura AA.6. Movimiento de una partícula después de "n" iteraciones.

Mientras hacemos este ejercicio existe la posibilidad de que regresemos al lugar anterior al que partimos, es decir, si sacamos el número uno y a continuación sacamos el número ocho nos encontraremos de nueva cuenta en el lugar del que partimos.

Si consideramos a los lugares rellenos como fragmentos de roca y a los lugares vacíos como poros entonces podremos construir medios más "consolidados" o "deleznales" dependiendo de cómo hagamos el manejo de las probabilidades, como se muestra en la figura AA.8.

Si así lo deseamos, nosotros podemos aplicar el método de la caja para determinar la dimensión fractal de nuestro medio aleatorio, contabilizando los lugares rellenos y vacíos.

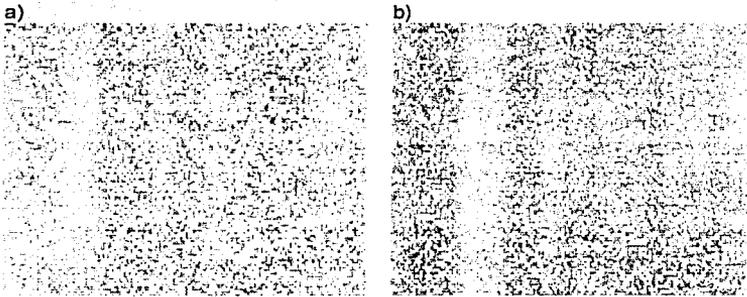


Figura AA.8. Medios construidos manejando: a) Una probabilidad de 50% para sólido y 50% para huecos; b) Probabilidad de 66.67% para sólidos y 33.33% para huecos

Retomando el ejemplo del movimiento de la partícula sobre un plano, podemos repetir este proceso pero ahora usando un medio construido de manera aleatoria como las que se muestran en las figuras anteriores.

La diferencia ahora será que no se podrá viajar libremente sobre el plano, sino que ahora la partícula solo se podrá mover por los lugares vacíos, y sólo contará con un número de pasos limitados para hacerlo.

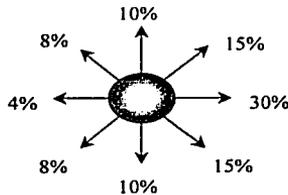
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Figura AA.9. Trayectoria de un caminante ciego suelto en un medio aleatorio de 100x150 lugares, manejando la misma probabilidad hacia las 8 direcciones, usando 30000 pasos como máximo.

Se observa que bajo este esquema de probabilidades (la misma para cualquiera de las 8 direcciones planteadas en un inicio) le cuesta trabajo avanzar a la partícula.

Ahora replanteemos estas probabilidades, alterándolas de manera que la partícula tenga preferencia de moverse de izquierda a derecha, pero sin negar la posibilidad de que regrese.



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



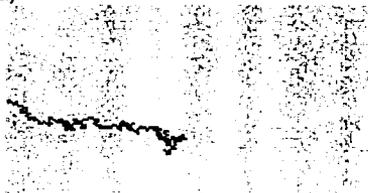
Figura AA.10. Trayectoria de un caminante ciego suelto en un medio aleatorio de 100×150 lugares, manejando probabilidades diferentes usando 30000 pasos como máximo.

Como puede observarse, usando este juego de probabilidades, se logra que para el mismo número de pasos la partícula llegue más lejos.

A pesar de que las probabilidades se hayan dispuesto de esta manera, la aleatoriedad se conserva, lo que puede observarse al arrojar varios caminantes sobre un mismo medio como se observa en la figura AA.11.

De igual manera, al soltar un gran número de caminantes pueden detectarse los caminos preferenciales de la partícula para recorrer el medio aleatorio, como se ve en la figura AA.12.

a)



b)



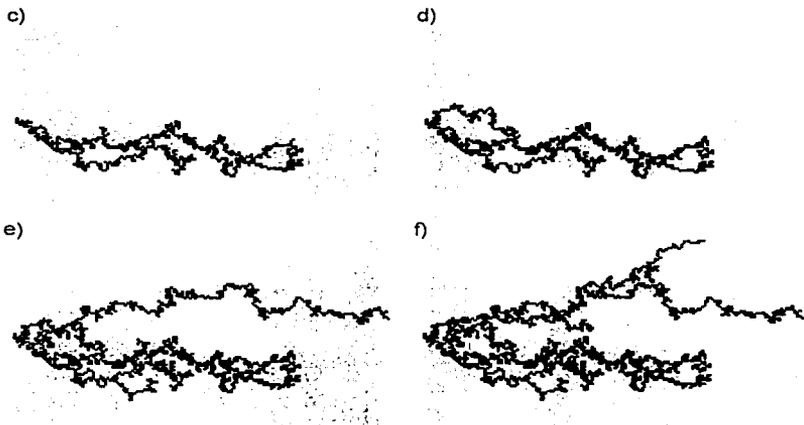


Figura AA.11. A pesar de dar preferencia a la partícula a tomar una dirección la aleatoriedad se conserva y las trayectorias resultantes son diferentes. a) un caminante, b) dos caminantes, c) tres caminantes, d) cuatro caminantes, e) siete caminantes, f) quince caminantes

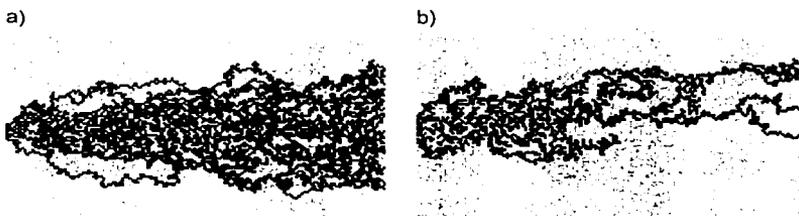


Figura AA.12. Resultado de soltar 60 caminantes en un medio aleatorio manejando probabilidades de, a) 46.67% para lugares llenos y 53.33% para vacíos, b) 50% para lugares llenos y 50% para vacíos

Hasta ahora lo que hemos visto es como recorrer un medio construido de manera aleatoria manipulando las probabilidades de movimiento de la partícula, lo que nos da por resultado una serie de trayectorias descritas por la partícula de manera aleatoria.

El medio maneja sólo dos valores. Se le asigna a un lugar el valor de 0 si se encuentra relleno y un valor de 1 si se encuentra vacío, y la partícula sólo puede caminar por los lugares que tienen el valor de 1.

Sin embargo, en un medio poroso lo que determinará hacia que dirección se tiene preferencia de flujo será la caída de presión en el medio, y esto está íntimamente ligado con su permeabilidad.

El hecho de estar manejando sólo dos valores, 0 y 1, podría interpretarse como considerar que la conexión entre los huecos del medio son "limpias", es decir, que los canales que los unen no sufren de cierres y aperturas dentro del medio. Una manera de representar esta condición es aumentar los valores manejados en la construcción del medio aleatorio, por ejemplo, se puede pensar en manejar valores dentro de un rango de 0 a 4 en el que cada número represente ciertas condiciones del medio y nos sea posible establecer diferentes capacidades de movimiento de una partícula de acuerdo a las características que se asignen a cada valor dentro del medio. A cada caso que podamos plantear se asignaría un número dentro del rango que se ha planteado y con eso se generaría un medio aleatorio como el mostrado en la figura AA.13.

Podemos observar que dependiendo de las condiciones de flujo que se quieran manejar en el medio se establecerá el rango de valores que nos lleve a una mejor representación del mismo, pero sin perder de vista que debemos establecer una probabilidad de flujo que permita el movimiento del caminante aleatorio dentro del medio generado. Para el ejemplo de la figura AA.13 se muestra un medio aleatorio con valores que van de 0 a 4, donde el 0 nos representa a la parte sólida por donde la partícula no puede avanzar, y los valores de 1 a 4 representan que tan

Apéndice A. Método del Caminante Aleatorio

abierto o cerrado se encuentra el camino para la partícula, siendo 4 el más abierto y 1 el más cerrado.

De esta manera, para saber en qué dirección se moverá el caminante se tendría que ponderar la facilidad de flujo en una dirección dada sin perder de vista, claro está, el sentido del flujo dentro del medio.

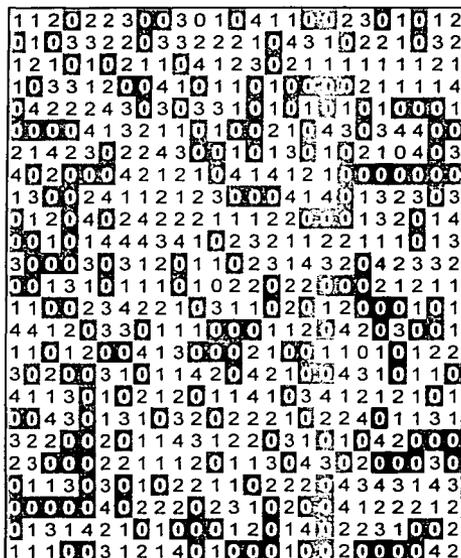
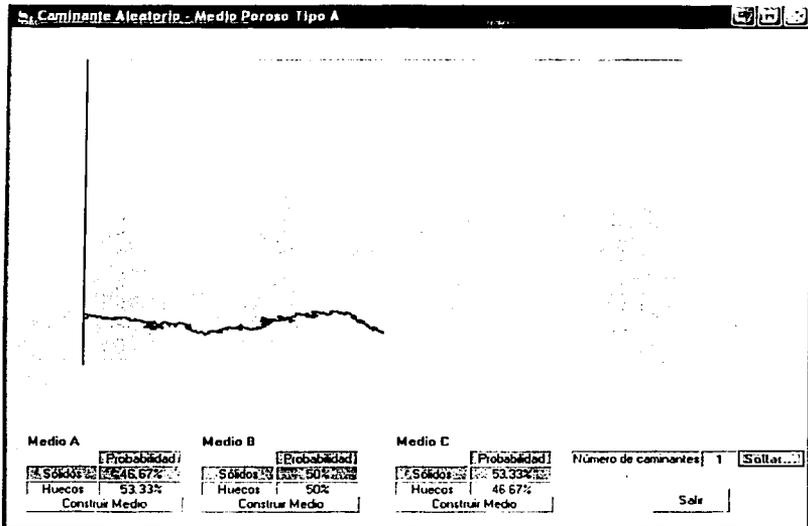


Figura AA.13. Medio aleatorio construido con valores de 0 a 4 para enfatizar las irregularidades del medio, donde 0 se considera sólido y los valores de 1 a 4 indican la magnitud de la facilidad con la que la partícula puede pasar por una celda, siendo 4 el más fácil y 1 el más difícil.

Una posible solución a este problema sería tratar de ponderar, con respecto a la posición actual de la partícula, la magnitud de la caída de presión en función de la apertura o cierre de los posibles caminos que se pueden tomar.

Programa de cómputo para la simulación de caminatas aleatorias.

La siguiente es la interfase generada para la interacción con el usuario, más adelante se presenta el código correspondiente.



Se hace "click" sobre el botón que indique las probabilidades con las que se quiere construir el medio y en la parte derecha de la ventana se indica el número de caminantes que se quieren saltar. Hecho esto se hace "click" sobre el botón "Saltar" y en la pantalla se describe la trayectoria aleatoria resultante.

a) Código para el movimiento del caminante en el medio.

```
Private Sub Command7_Click()
```

```
Dim i&, j&, xmin#, xmax#, ymin#, ymax#, Inc#, AleatorioX%, AleatorioY%
```

```
Dim Limite_superior%, Limite_inferior%, CuentaTodos&
```

```
Dim CuentaRellenos&, ValorX#, ValorY#, MueveX%, MueveY%, AntX%, AntY%
```

```
Dim AL%, Prob&(0 To 14)
```

TESIS
FALLA DE ORIGEN

```
For i = 0 To 14
    Prob(i) = 0
Next i
CuentaTodos = 0
Limite_superior = 100
Limite_inferior = 1
xmin = -10:    xmax = 3010:    ymin = -10:    ymax = 3010
Inc = 10
Picture1.ScaleLeft = xmin
Picture1.ScaleTop = ymax
Picture1.ScaleWidth = xmax - xmin
Picture1.ScaleHeight = -(ymax - ymin)
Picture1.Refresh

ValorX = 0
ValorY = 500
AntX = 4: AntY = 4
Picture1.AutoRedraw = True

For i = 1 To 5000000 Step Inc
    ValorY = (ValorY + (Inc / 2)), RGB(100, 0, 0), B

50:    AL = Int((Limite_superior - Limite_inferior + 1) * Rnd + Limite_inferior)
    'Form1.Caption = Str(AL)
    If AL >= 36 And AL <= 65 Then
        If (ValorX + Inc) > 1500 Then GoTo 50
        If Matriz((ValorX + Inc) / Inc, ValorY / Inc) = 0 Then GoTo 50
        If Matriz((ValorX + Inc) / Inc, ValorY / Inc) = 1 Then
            'Lb1Todos.Caption = Str(AL)
            ValorX = ValorX + Inc
            Picture1.FillColor = vbBlue 'RGB(255, 255, 200)
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```

Picture1.Line (ValorX - (Inc / 2), ValorY - (Inc / 2))-(ValorX + (Inc _
/ 2), ValorY + (Inc / 2)), RGB(100, 0, 0), B
End If
End If
If (AL >= 28 And AL <= 35) Or (AL >= 74 And AL <= 80) Then
If (ValorX + Inc) > 1500 Or (ValorY + Inc) > 1500 Then GoTo 50
If Matriz((ValorX + Inc) / Inc, (ValorY + Inc) / Inc) = 0 Then GoTo 50
If Matriz((ValorX + Inc) / Inc, (ValorY + Inc) / Inc) = 1 Then
'LblTodos.Caption = Str(AL)
ValorX = ValorX + Inc
ValorY = ValorY + Inc
Picture1.FillColor = vbBlue 'RGB(255, 255, 200)
Picture1.Line (ValorX - (Inc / 2), ValorY - (Inc / 2))-(ValorX + (Inc _
/ 2), ValorY + (Inc / 2)), RGB(100, 0, 0), B
End If
End If
If (AL >= 21 And AL <= 27) Or (AL >= 66 And AL <= 73) Then
If (ValorX + Inc) > 1500 Or (ValorY - Inc) < 0 Then GoTo 50
If Matriz((ValorX + Inc) / Inc, (ValorY - Inc) / Inc) = 0 Then GoTo 50
If Matriz((ValorX + Inc) / Inc, (ValorY - Inc) / Inc) = 1 Then
'LblTodos.Caption = Str(AL)
ValorX = ValorX + Inc
ValorY = ValorY - Inc
Picture1.FillColor = vbBlue 'RGB(255, 255, 200)
Picture1.Line (ValorX - (Inc / 2), ValorY - (Inc / 2))-(ValorX + (Inc _
/ 2), ValorY + (Inc / 2)), RGB(100, 0, 0), B
End If
End If
If (AL >= 16 And AL <= 20) Or (AL >= 86 And AL <= 90) Then
If (ValorY + 1 * Inc) > 1500 Then GoTo 50
If Matriz(ValorX / Inc, (ValorY + Inc) / Inc) = 0 Then GoTo 50

```

```
If Matriz(ValorX / Inc, (ValorY + Inc) / Inc) = 1 Then
  'LbITodos.Caption = Str(AL)
  ValorY = ValorY + 1 * Inc
  Picture1.FillColor = vbBlue 'RGB(255, 255, 200)
  Picture1.Line (ValorX - (Inc / 2), ValorY - (Inc / 2))-(ValorX + (Inc _
/ 2), ValorY + (Inc / 2)), RGB(100, 0, 0), B
End If

End If

If (AL >= 11 And AL <= 15) Or (AL >= 81 And AL <= 85) Then
  If (ValorY - 1 * Inc) < 0 Then GoTo 50
  If Matriz(ValorX / Inc, (ValorY - Inc) / Inc) = 0 Then GoTo 50
  If Matriz(ValorX / Inc, (ValorY - Inc) / Inc) = 1 Then
    'LbITodos.Caption = Str(AL)
    ValorY = ValorY - Inc
    Picture1.FillColor = vbBlue 'RGB(255, 255, 200)
    Picture1.Line (ValorX - (Inc / 2), ValorY - (Inc / 2))-(ValorX + (Inc /
2), ValorY + (Inc / 2)), RGB(100, 0, 0), B
  End If

End If

If (AL >= 7 And AL <= 10) Or (AL >= 95 And AL <= 98) Then
  If (ValorX - Inc) < 0 Or (ValorY + Inc) > 1000 Then GoTo 50
  If Matriz((ValorX - Inc) / Inc, (ValorY + Inc) / Inc) = 0 Then GoTo 50
  If Matriz((ValorX - Inc) / Inc, (ValorY + Inc) / Inc) = 1 Then
    'LbITodos.Caption = Str(AL)
    ValorX = ValorX - Inc
    ValorY = ValorY + Inc
    Picture1.FillColor = vbBlue 'RGB(255, 255, 200)
    Picture1.Line (ValorX - (Inc / 2), ValorY - (Inc / 2))-(ValorX + (Inc _
/ 2), ValorY + (Inc / 2)), RGB(100, 0, 0), B
  End If

End If
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```
If (AL >= 3 And AL <= 6) Or (AL >= 91 And AL <= 94) Then
  If (ValorX - Inc) < 0 Or (ValorY - Inc) < 0 Then GoTo 50
  If Matriz((ValorX - Inc) / Inc, (ValorY - Inc) / Inc) = 0 Then GoTo 50
  If Matriz((ValorX - Inc) / Inc, (ValorY - Inc) / Inc) = 1 Then
    'LblTodos.Caption = Str(AL)
    ValorX = ValorX - Inc
    ValorY = ValorY - Inc
    Picture1.FillColor = vbBlue 'RGB(255, 255, 200)
    Picture1.Line (ValorX - (Inc / 2), ValorY - (Inc / 2))-(ValorX + (Inc / 2), ValorY + (Inc / 2)), RGB(100, 0, 0), B
  End If
End If
If (AL >= 1 And AL <= 2) Then Prob(0) = Prob(0) + 1
If (AL >= 99 And AL <= 100) Then Prob(14) = Prob(14) + 1
If ValorX >= 1500 Then Exit For
```

Next i

```
Picture1.FillColor = vbRed 'RGB(255, 255, 200)
Picture1.Line (ValorX - (Inc / 2), ValorY - (Inc / 2))-(ValorX + (Inc / 2), ValorY + (Inc / 2)), vbRed, B
End Sub
```

b) Código para la generación del medio aleatorio.

```
Private Sub Command9_Click()
  Dim i%, j%, xmin#, xmax#, ymin#, ymax#, Inc#, Aleatorio%
  Dim Limite_superior%, Limite_inferior%, CuentaTodos&
  Dim CuentaRellenos&, IniCamX%, IniCamY%, cta%, FinCamino%
  Dim PasoX%, PasoY%, CuentaPuntos%(7), MuevePunto%(7, 1), Primero%
```

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Apéndice A. Método del Caminante Aleatorio

```
Dim AntX%, AntY%
Open "C:\matrix.txt" For Output As #88
Form1.Caption = "Caminante Aleatorio - Medio Poroso Tipo B"
CuentaTodos = 0: CuentaRellenos = 0
Limite_superior = 14
Limite_inferior = 1
xmin = -10
xmax = 1510
ymin = -10
ymax = 1010
Inc = 10
Picture1.ScaleLeft = xmin
Picture1.ScaleTop = ymax
Picture1.ScaleWidth = xmax - xmin
Picture1.ScaleHeight = -(ymax - ymin)
Picture1.Refresh
Randomize
cta = 0
For i = 0 To xmax - 10 Step Inc
  For j = 0 To ymax - 10 Step Inc
    CuentaTodos = CuentaTodos + 1
    Aleatorio = Int((Limite_superior - Limite_inferior + 1) * Rnd +
    Limite_inferior)
    'Matriz(i / Inc, j / Inc) = Aleatorio

    If Aleatorio > 0 And Aleatorio < 8 Then
      Matriz(i / Inc, j / Inc) = 0
      Picture1.FillColor = RGB(180, 180, 180)
      Picture1.Line (i - (Inc / 2), j - (Inc / 2)-(i + (Inc / 2), j + (Inc / 2)),
      RGB(180, 180, 180), B
      CuentaRellenos = CuentaRellenos + 1
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

End If

If Aleatorio > 7 And Aleatorio < 15 Then

Matriz(i / Inc, j / Inc) = 1

Picture1.FillColor = vbWhite

Picture1.Line (i - (Inc / 2), j - (Inc / 2))-(i + (Inc / 2), j + (Inc / 2)),

RGB(255, 255, 255), B

CuentaRellenos = CuentaRellenos + 1

End If

Print #88, Matriz(i / Inc, j / Inc);

Next j

Print #88, ""

Next i

LblTodos.Caption = Str(IniCamX)

LblRellenos.Caption = Str(IniCamY)

LblVacios.Caption = Str(CuentaTodos - CuentaRellenos)

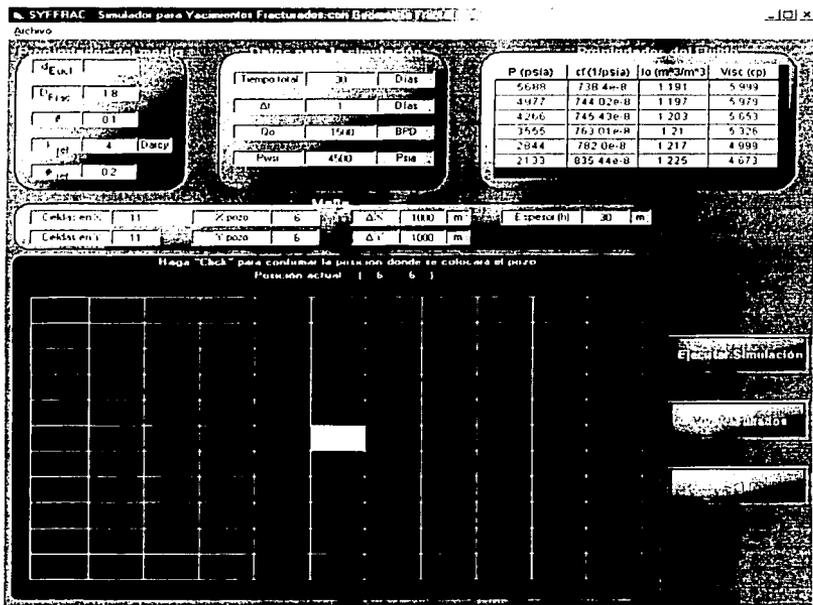
Close #88

End Sub

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

APÉNDICE B.

SIMULADOR NUMÉRICO PARA MEDIOS FRACTURADOS CON GEOMETRÍA FRACTAL



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

```

Private Sub Command1_Click()
Dim n%, TiempoT#, dt#, disn%, tiempo#, vari%, cont2%, poz%, k%
Dim Archivo$

numx = Val(TxtCelX.Text)
numy = Val(TxtCelY.Text)
n = numx * numy + 2

dt = Val(TxtDeltat.Text)
TiempoT = Val(TxtTiempoT.Text)
disn = TiempoT / dt + 1

If TiempoT <= dt Then
    MsgBox "El tiempo total debe ser mayor que el incremento en el tiempo",
vbCritical, "Error en la entrada de datos"
    Exit Sub
End If

ReDim Pozo#(numx, numy, disn)

ReDim r#(n, n), alfa#(n, n), beta#(n, n), gama#(n, n), kfi#(n), phfi#(n)
ReDim w#(n, n), del#(n, n), lam#(n, n), X#(n), Y#(n), visco#(n), Boo#(n)
ReDim mat#(n, n), comp(n, n) As String, b#(n), IPVT%(n), cfo#(n)
ReDim IncTiempos#(TiempoT / dt)

Dim Di#, teta#, kf#, phf#, visc#(10), cf#(10), dx#, dy#, q#, Bo#(10), h#, Vs#, a#, G#
Dim d%, xw%, yw%, Cond#, Pws#, i%, j%, cont%, nk%, phfo#, kfo#, eta#, M#,
Pn#(10)

MousePointer = 11

kfo = Val(TxtKf.Text)           'permeabilidad de la fractura (m**2)
q = Val(TxtQo.Text)            'gasto (m^3/seg)
Pws = Val(TxtPws.Text)         'presión del yacimiento (Pa)
Di = Val(TxtDf.Text)           'dimensión fractal
d = Val(TxtD.E.Text)           'dimension euclidiana
teta = Val(TxtTeta.Text)       'índice de conductividad
phfo = Val(TxtPorof.Text)      'porosidad de la fractura
xw = Val(TxtXw.Text)           'coordenadas del pozo
yw = Val(TxtYw.Text)
dx = Val(TxtDx.Text)           'incrementos en x y y (m)
dy = Val(TxtDy.Text)
h = Val(TxtH.Text)             'espesor de la formación (m)

phf = phfo
kf = kfo
    
```

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

```
If Di > d Or Di < d - 1# Then
  MsgBox "La dimensión fractal debe ser menor que " & d & " y mayor que " & d -
  1, , "AVISO"
  MousePointer = 0
  Exit Sub
End If

With grd2
For i = 1 To .Rows - 1
  Pn(i) = .TextMatrix(i, 0)
  cf(i) = .TextMatrix(i, 1)
  Bo(i) = .TextMatrix(i, 2)
  visc(i) = .TextMatrix(i, 3)
Next i
End With

cont = 1
For i = 1 To numx
  For j = 1 To numy
    If i = xw And j = yw Then poz = cont
    cont = cont + 1
  Next j
Next i

Open "c:\chkM.txt" For Output As #200

Do ' ----Con este "Do" se engloban los valores de Di de 1.8 a 1.4
teta = Val(TxtTeta.Text)
Do ' ----Con este "Do" se engloban los valores de teta de 0.1 a 0.5

phfo = Val(TxtPorof.Text)
kfo = Val(TxtKf.Text)
dt = Val(TxtDeltat.Text)

M = kfo / phfo
CuentaPasos = 0
cont = 1: tiempo = dt: cont2 = 1

Archivo = "C:\Di" & Str(Di) & "Teta" & Str(teta) & ".txt"
Open Archivo For Output As #500

Print #500, "D=" & Str(Di), "Teta=" & Str(teta), "PhiRef=" & Str(phfo), "kRef=" &
Str(kfo)
Print #500, "Ttotal=" & Str(TiempoT), "DeltaT=" & Str(dt), ,
Print #500, "Qo=" & Str(q), "Pws=" & Str(Pws), "h=" & Str(h)
Print #500, "CelX=" & Str(numx), "CelY=" & Str(numy), "DeltaX=" & Str(dx), ,
"DeltaY=" & Str(dy)
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```
'-----Asignación de valores iniciales para la matriz Mat(i) y el vector B(i) -
For i = 1 To numx * numy
  For j = 1 To numx * numy
    mat(i, j) = 0
  Next j
  b(i) = Pws * 6894.75
Next i
```

'=====INICIO DE LA SIMULACIÓN=====

```
Do
  CuentaPasos = CuentaPasos + 1
  IncTiempos(CuentaPasos) = tiempo
```

'-----Interpolación numérica de los valores de viscosidad, Bo y cf

```
cont2 = 1
For j = 1 To numx
  For k = 1 To numy
    For i = 1 To 6 '6=numero de datos en la tabla de propiedades del fluido
      If b(cont2) < Pn(i) And b(cont2) > Pn(i + 1) Then
        visco(cont2) = (visc(i + 1) - visc(i)) / (Pn(i + 1) - Pn(i)) * (b(cont2) - Pn(i))
+ visc(i)
        Boo(cont2) = (Bo(i + 1) - Bo(i)) / (Pn(i + 1) - Pn(i)) * (b(cont2) - Pn(i)) +
Bo(i)
        cfo(cont2) = (cf(i + 1) - cf(i)) / (Pn(i + 1) - Pn(i)) * (b(cont2) - Pn(i)) + cf(i)
        Exit For
      End If
      If b(cont2) = Pn(i) Then
        visco(cont2) = visc(i)
        Boo(cont2) = Bo(i)
        cfo(cont2) = cf(i)
        Exit For
      End If
    Next i
    cont2 = cont2 + 1
  Next k
Next j
```

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

```
eta = kfo / (phfo * visco(poz) * cfo(poz))
b(poz) = b(poz) + 0.0159 * q * visco(poz) * Boo(poz) * eta * tiempo / (kfo * h * dx *
dy)
```

```
For i = 1 To numx
  X(i) = (Abs(xw - i)) * dx
Next i
For j = 1 To numy
```

```

Y(j) = (Abs(yw - j)) * dy
Next j

cont2 = 1
For i = 1 To numx
  For j = 1 To numy
    r(i, j) = (X(i) - X(xw)) ^ 2 + (Y(j) - Y(yw)) ^ 2
    'Print #200, Str(r(i, j));
    If r(i, j) = 0 Then r(i, j) = (dx / 4) ^ 2 + (dy / 4) ^ 2
    phf = phfo * Sqr(r(i, j)) ^ (Di - d)
    kf = kfo * Sqr(r(i, j)) ^ (Di - d - teta)
    M = kf / (phf * Sqr(r(i, j)) ^ (-teta))
    'M = kf / (phf * Sqr(r(i, j)) ^ (Di - d - teta))
    Print #200, Str(M);
    alfa(i, j) = 0.00083695017312 * (M * tiempo * (Y(j) - Y(yw)) ^ 2 * (X(i) - X(xw)))
  / _
    (cfo(cont2) * visco(cont2) * dx) * (r(i, j)) ^ (-teta / 2 - 2)
    beta(i, j) = 0.00083695017312 * (M * tiempo * (X(i) - X(xw)) ^ 2) / (cfo(cont2) *
visco(cont2) * dx ^ 2) * _
    (r(i, j)) ^ (-teta / 2 - 2)
    gama(i, j) = 0.00083695017312 * (M * tiempo * (X(i) - X(xw)) ^ 2 * (Y(j) -
Y(yw))) / _
    (cfo(cont2) * visco(cont2) * dy) * (r(i, j)) ^ (-teta / 2 - 2)
    w(i, j) = 0.00083695017312 * (M * tiempo * (Y(j) - Y(yw)) ^ 2) / (cfo(cont2) *
visco(cont2) * dy ^ 2) * _
    (r(i, j)) ^ (-teta / 2 - 1)
    del(i, j) = 0.00083695017312 * (Di - teta - 1) * (M * tiempo * (X(i) - X(xw))) /
(cfo(cont2) * visco(cont2) * dx) * _
    (r(i, j)) ^ (-teta / 2 - 1)
    lam(i, j) = 0.00083695017312 * (Di - teta - 1) * (M * tiempo * (Y(j) - Y(yw))) /
(cfo(cont2) * visco(cont2) * dy) * _
    (r(i, j)) ^ (-teta / 2 - 1)
    If cont = 1 Then
      kfi(cont2) = kf
      phfi(cont2) = phf
      cont2 = cont2 + 1
    End If
  Next j
  Print #200, ""
Next i

*****DIAGONAL PRINCIPAL
n = 2
For i = 1 To numx
  For j = 1 To numy
    mat(n, n) = (alfa(i, j) + del(i, j)) / 2 + (-alfa(i, j) - del(i, j)) / 2
      + (gama(i, j) + lam(i, j)) / 2 + (-gama(i, j) - lam(i, j)) / 2 _

```

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

```

+ (-1 - 2 * beta(i, j) - 2 * w(i, j))
comp(n, n) = "A/2 + B/2 + C/2 + D/2 + G"
If i = 1 Then
mat(n, n) = (alfa(i, j) + del(i, j)) / 2 + (-alfa(i, j) - del(i, j)) + _
(gama(i, j) + lam(i, j)) / 2 + (-gama(i, j) - lam(i, j)) / 2 + beta(i, j) _
+ (-1 - 2 * beta(i, j) - 2 * w(i, j))
comp(n, n) = "A/2 + B + C/2 + D/2 + E + G"
End If
If i = numx Then
mat(n, n) = (alfa(i, j) + del(i, j)) + (-alfa(i, j) - del(i, j)) / 2 + _
(gama(i, j) + lam(i, j)) / 2 + (-gama(i, j) - lam(i, j)) / 2 + beta(i, j) _
+ (-1 - 2 * beta(i, j) - 2 * w(i, j))
comp(n, n) = "A + B/2 + C/2 + D/2 + E + G"
End If
If i <> 1 And i <> numx And j = 1 Then
mat(n, n) = (alfa(i, j) + del(i, j)) / 2 + (-alfa(i, j) - del(i, j)) / 2 + _
(gama(i, j) + lam(i, j)) / 2 + (-gama(i, j) - lam(i, j)) + w(i, j) + _
(-1 - 2 * beta(i, j) - 2 * w(i, j))
comp(n, n) = "A/2 + B/2 + C/2 + D + F + G"
End If
If i <> 1 And i <> numx And j = numy Then
mat(n, n) = (alfa(i, j) + del(i, j)) / 2 + (-alfa(i, j) - del(i, j)) / 2 + _
(gama(i, j) + lam(i, j)) + (-gama(i, j) - lam(i, j)) / 2 + w(i, j) + _
(-1 - 2 * beta(i, j) - 2 * w(i, j))
comp(n, n) = "A/2 + B/2 + C + D/2 + F + G"
End If
n = n + 1
Next j
Next i

```

'-----Celdas en las esquinas

```

i = 1: j = numy
mat(numy, numy) = (alfa(i, j) + del(i, j)) / 2 + (-alfa(i, j) - del(i, j)) + _
(gama(i, j) + lam(i, j)) + (-gama(i, j) - lam(i, j)) / 2 + beta(i, j) + _
w(i, j) + (-1 - 2 * beta(i, j) - 2 * w(i, j))
comp(numy, numy) = "A/2 + B + C + D/2 + E + F + G"
i = 1: j = 1
mat(1, 1) = (alfa(i, j) + del(i, j)) / 2 + (-alfa(i, j) - del(i, j)) + _
(gama(i, j) + lam(i, j)) / 2 + (-gama(i, j) - lam(i, j)) + beta(i, j) + _
w(i, j) + (-1 - 2 * beta(i, j) - 2 * w(i, j))
comp(1, 1) = "A/2 + B + C/2 + D + E + F + G"
i = numx: j = 1
mat(numx * numy - numy + 1, numx * numy - numy + 1) = (alfa(i, j) + del(i, j)) + (-
alfa(i, j) - del(i, j)) / 2 + _
(gama(i, j) + lam(i, j)) / 2 + (-gama(i, j) - lam(i, j)) + beta(i, j) + _
w(i, j) + (-1 - 2 * beta(i, j) - 2 * w(i, j))

```

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

```
comp(numx * numy - numy + 1, numx * numy - numy + 1) = "A + B/2 + C/2 + D + E + F + G"
```

```
i = numx; j = numy
```

```
mat(numx * numy, numx * numy) = (alfa(i, j) + del(i, j)) + (-alfa(i, j) - del(i, j)) / 2 + _
(gama(i, j) + lam(i, j)) + (-gama(i, j) - lam(i, j)) / 2 + beta(i, j) + _
w(i, j) + (-1 - 2 * beta(i, j) - 2 * w(i, j))
```

```
comp(numx * numy, numx * numy) = "A + B/2 + C + D/2 + E + F + G"
```

```
***** TERMINOS DE B/2+E
```

```
nk = 1: n = numy + 1
```

```
For i = 1 To numx
```

```
For j = 1 To numy 'se modifico el valor inicial de j=1
```

```
mat(n, nk) = (-alfa(i, j) - del(i, j)) / 2 + beta(i, j)
```

```
comp(n, nk) = "B/2 + E"
```

```
nk = nk + 1: n = n + 1
```

```
If n > numx * numy Then Exit For
```

```
Next j
```

```
Next i
```

```
***** TERMINOS DE D/2+F
```

```
nk = 1: n = 2
```

```
For i = 1 To numx
```

```
For j = 1 To numy
```

```
mat(n, nk) = (-gama(i, j) - lam(i, j)) / 2 + w(i, j)
```

```
comp(n, nk) = "D/2 + F"
```

```
nk = nk + 1: n = n + 1
```

```
Next j
```

```
Next i
```

```
nk = numy
```

```
For n = numy + 1 To numx * numy Step numy
```

```
mat(n, nk) = 0
```

```
comp(n, nk) = "0"
```

```
nk = nk + numy
```

```
Next n
```

```
***** TERMINOS DE C/2+F
```

```
nk = 1: n = 2
```

```
For i = 1 To numx
```

```
For j = 1 To numy
```

```
mat(nk, n) = (gama(i, j) + lam(i, j)) / 2 + w(i, j)
```

```
comp(nk, n) = "C/2 + F"
```

```
nk = nk + 1: n = n + 1
```

```
Next j
```

```
Next i
```

```
nk = numx
```

```
For n = numy + 1 To numx * numy Step numx
```

```
mat(nk, n) = 0
```

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

```

comp(nk, n) = "0"
nk = nk + numx
Next n

***** TERMINOS DE A/2+E
nk = 1: n = numy + 1
For i = 1 To numx
  For j = 1 To numy ' se modificó el valor inicial de j=1
    mat(nk, n) = (alfa(i, j) + del(i, j)) / 2 + beta(i, j)
    comp(nk, n) = "A/2 + E"
    nk = nk + 1: n = n + 1
    If n > numx * numy Then Exit For
  Next j
Next i

For i = 1 To numx * numy
  For j = 1 To numx * numy
    mat(i, j) = -mat(i, j)
  Next j
Next i

n = numx * numy
Call bandec(mat, n, b)

vari = 1
For i = 1 To numx
  For j = 1 To numy
    Pozo(i, j, cont) = b(vari)
    vari = vari + 1
  Next j
Next i
cont = cont + 1
tiempo = tiempo + dt

Loop Until (tiempo > TiempoT)

'-----Escritura en el archivo de salida "Archivo"
Print #500, "Celda del Pozo: (" + Str(xw) + "," + Str(yw) + ")"
Print #500, ""
Print #500, "Tiempo(Días)", . "Presión(Psia)"
For i = 1 To CuentaPasos
  Print #500, Str(IncTiempos(i)), . Str(Pozo(xw, yw, i))
Next i

Close #500

Archivo = "C:\Di" & Str(Di) & "Teta" & Str(teta) & Str(tiempo) & ".txt"

```

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Open Archivo For Output As #36

cont = 1

For tiempo = dt To TiempoT Step dt

Print #36, "Tiempo=" & Str(tiempo) & " Días"

For i = 1 To numx

For j = 1 To numy

Print #36, Format\$(Pozo(i, j, cont), "####0.000000"),

Next j

Print #36, ""

Next i

Print #36, ""

cont = cont + 1

Next tiempo

Close #36

teta = teta + 0.2

Loop Until (teta > 0.5)

Di = Di - 0.2

Loop Until (Di < 1.4)

'-----Escritura en el grid

Form3.Grd1.Cols = numy + 1

Form3.Grd1.Rows = numx + 1

cont = 1

For i = 1 To numx

For j = 1 To numy

Form3.Grd1.TextMatrix(0, j) = "j=" & j

Form3.Grd1.TextMatrix(i, 0) = "i=" & i

Form3.Grd1.TextMatrix(i, j) = Format\$(Pozo(i, j, TiempoT), "####0.000000")

cont = cont + 1

Next j

Next i

cont = 1

Open "C:\Valoresphi.txt" For Output As #35

Open "C:\Valoreskf.txt" For Output As #352

For i = 1 To numx

For j = 1 To numy

Print #35, phi(cont)

Print #352, kfi(cont) * 1000

cont = cont + 1

Next j

Next i

Close #35

Close #352

Open "c:\Resultpozo.txt" For Output As #36

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

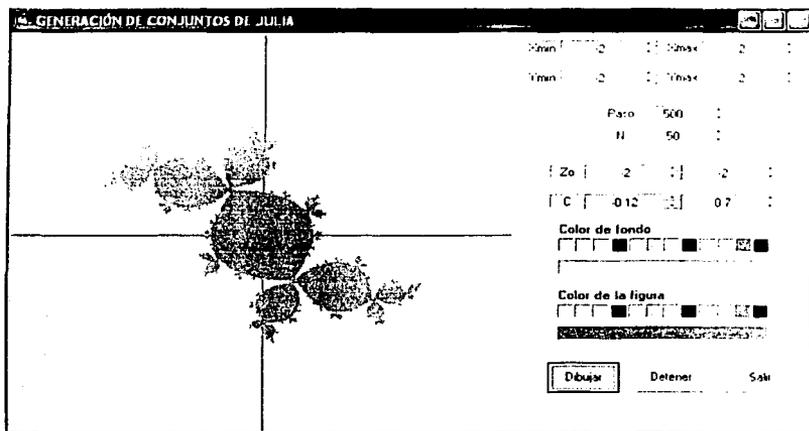
```
vari = 1: cont = 1
For tiempo = dt To TiempoT Step dt
  Print #36, "Tiempo=" & Str(tiempo) & "Días"
  For i = 1 To numx
    For j = 1 To numy
      If i = 6 And j = 6 Then
        Print #36, " ";
        Print #36, i & ", " & j & ", " & cont & ", ";
        Print #36, tiempo & ", ";
        Print #36, Pozo(i, j, vari)
      End If
    Next j
  Next i
  cont = cont + 1
  vari = vari + 1
Next tiempo
Close #36
MousePointer = 0

Close #200
End Sub
```

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

APÉNDICE C.

PROGRAMA DE CÓMPUTO PARA GENERAR CONJUNTOS DE JULIA.



El código generado es el siguiente:

```
Option Explicit
```

```
Dim Detener As Boolean
```

```
Private Sub Command1_Click()
```

```
Dim Xmin#, Xmax#, Ymin#, Ymax#
```

```
Dim i#, j#, k#, Paso%, N%, Delta#
```

```
Dim a#, ao#, an#, b#, bo#, RR#, Ci#, Cr#
```

```
Dim Xx#, Yy#, cuenta&
```

```
MousePointer = 11
```

```
Xmin = Val(TxtXmin.Text)
```

```
Xmax = Val(TxtXmax.Text)
```

```
Ymin = Val(TxtYmin.Text)
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Ymax = Val(TxtYmax.Text)

Paso = Val(TxtPaso.Text)

N = Val(TxtN.Text)

Delta = 4 / Paso

ao = Val(Txtao.Text)

bo = Val(Txtbo.Text)

Cr = Val(TxtCr.Text)

Ci = Val(TxtCi.Text)

PicLienzo.ScaleLeft = Xmin

PicLienzo.ScaleTop = Ymax

PicLienzo.ScaleWidth = Xmax - Xmin

PicLienzo.ScaleHeight = -(Ymax - Ymin)

PicLienzo.Refresh

PicLienzo.Line (Xmin, 0)-(Xmax, 0), vbBlue

PicLienzo.Line (0, Ymin)-(0, Ymax), vbBlue

cuenta = 0

For j = 1 To Paso

 For k = 1 To Paso

 a = ao + j * Delta

 b = bo + k * Delta

 i = 0: RR = 0

 While i < N And RR < 4

 an = (a * a) - (b * b) + Cr

 b = (2 * a * b) + Ci

 a = an

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```
RR = a * a + b * b
i = i + 1
Wend

If i < N Then GoTo 10
cuenta = cuenta + 1
Form1.Caption = Str(cuenta)
PicLienzo.ForeColor = LbIFrac.BackColor
Xx = ao + j * Delta ' + PicLienzo.ScaleLeft
Yy = bo + k * Delta ' + PicLienzo.ScaleHeight
PicLienzo.PSet (Xx, Yy)
10: Next k
If Detener = True Then Exit For
Next j
'PicLienzo.Circle (1, 1), 1000, vbBlue
'PicLienzo.Paint
MousePointer = 0
Form1.Caption = "GENERACIÓN DE CONJUNTOS DE JULIA"
Detener = False
End Sub
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

APÉNDICE D. GLOSARIO

Geometría fractal	<p>La geometría fractal provee una descripción y una forma de modelo matemático para las aparentemente complicadas formas de la naturaleza. Surge aproximadamente en 1890 por el francés Henri Poincaré, quien comenzó con el estudio de fractales aunque sus ideas fueron extendidas más tarde fundamentalmente por dos matemáticos también franceses, Gastón Julia y Pierre Fatou, hacia 1918. Su nombre lo obtiene de quien se conoce como el padre de la Geometría fractal, el matemático francés Benoit Mandelbrot en la década de los 70's.</p>
Fractal	<p>Se llama fractal al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala (autosimilitud), por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional.</p>
Dimensión fractal	<p>También se conoce como dimensión de Hausdorff, expresa la dimensión del objeto fractal y se caracteriza por ser fraccional, a diferencia de la dimensión de los objetos euclidianos que siempre es entera.</p> <p>La dimensión fraccionaria fractal mide el grado de escabrosidad y/o discontinuidad de un objeto presentando un grado de irregularidad constante a diferentes escalas. Al final resulta una irregularidad regular.</p> <p>El grado de irregularidad de un objeto no es otra cosa que su eficacia para ocupar espacio.</p>

Índice de conductividad	<p>Define en un yacimiento fractal que tan conectadas están las fracturas, puede tomar valores de 0 a 1, donde 0 representa un medio con todas las fracturas conectadas.</p> <p>Es un parámetro que caracteriza las propiedades de transporte dinámicas del objeto fractal</p>
Fractales estocásticos	<p>Los fractales estocásticos se logran cuando las transformaciones afines para cada iteración son elegidas por algún método aleatorio, entre más aleatoriedad se logre en el método más cercana será la aproximación a la realidad.</p>
Atractor	<p>Es el número al que tiende una ecuación después de un número muy grande de iteraciones; en donde se parte de un valor inicial y se sustituye el resultado de la iteración "n" en la iteración "n+1".</p>
Caminante aleatorio	<p>Este concepto es aplicable a eventos donde se toman decisiones con base al azar, tal y como querer definir el camino que tomaría una hormiga dentro de un laberinto.</p>
Puntos fijos	<p>Ocurre cuando el resultado de una ecuación siempre es el mismo sin importar el número de iteraciones que se realicen.</p>
Puntos prisioneros	<p>Son los puntos cuya iteración NO escapa a infinito. Los conjuntos de Julia se componen de puntos prisioneros en el interior.</p>
Puntos escapistas	<p>Son los puntos cuya iteración escapa a infinito.</p>
Transformaciones de afinidad	<p>Son transformaciones de similitud, es decir, al aplicarlas a un conjunto de puntos la figura resultante es similar a la figura original.</p>

IFS	(Iterated Function System). Surge de la técnica de Barnsley que consiste en elegir un conjunto inicial arbitrario de datos que puede estar constituido de uno o varios puntos, líneas u objetos geométricos complejos, y a partir de él aplicar reiteradamente las transformaciones de afinidad en un orden seleccionado al azar. Como las transformaciones afines se repiten iteradamente se converge hacia el atractor de los datos el cual es fractal. El resultado será la figura fractal correspondiente al conjunto de transformaciones planteadas.
Método de la caja	Consiste en tomar la estructura de interés y colocarla dentro una caja de lado L sobre la que se construye una red regular formada por segmentos más pequeños de longitud l , se cuenta el número N de cajas que contienen alguna parte de la estructura. El procedimiento se repite utilizando redes cada vez más finas.
Yacimiento fractal	Chang y Yortsos llaman así al yacimiento que se define por un medio de fracturas con características fractales embebido en una matriz euclidiana.
Caminante ciego	También se conoce como <i>hormiga ciega</i> , se define como lo que pasaría al soltar en un laberinto una hormiga ciega, cada vez que pretenda moverse de su lugar considerará que tiene cuatro posibles caminos lo que en ocasiones la puede llevar a permanecer en el mismo lugar si topa con pared.
Caminante miope	Al contrario del caminante ciego, si se suelta una <i>hormiga miope</i> o un <i>caminante miope</i> , se tendrá movimiento a cada paso debido a que la hormiga es consciente de los posibles caminos por los que se puede mover. Esto aumenta el tiempo de avance del caminante aleatorio.

Apéndice D. Glosario

Método de enumeración exacta	Este método consiste en plantear que la probabilidad de encontrar a un caminante aleatorio en un lugar j a un tiempo t es determinada por la probabilidad de que se encuentre en alguno de sus vecinos más cercanos a un tiempo $t-1$.
Autómatas celulares	Han sido utilizados como una forma de describir procesos naturales en donde es posible establecer ciertas reglas, como por ejemplo para establecer la supervivencia de organismos dentro de una sociedad.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

1. Mandelbrot, Benoit. "La geometría fractal de la naturaleza". 1984.
2. Barnsley, M.F., "Fractals Everywhere". Academic Press. Boston, 1988.
3. Turcotte, D. L., "Fractals and Fragmentation". Journal of Geophysical Research, 91(B2) 1921, 1986
4. Chang, Jincai y Yanis C. Yotsos. "Pressure-Transient Análisis of Fractal Reservoirs". SPE. Marzo 1990.
5. Acuña, Jorge Arturo. "Numerical Construction and Fluid Flow Simulation in Networks of Fractures using Fractal Geometry". University of Southern California. Diciembre 1993.
6. Majid Imitiaz, Daniel Ben-Avraham, Shlomo Havlin and H. Eugene Stanley. "Exact-enumeration approach to random walks percolation clusters in two dimensions". The American Physical Society. Agosto 1984.
7. Braun, Eliezer. "Un movimiento en zig-zag". Fondo de cultura económica. 1986
8. Talanquer Vicente. "Fractus, Fracta, Fractal; Fractales de laberintos y espejos". Fondo de cultura económica. 1996
9. Olarewaju, Joseph. "Modeling Fractured Reservoirs with Stochastic Fractals". SPE 36207. 1996
10. Camacho Velázquez, R. y F. Flamenco López. "Fractal transient pressure behavior of naturally fractured reservoirs". SPE 71591. 2001

11. Camacho Velázquez, R. y F. Flamenco López. "Determination of fractal parameters of fracture networks using Pressure-Transient data". SPE 82607. 2003
12. Hardy, H. H. and Beier, Richard A. "Fractals in Reservoir Engineering". World Scientific. 1994