00861

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ECONOMIÁ
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

EL MODELO DE DETERMINACIÓN DEL PRECIO DE LOS ACTIVOS DE CAPITAL (CAPM) PARA EL MERCADO DE CETES DE MEXICO

TESIS DE MAESTRIA

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :
MAESTRO EN ECONOMÍA

PRESENTA:

JOSEFA CAROLINA FORTUNO HERNÁNDEZ

ASESOR: DR. LUIS MIGUEL GALINDO PALIZA

CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO. NOVIEMBRE DE 2003

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JOSEFA CAROLINA FORTUNO HERNANDEZ
NOVIEMBRE 17, 2003
P.A.
IGNACIO PERROTINI HDZ.

ÍNDICE

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la economía capitalista moderna ha colocado en el centro de su funcionamiento al sistema financiero. La mayor complejización de éste, incluida la aparición y creación de nuevos productos financieros, así como de instituciones de intermediación del ahorro y la inversión que colocan títulos públicos y privados, bonos y papel comercial de empresas y gobiernos, comercian con divisas y futuros, evoluciona en paralelo con el progreso tecnológico y la producción en general.

Como consecuencia de ello, desde el origen de la ciencia económica el problema de la determinación de las variables financieras, del precio de los activos y de los rendimientos y riesgos asociados a la operación cotidiana de los mercados de capital, ha sido objeto de estudio de las más variadas escuelas de pensamiento económico. El desarrollo de la teoría económica de las finanzas ha llegado incluso a constituirse como uno de los campos más amplios y complejos del análisis económico. Particularmente, la economía financiera viene experimentando un extraordinario avance desde la introducción de los métodos matemáticos al análisis económico. Adicionalmente, las técnicas econométricas, a su vez, han visto un desarrollo exponencial. Lo que ha contribuido a la elaboración y evolución de modelos económicos cada vez más complejos. Así, actualmente es posible construir modelos financieros que miden el comportamiento esperado de las variables económicas y financieras. Uno de los modelos más usados es el llamado Modelo de Precio del Activo de Capital (*Capital Asset Pricing Model*) (CAPM), objeto de esta tesis.

El presente trabajo discute las principales hipótesis y conclusiones del CAPM, así como algunas de sus versiones o variantes más importantes. De las conclusiones más contundentes del CAPM nos interesa destacar las siguientes: 1) la que afirma que el portafolio eficiente del mercado implica una relación lineal entre riesgo y rendimiento y 2) la que explica que el portafolio eficiente es aquel que presenta máximos rendimientos con una varianza mínima. Además de analizar y discutir las proposiciones anteriores, en este trabajo se analiza el modo en el cual el CAPM predice los rendimientos de los activos en el tiempo. El propósito central de nuestro estudio es mostrar que la derivación y análisis del CAPM debe basarse en los fundamentos microeconómicos esenciales de la toma de decisiones de los inversionistas en los mercados financieros. En consecuencia, es necesario introducir los ajustes econométricos pertinentes a fin de obtener una expresión mas adecuada de este modelo (Cuthbertson, 1996).

La organización y presentación del material es como sigue: el capítulo I contiene una revisión de algunos de los fundamentos conceptuales más importantes para analizar el CAPM. En el capítulo II se hace una exposición del CAPM y se plantean ciertos problemas o dificultades teóricas del mismo. En el capítulo III, se desarrolla el análisis econométrico del CAPM con pruebas de máxima verosimilitud.

CAPITULO I

FUNDAMENTOS CONCEPTUALES PARA EL ANÁLISIS DEL MODELO DE DETERMINACION DEL PRECIO DEL ACTIVO DE CAPITAL

Los mercados financieros, como los de bonos o la bolsa de valores, son mercados donde se transfieren fondos entre ahorradores e inversionistas. El resultado de su funcionamiento estable es una mayor eficiencia económica y un bienestar económico superior.

La importancia de los mercados financieros para la actividad económica es un hecho innegable, pues permite a individuos, corporaciones y gobiernos obtener recursos para financiar el consumo y la inversión.

La liberalización y desregulación de las actividades y sistemas financieros en décadas recientes ha desencadenado una extraordinaria variedad de instrumentos e instituciones financieras nuevas. Junto a la mayor volatilidad que algunos de estos nuevos instrumentos (*swaps*, opciones, *warrants* y otros productos derivados) representan, y la volatilidad ligada en parte a las reformas mencionadas, se ha dado también una mayor complejidad de la operación de los mercados financieros. Consecuentemente, el bagaje conceptual de esta rama de la economía, cuyo auge sólo tiene paralelo con el que experimentan también las finanzas internacionales, tiende a complejizarse.

En razón de lo anterior, el estudio de las finanzas modernas requiere de un lenguaje técnico y especializado que exprese con rigor los supuestos, hipótesis y resultados del modelo utilizado para explicar los hechos estilizados del comportamiento del mundo financiero. El presente capítulo tiene como propósito esclarecer los conceptos y categorías principales que explícita o implícitamente utilizaremos en nuestro análisis del Modelo de Precios de Activos de Capital, mejor conocido en la literatura como *Capital Asset Pricing Model* (CAPM).

Incertidumbre, Riesgo y Expectativas

La incertidumbre es un elemento característico de los mercados financieros. La volatilidad del precio de las acciones o activos tiene como base el principio de la incertidumbre. Debido a la incertidumbre no se puede establecer con precisión el precio que refleje el verdadero valor de un activo o el número índice que refleje el verdadero valor del portafolio del mercado.

El análisis de las decisiones de inversión generalmente toma en cuenta la naturaleza de la incertidumbre, los límites de la información disponible públicamente, así como el contexto institucional en que se formulan las expectativas de los agentes financieros. Dados los límites de este conocimiento, como dice Keynes (1971-1989, vol. XIV, p.114), "la psicología de la sociedad" puede dar lugar a "juicios convencionales" cuyo contenido es una evaluación no necesariamente correcta de la situación del mercado y de la inversión en activos específicos.

Desde el punto de vista del CAPM, nuestro objeto de estudio, la cuestión es saber si podemos pronosticar el rendimiento futuro de un activo o portafolio. Al respecto, en términos generales existen al menos dos puntos de vista en la teoría económica financiera. En primer lugar, el enfoque de incertidumbre formulado por Keynes. En segundo, la hipótesis de mercados eficientes (en lo sucesivo se cita por sus siglas en inglés, EMH) que se discute más adelante.

Keynes, al distinguir entre incertidumbre y riesgo sostiene en sus escritos sobre el mercado de valores que es imposible pronosticar la tasa de retorno futura de un portafolio:

> "El hecho relevante es la extrema precariedad de la base de conocimiento sobre la cual se tienen que hacer nuestras estimaciones de rendimientos futuros" (Keynes, 1971-1989, vol. VII, pp.149-50)

En oposición a la teoría clásica de las finanzas, la cual pone énfasis en el riesgo, Keynes postulaba que la incertidumbre no podía reducirse o eliminarse mediante el cálculo de la probabilidad[1]. Para Keynes incertidumbre no significa riesgo. Poco después de publicar la *Teoría General*, en el artículo del *Quarterly Journal of Economics* de 1937, Keynes explicó que la incertidumbre se asocia con la ausencia de conocimiento probabilístico:

> "Por conocimiento incierto no deseo meramente distinguir lo que se conoce respecto de lo que sólo es probable. El juego de la ruleta no está sujeto a incertidumbre en este sentido [...] El sentido en el cual uso el término [incertidumbre] es aquel en el que la expectativa de una

[1] El énfasis de Keynes (1936) en el papel de la incertidumbre hace pensar a Shackle (1967) que la incertidumdre es el elemento central de la *Teoría General*.

guerra europea es incierta, o el precio del cobre y la tasa de interés de aquí a veinte años, o la obsolescencia de una nueva invención o la posición de los propietarios de riqueza privada en el sistema social en 1970. Acerca de estos asuntos no existe base científica sobre la cual formar un cálculo de probabilidad cualquiera. Simplemente no sabemos" (Keynes, 1971-1989, vol. XIV, pp.113-114).

Aunque los supuestos convencionales de la conducta de los inversionistas -es decir, que los precios y la composición del producto interno bruto se basan en una apreciación correcta del futuro y que la psicología social determina que los agentes tomen decisiones copiando la conducta de los demás- pueden propiciar un nivel adecuado de estabilidad, la causa del carácter fundamentalmente inestable de la inversión consiste en que esos supuestos se hacen en un contexto de incertidumbre. De acuerdo con Keynes, esta fragilidad de los mercados financieros tampoco puede superarse mediante la competencia o la especulación, como sostiene Milton Friedman, o mediante la disponibilidad de información completa, como sostiene la escuela de expectativas racionales. La especulación aspira a pronosticar la psicología del mercado, no se ocupa de la dinámica de los precios de los activos en el largo plazo, mientras que la hipótesis de racionalidad sustantiva predominante en la teoría financiera moderna desconoce los límites a la racionalidad económica impuestos por la incertidumbre.

Keynes concibe que entre incertidumbre e inestabilidad en los mercados financieros existe una relación dual: la incertidumbre genera inestabilidad de precios de los activos porque complica la estimación del valor real de las acciones y los títulos financieros, mientras que la volatilidad de los precios estimula la incertidumbre acerca de la evolución de los precios actuales en el futuro. De ahí que Keynes sugiriera la necesidad de regular el mercado de valores en beneficio de la sociedad. Esta regulación adoptaría diversas formas, por ejemplo, la introducción de gravámenes fiscales a las transacciones bursátiles; o, más radicalmente, la aprobación de políticas financieras que hicieran que las inversiones en valores bursátiles fueran permanentes e irreversibles.

Es probable que éstas y otras medidas de política macroeconómica no menos ingeniosas podrían propiciar una mayor estabilidad de las bolsas de valores, particularmente en periodos de alta volatilidad cambiaria y financiera como el actual. No obstante, independientemente de su efectividad en el corto plazo, su introducción no resolvería necesariamente el conflicto entre liquidez, estabilidad y riesgo en los mercados de capital: si bien la liquidez asociada con el mercado de valores puede propiciar inestabilidad y fragilidad financiera, bajo ciertas circunstancias, también puede estimular la inversión en la medida en que invita a los agentes a tomar mayores riesgos a cambio de mayores rendimientos, dada la correlación entre riesgo y rendimiento esperado analizada por el CAPM.

El riesgo puede definirse como la desviación de un suceso respecto de un valor esperado, en este caso la tasa de rendimiento esperada del activo. Una vez se identifica la presencia de riesgo en una inversión, puede determinarse la prima correspondiente que lo compensa. Para evaluar el riesgo se requiere traducir a valor presente el futuro incierto, lo cual requiere de la selección de una tasa de descuento apropiada.

El análisis financiero distingue dos tipos de riesgo, el sistemático y el no sistemático[2] La teoría también tiene como propósito predecir los movimientos futuros de los precios de los activos. En ello consiste en gran parte la determinación del valor de las betas[3] en los modelos financieros, dado que existe una relación directamente proporcional entre el valor de beta y el riesgo. El conocimiento del valor de beta permite delimitar el riesgo que confronta el inversionista y establecer qué parte de éste puede eliminarse mediante un portafolio óptimamente diversificado. Evidentemente, las eventuales variaciones en el tipo de cambio, la tasa de inflación, el crecimiento económico o en los precios de las materias primas estratégicas (petróleo), variables todas influidas por la incertidumbre, pueden alterar el riesgo de un activo o portafolio en un período determinado.

En una economía donde los agentes confrontan riesgo e incertidumbre, es necesario formular expectativas sistemáticamente acerca del futuro. Las expectativas de corto y largo plazo influyen en las decisiones de inversión. Según Keynes, son las expectativas

---

[2] El riesgo sistemático surge por las condiciones particulares del mercado y la relación que guarda este con los fundamentos de la economía. Por lo tanto, no se puede eliminar por el expediente de diversificación del portafolio. En todo caso, los agentes financieros participantes en el mercado procurarán mantener portafolios cuyos precios exhiban una varianza mínima. Es decir, los inversionistas tratarán de componer sus portafolios siguiendo el criterio de distribución normal del riesgo. El riesgo no sistemático es el riesgo específico del activo y que los agentes eliminan mediante la diversificación del riesgo del portafolio.

[3] En el modelo representa un parámetro que sirve para medir la sensibilidad de los activos financieros

de largo plazo, asociadas con el rendimiento esperado derivado de la producción con la utilización de un nuevo equipo de capital, las que determinan la inversión neta y sus fluctuaciones en el ciclo económico.

Por otra parte, el enfoque de equilibrio de expectativas racionales sugiere que el precio de los activos puede generar información adicional relevante. La teoría de los precios de la hipótesis de expectativas racionales (Lucas,1972,1973; Sargent, 1972, 1978, 1979; Wallace, 1980) contrasta con la concepción neoclásica en que ésta asigna a los precios la función dual de establecer la restricción presupuestaria del consumidor y las oportunidades de ganancia o beneficio de los productores. En cambio, Lucas(1972, 1973) y otros autores de su misma tradición, consideran que los precios constituyen la principal fuente de información (Sargent 1972, Wallace, 1980). Por ello, existe una estrecha relación entre expectativas y precios.

El papel de las expectativas en los mercados financieros se revela particularmente relevante porque es en éstos donde el riesgo y la incertidumbre ejercen su influencia más vigorosa. En el caso específico del CAPM, se supone que prevalecen expectativas homogéneas en el mercado. Aunque existen versiones de este modelo incorporando expectativas adaptativas o, alternativamente, expectativas racionales (Breeden, 1979; Chand Bhandari, 1988; Fama, 1970; 1976, 1984).

Fundamentos e Hipótesis de Mercados Eficientes

Debido a que las transacciones de los activos comerciales son casi continuas y tienen un costo bajo, estos mercados se parecen a lo que indica la teoría respecto del continuo equilibrio en los mercados en donde los precios inmediatamente responden a cualquier desequilibrio entre oferta y demanda.

De acuerdo a la acepción más aceptada, los fundamentos consisten en "los parámetros básicos que definen a una economía - tales como las dotaciones, preferencias y las posibilidades de producción" (Cass y Shell, 1983).

El valor fundamental de un activo es el valor presente de sus rendimientos futuros esperados. La determinación de este valor fundamental de un activo que un inversionista decide mantener por un periodo de tiempo largo, depende de los siguientes tres factores: 1)la estimación del ingreso que el activo generará durante todo el tiempo hasta su maduración o venta; 2)la estimación del valor final que el activo tendrá al concluir el periodo y 3)la tasa de descuento utilizada en el cálculo o conversión de los rendimientos futuros a valor presente.

La teoría dice que los precios de los activos fluctúan alrededor de los valores fundamentales o intrínsecos (Basu, 1977; Fama, 1970; 1976; Lo y Mackinlay, 1988). Si se combina la EMH con el análisis de los fundamentos, se supondrá entonces que los inversionistas en la bolsa de valores pueden pronosticar los rendimientos mediante la estimación de la distribución de probabilidad de las ganancias y dividendos de las acciones para un periodo dado. En este enfoque, los precios de los activos en el mercado reflejan los fundamentos de la economía -lo que valen las acciones verdaderamente-, en tanto que las fluctuaciones en los precios de las acciones se atribuyen a la nueva información disponible públicamente.

La vinculación del modelo fundamental con la hipótesis del CAPM, da como resultado la identificación del CAPM con la validez empírica de un modelo específico de equilibrio en los mercados financieros. De aquí a la EMH media sólo un paso. En efecto, Samuelson (1965) y Fama(1970), entre otros afirman que en los mercados eficientes los precios de los activos en rigor se ajustan a los valores fundamentales: dado que los precios fluctúan estocásticamente alrededor de una media constante, se caracterizan porque siguen un proceso conocido como martingale[4].

Sin embargo, persiste un problema empírico: la prueba econométrica directa de la teoría de que los precios reflejan los valores fundamentales no puede realizarse en realidad. Esto se debe a que no es posible medir los parámetros básicos del modelo fundamental; no se conoce el valor de los rendimientos futuros debido a la presencia de incertidumbre en el mercado de valores. La

[4] Se dice que el precio de un activo se determina con base en un proceso Martingale si varía estocásticamente alrededor de una media constante en el tiempo y si en promedio permanece estable (Judge et al., 1985). El proceso Martingale, que se ha considerado durante mucho tiempo como una condición necesaria de la EMH, es un proceso estocástico (P_t) que cumple la condición siguiente: $E[P_{t+1} | P_t , P_{t-1}, \ldots] = P_t$. Pero es necesario aclarar que el modelo Martingale no toma en cuenta el riesgo, mientras que el CAPM y otros modelos de la teoría financiera moderna centran su análisis en la relación riesgo-rendimiento esperado. Así que el CAPM puede expresarse como un proceso Martingale sólo una vez que se han ajustado los rendimientos esperados con respecto al riesgo.

alternativa es emplear parámetros sustitutos de los valores fundamentales.

Es interesante anotar que al tratar de "los valores intrínsecos", Keynes había registrado ya "la imposibilidad" de determinar el valor de algunos activos, además de que señaló la influencia de factores exógenos (el espíritu animal del capital, la psicología del mercado) en los precios de los activos (Keynes, 1971-1989, vol. XII).

La hipótesis de mercados eficientes es la teoría del equilibrio competitivo aplicada al caso de los mercados de activos. En la literatura de las finanzas modernas su elaboración pionera se debe a Samuelson (1965) (véase Lo, 1996). Samuelson propone un modelo (de equilibrio) martingale de determinación del precio de los activos consistente con los llamados fundamentos de la economía (preferencias, dotaciones y posibilidades de producción): el precio de los activos es igual a su valor fundamental.

La EMH postula que un mercado de capitales es eficiente si y sólo si emplea toda la información relevante para determinar los precios de los activos. Por tanto, si estos precios reflejan las expectativas y la información de todos los inversionistas en el mercado financiero, entonces las variaciones en los precios de los activos no serán pronosticables (Fama, 1970). En consonancia con lo anterior, podemos definir un "portafolio eficiente". Se llama Portafolio o cartera al conjunto de acciones que mantiene y administra un inversionista. Un portafolio puede estar conformado por varios conjuntos de acciones, que a su vez forman subcarteras. Para que un Portafolio sea eficiente, es necesario que la desviación estándar de los rendimientos esperados de los activos que lo integran sea mínima; además que sus rendimientos esperados sean máximos ante un nivel de riesgo dado.

La EMH está relacionada con el tipo de información disponible en los mercados financieros, de tal suerte que la *eficiencia* es con respecto a un conjunto *específico* de información. La cuestión es saber si la publicación de ese conjunto de información altera los precios de los activos y si, además, induce a la realización de rendimientos extraordinarios, superiores a los normales, una vez que se han ajustado por el riesgo. Como señala Malkiel (1992), definida de este modo, la eficiencia implica inmediatamente la imposibilidad de obtener beneficios económicos extraordinarios al realizar transacciones financieras a partir del conjunto de información referido: no bien se revela la información, los precios se ajustarán inmediatamente a su valor fundamental, con lo que desaparecerán los incentivos para realizar ganancias de capital extraordinarias o anormales. Si al poner de manifiesto un conjunto de información relevante, la variación en los precios es nula ($dP/dt=0$) y si, después del arbitraje y el ajuste por riesgo, las ganancias extraordinarias derivadas de comerciar con un activo o portafolio de activos a partir del conjunto específico de información revelada son igual a cero, entonces se cumple la EMH con respecto a ese conjunto de información para ese activo o portafolio específicos.

Lo anterior implica que la EMH es susceptible de verificación y medición empírica, tanto como el efecto inducido -por la revelación de la información- en las expectativas de los agentes financieros y en los precios de los activos. Este es uno de los puntos problemáticos de la EMH, porque el conjunto de información relevante no es un dato observable (Fama, 1970,1991). Además, para saber si la EMH se rechaza o acepta, es necesario especificar una tasa de ganancia *anormal* con respecto a la cual se identificarán empíricamente los rendimientos normales. Según la EMH, sólo en el supuesto caso de información heterogénea o diferenciada, incompleta o asimétrica -es decir, información que no se refleja completamente en los precios-, podrá tener lugar la materialización de ganancias de capital anormales.

En este sentido, Fama (1970; 1991) establece tres versiones de la EMH. La *Hipótesis de Eficiencia Fuerte*: el conjunto de información empleado en la determinación del precio contiene toda la información relevante, pública y privada, para determinar el precio del activo; segundo, en la *Hipótesis de Eficiencia Semi-Fuerte* el mercado sólo utiliza la información públicamente disponible; finalmente, la *Hipótesis de Eficiencia Débil* incluye sólo la historia pasada y presente de los precios y/o los rendimientos del activo.

La EMH es un enfoque de equilibrio de la determinación del precio de los activos en los mercados financieros. Sin embargo, alternativamente otros enfoques (Keynes, 1971-1989, vols. VII y XIV) sugieren que el establecimiento de los precios en el mercado de valores es un proceso dinámico que típicamente ocurre en un contexto de incertidumbre. Por lo tanto, no es pertinente basar el análisis en el supuesto de eficiencia perfecta. En atención a esta observación, en el presente trabajo no se da por supuesto que la EMH se cumpla cabalmente. Por otra parte, tampoco se plantea ni supone que la medición de la eficiencia en el sentido de la EMH sea un objetivo de los enfoques econométricos del CAPM que se revisan más adelante. Más bien, se concibe que el CAPM es un modelo que incorpora la verificación de la hipótesis conjunta de eficiencia de mercado y equilibrio de mercado mediante métodos econométricos diversos (Cuthbertson, 1996; Lo, 1996).

CAPITULO II

EL MODELO DE DETERMINACION DEL PRECIO DEL ACTIVO DE CAPITAL

Una de las principales características de los mercados financieros es que en la toma de decisiones de ahorro e inversión los agentes ineludiblemente corren un *riesgo*. Aunque la premisa básica de los modelos financieros es que los inversionistas tienen aversión al riesgo. Para superar esta condición ellos pueden escoger, dentro de una amplia gama, activos libre de riesgo que reportan rendimientos inferiores o activos con riesgo alto que reportan altos rendimientos.

La evaluación del riesgo requiere de una compensación o prima que persuada a un individuo a mantener un portafolio. Como se dice en el argot de las finanzas, en los mercados financieros no existe "free lunch".

La importancia del Modelo de Determinación del Precio del Activo de Capital (*Capital Asset Pricing Model*, CAPM) radica en que fija la magnitud de la prima que un activo debe tener en relación con el riesgo en que se incurre por mantenerlo. Uno de los problemas más relevantes de la economía financiera moderna es valorar la relación entre riesgo y rendimiento esperado. A pesar de que el mercado de valores tiene una larga historia institucional, fue sólo con el desarrollo del CAPM que los economistas pudieron disponer de un procedimiento para medir el riesgo y con ello determinar la recompensa óptima que induce a aceptarlo.

El origen de lo que hoy conocemos como el CAPM está en el trabajo de Harry Markowitz (1959). El desarrollo ulterior del CAPM se debe a John Lintner (1965)y William Sharpe (1964).

Markowitz analizó la correlación exacta entre el rendimiento de los activos y la reducción del riesgo. Él estaba interesado fundamentalmente en establecer los principios básicos para la formación de un portafolio en términos del rendimiento esperado y la varianza del rendimiento. Con su investigación sentó las primeras bases del análisis financiero para el estudio de la relación entre riesgo y rendimiento; también determinó las premisas necesarias para la conformación de un portafolio. Además, planteó que un conjunto de activos es susceptible de múltiples combinaciones y puede así formarse un número infinito de subconjuntos de portafolios con sólo variar el peso o ponderación de los riesgos asignados a cada uno de los diferentes activos. Según Markowitz (1959) los inversionistas optimizan al mantener un "portafolio eficiente de varianza media", el cual define como el portafolio que ostenta la tasa de retorno máxima esperada para un nivel dado de varianza. Como señala Cuthbertson (1996, p.24), el CAPM es "(...)un modelo elegante de los determinantes del rendimiento esperado de equilibrio ER_i de cualquier activo *individual* de riesgo en el mercado. Pronostica que el rendimiento excedente esperado de cualquier activo individual de riesgo (ER_i- r) está relacionado directamente con el rendimiento excedente esperado del portafolio del mercado (ER^m-r), con la constante de proporcionalidad dada por la *beta* del activo individual de riesgo"

En este capítulo se expone detalladamente el CAPM con sus supuestos, hipótesis y conclusiones; se explican las características de un portafolio eficiente y la determinación de la frontera eficiente de un portafolio.

La Determinación del Precio de los Activos

Por conveniencia analítica y para simplificar, en nuestro estudio del CAPM establecemos los siguientes supuestos: 1)el mercado de activos se caracteriza por la libre competencia entre un número significativo de agentes financieros bien informados; 2)los agentes actúan racionalmente, tienen aversión al riesgo y maximizan el rendimiento de sus inversiones; 3)los mercados se encuentran adecuadamente desregulados y operan en condiciones de liberalización financiera; 4) los rendimientos del portafolio tienen una distribución normal, por lo cual la desviación estándar es la medida del riesgo por excelencia. En consecuencia, existe una relación lineal entre la desviación estándar y el rendimiento esperado (Sharpe,1964; Lintner, 1965); 5) prevalecen expectativas homogéneas en relación a la distribución de probabilidad de los rendimientos. Es oportuno aclarar que el CAPM no es en sí mismo un enfoque de expectativas racionales necesariamente, aunque ciertamente arriba a la conclusión de que es posible pronosticar el futuro estadísticamente, como veremos; 6) en la economía existe una tasa de interés libre de riesgo.

A partir de estos supuestos es posible construir una teoría de la determinación del precio correspondiente a la parte o aspecto sistemático del riesgo total de un activo o portafolio. La premisa general de todos los modelos financieros es que los inversionistas tienen aversión al riesgo que debe ser compensado en los mercados por una prima correspondiente. La teoría trata de encontrar una solución al conflicto entre riesgo y rendimiento esperado al relacionar linealmente la covarianza entre el portafolio individual y el portafolio del mercado. En esto consiste la versión básica del CAPM[5].

Al diversificar el portafolio de sus acciones, los agentes pueden obtener rendimientos de equilibrio. Esto será siempre mejor que tener un portafolio compuesto por un solo activo o incluso que un portafolio integrado por un subconjunto de todos los activos de riesgo. Es evidente que la moraleja financiera de esta hipótesis es que si el agente desea optimizar deberá buscar que su portafolio contenga una distribución de riesgo similar a la del portafolio del mercado. Una vez conocido el rendimiento esperado de equilibrio, será posible discriminar entre los diferentes activos que componen el portafolio del mercado, con lo cual las preferencias y las

[5] La violación de uno o varios de estos supuestos ha conducido a la elaboración de versiones distintas y más complejas del CAPM que también tratan de determinar la parte o aspecto sistemático del riesgo total del activo. Ejemplos de lo anterior son Black (1972), Black, Jensen y Scholes (1972) y Cuthbertson (1996, caps. 3, 18).

decisiones de los inversionistas contarán con una base empírica. Desde luego, esto supone que podemos medir y anticipar el rendimiento esperado de equilibrio inherente a cada activo. Este es el nudo gordiano de la cuestión en torno al cual se bifurca la teoría económica financiera, como quedó ya expuesto en el capítulo anterior.

En los mercados de capital existen dos tipos de activos, de riesgo y libre de riesgo. La demanda de cada uno de ellos depende del rendimiento máximo esperado con el menor riesgo posible para un periodo determinado[6]. Si r_i es el rendimiento de un activo de riesgo i determinado por la tasa de interés libre de riesgo[7], ER_i el rendimiento esperado y si, además, suponemos que la variabilidad o varianza del rendimiento σ^2_i mide el riesgo del activo, entonces podemos medir los rendimientos actuales y esperados utilizando el parámetro de sensibilidad β que determina la prima de riesgo. β es, en consecuencia, el factor que mide la elasticidad del rendimiento respecto a las fluctuaciones del mercado; mide pues el riesgo sistemático de un activo puesto que se relaciona también con el riesgo del portafolio del mercado.

El razonamiento anterior puede expresarse como sigue:

$$r_i - r_f = \beta_i (r_m - r_f) \quad (2.1)$$

[6] La versión Sharpe-Lintner del CAPM presenta un análisis estático de los mercados financieros, para un solo periodo. Posteriormente, otros autores han extendido el CAPM para incluir análisis dinámico. Por ejemplo, Lo (1996).

[7] La tasa de interés libre de riesgo es la tasa cuyo cumplimiento está garantizado cualesquiera sean las condiciones del mercado (Mishkin, F., 1995, p. 103).

donde:

r_i = rendimiento del activo i

r_f = rendimiento libre de riesgo

r_m = rendimiento del mercado

βi= parámetro de sensibilidad del activo i

se calcula $\beta i = cov(r_i, r_m)/var(r_m)$.

Si despejamos (2.1) obtenemos una expresión para el rendimiento del activo **i**:

$$r_i = r_f + \beta_i (r_m - r_f) \tag{2.2}$$

La ecuación anterior expresa que el rendimiento es igual a la tasa de retorno libre de riesgo más una prima proporcional al riesgo que se determina por el producto del valor de *beta y* la discrepancia entre el rendimiento del mercado y el rendimiento libre de riesgo.

Dado lo anterior, es posible determinar ahora el rendimiento esperado excedente de i. Como afirma Cuthbertson (ibid.), el rendimiento esperado excedente, $ER_i - r_i$, se halla en razón directa a los rendimientos esperados excedentes del portafolio del mercado, $ER_m - r_i$, con la constante de proporcionalidad igual a β_i:

$$ER_i - r_i = \beta_i (ER_m - r_i) \tag{2.3}$$

de donde se infiere el rendimiento esperado excedente

$$ER_i = r_i + \beta_i (ER_m - r_i) \tag{2.4}$$

$$con: \qquad \beta_i = \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_m)}{\mathrm{var}(r_m)} \qquad (2.5)$$

La beta i es así, igual a la covarianza entre los rendimientos de ese activo y los del mercado, σ_{im}, dividida entre la varianza de los rendimientos del mercado σ_m^2:

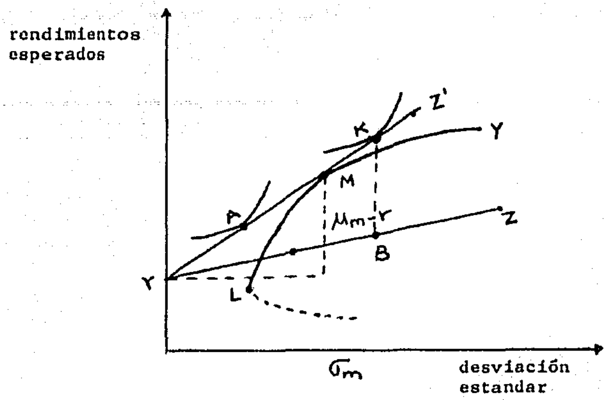
$$\beta_i = \sigma_{im} / \sigma_m^2 \qquad (2.6)$$

ER_m se define como el rendimiento que se espera de un portafolio conformado con la mezcla óptima de todos los activos del mercado X^*_i. De donde se sigue que el caso ideal del CAPM se presenta cuando $ER_i = r_i$.

El análisis del portafolio del mercado permite determinar la relación específica entre riesgo y rendimiento para cualquier portafolio mixto que contenga activos de riesgo (X_i) y activos libres de riesgo (X_f).

Cuthbertson (1996) ilustra de un modo gráficamente elocuente cómo se arriba al punto óptimo en la selección del portafolio eficiente:

Gráfica 1. Selección del Portafolio Óptimo



En la gráfica 1 la línea de transformación rz representa mezclas o proporciones *constantes* de activos de riesgo X_i, mientras que la razón X_i/X_f, es decir, la proporción relativa de riesgo que refleja las preferencias de los agentes entre riesgo y seguridad varía a lo largo de rz. Supongamos que un individuo invierte una fracción de su capital en X_f (por ejemplo, bonos del gobierno) y la fracción restante $(1-X_f)$ en un portafolio con riesgo. Nuestro inversionista se ubicaría en el punto K de la gráfica 1. En este punto el individuo confronta una combinación de rendimiento esperado y riesgo particular que se localiza en la línea rz'. Es evidente que en el punto B existe una combinación de rendimiento menor e igual riesgo que en el punto K. Nuestro agente hipotético podrá desplazarse a lo largo de la línea de transformación rz dependiendo de sus preferencias entre riesgo y rendimiento. Pero sin duda preferirá desplazarse a lo largo de la línea de mercado rz' por lo siguiente: en cualquier punto de la línea rz' se observan rendimientos esperados más elevados ante cualquier grado de riesgo, mientras que la línea rz manifiesta rendimientos esperados menores ante los mismos grados de riesgo de la línea rz'. La línea rz' contiene todas las combinaciones posibles de X_i y el portafolio M, que está conformado por un conjunto de activos relacionados con proporciones constantes óptimas (X_i*). Si bien los inversionistas pueden ubicarse en cualquier punto de la línea rz', es en el punto M donde se ubica al conjunto de proporciones constantes de activos que ostentan todos los agentes que participan en el mercado financiero. Esto significa que si X_i* es un portafolio que se compone de los títulos **a**, **b** y **c** en proporciones fijas, todos los puntos de la línea rz' representan mezclas de esos títulos en la misma proporción fija.

Por otro lado, el punto de la línea rz' tangente a la frontera eficiente de portafolios de riesgo (curva LMY), representa la combinación óptima disponible entre riesgo y rendimiento. Esta línea rz' es *la línea de capital del mercado* (LCM) (Cuthbertson, 1995, p. 37). Independientemente de que se seleccione otro punto de otra línea, nuestro inversionista obtendrá los rendimientos más altos con el mismo grado de riesgo o, alternativamente, menor grado de riesgo con el mismo rendimiento, en la medida en que elija la combinación de X_i que se corresponda con la tangencia del portafolio M.

Si nuestro agente desea ahorrar a una tasa libre de riesgo r_f, tanto su riesgo como su rendimiento particulares estarán cubiertos financieramente hasta llegar al punto M. Dependiendo de sus preferencias, se desplazará a lo largo del segmento rz' (Cuthbertson, op. cit.). Si, por el contrario, nuestro agente es un prestatario que a partir de la posición M apalanca su inversión, su desplazamiento se realizará en el segmento MK, dependiendo de sus preferencias. Por lo tanto, cuando en los mercados financieros prevalecen condiciones de poco riesgo, el conjunto de portafolios eficiente se encontrará en la curva LMY. En este caso M será el único portafolio eficiente de activos X_i.

Si, como supone el CAPM, en el mercado existen expectativas homogéneas, entonces cualquiera que desee invertir deberá exhibir en su haber portafolios eficientes definidos como combinaciones lineales de activos X_f y el portafolio M.

Cuando M es el Portafolio de Mercado vigente la economía está en posición de equilibrio. En este caso M contiene la misma mezcla de activos existente en el mercado. Por ejemplo, si los títulos de Telmex representan el 7% del valor total de la cartera de activos del mercado, en consecuencia M deberá contener 7% de acciones de Telmex. En esta situación, sólo importará el riesgo sistemático. Como muestra Cuthbertson (1996), esto se puede corroborar mediante la línea de capital de mercado (LCM), cuyo intercepto es r_f y cuya pendiente se determina como sigue:

$$LCM = (\mu_m - r_f) / \sigma_m \qquad (2.7)$$

donde

μ_m= rendimiento requerido por el portafolio del mercado.

σ_m= desviación estándar de M.

$(\mu_m - r_f)$ es la prima de riesgo del mercado, dada por las preferencias del público y por el riesgo sistémico.

Para conocer la prima de riesgo que el público espera y que le induce a incluir X_i en su cartera de activos debemos determinar el precio de riesgo del mercado, que es

$$PR_m = (\mu_m - r_f) / \sigma_m \qquad (2.8)$$

El Portafolio Eficiente

El análisis anterior nos conduce a obtener el portafolio eficiente del CAPM. Este portafolio se ubica en LCM y su rendimiento se determina como sigue:

$$r_p = r_f + ((\mu_m - r_f) / \sigma_m)\ \sigma_p \qquad (2.9)$$

Por el supuesto de expectativas homogéneas y dada la hipótesis de mercados eficientes, los agentes convergerán asintóticamente hacia el portafolio eficiente y el riesgo de los activos individuales convergerá asintóticamente con el riesgo del mercado.

Los agentes racionales prefieren portafolios eficientes, pues tienen aversión al riesgo. A este portafolio se llega mediante el criterio de varianza media y desviación estándar (Cuthbertson, 1996, p. 26). El portafolio eficiente satisface la siguiente condición asociativa para dos conjuntos de activos de riesgo:

i) $E_A(R) \geq E_B(R)$, y

ii) $var_A(R) \leq var_B(R)$

En este caso es posible determinar la preferencia de los agentes a favor de A si y sólo si se cumple la anterior condición. La violación de este criterio significa inmediatamente la imposibilidad de conocer la conducta de los mercados financieros. Como se ve, la existencia del portafolio eficiente y la regla que permite a los agentes orientar sus preferencias de riesgo y rendimiento de modo inequívoco, no se pueden separar en el CAPM. Son necesarias ambas para conocer el precio de un activo en un mercado financiero con riesgo. Sólo el conjunto de portafolios que tiene varianza media y desviación estándar mínima es un portafolio eficiente. Si tal portafolio existe, entonces tendrá un riesgo mínimo y una tasa de rendimiento máxima.

El portafolio eficiente contribuye a reducir la desviación estándar del portafolio de mercado. El procedimiento de diversificar un portafolio permite que su desviación estándar disminuya el riesgo del portafolio de mercado. Es necesario establecer también que el cálculo de la desviación estándar de un portafolio cualquiera debe tomar en cuenta no sólo la desviación estándar de cada uno de los activos de ese portafolio, sino también los movimientos interrelacionados de sus respectivos rendimientos.

El portafolio eficiente es la meta del agente financiero con aversión al riesgo que busca maximizar rendimientos. ¿Por qué? El portafolio eficiente implica desviación estándar mínima (σ_p), varianza media (σ_p^2) y rendimientos máximos (μ_p). Para llegar a este objetivo, el inversionista necesita una mezcla de activos óptimos (X^*_i). El método para arribar a esto es el de diversificación del portafolio con base en el criterio de varianza media y desviación estándar mínima (Cuthbertson, 1996). El agente eficiente eligirá el portafolio que prometa rendimiento esperado máximo. Si encuentra esta combinación, entonces se localizará en la frontera eficiente del mercado. El razonamiento puede expresarse de un modo formal:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i \tag{2.10}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \tag{2.11}$$

donde n=número de rendimientos esperados μ_i, σ^2_i (n-1)/2=varianza de los n activos, σ_{ij} = covarianza entre i y j, i≠j.

La frontera eficiente representa el total de las mezclas de μ_p y σ_p que minimizan el riesgo y la línea de transformación es la relación entre rendimiento esperado y riesgo.

Se ha dicho ya que la diversificación reduce el riesgo porque reduce la varianza del rendimiento esperado. El riesgo de que se trata es siempre el riesgo correlacionado inherente al rendimiento de dos o más activos. Así, al agente eficiente le interesa la covarianza entre todos los rendimientos existentes en el portafolio de mercado μ_p. La diversificación elimina sólo el riesgo no-sistemático[8]. Por lo tanto, el único riesgo que nos interesa medir es el riesgo sistemático. Nos interesa porque de esta manera es posible determinar en los mercados financieros cuál es la composición del portafolio que tiene la varianza mínima y el rendimiento esperado más alto. O sea, el portafolio que contiene activos con rendimientos de equilibrio, que no es sino el portafolio eficiente. Cuthbertson (1996) realiza una demostración rigurosa de la cuantificación del riesgo y el rendimiento esperado del portafolio eficiente para un mercado financiero compuesto por dos activos de riesgo.

La varianza de los rendimientos de cada activo σ_i^2, $_{i=1,2}$ es

$$\sigma_i^2 = E(R_i - \mu_i)^2 \qquad (2.12)$$

el coeficiente de correlación entre los rendimientos de los dos activos es p, $(-1 \leq p \leq 1)$ y la varianza del portafolio de mercado es

$$\sigma_{12} = E[(R_1 - \mu_1)(R_2 - \mu_2)] \qquad (2.13)$$

donde σ_{12} es la covarianza entre los dos rendimientos R_1 y R_2, $\mu_1 = ER_1$ y $\mu_2 = ER_2$ son los rendimientos esperados. Si $p=+1$, los rendimientos tendrán una relación lineal positiva y siempre se moverán en la misma dirección. Si $p=-1$ ocurrirá lo contrario; si $p=0$ no habrá

[8] "(...) cuando la parte no-sistemática del riesgo de un activo aumenta, la misma parte de otro activo disminuye y así se cancela el riesgo al interior del portafolio" (Mishkin, 1995, p.102)

relación lineal. El riesgo, por tanto, está en función del valor de p: la varianza total del portafolio se halla en razón directa al valor de P. Así, podemos determinar ahora el monto de inversión X_1 que un agente realizará en un activo:

$$x_1 = (\sigma^2_2 - p\sigma_1\sigma_2)/\sigma^2_1 + \sigma^2_2 - 2p\sigma_1\sigma_2) \qquad (2.14)$$

donde σ_1 y σ_2 son las varianzas de los activos 1 y 2, σ_1^2 y σ_2^2 son las covarianzas respectivas. Si suponemos que el rendimiento esperado para cada activo es homogéneo (expectativas homogéneas), la diversificación de un portafolio que tiende a infinito ($n \rightarrow \infty$) reducirá necesariamente la varianza del portafolio. Es razonable esperar que con la diversificación y un portafolio suficientemente grande, no solamente se reducirá la varianza, sino que todas las varianzas particulares tenderán a igualarse ($\sigma^2_i = \sigma^2$). De tal suerte que, dado que suponemos que los rendimientos esperados son iguales, con varianzas homogéneas en el largo plazo todos los portafolios exhibirán la misma mezcla o proporción (1/n) de activos de riesgo diversos. De donde se sigue:

$$\sigma^2_p = 1/n^2(n\sigma^2) = (1/n)\ \sigma^2 \qquad (2.15)$$

Se infiere de lo anterior que cuando los riesgos están perfectamente correlacionados de forma *negativa*[9], la diversificación del riesgo contribuye a la obtención del portafolio eficiente.

[9] Si ésta medida de dependencia (covarianza) presenta valores negativos, entonces el valor de un activo decrece cuando el de referencia crece.

Conclusión

El CAPM es un modelo con supuestos restrictivos que explica razonablemente el comportamiento de los complejos mercados financieros. Aunque ha sido objeto de polémicas pruebas empíricas (entre otras, Black, Jensen y Scholes (Jensen(1972)), Fama y MacBeth(1973), Lintner(1965), Sharpe (1964, 1970)), casi siempre éstas terminan por coincidir con las principales conclusiones básicas: 1)beta, la medida del riesgo sistemático, se relaciona lineal y positivamente con los rendimientos del pasado, con lo que es posible tener una base para estimar el rendimiento esperado de un activo; 2)el riesgo no-sistemático no contribuye a una mejor explicación de los rendimientos; 3)en un mercado eficiente los incrementos en la tasa de ganancia conllevan un incremento en el riesgo del portafolio; 4) en un mercado eficiente los agentes que no diversifican adecuadamente su portafolio están condenados a experimentar pérdidas de capital (riesgo innecesario), pues percibirán una prima de riesgo inferior a la de equilibrio o del portafolio del mercado: el valor pronosticado por el CAPM excederá al valor que se basa en una tasa de descuento que no incorpora el riesgo total; 5) la hipótesis del mercado eficiente determina que el arbitraje de riesgos y rendimientos modifica el rendimiento esperado hasta el punto en que se establece un precio de equilibrio de los activos, donde se iguala el riesgo sistemático y desaparecen las oportunidades de ganancias de capital o rendimientos excedentes.

No obstante, la crítica de Roll (1977) señala que los resultados empíricos del CAPM son tautológicos (ver también Cuthbertson, op. cit.): la relación lineal entre beta y los rendimientos esperados del activo se infiere directamente del supuesto de que el portafolio del mercado se encuentra en el conjunto eficiente de portafolios. De aquí que el único pronóstico real del CAPM sea que el portafolio del mercado es eficiente (en el sentido de que está en la frontera eficiente).

Roll piensa que en rigor ni siquiera es posible realizar la prueba de que el portafolio del mercado sea eficiente por la razón práctica de que el verdadero portafolio del mercado se compone de todos los activos de la economía mundial, no sólo de las acciones que cotizan en el mercado de valores de Nueva York o del American Stock Exchange. Las pruebas empíricas usan muestras que son sustitutos del portafolio verdadero; cualquier sustituto del mercado contiene sólo un subconjunto de estos activos. Esto representa un problema importante para estimar beta.

Para rechazar el CAPM, es necesario encontrar que el *verdadero* portafolio del mercado es ineficiente, es decir, no está en el conjunto eficiente. Pero aún si el verdadero portafolio de mercado es eficiente, es improbable que un subconjunto del mercado se encuentre en el conjunto eficiente. Así, no se puede rechazar el CAPM porque se encuentra que un sustituto del mercado es ineficiente. Es importante tomar en cuenta que la crítica de Roll no invalida el CAPM; cuestiona los resultados de pruebas previas del mismo[10].

[10]En cierto modo, el modelo *Arbitrage Pricing Theory* pretende corregir la dificultad de identificación del verdadero portafolio del mercado.

CAPÍTULO III

El ANALISIS ECONOMÉTRICO DEL CAPM

La problemática de seleccionar un portafolio óptimo fue resuelta por Markowitz en 1959. La nueva manera de tomar decisiones respecto de los activos, consideraba el riesgo de cada uno de ellos y su rendimiento esperado, pues intentaba determinar si este rendimiento era lo que inducía a los empresarios a mantener activos con riesgo o sin él. Para Markowitz los inversionistas optimizarían sus activos si los mantuvieran dentro de un "portafolio eficiente con varianza-media[11]", es decir, un portafolio con una tasa de retorno esperada máxima ante un nivel dado de varianza.

Como ya se ha señalado anteriormente, Sharpe (1964) y Lintner (1965), trabajando independientemente, elaboraron una versión del CAPM con estimadores restringidos[12] que intenta cuantificar la relación entre riesgo y rendimiento esperado para un período particular. La versión Sharpe-Lintner del CAPM es un modelo de equilibrio donde el rendimiento de un activo determinado presenta una relación lineal de su covarianza con el rendimiento del portafolio del mercado.

El CAPM supone que los inversionistas tienen expectativas homogéneas y que en condiciones óptimas mantendrán portafolios eficientes de varianza media. Si existe competencia perfecta en el

[11] Se denomina modelo de varianza-media cuando se elige un modelo bajo condiciones de incertidumbre; entonces se tienen que describir las distribuciones de probabilidad. Para ello se utiliza el modelo de la Media y la Varianza. La Media porque es una distribución de probabilidad que mide el valor que centra las distribuciones y la Varianza mide la dispersión de la distribución en torno a la Media, además de que es una medida razonable del grado de riesgo implícito.

mercado financiero, entonces el portafolio del mercado será también, necesariamente, un portafolio eficiente de varianza media.

En este capítulo realizamos una revisión de la literatura que se ocupa de algunas pruebas estadísticas aplicadas al CAPM. Adicionalmente intentaremos discutir si en efecto el portafolio eficiente es el que tiene máximos rendimientos con una varianza mínima, como propone el CAPM.

III.1 Análisis del CAPM con rendimientos excedentes.

El CAPM supone que el mercado de crédito opera con una tasa de interés sin riesgo. Para Sharpe (1964) y Lintner (1965) el rendimiento esperado de un activo *i* es

$$E[R_i] = R_f + \beta_{im} (E[R_m] - R_f) \qquad (3.1)$$

$$\beta_{im} = Cov\ [R_i, R_m] / Var[R_m] \qquad (3.2)$$

donde R_m es el rendimiento del portafolio de mercado y R_f es el rendimiento del activo libre de riesgo del mercado. El CAPM supone una Z_i que representa el rendimiento excedente[13] del activo *i* a una tasa de interés libre de riesgo

$$E[Z_i] = \beta_{im} E[Z_m] \qquad (3.3)$$

$$\beta_{im} = Cov\ [Z_i, Z_m] / Var[Z_m] \qquad (3.4)$$

donde Z_m es el rendimiento excedente de los activos del portafolio del mercado. El CAPM es un modelo de un período, esto se refleja en

[12]Se llama estimadores restringidos a aquellos parámetros utilizados por los modelos económicos que conllevan condiciones estadísticas específicas, por ejemplo varianza mínima y media cero.

las ecuaciones (3.2) y (3.4) que no tienen dimensión temporal. Para la realización de un análisis econométrico de este modelo, es necesario agregar un supuesto acerca del comportamiento de las series de tiempo de los rendimientos y así poder realizar la estimación a través del tiempo. La ecuación (3.4) se utiliza para analizar los rendimientos excedentes con datos empíricos.

Otro de los supuestos utilizados para analizar econométricamente el CAPM es el de *normalidad* del modelo de rendimientos de activos. El supuesto de normalidad determina que los rendimientos excedentes se distribuyen temporalmente de manera independiente e idéntica a través del tiempo[14] y que, además, presentan una distribución normal. Todo ello en un contexto donde los inversionistas realizan operaciones de crédito a una tasa libre de riesgo.

Para observar el comportamiento de los rendimientos excedentes de N activos, el modelo del mercado de rendimientos excedentes es muy útil y tiene la siguiente forma:

$$Z_t = \alpha + \beta Z_{mt} + \varepsilon_t \qquad (3.5)$$

Donde Z_t es el vector columna (Nx1) de rendimientos excedentes para N activos (o portafolio de activos); β es un vector columna de betas (Nx1); Z_{mt} es la matriz (MxM) de rendimientos excedentes del portafolio de mercado en el periodo *t;* α y ε_t son vectores columna

[13] Se define el rendimiento excedente de un activo como la diferencia entre el rendimiento del activo y el rendimiento de otro activo tomado como referencia (usualmente se toman los bonos de corto plazo del gobierno).

[14] En lo sucesivo nos referiremos a éste como el supuesto IID. Este supuesto implica que: "Las variables aleatorias $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se determinan en forma independiente cuando la ocurrencia de una (x_i) no influye ni es influida por la ocurrencia de cualquier otra (x_j) del conjunto, para $i \neq j$, i,j =

(Nx1) de los interceptos y términos de error del rendimiento de los activos, respectivamente. Este modelo debe satisfacer las siguientes condiciones: (i)la media del término de error debe ser cero

$$E[\varepsilon_t] = 0 \qquad (3.6)$$

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Sigma \qquad (3.7)$$

(ii)la varianza debe ser: σ_m^2:

$$E[Z_{mt}] = \mu_m, \quad E[(Z_{mt} - \mu_m)^2] = \sigma_m^2 \qquad (3.8)$$

(iii) no existe correlación entre Z_{mt} y el término de error ε_t

$$\text{Cov } [Z_{mt}, \varepsilon_t] = 0 \qquad (3.9)$$

μ es el rendimiento excedente esperado.

Es muy útil desarrollar una estimación econométrica de este modelo del mercado a través del método de la máxima verosimilitud, porque se generan estimadores insesgados con varianza mínima. Asimismo, se seleccionan los valores de los parámetros que maximizan la verosimilitud de la muestra. La técnica de máxima verosimilitud se aplica sólo a los estimadores no restringidos de este modelo del mercado.

Bajo ciertas condiciones de regularidad, los estimadores no restringidos se consideran consistentes[15], asintóticamente eficientes[16] y normales. Además, una vez determinados los valores de los parámetros, estos mismos maximizan la verosimilitud de la

---

1,2,…,n. Se dice que las variables aleatorias independientes están distribuidas idénticamente si sus funciones de densidad son idénticas en el sentido: $f(x_1;\theta) = f(x_2;\theta) = \ldots = f(x_n;\theta)$" (Spanos, 1999, p. 38) .

[15] "La propiedad de consistencia de los estimadores consiste en que conforme el tamaño de la muestra aumenta y tiende a infinito entonces los coeficientes estimados convergen a su valor real" (Galindo, 1995, p. 9).

muestra observada a través de una función de probabilidad o función de densidad de probabilidad conjunta.

El CAPM implica que los rendimientos esperados de un activo deben estar linealmente relacionados con la covarianza de sus rendimientos y el rendimiento del portafolio del mercado.

La forma normal de una función de densidad de probabilidad (Spanos, 1999: p. 37) es:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(y-\mu)^2\right] \qquad (3.10)$$

con media μ y varianza σ^2

Si *f(y)* se condiciona a los rendimientos excedentes del mercado, entonces:

$$f(Z_t / Z_{mt}) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} x \exp\left[-\frac{1}{2}(Z_t - \alpha - \beta Z_{mt})' \Sigma^{-1} (Z_t - \alpha - \beta Z_{mt})\right] \qquad (3.11)$$

Para un número T de observaciones, con los rendimientos excedentes distribuidos de manera independiente e idéntica a través del tiempo, la función de densidad de probabilidad conjunta se presenta como:

$$f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_T / Z_{m1}, Z_{m2}, \ldots, Z_{mT}) = \prod_{t=1}^{T} p(Z_t / Z_{mt}) \qquad (3.12)$$

[16] Porque presentan la menor variabilidad cuando la muestra tiende a infinito.

$$= \prod_{t=1}^{T} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(Z_t - \alpha - \beta Z_{mt}\right)' \Sigma^{-1}\left(Z_t - \alpha - \beta Z_{mt}\right)\right] \tag{3.13}$$

Con la ecuación (3.13) y la información estadística de los rendimientos excedentes, se pueden estimar los parámetros α, β, y Σ del modelo de rendimiento excedente del mercado a través de una función logarítmica de verosimilitud ***L***:

$$L(\alpha,\beta,\Sigma) = -\frac{NT}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log|\Sigma| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(Z_t - \alpha - \beta Z_{mt}\right)'\Sigma^{-1}\left(Z_t - \alpha - \beta Z_{mt}\right) \tag{3.14}$$

Los estimadores de máxima verosimilitud α, β y Σ que maximizan a la función *L* se encuentran al derivar parcialmente:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \Sigma^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}(Z_t - \alpha - \beta Z_{mt})\right] \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \Sigma^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}(Z_t - \alpha - \beta Z_{mt})Z_{mt}\right] \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Sigma} = -\frac{T}{2}\Sigma^{-1} + \frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}\left(Z_t - \alpha - \beta Z_{mt}\right)\left(Z_t - \alpha - \beta Z_{mt}\right)'\right]\Sigma^{-1} \tag{3.17}$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\mu} - \hat{\beta}\hat{\mu}_m \tag{3.18}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (Z_t - \hat{\mu})(Z_{mt} - \hat{\mu}_m)}{\sum_{t=1}^{T} (Z_{mt} - \hat{\mu}_m)^2} \tag{3.19}$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(Z_t - \alpha - \beta Z_{mt}\right)\left(Z_t - \alpha - \beta Z_{mt}\right)' \tag{3.20}$$

Los valores de $\hat{\mu}$ y $\hat{\mu}_m$ son:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Z_t \tag{3.21}$$

$$\hat{\mu}_m = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Z_{mt}$$

Podemos constatar que la estimación por máxima verosimilitud también conduce a las fórmulas de los estimadores del método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (Galindo, 1995, pp. 4-6),

La parte sistemática del CAPM puede modelarse como una función de probabilidad condicionada por el rendimiento excedente del mercado, Z_{m1}, Z_{m2}, . . . , Z_{mT}, así tenemos:

$$\hat{\alpha} \approx \mathrm{N}\left(\alpha, \frac{1}{T}\left[1 + \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\Sigma\right) \tag{3.22}$$

$$\hat{\beta} \approx \mathrm{N}\left(\beta, \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\Sigma\right) \tag{3.23}$$

$$T\hat{\Sigma} \approx W_N(T-2,\Sigma) \qquad (3.24)$$

donde $\hat{\mu}_m$ se define como en (3.21). La ecuación (3.24) indica que la matriz (NxN) $T\hat{\Sigma}$ tiene una distribución Wishart[17] con (T-2) grados de libertad y una matriz de covarianza Σ; la desviación estándar es:

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(Z_{mt} - \hat{\mu}_m\right)^2 \qquad (3.25)$$

La covarianza de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ se define como:

$$Cov(\hat{\alpha},\hat{\beta}') = -\frac{1}{T}\left[\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\Sigma \qquad (3.26)$$

Una ventaja del modelo no restringido del mercado es que no se corre una regresión adicional para estimadores restringidos y por ello se le puede aplicar la prueba estadística de Wald (Cuthbertson, 1996, pp. 318-319), la prueba F con muestras grandes y la prueba de la razón de verosimilitud para verificar la siguiente hipótesis nula: "si todos los elementos de α son cero (se impone la restricción de que el parámetro α sea cero) entonces *m* es el portafolio tangencia."

H_0: $\alpha = 0$

H_A: $\alpha \neq 0$

El estadístico de la prueba Wald es:

$$J_0 = \hat{\alpha}'[Var(\hat{\alpha})]^{-1}\hat{\alpha} = T\left[1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-1}\hat{\alpha}'\Sigma^{-1}\hat{\alpha} \tag{3.27}$$

$$donde \quad \hat{\alpha}'\Sigma^{-1}\hat{\alpha} = \frac{\mu_q^2}{\sigma_q^2} - \frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2}$$

q representa el portafolio tangencia y m el portafolio del mercado. Si H_0 es verdadera, J_0 tiene aproximadamente una distribución chi-cuadrada con N grados de libertad.

Para la prueba F con muestras grandes se tiene una función cuya distribución se conoce cuando H_0 es verdadera. Si definimos J_1 como el estadístico de esta prueba, tenemos:

$$J_1 = \frac{(T-N-1)}{N}\left[1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-1}\hat{\alpha}'\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\alpha} \tag{3.28}$$

Con α=0, J_1 tiene una distribución incondicional F con (T-N-1) grados de libertad en el numerador y N grados de libertad en el denominador.

La prueba de la razón de verosimilitudes se desarrolla con los valores de β y Σ en (3.16) y (3.17) con α restringida igual a cero. Los estadísticos resultantes son:

---

[17] La distribución Wishart es una generalización multivariada de la distribución chi-cuadrada.

$$\beta * = \frac{\sum_{t=1}^{T} Z_t Z_{mt}}{\sum_{t=1}^{T} Z_{mt}^2} \qquad (3.29)$$

$$\hat{\Sigma} * = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(Z_t - \beta * Z_{mt}\right)\left(Z_t - \beta * Z_{mt}\right) \qquad (3.30)$$

con funciones de distribución

$$\beta * \approx \mathrm{N}\left(\beta, \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\hat{\mu}_m^2 + \hat{\sigma}_m^2}\right]\Sigma\right) \qquad (3.31)$$

$$T\hat{\Sigma} * \approx W_N(T-1, \Sigma) \qquad (3.32)$$

Para que a la versión Sharpe-Lintner pueda aplicarse la prueba de la razón de verosimilitudes, es necesario establecer una función logarítmica (LR) con el fin de hallar los valores de los parámetros desconocidos sujetos a la restricción de que α=0:

$$LR = L* - L = -\frac{T}{2}\left[\log\left|\hat{\Sigma}*\right| - \log\left|\hat{\Sigma}\right|\right] \qquad (3.33)$$

L* es la función logarítmica de verosimilitud restringida y L la función logarítmica de verosimilitud no restringida. Para probar H_0 se utiliza el estadístico J_2:

$$J_2 = -2\,LR = T\left[\log\left|\hat{\Sigma}*\right| - \log\left|\hat{\Sigma}\right|\right] \approx \chi_N^2 \qquad (3.34)$$

La prueba indica que, bajo la hipótesis nula, existe una distribución chi-cuadrada con grados de libertad igual al número de restricciones de la hipótesis nula.

Ahora los estimadores de máxima verosimilitud pueden ser

$$\beta * = \beta + \frac{\mu_m}{\mu_m^2 + \sigma_m^2} \alpha \tag{3.35}$$

$$\Sigma_{t=1}^{T} (Z_t - \alpha - \beta Z_{mt})' \left(1 - \frac{\mu_m Z_{mt}}{\mu_m^2 + \sigma_m^2} \right) \alpha = 0 \tag{3.36}$$

expresados sin restricciones:

Obtenemos

$$\Sigma * = \Sigma + \left(\frac{\sigma_m^2}{\mu_m^2 + \sigma_m^2} \right) \alpha \alpha' \tag{3.37}$$

Colocamos el determinante en ambos lados de la igualdad y factorizamos Σ:

$$|\Sigma *| = |\Sigma| \left[\left(\frac{\sigma_m^2}{\mu_m^2 + \sigma_m^2} \right) \alpha' \Sigma^{-1} \alpha + 1 \right] \tag{3.38}$$

Entonces para *LR* tenemos

$$LR = -\frac{T}{2} \log \left[\left(\frac{\sigma_m^2}{\mu_m^2 + \sigma_m^2} \right) \alpha' \Sigma^{-1} \alpha + 1 \right] \tag{3.39}$$

y para J_1

$$J_1 = \frac{(T-N-1)}{N}\left(\exp\left[\frac{J_2}{T}\right]-1\right) \tag{3.40}$$

Para dar una explicación económica del modelo a través de la teoría de conjuntos eficientes, J_1 se presenta como:

$$J_1 = \frac{(T-N-1)}{N}\left(\frac{\frac{\mu_q^2}{\sigma_q^2}-\frac{\mu_m^2}{\mu_m^2}}{1+\frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2}}\right) \tag{3.41}$$

donde q representa el portafolio tangencia y N significa todos los activos incluido el portafolio del mercado. El portafolio tangencia q será el que presente la máxima razón Sharpe[18] del mercado. Si esto es así, entonces J_1 será igual a cero.

III.2. Análisis del CAPM de rendimientos reales.

El aumento de los precios de los activos es otra variable importante que consideran los modelos econométricos, cuando intentan apegarse más a la realidad. Black (1972) con base en el CAPM desarrolló una versión del modelo del mercado con estimadores

---

[18] Para cualquier activo o portafolio la razón Sharpe se define como el rendimiento excedente promedio dividido por la desviación estándar de los rendimientos. Es decir, mide el rendimiento excedente esperado por unidad de riesgo.

no restringidos, a la cual se le denomina Modelo de Rendimiento Real, porque considera el aumento de los precios.

Para Black la relación entre el rendimiento excedente esperado del activo *i* y el rendimiento del portafolio beta-cero[19] es lineal, es decir, que la tasa de variación entre el rendimiento esperado del activo *i* respecto de la variación del rendimiento del portafolio beta-cero es constante. El rendimiento esperado del activo *i* $E[R_i]$, considerando el riesgo para todos los activos, se define como sigue:

$$E[R_i] = E[R_{0m}] + \beta_{im} (E[R_m] - E[R_{0m}]) \quad (3.42)$$

donde R_m es el rendimiento del portafolio del mercado *m* y R_{0m} es el rendimiento del portafolio beta-cero asociado con *m*. Cualquier otro portafolio no correlacionado con *m* tendría el mismo rendimiento esperado, pero una varianza mayor.

Para este modelo el ajuste de los rendimientos se hace con base en la inflación, entonces β_{im} se define en términos de rendimientos reales:

$$\beta_{im} = Cov [R_i, R_m] / Var[R_m] \quad (3.43)$$

La versión Black es considerada como una restricción de rendimiento real para el modelo del mercado. En este caso, la esperanza del rendimiento del activo *i* se transforma en

$$E[R_i] = \alpha_{im} + \beta_{im} E[R_m] \quad (3.44)$$

donde:

$$\alpha_{im} = E[R_{0m}](1 - \beta_{im}) \qquad \forall_i \quad (3.45)$$

es ahora la restricción real del modelo del mercado.

Para el análisis econométrico de esta nueva versión se considera también que los rendimientos se distribuyen en forma independiente e idéntica (IID) a través del tiempo y que además presentan condiciones de normalidad conjunta (véase Spanos, 1989, 1999).

Se define el rendimiento esperado del portafolio beta-cero como γ; así la versión Black del CAPM se transforma en

$$\begin{aligned} E[R_t] &= \iota\gamma + \beta(E[R_{mt}] - \gamma) \\ &= (\iota - \beta)\gamma + \beta E[R_{mt}] \end{aligned} \tag{3.46}$$

Tomando en cuenta que los rendimientos del mercado ahora son reales, se considera a R_t como un vector columna (Nx1) de rendimientos reales para N activos (o portafolio de activos) y ι es un factor de proporcionalidad. Para los N activos el modelo del mercado de rendimientos reales es el siguiente:

$$R_t = \alpha + \beta R_{mt} + \varepsilon_t \tag{3.47}$$

Se define a β como un vector columna (Nx1) de activos betas; R_{mt} es el rendimiento del portafolio del mercado en el periodo t, y α y ε_t son los vectores columna (Nx1) de los interceptos del rendimiento del activo y los términos de error, respectivamente. Las condiciones de normalidad para este modelo son

[19] Este portafolio se define como el que tiene la menor varianza de todos los portafolios no correlacionados con *m*.

$$E[\varepsilon_t] = 0 \qquad (3.48)$$

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Sigma \qquad (3.49)$$

$$E[R_{mt}] = \mu_m, \qquad E[(R_{mt} - \mu_m^2)] = \sigma_m^2 \qquad (3.50)$$

$$Cov[R_{mt}, \varepsilon_t] = 0 \qquad (3.51)$$

Las pruebas estadísticas de la versión Black se pueden verificar de manera rápida y evidente si se compara la expectativa incondicional de (3.47) con (3.46) respecto de α:

$$\alpha = (\iota - \beta)\gamma \qquad (3.52)$$

Sin embargo, este resultado presenta diversos problemas cuando se desea comprobar, a diferencia de la restricción α=0 en la versión Sharpe-Lintner, ya que los parámetros β y γ mantienen una relación no lineal.

También el modelo de Black se puede estimar de acuerdo a la técnica de máxima verosimilitud. Los estimadores de máxima verosimilitud del modelo del mercado de rendimiento real en (3.47) son iguales a los estimadores del modelo del mercado de rendimiento excedente, con la diferencia de que los rendimientos reales sustituyen a los rendimientos excedentes.

El estadístico $\hat{\mu}$ es el vector de rendimientos reales de la muestra y los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros son los siguientes:

$$\hat{\alpha} = \hat{\mu} - \hat{\beta}\,\hat{\mu}_m \qquad (3.53)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(\Re_t - \hat{\mu})(R_{mt} - \hat{\mu}_m)}{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - \hat{\mu}_m)^2} \qquad (3.54)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\Re_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}R_{mt}\right)\left(\Re_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}R_{mt}\right)', \tag{3.55}$$

donde:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Re_t \qquad y \qquad \hat{\mu}_m = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}R_{mt}$$

Las funciones de distribución condicionadas por el rendimiento real del mercado, R_{m1}, $R_{m2},\ldots,$ R_{mT}, son las siguientes:

$$\hat{\alpha} \approx \mathrm{N}\left(\alpha, \frac{1}{T}\left[1 + \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\Sigma\right) \tag{3.56}$$

$$\hat{\beta} \approx \mathrm{N}\left(\beta, \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\Sigma\right) \tag{3.57}$$

$$T\hat{\Sigma} \approx W_N(T-2, \Sigma), \tag{3.58}$$

donde:

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_{mt} - \hat{\mu}_m\right)^2 \tag{3.59}$$

$$Cov\left[\hat{\alpha}, \hat{\beta}'\right] = -\left[\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\Sigma \tag{3.60}$$

La función logarítimica de verosimilitud se representa así:

$$L(\gamma, \beta, \Sigma) = -\frac{NT}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log|\Sigma| - \frac{1}{2}\Sigma\sum_{t=1}^{T}\left(R_t \_ \gamma(\tau - \beta) - \beta R_{mt}\right)\Sigma^{-1}$$
$$x\left(\Re_t - \gamma(\iota - \beta) - \beta R_{mt}\right) \tag{3.61}$$

diferenciamos la ecuación (3.61) e igualamos a cero para encontrar los estimadores de máxima verosimilitud:

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = (\iota - \beta)' \Sigma^{-1} \left[\sum_{t=1}^{T} (\Re_t - \gamma(\iota - \beta) - \beta R_{mt}) \right] \tag{3.62}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \Sigma^{-1} \left[\sum_{t=1}^{T} (\Re_t - \gamma(\iota - \beta) - \beta R_{mt})(R_{mt} - \gamma) \right] \tag{3.63}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Sigma} = -\frac{T}{2}\Sigma^{-1} + \frac{1}{2}\Sigma^{-1} \left[\sum_{t=1}^{T} (\Re_t - \gamma(\iota - \beta) - \beta R_{mt}) x (\Re_t - \gamma(\iota - \beta) - \beta R_{mt})' \right] \Sigma^{-1} \tag{3.64}$$

La manera más fácil de resolver estas ecuaciones y encontrar los estimadores de máxima verosimilitud es iterando las ecuaciones (3.65), (3.66) y (3.67) hasta arribar a la convergencia.

$$\hat{\gamma}* = \frac{(\iota - \hat{\beta}*)' \hat{\Sigma}^{*-1} (\hat{\mu} - \hat{\beta} * \hat{\mu}_m)}{(\iota - \hat{\beta}*)' \hat{\Sigma}^{*-1} (\iota - \hat{\beta}*)} \tag{3.65}$$

$$\hat{\beta}* = \frac{\sum_{t=1}^{T} (\Re_t - \hat{\gamma} * \iota)(R_{mt} - \hat{\gamma}*)}{\sum_{t=1}^{T} (R_{mt} - \hat{\gamma}*)^2} \tag{3.66}$$

$$\hat{\Sigma}* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (\Re_t - \hat{\gamma} * (\iota - \hat{\beta}*) - \hat{\beta} * R_{mt})(\Re_t - \hat{\gamma} * (\iota - \hat{\beta}*) - \hat{\beta} * R_{mt})' \tag{3.67}$$

Una de las primeras pruebas aplicadas a esta versión del modelo de mercado realizada por Gibbons (1982) y Shanken (1985) es la de razón de verosimilitud con la siguiente hipótesis nula:

$$H_0:\ \alpha = (\tau - \beta)\gamma \tag{3.68}$$

$$H_A:\ \alpha \neq (\tau - \beta)\gamma \tag{3.69}$$

Para construir la prueba de razón de verosimilitud, se define al estadístico J_V de la siguiente manera:

$$Jv = T\left[\log\left|\hat{\Sigma}*\right| - \log\left|\hat{\Sigma}\right|\right] \approx \chi^2_{N-1.} \tag{3.70}$$

La distribución nula pierde un grado de libertad (N-1) respecto de la versión Sharpe-Lintner (ecuación (3.34)), porque el rendimiento esperado beta-cero es un parámetro libre. Es decir, que al residual de la matriz de covarianza que tiene N(N-1)/2 parámetros, en el modelo no restringido se suman 2 N parámetros más, una N para el vector α y otra N para el vector β. En el modelo restringido sólo se anexan los N parámetros para β.

En resumen, el modelo no restringido tiene (N-1) más parámetros libres que el restringido. Si se define a J_A como la prueba estadística que ajusta y mejora la muestra finita, entonces:

$$J_A = \left(T - \frac{N}{2} - 2\right)\left[\log\left|\Sigma*\right| - \log\left|\Sigma\right|\right] \approx \chi^2_{N-1} \tag{3.71}$$

La ecuación anterior indica que para muestras finitas la distribución nula de J_A tiende más rápido a la distribución chi-cuadrada.

La versión Black presenta dos problemas al correr la prueba de máxima verosimilitud: el primero es que se tiene que iterar sobre condiciones de primer orden; y el segundo es que la prueba se basa en la teoría para muestras grandes, lo que altera las propiedades para una muestra finita arrojando resultados muy pobres. Para resolver la situación anterior, presentamos los resultados de Kandel (1984) y Shanken (1986) que muestran cálculos exactos para encontrar estimadores de máxima verosimilitud, así como la prueba que presenta un buen comportamiento de la muestra.

El modelo no restringido se puede expresar mediante la relación entre el modelo de mercado de rendimientos excedentes y el rendimiento esperado beta-cero (γ):

$$R_t - \gamma \iota = \alpha + \beta (R_{mt} - \gamma) + \varepsilon_t \qquad (3.72)$$

Se supone que se conoce γ y que los estimadores son:

$$\hat{\alpha}(\gamma) = \hat{\mu} - \gamma\tau - \hat{\beta}(\hat{\mu}_m - \gamma) \qquad (3.73)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_t - \hat{\mu})(R_{mt} - \hat{\mu}_m)}{\sum_{t=1}^{T} (R_{mt} - \hat{\mu}_m)^2} \qquad (3.74)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left[R_t - \hat{\mu} - \hat{\beta}(R_{mt} - \hat{\mu})\right]\left[R_t - \hat{\mu} - \hat{\beta}(R_{mt} - \hat{\mu}_m)\right]' \qquad (3.75)$$

Se observa que, a diferencia de α, los valores de β y Σ no dependen de γ. La función logarítmica de máxima verosimilitud es

$$L = -\frac{NT}{2}\log(2\pi) - \log\left|\Sigma\right| - \frac{NT}{2} \tag{3.76}$$

y no depende de γ.

Suponiendo α =0, los estimadores restringidos son

$$\beta* = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \gamma\tau)(R_{mt} - \gamma)}{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - \gamma)^2} \tag{3.77}$$

$$\sum * = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_t - \gamma(\tau - \beta *) - \beta * R_{mt}\right)x\left(R_t - \gamma(\tau - \beta *) - \beta * R_{mt}\right)' \tag{3.78}$$

La función de verosimilitud restringida ahora es:

$$L*(\gamma) = -\frac{NT}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log\left|\Sigma*(\gamma)\right| - \frac{NT}{2} \tag{3.79}$$

ésta función sí depende de γ.

El logaritmo de la razón de verosimilitud se presenta como

$$L*(\gamma) = L*(\gamma) - L \quad = -\frac{T}{2}\left[\log\left|\Sigma*(\gamma)\right| - \log\left|\Sigma\right|\right] \tag{3.80}$$

Este resultado indica que el valor de γ que minimiza la función de la razón de verosimilitud es el mismo que maximiza la función logarítmica de verosimilitud restringida y, por lo tanto, es el estimador de máxima verosimilitud de γ.

Si se aplica este método a la versión Sharpe-Lintner, la razón de verosimilitud logarítmica se presenta como:

$$
\begin{aligned}
LR(\gamma) &= -\frac{T}{2}\log\left[\left(\frac{\sigma_m^2}{(\mu_m-\gamma)^2+\sigma_m^2}\right)\alpha(\gamma)'\,\Sigma^{-1}\,\alpha(\gamma)+1\right] \\
&= -\frac{T}{2}\log\left[\left(\frac{\sigma_m^2}{(\mu_m-\gamma)^2+\sigma_m^2}\right)\left[\mu-\gamma\tau-\beta(\mu_m-\gamma)\right]'\,\Sigma^{-1}\,x\left[\mu-\gamma\tau-\beta(\mu_m-\gamma)\right]+1\right] \qquad (3.81)
\end{aligned}
$$

Minimizar LR con respecto a γ equivale a maximizar una función donde el valor obtenido de γ sea el máximo. Si denominamos G a la función que hemos de maximizar, tendremos

$$
G=\left(\frac{\sigma_m^2}{(\mu_m-\gamma)^2+\sigma_m^2}\right)\left[\mu-\gamma\tau-\beta(\mu_m-\gamma)\right]'\,\Sigma^{-1}\left[\mu-\gamma\tau-\beta(\mu_m-\gamma)\right] \qquad (3.82)
$$

Este valor de γ será también el estimador de máxima verosimilitud. Si derivamos δG/δγ=0, las soluciones que encontraremos son las de las raíces reales de una ecuación cuadrática H(γ):

$$H(\gamma) = A\gamma^2 + B\gamma + C \tag{3.83}$$

$$donde: \quad A \equiv \frac{1}{\sigma_m^2}(\tau-\beta)'\,\Sigma^{-1}(\mu-\beta\mu_m) - \frac{\mu_m}{\sigma_m^2}(\tau-\beta)'\,\Sigma^{-1}(\tau-\beta)$$

$$B \equiv \left(1+\frac{\mu_m}{\sigma_m^2}\right)(\tau-\beta)'\,\Sigma^{-1}(\tau-\beta) - \frac{1}{\sigma_m^2}(\mu-\beta\mu_m)'\,\Sigma^{-1}(\mu-\beta\mu_m)$$

$$C \equiv -\left(1+\frac{\mu_m}{\sigma_m^2}\right)(\tau-\beta)'\,\Sigma^{-1}(\mu-\beta\mu_m) - \frac{\mu_m}{\sigma_m^2}(\mu-\beta\mu_m)'\,\Sigma^{-1}(\mu-\beta\mu_m)$$

Si A > 0 entonces μ^* es la raíz más pequeña,

Si A < 0 entonces γ^* es la raíz más grande.

A será mayor a cero si μ_m es mayor que el rendimiento medio del portafolio con mínima varianza de la muestra global. Es decir, que el portafolio del mercado se encuentra en la parte eficiente de la frontera restringida de la media-varianza. Una vez obtenido el valor de γ^*, podemos sustituirlo en (3.66) y (3.67) para obtener β^* y Σ^* sin necesidad de iterar.

III.3 El enfoque de Cuthbertson.

Cuthbertson (1996) argumenta que el CAPM básico es aquel que predice, dentro de un solo período, los rendimientos de equilibrio de todos los activos que conforman el mercado de valores. Considera que otras versiones derivadas de este modelo (The Arbitrage Pricing Theory (APT) y The Consumption CAPM (C-CAPM), sólo realizan estudios intertemporales de los rendimientos de equilibrio (Cuthbertson, 1996, pp.47-75).

Cuthbertson explica que el CAPM es importante sólo cuando los inversionistas y agentes individuales deciden diversificar sus portafolios y determinar las proporciones que deberán mantener entre activos de riesgo y los libres de él, para imitar al portafolio eficiente dictado por el mercado.

Asimismo, este autor sostiene que si a cualquier modelo de rendimientos esperados se le aplican pruebas econométricas, los resultados mostrarán todas las ventajas y desventajas de la hipótesis de Eficiencia del Mercado (EMH). Si bien los agentes mantienen expectativas homogéneas respecto de sus ganancias esperadas, así como de la variabilidad y de la correlación que mantienen todos los rendimientos de los activos que conforman sus portafolios, también esperan obtener jugosas ganancias con el menor riesgo posible, aunque no se cuestionen, aparentemente, la eficiencia del mercado.

El CAPM, en este sentido, considera que detrás de la toma de decisiones de los inversionistas existe el teorema de la separación de los fondos, es decir, que los movimientos de inversión de los fondos financieros se realizan en dos decisiones separadas: primera, los agentes siguen lo dictado por las variables del mercado (rendimiento, variabilidad y correlación) y mantienen en proporciones óptimas sus activos sin que interfieran sus preferencias individuales; segunda, deciden cuánto invertir o apalancar las inversiones dependiendo de sus preferencias individuales, pero sin que esto altere las proporciones fijas de activos de riesgo. Es decir, sin modificar las proporciones óptimas dictadas por el modelo del mercado (Cuthbertson, 1996, pp. 22-24).

Este análisis determina el precio de los activos apoyándose en los conceptos de portafolio del mercado, la diversificación del portafolio y las medidas del riesgo y de las ganancias. Considera activos de riesgo y activos libres de riesgo, denota el rendimiento de un activo por ER_i y la medida del riesgo es su variabilidad $\sigma^2{}_i$. Subyace el supuesto de expectativas homogéneas para todos los inversionistas respecto de mantener la misma proporción óptima $X^*{}_i$ de activos con riesgo en sus portafolios individuales, después de conocer la proporción sostenida por el portafolio del mercado. Se mantienen las mismas expectativas sobre la variabilidad y la correlación entre los rendimientos de los activos cuando los inversionistas deciden realizar operaciones financieras en el mercado.

De este modo a través del CAPM se conocen los determinantes del rendimiento de equilibrio esperado ER_i para cualquiera de los activos de riesgo que existan en el mercado[20]. "Los rendimientos excedentes esperados de un activo de riesgo (ER_i-r) están directamente relacionados con los rendimientos excedentes esperados del portafolio del mercado (ER^m-r); con la constante de proporcionalidad del activo de riesgo denominada beta y con la tasa de rendimiento de los activos libre de riesgo r" (Cuthbertson, 1996, p. 24):

$$(ER_i - r) = \beta_i(ER^m - r) \qquad (3.84)$$

$$ER_i = r + \beta_i(ER^m - r) \qquad (3.85)$$

Para $B_i = \text{cov } (R_i, R^m) / \text{var}(R^m)$ (3.86)

ER^m representa el promedio de todos los rendimientos esperados que tienen los activos del portafolio del mercado mantenidos en las proporciones óptimas X^*_i En relación a lo anterior, Cuthbertson (1996) subraya que "como los rendimientos actuales difieren de los rendimientos esperados, entonces la varianza $\text{var}(R^m)$ del portafolio del mercado no puede ser cero". En este análisis del CAPM la constante de proporcionalidad β depende de: (i) la covarianza entre el rendimiento del activo i y los rendimientos del portafolio del mercado y (ii) está inversamente relacionada con la varianza del portafolio del mercado.

Para que los inversionistas deseen mantener activos de riesgo en sus portafolios es necesario que los rendimientos excedentes del portafolio del mercado sean siempre positivos $(ER^m - r) > 0$. De lo contrario, "ningún inversionista adverso al riesgo desearía mantener este tipo de activos en su portafolio del mercado cuando podría ganar más, de manera segura, invirtiendo toda su riqueza en activos libre de riesgo" (Cuthbertson, 1996, p. 25). En este sentido, los rendimientos de los activos individuales deben seguir a los del mercado; para ello la $\text{cov}(R_i, R^m) \geq 0$ y $\beta_i \geq 0$. Si ocurre que la $\text{cov}(R_i, R^m) > 0$ el CAPM muestra que estos activos se mantendrán

[20] Aunque Cuthbertson aclara que uno de los puntos de la EMH es que los rendimientos excedentes de quilibrio no se pueden predecir.

sólo si su rendimiento esperado iguala la tasa libre de riesgo r; en este caso β deberá ser igual a cero (véase ecuación 3.85). Si la covarianza de los activos es positiva respecto de los rendimientos del mercado, se obtendrán mayores rendimientos de los esperados porque la presencia de este tipo de activos afecta muy poco la variabilidad total del portafolio. Pero si la covarianza de los activos es negativa $cov(R_i, R^m) < 0$ y $\beta < 0$, el rendimiento de estos activos estará por debajo de r. Sin embargo, el nuevo análisis del CAPM presentado por Cuthbertson asegura que estos activos se mantendrán porque reducen de manera importante la varianza de todo el portafolio.

En el enfoque de Cuthbertson, el análisis de la variabilidad de los rendimientos de los activos de riesgo también puede realizarse de acuerdo a los valores que presenten sus betas respecto del rendimiento del portafolio del mercado. Con base en ello Cuthbertson (1996, p. 25) clasifica a los activos en agresivos, neutrales y defensivos. Si $\beta>1$ los activos se denominan agresivos porque sus rendimientos esperados se mueven más rápido que los rendimientos esperados del portafolio del mercado. Cuando $\beta=1$ el rendimiento del activo individual se mueve a la par que el rendimiento del activo dentro del portafolio del mercado y se habla entonces de un activo neutral. Y por último, se denomina activos defensivos a aquellos donde $\beta<1$ porque sus rendimientos esperados se mueven muy despacio respecto del comportamiento de los rendimientos del portafolio del mercado.

El medir las betas proporciona datos exactos de rendimientos esperados, pero para Cuthbertson (1996, p.25) esto no es del todo válido sin las proporciones óptimas X^*_i obtenidas por la aplicación del CAPM. Es por ello que el portafolio de mercado o cualquier portafolio *p* de activos, contiene sólo proporciones óptimas de activos agresivos, neutrales y defensivos. De este modo, a cualquier derivado del portafolio del mercado (llámese portafolio *p* de activos) se le puede aplicar el modelo CAPM si se desea analizar la relación entre riesgo y rendimiento.

En este enfoque presenta cuidadosamente las etapas que pasan los inversionistas para diseñar sus portafolios individuales teniendo como referencia el portafolio del mercado. Es muy importante, primero, que conozcan la proporción óptima de activos que guarda el portafolio del mercado. Para ello se determina que el portafolio del mercado M es el portafolio tangencia entre la línea de capital del mercado y la línea de la frontera eficiente (Cuthbertson, 1996, pp. 35-36). Esto significa que todos los activos, con y sin riesgo, se encuentran en proporciones óptimas en lo que hace a cantidad, rendimiento y riesgo. Con expectativas homogéneas, la frontera eficiente es la misma para todos los inversionistas. Es decir, que los rendimientos individuales, $\mu_i = ER_i$, σ^2_i y σ_{ij}, son iguales a los rendimientos del mercado. Pero los agentes necesitan disminuir la varianza de sus portafolios ante cualquier rendimiento esperado, y para hacerlo tienen que calcular las proporciones de activos de riesgo que los ubicaría en el punto

M, "...esto representa un problema que sólo se resuelve a través de la aplicación de técnicas muy complicadas de programación cuadráticas" (Cuthbertson, 1996, p. 39).

Apoyándose en el CAPM Cuthbertson (1996) determina que los rendimientos excedentes de equilibrio se pueden obtener de 3 formas: primera, encontrando el precio de riesgo del mercado; segunda, por el rendimiento esperado requerido, y tercera, cuando el riesgo se mide en términos de la varianza.

Rendimientos Excedentes de Equilibrio y El Precio de Riesgo del Mercado.

Como ya ha sido planteado en la gráfica 1, la pendiente de la línea del mercado de activos, se denomina *precio de riesgo del mercado* y su pendiente es

$$(\mu_m - r)/\ \sigma_m \tag{3.87}$$

Una vez obtenidas las proporciones fijas de X^*_i, que dicta el portafolio de mercado y siguiendo el teorema de separación de fondos, si se desea invertir algunos fondos de M en activos de riesgo, Cuthbertson propone crear un portafolio artificial ***p*** que sea tangente a M y que lo compongan dos tipos de activos de riesgo en las proporciones x_i y $(1- x_i)$. Los rendimientos esperados de ***p*** son:

$$\mu_p = x_i\mu_i + (1- x_i)\mu_m \tag{3.88}$$

Su desviación estándar es:

$$\sigma_p = [x^2\sigma^2_i + (1- x_i)^2\sigma^2_m + 2x_i(1- x_i)\sigma_{im}]^{½} \qquad (3.89)$$

La gráfica 1 muestra que las curvas rZ′ y LMY coinciden en el portafolio del mercado M; entonces las proporciones de x_i son las mismas y se igualan a 0. De acuerdo a la ecuación (3.88), si $x_i=0$ los rendimientos de *P* se igualan a los del mercado, $\mu_p=\mu_m$. Para calcular el riesgo de los rendimientos de este nuevo portafolio se deriva la variabilidad respecto de los rendimientos, cuando $x_i=0$:

$$\left[\frac{\partial\mu_p}{\partial\sigma_p}\right]_{\chi_i=0} = \left[\frac{\partial\mu_p}{\partial\chi_i}\right]\left[\frac{\partial\sigma_p}{\partial\chi_i}\right]^{-1} \qquad (3.90)$$

$$\left[\frac{\partial \mu_p}{\partial \chi_i}\right]_{\chi_i = 0} = \mu_i - \mu_m \tag{3.91}$$

$$\left[\frac{\partial \sigma_p}{\partial \chi_i}\right] = \frac{1}{2\sigma_p}\left[2\chi_i\sigma_i^2 - 2(1-\chi_i)\sigma_m^2 + 2\sigma_{im} - 4\chi_i\sigma_{im}\right] \tag{3.92}$$

si $\chi_i = 0$, *entonces* $\sigma_p = \sigma_m$

$$\left[\frac{\partial \sigma_p}{\partial \chi_i}\right]_{\chi_i = 0} = \left[\sigma_{im} - \sigma_m^2\right]/\sigma_m \tag{3.93}$$

sutituímos (3.3.8) *y* (3.3.10) *en* (3.3.7)

$$\left[\frac{\partial \mu_p}{\partial \sigma_p}\right]_{\chi_i = 0} = \frac{(\mu_i - \mu_m)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2} \tag{3.94}$$

Como en M las pendientes se igualan, entonces:

$$\frac{(\mu_i - \mu_m)\sigma_m}{\left(\sigma_{im}^2 - \sigma_m^2\right)} = \frac{\mu_m - r}{\sigma_m} \tag{3.95}$$

Y de esta manera Cuthbertson llega al modelo CAPM :

$$\mu_i = r + \left(\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}\right)(\mu_m - r) \tag{3.96}$$

Que es lo mismo que:

$$ER_i = r + \left[\frac{\operatorname{cov}\left(R_i, R^m\right)}{\operatorname{var}\left(R^m\right)}\right]\left(ER^m - r\right) \tag{3.97}$$

La ecuación (3.97) muestra que el rendimiento de equilibrio esperado de un activo i debe ser igual a un rendimiento sin riesgo más una prima por riesgo determinada por el mercado.

Rendimientos Excedentes de Equilibrio y Rendimientos Esperados.

Si el mercado de los activos libre de riesgo no estuviera restringido, entonces el rendimiento que se esperaría obtener sería el dictado por el mercado a través del CAPM, como en la ecuación (3.97). En esta parte Cuthbertson retoma la definición de beta y muestra cómo se llega al CAPM por esta vía:

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}\left(R_i, R^m\right)}{\operatorname{var}\left(R^m\right)} \tag{3.98}$$

Entonces la relación con el CAPM es :

$$ER_i = r + \beta_i\left(ER^m - r\right) \tag{3.99}$$

La ecuación (3.99) muestra que la relación entre riesgo y rendimiento se mantiene para cualquier activo.

Rendimientos Excedentes de Equilibrio y el Riesgo Medido por la Varianza.

Si la varianza es considerada como una medida del riesgo del portafolio, entonces la relación que guarda con el CAPM se demuestra de la siguiente manera (Cuthbertson, 1996, p.38):

$$\lambda_m = (\mu_m - r)/\ \sigma_m^2 \tag{3.100}$$

sustituyendo en (3.99) la parte de (ER^m- r) y tomando la ecuación (3.100):

$$ER_i = r + \lambda_m \operatorname{cov}(R_i,\ R^m) \tag{3.101}$$

Con las ecuaciones (3.97), (3.99) y (3.101) se demuestran las equivalencias que sirven para determinar los rendimientos de equilibrio necesarios para que los activos permanezcan dentro del portafolio del mercado (Cuthbertson, 1996, p. 41). Con las mismas ecuaciones se puede determinar la prima de riesgo que se presenta cuando el rendimiento de equilibrio excede a la tasa libre de riesgo (rp_i):

$$ER_i \equiv r + rp_i \tag{3.102}$$

y de la ecuación (3.99) se deduce que "el CAPM presenta una forma explícita para la prima de riesgo" (Cuthbertson, 1996, p.41):

$$rp_i = \beta_i \left(ER^m - r\right) \tag{3.103}$$

Si utilizamos la ecuación (3.101) obtenemos

$$rp_i = \lambda_m \operatorname{cov}\left(R_i, R^m\right) \tag{3.104}$$

con lo que se demuestra de manera clara una de las hipótesis que subyacen al CAPM, que dice:"sólo la covarianza de los rendimientos entre el activo i y el portafolio del mercado influye en el rendimiento excedente". Al respecto Cuthbertson argumenta que también deben de tomarse en cuenta la relación precio/dividendos, la relación precio/ganancia, y el tamaño de las empresas, pues de lo contrario el CAPM "sólo explica la tasa de rendimiento excedente relativa a la tasa de rendimiento excedente del mercado (ecuación (3.99) y no es un modelo del nivel de precio absoluto de los activos individuales".

Conclusión

Las pruebas aplicadas al CAPM para la versión Sharpe-Lintner y la versión Black representan el enfoque clásico de cómo probar un modelo. Sin embargo, aunque la evidencia empírica aparentemente ha apoyado la hipótesis central del CAPM desde los años sesenta, debemos considerar a estas versiones analizadas como aproximaciones relativamente adecuadas de la realidad financiera.

La importancia de éstas pruebas es que nos permiten rechazar a los modelos que no posean las propiedades estadísticas adecuadas y mantener presente las ventajas y desventajas de los modelos econométricos que vayamos a utilizar.

La propiedad de consistencia de los estimadores resuelve el problema del tamaño de la muestra, pues nos dice que si ésta tiende a infinito los coeficientes estimados convergen a su valor real. Pero dicha propiedad no se puede sostener cuando, por ejemplo, limitamos la muestra a un número pequeño (15 portafolios): los resultados de la prueba serán incorrectos porque el tamaño no fue suficiente para obtener una buena aproximación. En este caso la prueba F de la distribución de la muestra finita es muy útil para resolver los problemas que se presentan cuando se hacen inferencias del modelo teórico.

Tomando como base el estadístico J_1 se puede calcular el tamaño de la muestra finita para otras pruebas asintóticas; tales pruebas se pueden llevar a cabo porque los estadísticos presentados son transformaciones monotónicas de J_1.

Para determinar el poder[21] de las pruebas aplicadas a la versión Sharpe-Lintner a través del estadístico J_1 (pues se conoce la distribución de la muestra finita bajo las hipótesis nula y alternativa) como se definió en la ecuación (3.29) tenemos que $J_1 \sim F_{N,T-N-1}(\varphi)$, donde φ es el parámetro de no-centralidad de la distribución F y se define como:

$$\varphi = T\left[1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-1} \alpha'\Sigma^{-1}\alpha$$

Si $\alpha=0$, entonces $\varphi=0$ y tenemos el resultado previo de que la distribución es F central con T-N-1 y N grados de libertad en el numerador y denominador, respectivamente.

Si $\alpha\neq 0$, para encontrar el valor de φ es necesario condicionar la razón $\mu\hat{}^2_m/\sigma\hat{}^2_m$ a un valor y especificar el valor de $\alpha'\Sigma^{-1}\alpha$:

$$\alpha'\Sigma^{-1}\alpha \;=\; \frac{\mu_q^2}{\sigma_q^2}-\frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2} \;=\; sr_q^2 - sr_m^2$$

[21] Es la probabilidad de que se rechace la hipótesis nula suponiendo que la hipótesis alternativa es verdadera.

Ahora sólo es necesario determinar la diferencia que existe entre la razón Sharpe cuadrada del portafolio tangencia y el portafolio del mercado.

Como se constata, la prueba gana poder cuando N se reduce pero la razón Sharpe del portafolio tangencia disminuye. Esto se soluciona con la diversificación del portafolio en proporciones óptimas. El problema que se presenta es encontrar el tamaño de N que maximice el poder de la prueba y que depende de la tasa a la cual la razón Sharpe del portafolio tangencia disminuye cuando los activos se mantienen agrupados.

Un problema serio que presenta la versión Black es que el rendimiento del portafolio del mercado no es un dato observado, por lo que se usa una variable proxy para correr las pruebas. Esto contradice a la teoría que señala al portafolio del mercado como aquel que contiene a todos los activos.

Roll (1977) enfatizó que las pruebas del CAPM sólo rechazan la eficiencia de varianza media de la variable proxy y que el modelo podría no ser rechazado si se utilizara el rendimiento del verdadero portafolio del mercado.

Es decir, que no se puede conocer la sensibilidad de las inferencias cuando se utiliza una variable proxy en lugar del portafolio del mercado. El análisis de Stambaugh (1982) mostró que las inferencias son similares cuando se utilizan activos, bonos-activos, bonos-activos-bienes-raíces basados en variables proxies. Lo que sugiere que las inferencias no son necesariamente sensibles a los errores en las variables proxy cuando se les toma como medida del portafolio del mercado.

Por último, Shanken (1987a) estimó un límite superior en la correlación entre el rendimiento proxy del mercado y el verdadero rendimiento del mercado necesario para revocar el rechazo del CAPM. El hallazgo básico es que si la correlación entre la variable proxy y el mercado verdadero es mayor que 0.70, entonces el rechazo del CAPM con un mercado proxy implicaría también el rechazo del CAPM con el portafolio del mercado verdadero. Así, en la medida en que creamos que existe una alta correlación entre el rendimiento del mercado verdadero y las variables proxy utilizadas, los rechazos permanecerán.

Por otra parte, una de las críticas más contundentes que Cuthbertson formula al CAPM básico es que no se puede estudiar la variabilidad de los rendimientos a lo largo del tiempo: "el CAPM guarda silencio si la varianza condicional es *variante en el tiempo*" (Cuthbertson, 1996, p.43). Aún así analiza la variabilidad de los rendimientos mediante la aplicación de métodos con heteroscedasticidad condicional autorregresiva o método ARCH (por sus siglas es inglés). Los resultados que arroja este método ARCH presentan al CAPM como un modelo donde los rendimientos esperados varían y dependen de la información del período que se analice.

Al final se tiene un modelo de rendimientos de equilibrio que no es constante y que depende de lo que sucede en el período de estudio. Cuthbertson (1996, p.44) resuelve este dilema en términos de la covarianza: "si la covarianza entre rendimientos individuales y rendimientos del mercado se puede predecir, a partir de la información disponible para el período que se analiza, entonces los rendimientos de equilibrio para cualquier activo *i* se podrán predecir aunque varíen a través del tiempo".

El CAPM no necesariamente implica que los rendimientos de equilibrio son constantes, si la covarianza varía a través del tiempo también lo hará los rendimientos.

CAPÍTULO IV

UN MODELO CAPM CON PRIMAS DE RIESGO VARIABLE O BETAS VARIABLES EN EL TIEMPO: EL CASO DE MÉXICO

El modelo de CAPM es una de las herramientas más usadas en finanzas. Su simplicidad junto con su capacidad operativa lo han convertido en algún sentido en los volkswagen de la economía financiera. Sin embargo, diversos artículos académicos tienden a rechazar su validez empírica. Por ejemplo, las pruebas empíricas sobre el CAPM indican que otras variables económicas más allá de la covarianza de las ganancias sobre la ganancias de mercado sean estadísticamente significativas al explicar el exceso de ganancias.

Las explicaciones sobre este rechazo incluyen diversos argumentos en donde destacan que existe una imposibilidad práctica de diversificar el portafolio hasta el punto que todos los activos disponibles estén incluidos y que por tanto la covarianza sea cero y el riesgo completamente diversificable. Otro argumento es que simplemente la teoría del CAPM está equivocada y que en todo caso debe de substituirse por un modelo como el de la teoría del precio de arbitraje (APT).

En los últimos años ha crecido también un argumento asociado al comportamiento estadístico de las series financieras. Esto es, la evidencia empírica disponible permite sostener que las series financieras tienen un comportamiento heteroscedástico que puede modelarse a través de un ARCH o GARCH. Ello implicaría que existe una prima de riesgo variable que puede asociarse en alguna medida a sus valores pasados lo que explicaría, por ejemplo, el rechazo de hipótesis financieras básicas como el ajuste eficiente en el mercado de bonos.

IV.1. MARCO TEÓRICO

El CAPM indica que las ganancias extraordinarias esperadas de un activo con respecto al activo seguro son proporcionales al exceso de ganancias del portafolio de mercado. Esto es, que el exceso de ganancias en un activo riesgoso es proporcional al riesgo no diversificable que puede medirse como la covarianza con respecto a la ganancia del activo que representa el portafolio del mercado (Sharpe, 1964 y Litner, 1965). En el caso en donde la covarianza es cero entonces el riesgo es completamente diversificable, y por tanto las ganancias excesivas sobre el activo seguro se hacen cero. En este sentido, debe buscarse modelar la distribución condicional de las covarianzas en vez de la incondicional.

En principio el modelo CAPM puede representarse como:

$$E(R_i)-r=\beta_i(E(R_m-r] \qquad (4.1)$$

$$\beta_i=cov(R_iR_m)/var(R_m) \qquad (4.2)$$

Donde R_i y R_m son los ingresos de un período sobre el activo y del portafolio de mercado respectivamente y r es la ganancia en un período sobre el activo seguro. Así, las ecuaciones (4.1) y (4.2) pueden modelarse en forma condicional como:

$$E(R_{it}/\Omega_{t-1}) - r_t = \beta_{it}[R_{mt}//\Omega_{t-1}-r_{t-1}] \qquad (4.3)$$

$$\beta_{it}=cov(R_{it},R_{mt}/\Omega_{t-1})/var(R_{mt}/\Omega_{t-1}) \qquad (4.4)$$

Donde Ω_{t-1} es el conjunto de información en el tiempo t-1. Suponiendo que el precio del riesgo (λ) se define como la ganancia del portafolio dividida entre su varianza (Hall, Miles y Taylor, 1989):

$$\lambda = [E(R_{mt}/\Omega_{t-1}) - r_t] / var(R_{mt}/\Omega_{t-1}) \qquad (4.5)$$

De donde se desprende que:

$$E(R_{it}/\Omega_{t-1}) - r_t = \lambda[var(R_{mt}/\Omega_{t-1})] \qquad (4.6)$$

Utilizando (4.6) se obtiene:

$$E(R_{it}/\Omega_{t-1}) = r_t + \lambda[var(R_{mt}/\Omega_{t-1})] \qquad (4.7)$$

de este modo, la relación entre las tasa de rendimiento de los activos incluye también el comportamiento de la varianza. En este caso si las ganancias extraordinarias se caracterizan por tener un comportamiento heteroscedástico, entonces pueden existir parámetros con inestabilidad estructural.

La ecuación (4.7) puede traducirse fácilmente al caso de la estructura de tasas de interés apoyándose en la hipótesis de expectativas (EH) que argumenta que la diferencia entre las tasas de largo y corto plazo es un predictor óptimo del cambio esperado en las tasas de largo plazo y en los cambios esperados futuros en las tasas de corto plazo (Cuthbertson, 1996). En este sentido, la tasa de largo plazo, es un promedio ponderado de las tasas corrientes y futuras de corto plazo (Shiller, 1991).

$$R^n_t = (1/k)\sum_{i=0}^{k-1} E_t R^m_{t+mi} + \theta_i = E_t R^{*n}_t + \theta_i \qquad (4.8)$$

Donde n y m representan los períodos de corto y largo plazo de las tasas de interés, θ_i es el promedio de la prima de riesgo k=n/m y R^{*n}_t corresponde a lo que se conoce como la tasa de pronóstico perfecta obtenida como un promedio ponderado geométrico de las tasas de interés de corto plazo.

La importancia de la prima de riesgo en la estructura de tasas de interés ha sido enfatizada por diversos autores en donde destacan por ejemplo Shiller, (1979) y Engle, Lilien y Robins, (1987). La presencia de una prima de riesgo variable, en el marco de la EH, puede incluirse utilizando modelos del tipo ARCH o GARCH (Engel, 1982). Esto es, el riesgo se asocia a movimientos no anticipados en las tasa de interés y por lo tanto se especifica a través de la varianza condicional del período de maduración del bono respectivo. Esta clase de modelo permite reconciliar a la EH con la evidencia empírica donde la estructura de tasas de interés es en extremo volátil.

ESTA TESIS NO SALE DE LA BIBLIOTECA

El modelo con una prima de riesgo variable puede entonces formalizarse considerando a y_t como la ganancia excesiva sobre el período de tenencia del bono y definiendo a la varianza condicional h^2_t como a la suma ponderada de las sorpresas pasadas al cuadrado:

$$h^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Sigma w_i \varepsilon_{t-i} \qquad (4.9)$$

Entonces el modelo ARCH-M se define como:

$$y_t = \kappa + \delta h_t + \varepsilon_t$$

$$h^2_t = \gamma + \alpha \Sigma w_i \varepsilon^2_{t-i} \qquad (4.10)$$

Pueden también definirse versiones más complejas del modelo ARCH a través de incluir las varianzas condicionales rezagadas como una especie de mecanismo de aprendizaje adaptativo (Bollerslev, 1986). Este es el caso, por ejemplo, del modelo GARCH (p,q) como:

$$h^2_t = \gamma + \Sigma^q \alpha_i \varepsilon^2_{t-i} + \Sigma^p \beta_i h_{t-i} \qquad (4.11)$$

La evidencia empírica sobre la presencia de una prima de riesgo variable es apoyada por diferentes estudios. Simon (1989) y Jones y Roley (1983) encuentran evidencia de una prima de riesgo variable utilizando algunas medidas de riesgo ad-hoc y Mankiw y Summers (1984) sostienen que la variabilidad del premio de liquidez es un componente esencial que explica el rechazo de la EH. Más aún, Engle, Lilien y Robins (1987) y Tzqavalis y Wickens (1993) encuentran que el exceso de ganancias responde a la varianza del cuadrado de los errores pronosticados. Sin embargo, los cambios en la varianza tienden a responder a la volatilidad general de la serie. Margaritis (1994) encuentra también evidencia de que la varianza condicional de las ganancias adicionales cambia en el tiempo sugiriendo que la EH es válida de considerarse adecuadamente la volatilidad de las series.

Debe considerarse entonces que la ecuación (4.10) del modelo ARCH corresponde a las ecuaciones estimables (4.1) (4.2) del modelo CAPM con prima de riesgo variable.

IV.2.EVIDENCIA EMPÍRICA

La información utilizada son series mensuales de tasas de interés de uno y tres meses de CETES de 1985(1) al 2000(11). Dichas tasas usadas se refieren a tasas continuas calculadas de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$[1+(R^m{}_t/m)]^{mt} = e^{Rt} \qquad (4.12)$$

El exceso de ganancias fue estimado siguiendo a Engle, Lilien y Robbins (1987) como:

$$y_t = R^n{}_t - (R^m{}_t + R^m{}_{t+1} + R^m{}_{t+2}/3) \qquad (4.13)$$

Las pruebas de raíces unitarias, resumidas en los cuadros 1 y 2, incluyen, inicialmente a las conocidas Dickey Fuller Aumentada (1981) y Phillips Perron (1988). Ambas pruebas tienen como hipótesis nula que la serie es no estacionaria. Se utilizó el procedimiento de lo "general a lo específico" haciendo las pruebas con constante y tendencia para analizar su significancia estadística. El número de rezagos (k) se seleccionó buscando que no existieran pruebas de autocorrelación en los residuales. Además, se utilizó la prueba de Kwiatkowsky *et al* (1992) (KPSS) donde la hipótesis nula es que la serie es estacionaria.

Los principales resultados de estas pruebas indican que las tasas de interés a uno y tres meses y la tasa promedio de un mes para tres meses pueden considerarse como series no estacionarias de orden I(1), posiblemente cercanas a un comportamiento de camino aleatorio. Todas las pruebas de Dickey Fuller y Phillips Perron confirman este resultado con constante y tendencia, con constante y sin constante y tendencia. Asimismo, la KPSS confirma este resultado en los casos con constante y tendencia.

Por su parte las pruebas de Dickey Fuller y Phillips Perron también indican que el spread es una serie estacionaria, lo que sin embargo no es confirmado por la KPSS. En este sentido, esta evidencia no es concluyente pero puede afirmarse en forma general que las tasas de interés de corto y largo plazo tienden a moverse en forma conjunta, lo que puede interpretarse a favor de la hipótesis de expectativas. Podría incluso sugerirse que existe cointegración entre las series pero que probablemente el coeficiente no corresponda estrictamente a los valores de $\beta_0=0$ y

β_1=1 Esto es, la presencia de un spread I(0) entre series originalmente I(1) representa una evidencia débil de cointegración.

Cuadro 1: Pruebas de Raíces Unitarias de Dickey Fuller Aumentada.

ADF(2)	Constante y Tendencia	Constante	Sin constante y tendencia
R28	-2.14164	-1.45977	-0.78265
DR28	-0.50783**	-0.53678**	-10.54872**
R2891	-2.08569	-1.43528	-0.77929
DR2891	-0.69384**	-0.72314**	-10.73353**
R91	-2.0053	-1.40192	-0.78811
DR91	-9.96658**	-9.99413**	-10.00371**
Spread	-4.58776**	-4.3208**	-2.84201

* Se rechaza al 1% de confianza.

** Se rechaza al 5% de confianza

Cuadro 2: Pruebas de raíces unitarias de Phillips Perron

PP(2)	Constante y tendencia	Constante	Sin constante y tendencia
R28	-2.40301	-1.65713	0.77082
DR28	-10.528**	-0.55655**	-10.56803**
R2891	-2.32782	-1.61709	-0.76002
DR2891	-0.70381**	-10.73293	-10.743**
R91	-2.29128	-1.62434	-0.76787
DR91	-9.96648**	-9.99413**	-10.00354
Spread	-4.48601**	-4.20354**	-2.69017*

* Se rechaza al 1% de confianza.

** Se rechaza al 5% de confianza

KPSS	Constante y tendencia	Constante
R28	9.94282	2.12562
DR28	0.0662	0.0689
R2891	9.88232	2.12445
DR2891	0.06759	0.7014
R91	9.44845	2.1775
DR91	0.07274	0.07585
Spread	2.67749	1.3428

Valores críticos al 5% de confianza:

mu=0.463 (incluye intercepto).

Tau=0.146 (incluye tendencia).

Las pruebas de cointegración, tanto la de Johansen (ecuación (4.14) y Cuadro 4), como la de Dickey Fuller en dos etapas (ecuación 4.15), indican que existe una relación estable de largo plazo entre la tasa de corto y de largo plazo. Los coeficientes estimados están cerca de sus valores esperados aunque no corresponden exactamente a los valores de $\beta_0=0$ y $\beta_1=1$.

$$R_t^3 = -0.2472 + 0.9272R_t^1 \qquad (4.14)$$

Cuadro 4: Estadísticos del procedimiento de Johansen

Valor característico	Razón de máxima verosimilitud	Valor crítico al 5%	Valor crítico al 1%	Número de vectores
0.0852	18.00	15.41	20.04	Ninguno
0.0087	1.61	3.76	6.65	Al menos uno

$$R_t^3 = \underset{(6.46)}{0.1866} + \underset{(121)}{0.9444}R_t^1 \qquad (4.15)$$

$R^2 = 0.98$

La presencia de cointegración entre las series permite entonces utilizar modelos para analizar la posible presencia de procesos ARCH o GARCH en los errores que correspondería a la presencia de cambios en la prima de liquidez o el precio del riesgo representado en las ecuaciones (4.6) y (4.7) (Hall, Miles, Taylor 1989). De este modo, puede entonces estimarse que el modelo ARCH o GARCH representa evidencia de que las betas del modelo CAPM son variables.

Así, la estimación de los modelos ARCH y GARCH por máxima verosimilitud indica que existe una prima de riesgo variable. Esta variación puede asociarse como una medida del riesgo y se traduce en el modelo CAPM a la posibilidad de que los coeficientes betas sean variables. En este sentido, se observa que existen cambios en el tiempo y en el nivel de riesgo de los portafolios. Ello puede ser un argumento que permite rechazar la hipótesis de expectativas en el mercado de CETES en México. Esto se traduce en que es necesario modificar los modelos para incluir la posibilidad de riesgo variable.

$$R^3_t = -\underset{(-8.90)}{0.1554} + \underset{(199)}{1.0852}R_t^1$$

$$\sigma^2 = \underset{(3.19)}{0.0003} + \underset{(2.68)}{0.2963}\mathrm{ARCH}(1) + \underset{(13.74)}{0.6461}\mathrm{GARCH}(1)$$

$$R^2 = 0.98 \qquad (4.16)$$

Estimación del modelo ARCH por máxima verosimilitud:

$$S_t = \underset{(4.03)}{0.0786} + \underset{(13.23)}{0.4228}GARCH$$

$$\sigma^2 = \underset{(1.74)}{0.0001} + \underset{(4.54)}{0.4752}ARCH(1) + \underset{(14.84)}{0.5667}GARCH(1) \qquad (4.17)$$

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS GENERALES.

El análisis de portafolios de inversión, cuyo pionero fue Harry Markowitz, ha sido uno de los avances más importantes de la teoría financiera moderna. El punto principal de este avance es que las características de los activos individuales no son tan importantes como las del portafolio de activos. El hecho de que éste pueda cuantificarse ha permitido conocer el "portafolio óptimo de inversión del mercado", del cual se deriva la toma de decisiones para la conformación, compra o venta de los activos individuales.

En este trabajo hemos intentado exponer las principales características para el cálculo del portafolio "óptimo" del mercado. Para ello hemos tenido en cuenta la existencia de N activos de riesgo y el hecho de que cada activo individual está delimitado por varias condiciones estadísticas.

Para conocer el portafolio óptimo del mercado son necesarias dos pruebas fundamentales: la primera, de tipo estadístico, determina la forma de encontrar el portafolio eficiente; y la segunda, de tipo económico, corrobora que el portafolio elegido como eficiente sea realmente el del mercado.

A través del CAPM encontramos: 1) que el portafolio eficiente del mercado es aquel que mantiene una relación lineal entre riesgo y rendimiento, lo que se representa con la línea de capital del mercado; 2) que dicho portafolio está conformado por activos de riesgo cuya varianza en sus rendimientos es la más baja del mercado. La manera en que este modelo predice los rendimientos de los activos en el tiempo ha sido blanco de múltiples críticas. La contribución de Keith Cuthbertson es importante respecto de las versiones Markowitz (1959), Sharpe (1964)-Lintner (1965) y Black (1972), analizadas anteriormente en este trabajo, en la medida en que expone, clara y minuciosamente, los fundamentos microeconómicos esenciales que sustentan al CAPM, así como los ajustes econométricos que deben realizarse para resolver las dificultades implícitas en versiones previas de este modelo financiero.

Una de las críticas que se han formulado al CAPM básico concierne a la construcción del modelo, en el sentido de que no permite estudiar la variabilidad de los rendimientos a lo largo del tiempo, por lo que presenta dificultades estadísticas cuando la varianza condicional cambia en el tiempo (Cuthbertson, 1996, p.43). Si los rendimientos no son normales ni están distribuidos idéntica e independientemente a lo largo del tiempo, entonces pueden utilizarse métodos de estimación que incluyan al concepto de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH por sus siglas en inglés) para evitar la persistencia de la volatilidad de los rendimientos.

Las pruebas econométricas que toman en cuenta la anormalidad, heteroscedasticidad y la dependencia temporal de los rendimientos presentan las siguientes características: 1) en la medida en que el supuesto de normalidad es suficiente, no es necesario derivar el CAPM como un modelo teórico, pues el supuesto de condiciones de normalidad se adopta sólo con fines estadísticos. Además de que sin estas condiciones es más complicado derivar las propiedades de muestra finita de las pruebas de modelos de precios de activos; 2) empíricamente se ha observado que los rendimientos de los títulos se desvían de su valor normal (Fama, 1965, 1976; Blattberg y Gonedes, 1974; Affleck-Graves y McDonald, 1989).Por otra parte, también existe suficiente evidencia de la presencia de heteroscedasticidad y dependencia temporal en los rendimientos de las acciones (Bolerslev, Engle y Nelson, 1994; Bolerslev, Engle y Wooldridge, 1988; Lo y MacKinlay,1988; White, 1980), lo que induce a la utilización de métodos autorregresivos ARCH.

Aunque la dependencia temporal hace que sea improbable que el CAPM se cumpla con plena exactitud, ello no impide el análisis de su comportamiento empírico. Desde fines de los años setenta apareció la denominada "literatura de anomalías" (Basu, 1977; Banz, 1981; Fama y French, 1992, 1993) que presenta análisis empíricos menos favorables a las hipótesis del CAPM. A partir de las pruebas presentadas en esta literatura, las anomalías pueden concebirse como atributos de la empresa (dimensión, calidad de los activos, base de capital, entre otros) que al formar su portafolio de activos determina que el portafolio tangencia exhiba una elevada razón Sharpe *ex post* en relación a la razón Sharpe del portafolio sustituto del mercado. A diferencia de lo que propone el CAPM, los atributos de la empresa pueden explicar los rendimientos medios de la muestra más allá de lo que explica la beta del CAPM.

Las primeras anomalías aludidas por la literatura antes mencionada incluían el efecto de la razón precio-ingreso y el efecto dimensión de la empresa. Basu (1977) planteó que el portafolio del mercado no es eficiente en relación a los portafolios formados con base en la razón precio-ingreso. Las empresas con razón precio-ingreso baja presentan rendimientos más altos, en cambio las que tienen una razón precio-ingreso alta exhiben rendimientos medios menores, y este sería el caso si el portafolio del mercado fuera eficiente.

En cuanto al efecto dimensión de la empresa, las firmas con una baja capitalización de mercado tienen rendimientos medios mayores, los que sólo se esperarían si el portafolio de mercado fuera eficiente. Además, las empresas que ostentan una razón precio-ingreso baja tienden a ser pequeñas, por lo que estas dos anomalías se relacionan (Banz, 1981).

Por otra parte, Fama y French (1992, 1993) descubrieron que la beta no puede explicar la diferencia entre los rendimientos de los diversos portafolios formados sobre la base de la razón valor en libros-valor de mercado de los títulos. Debido a que las empresas con una alta razón valor en libros-valor de mercado tienen rendimientos medios mayores a los que indica el CAPM.
Similarmente, otros autores señalan que los portafolios formados con base en la compra de acciones cuyo valor descendió en el pasado reciente y en la venta de acciones cuyo valor se incrementó

recientemente, tienen rendimientos medios mayores a los que pronostica el CAPM (Jegadeesh y Titman, 1993).

La "literatura de anomalías" no representa una crítica de naturaleza teórica al CAPM; más bien señala discrepancias de orden empírico de las variables económicas respecto de las hipótesis de ese modelo. No obstante, es posible que la evidencia empírica contraria al CAPM esté influida por sesgos o distorsiones en los datos, así como por la imposibilidad de seleccionar la información sin sesgos perturbadores.

Cuthbertson (1996) sostiene que el CAPM es importante sólo cuando los inversionistas deciden diversificar sus portafolios y determinar las proporciones que deberán mantener entre activos con riesgo y activos sin riesgo; es decir, cuando buscan replicar o emular el portafolio eficiente dictado por el mercado. Esta nueva manera de presentar al CAPM considera que detrás de la toma de decisiones de los inversionistas existe el teorema de la separación de los fondos. Lo anterior equivale a afirmar que los movimientos de inversión de los fondos financieros se realizan en la forma de dos decisiones separadas: primera, los agentes siguen lo dictado por las variables del mercado (rendimiento, variabilidad y correlación) y mantienen sus activos en proporciones óptimas sin que interfieran sus preferencias individuales; segunda, deciden cuánto invertir o apalancar sus inversiones dependiendo de sus preferencias individuales, pero sin que esto altere las proporciones fijas de activos con riesgo. Por tanto, sin modificar las proporciones óptimas dictadas por el modelo del mercado (Cuthbertson, 1996, pp. 22-24). En este nuevo enfoque las betas determinan la variabilidad de los rendimientos de los activos con riesgo. Asimismo, de acuerdo a los valores que presenten respecto del rendimiento del portafolio del mercado, los activos se clasifican en agresivos, neutrales y defensivos (Cuthbertson, 1996, p. 25): si $\beta>1$ los activos son agresivos porque sus rendimientos esperados se mueven más rápido que los rendimientos esperados del portafolio del mercado; si $\beta=1$ el activo es neutral y su rendimiento se mueve a la par que el rendimiento del portafolio del mercado; por último, los activos son defensivos cuando $\beta<1$, lo que significa que los rendimientos esperados se mueven muy despacio respecto del comportamiento de los rendimientos del portafolio del mercado.

El método de estimación de las betas se condiciona a las proporciones óptimas X^*_i obtenidas por la aplicación del CAPM. Es por ello que el portafolio de mercado o cualquier portafolio *p* de activos sólo contiene *proporciones óptimas* de activos agresivos, neutrales y defensivos. En tales circunstancias, a cualquier combinación derivada del portafolio del mercado se le puede aplicar el modelo CAPM si se desea analizar la relación entre riesgo y rendimiento.

En suma, Cuthbertson (1996, p. 41) deduce que "el CAPM presenta una forma explícita para la prima de riesgo"

$$rp_i = \lambda_m \operatorname{cov}\left(R_i, R^m\right)$$

Con la ecuación anterior se puede corroborar la hipótesis implícita en el CAPM que propone que "sólo la covarianza de los rendimientos entre el activo i y el portafolio del mercado influye en el rendimiento excedente" (Cuthbertson, 1996, p. 41). Al respecto, Cuthbertson argumenta, sin embargo, que lo anterior no es analíticamente suficiente y afirma que es necesario tomar en cuenta la razón precio/dividendos, la razón precio/ganancia y el tamaño de las empresas. De lo contrario -concluye-, el CAPM sólo explicaría la tasa de rendimiento excedente del activo i en relación a la tasa de rendimiento excedente del mercado, como se indica en la ecuación (3.99).

Para evaluar el conjunto del debate teórico y la evidencia empírica disponible, se procedió a evaluar un modelo CAPM utilizando los datos del mercado de CETES en México. Las ventajas de ello se asocian con la evidencia empírica que indica que las tasas de interés son series no estacionarias de orden I(1) y posiblemente pueden caracterizarse como sendas aleatorias. La evidencia empírica también sugiere que tienden a moverse en paralelo las tasas de interés de corto y de largo plazo. Ello se debe probablemente a los efectos que ocasionan variables adicionales tales como la tasa de inflación. No obstante que las series se mueven conjuntamente, puede rechazarse la hipótesis de expectativas en la medida en que no se cumple que $\beta_0=0$ y $\beta_1=1$.

Además, la prima de riesgo es variable, como lo muestran las estimaciones de los modelos ARCH y GARCH. Esto explica en alguna medida el rechazo de la hipótesis de expectativas, pero también sugiere que existe un riesgo variable en el tiempo que los coeficientes del modelo CAPM no logran capturar. En este sentido, los problemas del modelo CAPM para el mercado mexicano de CETES se deben en buena medida a esta variabilidad en el riesgo.

BIBLIOGRAFIA

Affleck-Graves, J., y B. McDonald, 1989, "Nonnormalities and Tests of Asset Pricing Theories," *Journal of Finance*, Número 44, pp. 889-908.

Bailey Warren y Y. Peter Chung, 1995, "Exchange Rate Fluctuations, Political Risk, and Stock Returns: Some Evidence from Emerging Market", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 30.No.4, diciembre, 541-561.

Basu, S., 1977, "The Investment Performance of Common Stocks in Relation to their Price to Earnings Ratios: A Test of The Efficient Market Hypothesis," *Journal of Finance*, Número 32, pp. 663-682.

Basu, S.,1983, "The relationship Between Earnings Yield, Market Value and Return for Nyse Common Stocks, *The Journal of Financial Economics*, vol. 12, 129-156.

Banz, R., 1981, "The Relation between Return and Market Value of common Stocks," *Journal of Financial Economics*, número 9, pp. 3-18.

Black, F., 1972, "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing," *Journal of Bussines*, número 45, julio, pp. 444-454.

Black, F., M. Jensen y M. Scholes, 1972, "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests," en Jensen, M. (editor), *Studies in the Theory of Capital Markets*, Praeger, Nueva York.

Blattberg, R. y N., Gonedes, 1974, "A Comparison of Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices," *Journal of Business*, número 47, pp. 244-280.

Blume, M. y I. Friend, 1973, "A New Look at the Capital Asset Pricing Model," *Journal of Finance*, número 28,pp.10-33.

Bollerslev, T., R. Engle, y J. Wooldridge, 1988, "A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances," *Journal of political Economy*, vol. 96, no. 1, pp. 116-131.

Bower Dorothy H., Richard S. Bower y Dennis E. Logue, 1984, "Arbitrage Princing Theory and Utility Stock Returns", *The Journal of Finance*",vol.39,No.4,septiembre 1041-1054.

Breeden, Douglas T., 1979, "An Intertemporal Asset Pricing Model With Stochastic Consumption and Investment Opportunities", *The Journal of Financial Economics*, vol. 7, 265-262.

Breeden, Douglas. Michael R. Gibbons y Robert H. Litzenberger,1989, "Empirical Tests of the Consumption-Oriented CAPM", *The Journal of Finance*, vol. 44, No. 2, junio, 231-262.

Brown Stephen J. y Mark I. Weinstein, 1983, "A New Approach to Testing Asset Princing Models: The Bilinear Paradigm", *The Journal of Finance*, vol.38, No. 3, junio 711-739.

Burmeister Edwin, Richard Roll y Stephen A. Ross, 1944, "Using Macroeconomics Factors to Control Portfolio Risk", *Documento de Investigación*.

Cass, D. y Shell, K., 1983, "Do Sunspots Matter?," *Journal of Political Economy*, número 96, pp. 116-131.

Cornell Bradford,1981, "The Consumption Based Asset Pricing Model A Note on Potential Tests and Applications", *Journal of Financial Economics*, vol 9, 103-108.

Chamberlain Gari, 1983, "Funds , Factors and Diversification in Arbitrage Pricing Models", *Econometrica*, Vol. 51, No. 5, septiembre, 1305-1323.

Chamberlain Gari y Michael Rothschild, 1983, "Arbitrage, Factor Structure, and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets", *Econometrica*, vol.51, No.4,septiembre 1041-1054.

Chand Bhandari Laxmi, 1988, "Debt/ Equity Ratio and Expected Common Stock Returns: Empirical Evidence", vol. 43, No. 2, Junio, 507-528.

Chen Nai-Fu y Jonathan E. Ingersoll, Jr. Exact Pricing in Linear Factor Models with Finitely Many Assets: A Note", *Journal of Finance*, vol. 38. No. 3, junio, 985-988.

Chen Son-Nan y Arthur J. Keown, 1981, "Risk Descomposition and Portfolio Diversification when Beta is Nonestationary: A Note", *The Journal of Finance*, vol.36, No.4, septiembre, 941-947.

Clare Andrew, Richard Priestley y Stephen Thomas, 1997, "The Robustness of the APT to Alternative Estimators", *Journal of Business Finance and Accounting*, vol.24, No.5, junio, 645-655.

Cuthbertson, K., 1996, *Quantitative Financial Economics: Stocks, Bonds and Foreign Exchange*, John Wiley, Nueva York.

Engle, Robert F.; Lilien, David M.; Robins, Russell P.,(1995), "Estimating Time-Varying Risk premia in the Term Structure: The ARCH-M Model", Oxford University Press.

Epstein Larry G., 1980, "Capital Asset Prices and the Temporal Resolution of Uncertainty", *The Journal of Finance*, vol. 35, No.3, junio, 627-643.

Fama, E. F., 1965, "The Behavior of Stock Market Prices,"*Journal of business*, número 38, pp. 34-105.

Fama, E. F.,1970, "Efficient Capital Markets: A Review Of Theory And Empirical Work," *Journal of Finance*, número 25, pp.383-417.

Fama, E. F.,1976, *Foundations of Finance*, Basic Books, Nueva York.

Fama, E. F.,1984, Forward and Spot Exchange Rates, *Journal of Monetary Economics*, vol 14, pp. 319-338.

Fama, E. F.,1991, "Efficient Capital Markets: II," *Journal of Finance*, No.46,pp.1575-1618.

Fama, E. F.,1996, "Multifactor Portfolio Efficiency and Multifactor Asset Pricing, *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, vol. 31, No.4, diciembre, 441-465.

Fama, E. F y J. D. MacBeth, 1973, "Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests", *Journal of Political Economy*, mayo, pp. 607-636

Fama, E., y K. French, 1992, "The Cross-Section of Expected Stock Returns," *Journal of Finance*, Vol.47, No.2,Junio, pp.427-465.
Fama, E., y K. French,1993, "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds," *Journal of Financial Economics*, número 33,pp. 3-56.
Fama, E., y K. French,1996, "The CAPM is Wanted, Dead or Alive", *The Journal of Finance,* vol.LI, No.5,diciembre, 1947-1958.
Fama, E., y K. French,1996, "Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies", *Journal of Finance,* vol. 51, No. 1, marzo, 55-84.
Ferson Wayne E., Shmuel Kandel y Robert F. Stambaugh, 1987, "Test of Asset Pricing with Time-Varying Expected Risk Premiums and Market Betas", *The Journal of Finance,* vol. 42, No.2, junio, p. 201-220.
Francis, J.C., 1991, "Investments: Análisis and Management", McGraw-Hill International Editions.
Friend Irwin, Radolph Westerfield and Michel Granito, 1978, "New Evidence on The Capital Asset Pricing Model", *The Journal of Finance*, vol. 33, No. 3, junio, 903-921.
Galindo, L. M., 1995a, "La econometría aplicada moderna: Los mínimos cuadrados ordinarios y las pruebas de diagnóstico," *Economía Aplicada,* Cuadernos de Trabajo número 17, UNAM.
Galindo, L. M.,1995b, "La Metodología Econométrica Moderna: una versión aplicada," *Economía Aplicada*, Cuadernos de Trabajo No.18,UNAM
Gibbons Michael R., 1982, "Multivariate Test of Financial Models. A new Approach", *The Journal of Financial Economics*, Vol. 10, 3-27.
Hendry, David, F., 1995, *Dynamic Econometrics*, Universidad de Oxford, pp. 692-694.
Jegadeesh, N. y S. Titman, 1993, "Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency," *Journal of Finance*, número 48, pp. 65-91.
Keynes, J. M., 1971-1989, *The Collected Writings of J. M. Keynes*, editado por D. E. Moggridge y E. Johnson, Macmillan, Londres.
Jensen, M. C. (editor) 1972, *Studies in the Theory of Capital Markets*, Praeger, Nueva York.
Judge, G., W. E. Hill, R. C. Lütkepohl, H. y Lee, T.C., 1985, *The Theory and Practice of Econometrics*, segunda edición, John Wiley, Nueva York.
Kandel, S., 1984, "The Likelihood Ratio Test of Mean-Variance Efficiency without a Riskless Asset," *Journal of Financial Economics*, número 13, pp. 575-592.
Lintner, John ,1965, "The Valuation of Risk Asset and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios, and Capital Budgets," *Review of Economics and Statistics*,vol.47, febrero, pp. 13-37.

Lo, A. (editor), 1996, *Market Efficiency: Stock Market Behaviour in Theory and Practice*, Edward Elgar Publishing, Ltd., Londres.

Lo, A. y C. Mackinlay, 1988, "Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test," *Review of Financial Studies*, número 1, pp. 41-66.

Lucas, R. E. Jr. 1972, Expectations and the neutrality of money, *Journal of Economic Theory*, 4, pp. 103-124.

Lucas, R. E. Jr. 1973, Some international evidence on output-inflation tradeoff, *American Economic Review* 68,pp.326-334.

Malkiel, B., 1992, "Efficient Market Hypothesis," Eatwell, J., P. Newman y M. Milgate (editores), *New PalgraveDictionary of Money and Finance*, Macmillan, Londres.

Markowitz, Harry, 1959, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley, Nueva York.

Mendenhall, W., Scheaffer, R., Wackerly, D.,1986, *Estadística Matemática con Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 128-137.

Merton Robert C., 1973, "An intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica*, vol. 41, No. 5, septiembre, 867-887.

Mishkin, F., 1995, *The Economics of Money, Banking, and Financial Markets*, cuarta edición, Harper Collins, New York.

Mossin Jan, 1966, "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, vol.34, No. 4, octubre, 768-783.

Roll, R., 1977, "A Critique of the Asset Princing Theory´s Tests Part I: On Past and Potential Testability of the theory", *Journal of Financial Economics*, marzo, pp. 129-176.

Ross, A. Stephen, 1976, "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing," *Journal of Economic Theory*, Diciembre, pp. 341-360.

Samuelson, P., 1965, "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly," *Industrial Management Review*, número 6, pp. 41-49.

Sargent, T.J., 1972, Rational expectations and the term structure of interest rates, *Journal of Money Credit and Banking*, 4, pp. 74-97.

Sargent, T.J., 1978, Rational expectations, econometric exogenity, and consumption, *Journal of Political Economy*, 86, pp.673-700.

Sargent, T.J., 1979, A note on the maximum likelihood estimation of the rational expectations model of the term structure, *Journal of Monetary Economics*, 5, pp. 133-143.

Shackle, G. L. S., 1967, *The Years of High Theory, 1926-1939*, Cambridge University press, Cambridge.

Shanken, J., 1986, "Testing Portfolio Efficiency when the Zero-Beta Rate is Unknown," *Journal of Finance*, número 41, pp. 269-276.