00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIOS DE ADJUNCION DE LOS G - ESPACIOS ANE EQUIVARIANTES Y SUS APLICACIONES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

P R E S E N T A :

M.C. ARMANDO MATA ROMERO

DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGEY ANTONYAN

MEXICO, D. F. NOVIEMBRE, 2003

A

A OSCAR Y GELY,
ESENCIA DE MI VIDA.

Sólo aquello que se ha ido es lo que nos pertenece.
Jorge Luis Borges

AGRADECIMIENTOS

Quiero aprovechar este espacio para agradecer a las personas que contribuyeron de manera diversa a la conclusión de esta tesis.

A mis sinodales, por el trabajo y tiempo que dedicaron a la revisión de la presente y que, sin lugar a dudas, permitieron mejorarla en un gran porcentaje.

Al Dr. Sergey Antonyan, por su paciencia, por sus enseñanzas de la matemática y de la vida. Por la enorme cantidad de conocimientos que me dejan sus pláticas y sus demostraciones.

A mis padres y hermanos, mi familia de origen, por aparecer siempre en mis laberintos y conducirme a la salida con un cariño infinito.

A la familia de mi esposa, por el cobijo, el apoyo y el cariño siempre presentes.

A Cristina y Manuel, por abrirme la puerta de su casa pero, sobre todo, por permitirme ser su amigo.

A Fidel, compañero de soledades, por el valor incalculable de su amistad.

A la Escuela de Matemáticas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, por todo el apoyo y las facilidades que permitieron finalizar esta etapa.

A mi familia, mi esposa y mi hijo, por justificar mi existencia y darle una razón a este trabajo. También a ellos mis disculpas, por todas las mañanas, por todas las tardes, por todas las noches, que no estuve con ustedes. Los amo.

Índice General

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se enmarca dentro de la Teoría Equivariante de Retractos. Esta área surge como una intersección de dos ramas importantes de la topología: la Teoría de Retractos y la Teoría de Grupos Topológicos de Transformaciones. La primera de ellas tiene sus bases en los Teoremas de Tietze y Tietze-Urysohn. En 1931, K. Borsuk sistematiza estos hechos englobándolos en una misma área . Él introduce las nociones de retracto y retracto absoluto sobre la clase de espacios metrizables. Posteriormente en los trabajos de O. Hanner **[19]** se generaliza el concepto de retracto absoluto sobre clases de espacios más generales y se introduce el concepto de extensor absoluto.

La importancia de los retractos absolutos y los extensores radica en que espacios topológicos de gran relevancia como son las variedades, los complejos simpliciales, los CW-complejos, pertenecen a esta clase de espacios.

Por otro lado, la teoría de los grupos topológicos de transformaciones se origina en el siglo pasado y corresponde a una confluencia exitosa de diversas áreas de la matemática como la topología, el análisis funcional, el álgebra y la geometría. En el Seminario Henri Cartan 1949-1950 se desarrolló la teoría de haces fibrados, importante en el desarrollo de la teoría de los G-espacios, dado que éstos son generalizaciones de haces principales. A partir de aquí se produce un desarrollo vertiginoso en la teoría de los grupos topológicos de transformaciones y matemáticos como De Vries, Smith, Montgomery, Zippin, Yang, Borel, Floyd, Conner, Mostow y Palais, entre otros, aportan una gran cantidad de resultados que enriquecen y fortalecen la teoría.

En nuestro caso, como mencionamos en un principio, estableceremos resultados correspondientes a la teoría equivariante de retractos. En esta rama contribuyeron de manera esencial Gleason **[18]**, Palais **[38]**, J. Jaworowski **[28]**, **[29]**, **[30]**, Lashof **[33]**, Smirnov **[40]**, De Vries **[43]**, Antonyan **[3]**, **[4]**. Un compendio acerca de la teoría equivariante de retractos lo puede encontrar en el artículo panorámico **[3]**. Los siguientes autores H. Abels **[1]**, **[2]**, G. Bredon **[11]**, S. Illman **[24]**, I. M.

James y G. B. Segal **[27]**, T. Matumoto **[34]**, T. Dieck **[42]**, con sus trabajos sobre topología algebraica equivariante influyeron de manera importante al desarrollo de la teoría equivariante de retractos. En esta línea se trata de establecer resultados análogos a los ya existentes en la teoría de retractos pero considerando que los espacios topológicos poseen una acción de un grupo topológico no trivial y que las funciones continuas entre estos espacios conmutan con la acción del grupo (funciones equivariantes).

El camino para establecer una versión equivariante de un resultado correspondiente a espacios topológicos no es inmediato pues depende de las propiedades topológicas del grupo y del espacio, así como de la definición de la acción. Una manera que ha resultado fructífera para la "equivarientización" de resultados, es el considerar acciones de grupos compactos (ver por ejemplo, **[11]**, **[35]** y **[38]**).

Sin embargo si la compacidad del grupo se debilita a compacidad local surgen problemas para establecer resultados similares. Este hecho propició que en 1961 R. Palais introdujera la noción de G-espacio propio (ver **[39]**) con el propósito de extender una parte sustancial de la teoría de las acciones de grupos compactos.

De hecho, si G es un grupo compacto entonces cualquier G-espacio es propio. Si G es discreto y X es locamente compacto, la noción de acción propia coincide con la noción clásica de acción *propiamente discontinua*.Si G es el grupo aditivo de los reales, los G-espacios propios corresponden a los sistemas dinámicos dispersos con espacio de órbitas regular. En este último caso si además el espacio fase es metrizable y separable entonces los G-espacios propios coinciden con los espacios paralelizables (ver **[1]**).

En la última década el interés por los G-espacios propios resurgió. Entre los trabajos que retoman el concepto merecen especial atención los de S. Illman **[25]** y **[26]**. En particular, en **[26]** se prueba que si G es un grupo de Lie entonces cada G-variedad propia suave posee una estructura de G-CW-complejo. Bajo la misma suposición sobre G, E. Elfving **[15]** prueba que si una variedad topológica posee una acción propia localmente lineal entonces tiene el mismo G-tipo de homotopía que un G-CW-complejo. También, en **[6]** y **[8]** se consideran propiedades de retracción de los espacios orbitales y G-espacios propios universales.

En el caso no equivariante, una de las ventajas más importantes de los CW-complejos es la propiedad de ser un espacio ANE. En el caso de los G-CW-complejos (los cuales fueron introducidos por S. Illman en **[23]** y **[24]**, y por T. Matumoto en **[34]**) la pregunta natural es, *¿Es* *un G-CW-complejo un espacio G-ANE?* Esta pregunta, para el caso general, aún permanece abierta. Uno de los propósitos principales de esta tesis es investigar este hecho.

En conexión con lo anterior, en el Capítulo II §4 probaremos la versión equivariante del teorema clásico de Borsuk-Whitehead-Hanner acerca del espacio de adjunción $X \cup_f Y$ de una función continua $f : A \longrightarrow Y$ donde A es un subconjunto cerrado de X. La versión de este teorema en **[21]** establece que si $X \cup_f Y$ es metrizable entonces es un ANR siempre que X y Y también lo sean. En **[21]** D. M. Hyman probó que $X \cup_f Y$ es un ANE sin suponer la metrizabilidad de $X \cup_f Y$. Sin embargo, Hyman supone la metrizabilidad tanto de X como de Y. Aquí se establecerá el resultado equivariante análogo, probando que $X \cup_f Y$ es un G-ANE sobre la clase G-$\mathcal{M}$ de los G-espacios propios metrizables que admiten una métrica invariante, siempre que $X \in G$-$\mathcal{M}$ y los tres G-espacios X, A y Y sean G-ANE para la clase G-$\mathcal{M}$. En este caso no se supone la metrizabilidad de Y y en consecuencia se tiene una generalización del teorema de Hyman considerando la acción trivial. En las pruebas se seguirá la idea general del artículo de Hyman **[21]** y se utilizarán métodos de la teoría equivariante de retractos. Además se establecerán resultados análogos para el caso de los espacios G-AE.

Otro resultado importante que se establece y prueba en este trabajo, corresponde a la versión equivariante del teorema de Kodama **[31]**, acerca de la unión de espacios ANE. En el Capítulo II §5 mostraremos dicha versión considerando la unión de espacios G-ANE para G-espacios propios, donde G es un grupo localmente compacto de Hausdorff.

Posteriormente, se aplicarán estos resultados en el Capítulo II §6, para probar que si G es un grupo de Lie entonces cada G-CW- complejo propio es un G-ANE.

Otra de las líneas que se siguen en esta tesis se deriva de la versión equivariante del teorema de Borsuk-Whitehead-Hanner (BWH). Si en el espacio de adjunción $X \cup_f Y$, el espacio Y consiste sólo de un punto, entonces se dice que el conjunto *se colapsa a un punto,* denotándose el espacio como X/A. Del teorema equivariante de BWH surge entonces la pregunta: si X es un G-ANR y A es un subconjunto cerrado de X, ¿X/A es un G-ANE? En el tercer capítulo de este trabajo se establecerá, para el caso de la acción de un grupo compacto, que el hecho de X/A sea un G-ANE depende solamente de A y no de X. Más precisamente probaremos que si A es un G-espacio métrico y si existe un G-espacio $X_0 \in G$-$ANR(A)$ (donde G-$ANR(A)$ denota la clase de los G-ANR que contienen a A como un cerrado invariante) tal que $X_0/A \in G$-ANE, entonces para cada $X \in G$-$ANR(A)$ se tiene que $X/A \in G$-ANE. De aquí se desprende la definición de divisor G-ANR, esto es, *un G-espacio A se dice que es un divisor G-ANR si es metrizable y X/A es un G-ANE para cada espacio $X \in G$-$ANR(A)$.*

Para el caso no equivariante, la noción de divisor ANR fue introducida por D. M. Hyman en [22]. En el Capítulo III, nosotros seguiremos la idea general de este artículo para establecer algunas condiciones para que un G-espacio sea un divisor G-ANR, para lo cual definiremos en Capítulo III §3, la noción de base de vecindades por G-deformación y en §4 del mismo capítulo, los espacios absolutamente G-contraíbles por vecindad. En §5 se probará también el teorema equivariante de la propiedad de extension de G-homotopía. Al final de este capítulo en §6, se estudiarán las operaciones de unión y espacio cociente de los divisores ANR y de los espacios absolutamente G-contraíbles por vecindad.

En cuanto a la estructura, el trabajo consiste de tres capítulos. El primero de ellos está contemplado para que los lectores adquieran los conceptos básicos de la teoría equivariante de retractos y de las acciones de los G-espacios propios. En el segundo, como ya se mencionó, se establecen las versiones equivariantes de los teoremas de Borsuk-Whitehead-Hanner y de Kodama, así como su aplicación a los G-CW complejos. El tercer capítulo está destinado al estudio de las propiedades de extensión y retracción de los G-espacios obtenidos al colapsar un G-subespacio cerrado y metrizable de un G-espacio a un punto, así como a establecer teoremas de divisores G-ANR y espacios absolutamente G-contraíbles por vecindad, similares a los que se tienen en espacios G-ANR. Es importante mencionar que cuando se mencione alguna proposición, teorema, lema o corolario, si no se hace la especificación del capítulo significa que su numeración corresponde a la del capítulo en el que se usa. En caso necesario se hará la anotación del capítulo correspondiente.

La mayor parte de los resultados de esta tesis están contenidos en el artículo [7]. Así mismo, se reportaron por mi parte en los siguientes congresos internacionales: *Spring Topology and Dynamical Systems (México, Marzo 2001), V Iberoamerican Conference on Topology and Its Applications (España, Junio 2003).* Estos resultados fueron también reportados en los Congresos Nacionales de la Sociedad Matemática Mexicana en los años 2001 y 2003. En el Congreso de la SMM del 2002 reporté un resultado sobre G-espacios que no se encuentra en esta tesis y aparecerá en mi artículo "Sobre un Teorema de J. De Groot" en las *Aportaciones de la SMM.*

INTRODUCCIÓN

CAPITULO 1

PRELIMINARES DE LA TEORÍA DE RETRACTOS Y G-ESPACIOS

1. Introducción

El presente trabajo está enmarcado dentro de la Teoría Equivariante de Retractos. Así, este primer capítulo está destinado a establecer las herramientas necesarias tanto sobre Teoría de Retractos como de los Grupos Topológicos de Transformaciones. En la última sección se conjuntarán las dos áreas y se establecerán versiones equivariantes de las nociones de retracto, retracto absoluto y extensor absoluto. Además, en §1.4 se introduce el concepto de G-espacio propio, noción cuya importancia radica en el hecho de que permite extender resultados fundamentales de acciones de grupos compactos a acciones de grupos localmente compactos. Lo anterior será expuesto de manera superficial pues sólo se pretende presentar aquello que será necesario para los capítulos posteriores. En caso de que se quiera profundizar con detalle en estos temas, existen obras de excelente calidad donde se presenta un estudio más detallado de ellos. Para la teoría de retractos se pueden ver las obras clásicas de K. Borsuk [**12**] y de S. T. Hu [**20**]. Las ideas y hechos básicos de G-espacios pueden encontrarse en las obras de G. Bredon [**11**], de Montgomery-Zippin [**35**] y de R. Palais [**38**]. Nuestra principal referencia sobre los G-espacios propios es el artículo de R. Palais [**39**]; otras buenas fuentes son [**1**], [**2**], [**23**] y [**32**]. Un compendio de la teoría equivariante de retractos se puede encontrar en [**3**] y en [**4**]. En cuestiones de topología general se puede consultar los textos clásicos de R. Engelking [**17**] y J. Dujundji [**14**].

2. Retractos

De aquí en adelante para referirnos a una función continua lo haremos mediante la palabra *aplicación* . El problema de extender una aplicación $f : A \to Y$ de un subconjunto cerrado A de un espacio X, a todo X, o al menos a alguna vecindad U de A en X, es frecuente encontrarlo en topología. Cuando $X = Y$ y f es la inclusión $i : A \to Y$, dicho problema merece una atención especial. En este caso se convierte en un problema de *retracción*. Para entender mejor este hecho, formalicemos la noción de retracto y mostremos la importancia de sus propiedades.

Definición 2.1. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Si la aplicación identidad $id : A \to A$ tiene una extensión continua $r : X \to A$, entonces A se dice que es un* **retracto** *de X y r es llamada una* **retracción.**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & X \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd}$$

En otras palabras, una retracción de un espacio X sobre un subespacio A de X es una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada punto $a \in A$. Dado que r es sobre, si X es de Hausdorff entonces r preserva la compacidad, la conexidad y la conexidad por trayectorias.

Algunos ejemplos de retractos son los siguientes:

Ejemplo 2.2. *Sea X un espacio topológico. Cualquier subespacio A de X, tal que A consiste de un sólo elemento, es un retracto de X.*

Ejemplo 2.3. *Todo espacio X es un retracto de sí mismo.*

Ejemplo 2.4. *Considere la $(n-1)$-esfera $\mathbf{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, ||x|| = 1\}$ en $\mathbb{R}^n$. Sea $X = \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$. Entonces $\mathbf{S}^{n-1}$ es un retracto de X mediante la retracción radial $r : X \to \mathbf{S}^{n-1}$ definida como*

$$r(x) = (\frac{x_1}{|x|}, ..., \frac{x_n}{|x|})$$

para cada punto $x = (x_1, ..., x_n)$ de X. Aquí $|x|$ denota la norma euclidiana x y $\overline{0}$ al elemento de $\mathbb{R}^n$ con todas las coordenadas iguales a cero.

Ejemplo 2.5. *Sean Y y Z dos espacios topológicos y $X = Y \times Z$. Si $(y_0, z_0) \in X$ entonces $Y \times \{z_0\}$ es homeomorfo a Y es un retracto de X mediante la aplicación proyección al primer factor (de la misma manera $\{y_0\} \times Z$ también es un retracto del producto con la proyeccción al segundo factor). Por ejemplo, cada meridiano del toro $\mathbb{T} = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ es un retracto de $\mathbf{T}$.*

La siguiente proposición muestra la manera en que la existencia de una retracción implica la existencia de una extensión e inversamente.

Proposición 2.6. *Sea $A \subset X$. Luego, A es retracto de X si y sólo si para cualquier espacio Y cada aplicación $g : A \longrightarrow Y$ tiene una extensión sobre X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $r : X \longrightarrow A$ una retracción y $g : A \longrightarrow Y$ una aplicación donde Y es cualquier espacio. Entonces la composición $g \circ r : X \longrightarrow Y$ es una extensión de g sobre X. La otra implicación es inmediata haciendo $Y = A$. $\square$

A continuación se mencionan algunas propiedades de retractos que muestran la importancia de su estudio. Estas propiedades permiten decidir cuándo un espacio es retracto de otro y aplicar el problema de retracción a cuestiones topológicas más generales (por ejemplo el Teorema de Punto Fijo de Brouwer). Las demostraciones de estas propiedades las puede encontrar en **[20]**, Capítulo I.

(i) Si $f : X \longrightarrow X$ es una aplicación idempotente (i.e. $f \circ f = f$) entonces $f(X)$ es un retracto de X.

(ii) Cada retracto de un espacio X de Hausdorff, es cerrado en X.

(iii) Si X es un espacio que tiene la propiedad de punto fijo y A es un retracto de X, entonces A también tiene la propiedad de punto fijo.

(iv) Un retracto de un espacio (localmente) contraíble es (localmente) contraíble.

(v) Un retracto de un espacio localmente conexo también es localmente conexo.

Otra noción fundamental de la teoría de retractos la constituyen los *retractos absolutos (de vecindades)*, así como los *extensores absolutos (de vecindades)*. Espacios topológicos de importancia pertenecen a este tipo de espacios. Éstos originalmente fueron definidos sobre la clase de los espacios métricos separables, en particular sobre los espacios métricos compactos. Gradualmente se generalizaron a espacios métricos arbitrarios y finalmente a clases más generales de espacios (ver **[20]**). En este trabajo adoptaremos la definición sobre clases de espacios débilmente hereditarias, aunque posteriormente lo aplicaremos en particular a clases de espacios metrizables.

Definición 2.7. *Una clase C de espacios topológicos se dice que es* **débilmente hereditaria** *si cumple que:*

i) para todo $X \in C$ y Y homeomorfo a X implica que $Y \in C$.

ii) para todo $X \in C$ y A un subespacio cerrado de X se tiene que $A \in C$.

En las siguientes dos definiciones se establecen los conceptos de ANR y ANE.

Definición 2.8. *Un espacio $Y \in C$ se dice que es un* **Retracto Absoluto de Vecindad** *para la clase C (denotado como $Y \in ANR(C)$) si siempre que Y está encajado como un subespacio cerrado en un espacio $Z \in C$, entonces Y es un retracto de una vecindad de Y en Z.*

Definición 2.9. *Un espacio Y se dice que es un* **Extensor Absoluto de Vecindad** *para la clase C (denotado como $Y \in ANE(C)$) si cada aplicación $f : A \to Y$, donde A es un subespacio cerrado de un espacio $X \in C$, tiene una extensión $F : U \to Y$, con U una vecindad de A en X.*

En ambos casos, si la vecindad la constituye todo el espacio entonces se tienen los conceptos de AR y AE sobre la clase C, respectivamente.

Los teoremas clásicos de Tietze, Tietze-Urysohn y Dujundji, así como algunas propiedades que pueden ser encontradas en **[12]** o en **[20]** proveen diversos ejemplos de espacios ANR y ANE.

Ejemplo 2.10. *$I = [0, 1]$ es un $AE(\mathcal{N})$, donde $\mathcal{N}$ denota la clase de los espacios normales. (Teorema de Tietze).*

Ejemplo 2.11. *Cualquier subespacio convexo de $\mathbb{R}$, es decir cualquier intervalo, es un $AE(\mathcal{N})$. (Teorema de Tietze-Urysohn).*

Ejemplo 2.12. *El cubo de Hilbert es un espacio $AE(\mathcal{N})$.*

Ejemplo 2.13. *El n-disco $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ y el simplejo Δ^n de dimensión n son $AE(\mathcal{N})$.*

Ejemplo 2.14. *La $(n-1)$-esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ es un $ANE(\mathcal{N})$.*

Ejemplo 2.15. $\mathbb{R}^n$ *es un espacio* $AE(\mathcal{N})$.

Ejemplo 2.16. *Los espacios* CW*-complejos son* $ANE(\mathcal{M})$, *donde* $\mathcal{M}$ *denota la clase de los espacios metrizables.*

Ejemplo 2.17. *Cada conjunto convexo en un espacio vectorial localmente convexo es un* $AE(\mathcal{M})$. *(Teorema de Dugundji).*

Ejemplo 2.18. *Cualquier espacio metrizable que es homeomorfo a un retracto (de vecindad) de un subconjunto convexo de un espacio de Banach es un* AR *(respectivamente* ANR*).*

Ejemplo 2.19. *Un espacio metrizable compacto que es homeomorfo a un retracto (de vecindad) del cubo de Hilbert es un* AR *(respectivamente* ANR*).*

Ejemplo 2.20. *Cada subconjunto convexo de un espacio normado lineal es* AR.

Una cuestión importante en los inicios de la teoría de retractos es determinar cuando un $ANR(C)$ es un $ANE(C)$. Esto es cierto para ciertas clases de espacios, por ejemplo para la clase de los espacios normales. En sentido contrario, el hecho es siempre cierto para cualquier clase de espacios, como lo muestra la siguiente proposición cuya prueba se puede ver en [20], págs. 83-84.

Proposición 2.21. *Sea* $Y \in C$. *Si* $Y \in ANE(C)$ *(resp.* $Y \in AE(C)$*) entonces* $Y \in ANR(C)$ *(resp.* $Y \in AR(C)$*).*

3. G-Espacios

Uno de los principales objetivos de este trabajo es establecer versiones de algunos resultados de la teoría de retractos dentro de la categoría de los G-espacios, es decir, cuando los espacios topológicos poseen alguna acción continua de un grupo topológico y las aplicaciones entre ellos conmutan con la acción. Estos espacios en conjunto con las aplicaciones mencionadas forman una categoría conocida como G-TOP. Para aclarar lo anterior definamos a continuación lo que es un G-espacio. Aquí consideraremos que los grupos topológicos son de Hausdorff.

Definición 3.1. *Por un* **Grupo Topológico de Transformaciones** *o un* **G-espacio** *se entenderá una terna (G, X, θ) donde G es un grupo topológico, X es un espacio topológico y $\theta : G \times X \to X$ es una función continua que satisface:*

i) $\theta(e, x) = x$, para todo $x \in X$, donde e es la identidad de G,

ii) $\theta(h, \theta(g, x)) = \theta(hg, x)$, para todos $x \in X$, $g, h \in G$.

A la función θ se le conoce como **acción** y por comodidad denotaremos $\theta(g, x)$ como gx.

En diversas ramas de la matemática se presentan situaciones donde aparecen acciones continuas de grupos sobre espacios topológicos. Por ejemplo, en sistemas dinámicos las acciones del grupo aditivo $\mathbb{R}$ o del grupo $\mathbb{Z}$ forman la base de su teoría. En las áreas de topología diferencial y topología algebraica se ha desarrollado una extensa teoría equivariante.

Mostraremos a continuación algunos de los ejemplos más conocidos.

Ejemplo 3.2. *Cualquier grupo topológico G actúa en sí mismo mediante la multiplicación izquierda.*

Ejemplo 3.3. *La acción trivial $\theta(g, x) = x$, para todos $g \in G$, $x \in X$, hace actuar cualquier grupo topológico G sobre cualquier espacio topológico X.*

Ejemplo 3.4. *Sea $\{X_\alpha\}$ una colección de G-espacios. La acción diagonal en el producto ΠX_α es generada por la acción de G en cada X_α.*

Ejemplo 3.5. $G = \mathbb{S}^1$, $X = \mathbb{C}$, $\theta(e^{it}, re^{ix}) = re^{i(x+t)}$.

Ejemplo 3.6. $G = (\mathbb{R}, +)$, $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\theta(t, (x, y)) = (e^t x, e^t y)$.

Ejemplo 3.7. $G = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$, $\theta(t, (x, y)) = (x, t + y)$

Ahora bien, para cada $g \in G$, la acción θ determina un homeomorfismo $\theta_g : X \to X$, donde $\theta_g(x) = \theta(g, x)$, para todo $x \in X$.

Así, la correspondencia $g \mapsto \theta_g$ define una función $\Phi : G \to Homeo(X)$, donde $Homeo(X)$ es el grupo de homeomorfismos de X en X. Se sigue inmediatamente que Φ es un homomorfismo de grupos.

Si X es un G-espacio y $x \in X$, se definen los siguientes conjuntos:

$G_x = \{g \in G | gx = x\}$, llamado el **estabilizador** de x.

$G(x) = \{gx | g \in G\}$, la **órbita** de x.

Además, si $G_x = G$, entonces x es un **punto fijo**, y X^G denota el conjunto de puntos fijos de X.

Sean A un subconjunto de X y H un subgrupo de G; denotemos por HA el subconjunto de X definido como $HA = \{ha | h \in H, a \in A\}$. Luego,

Si $HA = A$, diremos que A es un conjunto H-**invariante** . En el caso que $H = G$ entonces A se dirá simplemente **invariante** .

Definición 3.8. *Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ entre G-espacios es una G-**aplicación** o **función equivariante** si satisface $f(gx) = gf(x)$, para cada $g \in G$ y cada $x \in X$.*

En el caso de que Y sea un G-espacio trivial, es decir G actúa trivialmente sobre Y, la función equivariante $f : X \longrightarrow Y$ será llamada **invariante,** esto es, $f(gx) = f(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $g \in G$.

Note que la función identidad es equivariante y la composición de dos funciones equivariantes es equivariante. Así, los G-espacios como objetos y las G-aplicaciones como morfismos forman una categoría, la cual denotaremos por $\mathbf{Top}^G$ o G-**Top**.

La siguiente proposición establece un hecho fundamental en la teoría de los G-espacios. Su prueba se puede ver, por ejemplo, en **[11]**.

Proposición 3.9. *Sea X un G-espacio con acción θ. Entonces θ es abierta. En el caso cuando G es compacto, θ es cerrada.*

Ahora bien, si x_1 y $x_2 \in X$, entonces $G(x_1) = G(x_2)$ o $G(x_1) \cap G(x_2) = \emptyset$. Esto origina una descomposición de X en las órbitas de cada uno de sus puntos. Así, la relación $x \sim y$ si y sólo si $G(x) = G(y)$, es una relación de equivalencia cuyas clases son precisamente las órbitas de X. Al conjunto $X/\sim$ lo denotaremos por X/G y a la función que asocia a cada x con su clase de equivalencia, la representaremos por π y la llamaremos **proyección orbital.**

Un problema importante en la teoría de los grupos topológicos de transformaciones y en particular en nuestro trabajo, lo constituye la existencia de métricas tales que cada transición en cada elemento del grupo sea una isometría. Estas métricas son definidas a continuación.

Definición 3.10. *Una métrica ρ para un G-espacio metrizable X, compatible con su topología, es una* **métrica invariante** *si $\rho(gx, gy) = \rho(x, y)$ para todo $g \in G$, y para todos $x, y \in X$, esto es, si el homeomorfismo θ_g es una isometría respecto a la métrica ρ, para todo $g \in G$.*

En general no siempre existe una métrica invariante en un G-espacio metrizable (por ejemplo ver el $\mathbb{Z}$-espacio $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con la acción mostrada en **[32]** pág. 2). Sin embargo, para ciertos casos la existencia es válida. Por ejemplo si el grupo G es compacto entonces un G-espacio metrizable siempre admite una métrica invariante (**[38]**). En **[39]** se prueba que si G es un grupo de Lie y X es un G-espacio propio (ver en la Sección 5 de este capítulo) metrizable separable entonces existe una métrica invariante compatible, en X. J. De Vries en **[43]** establece que esto último es también cierto si G es cualquier grupo metrizable. J. L Koszul **[32]** probó la existencia de una métrica invariante compatible en un G-espacio propio metrizable localmente compacto donde G es un grupo arbitrario.

4. Retractos equivariantes

En esta sección presentaremos las definiciones de retracto absoluto (de vecindad) equivariante y de extensor absoluto (de vecindad) equivariante, de acuerdo a **[3]**.

Aquí C^G denota la clase de G-espacios que también pertenecen a la clase débilmente hereditaria C.

Definición 4.1. *Un G-espacio Y es llamado un G-***extensor absoluto de vecindad** sobre C^G o G-$ANE(C)$ *si para cada $X \in C^G$ y cada subconjunto cerrado invariante A de X, cualquier G-aplicación $f : A \to Y$ puede ser extendida a una G-aplicación $F : U \to Y$, donde U es una vecindad invariante de A en X.*

Definición 4.2. *Un G-espacio Y es llamado un G-***retracto absoluto de vecindad** sobre C^G o un G-$ANR(C)$ *si $Y \in C^G$ y siempre que Y sea un cerrado invariante de un G-espacio $Z \in C^G$, entonces Y es un retracto equivariante de vecindad de Z.*

De manera análoga al caso no equivariante, se tienen diversas propiedades de los G-ANR y G-ANE, cuando la acción es de un grupo compacto. A continuación estableceremos algunas de estas propiedades.

Lema 4.3. *Sea X un G-espacio métrico. Si X es un retracto equivariante de vecindad de un espacio $Y \in G$-ANE, entonces X es un G-ANE.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un cerrado invariante de un G-espacio métrico Z, y $f : A \longrightarrow X \subset Y$ una función equivariante. Como $Y \in G$-ANE, existe $g : U \longrightarrow Y$, una función equivariante, donde U es una vecindad invariante de A en Z y $g|_A = f$.

Sea $r : V \longrightarrow X$ la retracción equivariante de una vecindad invariante V de Y sobre X. Definamos $W = g^{-1}(V)$ y $F = r \circ g|_W$. Es claro entonces que F es una función equivariante de W sobre X. Además, $F|_A = f$. Por lo tanto X es un G-ANE.

□

Teorema 4.4. *Cualquier subconjunto abierto invariante de un G-ANE es un G-ANE.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $Y \in G$-ANE y W un subconjunto abierto invariante de Y. Sea $f : A \longrightarrow W$ una función equivariante, donde A es un cerrado invariante de un G-espacio normal X. Entonces, afirmamos que f tiene una extensión equivariante de vecindad.

En efecto, sea $i : W \longrightarrow Y$ la inclusión. Como $Y \in G$-ANE, la composición $\phi = i \circ f : A \longrightarrow Y$ tiene una extensión equivariante $\psi : V \longrightarrow Y$, donde V es una vecindad invariante de A. Considere la preimagen $U = f^{-1}(W)$ en V. Como U es abierto en V y V es abierto en X, entonces U es un abierto en X que contiene a A. Además, U es invariante ya que W lo es y f es equivariante. Entonces la función $g : U \longrightarrow W$, definida por $g(x) = \psi(x)$, para $x \in U$, es una extensión equivariante de vecindad de f.

□

Teorema 4.5. *Sea G un grupo compacto. Entonces un G-espacio métrico X es un G-ANE si y sólo si X es un G-ANR.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $X \in G$-ANR. De acuerdo a **[4]** págs. 518 y 523, X puede ser encajado de manera equivariante, como un cerrado de algún G-espacio métrico $Z \in G$-AE. Como $X \in G$-ANR, el espacio X

es un retracto de vecindad equivariante de Z. Así, por el lema anterior se concluye esta parte.

Inversamente, consideremos a X como un cerrado invariante de un G-espacio métrico Z y a $id : X \to X$, la identidad en X. Como $X \in G$-ANE la G-aplicación id tiene una extensión de vecindad equivariante $r : U \to X$, con U una vecindad invariante de X en Z. Por lo tanto, $X \in G-$ANR.

□

En capítulos posteriores se desarrollarán más resultados correspondientes a la teoría equivariante de retractos mismos que permitirán establecer diversos ejemplos.

5. Acciones de grupos localmente compactos

El estudio de las acciones de grupos compactos brinda una gran cantidad de resultados dentro de la teoría de los grupos topológicos de transformaciones. Permitiendo además, establecer versiones equivariantes de conceptos y teoremas de la topología general (ver **[38]**, **[3]**, **[35]**, **[11]**). No obstante, en una gran cantidad de casos se requiere que el grupo no sea compacto sino localmente compacto. Por ejemplo, las acciones de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{Z}$ son esenciales en sistemas dinámicos. Sin embargo, en este caso la riqueza de resultados es menor, por lo que es necesario establecer condiciones adicionales tanto en el tipo de acción como en los espacios donde se actúa. R. Palais **[39]** introduce la noción de G-espacios propios y G-espacios de Cartan con el propósito de extender la teoría de acciones de grupos compactos al caso general de acciones de grupos localmente compactos sobre espacios de Tichonov.

Dada la importancia de este tipo de G-espacios en el desarrollo del presente trabajo, se establecerán en este capítulo los principales hechos y propiedades sobre los G-espacios de Cartan y G-espacios propios.

Comencemos por definir la siguiente relación entre subconjuntos de un G-espacio.

Definición 5.1. *Sean U y V subconjuntos de un G-espacio X. Se dice que U* **es relativamente delgada respecto a** *V (lo cual se denotará como $U \overset{t}{\sim} V$) si el subconjunto de G, $\langle U, V\rangle = \{g \in G | gU \cap V \neq \emptyset\}$ tiene cerradura compacta. Cuando U es relativamente delgada respecto a ella misma, se dice simplemente que U es* **delgada.**

Algunas propiedades del conjunto $\langle U, V\rangle$, las cuales son fáciles de verificar, se mencionan a continuación:

Proposición 5.2. *El subconjunto $\langle U, V\rangle$ satisface:*

(1) $\langle U, V\rangle = \langle V, U\rangle^{-1}$;

(2) $\langle g_1 U, g_2 V\rangle = g_2\langle U, V\rangle g_1^{-1}$, para todos $g_1, g_2 \in G$;

(3) Sea Ω un conjunto de índices. Se cumple que $\langle \cup_\alpha U_\alpha, V\rangle = \cup_\alpha\langle U_\alpha, V\rangle$, para $\alpha \in \Omega$.

(4) Sea Ω un conjunto de índices. $\langle \cup_\alpha U_\alpha, \cap_\alpha V_\alpha\rangle \subset \cup_\alpha\langle U_\alpha, \cap_\alpha V_\alpha\rangle$, para $\alpha \in \Omega$.

De aquí se desprende que si $U \overset{L}{\sim} V$ entonces $V \overset{L}{\sim} U$, por lo que sólo se dirá que U y V son relativamente delgadas. También si $U \overset{L}{\sim} V$ entonces sus traslaciones $g_1 U$ y $g_2 V$, donde g_1 y $g_2 \in G$ también son relativamente delgadas. Además los subconjuntos de U y de V también serán relativamente delgados si lo son U y V. Por (3) de la proposición anterior se tiene que cualquier unión finita de conjuntos relativamente delgados con respecto a V es relativamente delgada con respecto a V. Por (4) de la Proposición anterior se satisface que si $U_i \overset{L}{\sim} V_i$ para $i = 1, 2, .., n$ entonces $\cup_{i=1}^n U_i \overset{L}{\sim} \cap_{i=1}^n V_i$. En el caso en que C_1 y C_2 son subconjuntos compactos de X el conjunto $\langle C_1, C_2\rangle$ es cerrado en G, por lo que si $C_1 \overset{L}{\sim} C_2$ entonces $\langle C_1, C_2\rangle$ es compacto.

A partir de la Definición 5.1 se establece lo que es un G-espacio de Cartan.

Definición 5.3. *Un G-espacio X se dice que es un* **G-espacio de Cartan** *si cada punto de X tiene una vecindad delgada.*

Es claro que si G es compacto entonces cada subconjunto de un G-espacio X es delgado, es decir, X es un G-espacio de Cartan.

Cuando el grupo actúa libremente sobre X, (es decir el grupo de isotropía en cada punto de X es trivial) se tiene que el G-espacio X cumple con el axioma básico de H. Cartan para haces principales, establecido en el *Seminaire H. Cartan* de 1948-1949, lo cual explica la selección del nombre.

A continuación se describen algunos ejemplos de G-espacios de Cartan.

Ejemplo 5.4. *Sean $G = \mathbb{R}$ el grupo aditivo de los números reales y $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Aquí G actúa sobre X mediante la siguiente acción*

$$\theta(t, (x, y)) = (e^t x, e^{-t} y).$$

Entonces X es un G-espacio de Cartan.

Ejemplo 5.5. *$\mathbb{R}^2$ con la acción θ de $\mathbb{R}$ definida de la siguiente manera*

$$\theta(t, (x, y)) = (x, t + y),$$

es un G-espacio de Cartan.

Ejemplo 5.6. *Considere la acción de $\mathbb{Z}$ (con la topología discreta) sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, definida por*

$$n(x, y) = (2^n x, 2^{-n} y)$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es un espacio de Cartan.

Un G-espacio que no es de Cartan, aún cuando G es localmente compacto, es el siguiente:

Ejemplo 5.7. *Sea Y el cuadrante positivo del plano cartesiano, esto es,*

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Es fácil verificar que Y es un G-espacio de acuerdo con la acción del ejemplo 5.4. Al identificar los puntos $(x, 0)$ y $(0, 1/x)$ en Y se obtiene un nuevo G-espacio Z el cual ya no es un G-espacio de Cartan.

Como se dijo en un principio, existen resultados que se cumplen cuando el grupo es compacto, pero que dejan de hacerlo cuando el grupo ya no tiene esta propiedad. No obstante, en un G-espacio de Cartan se pueden rescatar algunos de ellos.

Proposición 5.8. *Sea X un G-espacio de Cartan. Entonces cada órbita de X es cerrada en X y cada estabilizador de X, es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in X$ y V_x una vecindad delgada de x. Mostremos primeramente que G_x es cerrado en G. Sea $\{g_\alpha\}$ una red en G_x convergente a $g \in G$. Entonces $\{g_\alpha x\}$ es convergente a gx. Por otra parte $g_\alpha x = x$, para todo α. Por tanto, $\{g_\alpha x\}$ es convergente también a x. Como G es de Hausdorff entonces $gx = x$ y, por tanto, $g \in G_x$. Así, G_x es cerrado en G.

Ahora bien, como G_x es subconjunto de $\overline{\langle V_x, V_x\rangle}$, el espacio G_x es compacto.

Probemos ahora que $G(x)$ es cerrado en X. Sean $y \in \overline{G(x)}$ y U una vecindad delgada de y. Sea $\{g_\alpha x\}$ una red en $G(x)$ convergente a y. Sea α_0 fijo tal que $g_{\alpha_0}x \in U$. Se tiene entonces $(g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1})(g_{\alpha_0}x) = g_\alpha x$; así que $g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1} \in \langle U, U\rangle \subset \overline{\langle U, U\rangle}$. Luego se tiene una subred de $\{g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1}\}$ convergente a $h \in G$ (por comodidad la subred la seguiremos denotando por los mismos índices). De aquí que $\{g_\alpha\}$ converge a $\{hg_{\alpha_0}\} = g$. Entonces por un lado $\{g_\alpha x\}$ converge y y por otro converge a gx, por lo que $gx = y$ y, por tanto, $y \in G(x)$. Se concluye que $G(x)$ es cerrado. □

Cuando X no es un G-espacio de Cartan, la proposición anterior puede fallar como en el caso del flujo irracional.

Proposición 5.9. *Sean X un G-espacio de Cartan y $x \in X$. Entonces la función continua $\phi : G \to G(x)$ definida como $\phi(g) = gx$, para todo $g \in G$, es abierta.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por e al elemento identidad de G. Sea U cualquier vecindad de e en G. Entonces basta probar que $U(x)$ es una vecindad de x en $G(x)$ dada la homogeneidad de G. Para esto supongamos lo contario, es decir, que $U(x)$ no es abierto en $G(x)$. Entonces existe una red $\{g_\alpha\}$ en G tal que $g_\alpha x \notin U(x)$, para todo α, pero $\{g_\alpha x\}$ converge a x.

Ahora bien, si $g_\alpha x = hx$ para $h \in U$ entonces $g_\alpha x = hgx$ donde $g \in G_x$. Es decir, $g_\alpha \in UG_x$ e inversamente. Esto es, $g_\alpha x \in U(x)$ si y sólo si $g_\alpha \in UG_x$. Por lo tanto, en nuestro caso se tiene que $g_\alpha \notin UG_x$ y puesto que UG_x es una vecindad de G_x no existe ninguna subred de $\{g_\alpha\}$ que converja a un elemento de G_x. Sea V una vecindad delgada de x. Como a partir de cierto α_0 se tiene que $g_\alpha x \in V$ para $\alpha \geq \alpha_0$, podemos tomar una subred $\{g_{\alpha_i} x\}$ de manera que $g_{\alpha_i} \in \langle V, V\rangle$. Ahora bien, como $\langle V, V\rangle$ tiene cerradura compacta, tomemos otra vez una subred $\{g_{\alpha_{i_j}}\}$ que converja a un punto k. Entonces, se tiene que $kx = x$, es decir $k \in G_x$, lo cual es una contradicción. Por tanto $U(x)$

debe ser una vecindad de x en $G(x)$, por lo que queda concluida la demostración.

$\square$

La proposición anterior implica el siguiente corolario:

Corolario 5.10. *Sean X un G-espacio de Cartan y $x \in X$. Entonces la función $\theta_x : G/G_x \to G(x)$ definida como $\theta_x(gG_x) = gx$ es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil verificar que θ_x es biyectiva. La continuidad de ella y de su inversa se sigue del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G/G_x \arrow[rr, "\theta_x"] & & G(x) \\ & G \arrow[ul, "\pi"] \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Aquí ϕ es la aplicación de la Proposición 5.9 y π es la proyección orbital de la acción de G_x sobre G, la cual es continua y abierta.

$\square$

El caso del flujo irracional nos muestra que la proposición anterior no siempre es válida si X no es un G-espacio de Cartan.

Pasemos ahora a estudiar los G-espacios propios. El origen de la noción de G-espacio propio se debe a un trabajo no publicado de A. Borel quien los definió para G-espacios localmente compactos. Cuando el grupo es discreto dicha noción coincide con la de *propiamente discontinua*,de ahí el nombre.

Los G-espacios propios son una clase más restringida de espacios de Cartan y generan resultados que envuelven el caso de acciones de grupos compactos.

Definamos primeramente la siguiente clase de subconjuntos de un G-espacio.

Definición 5.11. *Un subconjunto U de un G-espacio X se dice que es* **pequeño** *si cada punto de X tiene una vecindad que es relativamente delgada con U.*

Algunas propiedades se siguen fácilmente de la relación establecida en la Definición 5.1.

1. Un subconjunto de un conjunto pequeño es pequeño.

2. La unión finita de conjuntos pequeños es un conjunto pequeño.

3. Si U es un conjunto pequeño de X y F un subconjunto compacto de X entonces F es relativamente delgada respecto a U y de hecho F tiene también una vecindad que es relativamente delgada respecto a U.

4. Si A es un subconjunto invariante de X y V es un conjunto pequeño de A, entonces V no es necesariamente un conjunto pequeño de X.

Ahora estamos en posición de definir lo que es un G-espacio propio en el sentido de R. Palais [39].

Definición 5.12. *Un G-espacio X es* **propio** *si cada punto de X tiene una vecindad pequeña.*

Algunos ejemplos de G-espacios propios son los siguientes:

Ejemplo 5.13. *Si G es compacto entonces cada G-espacio es propio.*

Ejemplo 5.14. *Si H es un subgrupo compacto de un grupo G localmente compacto, entonces el espacio homogéneo de clases laterales izquierdas G/H es un G-espacio propio.*

Ejemplo 5.15. *Sea E el espacio euclideano n-dimensional y considere el conjunto $N(E)$ de todas las normas sobre E. Sea $GL(n)$ el n-grupo general lineal y θ la acción de $GL(n)$ sobre $N(E)$ definida como*

$$\theta(g,f) = gf; \quad (gf)(x) = f(g^{-1}x).$$

Entonces $N(E)$ es un $GL(n)$-espacio propio (ver [5]).

Ejemplo 5.16. *El Ejemplo 5.6 muestra un espacio de Cartan que no es propio.*

Las pruebas de los siguientes hechos sobre G-espacio propios se siguen de las propiedades de los conjuntos pequeños y delgados.

1. Si X es un G-espacio propio entonces cada subconjunto compacto de X es pequeño y tiene una vecindad pequeña.

2. Si X es un G-espacio propio entonces cada subconjunto compacto de X es delgado y tiene una vecindad delgada.

3. Si X es un G-espacio propio y F es un subconjunto compacto de X entonces $\langle F, F\rangle$ es un subconjunto compacto de G.

También es posible generar espacios propios a partir de conjuntos abiertos delgados.

Proposición 5.17. *Sea U un subconjunto abierto delgado de un G-espacio X. Entonces, la saturación GU de U es un G-espacio propio, esto es, cada punto de un G-espacio de Cartan pertenece a un conjunto abierto invariante el cual es un G-espacio propio.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba es inmediata dado que gU y hU son relativamente delgadas para cualesquiera g y $h \in G$

□

Como habíamos afirmado, cada G-espacio propio es un G-espacio de Cartan. Para verificar este hecho basta con tomar un punto $x \in X$, donde X es un G-espacio propio, una vecindad pequeña U de x y una vecindad V de x relativamente delgada respecto a U. Claramente $U \cap V$ es una vecindad delgada de x, y por tanto, X es un G-espacio de Cartan.

Sin embargo, lo inverso es falso. El Ejemplo 5.4 muestra un G-espacio de Cartan que no es un G-espacio propio.

Para observar cuándo se cumple este hecho es necesario verificar los axiomas de separación que se cumplen en el espacio orbital. Por ejemplo no todos los espacios de Cartan tienen espacio orbital Hausdorff. Para mostrar esta situación, sean $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1\}$ y el grupo aditivo $\mathbb{R}$ actuando sobre él de la siguiente manera:

(i) Si $|x_0| < 1$ sea $C_{(x_0,y_0)}$ la traslación vertical de la gráfica de la ecuación

$$y = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

de manera que (x_0, y_0) esté en $C_{(x_0,y_0)}$. Se define entonces para $t \in \mathbb{R}$, $t(x_0, y_0)$ como el punto (x, y) de $C_{(x_0,y_0)}$ tal que la longitud del arco de $C_{(x_0,y_0)}$ que une (x_0, y_0) con (x, y) es igual a $|t|$ y x es mayor o menor que x_0 de acuerdo a si t es positivo o negativo.

(ii) Si x_0 es igual a 1 o -1 se define la acción como $t(1,y) = (1, y+t)$ y $t(-1,y) = (-1, y-t)$.

Es claro entonces que las órbitas de $x = 1$ y $x = -1$ no pueden ser separadas por conjuntos abiertos saturados y por lo tanto, $X/\mathbb{R}$ no es Hausdorff.

Una de las condiciones para que un G-espacio propio sea de Cartan es que su espacio de órbitas sea regular.

Proposición 5.18. *Si X es un G-espacio de Cartan y X/G es regular entonces X es un G-espacio propio.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in X$ y U una vecindad abierta delgada de x. Luego GU es una vecindad de $G(x)$ y como X/G es regular, existe una vecindad invariante V de $G(x)$ tal que $G(x) \subset V \subset \overline{V} \subset GU$. Sea $W = U \cap V$. Mostremos que W es una vecindad pequeña de x en X. Si $y \in GU$, entonces $y \in gU$ para algún $g \in G$. Además, gU es una vecindad de y relativamente delgada respecto a U y a W Si $y \notin GU$, entonces $X \setminus \overline{V}$ es una vecindad de y y, dado que $\overline{V}$ es invariante, $\langle X \setminus \overline{V}, W\rangle = \emptyset$, así que $X \setminus \overline{V}$ es relativamente delgada respecto a W.
□

Veamos ahora cómo son los espacios orbitales de los G-espacios propios para así poder obtener alguna equivalencia entre ellos y los G-espacios de Cartan.

Para esto estableceremos algunos resultados previos. Primeramente, el siguiente lema es un hecho de topología general, cuya demostración se puede ver v. gr. en [14].

Lema 5.19. *Sean K un espacio compacto y Z un espacio métrico. Denotemos por M^Z el conjunto de todas las funciones continuas de Z en M con la métrica $\rho(f,g) = \sup_{z \in Z}\{\rho(f(z), g(z))\}$. Si X es un espacio topológico arbitrario y $f : X \times Z \longrightarrow M$ es continua, definimos $f_x \in M^Z$ para cada $x \in X$ como $f_x(z) = f(x,z)$. Entonces $\alpha : X \longrightarrow M^Z$ definido como $\alpha(x) = f_x$ es una función continua. De aquí que si M es un espacio de Banach y μ es cualquier medida de Radon sobre K entonces $\beta : X \longrightarrow M$ definida como $\beta(x) = \int f_x(z)d\mu(z)$ es una función continua.*

Una de las técnicas para construir funciones continuas equivariantes en acciones de grupos compactos es utilizar la integral de Haar normalizada, esto es, "se promedia sobre el grupo" (ver por ejemplo

[38] o [11]). La siguiente proposición muestra una variante cuando el grupo es localmente compacto.

Proposición 5.20. *Sean X un G-espacio y f una función continua de X sobre un G-espacio lineal V de dimensión finita. Si el soporte de f (esto es, la cerradura del conjunto $\{x \in X | f(x) \neq 0\}$) es un subconjunto pequeño U de X entonces la función $F(x) = \int g^{-1} f(gx) d\mu(g)$, donde μ es la medida de Haar derecha sobre G, es una función equivariante de X en V. Más aún $F(x) = 0$ para $x \in X \setminus GU$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x_0 \in X$ y W una vecindad de x_0 relativamente delgada respecto a U. Denotemos por C la cerradura de $\langle W, U \rangle$. Entonces C es compacto y $f(gx) = 0$ si $x \in W$ y $g \notin C$. Por tanto $F|_W(x) = \int_C g^{-1} f(gx) d\mu(g)$. Dado que $\gamma : W \times C \to V$ definida como $\gamma(x, g) = g^{-1} f(gx)$ es una función continua, se sigue del Lema 5.19 que $F|_W$ es continua y entonces es continua en x_0.

Ahora bien, si $x \notin GU$, entonces $f(gx) = 0$, para todo $g \in G$, pues en caso contrario significaría que existe un $g \in G$ tal que $gx \in U$, es decir, $x \in g^{-1}U \subset GU$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Así, $F(x) = 0$, para todo $x \notin GU$.

Finalmente, verifiquemos que F cumple la condición de ser equivariante. Sea $h \in G$. Entonces

$$F(hx) = \int g^{-1} f(ghx) d\mu(g);$$

si hacemos $k = gh$ se tiene que

$$F(hx) = \int hk^{-1} f(kx) d\mu(k) =$$
$$= h \int k^{-1} f(kx) d\mu(k) = hF(x),$$

donde el sacar a h fuera de la integral se justifica dado que la acción de G sobre V es una función lineal.

□

La siguiente proposición nos dice cómo es el espacio de órbitas de un G-espacio propio.

Proposición 5.21. *Sea X un G-espacio propio. Entonces X/G es completamente regular.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo a la Proposición 5.8, el espacio orbital X/G es T_1.

Ahora sean $x_0 \in X$ y $[x_0] = \pi(x_0) \in X/G$, donde π es la proyección orbital en X. Sean F un subconjunto cerrado de X/G que no contiene a $[x_0]$ y U una vecindad pequeña de x_0 disjunta de $\pi^{-1}(F)$. Consideremos ahora una función f no negativa con valores reales sobre X con soporte en U tal que $f(x_0) > 0$. Por la Proposition 5.20 la función $f^*(x) = \int f(gx)d\mu(g)$ es una función invariante, continua, con valores reales sobre X y cumple que $f^*(x_0) > 0$ y que tiene soporte en GU por lo que es disjunto de $\pi^{-1}(F)$. Si definimos f como $f = f^*\pi^{-1}$ entonces dado que f^* es invariante, f está bien definida sobre X/G y cumple con que $f([x_0]) > 0$ y $f|_F \equiv 0$.

Como π es una función abierta se sigue entonces que f es continua, concluyéndose que X/G es completamente regular

□

Los siguientes corolarios se desprenden inmediatamente de los resultados anteriores. Para el primero, la condición necesaria se sigue del hecho de que cada G-espacio propio es de Cartan y de la Proposición 5.21, mientras que la Proposición 5.18 establece su suficiencia. En el caso del segundo corolario, la prueba se sigue de las Proposiciones 5.17 y 5.21.

Corolario 5.22. *Sea X un G-espacio. Entonces X es propio si y sólo si es un G-espacio de Cartan con espacio orbital X/G regular.*

Corolario 5.23. *Sea X un G-espacio. Si X es de Cartan entonces su espacio de órbitas X/G es completamente regular localmente.*

El lema que a continuación se demuestra nos permitirá establecer una serie de equivalencias sobre los G-espacios propios, muy importantes puesto que nos permiten hacer diversas caracterizaciones de ellos.

Lema 5.24. *Sea X un G-espacio. Si para cada par de puntos de X se tienen vecindades relativamente delgadas entonces el espacio orbital X/G es de Hausdorff.*

Demostración. Sea $T = \{(x, gx) | x \in X, g \in G\}$. Para probar que X/G es Hausdorff, mostremos que el conjunto T es cerrado en $X \times X$. Supongamos que la red $\{x_\alpha, g_\alpha x_\alpha\}$ converge a (x, y) y sean U y V vecindades de x y y respectivamente, las cuales son relativamente delgadas entre sí. Se puede suponer entonces que $x_\alpha \in U$ y $g_\alpha x_\alpha \in V$. Así que $g_\alpha \in \langle U, V\rangle \subset \overline{\langle U, V\rangle}$. Tomemos una subred $\{g_{\alpha_i}\}$ de $\{g_\alpha\}$

tal que converja a $g \in G$. Dado que x_{α_i} converge a x se tiene que, por un lado $lim\ g_\alpha x_\alpha = y$ y por otro lado $lim\ g_\alpha x_\alpha = gx$, así que $(x, y) = (x, gx) \in T$. Es decir, T es cerrado en $X \times X$.

$\square$

El siguiente teorema resume gran parte de nuestros resultados anteriores.

Teorema 5.25. *Sea X un G-espacio localmente compacto. Entonces son equivalentes:*

(1) Para cada par de puntos en X existen vecindades relativamente delgadas entre sí.

(2) X es un G-espacio de Cartan y X/G es un espacio de Hausdorff.

(3) X es un G-espacio propio.

(4) Cada subconjunto compacto de X es pequeño.

(5) Cada subconjunto compacto de X es delgado o, equivalentemente, si $K \subset X$ es compacto, entonces $\langle K, K \rangle$ es compacto.

Demostración. Es claro que (1) implica que X es de Cartan y por el Lema 5.24 X/G es de Hausdorff. Dado que X/G es localmente compacto de Hausdorff, X/G es regular, es decir (2) implica (3). Como en un G-espacio propio los subconjuntos compactos son pequeños se tiene que (3) implica (4) y dado que un subconjunto compacto está delgadamente relacionado a un conjunto pequeño, la propiedad (4) implica (5). Finalmente si (5) es cierta, sean U y V vecindades compactas de x y y respectivamente. Entonces $U \cup V$ es delgada y forzosamente U está delgadamente relacionada con V.

$\square$

Un hecho importante es saber si las construcciones de G-espacios a partir de otros, permiten preservar las propiedades de ser G-espacios propios y de Cartan. Las siguientes proposiciones tienen el propósito de mostrar algunos resultados al respecto.

Proposición 5.26. *Sean X un G-espacio propio (respectivamente de Cartan), H un subgrupo cerrado de G y Y un subespacio H-invariante de X. Entonces Y es un H-espacio propio (respectivamente de Cartan).*

DEMOSTRACIÓN. En el caso en que X es un G-espacio propio, sean $y \in Y$ y U' una vecindad pequeña de y en X. Si $z \in Y$, entonces existe una vecindad V' de z en X que está delgadamente relacionada con U'. Tomemos $U = U' \cap Y$ y $V = V \cap Y$, luego U y V son vecindades de y y z en Y respectivamente. Entonces $\langle U, V \rangle \subset \langle U', V' \rangle$. Así, $\langle U, V \rangle$ tiene cerradura compacta, es decir, U es una vecindad pequeña de y en Y. Se concluye que Y es un H-espacio propio. La prueba para el caso de G-espacio de Cartan es similar.

□

Proposición 5.27. *Sean X un G-espacio propio y N un subgrupo normal cerrado de G. Entonces X/N es un G/N-espacio propio.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que G/N actúa sobre X/N de la siguiente manera:

$$(gN)(N(x)) = N(gx),$$

donde $gN \in G/N$, $N(x) \in X/N$.

De acuerdo a las Proposiciones 5.21 y 5.26 se sigue que X/N es un G/N-espacio. Más aún, $(X/N)/(G/N)$ es homeomorfo a X/G y, por la Proposición 5.21 es completamente regular. Entonces por la Proposición 5.18, es suficiente mostrar que X/N es un G-espacio de Cartan. Sean $[x] = N(x) \in X/N$ y U una vecindad delgada de x en X. Pasando al espacio orbital tenemos que $[U] = \{N(y) | y \in U\}$ es una vecindad de $[x]$ en X/N, dado que la proyección orbital es abierta. Además, si $p : G \to G/N$ es la proyección canónica entonces es fácil verificar que $p(\langle U, U \rangle) = \langle [U], [U] \rangle$ y, dado que $\overline{\langle U, U \rangle}$ es compacto en G, entonces $\overline{\langle [U], [U] \rangle}$ es compacto en G/N, por lo que $[U]$ es una vecindad delgada de $[x]$ en G/N y, entonces, X/N es un G-espacio de Cartan y, por lo tanto, G-propio.

□

En el siguiente capítulo usaremos una clase especial de G-espacios, la clase de todos los G-espacios propios metrizables que admiten una métrica invariante, la cual la denotaremos por G-$\mathcal{M}$.

Si G es compacto entonces G-$\mathcal{M}$ coincide con la clase de todos los G-espacios metrizables.

Si G es un grupo de Lie, entonces G-$\mathcal{M}$ incluye todos los G-espacios propios separables, metrizables (ver [38]).

El usar esta clase de G-espacios nos permite, entre otras cosas, que los espacios orbitales sean espacios metrizables y, por tanto, normales.

Proposición 5.28. *Si $X \in G\text{-}\mathcal{M}$ entonces X/G es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que X es un G-espacio propio, por [**39**] pág. 298, para cada $x \in X$, la órbita $G(x)$ es cerrada en X. Esto implica que X/G es T_1. Como X posee una métrica invariante y es T_1, por el Teorema 2.16, pág. 38 en [**37**], se sigue que X/G es metrizable. □

CAPÍTULO 2

ESPACIOS DE ADJUNCIÓN EQUIVARIANTES

1. Introducción

Nos enfocaremos ahora en la propiedad de un G-espacio de ser un espacio G-ANE [ver Definición 4.1 del primer capítulo] y veremos si dicha propiedad es preservada por el espacio de adjunción.

Borsuk, Whitehead y Hanner probaron en etapas sucesivas para el caso no equivariante que si A, X y Y son espacios ANR entonces el espacio de adjunción es un ANR siempre y cuando sea metrizable (para cuando A es compacto ver **[20]**).

D. M. Hyman **[21]** probó que el espacio de adjunción es un ANE sin suponer la metrizabilidad de este espacio, pero sí la de X y Y.

En este capítulo se establecerá la versión equivariante del Teorema de Hyman donde G será un grupo localmente compacto, y eliminaremos la metrizabilidad de Y y, de hecho, la aplicamos al caso no equivariante (acción trivial) para generalizar dicho teorema. Además los G-espacios de este capítulo serán G-espacios propios en el sentido del Capítulo II y los G-ANE y G-ANR se considerarán sobre la clase G-$\mathcal{M}$ definida al final del capítulo anterior.

Una cuestión importante en la teoría de retractos (ver por ejemplo **[19]**), es saber si la unión de espacios ANR o ANE preserva estas propiedades, dado que diversos espacios se pueden obtener mediante esta operación. En **[31]** se presenta una manera de llevar a cabo este proceso. En §5 de este capítulo, probaremos la versión equivariante de este resultado siguiendo la idea de **[31]** y utilizando la técnica de "equivariantizar" espacios y funciones pasando al espacio de órbitas y regresar a los espacios base.

Finalmente, aplicaremos los dos resultados anteriores para probar que un G-CW complejo propio es un G-ANE cuando el grupo que actúa es un grupo de Lie. En este punto, cabe la pregunta, ¿es un G-CW complejo un G-ANE si el grupo es localmente compacto? La pregunta aún permanece abierta aunque, al parecer, todo indica que la respuesta puede ser positiva.

2. Espacios de adjunción

Sean (X, A) un par, (esto es A es un subconjunto cerrado de X), Y un espacio topológico y $f : A \longrightarrow Y$ una función continua. Se define entonces la *Suma Topológica* $X \sqcup Y$ como el espacio topológico formado por la unión disjunta de X y Y con la topología definida de la siguiente manera: U es abierto en $X \sqcup Y$ si $U \cap X$ y $U \cap Y$ son abiertos en X y Y respectivamente.

En el caso de que no sean disjuntos X y Y se construyen espacios homeomorfos a X y Y respectivamente que son disjuntos y entonces se lleva a cabo la operación de disjunción (ver **[17]**).

La relación $a \sim f(a)$ nos permite obtener una partición en clases de equivalencias en $X \sqcup Y$. Sea $X \sqcup Y/\sim$ el conjunto de clases de equivalencia mediante la relación anterior y $p : X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup Y/\sim$ la función que envía cada elemento de $X \sqcup Y$ en su respectiva clase de equivalencia. Si $X \sqcup Y/\sim$ se le dota de la topología cociente respecto a p, entonces p será una identificación llamada *la proyección natural.* El espacio $X \sqcup Y/\sim$ se denotará como $X \cup_f Y$ y se conoce como el *espacio de adjunción de* X *y* Y *mediante* f .

Proposición 2.1. *Sea* $p : X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ *la proyección natural. Se tiene entonces que:*

(1) $i = p|_Y$ *es un encaje cerrado.*

(2) $j = p|_{X \setminus A}$ *es un encaje abierto.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Es claro de la definición de p que i es continua y biyectiva. Si $C \subset Y$ es cerrado, $p^{-1}(i(C)) = C \cup f^{-1}(C)$ es cerrado en $X \sqcup Y$, ya que C es cerrado en Y y $f^{-1}(C)$ es cerrado en A, el cual a su vez, es cerrado en X. Por lo tanto, $i(C)$ es cerrado en $X \cup_f Y$. Así, i es encaje cerrado.

(2) De la definición de p es fácil ver que j es continua y biyectiva. Si $U \subset X \setminus A$ es abierto, $p^{-1}(j(U)) = U$ es abierto en X y por tanto en $X \sqcup Y$. Luego, $j(U)$ es abierto en $X \cup_f Y$ y entonces j es encaje abierto.

$\square$

Sea $\mathcal{P}$ cualquier propiedad topológica de espacios. Diremos que el espacio de adjunción de dos espacios X y Y preserva la propiedad $\mathcal{P}$ si siempre que X y Y tengan la propiedad $\mathcal{P}$, el espacio de adjunción también la posee.

Algunas propiedades que el espacio de adjunción preserva son las siguientes (ver **[20]**. págs. 14-15):

a) T_1,
b) compacidad,
c) ser espacio Lindelöf,
d) normalidad,
e) ser espacio compacto de Hausdorff,
f) normalidad completa,

Sin embargo, hay propiedades topológicas que el espacio de adjunción no preserva como:
i) ser espacio de Hausdorff,
ii) regularidad,
iii) regularidad completa.

Para clarificar cómo son los espacios de adjunción se muestran a continuación algunos ejemplos:

Ejemplo 2.2. *Sean $A \subset X$ un cerrado y $Y = \{y_0\}$. Adheriendo X a Y por medio de $f(A) = \{y_0\}$; vemos que $X \cup_f \{y_0\}$ es homeomorfo X/A. En particular, adheriendo el intervalo unitario $I = [0,1]$ a y_0 por $f(0) = f(1) = y_0$ se obtiene el círculo $\mathbf{S}^1$.*

Ejemplo 2.3. *Si se adhiere $X \times I$ a un punto p_0 por $f(X \times \{0\}) = \{p_0\}$ entonces se obtiene el cono sobre X*, el cual denotaremos por $Con(X)$.

Ejemplo 2.4. *Pegando $X \times I \times Y$ a la suma disjunta $X \sqcup Y$ por $(x, 0, y) \mapsto x$, $(x, 1, y) \mapsto y$ obtenemos el espacio join $X * Y$ de X a Y.* Éste consiste de los espacios X y Y junto con los segmentos de línea que unen cada $x \in X$ a cada $y \in Y$, donde ningún par de segmentos tiene puntos en común fuera de $X \cup Y$. Es fácil ver que $X * \{y_0\}$ es homeomorfo a $Con(X)$.

Ejemplo 2.5. *La construcción de CW-complejos se lleva a cabo por medio de adjunción de células a través de las aplicaciones características.*

El espacio de adjunción tiene también relación con el problema de extensión y los retractos. La siguiente proposición nos muestra la forma en que están ligados.

Proposición 2.6. *Sean A un subconjunto cerrado de X, Y un espacio topológico y $g : A \longrightarrow Y$ una aplicación. Entonces, g tendrá una extensión sobre X si y sólo si Y es un retracto de $X \cup_g Y$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [20] págs. 16-17. □

3. Acciones sobre espacios de adjunción

Sea G un grupo topológico. Si X y Y son G-espacios entonces $X \sqcup Y$ tendrá una acción natural que le heredan las acciones en X y Y. Surge así la pregunta, *¿cuándo el espacio de adjunción preserva la propiedad de ser un G-espacio?* Una respuesta, que de hecho será la usada en el presente trabajo, nos la muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sean G un grupo topológico, (X, A) un G-par, Y un G-espacio y $f : A \longrightarrow Y$ una G-aplicación.*
Si G es localmente compacto entonces $X \cup_f Y$ es un G-espacio.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi : G \times X \cup_f Y \longrightarrow X \cup_f Y$, definida de la siguiente manera, $\varphi(g, [x]) = p(\theta(g, x))$, donde θ es la acción natural sobre $X \sqcup Y$ y p es la proyección natural.

Mostremos que φ está bien definida. Se tienen tres casos:

i) Si $x \in X \setminus A$ o $x \in Y$, es trivial.

ii) Sean $x \in A$ y $y = f(x) \in Y$, tales que $[x] = [y]$, mostraremos que $\varphi(g, [x]) = \varphi(g, [y])$.

Se tiene que,

$$\varphi(g, [x]) = p\theta(g, x) = p(gx) = [gx]$$

y

$$\varphi(g, [y]) = p\theta(g, f(x)) = p(gf(x)) = [f(gx)].$$

Pero $[gx] = [f(gx)]$, lo que implica que $\varphi(g, [x]) = \varphi(g, [y])$.

iii) Sean x_1 y $x_2 \in A$, donde $f(x_1) = f(x_2)$.
Luego $\varphi(g, [x_1]) = \varphi(g, [f(x_1)]) = \varphi(g, [f(x_2)]) = \varphi(g, [x_2])$.

Mostremos que φ es una acción continua en $X \cup_f Y$.
El hecho de que φ es una acción es claro. La continuidad se obtiene del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G\times(X\sqcup Y) & \xrightarrow{\theta} & X\sqcup Y \\ \downarrow id\times p & & \downarrow p \\ G\times(X\cup_f Y) & \xrightarrow{\varphi} & X\cup_f Y \end{array}$$

En efecto, si id es la identidad en G se tiene que $\varphi(id\times p)=p\theta$. Como G es localmente compacto, por el Teorema de J. H. Whitehead ([**14**]) $id\times p$ es una identificación, y como $p\theta$ es continua, entonces φ es continua. Con esto queda probada la proposición.

□

Note que la proyección natural p es una G-aplicación mediante las acciones θ y φ.

De aquí en adelante consideraremos el espacio de adjunción de dos G-espacios X y Y, obtenido mediante una G-aplicación $f:A\longrightarrow Y$, donde A es un subconjunto cerrado invariante de X y G un grupo localmente compacto. Esto último nos permite asegurar, por la proposición 3.1, que el espacio de adjunción es un G-espacio.

4. Espacios de adjunción de espacios G-ANE

En esta sección estableceremos la versión equivariante del teorema de Hyman [**21**] y algunas consecuencias del mismo en la categoría equivariante.

Con este fin introduzcamos algunos conceptos preliminares. El primero de ellos corresponde al de cubierta semicanónica. La definición es similar a la de cubierta canónica introducida por J. Dujundji [**14**], con la diferencia que en este caso no se pide que la cubierta sea localmente finita. Este tipo de cubiertas permiten tener un control local de los puntos en la frontera de un conjunto cerrado en un espacio topológico.

Definición 4.1. *Sea (X,A) un par. Una cubierta abierta $\{V_\alpha\}$ de $X\setminus A$ se dice que es* **una cubierta semicanónica para** (X,A) *si para cada $a\in A$ y cada vecindad U de a en X, existe una vecindad W de a en X tal que si $V_\alpha\cap W\neq\emptyset$ entonces $V_\alpha\subset U$.*

Al par (X,A) se le llama **par semicanónico** si tiene una cubierta semicanónica y cuando hablemos de un G-par (X,A) nos referiremos al par donde X es un G-espacio y A es un subconjunto cerrado invariante de X.

Para adecuar la definición 4.1 a la teoría equivariante es necesario introducir el concepto de G-cubierta.

Definición 4.2. *Una cubierta $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ de un G-espacio X se dice que es una G-***cubierta** *si el conjunto de índices Ω es un G-conjunto (en el sentido algebraico, es decir, no se pide la continuidad de la acción) el cual satisface la condición: $gV_\alpha = V_{g\alpha}$ parc toda $\alpha \in \Omega$ y toda $g \in G$.*

En base a lo anterior estamos en posibilidades de definir lo que es una G-cubierta canónica.

Definición 4.3. *Un* **par** G-**semicanónico** *es un G-par tal que $X \setminus A$ admite una G-cubierta semicanónica.*

Veamos ahora cuándo podemos tener una G-cubierta semicanónica para un G-par.

Lema 4.4. *Si (X, A) es un G-par con $X \in G$-$\mathcal{M}$, entonces (X, A) es G-semicanónico.*

DEMOSTRACIÓN. Sea d una métrica invariante fija sobre X. Para cada $x \in X \setminus A$, sea V_x la bola abierta de centro en x y radio r, donde $r = \frac{1}{2}d(x, A)$. Es decir:

$$V_x = \{y \in X | d(x, y) < r\}$$

Afirmamos que $V_{gx} = gV_x$. En efecto, sea $w \in V_{gx}$. Así, $d(gx, w) < \frac{1}{2}d(gx, A)$, pero por ser d métrica invariante, $d(gx, w) = d(x, g^{-1}w)$ y, como A es invariante, se tiene también que $d(gx, A) = d(x, A)$. Luego, $d(x, g^{-1}w) < d(x, A)$. Es decir, $g^{-1}w \in V_x$, por lo que $w \in gV_x$ y $V_{gx} \subset gV_x$. El regreso es inmediato, y se concluye que $V_{gx} = V_x$.

Luego, la familia $\mathcal{V} = \{V_x\}$ es una G-cubierta. Mostremos ahora que es semicanónica.

Sea U cualquier vecindad de $a \in A$ en X. Existe entonces un número real $s > 0$ tal que la bola con centro en a y de radio $2s$ está contenida en U. Sea W la bola abierta con centro en a y de radio $\frac{1}{2}s$. Supongamos que un punto $y \in X$ es tal que $y \in V_x \cap W$ para $V_x \in \mathcal{V}$. Por definición de V_x se tiene:

$$d(a,x) \leq d(a,y) + d(x,y) < \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d(x,A) \leq \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d(x,a).$$

Luego, $d(x,a) < s$. De la misma manera, para un punto arbitrario $z \in V_x$ se tiene que

$$d(a,z) \leq d(a,x) + d(x,z) < d(a,x) + \frac{1}{2}d(x,A) \leq \frac{3}{2}d(a,x) < 2s$$

Esto implica que $z \in U$ y, por lo tanto, $V_x \subset U$.

De esta manera $\mathcal{V}$ es una G-cubierta abierta semicanónica de $X \setminus A$ y (X,A) es un G-par G-semicanónico.

□

Observación. La G-cubierta abierta semicanónica construida en la prueba del lema 4.4 está indexada por los elementos de $X \setminus A$, donde $X \setminus A$ se considera como un G-conjunto.

En ocasiones es necesario que los elementos de una G-cubierta semicanónica sean invariantes bajo la acción de G o de algún subgrupo de él. El siguiente resultado es útil en este caso:

Proposición 4.5. *Sea (X,A) un par G-semicanónico tal que para cada $y \in X \setminus A$ el estabilizador G_y es compacto. Entonces existe una G-cubierta semicanónica $\mathcal{U} = \{U_x | x \in X \setminus A\}$ tal que cada U_x es G_x-invariante.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ una G-cubierta semicanónica de $X \setminus A$. Fijemos en cada órbita $G(y) \subset X \setminus A$, un punto digamos el mismo y y sea $V_\alpha \in \mathcal{V}$ tal que $y \in V_\alpha$. Debido a la compacidad de G_y, existe una vecindad G_y-invariante U_y tal que $U_y \subset V_\alpha$ (esto se debe a que si G_y actúa sobre $X \setminus A$, el conjunto $\{y\}$ es un cerrado G_y-invariante en $X \setminus A$ y está incluido en V_α. Finalmente se aplica la Proposición 2.1 del Capítulo III de esta tesis).

Para cada $x = hy$, donde $h \in G$, definamos $U_x = hU_y$. Afirmamos que U_x está bien definido. En efecto, si x tiene otra representación de la forma $x = h_1 y$, con $h_1 \in G$, entonces $h_1 y = hy$ lo que implica que $h^{-1}h_1 y = y$, es decir, $h^{-1}h_1 \in G_y$. Esto significa que $h^{-1}h_1 U_y = U_y$ o, lo que es lo mismo, $h_1 U_y = hU_y$. Así, U_x está bien definido.

Es claro, de la construcción de U_x, que la familia $\mathcal{U} = \{U_x | x \in X \setminus A\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus A$, indexada de hecho por este G-conjunto, y donde cada U_x es G_x-invariante.

Veamos ahora que $\mathcal{U}$ es una G-cubierta, es decir que $U_{gx} = gU_x$ para cada $g \in G$ y cada $x \in X \setminus A$. Si $x = hy$ para alguna $h \in G$, entonces $gx = (gh)y$; esto es, $U_{gx} = (gh)U_y = g(hU_y) = gU_x$.

Sólo restaría probar que $\mathcal{U}$ es semicanónica, pero como $U_x = hU_y \subset hV_\alpha \in \mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$ lo cual lleva a que $\mathcal{U}$ es también semicanónica. Con esto se concluye la prueba.

□

El siguiente será útil en el caso de G-espacios normales.

Lema 4.6. *Sea X un G-espacio con espacio de órbitas normal. Si A y B son subconjuntos ajenos cerrados invariantes de X entonces existe una G-aplicación $\lambda : X \longrightarrow [0,1]$ tal que, $\lambda(A) = \{0\}$ y $\lambda(B) = \{1\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\pi : X \longrightarrow X/G$ la proyección orbital. Como A y B son cerrados ajenos invariantes en X, $\pi(A)$ y $\pi(B)$ son cerrados ajenos en X/G y, dado que X/G es normal, existe una función continua $\alpha : X/G \longrightarrow [0,1]$, tal que, $\alpha(\pi(A)) = \{0\}$ y $\alpha(\pi(B)) = \{1\}$. Así, $\lambda = \alpha\pi$ es la aplicación invariante buscada. □

La proposición que a continuación se demuestra, se aplicará de manera importante en algunos lemas de este capítulo.

Proposición 4.7. *Sean X un G-espacio, A un subconjunto cerrado invariante de X, V una vecindad cerrada invariante de A en X e $I = [0,1]$. Si*

$$Z = (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \cup (V \times \{1\}),$$

y N es una vecindad invariante de Z en $X \times I$, entonces existe una vecindad W de A en X, tal que $W \times I \subset N$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in A$. Tenemos que $\{a\} \times I \subset N$. Luego, para cada $t \in I$, existen vecindades abiertas Q_t de t y S_t de a, tales que $(a,t) \in S_t \times Q_t \subset N$. Así, la familia $\{Q_t\}$ es una cubierta abierta de I y, debido a su compacidad, existe una subcubierta finita $\{Q_{t_i}\}_{i=1}^n$ de I. Para cada, t_i, tomemos las respectivas S_{t_i}, las cuales son vecindades abiertas de a. Sea $S_a = \cap_{i=1}^n S_{t_i}$. Si $W = \cup_{a\in A} S_a$ entonces $W \times I \subset N$, por lo que W es la vecindad buscada. □

La prueba del lema que a continuación se formula se puede encontrar en [21].

Lema 4.8. *Suponga que $\{V_\alpha\}$ es una cubierta semicanónica para un par (X,A). Sean $\{x_\gamma\}$ y $\{y_\gamma\}$ dos redes en $X \setminus A$ y suponga que para cada γ, x_γ y y_γ se encuentran en un elemento común V_γ de $\{V_\alpha\}$. Entonces $\{x_\gamma\}$ converge a un punto $b \in A$ si y sólo si $\{y_\gamma\}$ converge a b.*

Gran parte de los resultados de esta sección se basan en el Teorema 4.10. La importancia de él radica en su aplicación a los resultados de los espacios de adjunción equivariantes. La prueba que se presenta sigue la idea de [21] para el caso no equivariante. Antes de demostrar este hecho definiremos lo que es un retracto fuerte por G-deformación de vecindad.

Definición 4.9. *Sea Y un G-espacio. Un subconjunto cerrado invariante B de Y es un* **retracto fuerte por G-deformación de vecindad de Y** si existe una vecindad invariante W de B y una homotopía equivariante $h : W \times I \to Y$, donde $I = [0,1]$ tiene la acción trivial de G, tal que h_0 es la inclusión de B en Y, h_1 es una G-retracción de W sobre B, y $h(b,t) = b$ para todo $b \in B$ y para todo $t \in I$.

Teorema 4.10. *Sea (T,B) un par G-semicanónico tal que para cada $y \in T \setminus B$, el estabilizador G_y es compacto y B es un retracto fuerte por G-deformación de vecindad de T. Si tanto B como $T \setminus B$ son espacios G-ANE, entonces T es un espacio G-ANE.*

Demostración. Sea $h : W \times I \to T$ una retracción fuerte por G-deformación sobre B, donde W es una vecindad invariante de B en T. Sea $\{V_y | y \in T \setminus B\}$ una G-cubierta semicanónica para (T,B) como en la Proposición 4.5.

Para probar que T es un espacio G-ANE, es suficiente demostrar que para cualquier G-par (X,A) donde $X \in G$-$\mathcal{M}$, cada aplicación equivariante $f : A \to W$ tiene una G-extensión $F : U \to T$ sobre alguna vecindad invariante U de A en X. De esto se sigue que $F|_{F^{-1}(W)} : F^{-1}(W) \to W$ es una G-extensión de vecindad de f, así que W es un espacio G-ANE. Luego siendo T la unión de dos subespacios abiertos W,$T \setminus B \in G$-ANE, es él mismo un G-ANE (ver Proposición 2.12 pág. 26 en [15]).

Dados (X,A) y $f : A \to W$, construyamos F.

Sean $A_0 = f^{-1}(B)$, $A_1 = A \setminus A_0$, y $X_1 = X \setminus A_0$. Puesto que A_1 es un subconjunto cerrado invariante de X_1, $f(A_1) \subset T \setminus B$ y $T \setminus B \in G$-ANE, existe una vecindad invariante C_1 de A_1 en X_1 y una

G-aplicación $\phi_1 : C_1 \to T \setminus B$ tal que $\phi_1|_{A_1} = f|_{A_1}$. Sea d una métrica invariante sobre X. Para cada $a \in A_1$, sea C_a el conjunto de puntos x en C_1 tales que:

(a) $d(x, A_0) > \frac{1}{2}d(a, A_0)$,
(b) $d(x, a) < d(a, A_0)$,
(c) $x \in \phi_1^{-1}(V_{\phi_1(a)})$,
(d) $x \in \phi_1^{-1}(W)$.

Entonces el conjunto $C_2 = \cup\{C_a | a \in A_1\}$ es un subconjunto abierto invariante de X_1 que contiene a A_1. La invariancia de C_2 se desprende del siguiente hecho: si $x \in C_a$ entonces $gx \in C_{ga}$. Esto se debe a que de la invariancia de la métrica d y de la equivariancia de ϕ_1 tenemos:

(a') $d(gx, A_0) = d(x, A_0) > \frac{1}{2}d(a, A_0) = \frac{1}{2}d(ga, A_0)$,
(b') $d(gx, ga) = d(x, a) < d(a, A_0) = d(ga, A_0)$,
(c') $gx \in g\phi_1^{-1}(V_{\phi_1(a)}) = \phi_1^{-1}(gV_{\phi_1(a)}) = \phi_1^{-1}(V_{g\phi_1(a)}) = \phi_1^{-1}(V_{\phi_1(ga)})$,
(d') $gx \in g\phi_1^{-1}(W) = \phi_1^{-1}(gW) = \phi_1^{-1}(W)$.

Sea C una vecindad invariante de A_1 en X_1 cuya cerradura, K, en X_1 está contenida en C_2, y sea $\lambda : X \to [0, 1]$ una aplicación invariante tal que $\lambda(A_1) = \{0\}$ y $\lambda(X_1 \setminus C) = \{1\}$. Esto es posible debido al Lema 4.6 del Capítulo II y a la Proposición 5.28 del Capítulo I.

Definamos $\phi_2 : K \cup A_0 \to T$ por:

$$\phi_2(x) = \begin{cases} h(\phi_1(x), \lambda(x)), & \text{si} \quad x \in K, \\ f(x), & \text{si} \quad x \in A_0. \end{cases}$$

Luego, ϕ_2 está bien definida, es equivariante y extiende a f. Aún más, es continua excepto posiblemente en aquellos puntos de A_0 que son puntos límites de $K \setminus A_1$. Probemos la continuidad en dichos puntos. Para esto, supongamos que $a \in A_0$ es el límite de una sucesión $\{x_n\}$ en $K \setminus A_1$ y probemos que $\{\phi_2(x_n)\}$ converge a $\phi_2(a)$. Para cada n, seleccionemos $a_n \in A_1$ tal que $x_n \in C_{a_n}$. Como $\{x_n\}$ converge a $a \in A_0$, se sigue de la propiedad (a) que $\{d(a_n, A_0)\}$ converge a cero y de (b) que $\{d(x_x, a_n)\}$ converge a cero. De esta manera $\{a_n\}$ converge a a. Dado que $\{\phi_1(a_n)\} = \{f(a_n)\}$ converge a $f(a)$, podemos encontrar, por (c) y la Proposición 4.8, que $\{\phi_1(a_n)\}$ converge a $f(a)$. Dada una vecindad V de $f(a)$ en T existe una vecindad V_1 de $f(a)$, de manera que a partir de un n grande, la sucesión $\{\phi_2(x_n)\}$ está en V_1, y por la definición de ϕ_2, la sucesión $\{\phi_2(x_n)\}$ estará en V. Esto significa que ϕ_2 es continua en a y, por lo tanto, ϕ_2 es continua sobre $K \cup A_0$.

Puesto que $\lambda = 1$ sobre la frontera (en X_1) de C y, como h aplica $W \times I$ en B, se sigue que ϕ_2 aplica la frontera, $\partial(K \cup A_0)$, de $K \cup A_0$ en X, dentro de B. Dado que B es un espacio G-ANE, tenemos que ϕ_2 tiene una extensión equivariante $F_1 : U_1 \to T$ a alguna vecindad invariante U_1 de $\partial(K \cup A_0)$ en X. Entonces el conjunto $U = U_1 \cup (K \cup A_0)$ es una vecindad invariante de $K \cup A_0$ en X, dado que es la unión de los conjuntos $U_2 = U_1 \setminus int(K \cup A_0)$ y $K \cup A_0$, ambos cerrados e invariantes en U. Como $U_2 \cap (K \cup A_0)$ es precisamente la frontera $\partial(K \cup A_0)$, se concluye que la aplicación $F : U \to T$ definida como

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & \text{si} \quad x \in U_2, \\ f(x), & \text{si} \quad x \in K \cup A_0. \end{cases}$$

está bien definida, es equivariante y extiende a f, por lo que la prueba está completa.

□

De acuerdo a la Proposición 2.1 del presente capítulo, $p(Y)$ es un subespacio cerrado invariante del espacio de adjunción $X \cup_f Y$. Entonces $(X \cup_f Y, p(Y))$ es un G-par. Para nuestro objetivo es necesario que, además, sea un par G-semicanónico. Los siguientes lemas nos permiten obtener esta propiedad.

Lema 4.11. *Sean (X, A) un G-par, Y un G-espacio y $f : A \to Y$ una aplicación equivariante. Si $\{V_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ es una G-cubierta semicanónica para $(X \sqcup Y, A \sqcup Y)$ entonces $\{p(V_\alpha) | \alpha \in \Omega\}$ es una cubierta G-semicanónica para $(X \cup_f Y, p(Y))$.*

DEMOSTRACIÓN. En **[21]** se prueba que $\{p(V_\alpha) | \alpha \in \Omega\}$ es una cubierta semicanónica para el par $(X \cup_f Y, p(Y))$. Por otro lado, dado que $p(V_\alpha) = V_\alpha$, para todo V_α, se sigue que $\{p(V_\alpha) | \alpha \in \Omega\}$ es una G-cubierta.

□

Lema 4.12. *Sean (X, A) un G-par semicanónico y Y cualquier G-espacio. Entonces el par $(X \sqcup Y, A \sqcup Y)$ también es G-semicanónico.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{V_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ una G-cubierta semicanónica para el par (X, A). Como $(X \sqcup Y) \setminus (A \sqcup Y) = X \setminus A$, se tiene que $\{V_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ es también una G-cubierta semicanónica para el par $(X \sqcup Y, A \sqcup Y)$.
□

Corolario 4.13. *Sean (X, A) un G-par donde $X \in G$-$\mathcal{M}$, Y es cualquier G-espacio y $f : A \to Y$ una G-aplicación. Entonces $(X \cup_f Y, p(Y))$ es un G-par semicanónico.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de manera inmediata de los Lemas 4.4, 4.11 y 4.12.

□

El Teorema 4.10 maneja dos conceptos importantes, el primero corresponde al de G-par y el segundo el de retracto fuerte por G-deformación de vecindad. Dado que dicho teorema será aplicado a los G-espacios de adjunción, es necesario relacionar los conceptos mencionados con estos G-espacios. El Corolario 4.13 establece el primer hecho. El segundo se presenta en los siguientes dos lemas:

Lema 4.14. *Sean $X \in G\text{-}\mathcal{M} \cap G\text{-}ANE$, $Y \in G\text{-}ANE$ y $f : A \to Y$ una G-aplicación, donde A es una subconjunto cerrado invariante de X. Entonces $X \cup_f Y$ es un espacio $G\text{-}ANE$ si y sólo si $p(Y)$ es un retracto fuerte por G-deformación de vecindad de $X \cup_f Y$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $X \cup_f Y$ es un espacio $G\text{-}ANE$. Como Y es un espacio $G\text{-}ANE$ y X está en la clase $G\text{-}\mathcal{M}$, f tiene una extensión equivariante $F : U' \to Y$, donde U' es una vecindad invariante de A en X. Dado que el espacio orbital X/G es normal, por la Proposición 5.28 del Capítulo I, existe una vecindad invariante U de A en X, tal que $A \subset U \subset \overline{U} \subset U'$. Definamos la G-aplicación

$$h : Z = (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \cup (\overline{U} \times \{1\}) \to X \cup_f Y$$

por:

$$h(x,t) = \begin{cases} p(x), & \text{si} \quad x \in X, \ \text{y } t = 0, \\ p(x), & \text{si} \quad x \in A, \ \text{y } 0 \le t \le 1, \\ pF(x), & \text{si} \quad x \in \overline{U}, \ \text{y } t = 1. \end{cases}$$

Dado que Z es un subconjunto invariante de $X \times I \in G\text{-}\mathcal{M}$ y $X \cup_f Y$ es un espacio $G\text{-}ANE$, h tiene una extensión equivariante $H : V \to X \cup_f Y$ sobre alguna vecindad invariante V de Z en $X \times I$. Sea W' una vecindad de A en X tal que $W' \times I \subset V$, la cual existe debido a la Proposición 4.7 del Capítulo II. Por la invariancia de V, la vecindad invariante $W = G(W')$ de A en X satisface también la condición $W \times I \subset V$. La G-aplicación $k : p(W \sqcup Y) \times I \to p(Y)$ definida como

$$k(z,t) = \begin{cases} H\big((p|X)^{-1}(z), t\big), & \text{si} \ \ z \in p(W) \text{ y } \ 0 \le t \le 1, \\ z, & \text{si} \ \ z \in p(Y) \text{ y } \ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

es la retracción fuerte por G-deformación de vecindad buscada de la vecindad invariante $W \cup_f Y = p(W \sqcup Y)$ sobre $p(Y)$.

Supongamos ahora que $p(Y)$ es un retracto fuerte por G-deformación de vecindad de $X \cup_f Y$. Entonces, $p(Y)$ es un G-ANE, puesto que es G-homeomorfo a Y. El complemento $(X \cup_f Y) \setminus p(Y)$ es G-homeomorfo a $X \setminus A$, por lo tanto es un espacio en la clase G-$\mathcal{M} \cap G$-ANE; luego por el Corolario 4.13 se tiene que $(X \cup_f Y, p(Y))$ es un par G-semicanónico. Así aplicando el Teorema 4.10 para el caso $T = X \cup_f Y$ y $B = p(Y)$ se concluye la prueba.

$\square$

Lema 4.15. *Sean $X \in G$-$\mathcal{M} \cap G$-ANE y A un subconjunto cerrado invariante de X tal que $A \in G$-ANR. Entonces, A es un retracto fuerte por G-deformación de vecindad de X. Más aún, existe una G-homotopía $h_t : X \to X$ tal que cumple lo siguiente:*

1. h_0 es la identidad en X,

2. $h_t(a) = a$ para cada $t \in I$ y $a \in A$,

3. existe una vecindad abierta invariante U de A en X tal que $h_1(U) = A$.

Demostración. Como $A \in G$-ANR y $X \in G$-$\mathcal{M}$, existe una vecindad cerrada invariante V de A en X y una G-retracción $r : V \to A$. Consideremos el subconjunto cerrado invariante

$$Z = (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \cup (V \times \{1\})$$

del G-espacio $X \times I \in G$-$\mathcal{M}$. Definamos una G-aplicación $f : Z \to X$ de la siguiente manera:

$$f(x,t) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in X \text{ y } t = 0, \\ x & \text{si} \quad x \in A \text{ y } 0 \le t \le 1, \\ r(x) & \text{si} \quad x \in V \text{ y } t = 1. \end{cases}$$

Puesto que $X \in G$-ANE, f tiene una G-extensión $\varphi : N \to X$ sobre una vecindad invariante N de Z en $X \times I$. Sea W' una vecindad de A en X tal que $W' \times I \subset N$, la cual existe por la Proposición 4.7 de este capítulo. Debido a la invariancia de N, la vecindad invariante $W = G(W')$ de A en X también cumple que $W \times I \subset N$. De hecho, podemos seleccionar W de tal manera que $W \subset V$. Como consecuencia de que el espacio orbital X/G es normal, por la Proposición 5.28 del Capítulo I, se puede escoger una vecindad abierta invariante U de X que satisface $A \subset U \subset \overline{U} \subset W$. Sea $\lambda : X \to I$ una G-aplicación tal que $\lambda(\overline{U}) = \{1\}$ y $\lambda(X \setminus W) = \{0\}$. La existencia de λ se debe a la

Proposición 5.28 del Capítulo I y al Lema 4.6 del presente capítulo. La G-homotopía buscada $h_t : X \longrightarrow X$, $t \in I$ se define entonces como

$$h_t(x) = \varphi(x, t\lambda(x))$$

para cada $t \in I$ y cada $x \in X$.

□

Llegamos de esta manera a la generalización equivariante del Teorema de Borsuk-Whitehead-Hanner . La parte esencial de la prueba la constituye la aplicación del Teorema 4.10 y el uso de los Lemas 4.14 y 4.15.

Teorema 4.16. *Sean (X, A) un G-par, con $X \in G$-$\mathcal{M}$, y $f : A \longrightarrow Y$ una G-aplicación. Si X,A y Y son espacios G-ANE entonces $X \cup_f Y$ es un espacio G-ANE.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p : X \sqcup Y \longrightarrow X \cup_f Y$ la proyección natural. De acuerdo al Lema 4.14, para probar que $X \cup_f Y$ es un espacio G-ANE, basta mostrar que $p(Y)$ es un retracto fuerte por G-deformación de vecindad de $X \cup_f Y$. Por el Lema 4.15 A es un retracto fuerte por G-deformación de vecindad de X. En consecuencia, existen una vecindad invariante U de A en X y una G-homotopía $h_t : U \sqcup Y \longrightarrow X \sqcup Y$, $t \in I$, que satisfacen:

1. h_0 es la aplicación inclusión de $U \sqcup Y$ en $X \sqcup Y$;
2. $h_t(w) = w$ para cada $t \in I$ y $w \in A \sqcup Y$;
3. h_1 es una G-retracción de $U \sqcup Y$ sobre $A \sqcup Y$.

Definamos ahora una G-homotopía $k_t : U \cup_f Y \longrightarrow X \cup_f Y$, $t \in I$, de la siguiente manera:

$$k_t(z) = p(h_t(p^{-1}(z)))$$

para cada $t \in I$ y cada $z \in U \cup_f Y$. De la segunda propiedad de h_t se sigue que k_t es univaluada. Fácilmente se puede checar que k_t es un retracto fuerte por G-deformación de vecindad de $U \cup_f Y = p(U \sqcup Y)$ sobre $p(Y)$, y se concluye así la prueba.

□

Si en el Teorema 4.16 el G-espacio Y consiste de un solo elemento, obtenemos lo siguiente:

Corolario 4.17. *Sea (X, A) un G-par donde $X \in G$-$\mathcal{M} \cap G$-ANE y $A \in G$-ANE. Entonces $X/A \in G$-ANE.*

En el caso en que el grupo G es trivial, el Teorema 4.16 proporciona una generalización del Teorema de Borsuk-Whitehead-Hanner, donde la metrizabilidad de Y no es requerida.

Corolario 4.18. *Sean (X, A) un par metrizable y $f : A \longrightarrow Y$ una aplicación. Si X y A son espacios ANR y Y es un espacio ANE, entonces $X \cup_f Y$ es un espacio ANE.*

Estableceremos ahora resultados similares a los de los espacios G-ANE pero para espacios G-AE. De hecho algunos se siguen de manera inmediata de los probados para espacios G-ANE. En particular, el Teorema 4.10 sigue siendo esencial en las pruebas que se desarrollarán.

Por esta razón, es necesario saber cuándo un espacio G-ANE es un espacio G-AE. Existen varias maneras de establecer tal hecho. Una de ellas, la cual es usada en este trabajo, nos la muestra el siguiente lema:

Lema 4.19. *Sea Y un G-espacio. Si Y puede ser G-deformado en un subespacio G-AE $B \subset Y$, entonces Y es un espacio G-AE.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $h : Y \times I \longrightarrow Y$ una G-deformación tal que $h_1(Y) \subset B$. Sean (X, A) un G-par con $X \in G$-$\mathcal{M}$ y $f : A \longrightarrow y$ una G-aplicación. Como Y es un G-ANE, se sigue que f tiene una extensión equivariante $F : U' \longrightarrow Y$, donde U' es alguna vecindad invariante de A en X. Dado que el espacio de órbitas X/G es normal, por la Proposición 5.28 del Capítulo I, existe una vecindad invariante U de A en X tal que $\overline{U} \subset U'$. Por la Proposición 5.28 del Capítulo I y el Lema 4.6 del Capítulo II, existe una aplicación invariante $\lambda : X \longrightarrow I$ de manera que $\lambda(A) = \{0\}$ y $\lambda(X \setminus U) = \{1\}$.

Sea la restricción $\alpha = h_1 F|_{\partial(U)} : \partial(U) \longrightarrow B$, donde $\partial(U)$ es la frontera de U en X. Puesto que B es un espacio G-AE, existe una extensión equivariante $H : X \setminus U \longrightarrow B$ de α. Definamos $\phi : X \longrightarrow Y$ como

$$\phi(x) = \begin{cases} h(F(x), \lambda(x)) & \text{si} \quad x \in \overline{U}, \\ H(x) & \text{si} \quad x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Es fácil ver que ϕ es continua, equivariante y además extiende a f, por lo que el lema es probado.

$\square$

El siguiente teorema es el análogo del Teorema 4.10, para el caso de espacios G-AE.

Teorema 4.20. *Sea (T, B) un par G-semicanónico tal que para cada $y \in T \setminus B$, el estabilizador G_y es compacto. Sea B un retracto fuerte por G-deformación de T. Si B es un espacio G-AE y $T \setminus B$ es un espacio G-ANE entonces T es un espacio G-AE.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 4.10 se tiene que T es un espacio G-ANE y dado que, por hipótesis, T puede ser G-deformado en B, se concluye, por el Lema 4.19, que T es un espacio G-AE.

□

Los siguientes dos lemas corresponden a los análogos de los lemas 4.14 y 4.15 y sus pruebas son similares.

Lema 4.21. *Sean $X \in G$-$\mathcal{M} \cap G$-AE, $Y \in G$-AE y $f : A \to Y$ una G-aplicación, donde A es una subconjunto cerrado invariante de X. Entonces $X \cup_f Y$ es un espacio G-AE si y sólo si $p(Y)$ es un retracto fuerte por G-deformación de $X \cup_f Y$.*

Lema 4.22. *Sean $X \in G$-$\mathcal{M} \cap G$-AE y A un subconjunto cerrado cerrado invariante de X tal que $A \in G$-AR. Entonces, A es un retracto fuerte por G-deformación de X.*

El siguiente teorema es el análogo del Teorema 4.16.

Teorema 4.23. *Sean (X, A) un G-par, con $X \in G$-$\mathcal{M}$, y $f : A \to Y$ una G-aplicación. Si X,A y Y son espacios G-AE entonces $X \cup_f Y$ es un espacio G-AE.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p : X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ la proyección natural. De acuerdo al Lema 4.21, para probar que $X \cup_f Y$ es un espacio G-AE, basta mostrar que $p(Y)$ es un retracto fuerte por G-deformación de $X \cup_f Y$. Por el Lema 4.22 A es un retracto fuerte por G-deformación X. En consecuencia, existe una G-homotopía $h_t : X \sqcup Y \to X \sqcup Y$, $t \in I$, tal que satisface:

1. h_0 es la aplicación identidad de $X \sqcup Y$;
2. $h_t(w) = w$ para cada $t \in I$ y $w \in A \sqcup Y$;
3. h_1 es una G-retracción de $X \sqcup Y$ sobre $A \sqcup Y$.

Definamos ahora una G-homotopía $k_t : X \cup_f Y \to X \cup_f Y$, $t \in I$, de la siguiente manera:

$$k_t(z) = p(h_t(p^{-1}(z)))$$

para cada $t \in I$ y cada $z \in Z \cup_f Y$. De la segunda propiedad de h_t se sigue que k_t es univaluada. Fácilmente se puede checar que k_t es un retracto fuerte por G-deformación de $X \cup_f Y = p(X \sqcup Y)$ sobre $p(Y)$, y se concluye así la prueba.

□

Al igual que el Corolario 4.17, si en el Teorema 4.23, Y consta solo de un elemento se tiene:

Corolario 4.24. *Sea (X, A) un G-par donde $X \in G$-$\mathcal{M} \cap G$-AE y $A \in G$-AE. Entonces $X/A \in G$-AE.*

De la misma manera, si G es el grupo trivial se obtiene la generalización del Teorema de Borsuk-Whitehead-Hanner no equivariante, donde no importa la metrizabilidad de Y.

Corolario 4.25. *Sean (X, A) un par metrizable y $f : A \longrightarrow Y$ una aplicación. Si X y A son espacios AR y Y es un espacio AE, entonces $X \cup_f Y$ es un espacio AE.*

El cono de un espacio (ver ejemplo 2.3 de este capítulo) es de gran importancia por las propiedades que conserva del espacio base y su construcción es usada en la prueba de algunos teoremas de topología general. En nuestro caso, dado que es un caso particular del espacio de adjunción, aplicaremos los resultados obtenidos en las dos secciones precedentes al cono de un G-espacio.

Primeramente mostraremos que el cono de un G-espacio es G-contraíble.

Lema 4.26. *Si T un G-espacio entonces $Con(T)$ es G-contraíble.*

Demostración. Denotemos por tx los puntos de $Con(T)$ donde $x \in X$ y $t \in I$, y por "$\cdot$" la multiplicación de reales. Consideremos al intervalo I como un G-espacio con la acción trivial. Sea $H : Con(T) \times I \longrightarrow Con(T)$ la función definida de la siguiente manera :

$$H(\tau x, t) = (t \cdot \tau)x, \quad \text{para} \quad \tau x \in Con(T), \tau, t \in I$$

Afirmamos que H es una G-contracción. En efecto, como $0x = p_0$ donde p_0 es el vértice de $Con(T)$ se tiene que :

$$H(\tau x, 0) = (0 \cdot \tau)x = p_0 \quad \text{y} \quad H(\tau x, 1) = (1 \cdot \tau)x = \tau x$$

Luego, observemos que H es equivariante, puesto que :
$H[g(\tau x, t)] = H(\tau g x, t) = (t \cdot \tau) g x = g((t \cdot \tau) x) = g H(\tau x, t)$.

Sólo resta probar que H es continua, para lo cual analizaremos la continuidad en los puntos de $Con(T) \times I$.

Tomemos cualquier punto $(\tau_0 x_0, t_0) \in Con(T) \times I$. Tenemos entonces dos casos:

i) Cuando $\tau_0 = 0$. Entonces $\tau_0 x_0 = p_0$ y $H(\tau_0 x_0, t_0) = p_0$. Sea U una vecindad del vértice p_0. Luego, $(x, 0) \in p^{-1}(U)$ para cada $x \in T$. Además, por la continuidad de p, se tiene que $p^{-1}(U)$ es abierto en $T \times I$ y, por la definición de la topología producto en $T \times I$, existen una vecindad V_x de x y $[0, \varepsilon_x)$ tales que $V_x \times [0, \varepsilon_x) \subset p^{-1}(U)$, para todo $x \in T$.

Sea:

$$Q = \bigcup_{x \in T} [V_x \times [0, \varepsilon_x)]$$

y considérese $V = p(Q)$ y $W = I$. Es claro que V es vecindad del vértice y W es vecindad de t_0.

Mostremos ahora que $H(V \times W) \subset U$.

Sean $v \in V$ y $t \in W$. Consideremos los siguientes casos:

a) $v = p_0$. En este caso $H(p_0, t) = p_0 \in U$.

b) $v = \tau y$, donde $\tau \in (0, \varepsilon_y)$, $y \in T$. Entonces existe una vecindad V_y de y tal que $V_y \times [0, \varepsilon_y) \subset Q$. Además, $t \cdot \tau \leq \tau$, para todo $t \in I$. Por lo tanto $t \cdot \tau \in [0, \varepsilon_y)$. Así,

$$H(v, t) = (t \cdot \tau) y = p(y, (t \cdot \tau)) \in p(Q) = V \subset U.$$

ii) Cuando $\tau_0 \neq 0$. Luego $\tau_0 x_0 \neq p_0$. Sea U una vecindad de $H(\tau_0 x_0, t_0) = (t_0 \cdot \tau_0) x_0$. Entonces $(x_0, t_0 \cdot \tau_0) \in p^{-1}(U)$. Como p es continua, $p^{-1}(U)$ es abierto en $T \times I$ y, por lo tanto, existen vecindades M y N de x_0 y $t_0 \cdot \tau_0$ respectivamente, tales que $M \times N \subset p^{-1}(U)$. Ahora bien, por continuidad de la multiplicación en $\mathbb{R}$, existen vecindades N_1 de t_0 y N_2 de τ_0 tales que $N_1 N_2 \subset N$.

Sea $V = p(M \times N_2)$ y $W = N_1$.

Como $p : T \times (0, 1] \to Con(T) \setminus \{p_0\}$ es un homeomorfismo, V es abierto en $Con(T) \setminus \{p_0\}$ y, por tanto, en $Con(T)$. Además $\tau_0 x_0 \in V$, dado que $\tau_0 \in N_2$ y $x_0 \in M$. Afirmamos que $H(V \times W) \subset U$. En efecto, sean $\tau x \in V$ y $t \in W$. Entonces, $t \in N_2$, $x \in M$ y $H(\tau x, t) = (t \cdot \tau x) \in p(M \times (N_1 N_2)) \subset p(M \times N) \subset U$.

$\square$

Ahora bien, de acuerdo al Ejemplo 2.10 de la §2 del Capítulo I, el intervalo es un G-ANE cuando G actúa trivialmente sobre él. Además,

$I \in G\text{-}\mathcal{M}$. Esto implica que si $T \in G\text{-}\mathcal{M} \cap G\text{-}ANE$ entonces $T \times I \in G\text{-}\mathcal{M} \cap G\text{-}ANE$. Por lo tanto, de acuerdo al Corolario 4.17 , $Con(T)$ es un espacio G-ANE. Pero, por el Lema 4.26 y el Teorema 4.20 del presente capítulo, se tiene que $Con(X)$ es un espacio G-AE. De esta manera se ha probado que

Corolario 4.27. *Si $X \in G\text{-}\mathcal{M} \cap G\text{-}ANE$ entonces $Con(X) \in G\text{-}AE$.*

5. Uniones de espacios G-ANE

Cuando se construyen nuevos G-espacios que tienen la propiedad de ser espacios G-ANE y G-ANR a partir de otros G-espacios que ya tienen dichas propiedades, es bastante útil manejar uniones de espacios G-ANR o G-ANE. En el caso en que el grupo que actúa es el trivial, en **[20]** se presentan algunos resultados importantes acerca de este tipo de problemas. Si el grupo es no trivial, existen los siguientes resultados para las clases de los G-espacios normales y G-espacios paracompactos donde el grupo que actúa es compacto.

Teorema ([36]) *Sea G un grupo compacto. Si un G-espacio Y es la unión de un número finito de subespacios abiertos invariantes, donde cada uno de ellos es un espacio G-ANE para la clase G-$\mathcal{N}$ de los G-espacios normales, entonces Y es un espacio G-ANE para dicha clase.*

Teorema ([36, Theorem 2.8**])** *Sea G un grupo compacto. Suponga que el G-espacio Y tiene una cubierta abierta invariante localmente finita $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ tal que cada U_α es un espacio G-ANE para la clase G-$\mathcal{P}$ de todos los G-espacios paracompactos. Entonces el G-espacio Y es un espacio G-ANE para clase G-$\mathcal{P}$.*

Desafortunadamente la demostración de este teorema dada en **[36]** págs. 350-351 es incorrecta, incluso cuando el grupo actuante G es el trivial, es decir, si G contiene un solo elemento. En efecto, en la formulación del Lema 2.3 en **[36]** la palabra "disjoint"debe de ser "discrete"lo cual es claro de su demostración. Más aún, con la palabra "disjoint"el Lema 2.3 en **[36]** no tiene lugar. Pero, en la Demostración del Teorema 2.8 en **[36]**, el espacio relevante Y está representado como una unión disjunta numerable pero **no discreta** de algunos G-ANE. Por tal razón, el Lema 2.3 no es aplicable a esta situación. Por lo tanto, la argumentación dada en la demostración del Teorema 2.8 en **[36]**, es incorrecta.

Otros resultados han sido obtenidos por E. Elfving **[15]** para la clase G-$\mathcal{P}^*$ de los G-espacios propios paracompactos que tienen espacios de órbitas paracompactos, donde el grupo actuante es localmente compacto.

Teorema ([**15**]) *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio, el cual es union de dos subespacios abiertos O_1 y O_2, que son espacios G-ANE para la clase G-$\mathcal{P}^*$. Entonces X es un espacio G-ANE para la clase G-$\mathcal{P}^*$.*

Teorema ([**15**]) *Sean G un grupo de Lie y X un G-espacio propio separable, metrizable, el cual es la unión de abiertos invariantes $\{O_\alpha\}$, $\alpha \in \Omega$, que son espacios G-ANR para la clase G-$\mathcal{P}^*$. Entonces X es un espacio G-ANR para la clase G-$\mathcal{P}^*$.*

En el caso no equivariante, un resultado importante referente a las uniones de espacios ANE aparece en **[31]**. En él se establece que, bajo ciertas condiciones, la unión de un número arbitrario de espacios cerrados ANE es también un espacio ANE. En esta sección se establecerá la versión equivariante de este teorema para el caso donde el grupo es localmente compacto, la acción es propia y la clase donde se consideran los G-ANE es la clase G-$\mathcal{M}$. Este resultado es fundamental en nuestro trabajo dado que nos permitirá probar que un G-CW-complejo es un G-ANE.

La prueba del teorema seguirá la idea de la utilizada en **[31]**, excepto en los detalles donde la existencia de la acción es esencial.

Comencemos estableciendo una topología adecuada para un espacio topológico respecto a una cubierta cerrada. En este momento no es necesario que nuestros espacios posean una acción.

Definición 5.1. *Sean X un espacio topológico y $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ una cubierta cerrada de X. Se dice que X tiene la* **topología débil** *respecto a $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ si se cumplen las siguientes condiciones para cualquier $\Lambda \subset \Omega$:*
(i) La unión $\cup\{A_\beta|\beta \in \Lambda\}$ es cerrada en X;
(ii) cualquier subconjunto de $\cup\{A_\beta|\beta \in \Lambda\}$ cuya intersección con cada A_β, $\beta \in \Lambda$ es cerrado en X, es cerrado en el subespacio $\cup\{A_\beta|\beta \in \Lambda\}$.

El sentido de la Definición 5.1 difiere de la definición para topología débil establecido en **[14]**; así, siempre que mencionemos esta topología lo haremos en el sentido de la Definición 5.1.

Otros resultados han sido obtenidos por E. Elfving **[15]** para la clase G-$\mathcal{P}^*$ de los G-espacios propios paracompactos que tienen espacios de órbitas paracompactos, donde el grupo actuante es localmente compacto.

Teorema ([15]) *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio, el cual es union de dos subespacios abiertos O_1 y O_2, que son espacios G-ANE para la clase G-$\mathcal{P}^*$. Entonces X es un espacio G-ANE para la clase G-$\mathcal{P}^*$.*

Teorema ([15]) *Sean G un grupo de Lie y X un G-espacio propio separable, metrizable, el cual es la unión de abiertos invariantes $\{O_\alpha\}$, $\alpha \in \Omega$, que son espacios G-ANR para la clase G-$\mathcal{P}^*$. Entonces X es un espacio G-ANR para la clase G-$\mathcal{P}^*$.*

En el caso no equivariante, un resultado importante referente a las uniones de espacios ANE aparece en **[31]**. En él se establece que, bajo ciertas condiciones, la unión de un número arbitrario de espacios cerrados ANE es también un espacio ANE. En esta sección se establecerá la versión equivariante de este teorema para el caso donde el grupo es localmente compacto, la acción es propia y la clase donde se consideran los G-ANE es la clase G-$\mathcal{M}$. Este resultado es fundamental en nuestro trabajo dado que nos permitirá probar que un G-CW-complejo es un G-ANE.

La prueba del teorema seguirá la idea de la utilizada en **[31]**, excepto en los detalles donde la existencia de la acción es esencial.

Comencemos estableciendo una topología adecuada para un espacio topológico respecto a una cubierta cerrada. En este momento no es necesario que nuestros espacios posean una acción.

Definición 5.1. *Sean X un espacio topológico y $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ una cubierta cerrada de X. Se dice que X tiene la* **topología débil** *respecto a $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ si se cumplen las siguientes condiciones para cualquier $\Lambda \subset \Omega$:*

(i) La unión $\cup\{A_\beta | \beta \in \Lambda\}$ es cerrada en X;

(ii) cualquier subconjunto de $\cup\{A_\beta | \beta \in \Lambda\}$ cuya intersección con cada A_β, $\beta \in \Lambda$ es cerrado en X, es cerrado en el subespacio $\cup\{A_\beta | \beta \in \Lambda\}$.

El sentido de la Definición 5.1 difiere de la definición para topología débil establecido en **[14]**; así, siempre que mencionemos esta topología lo haremos en el sentido de la Definición 5.1.

Los siguientes lemas permitirán establecer la prueba del teorema principal de esta sección.

Lema 5.2. *Sean X un espacio topológico con la topología débil respecto a una cubierta cerrada $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ y Y un espacio métrico. Sean f una aplicación de Y en X y $Y_\alpha = f^{-1}(A_\alpha)$, $\alpha \in \Omega$. Entonces existe una cubierta cerrada $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ de Y que satisface las siguientes condiciones:*

(i) $B_\alpha \subset Y_\alpha$, $\alpha \in \Omega$;

(ii) $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es localmente finita.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el conjunto Ω de índices consiste de todos los ordinales α menores que un ordinal fijo η. Sea

$$B_\alpha = \overline{Y_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta}, \quad \alpha < \eta.$$

Entonces por el Lema 1 en **[31]** pág. 207, la familia $\{B_\alpha\}_{\alpha<\eta}$ es la cubierta deseada.

□

La siguiente definición corresponde a un hecho general de topología algebraica y puede ser encontrada, al igual que la observación del isomorfismo de los nervios, por ejemplo en **[41]**.

Definición 5.3. *Sean $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ y $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ dos familias de subconjuntos del espacio topológico X con el mismo conjunto de índices. Se dice que $\mathcal{U}$ es* **similar** *a $\mathcal{V}$ si para cada $\Lambda \subset \Omega$ se cumple que,*

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = \emptyset \quad \text{si y sólo si} \quad \bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha = \emptyset.$$

En los casos en que las familias $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ sean cubiertas de X, la similaridad de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ implica que los nervios $N(\mathcal{U})$ y $N(\mathcal{V})$ son isomorfos como complejos simpliciales.

Lema 5.4. *Sean $Y \in G\text{-}\mathcal{M}$, B un subconjunto cerrado invariante de Y y $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ una cubierta invariante cerrada localmente finita de B. Entonces existe una vecindad invariante cerrada F de B en Y y una cubierta invariante cerrada localmente finita $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ de F la cual satisface:*

i) $F_\alpha \cap B = B_\alpha$, $\alpha \in \Omega$;

ii) $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es similar a $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\pi : Y \to Y/G$ la proyección orbital de Y. Como π es una aplicación abierta (ver por ejemplo [11]) y los conjuntos B y B_α, $\alpha \in \Omega$, son invariantes y cerrados en Y, las imágenes $\pi(B)$ y $\pi(B_\alpha)$ son cerrados en Y/G. Asimismo, no es difícil checar que la familia $\{\pi(B_\alpha)\}_{\alpha\in\Omega}$ es localmente finita. Aplicando el Lema 2 de [31] pág. 208 a los conjuntos $\pi(B)$ y $\{\pi(B_\alpha)\}_{\alpha\in\omega}$ en Y/G, encontramos una vecindad cerrada $\tilde{F}$ de $\pi(B)$ en Y/G y una cubierta cerrada localmente finita $\{\tilde{F}_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ de $\tilde{F}$ tal que $\tilde{F}_\alpha \cap \pi(B) = \pi(B_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Omega$ y $\{\tilde{F}_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es similar a $\{\pi(B_\alpha)\}_{\alpha\in\Omega}$. Seleccionemos ahora $F = \pi^{-1}(\tilde{F})$ y $F_\alpha = \pi^{-1}(\tilde{F}_\alpha)$, $\alpha \in \Omega$. Tanto F como F_α, $\alpha \in \Omega$, satisfacen las condiciones requeridas.

□

Lema 5.5. *Sean $Y \in G\text{-}\mathcal{M}$, B un subconjunto cerrado invariante de Y y F una vecindad cerrada invariante de B en Y. Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ una cubierta cerrada invariante localmente finita de F. Supongamos que para cada α, existe una vecindad cerrada invariante C_α de $F_\alpha \cap B$ en F_α. Entonces:*

$$C = \bigcup_{\alpha\in\Omega} C_\alpha$$

es una vecindad cerrada invariante de B en Y.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 3 en [31] págs. 211-212, C es una vecindad cerrada de B en Y; además, como es una unión de conjuntos invariantes, también C es invariante.

□

Lema 5.6. *Sean X un G-espacio y $\{A_i\}_{i=1}^n$ una cubierta cerrada invariante de X. Supongamos que $\cap_{j=1}^p A_{i_j}$ es un G-ANE para cada $i_1, i_2, ..., i_p \in \{1, 2, ..., n\}$. Sean también $Y \in G\text{-}\mathcal{M}$, B un subconjunto cerrado invariante de Y y $\{Y_i\}_{i=1}^n$ una cubierta cerrada invariante de Y. Sean $B_i = B \cap Y_i$, $i = 1, 2, ..., n$, y f una G-aplicación de B en X tal que $f(B_i) \subset A_i$, $i = 1, 2, ..., n$.*

Entonces existe una vecindad cerrada invariante F de B en Y y una extensión equivariante $h : F \to X$ de f tal que $h(F \cap Y_i) \subset A_i$ para todo $i = 1, 2, .., n$.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos

$$H = \bigcup \{\cap_{j=1}^p Y_{i_j} \mid (\cap_{j=1}^p Y_{i_j}) \cap B = \emptyset, i_1, i_2, ..., i_p \in \{1, 2, ..., n\}\}.$$

Como $H \cap B = \emptyset$, H y B son subconjuntos cerrados invariantes de Y y Y/G es normal, por la Proposición 5.28 del Capítulo I, existe una vecindad cerrada invariante D de B en Y tal que $D \cap H = \emptyset$. Sea $D_i = D \cap Y_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Luego $\{D_i\}_{i=1}^n$ es similar a $\{B_i\}_{i=1}^n$. Denotemos por K el nervio de $\{D_i\}$. Un simplejo de K es denotado por $(i_0, ..., i_p)$, $i_0, ..., i_p \in \{1, 2, ..., n\}$. Para cada simplejo $s = (i_0, ..., i_p)$ de K pongamos $|s| = \cap_{j=0}^p D_{i_j}$. Proporcionemos ahora un orden a los simplejos de K de la siguiente manera:

i) si los simplejos tienen la misma dimensión, entonces el orden para ellos es arbitrario;

ii) si $dim\ s > dim\ s'$ entonces diremos que s es menor s', es decir, $s < s'$.

Fijemos $\bar{s} \in K$ y supongamos que, para cada simplejo $s < \bar{s}$, se pueden construir un conjunto cerrado invariante $M(s)$ y una G-aplicación $f_s : M(s) \to \cap_{j=0}^p A_{i_j}$ tales que cumplen las siguientes condiciones:

$i)_s$ $M(s)$ es una vecindad cerrada de $|s| \cap B$ en $|s|$;

$ii)_s$ f_s es una G-aplicación de $M(s)$ en $\cap_{j=0}^p A_{i_j}$, donde $s = (i_0, ..., i_p)$, tal que:

$$f_s|_{B \cap M(s)} = f|_{B \cap M(s)};$$

$iii)_s$ Sean s_1 y s_2 dos simplejos tales que $s_1 \leq s_2 \leq s$ y s_1, s_2 generan un simplejo s_3 de K. Entonces tenemos que:

$$(M(s_1) \cap |s_3|) \cup (M(s_2) \cap |s_3|) \subset M(s_3)$$

$$f_{s_1}|_{M(s_1) \cap M(s_2)} = f_{s_2}|_{M(s_1) \cap M(s_2)}.$$

Construyamos ahora una vecindad cerrada invariante $M(\bar{s})$ de $|\bar{s}| \cap B$ en $|\bar{s}|$ y una G-aplicación $f_{\bar{s}}$ que satisfagan $i)_{\bar{s}}$, $ii)_{\bar{s}}$ y $iii)_{\bar{s}}$.

Sea $\bar{s} = (k_0, k_1, ..., k_l)$, $k_j \in \{1, 2, ..., n\}$, $j = 0, 1, ..., l$.

Consideremos primeramente el caso cuando $\bar{s}$ es un simplejo principal, es decir, que $\bar{s}$ no es cara de un simplejo de dimensión mayor. Vemos entonces que $|\bar{s}| \cap (\cup\{|s| | s < \bar{s}\}) = \emptyset$. Consideremos $f|_{|\bar{s}| \cap B} : |\bar{s}| \cap B \to \cap_{j=0}^l A_{k_j}$. Como $\cap_{j=0}^l A_{k_j}$ es un espacio G-ANE existe una vecindad cerrada invariante $M(\bar{s})$ de $|\bar{s}| \cap B$ en $|\bar{s}|$ y una G-extensión $f_{\bar{s}} : M(\bar{s}) \to \cap_{j=0}^l A_{k_j}$ de $f|_{|\bar{s}| \cap B}$. Es fácil verificar que $M(\bar{s})$ y $f_{\bar{s}}$ satisfacen las condiciones $i)_{\bar{s}}$, $ii)_{\bar{s}}$ y $iii)_{\bar{s}}$.

Veamos ahora el caso cuando $\bar{s}$ es una cara de algunos simplejos de dimensión mayor. Sea $\bar{s}$ una cara de s_i^{l+1}, $i = 1, 2, ..., m$. Dado que

$M(s_i^{l+1})$ es una vecindad cerrada de $|s_i^{l+1}| \cap B$ en $|s_i^{l+1}|$ y $|s_i^{l+1}| \subset |\bar{s}|$, $i = 1, 2, \ldots, m$ se tiene que:

$$(\bigcup_{i=1}^{m} \overline{|s_i^{l+1}| \setminus M(s_i^{l+1})}) \cap (|\bar{s}| \cap B) = \emptyset.$$

Puesto que los dos conjuntos de la fórmula anterior son cerrados e invariantes y $|\bar{s}|/G$ es un espacio normal, por la Proposición 5.28 del Capítulo I, existe entonces una vecindad cerrada invariante N de $|\bar{s}| \cap B$ en $|\bar{s}|$ tal que:

$$N \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} \overline{|s_i^{l+1}| \setminus M(s_i^{l+1})} \right) = \emptyset.$$

Entonces definimos una G-aplicación

$$\alpha : \bigcup_{i=1}^{m} M(s_i^{l+1}) \cup (|\bar{s}| \cap B) \to \bigcap_{j=0}^{l} A_{k_j}$$

por:

$$\alpha|_{M(s_i^{l+1})} = f_{s_i^{l+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad \alpha|_{|\bar{s}| \cap B} = f,$$

entonces α es una función continua bien definida debido a la hipótesis de inducción. Como $\cap_{j=0}^{l} A_{k_j}$ es un espacio G-ANE existe una vecindad cerrada invariante $M(\bar{s})$ de $\bigcup_{i=1}^{m} M(s_i^{l+1}) \cup (|\bar{s}| \cap B)$ en $\bigcup_{i=1}^{m} M(s_i^{l+1}) \cup N$ y una extensión equivariante $f_{\bar{s}}$ de α sobre $M(\bar{s})$.

Dado que $\bigcup_{i=1}^{m} M(s_i^{l+1}) \cup N$ es una vecindad cerrada invariante de $|\bar{s}| \cap B$ en $|\bar{s}|$, se verifica fácilmente que las condiciones $i)_{\bar{s}}$, $ii)_{\bar{s}}$ y $iii)_{\bar{s}}$ se cumplen.

De esta manera hemos construido $M(s)$ y f_s tales que cumplen $i)_s$, $ii)_s$ y $iii)_s$, para cada $s \in K$.

Pongamos ahora $F = \bigcup_{s \in K} M(s)$; entonces F es una vecindad cerrada invariante de B en Y, por el Lema 5.5. Definimos $h : F \to X$ por $h|_{M(s)} = f_s$. Dado que la condición $iii)_s$ se satisface para cada $s \in K$, tenemos que F y h son la vecindad cerrada invariante y la extensión equivariante que buscábamos, respectivamente.

□

Lema 5.7. *Sean $F \in G$-$\mathcal{M}$ y $\mathcal{F}$ una cubierta cerrada invariante localmente finita de F. Entonces existe una cubierta abierta invariante localmente finita $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in \Lambda}$ de F tal que para cada $\beta \in \Lambda$ el conjunto $\overline{V_\beta}$ intersecta únicamente un número finito de elementos de $\mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\pi : F \longrightarrow F/G$ la proyección orbital de F. Debido a que $F \in G$-$\mathcal{M}$ por el Teorema 4.3.4 de [39] pág. 318, tenemos que F/G es metrizable, así que también es paracompacto y normal. Entonces $\tilde{\mathcal{F}} = \{\pi(F')|F' \in \mathcal{F}\}$ es una cubierta cerrada localmente finita de F/G. Para cada $\tilde{x} \in F/G$ seleccionemos una vecindad $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ que intersecta solamente un número finito de elementos de $\tilde{F}$. Por la normalidad de F/G podemos encontrar una vecindad $\tilde{W}_{\tilde{x}}$ de $\tilde{x}$ cuya cerradura está contenida en $\tilde{U}_{\tilde{x}}$. Por la paracompacidad de F/G podemos encontrar un refinamiento abierto localmente finito $\{\tilde{V}_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$ para la cubierta $\{\tilde{W}_{\tilde{x}}\, \tilde{x} \in F/G\}$. Tomemos $\mathcal{V} = \{\pi^{-1}(\tilde{V}_\beta)|\beta \in \Lambda\}$. Luego $\mathcal{V}$ es la cubierta que satisface este lema.

□

Después de estos lemas estamos listos para probar el teorema principal.

Teorema 5.8. *Sea X un G-espacio que tiene la topología débil respecto a una cubierta cerrada invariante $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$. Supongamos que para cada subcolección finita $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ de $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, la intersección - $\cap_{i=1}^n A_{\alpha_i}$ es un espacio G-ANE. Entonces X es un espacio G-ANE.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $Y \in G$-$\mathcal{M}$, B un subconjunto cerrado invariante de Y y f una G-aplicación de B en X. Deseamos mostrar que existe una vecindad cerrada invariante U de B en Y y una extensión equivariante $h : U \longrightarrow X$ de f.

Sea Ω el conjunto de indices α tales que son menores que un ordinal fijo η. Pongamos $C_\alpha = f^{-1}(A_\alpha)$ y $B_\alpha = \overline{C_\alpha \setminus \cup_{\beta<\alpha} C_\beta}$ para cada $\alpha < \eta$. Entonces $\mathcal{F}_1 = \{B_\alpha|\alpha < \eta\}$ es una cubierta cerrada localmente finita de B debido al Lema 5.2. Claramente los conjuntos B_α son G-invariantes.

Aplicando el Lema 5.4 encontramos una vecindad cerrada invariante F de B en Y y una cubierta cerrada invariante localmente finita $\mathcal{F}_2 = \{F_\alpha\}_{\alpha<\eta}$ de F tal que $F_\alpha \cap B = B_\alpha$ para cada $\alpha < \eta$, y $\mathcal{F}_2$ es similar a $\mathcal{F}_1$.

Como $\mathcal{F}_2$ es una cubierta cerrada invariante localmente finita de F, existe, por el Lema 5.7, una cubierta abierta invariante localmente finita $\{V_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$ de F tal que para cada $\beta \in \Lambda$ el conjunto $\overline{V_\beta}$ intersecta solo un número finito de elementos de $\mathcal{F}_2$.

Pongamos $\mathcal{B} = \{\overline{V_\beta}|V_\beta \cap B \neq \emptyset\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una cubierta cerrada localmente finita de B y $F' = \cup\{\overline{V_\beta}|V_\beta \in \mathcal{B}\}$ es una vecindad cerrada invariante de B en Y.

Supongamos ahora que el conjunto de índices β para la cubierta $\mathcal{B}$ consiste de todos los ordinales β menores que un ordinal fijo δ y ponga, para cada $\theta < \delta$, $P_\theta = \bigcup_{\beta \leq \theta} \overline{V_\beta}$.

Por ser $\mathcal{B}$ localmente finita, cada P_θ es cerrado en Y (ver por ejemplo [14]).

Sea $\mu < \delta$. Supongamos que para cada $\theta < \mu$, se construyen el subconjunto cerrado invariante N_θ y la G-aplicación f_θ, tales que cumplen:

$i)_\theta$ N_θ es una vecindad cerrada invariante de $P_\theta \cap B$ en P_θ;

$ii)_\theta$ f_θ es una G-aplicación de $N_\theta \cup B$ en X;

$iii)_\theta$ $f_\theta|_B = f$;

$iv)_\theta$ si $\gamma < \theta$, se tiene $N\gamma \subset N_\theta$ y $f_\theta|_{N_\gamma} = f_\gamma$;

$v)_\theta$ $\overline{N_\theta \setminus \bigcup_{\gamma<\theta} N_\gamma} \subset \overline{V_\theta}$;

$vi)_\theta$ para cada $\alpha < \eta$ se tiene $f_\theta(N_\theta \cap F_\alpha) \subset A_\alpha$.

Sea $M = \bigcup\{N_\theta | \theta < \mu\} \cup B$. Luego $M = B \cup \bigcup_{\theta<\mu} (\overline{N_\theta \setminus \bigcup_{\gamma<\theta} N_\gamma})$ y, usando $v)_\theta$, tenemos que M es cerrado en Y. Definamos $g : M \to X$ como $g|_{N_\theta \cup B} = f_\theta$. Por $iv)_\theta$ y el hecho de que $\mathcal{B}$ es localmente finita, tenemos que g está bien definida y es continua.

Sean $F_{\alpha_1}, ..., F_{\alpha_n}$ aquellos elementos de $\mathcal{F}_2$ que intersectan a $\overline{V_\mu}$. Aplicando el Lema 5.6 a $\overline{V_\mu}$, $\overline{V_\mu} \cap M$, $\{\overline{V_\mu} \cap F_{\alpha_i} | i = 1, 2, ..., n\}$, $\cup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$ y a $g|_{\overline{V_\mu} \cap M} : \overline{V_\mu} \cap M \to \cup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$, podemos encontrar una vecindad cerrada invariante M_μ de $\overline{V_\mu} \cap M$ en $\overline{V_\mu}$ y una G-aplicación $h_\mu : M_\mu \to \cup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$ tales que $h_\mu|_{\overline{V_\mu} \cap M} = g|_{\overline{V_\mu} \cap M}$ y $h_\mu(M\mu \cap F_{\alpha_i}) \subset A_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Sea

$$N_\mu = \bigcup_{\theta<\mu} N_\theta \cup M_\mu = \bigcup_{\theta\leq\mu} M_\theta$$

y definamos $f_\mu : N_\mu \cup B \to X$ por $f_\mu|_M = g$ y $f_\mu|M_\mu = h_\mu$. Usando el Lema 5.5 se prueba $i)_\mu$. Las condiciones restantes son fáciles de checar.

Sea $U = \cup_{\theta<\delta} N_\theta$ y definamos $h : U \to X$ como $h|_{N_\theta \cup B} = f_\theta$, $\theta < \delta$.

Así, U es una vecindad cerrada invariante de B en Y, de acuerdo al Lema 5.5, y h es la extensión equivariante de f que buscábamos. Por lo tanto, la prueba está completa.

□

6. G-CW-complejos

En esta sección restringiremos las acciones de grupos localmente compactos a grupos de Lie. Probaremos también que cada G-CW-complejo propio es un G-ANE. En el caso en que el grupo es discreto, un G-CW-complejo consiste simplemente de un ordinario CW-complejo X y una acción de G sobre X la cual permuta las células (es decir discos n-dimensionales). Para esto vea la monografía de G. Bredon [10]. Los G-CW-complejos, cuando la acción es de un grupo no discreto, fueron definidos por S. Illman en [23] y [24] y por T. Matumoto en [34].

Al igual que en el caso no equivariante, la definición de topología coherente juega un papel importante en la definición de un G-CW-complejo.

Definición 6.1. *Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ una colección de espacios topológicos y $X = \cup_\alpha X_\alpha$. Entonces se define una topología de X declarando un conjunto C de X como un cerrado si y sólo si su intersección $C \cap X_\alpha$ es un cerrado en X_α para cada $\alpha \in \Omega$. A esta topología se le llama la* **topología coherente de X respecto a $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$.**

Describamos ahora cómo son las células equivariantes y cómo se realiza el proceso de "pegarlas" para la construcción de los G-CW-complejos.

Definición 6.2. Sean X un G-espacio de Hausdorff y A un subconjunto invariante de X. Entonces se dice que X se obtiene **adjuntando n-células equivariantes** si existen G-conjuntos cerrados $\{c_j^n\}_{j\in J}$ de X tales que:

1) $X = A\bigcup(\bigcup_{j\in J} c_j^n)$ y la topología es coherente respecto a $\{A, c_j^n\}_{j\in J}$;

2) Sean $\dot{c}_j^n = c_j^n \bigcap A$ y $\mathring{c}_j^n = c_j^n \setminus \dot{c}_j^n$. Entonces:
$\mathring{c}_i^n \bigcap \mathring{c}_j^n = \emptyset$, si $i \neq j$;

3) Para todo $j \in J$ existe un subgrupo cerrado H_j de G y una G-aplicación
$\phi_j : (\mathbb{D}^n \times G/H_j, \mathbb{S}^{n-1} \times G/H_j) \longrightarrow (c_j^n, \dot{c}_j^n)$
donde ϕ_j es una aplicación cociente y $\phi_j| : (\mathring{\mathbb{D}}^n \times G/H_j) \longrightarrow \mathring{c}_j^n$ es un G-homeomorfismo.

Definición 6.3. **Un G-CW-Compleje** consiste de un espacio X de Hausdorff y una filtración $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ de G-conjuntos cerrados de X tales que:

1) X^k se obtiene de X^{k-1} adjuntándole k-células equivariantes con $k = 0, 1, \ldots$ $(X^{-1} = \emptyset)$.

2) $X = \bigcup_{k\geq 0} X^k$, y X tiene la topología coherente respecto a $\{X^k\}_{k\geq 0}$.

En el caso de los G-CW-complejos, las células son los G-espacios $G/H \times \mathbb{D}^n$, donde $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$, $n = 1, 2, \ldots$ (aquí $\mathbb{D}^0$ es el espacio que consta de un punto y $\mathbf{S}^{-1} = \emptyset$), y H es un subgrupo cerrado de G.

La acción de G sobre el espacio cociente G/H es por traslación izquierda y la acción de G sobre los espacios $\mathbb{D}^n$ y $\mathbf{S}^{n-1}$ es la trivial.

Algunos ejemplos de G-CW-complejos se presentan a continuación.

Ejemplo 6.4. *Sea $G = \mathbf{S}^0$ y la $(n-1)$-esfera $\mathbf{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\}$ con la acción dada por la multiplicación por escalar,*
$G \times \mathbf{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbf{S}^{n-1}$; $(t, x) \mapsto tx$, $t \in G = \{-1, 1\}$, $x \in \mathbf{S}^{n-1}$.

En este caso la acción es libre y si denotamos por X al G-espacio $\mathbf{S}^{n-1}$, entonces X tiene la siguiente descomposición como un G-CW-complejo:

$X^0 := G \cong \mathbf{S}^0$,
$X^m := X^{m-1} \cup_{\phi^m} G \times \mathbb{D}^m$, *donde* $\phi^m : G \times \mathbf{S}^{m-1} \longrightarrow X^{m-1} = \mathbf{S}^{m-1}$ *está dada por* $\phi^m(t, x) = tx$, $(1 \leq m < n)$.

El espacio orbital X/G es el $(n-1)$-espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^{n-1}$ y la G-CW estructura de X induce la descomposición celular no equivariante de $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Ejemplo 6.5. *Sea $G = \mathbf{S}^1$ la esfera unitaria y $X = \mathbf{S}^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid ||z|| = 1\}$ con la acción:*
$G \times X \longrightarrow X$, $(\lambda, z) = \lambda z$, $\lambda \in G$, $z \in X$.

Se tiene que la acción es libre y que X tiene la siguiente descomposición como un G-CW complejo:

$X^0 := G \cong \mathbf{S}^1$,
$X^1 := X^0$,
$X^{2m} := X^{2m-1} \cup_{\phi^{2m}} G \times \mathbb{D}^{2m}$, *donde* $\phi^{2m} : G \times \mathbf{S}^{2m-1} \longrightarrow X^{2m-1} = X^{2m-2} = \mathbf{S}^{2m-1}$ *está dada por* $\phi^{2m}(\lambda, z) = \lambda z$. *(Notemos que el $2m$-esqueleto equivariante X^{2m} de X no es un $2m$-esqueleto de X para el caso de la descomposición celular no equivariante pues $G = \mathbf{S}^1$ tiene dimensión 1).*

El espacio orbital X/G es el $(n-1)$-espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^{n-1}$ y, nuevamente, la estructura G-CW de X induce la descomposición celular no equivariante de $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Ejemplo 6.6. *Si $G = \mathbb{S}^1$ actúa sobre $\mathbb{S}^2$ mediante la multiplicación entonces $\mathbb{S}^2$ tiene una descomposición celular equivariante en dos 0-células $\mathbb{D}^0 \times G/G$ y una 1-célula $\mathbb{D}^1 \times G/\{e\}$ (e es la identidad de G).*

Los siguientes dos resultados son importantes para el resultado principal de esta sección pues nos permiten establecer cuándo un G-CW complejo es propio y paracompacto.

Proposición 6.7. *Sea X un G-CW complejo. Si para cada $x \in X$ el estabilizador G_x es compacto entonces X es un G-espacio propio.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Proposición 4.10 en [15] pág. 40.

□

Proposición 6.8. *Sea X un G-CW complejo. Entonces X y X/G son espacios paracompactos.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Proposición 4.16 en [15] pág. 42.

□

Los siguientes tres resultados tienen el fin de establecer las condiciones necesarias para que el teorema principal de esta sección sea una consecuencia de la aplicación de los principales resultados de las dos secciones precedentes. Mostraremos, primeramente, que un espacio ANE puede ser visto como un espacio G-ANE y que la unión discreta de espacios G-ANE es también G-ANE. Finalmente, se probará que la unión discreta de G-células de G-CW complejos son espacios en la intersección de las clases G-$\mathcal{M}$ y G-ANE.

Lema 6.9. *Si X es un espacio ANE entonces X es un espacio G-ANE, donde G actúa trivialmente sobre X.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $Y \in G$-$\mathcal{M}$, B un subconjunto cerrado invariante de Y y $f : B \to X$ una G-aplicación. Sea π la proyección orbital. Entonces tenemos una aplicación $\tilde{f} : B/G \to X$ inducida por π y f (vea por ejemplo [38]), de manera que cumple $\tilde{f} \circ \pi = f$.

Como B es un cerrado invariante de Y, B/G es un subespacio cerrado del espacio métrico Y/G y dado que X es un espacio ANE, existe una vecindad $\tilde{U}$ de B/G en Y/G y una extensión $\tilde{h} : \tilde{U} \to X$ de $\tilde{f}$. Ahora bien, $\pi^{-1}(\tilde{U})$ es una vecindad invariante de B en Y y $h = \tilde{h} \circ \pi$ es una extensión equivariante de f.

□

Proposición 6.10. *Si $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es una familia de espacios G-ANE, entonces la unión discreta $X = \cup_{\alpha\in\Omega} X_\alpha$ es un espacio G-ANE.*

DEMOSTRACIÓN. Sean (Y, B) un G-par con $Y \in G$-$\mathcal{M}$ y $f : B \longrightarrow X$ una G-aplicación. Sea $B_\alpha = f^{-1}(X_\alpha)$. Entonces $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es una cubierta cerrada invariante localmente finita de B. Por el Lema 5.4 de este capítulo, existe una vecindad cerrada invariante F de B en Y y una cubierta cerrada invariante localmente finita $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ de F tal que $F_\alpha \cap B = B_\alpha$ y $F_\alpha \cap F_{\alpha'} = \emptyset$ siempre que $\alpha \neq \alpha'$. Sea U el interior de F y $U_\alpha = U \cap F_\alpha$. Del hecho de que $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es localmente finita se sigue que cada U_α es abierto en U (y por lo tanto en Y). Como X_α es un espacio G-ANE existe una una vecindad abierta invariante V_α de B_α en U_α y una G-aplicación $\phi_\alpha : V_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ que extiende la aplicación $f|_{B_\alpha}$. Por tanto se tiene que el conjunto $V = \cup_{\alpha\in\Omega} V_\alpha$ es una vecindad abierta invariante de B en Y y entonces la aplicación $\psi : V \longrightarrow X$ definida por $\psi|_{V_\alpha} = \phi_\alpha$, $\alpha \in \Omega$, es la extensión equivariante de vecindad de f buscada.

□

Proposición 6.11. *Sea $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ una familia de subgrupos compactos de G. Entonces el G-espacio*

$$X = \cup_{\alpha\in\Omega} (G/H_\alpha) \times Z$$

donde Z puede ser $\mathbb{S}^{n-1}$ o $\mathbb{D}^n$, está en G-$\mathcal{M} \cap G$-ANE.

DEMOSTRACIÓN. Sea $X_\alpha = (G/H_\alpha) \times Z$. Por el Lema 6.9 del presente capítulo, Z es un espacio G-ANE y por las proposiciones 2.5 y 2.7 de [15] págs. 23-25, cada G/H_α es un G-ANE. Luego, el producto $X_\alpha = G/H_\alpha \times Z$ es también un G-ANE. Así, por la Proposición 6.10, X es un G-ANE. Sólo falta probar que X está en la clase G-$\mathcal{M}$.

Seleccionemos, sobre cada espacio cociente G/H_α, una métrica G-invariante ρ_α (para la existencia de dicha métrica ver por ejemplo **[39]**)y una métrica δ sobre Z. Entonces para cada $\alpha \in \Omega$, la fórmula:

$$d'_\alpha(x, y) = \rho_\alpha(x_1, y_1) + \delta(x_2, y_2)$$

donde $x_1, y_1 \in G/H_\alpha$ y $x_2, y_2 \in Z$, define una métrica G-invariante sobre X_α.

Ahora, para cada $\alpha \in \Omega$, sea d_α como sigue:

$$d_\alpha(x, y) = \begin{cases} d'_\alpha(x, y) & \text{si} \quad d'_\alpha(x, y) \leq 1, \\ 1 & \text{si} \quad d'_\alpha(x, y) > 1. \end{cases}$$

Se tiene que las métricas d_α son G-invariantes. Entonces, una métrica G-invariante para el G-espacio X puede ser definida de manera que sea compatible con su topología, de la siguiente manera:

$$d(x,y) = \begin{cases} d_\alpha(x,y) & \text{si } x, y \in X_\alpha \text{ para algún } \alpha \\ 1 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Con esto concluimos la prueba.

□

Ahora estamos en posición de probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 6.12. *Sean G un grupo de Lie y X un G-CW complejo propio. Entonces X es un espacio G-ANE.*

DEMOSTRACIÓN. El 0-esqueleto X^0 de X es una unión discreta de espacios cocientes G/H_α, $\alpha \in \Omega$, donde H_α es un subgrupo compacto de G para cada $\alpha \in \Omega$. Como se mencionó anteriormente, cada espacio cociente G/H_α es un G-ANE y, se sigue de la Proposición 6.10, que X^0 es un G-ANE. Suponga que $n \geq 1$ y que el $(n-1)$-esqueleto, X^{n-1}, es un G-ANE. Pero el n-esqueleto X^n puede ser obtenido de X^{n-1} de la siguiente manera (ver el Comentario 4.3 en [15]): existe una familia $\{H_j\}_{j\in J}$ de subgrupos compactos de G y una G-aplicación:

$$\varphi : (\cup_{j\in J}(G/H_j) \times \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow X^{n-1}$$

tales que

X^n es G-homeomorfo a $(\cup_{j\in J}(G/H_j) \times \mathbb{D}^n) \cup_\varphi X^{n-1}$.

Además, las uniones discretas $\cup_{j\in J}(G/H_j) \times \mathbb{D}^n$ y $\cup_{j\in J}(G/H_j) \times \mathbb{S}^{n-1}$ están en la clase G-$\mathcal{M} \cap G$-ANE, por la Proposición 6.11 de este capítulo. En consecuencia, X^n es un G-ANE por el Teorema 4.16 del Capítulo II.

Es fácil ver que el G-CW-complejo X tiene la topología débil (en el sentido de la Definición 5.1) respecto a los esqueletos $\{X^n\}_{n\geq 0}$. La prueba del teorema se concluye al aplicar el Teorema 5.8 a X y a la familia $\{X^n\}_{n\geq 0}$.

□

CAPÍTULO 3

DIVISORES G-ANR

1. Introducción

Sea B un espacio métrico. La propiedad de que para cada $X \in ANR$, donde B está encajado como un subespacio cerrado de X, el espacio X/B (que se obtiene al colapsar B a un punto), es un espacio ANE, se establece en [22] y se dice que B es un divisor ANR. Nuestro propósito en este capítulo es establecer las versiones equivariantes de estos resultados para el caso de acciones de grupos compactos. Primeramente introduciremos la noción de divisor G-ANR. En la sección 3 de este capítulo probaremos que un G-espacio que tiene una base de vecindades por G-deformación es un divisor G-ANR. La noción de espacio G-contraíble absoluto por vecindad se presenta en la sección 4 del presente capítulo, y se prueba que este tipo de espacios son divisores G-ANR.

Sucesivamente en las Secciones 4 y 5 probaremos que si B es un G-espacio métrico compacto y G-$ANR(B)$ denota la clase de los G-ANR que contienen a B como un subespacio cerrado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) B es un espacio G-contraíble absoluto por vecindad;

(b) existe un espacio $Y \in G$-$ANR(B)$ tal que B es G-contraíble por vecindad en Y;

(c) para cada espacio $Y \in G$-$ANR(B)$, se tiene que B es G-contraíble en Y;

(d) para cada espacio $Y \in G$-$ANR(B)$, existe una vecindad invariante V de B en Y tal que para cada G-par métrico (X, A), cada G-aplicación $f : A \longrightarrow V$ tiene una G-extensión $F : X \longrightarrow Y$;

(e) para cada espacio $Y \in G$-$ANR(B)$, la proyección identificación $p : Y \longrightarrow Y/B$ tiene una inversa G-homotópica por la izquierda.

(f) para cada espacio $Y \in G$-$ANR(B)$, la proyección identificación $p : Y \longrightarrow Y/B$ es una equivalencia G-homotópica;

(g) para cada espacio $Y \in G\text{-}ANR(B)$, cada G-aplicación de B en Y es G-homotópicamente nula.

Además, mostraremos que las propiedades de un espacio de ser G-contraíble absoluto por vecindad y divisor G-ANR son invariantes del tipo de G-homotopía.

Finalmente, el capítulo concluye estudiando la unión y el cociente de divisores G-ANR y espacios G-contraíbles absolutos por vecindad.

2. Preliminares sobre divisores G-ANR

Antes de definir la noción de divisor G-ANR mencionemos algunos hechos básicos para su estudio. Recordemos que en este capítulo el grupo actuante será considerado un grupo compacto de Hausdorff e I denotará al intervalo $[0,1]$ a menos que se especifique otra cosa. Iniciemos con un resultado acerca de G-espacios normales.

Proposición 2.1. *Sea X un G-espacio. Si V es una vecindad de un subconjunto invariante A de X, entonces existe una vecindad abierta invariante U de A tal que $U \subset V$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que V es una vecindad abierta (si V no es abierta, tomemos como V a un abierto que contenga a A y que esté contenido en V) de un subconjunto invariante A de X y $\pi : X \longrightarrow X/G$ es la proyección orbital de X. El conjunto $U = X/G \setminus \pi(X \setminus V)$ es abierto en X/G y contiene a $\pi(A)$. Además, $\pi^{-1}(U) \subset V$ dado que si $u \in U$ entonces $\pi^{-1}(u) \cap (X \setminus V) = \emptyset$. De donde $\pi^{-1}(U) = X \setminus (G(X \setminus V))$ es la vecindad abierta invariante de A contenida en V.

$\square$

Proposición 2.2. *Sean X un G-espacio normal y A un subconjunto cerrado invariante de X. Si U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe un subconjunto abierto invariante V de X tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

DEMOSTRACIÓN. Como X es normal existe una vecindad W de A en X tal que $A \subset W \subset \overline{W} \subset U$. Por la Proposición 2.1, existe una vecindad abierta invariante V de A en X tal que $A \subset V \subset W$. De aquí que también $\overline{V} \subset \overline{W}$ y por tanto la proposición está probada.

$\square$

También algunos hechos de homotopía equivariante serán usados en este capítulo. Si se desea adentrar en este tema puede consultarse, por ejemplo, [**42**].

Sean $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ dos G-aplicaciones. Se dice que son *G-homotópicas* , si existe una homotopía $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ de f_0 a f_1 tal que F es una G-aplicación. Aquí $[0,1]$ tiene la acción trivial y $X \times [0,1]$ la acción diagonal. Así, cada función continua $f_t : X \longrightarrow Y$ dada por $f_t(x) = F(x,t)$ es una G-aplicación. Más aún, la relación de ser G-homotópicas es una relación de equivalencia y tenemos entonces una categoría de G-espacios y clases de G-homotopía de G-aplicaciones. Escribiremos $f_0 \overset{G}{\simeq} f_1$ si f_0 y f_1 son G-homotópicas.

Sean $X \subseteq Y$, $f_0 : X \longrightarrow Y$ la inclusión y f_1 la G-aplicación constante de X a un punto fijo en Y, entonces la G-homotopía es llamada *G-contracción* y X se dice que es *G-contraíble*.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una G-aplicación. Decimos que una G-aplicación $h : Y \longrightarrow X$ es una *inversa derecha G-homotópica de f* si la composición $f \circ h$ es G-homotópica a la identidad en Y. De manera análoga se define la *inversa izquierda G-homotópica de f*.

Dos G-espacios X y Y se dicen que tienen el mismo *tipo de G-homotopía* si existen dos G-aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow X$ tales que las composiciones $f \circ h$ y $h \circ f$ son G-homotópicas a las respectivas G-aplicaciones identidad.

Otro resultado que será esencial a lo largo de este capítulo, lo constituye la versión equivariante del teorema de K. Borsuk acerca de la propiedad de extensión de homotopía y los espacios ANR. Antes de probar el teorema será necesario introducir la definición de la propiedad de extensión de homotopía equivariante de manera similar a la establecida en [**42**] y probar un lema preliminar.

Definición 2.3. *Se dice que un G-par (X,A) tiene la* **propiedad de extensión de homotopía equivariante** *(denotada como G-PEH) respecto a un G-espacio Y, si dadas G-aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ y $H : A \times I \longrightarrow Y$ tales que $H(a,0) = f(a)$ para toda $a \in A$, existe una G-aplicación $H^* : X \times I \longrightarrow Y$ que satisface $H^*(a,t) = f(a)$ para todos $a \in A$, $t \in I$ y $H^*(x,0) = f(x)$, para todo $x \in X$.*

Lema 2.4. *Sean (X,A) un G-par métrico y $D = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ el subespacio cerrado invariante de $X \times I$. Si una G-aplicación $f : D \longrightarrow Y$ tiene una extensión sobre $(X \times \{0\}) \cup U$, donde U es una vecindad* *abierta invariante de $A \times I$ en $X \times I$, entonces f tiene una G-extensión sobre $X \times I$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $F : (X \times \{0\}) \cup U \longrightarrow Y$ una G-extensión de f. Usando la compacidad de I y la Proposición 2.2 podemos encontrar una vecindad invariante V de A en X tal que $V \times I \subset U$. Dado que A y $B = X \setminus V$ son subconjuntos cerrados invariantes disjuntos, por el teorema equivariante de Tietze-Urysohn (ver [38] pág. 3) existe una G-aplicación $\lambda : X \longrightarrow I$ tal que $\lambda(A) = \{1\}$ y $\lambda(B) = \{0\}$. Definimos ahora la aplicación $h : X \times I \longrightarrow Y$ como $h(x,t) = F(x, \lambda(x)t)$, para cada $x \in X$ y cada $t \in I$. Es fácil checar que h es una G-aplicación y extiende f sobre $X \times I$.

□

Teorema 2.5. *Sea (X, A) un G-par métrico. Entonces (X, A) tiene la G-PEH respecto a cada G-ANR.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $Y \in G$-ANR, $f : X \longrightarrow Y$ una G-aplicación y $H : A \times I \longrightarrow Y$ una G-homotopía. Consideraremos, como en el Lema 2.4, el subespacio cerrado invariante $D = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ de $X \times I$. Definimos una G-aplicación $H^* : D \longrightarrow Y$ como sigue:

$$H^*(x,t) = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad x \in X \text{ y} t = 0, \\ H(x,t), & \text{si} \quad x \in A \text{ y} t \in I. \end{cases}$$

Por el teorema 4.5 del Capítulo I, $Y \in G$-ANE y, dado que D es un subconjunto cerrado invariante de $X \times I$, existen una vecindad invariante U de D en $X \times I$ y una G-extensión $F : U \longrightarrow Y$ de H^*. Del Lema 2.4 se sigue que H^* tiene una G-extensión $F^* : X \times I \longrightarrow Y$. Es claro que F^* es una G-extensión de H y $F^*(x, 0) = f(x)$.

□

El teorema que a continuación se presenta servirá para introducir la noción de divisor G-ANR

Teorema 2.6. *Sean A un G-espacio, $Y \in G$-ANR y $f : A \longrightarrow Y$ una G-aplicación. Si $X_0 \cup_f Y$ es un G-ANE para algún $X_0 \in G$-$ANR(A)$ entonces $X \cup_f Y$ es un G-ANE para cada $X \in G$-$ANR(A)$.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con la Proposición 4.14 del Capítulo I, para probar este teorema basta con mostrar que $p(Y)$ es un retracto fuerte de vecindad por G-deformación de $X \cup_f Y$, donde $p : X \sqcup Y \longrightarrow X \cup_f Y$ es la proyección canónica.

Como $X \in G$-ANR, por el Teorema 4.5 del primer capítulo, tenemos que $X \in G$-ANE. Entonces la inclusión $i : A \longrightarrow X$ tiene una G-extensión $\phi : U \longrightarrow X$ sobre una vecindad abierta invariante U de A en X_0. Dado que $X_0 \in G$-ANR, por el Teorema 4.5 del Capítulo I, $X \in G$-ANE. Sea $q : X_0 \sqcup Y \longrightarrow X_0 \cup_f Y$ la proyección canónica; tenemos que $q(U \sqcup Y)$ es abierto en $X_0 \cup_f Y$ y, al igual que U, es un G-ANE. Por la Proposición 4.14 del Capítulo II, existe una retracción fuerte de vecindad por G-deformación $h : W \times I \longrightarrow q(U \sqcup Y)$, donde W es una vecindad invariante de $q(Y)$ en $q(U \sqcup Y)$ y, en consecuencia, es abierto en $X_0 \cup_f Y$. Puesto que $q^{-1}(W) \cap X_0$ es un abierto invariante en X_0 y, por el Teorema 4.5 del Capítulo I, X_0 es un G-ANE; tenemos entonces por la Proposición 4.4 del Capítulo I, que $q^{-1}(W) \cap X_0$ es un G-ANE. Por lo tanto, la inclusión $j : A \longrightarrow q^{-1}(W) \cap X_0$ tiene una G-extensión $\psi : V \longrightarrow q^{-1}(W) \cap X_0$, donde V es una vecindad invariante de A en X. Además, $V \in G$-ANE, por el Teorema 4.4 del primer capítulo. Se sigue que existe una vecindad invariante D de A en U y una G-deformación $s : D \times I \longrightarrow V$ tal que $s(a,t) = a$, para todos $a \in A$, $t \in I$ y $s_1 = \phi\psi|_V$.

Sea $\Psi : U \sqcup Y \longrightarrow X \sqcup Y$ la G-aplicación definida como

$$\Psi(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{si} \quad x \in X, \\ x, & \text{si} \quad x \in Y. \end{cases}$$

Definamos una G-aplicación $k : p(D \sqcup Y) \times I \longrightarrow X \cup_f Y$ por

$$k(z,t) = \begin{cases} ps_{2t}(p|X)^{-1}(z), & \text{si} \quad z \in p(D) \text{ y } 0 \leq t \leq 1/2, \\ p\Psi q^{-1} h_{2t-1} q\psi(p|X)^{-1}(z), & \text{si} \quad z \in p(D) \text{ y } 1/2 \leq t \leq 1, \\ z, & \text{si} \quad z \in p(Y) \text{ y } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces k es una retracción fuerte de vecindad por G-deformación y se concluye la prueba.

□

Sean (X, A) un par, Y un espacio topológico y $f : A \longrightarrow Y$ una aplicación. Un caso particular del espacio de adjunción $X \cup_f Y$ es cuando Y consta de un solo punto. Si esto sucede el espacio de adjunción se dice que se obtiene *colapsando A a un punto*. Este espacio se denota como X/A y es esencial en este capítulo. Por el teorema anterior se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 2.7. *Sea B un G-espacio métrico. Si existe un G-espacio $Y_0 \in G$-$ANR(B)$ tal que $Y_0/B \in G$-ANE, entonces para cada $Y \in G$-$ANR(B)$ se tiene que Y/B es un G-ANE.*

Cuando B es compacto el espacio de adjunción es metrizable ([**20**]). Aplicando este hecho al Corolario 2.7, Y/B es metrizable y por tanto se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.8. *Sea B un G-espacio métrico compacto. Si existe un G-espacio $Y_0 \in G\text{-}ANR(B)$ tal que $Y_0/B \in G\text{-}ANR$, entonces para cada $Y \in G\text{-}ANR(B)$, se tiene que Y/B es un G-ANR.*

A partir de los corolarios anteriores podemos ver que la propiedad de Y/B de ser G-ANE depende únicamente de B y no de Y. Entonces es interesante conocer cuándo un subespacio cerrado invariante de un G-ANR "divide"en cierto sentido a un espacio G-ANR, es decir, deforma equivariantemente el espacio G-ANR colapsando el subespacio cerrado invariante a un punto y conserva la propiedad de seguir siendo G-ANR o al menos G-ANE. Esta clase de espacios serán los que nos interesarán a lo largo de esta última parte de la tesis.

Definición 2.9. *Un G-espacio B se dice* **divisor G-ANR** si es metrizable y Y/B es un G-ANE para cada G-espacio $Y \in G\text{-}ANR(B)$.

Por el Teorema 2.8 y el Corolario 4.17 del segundo Capítulo, cada espacio compacto G-ANR es un divisor G-ANR.

Por ejemplo, si X es un G-ANR entonces el cono $con(X)$ es un G-ANR (Corolario 4.27, Capítulo II). Así, por el Corolario 2.8, $X \times \{0\}$ es un divisor G-ANR.

Las siguientes secciones presentarán condiciones para que un G-espacio sea un divisor G-ANR.

3. Bases de vecindades por G-deformación

En la presente sección estudiaremos las deformaciones locales de un G-espacio que le permiten ser un divisor G-ANR

Definición 3.1. *Un G-espacio X es* **localmente G-contraíble fuertemente en un punto $x \in X$** si existe una vecindad invariante V de x y una G-contracción k_t de V en X, tal que $k_t(x) = x$ para todo t.

De acuerdo a la Proposición 4.14 del Capítulo II, y a la definición anterior tenemos:

Lema 3.2. *Sea B un subconjunto cerrado invariante de un G-espacio $Y \in G$-ANR. Entonces Y/B es un G-espacio G-ANE si y sólo si Y/B es localmente G-contraíble fuertemente en el punto $p(B)$, donde $p : Y \to Y/B$ es la función identificación.*

Definición 3.3. *Sea (Y, B) un G-par. Una doble sucesión $\{U_n, h_n\}_{n\geq 1}$ es llamada una* **base de vecindades por G-deformación para B en Y** si cumple lo siguiente:

(B1) Cada U_n es una vecindad invariante de B en Y.

(B2) $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(B3) Para cada vecindad invariante V de B en Y existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \subset V$.

(B4) Defínase $U_0 = Y$. Entonces para todo $n \geq 1$ la G-aplicación $h_n : \overline{U_n} \times I \to \overline{U}_{n-1}$ es una G-deformación tal que:

$$h_n(\overline{U}_n \times \{1\}) \subset \overline{U}_{n+1}.$$

(B5) Si $m > n$ entonces $h_n(\overline{U}_m \times I) \subset \overline{U}_{m-1}$.

Lema 3.4. *Sea (Y, B) un G-par. Si B tiene una base de vecindades por G-deformación en Y, entonces Y/B es localmente G-contraíble fuertemente en el punto $p(B)$, donde $p : Y \to Y/B$ es la función identificación.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{U_n, h_n\}_{n\geq 1}$ una base de vecindades por G-deformación para B. Para cada n y para todo $s \in I$, sea la G-aplicación $h_n^s : \overline{U}_n \to Y$ dada por $h_n^s(x) = h_n(x, s)$. Definamos ahora la G-función $h : \overline{U}_1 \times [0, \infty) \to Y$ como:

$$h(x,t) = \begin{cases} h_1(x,t), & \text{si} \quad k = 0, \\ h_{k+1}^{t-k} \circ h_k^1 \circ h_{k-1}^1 \circ \ldots \circ h_2^1 \circ h_1^1(x), & \text{si} \quad k \geq 1. \end{cases}$$

donde k es un entero no negativo tal que $t \in [k, k+1]$.

Como el rango de h_n^1 está contenido en el dominio de h_{n+1}^s para toda n y toda s, la composición tiene sentido. Verifiquemos que está bien definida.

Sea $(x, t) \in \overline{U} \times [0, \infty)$, donde $t = k$ para un entero positivo k. Entonces $t \in [k-1, k]$ y $t \in [k, k+1]$. Así que por un lado:

$$h(x,t) = h_k^1 \circ h_{k-1}^1 \circ \ldots \circ h_2^1 \circ h_1^1(x)$$

y por otro lado

$$h(x,t) = h^0_{k+1} \circ h^1_k \circ h^1_{k-1} \circ \ldots \circ h^1_2 \circ h^1_1(x) = h^0_{k+1} \circ h(x,t).$$

Pero como cada h_n es una deformación entonces:

$$h(x,t) = h^0_{k+1} \circ h(x,t) = h_{k+1}(h(x,t),0) = h(x,t).$$

Esto significa que h está bien definida.

También, h es continua dado que es continua en cada conjunto cerrado de la forma $\overline{U}_1 \times [k, k+1]$. Además, fácilmente se puede ver que es equivariante, dado que es una composición de G-aplicaciones.

Más aún, afirmamos que h tiene las siguientes propiedades:

(1) Para toda $n > 1$, se cumple que $h(\overline{U}_1 \times [0,\infty)) \subset \overline{U}_{[n/2]}$ ($[w]$ denota la parte entera de $w \in \mathbb{R}$).

(2) Para todo $t \in [1,\infty)$, se tiene que $h(\overline{U}_1 \times \{t\}) \subset \overline{U}_{[t]}$.

(3) $h(B \times [0,\infty)) \subset B$.

Verifiquemos que, en efecto, se cumple cada propiedad.

(1). Sean $(x,t) \in \overline{U}_n \times [0,\infty)$ y k un entero no negativo tal que $t \in [k, k+1]$. Luego

(i) Si $k \geq [n/2]$, consideremos que $x \in \overline{U}_1$, lo cual podemos hacer por (B2). Entonces, por (B4) y la definición de h, se tiene que:

$$h(x,t) \in \overline{U}_k \subset \overline{U}_{[n/2]}.$$

(ii) Si $k < [n/2]$ entonces es trivial checar que $n - k - 1 \geq [n/2]$. Como $x \in \overline{U}_n$ y $n - k > k + 1$, apliquemos (B5) en la definición de h, para concluir que $h(x,t) \in \overline{U}_{n-k-1}$, por lo que $h(x,t) \in \overline{U}_{[n/2]}$, y finaliza la prueba de (1).

(2) En este caso sea $k \geq 1$ tal que $k \leq t < k+1$. Entonces $[t] = k$ y por (B4), h_{k+1} es una deformación sobre $\overline{U}_k$. Aplicando entonces la definición de h obtenemos lo deseado.

(3) De acuerdo a (B1) y (B2) se tiene que $B = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n$. Así, aplicando la parte (1) de este lema, finalizamos la prueba.

Consideremos un homeomorfismo f de $[0,1)$ sobre $[0,\infty)$. Definamos una función $J : p(U_1) \times I \longrightarrow Y/B$ por:

$$J(z,t) = \begin{cases} p(h(p^{-1}(z), f(t))), & \text{si} \quad z \in p(U_1) \text{ y } t < 1 \\ p(B), & \text{si} \quad z \in p(U_1) \text{ y } t = 1. \end{cases}$$

Es claro que J es equivariante. Veamos ahora que está bien definida, lo cual basta verificarse en $p(B)$. Sean $b_1, b_2 \in B$ y $t \in [0,1)$. Entonces, de acuerdo a (3), $h(p^{-1}(p(b_1)), f(t)) \in B$. Luego $p(h(p^{-1}(p(b_1)), f(t))) = J(p(b_1), t) = J(p(b_2), t)$ y, por lo tanto, J está bien definida.

De igual manera, de lo anterior se tiene que $J(p(B) \times I) = p(B)$.

Ahora bien, es suficiente probar que J es continua en los puntos de $p(U_1) \times \{1\}$ y de $p(B) \times I$, para que claramente sea continua en todo $p(U_1) \times I$.

Para esto, es fácil ver que cada U_n es un conjunto saturado por p. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $p(U_n)$ es una vecindad de $p(B)$. Más aún, debido a (B3), la colección $\{p(U_n) | n \geq 1\}$ es una base de vecindades de $p(B)$ en Y/B. A partir de este hecho procedamos a probar la continuidad de J.

Sean $(w_0, 1) \in p(U_1) \times \{1\}$ y V una vecindad de $J(w, 1) = p(B)$. Entonces existe un entero no negativo m tal que $p(B) \in p(U_m) \subset V$. Consideremos $f^{-1}(m, \infty) \cup \{1\}$, el cual tendrá la forma $(r, 1]$ para algún determinado $r \in [0,1)$. Sea $W = p(U_1) \times (r, 1]$. Luego, W es una vecindad de $(w_0, 1)$. Afirmamos que $J(W) \subset V$. En efecto, sea $(w, t) \in W$. El caso $t = 1$ es trivial. Si $t \in [0, 1)$ entonces $J(w, t) = p(h(p^{-1}(w), f(t)))$; como $t \in f^{-1}(m, \infty)$, se tiene que $f(t) \in (m, \infty)$ y por (2), $h(p^{-1}(w), f(t)) \in U_m$, Así, $J(w, t) = p(h(p^{-1}(w), f(t))) \in p(U_m) \subset V$

De la misma manera, sean $(p(B), t) \in p(B) \times I$ y V una vecindad de $p(B)$ en Y/B; luego existe una vecindad $p(U_m)$ de $p(B)$ en Y/B totalmente contenida en V. Seleccionemos un entero no negativo k tal que $[k/2] > m$. Si consideramos la vecindad $W = p(U_k) \times I$ de $(p(B), t)$ y aplicamos (1), tenemos que $J(W) \subset p(\overline{U}_{[k/2]}) \subset p(U_m) \subset V$.

De lo anterior se concluye que J es continua.

Finalmente, falta checar que J es una contracción de una vecindad de $p(B)$ en Y/B. De la definición de J se sigue que $J|_{p(U_1)\times\{1\}} = p(B)$ y, para cada $z \in p(U_1)$, $J(z, 0) = p(h(p^{-1}(z), 0)) = pp^{-1}(z) = z$.

Entonces se establece que Y/B es localmente G-contraíble por vecindad en el punto $p(B)$.

$\square$

De los Lemas 3.2 y 3.4 se desprende el siguiente:

Teorema 3.5. *Sea B un subconjunto cerrado invariante de un G-espacio $Y \in G$-ANR. Si B tiene una base de vecindades por G-deformación en Y entonces Y/B es un G-ANE.*

A partir de 2.7 y 3.5 obtenemos el resultado principal de la sección:

Corolario 3.6. *Sea B un subconjunto cerrado invariante de un G-espacio $Y \in G$-ANR. Si B tiene una base de vecindades por G-deformación en Y, entonces B es un divisor G-ANR.*

4. G-contractibilidad absoluta de vecindad

En el caso no equivariante las propiedades locales de contractibilidad permiten decidir si un espacio es un ANR o no lo es. De manera natural surge la pregunta ¿qué propiedades de contracción local se necesitan para que un G-espacio metrizable sea un divisor G-ANR? Esta sección está destinada a proporcionar algunas respuestas a esta cuestión.

Definición 4.1. *Sea (Y, B) un G-par. Se dice que B es* **G-contraíble por vecindad en Y** si B es G-contraíble en cada vecindad equivariante U de B en Y.

Un hecho fácil de observar es que un espacio G-contraíble por vecindad es G-contraíble.

Definición 4.2. *Sea B un G-espacio métrico. Se dice que B es* **G-contraíble absolutamente por vecindad** si es G-contraíble por vecindad en cada espacio $Y \in G$-$ANR(B)$.

El siguiente teorema establece algunas condiciones equivalentes menos fuertes para que un G-espacio métrico sea G-contraíble absolutamente por vecindad.

Teorema 4.3. *Sea B un G-espacio métrico. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Existe un $Y \in G$-$ANR(B)$ tal que B es G-contraíble en Y.

(b) Para cada $Y \in G$-$ANR(B)$, B es G-contraíble en Y.

(c) B es G-contraíble absolutamente por vecindad.

DEMOSTRACIÓN. Probemos que (a) implica (b). Sea $Z \in G$-$ANR(B)$. Luego la G-aplicación identidad $i : B \longrightarrow B$ se extiende a una G-aplicación $g : U \longrightarrow Z$, donde U es una vecindad invariante de B en Y. Por (a), B es G-contraíble en U bajo una G-homotopía h_t. Entonces la homotopía gh_t contrae equivariantemente B en Z.

La implicación de (c) a (a) es trivial.

Demostremos finalmente que (b) implica (c). Sea U una vecindad invariante de B en Y. Entonces por los Teoremas 4.4 y 4.5 del Capítulo I, U es un G-$ANR(B)$ y, por (b), B es G-contraíble en U. Así B es G-contraíble absolutamente por vecindad.

□

En esta sección mostraremos que cada G-espacio compacto G-contraíble absolutamente por vecindad es un divisor G-ANR. Para establecer este hecho, será necesario probar algunas proposiciones previas. La primera de ellas es una caracterización de G-contaíbilidad absoluta por vecindad.

Dado que cualquier G-aplicación constante en A puede ser extendida a X, por el Teorema 2.5 se tiene el siguiente:

Corolario 4.4. *Si (X, A) es un G-par métrico y si f es una G-aplicación homotópicamente nula de A en un G-espacio $Y \in G$-ANR, entonces f tiene una G-extensión $F : X \longrightarrow Y$*

A continuación se prueba una caracterización de los G-espacios G-contraíbles absolutos por vecindad.

Teorema 4.5. *Sea B un G-espacio métrico. Entonces B es G-contraíble absolutamente por vecindad si y sólo si para cada G-espacio $Y \in G$-$ANR(B)$ existe una vecindad invariante V de B en Y tal que para cada G-par métrico (X, A), cada G-aplicación $f : A \longrightarrow \overline{V}$ tiene una extensión equivariante $F : X \longrightarrow Y$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que B es G-contraíble absolutamente por vecindad y sea $Y \in G$-$ANR(B)$. Sea k_t una contracción equivariante de B sobre Y a un punto b_0. Definamos ahora una G-aplicación $h : (Y \times \{0\}) \cup (B \times I) \cup (Y \times I) \longrightarrow Y$ de la siguiente manera:

$h(y, 0) = y$ para todo $y \in Y$;
$h(b, t) = k_t(b)$ para todo $b \in B$ y $0 \leq t \leq 1$;

$h(y,1) = b_0$ para todo $y \in Y$.

Como Y es un G-$ANR(B)$, h tiene una extensión equivariante $H : W \longrightarrow Y$, donde W es una vecindad abierta invariante de $(Y \times \{0\}) \cup (B \times I) \cup (Y \times I)$ en $Y \times I$. Sea V una vecindad invariante de B en Y tal que $\overline{V} \times I \subset W$. Tenemos que $H|_{\overline{V}\times I}$ contrae equivariantemente $\overline{V}$ sobre Y al punto b_0. Entonces si $f : A \longrightarrow \overline{V}$ es una G-aplicación, hágase $J = H \circ (f \times id)$, donde id es la identidad sobre I. Claramente J es una G-homotopía de $A \times I$ en Y de donde se ve que f es G-homotópicamente nula sobre Y y, por el Corolario 4.4 de este capítulo, extendible equivariantemente sobre Y.

Inversamente, sean $Y \in ANR(B)$ y V una vecindad invariante que cumple las hipótesis del teorema; luego $f : (\overline{V} \times \{0\}) \cup (\overline{V} \times \{1\}) \longrightarrow \overline{V}$ definida por $f(v,0) = v$, $f(v,1) = b_0$ tiene una extensión equivariante $F : \overline{V} \times I \longrightarrow Y$. Por lo tanto $\overline{V}$ es G-contraíble sobre Y; en particular, B es contraíble sobre Y y, por el Teorema 4.3 (b), se concluye la prueba. $\square$

Lema 4.6. *Sean B un G-espacio compacto métrico G-contraíble absolutamente por vecindad y Y un G-espacio G-$ANR(B)$. Entonces B tiene una base de vecindades por G-deformación en Y.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 4.5 de este capítulo, existe una vecindad invariante U_1 de B en Y tal que cualquier G-aplicación de un subconjunto cerrado invariante de un G-espacio métrico en $\overline{U_1}$ tiene una extensión equivariante sobre Y. Podemos escoger U_1 de manera que $d(x,B) < 1$ para todo $x \in U_1$, donde d es alguna métrica sobre Y. Por los Teoremas 4.4 y 4.5 del primer capítulo, podemos aplicar repetidamente el Teorema 4.5 del presente capítulo y obtenemos entonces una sucesión de vecindades invariantes $\{U_n\}_{n>1}$ de B tal que

(1) $\overline{U}_n \subset U_{n-1}$;

(2) cada G-aplicación de un subconjunto cerrado invariante de un espacio métrico en $\overline{U}_n$ tiene una extensión equivariante sobre U_{n-1};

(3) Para todo $x \in U_n$, se tiene que $d(x,B) < 1/n$.

Se sigue de (1) y (3) que la sucesión $\{U_n\}_{n\geq 1}$ satisface las propiedades (B1)-(B3) de la Definición 3.3 del Capítulo III. Verifiquemos que se cumplen (B4) y (B5) de la última definición mencionada. Para esto seleccionemos un punto $b_0 \in B$. Para cada entero positivo n, definamos una G-aplicación

$$f_n : (\overline{U}_n \setminus \overline{U}_{n-1}) \cup \overline{U}_{n+2} \longrightarrow \overline{U}_{n+2}$$

de la siguiente manera:

$f_n(x) = b_0$, si $x \in (\overline{U}_n \setminus \overline{U}_{n-1})$ y

$f_n(x) = x$, si $x \in \overline{U}_{n+2}$.

Por (2), f_n se extiende a una G-aplicación $F_n : \overline{U}_n \longrightarrow U_{n+1}$. Definamos la G-aplicación siguiente:

$$j_n : (\overline{U}_{n+1} \times \{0\}) \cup (\overline{U}_{n+2} \times I) \cup (\overline{U}_{n+1} \times \{1\}) \longrightarrow \overline{U}_{n+1}$$

como:

$j_n(x, 0) = x$, si $x \in \overline{U}_{n+1}$;

$j_n(x, t) = x$, si $x \in \overline{U}_{n+2}$, $0 \leq t \leq 1$;

$j_n(x, 1) = F_n(x)$, si $x \in \overline{U}_{n+1}$.

Por (2), j_n se extiende a una G-aplicación $J_n : \overline{U}_{n+1} \times I \longrightarrow U_n$. Para terminar definamos la G-aplicación siguiente:

$$k_n : \overline{U}_n \cup (\overline{U}_{n+1} \times I) \cup (\overline{U}_n \times \{1\}) \longrightarrow \overline{U}_n$$

de la siguiente manera:

$k_n(x, 0) = x$, si $x \in \overline{U}_n$;

$k_n(x, t) = J_n(x, t)$, si $x \in \overline{U}_{n+1}$, $0 \leq t \leq 1$;

$k_n(x, 1) = F_n(x)$, si $x \in \overline{U}_n$.

Nuevamente por (2), k_n tiene una G-extensión $h_n : \overline{U}_n \times I \longrightarrow U_{n-1}$ si $n > 1$; mientras que k_1 se extiende a una G-aplicación $h_1 : \overline{U}_1 \times I \longrightarrow Y$. Es directo verificar que la sucesión $\{h_n | n \geq 1\}$ satisface las propiedades (B4)-(B5), establecidas en la Definición 3.3 del Capítulo III. Entonces $\{(U_n, h_n)\}_{n \geq 1}$ es una base de vecindades por G-deformación de B en Y.

□

Aplicando el Lema 4.6 y el Corolario 3.6 obtenemos el resultado principal de esta sección:

Teorema 4.7. *Sea B un G-espacio métrico compacto. Si B es G-contraíble absolutamente por vecindades, entonces B es un divisor G-ANR.*

5. G-homotopía de la G-contractibilidad absoluta

En el caso no equivariante si B es un subconjunto contraíble de un espacio $Y \in ANR$, entonces la proyección $p : Y \to Y/B$ es una equivalencia homotópica. Dentro de la categoría de los grupos topológicos de transformaciones este hecho sigue siendo cierto. En esta sección probaremos que es también válido cuando B es compacto y G-contraíble absolutamente por vecindad.

Teorema 5.1. *Sea B un G-espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) B es G-contraíble absolutamente por vecindad.

(b) Para cada G-espacio $Y \in G\text{-}ANR(B)$, la proyección natural $p : Y \to Y/B$ es una equivalencia G-homotópica.

(c) Para cada G-espacio $Y \in G\text{-}ANR(B)$, p tiene una inversa izquierda G-homotópica.

Demostración. Probemos que (a) implica (b). Supongamos primeramente que B es G-contraíble absolutamente por vecindad y sea $Y \in G\text{-}ANR(B)$. Por el Teorema 4.7 de este capítulo, $Y/B \in G\text{-}ANE$. Por tanto, existen una vecindad U de $p(B)$ en Y/B y una G-contracción j_t, de $\overline{U}$ a $p(B)$ en Y/B definida como:

$$j_0 = i, j_1 = c \; y \; j_t = r, t \in (0,1),$$

donde i es la inclusión de U en Y/B, c es la función constante $c(u) = p(B)$, para toda $u \in U$ y toda $r : U \to Y/B$ es una G-función continua que extiende a la inclusión de $p(B)$ en Y/B.

De manera que $j_t(p(B)) = p(B)$ para todo $t \in I$. La PEH equivariante puede ser aplicada para establecer una homotopía $J_t : Y/B \to Y/B$ extendiendo equivariantemente j_t y tal que J_0 es la identidad sobre Y/B. Dado que J_1 extiende de manera equivariante j_1, tenemos que:

$$(1) \qquad J_1(U) = p(B).$$

Como $p^{-1}(U)$ es abierto en Y, $p^{-1}(U)$ es un $G\text{-}ANR$, por el Teorema 4.4 del Capítulo I, y así $p^{-1}(U) \in G\text{-}ANR(B)$. Puesto que B es G-contraíble absolutamente por vecindad, por el Teorema 4.5 del presente capítulo, existe una vecindad invariante V de B en $p^{-1}(U)$ tal que para cualquier G-par métrico (X, A), cada G-aplicación $f : A \to \overline{V}$ tiene una extensión equivariante $F : X \to p^{-1}(U)$.

Sea k_t una G-contracción de B a un punto b_0 en V. Definamos la G-aplicación:

$$h : (\overline{V} \times \{0\}) \cup (B \times I) \cup (\overline{V} \times \{1\}) \to \overline{V}$$

como:

$h(y,0) = y$, si $y \in \overline{V}$,

$h(b,t) = k_t(b)$, si $b \in B$, $0 \leq t \leq 1$,

$h(y,1) = b_0$, si $y \in \overline{V}$.

Dado que la imagen de h está contenida en $\overline{V}$, por el Teorema 4.5, h puede ser extendida equivariantemente a una G-aplicación $H : \overline{V} \times I \to p^{-1}(U)$. Como Y es un G-ANR, la PEH equivariante puede ser aplicada para establecer una G-homotopía $K_t : Y \to Y$ tal que $K_t(y) = H(y,t)$ para todo $y \in \overline{V}$ y toda $0 \leq t \leq 1$, y tal que K_0 es la identidad en Y. Puesto que K_t extiende a k_t, tenemos que:

(2) $$K_1(B) = b_0$$

y que:

(3) $$K_t(B) \subset p^{-1}(U).$$

Sean i y j las G-aplicaciones identidad de Y y de Y/B, respectivamente y sea $\varphi = K_1p^{-1} : Y/B \to Y$. Por (2), φ está bien definida y, dado que p es una identificación, φ es continua y claramente equivariante. Mostremos que φ es una inversa G-homotópica de p.

Combinando (1) y (3) podemos ver que $J_1pK_tp^{-1}$ es una G-homotopía continua bien definida entre las G-aplicaciones $J_1pK_0p^{-1}$ y $J_1pK_1p^{-1}$ sobre Y/B. Entonces, si $\overset{G}{\simeq}$ denota que dos funciones son G-homotópicas, podemos escribir:

$$J_0 \overset{G}{\simeq} J_1$$

de donde:

$$J_1pK_0p^{-1} \overset{G}{\simeq} J_1pK_1p^{-1}$$

así que:

$$J_1p\varphi \overset{G}{\simeq} p\varphi.$$

También:

$$K_0 \overset{G}{\simeq} K_1$$

y se sigue que:

$$K_1 p^{-1} p = \varphi p.$$

Entonces p es una equivalencia G-homotópica con inversa G-homotópica φ.

La implicación de (b) a (c) es trivial.

Por último probemos que (c)implica (a). Sean $Y \in G\text{-}ANR(B)$ y $q : Y/B \to Y$ una inversa G-homotópica izquierda de p. Entonces $qp : Y \to Y$ es G-homotópica a la identidad de Y y $qp(B)$ es sólo un punto. Entonces B es G-contraíble en Y y, por el Teorema 4.3 (b), B es G-contraíble por vecindad absolutamente.

□

Utilizando el Teorema 4.3, se tiene que cada inclusión de un espacio G-contraíble absolutamente por vecindad en un espacio G-ANR, es G-homotópicamente nula. Más generalmente, se tiene que:

Teorema 5.2. *Un G-espacio métrico B es G-contraíble absolutamente por vecindad si y sólo si cada G-aplicación de B en un espacio G-ANR es G-homotópicamente nula.*

DEMOSTRACIÓN. Suponga que B es G-contraíble absolutamente por vecindad y sea f una G-aplicación de B en un G-espacio $Y \in G$-ANR. Sea $X \in G\text{-}ANR(B)$. Dado que Y es un G-ANR, f tiene una extensión equivariante de vecindad $F : U \to Y$. Como B es G-contraíble absolutamente por vecindad, la inclusión $i : B \to U$ es G-homotópicamente nula. Así $f = Fi$ es G-homotópicamente nula.

Inversamente, sea (Y, B) un G-par, donde $Y \in G\text{-}ANR(B)$. Sea U cualquier vecindad invariante de B en Y. Entonces U es un G-$ANR(B)$ y, como cualquier G-aplicación de B en un G-ANR es G-homotópicamente nula, tenemos que la inclusión $i : B \to U$ es G-homotópicamente nula, es decir, B es G-contraíble absolutamente por vecindad.

□

Una consecuencia inmediata del Teorema 5.2 es la siguiente:

Corolario 5.3. *Si un G-espacio métrico B es dominado G-homotópicamente (ver* [**42**]*) por un G-espacio A, G-contraíble absolutamente por vecindad, entonces B es G-contraíble absolutamente por vecindad.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : B \longrightarrow A$ una G-aplicación tal que existe una G-aplicación $h : A \longrightarrow B$ que satisface $h \circ f \overset{G}{\simeq} id_B$, donde id_B es la identidad sobre B. Sea $l : B \longrightarrow Y$ una G-aplicación arbitraria, donde $Y \in G\text{-}ANR$. Probemos que l es G-homotópicamente nula y, por el teorema anterior, la prueba se concluye. Sea $k = l \circ h : A \longrightarrow Y$; entonces por (b) del Teorema 4.3 de este capítulo, existe una G-homotopía $k_t : A \longrightarrow Y$ tal que $k_0 = k$ y k_1 es la G-aplicación constante. Ahora, definimos $L_t : B \longrightarrow Y$ por $L_t = k_t \circ f$. Entonces tenemos que:

$$L_0 = k_0 \circ f = k \circ f = l \circ h \circ f \overset{G}{\simeq} h.$$

Por otro lado, $L_1 = k_1 \circ f$ es una G-aplicación constante y $L_0 \overset{G}{\simeq} L_1$. Por lo tanto l es homotópicamente nula.

□

El corolario anterior nos dice que, la G-contractibilidad absoluta por vecindad es un invariante del tipo de G-homotopía entre G-espacios métricos y cada retracto invariante de un G-espacio G-contraíble absolutamente por vecindad es G-contraíble absolutamente por vecindad.

Teorema 5.4. *Sea B un G-espacio métrico. Si B es dominado G-homotópicamente por un G-espacio A el cual es un divisor $G\text{-}ANR$, entonces B es un divisor $G\text{-}ANR$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $X \in G\text{-}ANR(A)$, $Y \in G\text{-}ANR(B)$, $p : X \longrightarrow X/A$ y $q : Y \longrightarrow Y/B$ las proyecciones canónicas. Para probar que Y/B es un $G\text{-}ANE$ es suficiente, por el Lema 3.2 del Capítulo III, mostrar que Y/B es localmente G-contraíble fuertemente en $q(B)$.

Sean $f : B \longrightarrow A$ y $h : A \longrightarrow B$ aplicaciones equivariantes tales que la identidad en B es G-homotópica a hf bajo una deformación equivariante α_t. Como Y es un $G\text{-}ANR$, existen una vecindad invariante N de A en X (la cual podemos elegir abierta sin pérdida de generalidad) y una aplicación equivariante $\varphi : N \longrightarrow Y$ que extiende a h. Como N es un abierto invariante en X, N es un $G\text{-}ANR$, por el Teorema 4.4 del Capítulo I, y dado que A es un divisor $G\text{-}ANR$, N/A es un $G\text{-}ANE$. Por el Lema 3.2 de este capítulo, existen una vecindad invariante W de $p(A)$ en X/A y una G-contracción fuerte h_t de W a $p(A)$ sobre N/A. Puesto que $p^{-1}(W)$ es abierto invariante en X , $p^{-1}(W)$ es un $G\text{-}ANR$. Asimismo, existen una vecindad invariante U de B en Y y una G-aplicación $\psi : U \longrightarrow p^{-1}(W)$ que extiende equivariantemente a f. Definamos una aplicación equivariante $\lambda : (U \times \{0\}) \cup (B \times I) \cup (U \times \{1\}) \longrightarrow Y$ de la siguiente manera:

$\lambda(u,0) = u$, para todo $u \in U$,

$\lambda(b,t) = \alpha_t(b)$, para todo $b \in B$ y $0 \leq t \leq 1$,

$\lambda(u,1) = \varphi\psi(u)$, para todo $u \in U$.

Como $Y \in G\text{-}ANR$, λ se extiende equivariantemente a una G-aplicación $J : E \longrightarrow Y$, donde E es una vecindad invariante de $(U \times \{0\}) \cup (B \times I) \cup (U \times \{1\})$ en $U \times I$. Sea V una vecindad invariante de B en U tal que $V \times I \subset E$ y tal que $J(V \times I) \subset U$. Entonces la restricción de J a $V \times I$ define una G-homotopía $j_t : V \longrightarrow U$ tal que j_0 es la identidad sobre V, $j_1 = \varphi\psi|_V$ y $j_t(B) \subset B$ para todo t. Definamos una G-aplicación $k : q(V) \times I \longrightarrow Y/B$ mediante:

$$k_t(z) = \begin{cases} qj_{2t}q^{-1}(z), & \text{si} \quad z \in q(V) \text{ y } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ q\varphi p{-}1h_{2t-1}p\psi q^{-1}(z), & \text{si} \quad z \in q(V) \text{ y } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Es fácil verificar que k deforma fuertemente $q(V)$ en $q(B)$ y la prueba se completa.

□

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente corolario:

Corolario 5.5. *Entre G-espacios métricos la propiedad de ser un divisor G-ANR es invariante del tipo de G-homotopía y cada retracto invariante de un divisor G-ANR es un divisor G-ANR.*

6. Operaciones de divisores G-ANR

Sea A un divisor G-ANR compacto contenido en un G-espacio métrico B. Cuando B es un G-ANR, B/A es también un G-ANR por el Corolario 4.17 del Capítulo II. Sin embargo, el hecho de que B/A sea un G-ANR no implica que B sea un G-ANR. En esta sección probaremos que en este caso, B es al menos un divisor G-ANR.

Teorema 6.1. *Sea (B,A) un G-par métrico donde A es un divisor G-ANR compacto. Entonces B es un divisor G-ANR si y sólo si B/A es un divisor G-ANR.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que B es un divisor G-ANR y sea $Y \in ANR(B)$. Como A es un divisor G-ANR compacto, Y/A es un G-ANR. De esta manera $Y/A \in G\text{-}ANR(B/A)$. Nótese que Y/B es G-homeomorfo a $(Y/A)/(B/A)$. Si B es un divisor G-ANR, entonces Y/B es un G-ANE. Dado que Y/A es un ANR y $Y/B \overset{G}{\cong} (Y/A)/(B/A)$, se sigue, del Corolario 2.7 del Capítulo III, que B/A es un divisor G-ANR.

Inversamente, si B/A es un divisor G-ANR, entonces $(Y/A)/(B/A)$ es un G-ANE. Como $Y/B \overset{G}{\cong} (Y/A)/(B/A)$, se sigue que B es un divisor G-ANR.

$\square$

Sea A un subconjunto compacto invariante G-AR de un G-espacio métrico B. Si B es un G-AR, entonces B/A es un G-AR; no obstante el hecho de que B/A sea un G-AR no implica que B sea un G-AR. Por el Teorema 6.1 de este capítulo, podemos decir que B es, al menos, un divisor G-ANR. Nuestro siguiente resultado nos permite decir aún más, esto es, que B es G-contraíble absolutamente por vecindad, para lo cual es necesario el siguiente lema:

Lema 6.2. *Suponga que (B, A) es un G-par tal que tanto A como B son G-contraíbles absolutamente por vecindad. Sean $Y \in G$-$ANR(B)$ y U una vecindad invariante de A en Y. Entonces B es G-deformable en U bajo una G-deformación que deja a A puntualmente fijo.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 4.5 del Capítulo III, existe una vecindad invariante V de B en Y tal que cualquier G-aplicación $F : A \to \overline{V}$ tiene un G-extensión $F : X \to Y$. Similarmente, existe una vecindad invariante W de A en $U \cap V$ tal que cada G-aplicación $h : A \to \overline{W}$ se puede extender a una G-aplicación $H : X \to U \cap V$. Tomemos un punto $a \in A$ y definamos una G-aplicación $h^* : A \cup (B \setminus W) \to W$ de la siguiente manera:

$$h^*(x) = \begin{cases} x, & si\ x \in A; \\ a, & si\ x \in B \setminus W \end{cases}$$

h^* tiene entonces una G-extensión $H^* : B \to U \cap V$. Definamos una G-aplicación $f^* : (B \times \{0\}) \cup (A \times I) \cup (B \times \{1\}) \to V$ por:

$f^*(x, 0) = x$, si $x \in B$,

$f^*(x, t) = x$, si $x \in A$, $0 \le t \le 1$,

$f^*(x,1) = H^*(x)$, si $x \in B$.

Entonces f^* se extiende a una G-aplicación $F^* : B \times I \to Y$. Así, F^* es la G-deformación deseada.

□

Teorema 6.3. *Sea (B, A) un G-par métrico tal que A es compacto y G-contraíble absolutamente por vecindad. Entonces B es G-contraíble absolutamente por vecindad si y sólo si B/A es G-contraíble absolutamente por vecindad.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $Y \in G\text{-}ANR(B)$ y $p : Y \to Y/A$ la G-aplicación identificación. Por el Teorema 4.7 del presente capítulo, Y/A es un G-ANR, de donde se sigue que $Y/A \in G\text{-}ANR(B/A)$.

Primero supongamos que B es G-contraíble absolutamente por vecindad. Para mostrar que B/A es G-contraíble absolutamente por vecindad es suficiente, por (a) del Teorema 4.3 Capítulo III, probar que B/A es G-contraíble en una vecindad invariante arbitraria U de B/A en Y/A. Como Y/A es un G-ANR, U es un G-ANR. y se sigue que existe una vecindad invariante V de $p(A)$ G-contraíble en U. Por el Lema 6.2 del presente capítulo, existe una G-deformación $k_t : B \to p^{-1}(U)$ que deja A puntualmente fijo y tal que $k_t(B) \subset p^{-1}(V)$. La G-homotopía $pk_t(p|_B)^{-1} : B/A \to U$ deforma equivariantemente B/A en V, la cual es G-contraíble en U. De esta manera, B/A es G-contraíble en U y se sigue que B/A es G-contraíble absolutamente por vecindad.

Inversamente, supongamos que B/A es G-contraíble absolutamente por vecindad. Dado que $Y/A \in G\text{-}ANR$, B/A es G-contraíble en Y/A bajo una deformación equivariante k_t. Por el Teorema 5.1, p tiene una inversa G-homotópica $q : Y/A \to Y$. Sea $i : B \to Y$ la inclusión. Entonces, tenemos que $i \overset{G}{\simeq} qp|_B = qk_0p|_B \overset{G}{\simeq} qk_1p|_B$. Puesto que k_1 es constante, i es G-homotópicamente nula y se sigue, de (b) Teorema 4.3 de este capítulo, que B es contraíble absolutamente por vecindad.

□

Dada una colección de espacios G-ANR, es posible construir nuevos espacios G-ANR a partir de ellos operándolos apropiadamente en un camino suficientemente "suave" como lo muestra el Teorema 5.8. Por ejemplo, si un G-espacio métrico X puede ser escrito como la unión de dos subconjuntos cerrados invariantes X_1 y X_2 los cuales son G-ANR y tal que $X_1 \cap X_2$ es un G-ANR, entonces X es un G-ANR.

Entonces, podemos preguntarnos, ¿es la unión de divisores G-ANR también un divisor G-ANR? Para dar respuesta a esta cuestión mostraremos que la unión de dos divisores G-ANR es un divisor G-ANR y, posteriormente, generalizaremos este resultado al caso de un número finito de divisores G-ANR.

Lema 6.4. *Sean A_1 y A_2 divisores G-ANR compactos tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Entonces $A_1 \cup A_2$ es un divisor G-ANR.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y \in G$-$ANR(A_1 \cup A_2)$. Entonces Y/A_1 es un G-ANR. Sea $p : Y \longrightarrow Y/A_1$ la G-aplicación identificación. Dado que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $p|_{A_2}$ es un G-homeomorfismo. Por tanto, $p(A_2)$ es un divisor G-ANR lo que implica que $Z = (Y/A_1)/p(A_2)$ es un G-ANR. Sea $q : Y/A_1 \longrightarrow Z$ la G-aplicación identificación. Es fácil ver que $qp(A_1)$ y $qp(A_2)$ son conjuntos formados por un sólo punto; tanto ellos como su unión son G-ANR. Por lo que $Z/(qp(A_1) \cup qp(A_2))$ es un G-ANR, por el Corolario 4.17 del Capítulo II. Pero $Z/(qp(A_1) \cup qp(A_2))$ es G-homeomorfo a $Y/(A_1 \cup A_2)$. Así, $A_1 \cup A_2$ es un divisor G-ANR. □

Teorema 6.5. *Sea B un G-espacio métrico compacto. Suponga que $B_1, B_2, ..., B_n$ son subconjuntos cerrados invariantes de B tales que $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B$ y tales que para cada subcolección $\{B_{i_1}, B_{i_2}, ..., B_{i_k}\}$ de $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$, se tiene que $\bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j}$ es un divisor G-ANR (o vacío). Entonces B es un divisor G-ANR.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar el teorema procederemos por inducción. Si $n = 1$, el resultado es trivial. Supongamos ahora que cualquier G-espacio métrico que puede ser escrito como la unión de k subconjuntos cerrados imvariantes que satisfacen las condiciones en la hipótesis, es un divisor G-ANR. Mostremos que es cierto para $k+1$ subconjuntos cerrados invariantes. Para $i = 1, 2, .., k$, sea $C_i = B_i \cap B_{k+1}$. Por hipótesis, cada C_i es un divisor G-ANR (o vacío); y por la hipótesis de inducción, $D = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ y $E = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ son divisores G-ANR (o vacío). Si $E \neq \emptyset$, B_{k+1}/E es un divisor G-ANR, por el Teorema 6.1. Pero B_{k+1}/E es G-homeomorfo a B/D; de donde, por el Teorema 6.1, B es un divisor G-ANR. Si $E = \emptyset$ entonces B es la unión disjunta de B_{k+1} y D. Por el Lema 6.4, B es un divisor G-ANR . □

De los Teoremas 4.7 y 6.5 se sigue de manera inmediata el corolario:

Corolario 6.6. *Sea B un G-espacio métrico compacto. Suponga que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son subconjuntos cerrados invariantes de B tales que $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ y que para cada subcolección $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_k}\}$ de $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, se tiene que $\bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j}$ es G-contraíble absolutamente por vecindad (o vacío). Entonces B es un divisor G-ANR.*

Bibliografía

1. H. Abels, *Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups*, Math. Ann. **212** (1974), 1–19.

2. H. Abels, *A universal proper G-space*, Math. Z. **159** (1978), 143–158.

3. S. A. Antonyan, *An equivariant theory of retracts*, in: Aspects of Topology (In Memory of Hugh Dowker), London Math. Soc. Lect. Note Ser. **93**, Cambridge Univ. Press (1985), 251–269.

4. S. A. Antonian, *Equivariant embeddings into G-AR's*, Glasnik Matematički **22 (42)** (1987), 503–533.

5. S. A. Antonyan, *The Banach-Mazur compacta are absolute retracts*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. **46** (1998), 113-119.

6. S. A. Antonyan, *Extensorial properties of orbit spaces of proper group actions*, Topology Appl. **98** (1999), 35–46.

7. S. A. Antonyan, E. Elfving, A. Mata-Romero, *Adjunction spaces and unions of G-ANE's*, Topology Proc. **26** (2001-2002), 1-28.

8. S. A. Antonyan, *Universal proper G-spaces*, Topology Appl., **117** (2002), 23–43.

9. C. Allday, V. Puppe, *Cohomological methods in transformation groups*, Cambridge University, 1991.

10. G. Bredon, *Equivariant cohomology theories*, Lect. Notes Math. **34**, Springer-Verlag, 1967.

11. G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, 1972.

12. K. Borsuk, *Theory of retracts*, Monografie Math. **44**, PWN (Polish Scientific Publishers), Warszawa, 1967 .

13. J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. **1** (1951), 353–367.

14. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.

15. E. Elfving, *The G-homotopy type of proper locally linear G-manifolds*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. Dissertationes **108** (1996).

16. E. Elfving, *The G-homotopy type of proper locally linear G-manifolds. II*, Manuscripta Math. **105** (2001), 235-251.

17. R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

18. A. Gleason, *Spaces with a compact Lie group of transformations*, Proc. AMS, **Vol. 1, No. 1**, (1950).

19. O. Hanner, *Some theorems on absolute neighborhood retracts*, Arkiv for Matem. **1** (30), (1950), 389–408.

20. S.-T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.

21. D. M. Hyman, *A generalization of the Borsuk-Whitehead-Hanner theorem*, Pacific J. Math. **23** (1967), 263-271.

22. D. M. Hyman, *ANR-divisors and absolute neighborhood contractibility*, Fund. Math. **62** (1968), 61-73.

23. S. Illman, *Equivariant singular homology and cohomology for actions of compact Lie groups*, in: Proceedings of the Second Conference on Compact Transformation Groups (Univ. of Massachusetts, Amherst, 1971), Lecture Notes in Mathematics **298**,Springer-Verlag, 1972, 403-415.

24. S. Illman, *Equivariant algebraic topology*, Ph. D. Thesis, Princeton University, 1972.

25. S. Illman, *Every proper smooth action of a Lie group is equivalent to a real analytic action: a contribution to Hilbert's fifth problem*, in: *Prospects in Topology* (ed. by Frank Quinn), Proceedings of a Conference in honor of William Browder, Ann. of Math. Stud. **138**, 1995, 189-220.

26. S. Illman, *Existence and uniqueness of equivariant triangulations of smooth proper G-manifolds with some applications to equivariant Whitehead torsion*, J. Reine Angew. Math. **524** (2000), 129-183.

27. I. M. James, G. B. Segal *On equivariant homotopy theory*, in: Lecture Notes in Math. **Vol. 788**, Springer, Berlin, (1980), pp. 316-330.

28. J. Jaworowski, *Equivariant extension of maps*, Pacific Jour. Math. **45:1** (1973), 229-244.

29. J. Jaworowski, *Extension of G-maps and Euclidean G-retracts*, Math. Z. **146** (1976), 143-148.

30. J. Jaworowski, *Extension properties of G-maps*, in: Proc. Intern. Conf. Geom. Topology, pp. 209-213, PWN-Polish Sci. Publ. Warszawa, 1980.

31. Y. Kodama, *Note on an absolute neighborhood extensor for metric spaces*, J. Math. Soc. Japan **8** (1956), 206-215.

32. J. L. Koszul *Lectures on groups of tranformations*, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, 1965.

33. R. Lashof, *The equivariant extension theorem*, Proc. AMS,**83 No. 1** (1981), 138-140.

34. T. Matumoto, *On G-CW complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A Math. **18** (1971), 363-374.

35. D. Montgomery, L. Zippin, *Topological transformations groups*, Interscience, 1964.

36. S. de Neymet, R. Jiménez, *Union of equivariant extensors and equivariant covering spaces*, Bull. of the Polish Acad. of Sci. Math., **48** **(4)** (2000), 347-356.

37. S. de Neymet, *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, por aparecer.

38. R. Palais, *The classification of G-spaces*, Memoirs of the AMS, **36** (1960).

39. R. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. **73**, (1961), 295-323.

40. Yu. Smirnov, *Sets of H-fixed points are absolute extensors*, Math. USSR Sbornik, **27** (**1**), (1975), 85-92.

41. E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.

42. T. Tom Dieck, *Transformations groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1987.

43. J. de Vries *Linearization of actions of locally compact groups*, Proc. Steklov Inst. Math. **4**,(1984), 57-74.

44. J. de Vries *Topics in the theory of topological transformations groups*, in: Topological Structure II. Math. Centre Tracts. **116**, Math. Centrum, Amsterdam, 1979, pp. 291-304

Índice de Materias