

00323



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

9

FACULTAD DE CIENCIAS ✓

CÁLCULOS DE LA DIFRACCIÓN EN REJILLAS CON EL MÉTODO MODAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

F Í S I C A ✓

P R E S E N T A :

VERÓNICA ESTHER ARRIOLA RIOS

DIRECTOR DE TESIS

DR. NEIL CHARLES BRUCE DAVIDSON

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION SECUNDARIA  
2003



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

Registrada en la Dirección General de Bibliotecas de la  
UNAM y difundida en formato electrónico e impreso al  
precio de \$ 100.00 por trabajo convencional.  
Verónica Esther Arriola  
Rios  
Fecha: 12 Noviembre 2003  
[Signature]

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
"CALCULOS DE LA DIFRACCION EN REJILLAS CON EL METODO MODAL"

realizado por Arriola Rios Verónica Esther  
con número de cuenta 099547109 , quién cubrió los créditos de la carrera de Física.  
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

- Director de Tesis
- Propietario
- Propietario Dr. Neil Charles Bruce Davidson
- Propietario Dr. Eugenio Ley Koo
- Propietario M. en C. Mirna Villavicencio Torres
- Suplente Dra. Martha Rosete Aguilar
- Suplente Dra. María del Pilar Segarra Alberú

Neil Bruce  
[Signature]  
Mirna Villavicencio Torres  
Rosete Aguilar Martha  
[Signature]

Consejo Departamental de Física

[Signature]  
DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE  
Coordinadora de Licenciatura



A Dios, de quien soy y por quien soy

A mis padres, que me guían y apoyan en este camino

A mi hermano, mi mejor amigo

A Lorena, Coral, Ilse, Fermín e Ignacio, quienes me han  
dado valor en los momentos más duros

Al Dr. Neil Bruce, sin cuyo apoyo no lo hubiera logrado

A todos mis amigos y compañeros

A todos los profesores que han dejado una huella en mi  
formación

A la Facultad de Ciencias

A la UNAM

# AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer especialmente:

A mi director de tesis, el Dr. Neil Bruce.

A mis sinodales: Dr. Eugenio Ley Koo, M. en C. Mirna Villavicencio Torres, Dra. Martha Rosete Aguilar y Dra. María del Pilar Segarra Alberú.

Al proyecto PAPIT IN101502 de la DGAPA, que ha apoyado toda la investigación.

# CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	1
<b>TEORÍA</b>	
<b>CÁLCULO DE LA DISPERSIÓN EN SUPERFICIES METÁLICAS CON UN NÚMERO FINITO DE CANALES RECTANGULARES</b>	4
POLARIZACIÓN P	7
POLARIZACIÓN S	9
<b>APROXIMACIÓN NUMÉRICA</b>	10
DISCRETIZACIÓN DE LA SOLUCIÓN PARA EL CASO DE POLARIZACIÓN P	10
DISCRETIZACIÓN DE LA SOLUCIÓN PARA EL CASO DE POLARIZACIÓN S	12
<b>CÁLCULOS NUMÉRICOS</b>	
<b>VERIFICACIÓN DEL PROGRAMA</b>	13
POLARIZACIÓN P	13
POLARIZACIÓN S	14
<b>REJILLAS NO PERIÓDICAS</b>	18
VARIACIONES EN LA SEPARACIÓN ENTRE LOS CANALES	18
VARIACIONES EN EL ANCHO DE LOS CANALES	24
VARIACIONES EN LA PROFUNDIDAD DE LOS CANALES	27
<b>CONCLUSIONES</b>	30
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	32

# INTRODUCCIÓN

Existen numerosas razones por las cuales el estudio del esparcimiento de la luz por rejillas con canales rectangulares resulta de interés:

Este estudio tiene numerosas aplicaciones en antenas de reflexión, óptica integrada, espectroscopia y holografía. También es posible utilizar el esparcimiento de la luz para medir la microgeometría de una superficie (esparcimiento inverso) [1].

En particular, estas superficies resultan de especial interés en el área de óptica física del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET) de la UNAM, dada la posibilidad de fabricarlas en el mismo Centro y comparar los resultados teóricos con los experimentales.

Concretamente, el presente trabajo está orientado hacia un estudio más profundo del fenómeno de retrodispersión reforzada. La retrodispersión reforzada es la interferencia constructiva entre rayos de luz, que han recorrido el mismo camino óptico, tras haber sufrido reflexión múltiple en superficies rugosas.

Se desarrollan aquí las herramientas iniciales para estudiar dicho esparcimiento mediante el método modal (explicado en [2]), tomando como punto de partida las ecuaciones derivadas por Ricardo A. Depine y Diana C. Skigin en [3]. La obtención de estas ecuaciones es detallada en la primera sección.

A continuación se realiza una serie de aproximaciones, que nos permiten transformar las ecuaciones integrales obtenidas en ecuaciones matriciales con un número finito de términos. Las aproximaciones realizadas corresponden a las

indicadas por Depine y Skigin, procurando que al efectuar los cálculos numéricos se obtengan los mismos resultados.

Para obtener resultados cuantitativos se programaron previamente las ecuaciones discretizadas en el lenguaje de programación C. Haciendo uso de estos programas, se reprodujeron algunos de los resultados obtenidos en [3] para el caso de polarización P (campo eléctrico paralelo a los canales) sobre superficies perfectamente conductoras. Los resultados se reportan en el segundo capítulo.

Se incluye también un avance sobre el caso de polarización S (campo magnético paralelo a los canales), cuyo ritmo de convergencia es más lento y por consiguiente requiere de un análisis más detallado.

Una vez verificado el desempeño de los programas, se introdujeron modificaciones aleatorias en las rejillas: se modificó la distancia entre los canales, su ancho y su profundidad. Cada modificación fue realizada por separado. Se presentan las gráficas obtenidas para 21 canales, polarización P y se marca el camino para un estudio posterior del fenómeno de retrodispersión reforzada, mediante el análisis de gráficas obtenidas para superficies con irregularidades introducidas aleatoriamente.

Soto-Crespo y Nieto-Vesperinas demostraron [4],[5] que el fenómeno de retrodispersión reforzada en superficies aleatorias se encuentra íntimamente conectado con el reforzamiento del orden antiespecular en rejillas periódicas. Las estructuras consideradas en el artículo de Depine y Skigin, y con las cuales se trabaja en esta tesis, parecen particularmente apropiadas para estudiar la evolución de este fenómeno al pasar del caso de una rejilla infinita, al de una rejilla finita. Aunque nosotros deseamos hacer énfasis en la evolución al pasar de una rejilla finita periódica, a una no periódica, el utilizar las mismas superficies que estos autores, nos permite tener un punto de comparación, al realizar dicho estudio.



Por último se desea sentar las bases para un trabajo futuro de análisis comparativo entre el método modal, el método de Kirchhoff[6], y la solución en términos de series de Fourier y de Bessel, propuesta por Yon-Lin Kok[7] en el caso de retrodispersión reforzada.

## CÁLCULO DE LA DISPERSIÓN EN SUPERFICIES METÁLICAS CON UN NÚMERO FINITO DE CANALES RECTANGULARES.

Consideremos una placa metálica (conductor perfecto) con  $L$  canales de la misma altura  $h$  y anchos  $c_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ). Los canales se encuentran a lo largo de la dirección  $z$ , y la dirección  $y$  es normal a la superficie. El borde del primer canal coincide con el origen del sistema de coordenadas, tal como se muestra en la siguiente figura. El  $l$ -ésimo canal se encuentra separado una distancia  $\Delta x_l$  del canal  $l+1$ .

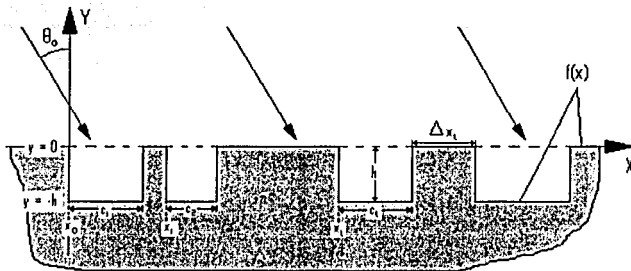


Figura 1.1 Configuración del problema

Sobre la placa incide, desde la región  $y > 0$ , una onda electromagnética plana de longitud de onda unitaria, haciendo un ángulo  $\theta_0$  con la normal a la superficie y de tal modo que el plano  $x$ - $y$  es el plano de incidencia.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Se asume una dependencia temporal armónica de la forma  $e^{-i\omega t}$ , donde  $\omega$  es la frecuencia de la luz incidente. A partir de las ecuaciones de Maxwell se obtiene la ecuación de Helmholtz que deben satisfacer los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en cualquier región del espacio. Este problema vectorial puede ser separado en dos problemas escalares independientes: polarización P (el campo eléctrico es paralelo a los canales) y polarización S (el campo magnético es paralelo a los canales). De este modo  $f''(\mu = P, S)$  corresponde a la componente a lo largo del eje z del campo eléctrico en el caso de polarización P ( $\mu = P$ ) o del campo magnético en el caso de polarización S ( $\mu = S$ ).

En la región superior,  $y \geq 0$ , es posible expresar al campo total como la superposición de los campos incidente, de reflexión especular y de dispersión:

$$(1) \quad f''_+(x, y) = f''_{inc}(x, y) + f''_{espec}(x, y) + f''_{disp}(x, y),$$

donde los campos incidente y de reflexión especular son ondas electromagnéticas planas:

$$(2) \quad f''_{inc}(x, y) = e^{i(\alpha_0 x - \beta_0 y)}$$

con:

$$(3) \quad \alpha_0 = k \sin \theta_0,$$

$$(4) \quad \beta_0 = k \cos \theta_0,$$

$$(5) \quad k = \omega/c = 2\pi/\lambda;$$

$$(6) \quad f''_{espec}(x, y) = (-1)^j e^{i(\alpha_0 x + \beta_0 y)}$$

$$j = \begin{cases} 1 & \text{para polarización P} \\ 0 & \text{para polarización S} \end{cases}$$

Lo cual corresponde al coeficiente de reflexión en la ecuación de Fresnel para conductores perfectos.

Y escribimos al campo dispersado en términos de una expansión de Rayleigh:

$$(7) \quad f''_{disp}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} R''(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha$$

$R''(\alpha)$  son los coeficientes desconocidos de la expansión.

Aquí:

$$(8) \quad \beta = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \alpha^2} & \text{si } k^2 \geq \alpha^2 \\ i\sqrt{\alpha^2 - k^2} & \text{si } k^2 < \alpha^2 \end{cases}$$

En el interior de los canales,  $y \leq 0$ , usamos las condiciones de frontera (conductor perfecto)[8] para expresar a los campos en términos de las funciones modales correspondientes a cada polarización. Dentro del  $i$ -ésimo canal,  $x_i \leq x \leq x_i + c_i$ , se tiene que:

Para  $f^P$ :

$$f^P(x_i, y) = 0 \text{ y } f^P(x_i + c_i, y) = 0 \Rightarrow f^P(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(y) \sin \left[ \frac{m\pi}{c_i} (x - x_i) \right]$$

Para  $f^S$ :

$$\left. \frac{df^S}{dn} \right|_{y=f(x)} = 0 \Rightarrow \left. \frac{df^S}{dx} \right|_{x=x_i} = 0 \text{ y } \left. \frac{df^S}{dx} \right|_{x=x_i+c_i} = 0 \Rightarrow f^S(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(y) \cos \left[ \frac{m\pi}{c_i} (x - x_i) \right]$$

Donde cada término de la suma debe satisfacer la ecuación de Helmholtz  $\Delta f^P + k^2 f^P = 0$  para  $y > f(x)$ :

Para  $f^P$ :

$$\frac{\partial^2 f_m^P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_m^P}{\partial y^2} + k^2 f_m^P = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u_m(y)}{dy^2} + \left[ k^2 - \left( \frac{m\pi}{c_i} \right)^2 \right] u_m(y) = 0$$

definimos entonces:

$$(9) \quad \mu_{m,i} = \begin{cases} \left[ k^2 - \left( \frac{m\pi}{c_i} \right)^2 \right]^{1/2} & \text{si } k^2 > \left( \frac{m\pi}{c_i} \right)^2 \\ i \left[ k^2 - \left( \frac{m\pi}{c_i} \right)^2 \right]^{1/2} & \text{si } k^2 < \left( \frac{m\pi}{c_i} \right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_m(y) = b_{m,i} \cos[\mu_{m,i}(y+h)] + a_{m,i} \sin[\mu_{m,i}(y+h)]$$

$$\text{Pero } u = 0 \text{ si } y = -h \Rightarrow b_{m,i} = 0 \Rightarrow u_m(y) = a_{m,i} \sin[\mu_{m,i}(y+h)]$$

por lo tanto:

$$(10) \quad f^P(x, y) = \sum_{m=1}^L a_{m,l} \sin[\mu_{m,l}(y+h)] \sin\left[\frac{m\pi}{c_l}(x-x_l)\right]$$

Para  $f^S$ :

$$\frac{\partial^2 f_m^S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_m^S}{\partial y^2} + k^2 f_m^S = 0 \Rightarrow v_m(y) = b_{m,l} \cos[\mu_{m,l}(y+h)] + a_{m,l} \sin[\mu_{m,l}(y+h)]$$

$$\text{Pero también } \left. \frac{df^S}{dy} \right|_{y=-h} = 0 \text{ si } x_l \leq x \leq x_l + c_l \Rightarrow a_{m,l} = 0 \Rightarrow v_m(y) = b_{m,l} \cos[\mu_{m,l}(y+h)]$$

por lo tanto:

$$(11) \quad f^S(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{m,l} \cos[\mu_{m,l}(y+h)] \cos\left[\frac{m\pi}{c_l}(x-x_l)\right]$$

A partir de este punto se continúa con el desarrollo para cada polarización por separado:

## POLARIZACIÓN P

Considerando que  $f^P(x, y) \neq 0$  sólo en el interior de cada canal, se define:

$$(12) \quad W(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{si } s < 0 \text{ ó } s > 1 \end{cases}$$

Igualando los campos en  $y=0$   $f_{inc}^P(x, 0) + f_{refl}^P(x, 0) + f_{excit}^P(x, 0) = f^P(x, 0)$ :

$$(13) \quad \int_{-x}^x R^P(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,l} \sin(\mu_{m,l}h) \sin\left[\frac{m\pi}{c_l}(x-x_l)\right] W\left(\frac{x-x_l}{c_l}\right)$$

Igualando las derivadas  $\left. \frac{\partial f^P}{\partial y} \right|_{y=0}$ :

$$(14) \quad -2i\beta_0 e^{i\alpha_0 x} + i \int_{-x}^x R^P(\alpha) \beta e^{i\alpha x} d\alpha = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,l} \mu_{m,l} \cos(\mu_{m,l}h) \sin\left[\frac{m\pi}{c_l}(x-x_l)\right] W\left(\frac{x-x_l}{c_l}\right)$$

Proyectando (13) sobre el conjunto de funciones  $\{e^{i\alpha'x}\}$  que son ortogonales en  $[-\infty, \infty]$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} R^p(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha e^{i\alpha'x} dx = 2\pi R^p(-\alpha')$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^m a_{m,l} \sin(\mu_{m,l} h) \sin\left[\frac{m\pi}{c_l}(x-x_l)\right] W\left(\frac{x-x_l}{c_l}\right) e^{i\alpha'x} dx$$

$$= \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^m a_{m,l} \sin(\mu_{m,l} h) e^{i\alpha'x_l} \int_0^{c_l} \sin\left(\frac{m\pi x}{c_l}\right) e^{i\alpha'x} dx$$

Sea  $\alpha = \alpha'$ , de este modo obtenemos:

$$(15) \quad 2\pi R^p(\alpha) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^m a_{m,l} \sin(\mu_{m,l} h) e^{i\alpha'x_l} J_{m,l}(-\alpha')$$

donde:

$$J_{m,l}(\alpha) = \int_0^{c_l} \sin\left(\frac{m\pi x}{c_l}\right) e^{i\alpha x} dx$$

$$(16) \quad = \begin{cases} 0 & \text{si } m=0 \text{ (en particular, cuando } \alpha=0) \\ \pm i \frac{c_l}{2} & \text{si } \alpha = \pm \frac{m\pi}{c_l} \\ \frac{m\pi c_l}{c_l^2 \alpha^2 - m^2 \pi^2} [(-1)^m e^{i\alpha c_l} - 1] & \text{si } \alpha^2 \neq \left(\frac{m\pi}{c_l}\right)^2 \end{cases}$$

Proyectando (14) sobre las funciones modales  $\left\{ \sin\left[\frac{k\pi}{c_l}(x-x_l)\right] \right\}$  (ortogonales en

$[x_j, x_j + c_j]$ ):

$$\int_{x_j}^{x_j+c_j} -2i\beta_0 e^{i\alpha_0 x} \sin\left[\frac{k\pi}{c_l}(x-x_l)\right] dx = -2i\beta_0 e^{i\alpha_0 x_j} J_{k,l}(\alpha_0)$$

$$\int_{x_j}^{x_j+c_j} i \int_{-\infty}^{\infty} R^p(\alpha) \beta e^{i\alpha x} \sin\left[\frac{k\pi}{c_l}(x-x_l)\right] d\alpha dx = i \int_{-\infty}^{\infty} R^p(\alpha) \beta e^{i\alpha x_j} J_{k,l}(\alpha) d\alpha$$

$$\int_{x_j}^{x_j + c_j} \sum_{l=1}^l \sum_{m=1}^m a_{m,j} \mu_{m,j} \cos(\mu_{m,j} h) \sin \left[ \frac{m\pi}{c_l} (x - x_j) \right] W \left( \frac{x - x_j}{c_l} \right) \sin \left[ \frac{k\pi}{c_j} (x - x_j) \right] dx$$

$$= \frac{c_j}{2} \mu_{k,j} a_{k,j} \cos(\mu_{k,j} h)$$

Con esto obtenemos:

$$(17) \quad -2i\beta_0 e^{i\alpha_0 x_j} J_{k,j}(\alpha_0) + i \int_{-x}^{\pi} R^p(\alpha) \beta e^{i\alpha x_j} J_{k,j}(\alpha) d\alpha = \frac{c_j}{2} \mu_{k,j} a_{k,j} \cos(\mu_{k,j} h)$$

Despejando  $a_{k,j}$  de (17) y sustituyendo en (15) se llega al resultado obtenido por Depine y Skigin:

$$(18) \quad 2\pi R^p(\alpha') = i \int_{-x}^{\pi} R^p(\alpha) \beta \sum_{l=1}^l \left[ e^{i(\alpha - \alpha') x_j} \sum_{m=1}^m \frac{2J_{m,j}(\alpha) J_{m,j}(-\alpha') \tan(\mu_{m,j} h)}{c_l \mu_{m,j}} \right] d\alpha$$

$$- 2i\beta_0 \sum_{l=1}^l \left[ e^{i(\alpha_0 - \alpha') x_j} \sum_{m=1}^m \frac{2J_{m,j}(\alpha_0) J_{m,j}(-\alpha') \tan(\mu_{m,j} h)}{c_l \mu_{m,j}} \right]$$

## POLARIZACIÓN S

Análogamente al caso anterior, los campos son igualados en  $y=0$  y las ecuaciones resultantes son proyectadas sobre las funciones  $\{e^{i\alpha x}\}$ , las derivadas de  $f^S$  con respecto a  $y$  también son igualadas, y las ecuaciones resultantes, proyectadas sobre el conjunto de funciones  $\left\{ \cos \left[ \frac{k\pi}{c_l} (x - x_j) \right] \right\}$ . Finalmente, tras un despeje y una sustitución se obtiene la ecuación correspondiente a este caso:

$$(19) \quad 2\pi R^S(\alpha') \beta' = - \int_{-x}^{\pi} R^S(\alpha) \sum_{l=1}^l \left[ e^{i(\alpha - \alpha') x_j} \sum_{m=0}^m \frac{\mu_{m,j}}{c_{m,j}} J_{m,j}(\alpha) J_{m,j}(-\alpha') \tan(\mu_{m,j} h) \right] d\alpha$$

$$- 2 \sum_{l=1}^l \left[ e^{i(\alpha_0 - \alpha') x_j} \sum_{m=0}^m \frac{\mu_{m,j}}{c_{m,j}} J_{m,j}(\alpha_0) J_{m,j}(-\alpha') \tan(\mu_{m,j} h) \right]$$

donde:

$$(20) \quad I_{m,j}(\alpha) = \int_0^{\alpha} \cos\left(\frac{m\pi x}{c_l}\right) e^{i\alpha x} dx$$

$$= \begin{cases} C_{m,j} & \text{si } \alpha = \pm \frac{m\pi}{c_l} \\ \frac{i\alpha c_l^2}{c_l^2 \alpha^2 - m^2 \pi^2} [1 - (-1)^m e^{im\alpha}] & \text{si } \alpha^2 \neq \left(\frac{m\pi}{c_l}\right)^2 \end{cases}$$

con

$$(21) \quad C_{m,j} = \begin{cases} c_l & \text{si } m=0 \\ c_l & \text{si } m \neq 0 \\ 2 & \end{cases}$$

## APROXIMACIÓN NUMÉRICA

Con la finalidad de obtener resultados numéricos, que puedan ser comparados posteriormente con resultados obtenidos experimentalmente, es necesario recurrir a técnicas aproximadas, ya que no es posible obtener una solución exacta de las ecuaciones expuestas en la sección anterior.

## DISCRETIZACIÓN DE LA SOLUCIÓN PARA EL CASO DE POLARIZACIÓN P

Comenzamos a partir de la ecuación (18) obtenida en la sección anterior.

Depine y Skigin[3] han mostrado que la contribución de las series infinitas a la ecuación recae principalmente en los primeros términos de la suma. Por esta razón, podemos realizar una buena aproximación tomando los primeros sumandos y despreciando el resto. Queda pendiente, por el momento, determinar el número de sumandos que han de tomarse en cuenta.

Similarmente, no es posible realizar la integral indefinida en la computadora, por lo que restringimos el intervalo de integración a un intervalo lo suficientemente



amplio, como para cubrir a todos los ángulos de dispersión (considerando que éstos están directamente relacionados con la variable  $\alpha'$ ). En [3] también se ha estudiado el efecto de esta aproximación, quedando establecido que, después de cierto valor, incrementar el intervalo de integración ya no cambia sustancialmente los resultados obtenidos, más sí, el tiempo que toma evaluar la integral aproximada en la computadora.

Truncando las sumas y restringiendo el intervalo de integración obtenemos:

$$(22) \quad 2\pi R^p(\alpha') = i \int_{\alpha_0-T}^{\alpha_0+T} R^p(\alpha) \beta \sum_{l=1}^L \left[ e^{i(\alpha-\alpha')\nu_l} \sum_{m=1}^{NM} J_{m,J}(\alpha) J_{m,J}(-\alpha') \frac{2 \tan(\mu_{m,J} h)}{c_l \mu_{m,J}} \right] d\alpha \\ - 2i\beta_0 \sum_{l=1}^L \left[ e^{i(\alpha_0-\alpha')\nu_l} \sum_{m=1}^{NM} J_{m,J}(\alpha_0) J_{m,J}(-\alpha') \frac{2 \tan(\mu_{m,J} h)}{c_l \mu_{m,J}} \right]$$

$$(23) \quad 2\pi R^p(\alpha') = i \sum_{\alpha=\alpha_0-T}^{\alpha=\alpha_0+T} \left[ R^p(\alpha) \beta \sum_{l=1}^L \left( e^{i(\alpha-\alpha')\nu_l} \sum_{m=1}^{NM} J_{m,J}(\alpha) J_{m,J}(-\alpha') \frac{2 \tan(\mu_{m,J} h)}{c_l \mu_{m,J}} \right) \right] \frac{2T}{NR-1} \\ - 2i\beta_0 \sum_{l=1}^L \left[ e^{i(\alpha_0-\alpha')\nu_l} \sum_{m=1}^{NM} J_{m,J}(\alpha_0) J_{m,J}(-\alpha') \frac{2 \tan(\mu_{m,J} h)}{c_l \mu_{m,J}} \right]$$

donde  $NM$  es el número de funciones modales que serán tomadas en cuenta en la suma y  $(NR-1)$  es el número de subintervalos en los que se divide la integral.

Sean  $R^p(\alpha)$  y  $M_2$  matrices renglón y  $M_1$  matriz cuadrada, con  $\alpha$  corriendo desde  $\alpha-T$  hasta  $\alpha+T$  en intervalos de tamaño  $2T/(NR-1)$ :

$$(24) \quad \underline{M}_1 = \beta \sum_{l=1}^L \left( e^{i(\alpha-\alpha')\nu_l} \sum_{m=1}^{NM} J_{m,J}(\alpha) J_{m,J}(-\alpha') \frac{2 \tan(\mu_{m,J} h)}{c_l \mu_{m,J}} \right) \frac{2T}{NR-1}$$

$$(25) \quad \underline{M}_2 = \sum_{l=1}^L \left[ e^{i(\alpha_0-\alpha')\nu_l} \sum_{m=1}^{NM} J_{m,J}(\alpha_0) J_{m,J}(-\alpha') \frac{2 \tan(\mu_{m,J} h)}{c_l \mu_{m,J}} \right]$$

Entonces es posible escribir una ecuación matricial que corresponde, aproximadamente, a la ecuación integral original:

$$(26) \quad 2\pi R = i R \underline{M}_1 - 2i\beta_0 \underline{M}_2$$

De la cual es posible despejar  $R$ :

$$(27) \quad R = 2i\beta_0 \underline{M}_2 (i \underline{M}_1 - 2\pi \mathbf{1})^{-1}$$

Del desarrollo expuesto en la sección anterior y en la presente, es fácil verificar que realizar una generalización formal, para el caso en que las profundidades de los canales son diferentes, es inmediata. Las matrices  $\underline{M}_1$  y  $\underline{M}_2$  quedan como sigue:

$$(28) \quad \underline{M}_1 = \beta \sum_{l=1}^L \left( e^{i(\alpha-\alpha')v_l} \sum_{m=1}^{NM} J_{m,J}(\alpha) J_{m,J}(-\alpha') \frac{2 \tan(\mu_{m,J} h_l)}{c_{m,J}} \right) \frac{2T}{NR-1}$$

$$(29) \quad \underline{M}_2 = \sum_{l=1}^L \left[ e^{i(\alpha_0-\alpha')v_l} \sum_{m=1}^{NM} J_{m,J}(\alpha_0) J_{m,J}(-\alpha') \frac{2 \tan(\mu_{m,J} h_l)}{c_{m,J}} \right]$$

donde  $h_l$  es el altura del  $l$ -ésimo canal.

## DISCRETIZACIÓN DE LA SOLUCIÓN PARA EL CASO DE POLARIZACIÓN S

Comenzamos a partir de la ecuación (19):

En forma análoga al caso anterior, truncando las sumas y restringiendo el intervalo de integración, obtenemos los siguientes resultados aproximados:

$$(30) \quad R = 2\underline{M}_2 (\underline{M}_1 + 2\pi\beta^{-1})^{-1} \text{ con:}$$

$$(31) \quad \underline{M}_1 = \sum_{l=1}^L \left[ e^{i(\alpha-\alpha')v_l} \sum_{m=0}^{NM} I_{m,J}(\alpha) I_{m,J}(-\alpha') \frac{\mu_{m,J}}{c_{m,J}} \tan(\mu_{m,J} h) \right] \frac{2T}{NR-1}$$

$$(32) \quad \underline{M}_2 = \sum_{l=1}^L \left[ e^{i(\alpha_0-\alpha')v_l} \sum_{m=0}^{NM} I_{m,J}(\alpha_0) I_{m,J}(-\alpha') \frac{\mu_{m,J}}{c_{m,J}} \tan(\mu_{m,J} h) \right]$$

Al generalizar para canales con profundidades diferentes las matrices  $\underline{M}_1$  y  $\underline{M}_2$  quedan:

$$(33) \quad \underline{M}_1 = \sum_{l=1}^L \left[ e^{i(\alpha-\alpha')v_l} \sum_{m=0}^{NM} I_{m,J}(\alpha) I_{m,J}(-\alpha') \frac{\mu_{m,J}}{c_{m,J}} \tan(\mu_{m,J} h_l) \right] \frac{2T}{NR-1}$$

$$(34) \quad \underline{M}_2 = \sum_{l=1}^L \left[ e^{i(\alpha_0-\alpha')v_l} \sum_{m=0}^{NM} I_{m,J}(\alpha_0) I_{m,J}(-\alpha') \frac{\mu_{m,J}}{c_{m,J}} \tan(\mu_{m,J} h_l) \right]$$

# CÁLCULOS NUMÉRICOS

## VERIFICACIÓN DEL PROGRAMA

La primera prueba al desarrollo presentado y a los programas correspondientes en la computadora, consistió en reproducir los cálculos reportados en el artículo de Depine y Skigin en el caso de un conductor perfecto.

A diferencia de los autores citados, en el presente trabajo, los parámetros son fijados en términos de la longitud de onda de la radiación incidente, en lugar de hacerlo en términos del periodo de la rejilla. Este cambio se justifica perfectamente, pues nosotros deseamos introducir modificaciones aleatorias que generen rejillas no periódicas. En consecuencia, en las gráficas que se incluyen a continuación, si bien los parámetros son los mismos, estos son reportados en forma un poco diferente.

## POLARIZACIÓN P

El caso estudiado por Depine y Skigin corresponde a los siguientes parámetros:

Longitud de onda:	$\lambda/d = 0.666$
ángulo de incidencia:	$\theta_0 = 19.5^\circ$
ancho de los canales:	$c/d = 0.386$
alto de los canales:	$h/d = 0.3973$
distancia entre canales adyacentes:	$\Delta x/d = 0.614$

Observamos que el ángulo de incidencia utilizado es el que obliga a que el pico de orden  $-1$  en la ecuación de la rejilla corresponda con la dirección antiespecular.

$$(35) \quad d(\sin \theta_0 - \sin \theta_i) = m\lambda \quad (\text{Ecuación de la rejilla})$$

Si exigimos  $\theta_0 = -\theta_i$ , entonces  $\theta_i = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{2d}\right)$ ; para  $m = -1$ , con los parámetros anteriores, obtenemos que el ángulo de incidencia debe ser  $\theta_0 = 19.5^\circ$ .

Para describir a una superficie equivalente a la estudiada en [3], pero en términos de la longitud de onda, redefinimos los parámetros de tal modo que se mantenga la relación  $\lambda/d = 0.666$ . De este modo los parámetros quedan como sigue:

Período de la rejilla:	$d = 1.5$
ángulo de incidencia:	$\theta_0 = 19.5^\circ$
ancho de los canales:	$c/\lambda = 1.5 * 0.386 = 0.579$
alto de los canales:	$h/\lambda = 1.5 * 0.3973 = 0.59595$
distancia entre canales adyacentes:	$\Delta x/\lambda = 1.5 * 0.614 = 0.921$

Se trató de reproducir los resultados reportados en el artículo tomando como base los experimentos de convergencia que fueron realizados en el mismo. Se fijó el número de subintervalos en los que se divide el intervalo de integración (NR) en 451, el número de funciones modales (NM) en 150, y el intervalo de integración en  $[\alpha_0 - T, \alpha_0 + T]$  con  $T = 10$ . Esta elección de  $T$  permite que todos los ángulos de dispersión queden cubiertos, ya que éstos están relacionados con  $\alpha$  mediante la fórmula  $\theta = \arcsin(\alpha/k)$  y, en este caso, por [3]  $\alpha_0 = 2.0974$ .

Para la inversión de la matriz se utilizó el método de descomposición LU desarrollado en [9].

Las gráficas correspondientes a este primer experimento en computadora se incluyen a continuación. Se grafica  $|R^P(\theta)|$  vs. ángulo de observación en escala logarítmica para una onda incidente con polarización P.

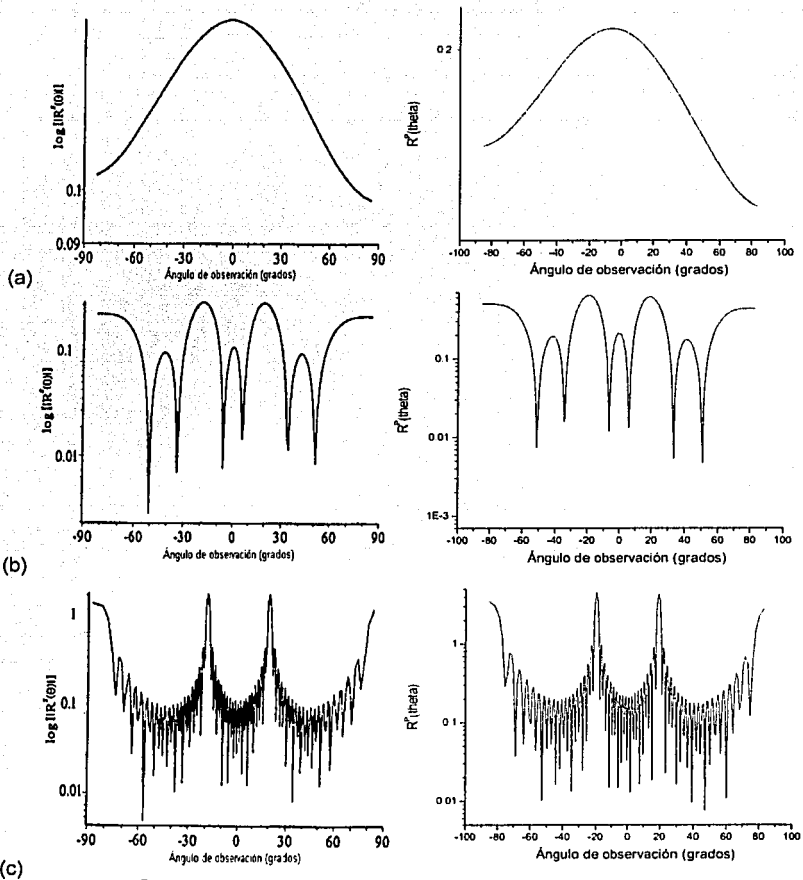


Figura 2.1  $|R^p(\theta)|$  vs. ángulo de observación para una onda incidente con polarización P. A la izquierda se muestran las gráficas publicadas en [3]; a la derecha, las obtenidas en este trabajo (a) 1 canal, (b) 3 canales, (c) 21 canales.

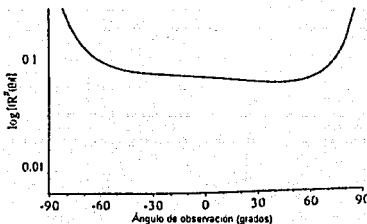
Comparando estas gráficas podemos concluir que los resultados aquí obtenidos sí corresponden a los de Depine y Skigin.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

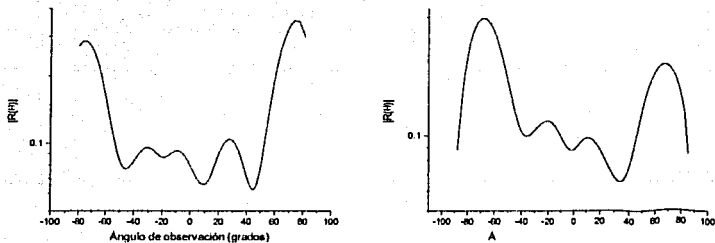
## POLARIZACIÓN S

En el caso de polarización S, el paso que corresponde a la inversión de la matriz  $(M_1 + 2\pi\beta^1)$  es mucho más sensible a las aproximaciones. Esto se hace evidente en las gráficas que se incluyen a continuación. Por esta razón se hizo necesario cambiar el método numérico para invertir matrices.

A continuación se grafica  $|R^S(\theta)|$  vs. ángulo de observación en escala logarítmica para una onda incidente con polarización S. Los parámetros que describen a la onda incidente son idénticos a los del caso de polarización P. Se incluyen las gráficas obtenidas por Depine y Skigin; las realizadas con las mismas aproximaciones que el caso P (pero con intervalo de integración  $T = 20$ ) y aquellas correspondientes a los parámetros que mejor se han ajustado a los resultados de Depine y Skigin (para éstas se tiene  $T = 10$ ,  $NM = 250$ ), hasta el momento. Además se incluyen gráficas para 21 canales.

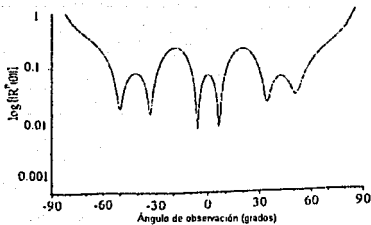


(a1)

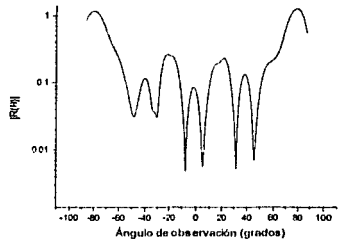
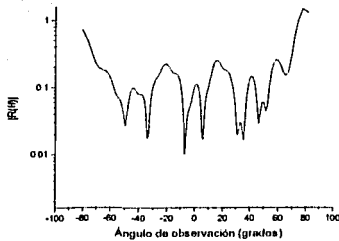


(a2)

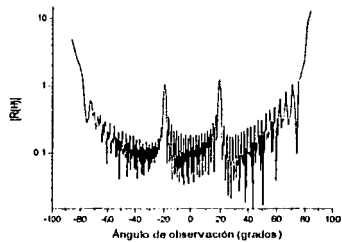
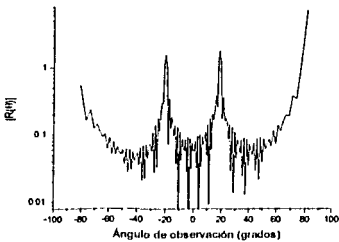
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



(b1)



(b2)



(c)

Figura 2.2  $|R^S(\omega)|$  vs. ángulo de observación para una onda incidente con polarización S. (a1) 1 canal, gráfica publicada en [3]. (a2) 1 canal, la segunda imagen además usa NR = 751 (b1) 3 canales, gráfica publicada en [3]. (b2) 3 canales y en la segunda imagen NR = 1251, (c) 21 canales y en la segunda imagen NR = 551.

Como podrá observarse al comparar estas gráficas con las que se publican en [3], aunque los resultados obtenidos son muy similares a los de Depine y Skigin, aún es necesaria mayor precisión en el cálculo. Concretamente, se detectó que es al invertir la matriz final que surgen las complicaciones; incluso, fue necesario

cambiar el método utilizado para invertir la matriz en esta polarización, de modo que se tomara en cuenta la presencia de valores demasiado cercanos a cero (los cuales producen una mayor incertidumbre al tomarse el inverso). Este método, denominado "descomposición de valores singulares", considera como ceros a todas aquellas entradas cuyo valor sea inferior a  $1 \times 10^{-6}$  y se encuentra desarrollado en [9].

Para dar una idea de la complejidad de estos cálculos, cabe mencionar que cada una de las últimas tres gráficas generadas requirió de más de tres horas en una computadora con un procesador Intel Pentium 4, CPU 1.50GHz.

## REJILLAS NO PERIÓDICAS

Una vez verificado el funcionamiento de los programas en el caso de rejillas periódicas, se procedió a introducir variaciones en la separación entre los canales, su ancho y su altura por separado, para el caso de polarización P, cuya convergencia quedó mejor determinada.

Para determinar los parámetros de las superficies modificadas se utilizó la función `rand()` de C. En realidad, esta función generará siempre la misma secuencia de números aleatorios. Para cambiar estos valores es necesario introducir el uso de "semillas" nuevas a partir de las cuales se generen estas secuencias. Por el momento solamente se estudiará un ejemplo por cada nivel de irregularidad, por lo que no es esencial recurrir a este recurso. Sin embargo, en un trabajo a futuro será necesario correr el programa varias veces con el mismo parámetro y obtener un promedio para las diferentes modificaciones, entonces se introducirá el uso de las semillas.

## VARIACIONES EN LA SEPARACIÓN ENTRE LOS CANALES

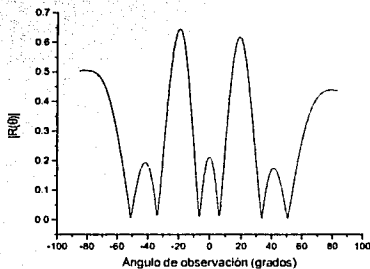
Esta variación está dada por la fórmula:

$$dx[i] = 1.5 * (0.614 + 2.0 * (\text{rand()} / (\text{double})\text{RAND\_MAX} - 0.5) * \text{magvar});$$

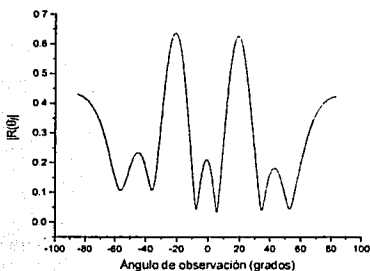


Cuando *magvar* vale 0 se tiene el caso periódico en el que  $dx = 0.921$  mientras que, cuando vale 0.4, la separación entre los canales varía dentro del intervalo  $[0.321, 1.521]$ .

Las siguientes gráficas muestran cómo varía la intensidad de la luz dispersada cuando se introduce esta variación en el caso de 3 canales. Las gráficas ya no se encuentran en escala logarítmica pues, tras la introducción de las irregularidades, ésta escala ya no resulta ser la más clara. Los parámetros en la aproximación siguen siendo  $T = 10$ ,  $NM = 150$ ,  $NR = 451$ .

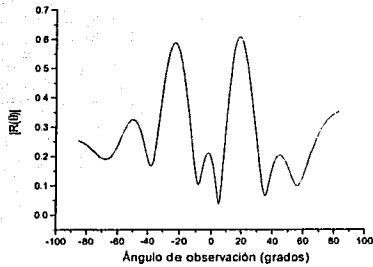


(a)

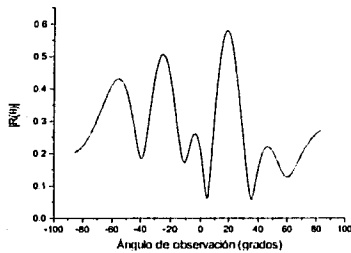


(b)

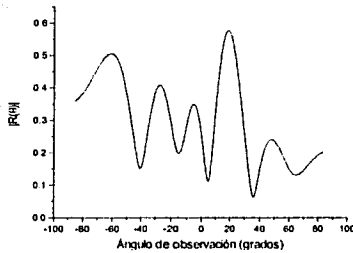
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



(c)



(d)

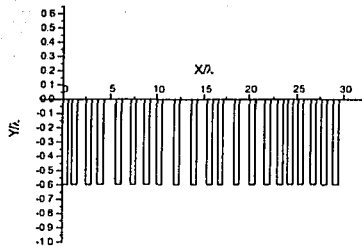


(e)

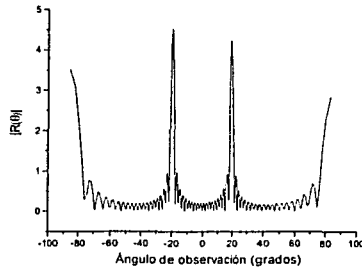
Figura 2.3  $|R^P(0)|$  vs. ángulo de observación para una onda incidente con polarización P sobre una rejilla cuyos 3 canales han sido separados aleatoriamente. (a) rejilla periódica, (b)  $magvar = 0.1$ , (c)  $magvar = 0.2$ , (d)  $magvar = 0.3$ , (e)  $magvar = 0.4$ .

Ya desde este caso con 3 canales se puede observar la deformación en el pico de orden antiespectral<sup>1</sup>, al incrementar la magnitud de las irregularidades entre las separaciones entre los canales. Es precisamente en esta dirección en la que se esperará observar el fenómeno de retrodispersión reforzada.

Las siguientes gráficas corresponden a rejillas con 21 canales, primero se muestra la superficie modificada cuando  $magvar = 0.3$ , las otras superficies son semejantes a ésta.

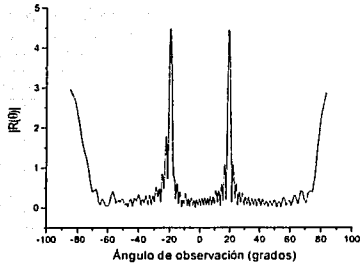


(a)

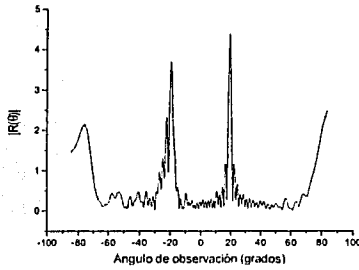


(b)

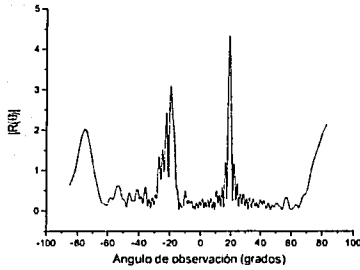
<sup>1</sup> El pico de orden antiespectral corresponde al que se genera en el ángulo  $\theta = -\theta_0$ .



(c)

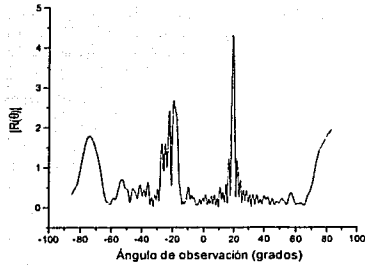


(d)

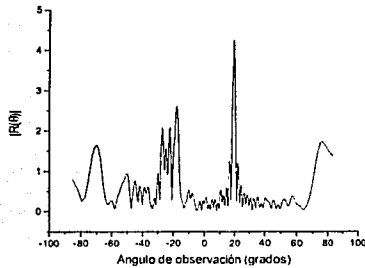


(e)

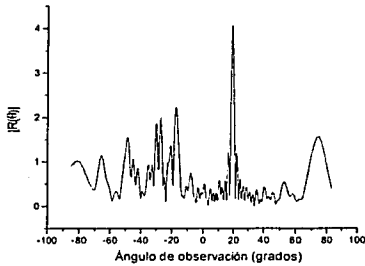
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



(f)



(g)



(h)

Figura 2.4 (a) superficie modificada cuando  $magvar = 0.3$ . Después,  $|R^P(\theta)|$  vs. ángulo de observación para una onda incidente con polarización P sobre una rejilla cuyos 21 canales han sido separados aleatoriamente: (b) rejilla periódica, (c)  $magvar = 0.05$ , (d)  $magvar = 0.1$  (e)  $magvar = 0.13$ , (f)  $magvar = 0.15$ , (g)  $magvar = 0.2$ , (h)  $magvar = 0.3$ .

Al igual que en el caso de tres canales, el pico en la dirección antiespecular es el más afectado al variar las separaciones entre los canales.

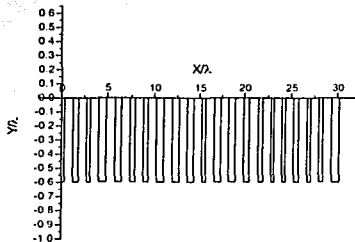
## VARIACIONES EN EL ANCHO DE LOS CANALES

Esta variación está dada por la fórmula:

$$c[j] = 1.5 * (0.386 + 2.0 * (\text{rand}()/(\text{double})\text{RAND\_MAX} - 0.5) * \text{magvar} * 0.6287);$$

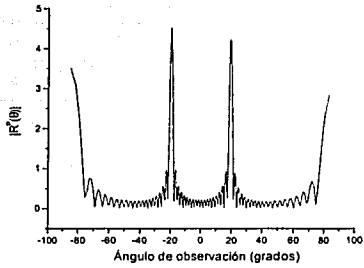
Funciona esencialmente igual que en el caso anterior, pero al final se multiplica por 0.6287, con la finalidad de que la irregularidad introducida sea proporcional a la introducida en dx dependiendo del valor de *magvar*.

Cuando *magvar* vale 0 se tiene el caso periódico en el que  $c = 0.579$ , mientras que cuando vale 0.4, la separación entre los canales varía dentro del intervalo [0.20178, 0.95622].

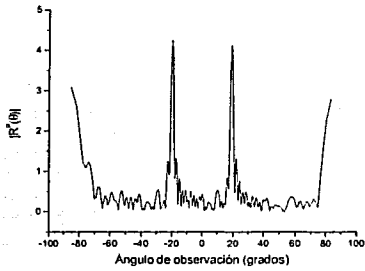


(a)

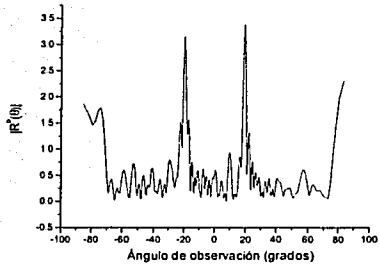
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



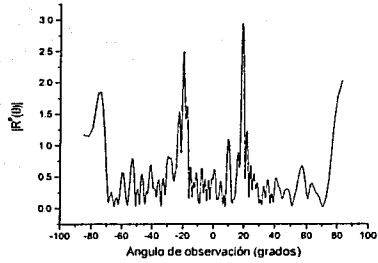
(b)



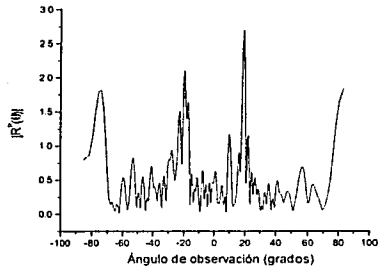
(c)



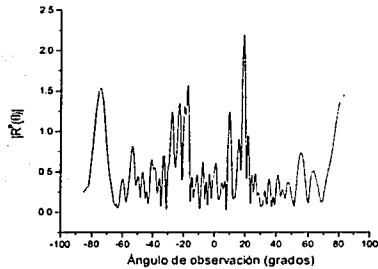
(d)



(e)



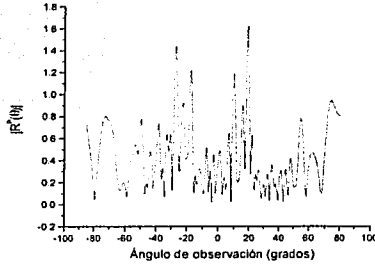
(f)



(g)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN





(h)

Figura 2.5 (a) superficie modificada para  $magvar = 0.3$ . Después,  $|R^P(\theta)|$  vs. ángulo de observación para una onda incidente con polarización P sobre una rejilla cuyos 21 canales tienen anchos modificados aleatoriamente: (b) rejilla periódica, (c)  $magvar = 0.05$ , (d)  $magvar = 0.1$  (e)  $magvar = 0.13$ , (f)  $magvar = 0.15$ , (g)  $magvar = 0.2$ , (h)  $magvar = 0.3$ .

En este caso podemos observar como, al variar los anchos de los canales, ambos picos son afectados.

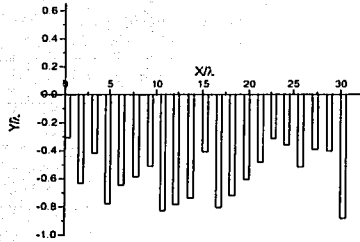
## VARIACIONES EN LA PROFUNDIDAD DE LOS CANALES

Esta variación está dada por la fórmula:

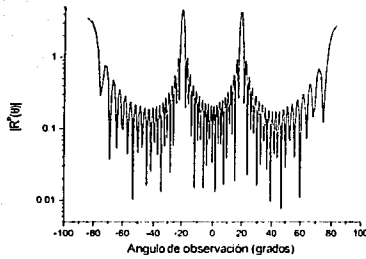
$$h[i] = 1.5 * (0.3973 + 2.0 * (\text{rand}() / (\text{double})\text{RAND\_MAX} - 0.5) * magvar * 0.6471);$$

En esta ocasión 0.6287 permite que la irregularidad introducida sea proporcional a la introducida en dx, dependiendo del valor de  $magvar$ . Gracias a esto, las gráficas obtenidas nos muestran claramente que modificar las alturas tienen menor efecto en el espectro, que haber modificado dx o c, proporcionalmente hablando. Por esta razón las siguientes gráficas se encuentran en escala logarítmica.

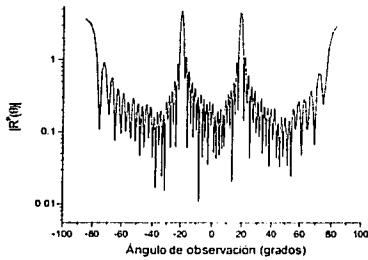
TESIS CON  
FALLA DE CARGEN



(a)

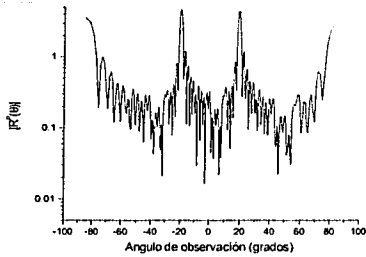


(b)

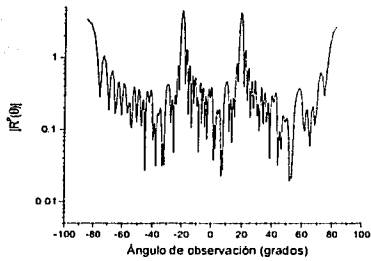


(c)

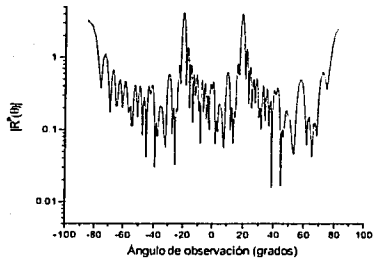
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



(d)

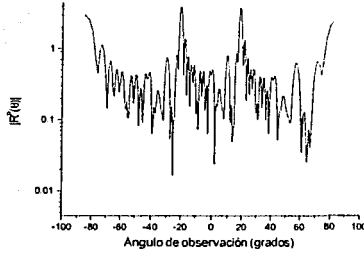


(e)

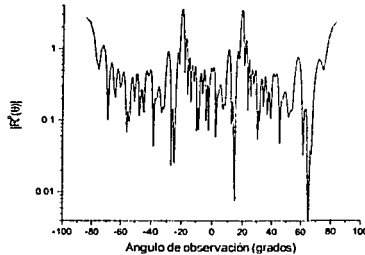


(f)

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA



(g)



(h)

Figura 2.6 (a) superficie modificada para  $magvar = 0.3$ . Después,  $|R^P(\theta)|$  vs. ángulo de observación para una onda incidente con polarización P sobre una rejilla cuyos 21 canales tienen alturas modificados aleatoriamente: (b) rejilla periódica, (c)  $magvar = 0.05$ , (d)  $magvar = 0.1$ , (e)  $magvar = 0.15$ , (f)  $magvar = 0.2$ , (g)  $magvar = 0.25$ , (h)  $magvar = 0.3$ .

En este caso las alteraciones sufridas por los picos, al variar las alturas de los canales, fue tan pequeña que fue posible mantener la escala logarítmica, sin que esto provocara que se perdiera de vista a los picos señalados por la ecuación de la rejilla.

## CONCLUSIONES

Se logró programar un nuevo método modal para el cálculo de la difracción en rejillas, permitiéndonos un manejo libre de sus parámetros y, por consiguiente, el estudio de superficies elegidas de acuerdo a nuestros intereses.

Al analizar el comportamiento de este método para radiación incidente con polarización P y S, sobre las mismas superficies, pudimos comprobar que la polarización S es más sensible a las aproximaciones realizadas.

Se realizaron cálculos para superficies en las que fueron modificados la separación entre los canales, sus anchos y sus alturas, independientemente. De los resultados obtenidos podemos hacer las siguientes observaciones:

- Cuando modificamos la separación entre los canales, el pico correspondiente al orden de reflexión especular se mantuvo casi sin cambios, tanto para 3 como para 21 canales; mientras que, para la dirección antiespecular, las variaciones provocaron la deformación del pico. No sucede así al modificar los anchos de los canales, pues en este caso, ambos picos resultan afectados.
- Cuando se modifican las alturas, las variaciones introducidas no afectan tanto al campo dispersado, por lo que es más recomendable recurrir a irregularidades en la separación y ancho de los canales para producir retrodispersión reforzada. Este resultado es en especial conveniente, pues al momento de fabricar las superficies, es más fácil controlar las irregularidades introducidas en ancho y separación que en la profundidad.

Buscaremos en un futuro, comparar los resultados obtenidos con el método modal, con aquellos que surgen de los métodos Kirchhoff, y la solución en términos de series de Fourier y de Bessel propuesta por Yon-Lin Kok[7], con la finalidad de determinar aquellas superficies que nos faciliten el estudio del fenómeno de retrodispersión reforzada.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] T.K. Gaylord and M.G. Moharam, "Analysis and application of optical diffraction gratings," Proc. IEEE, No. 73, pp. 894-938 (1985).
- [2] Petit R., editor, "Electromagnetic Theory of Gratings", Springer Verlag, capítulo 1.
- [3] Depine Ricardo A. y Skigin C. Diana, "Scattering from metallic surfaces having a finite number of rectangular grooves", J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 11, No. 11, pp. 2844-2850, (Noviembre 1994).
- [4] J.M. Soto-Crespo y M. Nieto-Vesperinas, "Electromagnetic scattering from very rough random surfaces and deep reflection gratings," J. Opt. Soc. Am. A, No. 6, pp. 367-384 (1989).
- [5] J.M. Soto-Crespo y M. Nieto-Vesperinas, "Enhancement of all antispesular orders from deep gratings", Opt. Commun., No. 69, pp. 185-188 (1989).
- [6] N.C. Bruce y J.C. Dainty, "Multiple scattering from random rough surfaces using the Kirchhoff aproximation", J. Mod. Opt., Vol. 38, No. 3, pp. 579-590, (1991).
- [7] Yon-Lin Kok, "General solution to the multiple-metallic-grooves scattering problem: the fast-polarization case", Applied Optics, Vol. 32, No. 14, pp. 2573-2581, (10 Mayo 1993).
- [8] Max Born, Emil Wolf, "Principles of Optics", Pergamon Press, 6a. ed., pp. 4-6.
- [9] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T.Vetterling y B.P. Flannery, "Numerical Recipes in C", Cambridge University Press, pp. 67, (1995).