324

00324

19

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE ECUACIONES CON UNA INCOGNITA EN BACHILLERATO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

JOSE AGUSTIN JIMENEZ URIBE

DIRECTORA DE TESIS: MAT. CONCEPCION RUIZ RUIZ-FUNES

2003

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

1.a

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION DISCONTINUA

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENMA DE
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: José Agustín Jiménez Uribe
FECHA: 10-NOV-2003
FIRMA:

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
Propuesta de Enseñanza de Ecuaciones con una incógnita en Bachillerato

realizado por José Agustín Jiménez Uribe

con número de cuenta 7721622-9 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Mat. Concepción Ruiz Ruiz – Funes	Concepción Ruiz
Propietario	Dra. María de la Paz Alvarez Scherer	
Propietario	Mat. Claudia Hernández García	
Suplente	Mat. Sara Alejandra Pando Figueroa	
Suplente	Mat. Pablo Rosell González	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

1-b

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a

Mi madre **Berta Uribe Valencia**: Por tu amor, tu dedicación y aunque físicamente ya no estás conmigo, siento que no te apartas de los que te queremos.
Fuiste para mí siempre ejemplo de amor, honestidad y todo lo bueno que los seres humanos podemos alcanzar. No quisiste otro camino sino el de la rectitud.
Mi trabajo es resultado tuyo. Sé que Dios siempre te bendijo y lo sigue haciendo.

Mi padre **Ernesto Jiménez Cuayuca**: Por ser el sostén de la familia.

A todos mis hermanos pero particularmente a los mayores, **Lourdes** y **Jaime** por todas las responsabilidades que debieron asumir con los que fuimos menores a ustedes y

Patricia, **Alejandra** y **Ana Berta** por todo lo que hacen sin interés por el beneficio y la unión de la familia, que es mucho, y el apoyo que recibo de ustedes, lo que no puede ser compensado con nada.

Todos los sobrinos pues lo que se hace, se hace para todos. Los mayores ya están encausados pero particularmente a los menores **Angélica** para que sigas esforzándote pues tú puedes todo, **Luis David** te superes como lo has hecho hasta ahora y **Eric** para que nunca dejes de aprender. Permanezcan alegres siempre.

También a tantos amigos que he conocido en todos lados. Son muchos y no terminaría de nombrarlos pero ustedes saben que los tengo presentes en mi pensamiento.

Pero sobre todo a **Dios**, por estar con nosotros incondicionalmente en todo momento y ser la fuerza espiritual que nos inspiras y guías por los mejores caminos.

1. c

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a:
La directora de esta tesis, **Concepción Ruiz Funes-Funes**, pues me ayudaste sin demora en cualquier momento que te lo solicitaba, siempre con amabilidad y desinteresadamente, a pesar de tus múltiples ocupaciones. Ningún grado académico podrá valer más que tu infinita calidad humana. Eres un ángel en la tierra.

Los sinodales **Mat. Claudia Hernández García**, **Mat. Sara Alejandra Pando Figueroa**, **Mat. Pablo Rosell González** y **Dra. María de la Paz Álvarez Sherer**, por el tiempo que dedicaron a este trabajo, con sus comentarios siempre pertinentes pero también por su buen trato. Nunca podré agradecer lo que han hecho conmigo.

Todos los profesores que me han formado desde mis primeros años de vida, tantos que no alcanzaría a nombrarlos a cada uno, que fueron transmisores de conocimientos, pero también lo fueron de valores y buen ejemplo, muy especialmente a los de la facultad de Ciencias que me han hecho un profesional.

A tantos amigos que he encontrado en cualquier lugar que he estado, la lista de todos ustedes sería larga.

Pero también muy especialmente a la gran **Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM**, institución que eres el espíritu de nuestra nación, depositaria de conocimientos científicos y humanísticos de nuestro pueblo, pues en ti se forman personas de la más alta calidad, siempre con la consigna de lograr la superación de todos los mexicanos, sin distinciones de ningún tipo, con la más entera libertad pues sólo así florece al máximo la creatividad. Universidad que eres el orgullo de todos los mexicanos. Gracias por lo que me has dado sin pedirme nada.
Si olvidé agradecer a alguien, le ruego me disculpe.

1- d

ÍNDICE

	Página
INTRODUCCIÓN	3
CAPÍTULO 1: ECUACIONES DE PRIMER GRADO	6
1.1 Introducción del propósito a resolver	6
1.2 Transformación de problemas en lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico	8
1.3 Clasificación de ecuaciones de primer grado	18
1.4 Otros hechos representados con ecuaciones de primer grado	30
1.5 Ejercicios propuestos	38
1.6 Respuestas	40
CAPÍTULO 2: HISTORIA DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO	41
2.1 Historia breve de las ecuaciones de primer grado	41
2.2 Método de la falsa posición	45
2.3 Anecdotario	47
2.4 Algunas ecuaciones históricas de primer grado	55
CAPÍTULO 3: ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	59
3.1 Introducción	59
3.2 Transformación de frases en lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico de problemas que se representan con ecuaciones de segundo grado	64
3.3 Qué es factorizar	72
3.4 Número de soluciones de una ecuación de segundo grado	77
3.5 Solución de una ecuación de segundo grado representada como	

producto de dos factores de primer grado 80
3.6 Qué es la fórmula general para ecuaciones de segundo grado y solución de una ecuación de este tipo con dicha fórmula . . 86
3.7 Análisis de las soluciones de una ecuación de segundo grado por medio del discriminante 91
3.8 Problemas propuestos. 95
3.9 Respuestas 96

CAPITULO 4: HISTORIA DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO 98
4.1 Historia breve y anecdotario 98
4.2 Algunas ecuaciones históricas de segundo grado . . . 103

CAPITULO 5: HISTORIA SOBRE ECUACIONES DE GRADO MAYOR 107
5.1 Historia y anécdotas de las ecuaciones de tercer grado y cuarto grado 107
5.2 Transformación de algunos símbolos algebraicos con el paso del tiempo 112
5.3 Cronología breve del álgebra 115

CONCLUSIÓN 122

BIBLIOGRAFÍA. 123

INTRODUCCIÓN.

La tesis que presento, cuyo nombre es **Propuesta de Enseñanza de Ecuaciones con una Incógnita en Bachillerato**, la dirijo especialmente a estudiantes de bachillerato para que puedan auxiliarse de ella en los temas de ecuaciones de primer grado y segundo grado pues es un tema que aparece en los programas de matemáticas de este nivel. Esto no excluye a los profesores interesados en el tema, pues también está hecha pensando en ellos.

Mi intención es mostrarles cómo se transforma un enunciado que está en español para representarlo como una ecuación, encontrar sus soluciones, dar ejemplos de problemas descritos con todo detalle para que el estudiante observe cada paso sin que le quede la menor duda de por qué se hace así.

Junto con la enseñanza de los temas, explico datos históricos fundamentales relacionados a dichos conceptos, pues creo que es una forma de interesarlos en su estudio y además refuerza el aprendizaje de una manera amena.

Todo lo anterior lo hago usando el lenguaje cotidiano para que les resulte atractivo a los jóvenes y no un trabajo distante de sus intereses.

He observado que, con frecuencia, el estudiante no siente agrado por los temas matemáticos que debe aprender porque cree que los ejemplos que los textos les muestran no son aplicables a su vida, no tienen utilidad, les parecen muy difíciles, no tienen casi ninguna relación con sus gustos y todo esto les produce una sensación de desgano.

Personalmente creo que, si un tema carece de actividades diversas para captar su atención y ejemplos que les resulten familiares, el estudiante se aburrirá con toda seguridad y rechazará aprender lo que se le presenta.

Incluso en su aula, se distraerá o propiciará desorden.

Al observar esto, pensé en hacer este trabajo sobre ecuaciones con una incógnita, que considero, son temas fundamentales, pues el estudiante tendrá que trabajar con estos conceptos no únicamente en matemáticas sino también en física, química, biología, economía etcétera, en las que tendrá que reconocer, plantear y solucionar problemas que se representan con una ecuación.

He querido hacer este trabajo en el orden más lógico posible y explicar los temas en forma detallada para que sea entendido de la mejor manera.

La tesis está dividida en cinco capítulos y, en seguida, describo rápidamente el contenido de cada uno de ellos.

El capítulo 1 trata el tema de ecuaciones de primer grado, su planteamiento, su solución, ejemplos resueltos y algunas aplicaciones de estas ecuaciones.
Al final de este capítulo, propongo a los alumnos (o a cualquier lector) algunos ejercicios para que ellos mismos los resuelvan.

En el capítulo 2, describo la historia de las ecuaciones de primer grado, cuya antigüedad es de aproximadamente cuatro mil años.
He decidido incluirla pues es una historia fascinante y ya que en la adolescencia los jóvenes gustan de leer relatos, qué mejor momento para hacerlo que éste, lo que refuerza el aprendizaje de lo estudiado.
También encontrarán algunas anécdotas reales que después de leerlas, le darán más significado al tema.

En el capítulo 3 desarrollo el tema de ecuaciones de segundo grado e inicia con transformar un enunciado para representarlo con una ecuación (cuando es posible) Después presento métodos de solución, ejemplos numéricos y prácticos resueltos completamente y finalmente algunos ejercicios propuestos para el estudiante.

En el capítulo 4 menciono muy brevemente datos históricos sobre las ecuaciones de segundo grado y además, otras anécdotas que permitan al lector tener idea de la antigüedad, importancia y contemporaneidad del tema.

También incluyo algunos ejemplos de ecuaciones de segundo grado que fueron estudiados siglos atrás junto con su solución.

El capítulo 5 es una reseña sobre las soluciones de las ecuaciones de tercer grado y cuarto grado, lo que provocó muchos conflictos a los matemáticos involucrados. También podrán leer algunas anécdotas, datos históricos sobre ciertos símbolos matemáticos, comparando su escritura en la antigüedad y la forma en que son escritos ahora

Finalmente, una cronología pequeña sobre el álgebra que es la ciencia que estudia, entre otras temas, las ecuaciones.

Creo que el orden es secuencial y espero sinceramente interesar a quien lea este trabajo.

CAPÍTULO 1: ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

1.1 Introducción del propósito a resolver.
1.2 Transformación de problemas en lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.
1.3 Clasificación de ecuaciones de primer grado.
1.4 Otras hechos representados con ecuaciones de primer grado.
1.5 Ejercicios propuestos.
1.6 Respuestas.

1.1 INTRODUCCIÓN DEL PROPÓSITO A RESOLVER.

Este capítulo incluye algunos ejemplos de cómo plantear y resolver ecuaciones de primer grado, un tema fundamental que aparece muy frecuentemente en el trabajo escolar.
Lo escribo con el fin de que vean que no es algo imaginario o teórico, sino real y aplicable. Creo que los ejemplos que hay, les darán idea de cómo plantear un problema y cómo resolverlo. También sé que con su creatividad, cada uno de ustedes inventará muchos más ejemplos ingeniosos pues si algo tienen, es mucha creatividad.
Por supuesto que lo que aprendan, lo utilizarán en ustedes mismos o ayudando a alguien, pero en cualquier caso, obtendrán provecho de él.
El tema lo trataré paulatinamente para que sea entendido de la mejor manera.
Empiezo enseguida con una explicación que nos plantea por qué requerimos de las ecuaciones.

En todos los tiempos de la historia humana, hombres y mujeres han tenido que enfrentarse a los contratiempos y problemas que representa sobrevivir en una naturaleza equilibrada pero también impredecible y sin voz que nos revele sus secretos, que no son fáciles de entender, representar o ser aprovechados.

Poco a poco, los seres humanos, con intención de conocer esos secretos, han experimentado y aprendido algunas propiedades de los fenómenos naturales para así obtener beneficios para los demás y vivir con mejores condiciones de vida.

Se ha requerido observar y estudiar los fenómenos pero también usar un lenguaje apropiado para simbolizarlos y comunicarlos a los demás y que permita razonarlos en forma abstracta.

Las matemáticas son, entre otras cosas, un lenguaje simbólico. Están compuestas de una gran variedad de símbolos, de los cuales, ustedes seguramente ya conocen algunos como **+**, = , **%**, $\sqrt{\ }$, $\exists$, $\leq$ etcétera.

Este lenguaje ha sido muy útil para representar muchas situaciones por medio de la simbología que lo compone, ya que por ejemplo, permite transformar problemas que están en lenguaje cotidiano en una representación algebraica que facilita su manejo para poderlos estudiar.

En este trabajo emplearé los símbolos usados en álgebra para resolver ecuaciones, como son los de las operaciones aritméticas y los usados para representar lo que se llama incógnitas.

¿A propósito, saben que es una **incógnita**? Etimológicamente "**in**" significa no y "**cógnita**" quiere decir conocido, esto es, valor desconocido que se desea determinar.

Pues bien, en el estudio que queremos realizar, tendremos que encontrar los valores de las incógnitas en una ecuación.

Lo primero que tenemos que hacer es practicar cómo transformar nuestros enunciados al lenguaje algebraico.

Olvidemos tantos "choros" y comencemos ya.

1.2 TRANSFORMACIÓN DE PROBLEMAS EN LENGUAJE COTIDIANO AL LENGUAJE ALGEBRAICO.

Los siguientes ejemplos están preparados para que practiquen la conversión de un enunciado en su representación al lenguaje algebraico, ya que éste es el paso inicial para poder simbolizar un problema que puede representarse como una ecuación de primer grado.

Como históricamente ya es costumbre, usaré las letras minúsculas x, y, z, w, para representar valores desconocidos o incógnitas aunque se puede usar cualquier símbolo y no habituarse únicamente a algunos de ellos.

Ejemplo 1. Un número cualquiera.
PLANTEAMIENTO:
Podemos representar el número
cualquiera con x

Ejemplo 2. Sumar dos números cualesquiera.
PLANTEAMIENTO:
Representemos al primer número
cualquiera con x
Representemos al otro número con . . . z
La suma de estos números la
representaríamos con . . . . . . $x + z$

Ejemplo 3. Multiplicar tres números arbitrarios.
PLANTEAMIENTO:
Representar esos tres números arbitrarios con . x, y, z
La multiplicación de ellos se representaría con . xyz

Ejemplo 4. La tercera parte de un número.

PLANTEAMIENTO:

Representemos al número con x

Entonces la tercera parte del número x es . . x/3

Ejemplo 5. Cuatro veces la edad de Pati.

PLANTEAMIENTO:

La edad de Pati podríamos
representarla con x

Cuatro veces su edad se representaría con . . 4x

Ejemplo 6. Hoy tenemos la temperatura de ayer más otros ocho grados.

PLANTEAMIENTO:

La temperatura de ayer podemos representarla
con . . . . y

Representamos la temperatura de hoy,
que es ocho grados más que la de ayer con . . y + 8

Ejemplo 7. Mi promedio obtenido de 4 calificaciones.

PLANTEAMIENTO:

Las cuatro calificaciones pueden representarse
con . . . . w, x, y, z

El promedio es la suma de las calificaciones
entre el número de ellas sería . . . . (w+x+y+z) / 4

Ejemplo 8. Mi tío es muy gordo. Él pesa cinco veces más que yo.

PLANTEAMIENTO:

Mi peso lo represento con . . . . y

El peso de mi tío es 5 veces el mío.
Eso lo representaríamos con 5y

Nota: Los planteamientos siguientes hacen uso de un signo matemático muy útil y frecuente: **el signo igual** representado con el símbolo **=**, que relaciona dos expresiones que tienen el mismo valor. Por ejemplo, sabemos que 80/4 y (2) (10) son formas diferentes de escribir el mismo valor lo que es escrito 80/4 =(2) (10).
También que $x + x + x$ es lo mismo que $3x$, esto es, $x + x + x = 3x$.
En álgebra se usa con este propósito y ahora mismo empezaré a utilizarlo.

Ejemplo 9. El grupo musical Back Street Boys ha vendido la sexta parte de discos del número total de discos vendidos por Madonna. ¿Cómo representar esto?
PLANTEAMIENTO:
El número de discos vendidos por los Back Street Boys lo representamos con . . . . y
Y al número de discos vendidos por Madonna con x
El número de discos vendidos por los Back Street Boys es la sexta parte de los vendidos por Madonna se representaría con . . . . $y = x / 6$

Ejemplo 10. En la empresa en la que David trabaja, el salario nocturno es el triple del salario diurno. Si un día en que él trabaja en turno nocturno le pagan \$180, ¿cuánto es el salario diurno en esa empresa ?
PLANTEAMIENTO:
Representemos lo anterior algebraicamente.
Representemos el salario diurno con x
Entonces el salario nocturno es . . . . . . $3x$
Pero el salario nocturno es de \$180, es decir . . . $3x = 180$
Así que si encontramos el valor de x, podremos saber el valor del salario diurno.

Ejemplo 11. En la cascarita de ayer, mi amigo "el chino" anotó 2 goles, más la mitad de todos los goles anotados por el equipo fueron en total 6 goles. ¿Cuántos goles anotó el equipo ?

PLANTEAMIENTO:

Veamos nuevamente que aquí hay un valor desconocido y es el total de goles anotados por el equipo.

Representemos los goles anotados por el equipo con	x
Entonces la mitad de goles anotados por el equipo lo representaríamos con	$x/2$
La mitad de goles, más los dos goles del chino lo representaríamos con	$(x/2)+2$
El total de goles es igual a seis	$(x/2)+2 = 6$

Obteniendo el valor de x, podremos saber el número de goles anotados por el equipo.

Ejemplo 12. Yo tengo 20 años pero la chica de la prepa con la que salgo, nunca me ha dicho su edad. Sin embargo, ayer me dio una pista: "Si a tu edad le restas la mía y a todo el resultado lo divides entre dos, todo será igual también a dos".

Voy a obtener su edad "a como dé lugar".

PLANTEAMIENTO:

Nuevamente aquí tenemos un problema con un valor desconocido y es la edad de mi novia.

Representemos la edad de ella con	x
Mi edad menos la edad de mi novia podemos representarla con	$20 - x$
La mitad de lo anterior es igual a 2	$(20 - x) / 2 = 2$

Obteniendo el valor de x, podremos saber la edad de ella.

Ejemplo 13. ¡No puedo creer que Carlos haya comido todos esos tacos!. Se comió el cuádruplo que Ana, más dos y le conté en total catorce. ¿Pero cuántos se comió Ana ?

PLANTEAMIENTO:

Representemos el número de tacos que Ana se comió con x

El cuádruplo de esos tacos quedaría . . . . $4x$

El cuádruplo más dos es catorce . . . . . $4x + 2 = 14$

Ya planteamos nuestro problema y sabemos que Carlos "el super comelón" devoró 14 tacos. Al resolver la ecuación, obtendremos el número de tacos que Ana consumió.

Ejemplo 14. El profe de física está volviéndose loco con tantos alumnos.
Tiene en total 7 grupos, cinco de los cuales tienen el mismo número de alumnos.
En los dos grupos restantes tiene siete y doce alumnos menos, respectivamente.
Si en total tiene 401 alumnos, ¿cuántos alumnos tiene en cada uno de los cinco grupos con igual número de alumnos ?

PLANTEAMIENTO:

Representemos el número de alumnos que hay en cada uno de los 5 grupos con igual número de alumnos con x

Entonces, el total de alumnos de los cinco grupos que tienen igual número de alumnos, debe expresarse con . . . . . . $5x$

El sexto grupo tiene igual número de alumnos que cualquiera de los cinco grupos con igual número de alumnos, menos siete.
Eso se representaría con . . . . . $x - 7$

El séptimo grupo tiene igual número de alumnos que cualquiera de los cinco grupos con igual número de alumnos, menos doce.
Lo cual se representaría con . . . . . $x - 12$

El total de alumnos en todos los grupos
es 401 . . . . $5x+(x-7)+(x-12)=401$

Obteniendo el valor de x, podremos saber cuántos alumnos hay en cualquiera de los grupos con igual número de alumnos.

Ejemplo 15. Es fácil que yo sepa el precio de los tenis nuevos de Ricardo. Dijo que la diferencia del valor de los tenis de Lalo, que cuestan $534, y los de él es $179. Plantearé una expresión para averiguarlo.

PLANTEAMIENTO:

Los tenis de Lalo cuestan 534

El precio de los tenis de Ricardo
puodría representarse con . . . . y

La diferencia de los precios de los tenis
de Lalo y Ricardo es 179 . . . . $534 - y = 179$

Con esta expresión se puede encontrar el valor de **y**, que representa lo que cuestan los tenis de Ricardo.

Ejemplo 16. En una promoción de teléfonos celulares, Julio compró 2 aparatos: uno para su novia y otro para é,l que costó $138 más.
Si en total gastó $2422 por los dos aparatos, ¿cuánto costó el teléfono de ella ?

PLANTEAMIENTO:

Representemos el valor del teléfono de
la novia de Julio con x

El valor del teléfono de Julio es 138 pesos más.
Lo que se expresaría como . . . . $x + 138$

Sumando el valor de ambos es $2422 . . . . $x + (x + 138) = 2422$

Simplificando, esto quedaría . . . . $2x+138 = 2422$

Resolviendo esto, se encuentra lo que costó el teléfono de la novia de Julio.

Ejemplo 17. Recuerdo que el área de un terreno rectangular es de 750 metros cuadrados y su largo es de 30 metros. Pero no sé qué tan ancho es. Lo voy a obtener.

PLANTEAMIENTO:

El largo del terreno es 30

Representemos el ancho del terreno con . . . x

El área del terreno es largo por ancho
y todo es igual a 750 . . . . . . $30x = 750$

Al conocer x, sabremos el ancho del terreno.

Ejemplo 18. En mi horóscopo salió que si a mi número de la suerte lo dividía entre cuatro y al resultado le sumaba 12, todo esto era igual a 19.

Pero olvidaron decir mi número. ¿Cuál será ?

PLANTEAMIENTO:

Mi número de la suerte lo represento con . . z

Mi número de la suerte entre cuatro con . . $z/4$

Mi número de la suerte entre cuatro,
más doce es igual a diecinueve . . . . $(z/4)+12 = 19$

Al encontrar el valor de z, se sabrá cual es mi número de la suerte.

Ejemplo 19. Al papá de Paco le debían \$60000 pero le hicieron un descuento correspondiente a 3 meses de impuestos y únicamente se quedó con \$47400.

¿Cuánto paga mensualmente de impuestos?

PLANTEAMIENTO:

Representemos lo que el señor paga de
impuestos en un mes con x

El importe de tres meses de impuestos
lo representamos con . . . . . . $3x$

De los \$60000, hay que restar lo de tres
meses de impuestos y quedan \$47400 . . . $60000 - 3x = 47400$

Encontrando el valor de x, sabremos lo que el señor paga de impuestos cada mes.

Ejemplo 20. Chelo tuvo que elaborar un trabajo de geografía muy extenuante pues revisó 18 cartografías en 3 días. Cada día revisaba una cartografía más que el día anterior. ¿Cuántas revisó cada día ?

PLANTEAMIENTO:

Número de cartografías revisadas el primer día	x
Número de cartografías revisadas el segundo día	x + 1
Número de cartografías revisadas el tercer día. .	x + 2
El número total de cartografías revisadas en tres días es dieciocho	x + (x + 1) +(x + 2) = 18
Simplificamos y tenemos	3x + 3 = 18

Resolviendo esto, conoceremos el número de cartografías revisadas el primer día, que es igual a x. Sumando una y dos unidades respectivamente al valor que tenga la incógnita x, obtendremos el número de cartografías revisadas los otros dos días.

Ejemplo 21. Para los gastos de la práctica de campo, el profesor de Biología sólo ha recabado $2200, que representan la séptima parte de lo requerido.

¿Cuánto necesita en total ?

PLANTEAMIENTO:

Simbolizemos el costo total de la práctica con . .	x
La séptima parte del costo total se representa con . .	x/7
La séptima parte del costo total es: $2200 . . .	x/7 = 2200

Encontrando el valor de x, sabremos el costo total de la práctica de campo.

Ejemplo 22. El día de San Valentín, invité a mi chava a "Six flags". Los juegos a los que subimos fueron dos veces al túnel del amor, tres veces a la montaña rusa y una vez al látigo. Cada juego costaba lo mismo y gasté en total $204.

¿Cuál sería el costo de cada juego pues no me fijé ?

PLANTEAMIENTO:

Expresar el costo por juego en pesos con . . . x

Subir mi novia y yo a cualquier juego,
lo represento con . . . . $x + x = 2x$

Dos veces al túnel del amor es . . . . . $2(2x)$

Tres veces a la montaña rusa . . . . . $3(2x)$

Una vez al látigo . . . . $1(2x)$

Sumado todo fue $204 . . . . . . $2(2x) + 3(2x) + 1(2x) = 204$

Simplificando la expresión, queda . . . . $12x = 204$

Encontrando el valor de x, podremos saber el costo de cada juego.

Ejemplo 23. En el cuarto semestre del bachillerato, mis "cuadernos" Chucho y Manolo compitieron para ver quién ligaba más chavas. Manolo ganó, pues las que él ligó, representaban el triple, menos una de las conquistadas por Chucho. Sumadas todas esas chicas eran siete. Pero Chucho no me dice cuántas le hicieron caso.

¿Cómo lo sabré yo?

PLANTEAMIENTO:

Simbolizemos el número de chicas ligadas
por Chucho con x

Entonces el triple de esas chicas lo
representaríamos con . . . . . . $3x$

El triple menos una de las ligadas
por Chucho, son las ligadas por Manolo. . . $3x - 1$

Sumadas las conquistas de Chucho y Manolo
son siete y lo expresamos con . . . . . $x + (3x - 1) = 7$

Simplificando la expresión resulta . . . . $4x - 1 = 7$

Conociendo x, que es el número de las chicas conquistadas por Chucho, podremos saber el número de las chicas conquistadas por Manolo.

Ejemplo 24. El número de varones de la estudiantina de la escuela a la que asisto es 13 más que el doble de chicas. Si hay 67 chicos en este grupo, ¿cuántas chicas hay?

PLANTEAMIENTO:

Expresemos el número de chicas con x

El doble de ellas lo representamos con . . . . $2x$

El doble de ellas más trece es el número de chavos. Eso quedaría expresado como . . . $2x + 13$

Como hay 67 chicos, entonces . . . . . . $2x + 13 = 67$

Al obtener el valor de x en esta ecuación, sabremos cuál es el número de muchachas en la estudiantina.

Ejemplo 25. Rosa y Selena son hermanas y están en primer año y tercer año de bachillerato respectivamente.

El triple de materias que Rosa ya acreditó, menos dos es igual al número de materias aprobadas por Selena, que son veintidos. ¿Cuántas materias lleva aprobadas Rosa ?

PLANTEAMIENTO:

El número de materias aprobadas por Rosa se puede representar con x

Entonces el triple de materias aprobadas por Rosa debe expresarse con . . . . . $3x$

El triple de las materias aprobadas por Rosa, menos dos es el número de materias aprobadas por Selena . . . . . . $3x - 2 = 22$

El problema ya está planteado. Al encontrar x, sabremos cuantas materias aprobó Rosa.

Hasta este momento, solamente quería motivarlos a que reconozcan que hay muchos problemas que pueden expresarse algebraicamente pero no esperaba que resolvieran las ecuaciones de primer grado resultantes de la transformación de los enunciados al lenguaje algebraico.

El tema siguiente sí intenta apoyarlos en tal objetivo y creo que con un poquitín de esfuerzo, podrán hacerlo.

1.3 CLASIFICACIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Cuando en una ecuación, el exponente máximo de la incógnita es el número 1, decimos que ella es de primer grado. Los siguientes ejemplos son todos ecuaciones de este tipo.

1) $3x + 7 = 4$	2) $x/2 + x/4 + 6 = -5$
3) $3x + 2 = 9x + 5$	4) $(5x - 6) = 2x - 1$
5) $(3/2)x - 2 = -5x + 6/7$	6) $4/3 + 5x = x - 2$
7) $(-7/2)x = 8/4$	8) $x + 2x = -x - 2x$
9) $3x - x + 1/2 = -6/7$	10) $(x - 5)/4 = 3(x + 4)$
11) $6/x = -8$	12) $(5/2)x - 5 = -8$
13) $3x + 2x = -4x - 5$	14) $-25 + 6x = 4$
15) $(-9/7 + 6)x = -2/9$	16) $3x + 2x = -9 - 5x$
17) $(-3/5)x = 2/3$	18) $(-2/7)x - (9/5)x = -9/3$
19) $-28x + x - 1 = 6$	20) $(3/2)x = (-2/7)x + 8$
21) $5 + 6x = -3x + 2$	22) $x - 2/4 = 2x - 1$
23) $5x - 7/2 = 6x + 7/2 + x/3$	24) $4x - x - 2 = x - x - 2x$
25) $(-9/3)x = 0$	26) $5x = (3/2)x - 2$
27) $-x/2 + (7/2)x - 5 = 4x - 3/4$	28) $7x + 9 = -7x - 12$
29) $(3x + 2)5 = -9/4$	30) $6x + 8/7 = 9x - 8/7$

Como ven en los ejemplos anteriores, la manera en que puede aparecer una ecuación es muy variada, por lo que clasificarlas es conveniente para resolverlas según su forma. Pero seguramente se preguntarán ¿qué es resolver una ecuación o cómo saber que ya llegamos a la solución ?

Para encontrar la solución de una ecuación, hay que "dejar solita" la incógnita **x**, sin ningún número que esté multiplicándose o dividiéndose con ella o con algún otro término que esté sumado o restado a la incógnita.

Por ejemplo, si tuviéramos la ecuación $(-7/3)x - 5 = -17$,

tendríamos que quitar tanto el factor $-7/3$ como el sumando -5 para que la incógnita x quedara libre.

Para resolver una ecuación, se usan procedimientos algebraicos que se deben aplicar a ambos miembros de la igualdad para que ella no se altere.
La intención es "dejar la incógnita sola" en uno de los dos miembros de la igualdad.
Algunos de los procedimientos a que me refiero son sumar a ambos miembros de la igualdad el inverso aditivo de una constante o de un término, multiplicar por el inverso multiplicativo de un número o de un término etcétera, para que el símbolo que representa la incógnita, aparezca en uno de los miembros de la ecuación y en el otro miembro, el valor de ella.

¡Les propongo que le entremos a estudiar ya diferentes casos en que puede presentarse una ecuación de primer grado sin esperar más!

CASO 1: Ecuación del tipo **ax = c** con **a** diferente de cero
Ahora se preguntarán ¿por qué **a** debe ser distinto de cero?
Por que si **a** lo fuera, se tendría 0x = c. Pero esto último sólo ocurre cuando **c** también es cero, lo que no tiene que ser siempre así.
¿Qué les parece el siguiente método para solucionar una ecuación de este estilo ? Observen y opinen (quizá puedan proponer algo alternativo).

SOLUCIÓN :

La ecuación es de la forma . . . . . **ax = c**
Como **a** es cualquier real distinto de cero, tiene inverso multiplicativo, el cual es **1/a**.
Así que ocurre **a**(1/**a**) = (1/**a**) **a** = **a/a** = 1.
Entonces multipliquemos ambos lados por 1/**a** . **(1/a)a** x = **(1/a)c**
Así que . . . . (**a/a**) x = **c/a**
Es decir, ... 1x = **c/a**
Por último . . . . x = **c/a**
Que es la forma que debe tener la solución.
¿Qué les parece si vemos algunos ejemplos prácticos para entender el método anterior? Vean los pasos que seguimos para solucionar un problema hasta que dominen lo que hicimos.

Ejemplo 1. En su gira pasada, el grupo de rock irlandés U2 llenó completamente el auditorio en cada uno en sus 7 recitales. Si el número de boletos vendidos en total fue 71400, ¿cuál es el cupo del auditorio ?

PLANTEAMIENTO:

Representemos el cupo del auditorio por . . .	x
Entonces siete veces el cupo lo expresaríamos con	$7x$
Y esto es igual	$7x = 71400$
Así que la ecuación es de la forma . . .	$\mathbf{a}\, x = \mathbf{c}$
Multiplicar por (1/7), que es el inverso multiplicativo de 7	$(1/7)7x=(1/7)71400$
Es decir	$(7/7)x = 1\ (71400)/ 7$
Por lo que	$1x = 71400 / 7$
La solución es	$x = 10200$

Que es el número de personas que caben en el auditorio en cada recital.

Ejemplo 2. En una embotelladora de Coca Cola, hay un contenedor de 20000 litros de refresco ya preparado. ¿Cuántas botellas de 400 mililitros pueden llenarse con este líquido ?

PLANTEAMIENTO:

Sabemos que	400 mililitros = 0.4 litros
El número de botellas que se llenarán puede simbolizarse con	x
El número de botellas multiplicadas por 0.4 litros dan en total 20000 litros . . .	$(0.4)x =20000$
La ecuación es de la forma	$\mathbf{a}\, x = \mathbf{c}$
Multiplicar por (1/0.4) que es inverso multiplicativo de 0.4	$(1/0.4)(0.4)x = (1/0.4)\ 20000$
Entonces	$(0.4/0.4)x =1\ (20000)/ (0.4)$
Tenemos	$1x = 20000/ 0.4$
Haciendo operaciones, la solución es . .	$x = 50000$

Lo cual representa el número de botellas que se llenarán con Coca Cola.

Ejemplo 3. Por interés de que le ayude en física y matemáticas (más que por amistad), Pedro prestará \$1395 a Adrián para que pague el alquiler de los 3 meses de renta que adeuda. ¿Cuánto paga Adrián de renta mensualmente?

PLANTEAMIENTO:

Representemos lo que paga por un mes de renta con . .	x
Entonces lo que paga por tres meses de renta es . .	$3x$
Lo que paga por tres meses es \$1395	$3x = 1395$
Multiplicar por (1/3), que es el inverso multiplicativo de 3 .	$(1/3)3x = (1)1395/3$
Entonces	$(3/3)x = 1395/3$
Es decir	$1x = 1395/3$
Finalmente	$x = 465$ pesos

Por consiguiente, Adrián paga \$465 de renta al mes.

Ahora veamos otra forma en que pueden aparecer ecuaciones de primer grado.

CASO 2: Ecuación del tipo $\mathbf{a}x + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ con $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ diferentes de cero.

Nuevamente les aclaro que $\mathbf{a}$ no debe ser cero, pues de serlo, se tendría $\mathbf{a}x = 0x = 0$ y únicamente tendríamos $0 + \mathbf{b} = \mathbf{c}$, lo que es $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, es decir, una igualdad de dos constantes pero no una ecuación con una incógnita.

También necesitamos que $\mathbf{b}$ no sea cero pues de serlo, tendríamos $\mathbf{a}x + 0 = \mathbf{c}$ o simplemente $\mathbf{a}x=\mathbf{c}$, con lo cual otra vez estaríamos en el caso 1 que ya hemos mencionado.

SOLUCIÓN:

Para despejar la incógnita x, observamos que "nos estorban" tanto $\mathbf{a}$ como $\mathbf{b}$, pero ¿ cuál quitar primero y cuál después ?

Quizá una sugerencia que pueda ser útil es recordar que debe eliminarse primero "lo que está más alejado de la incógnita". En este caso eliminamos primero a la constante $\mathbf{b}$ que aparece como un término y después la constante $\mathbf{a}$ que aparece como factor de x.

Ya que con cualquier real $\mathbf{b}$, ocurre que $+(-\mathbf{b}) = -\mathbf{b}$ y que $\mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = 0$,

Sumemos a cada miembro de la ecuación $(-\mathbf{b})$, $\mathbf{a}x + \mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{c} + (-\mathbf{b})$

Entonces . . . . $\mathbf{a}\,x = \mathbf{c} - \mathbf{b}$

Aquí pueden observar algo que nos facilita nuestro trabajo: Noten que $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ es la diferencia de dos números reales, lo cual es a su vez otro número real. Digamos que $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ es un número **f**. Entonces tenemos $\mathbf{a}x = \mathbf{f}$, que es una ecuación del tipo de las expuestas en el caso 1. El resto del procedimiento es lo mismo que hicimos en el caso 1. En otras palabras, el caso 2 se reduce al caso 1.

Multiplicar por $1/\mathbf{a}$, que es inverso multiplicativo de **a** $(1/\mathbf{a})\mathbf{a}x = (1/\mathbf{a})(\mathbf{c}-\mathbf{b})$

Finalmente . . . . . . $x = (\mathbf{c}-\mathbf{b})/\mathbf{a}$

Hagamos unos ejemplos para ver cómo llevar a cabo este procedimiento.

Ejemplo 1. Encontrar la solución de $(-4/5)x + (36/6) = 30$

PLANTEAMIENTO:

Vemos que la ecuación es de la forma . . $\mathbf{a}\,x + \mathbf{b} = \mathbf{c}$

Como $\mathbf{b} = 36/6 = 6$, se tiene . . . $(-4/5)x + 6 = 30$

Quitamos primero al sumando **b** que es el más alejado de la incógnita.

Sumar -6 que es inverso aditivo de 6 . . $(-4/5)x + 6 + (-6) = 30 + (-6)$

Entonces . . . . . . $(-4/5)x = 24$

Multiplicar por -5/4 que es inverso multiplicativo de –4/5 . . . . $(-5/4)(-4/5)\,x = (-5/4)\,24$

Entonces . . . . . . $x = (-5)24/4$

Por lo que . . . . . . $x = -120/4$

Finalmente, la solución es . . . $x = -30$

Ejemplo 2. En la prepa se organizó una excursión y contrataron 7 autobuses. Antes de partir, llegaron 17 personas que tuvieron que ir de pie pues todos los asientos estaban ocupados. Se sabe que en total fueron 227 personas. Pero, ¿cuál era el número de personas sentadas por autobús ?

PLANTEAMIENTO:

Representemos el número de personas sentadas en un autobús por x

El número de personas en 7 autobuses es . . . $7x$

Al final llegaron 17 personas más y en total eran 227 $7x + 17 = 227$

La ecuación es de la forma . . . . $\mathbf{a}\,x + \mathbf{b} = \mathbf{c}$

Primero sumar –17 que es el inverso aditivo de 17 . $7x + 17 + (-17) = 227 + (-17)$

Entonces . . . . $7x = 210$

Multiplicar por (1/7) que es inverso multiplicativo de 7 $(1/7)7x = (1/7)\ 220$

Se tiene que . . . . $(7/7)x = 1(210) / 7$

Entonces . . . . $x = 30$

Concluimos que cabían 30 personas sentadas por autobús.

Recomendación: No es necesario aprenderse las fórmulas de memoria pues podrían olvidarlas. Es mejor entender por qué razón se hace cada uno de los pasos efectuados.

Ejemplo 3. Acapulco está abarrotado de turistas y a un hotel han llegado 129 visitantes de un mismo grupo. Se instalaron 4 personas de ellos por habitación.

Pero 5 tuvieron que quedarse a dormir en una estancia pues ya no había cuartos.

¿Cuántas habitaciones quedaban en el hotel cuando ellos llegaron ?

PLANTEAMIENTO:

Representar el número de habitaciones disponibles
cuando ellos llegaron y que ocuparon x

El número de habitaciones por cuatro es el número de personas
que cupieron en todos los cuartos que estaban desocupados . $4x$

El número anterior más cinco es en total ciento
veintinueve personas . . . . $4x + 5 = 129$

Ahora sumar -5, que es inverso aditivo de 5 . . . . $4x + 5 + (-5) = 129 + (-5)$

Es decir, ... $4x = 124$

Ahora multiplicar por (1/4) que es
inverso multiplicativo de 4 . . . . $(1/4)\,4x = (1/4)\ 124$

Es decir, ... $(4/4)x = 1(124) / 4$

Así que . . . . $x = 31$

Conclusión: El número de cuartos que estaban desocupados era 31.

CASO 3: Ecuaciones en que la variable aparece en ambos miembros de la igualdad.

Suponer que tenemos la ecuación de primer grado $\mathbf{a}x + \mathbf{b} = \mathbf{d}x + \mathbf{c}$

con **a** diferente de **d**

Nuevamente debo aclararles por qué se pide que **a** sea diferente de **d**:

Si fueran iguales entonces se tendría **ax** = **d**x y podríamos cancelar ambas términos de los miembros de la ecuación y nos quedaría **b** = **c**, que es la igualdad de dos números pero no una ecuación con la incógnita **x**.

La forma para resolverla es la siguiente:

Primero) Juntar las constantes **b** y **c** en uno de los miembros que elijan de la ecuación (digamos el derecho), lo cual se logra sumando el inverso aditivo de **b** en ambos miembros. Se hace así pues **b** y **c** son los más alejados de la incógnita x.

Entonces sumar -**b** que es inverso aditivo de **b** $\quad \mathbf{a}x + \mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{d}x + \mathbf{c} + (-\mathbf{b})$

Así que . . . . . . $\quad \mathbf{a}x + \mathbf{0} = \mathbf{d}x + \mathbf{c} + (-\mathbf{b})$

Es decir . . . . . . $\quad \mathbf{a}x = \mathbf{d}x + \mathbf{c} - \mathbf{b}$

Segundo) Juntar los términos que contienen a la variable x (que son **a**x y **d**x) en el otro miembro de la ecuación (tendría que ser ahora el izquierdo).

Sumar -dx que es inverso aditivo de dx . $\quad \mathbf{a}x + (-\mathbf{d}x) = \mathbf{d}x + (-\mathbf{d}x) + \mathbf{c} - \mathbf{b}$

Por consiguiente . . . . . . $\quad \mathbf{a}x + (-\mathbf{d}x) = \mathbf{0} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$

Entonces . . . . $\quad \mathbf{a}x + (-\mathbf{d}x) = \mathbf{c} - \mathbf{b}$

Ahora podemos factorizar x . . . $\quad (\mathbf{a}-\mathbf{d})x = \mathbf{c}-\mathbf{b}$

Como **a** y **d** son diferentes, entonces **a-d** no es cero. Además **c-b** también es un número real. Así que la forma en que ya se encuentra nuestra ecuación, vuelve a ser del tipo mostrado en el caso 1.

Por tanto, se puede multiplicar por 1/(**a**-**d**)

que es inverso multiplicativo de **a** – **d** . . $\quad (1/(\mathbf{a}-\mathbf{d}))(\mathbf{a}-\mathbf{d})x = (1/(\mathbf{a}-\mathbf{d}))(\mathbf{c}-\mathbf{b})$

Tenemos pues . . . . . $\quad (\mathbf{a}-\mathbf{d}) / (\mathbf{a}-\mathbf{d})x = 1(\mathbf{c}-\mathbf{b}) / (\mathbf{a}-\mathbf{d})$

Entonces . . . . $x = (\mathbf{c}-\mathbf{b}) / (\mathbf{a}-\mathbf{d})$

que es la forma que tendrá la solución de la ecuación original.

No sobra decir que lo que estamos haciendo no es encontrar otra fórmula para uno de tantos casos, sino mostrar la secuencia de pasos con que se resuelve este tipo de problemas. ¿Qué tal si vemos un ejemplito?

Ejemplo 1. Seis preparatorianas se fueron de pinta a ver el espectáculo nudista "sólo para mujeres". Al pagar los boletos, dos de ellas se hicieron las distraídas para que las otras cuatro pagaran todo.

Si las cuatro chicas pagaron cada una su boleto, mas $55 adicionales para pagar lo de las otras, ¿cuánto costaba cada boleto ?

PLANTEAMIENTO:

Representemos el costo de cada boleto . .	x
Ahora el costo del boleto, más los $55 adicionales .	$x + 55$
Lo que pagaron 4 chicas	$4(x + 55)$
Entonces lo pagado por 4 chicas es igual a lo que debieron pagar las seis chicas . .	$4(x + 55) = 6x$
Distribuimos el 4	$4x + 210 = 6x$
Pasar 210 al miembro derecho	$4x +210 +(-210) = 6x -210$
Entonces	$4x = 6x-210$
Pasar 6x al miembro izquierdo	$4x+ (-6x) = 6x +(-6x) -210$
Entonces	$-2x = -210$
Multiplicar por (-1/2) que es inverso multiplicativo de -2	$(-1/2)(-2x) = (-1/2)(-210)$
Entonces	$x = (-1)(-210)/2$
Por tanto	$x = 105$

Conclusión: el precio de entrada es de $ 105 pesos. Pero cada una de las cuatro que sí pagaron tuvieron que dar realmente $105 + $55, es decir $160.

Ejemplo 2. Carlos, Juan y Roberto lavaron todas las probetas de un laboratorio.

Carlos lavó 8/13 del total de probetas. Además Juan y Roberto lavaron las 65 piezas restantes. Roberto quiere saber cuántas probetas hay en total. Veamos

PLANTEAMIENTO:

Representemos el total de probetas por . .	x
Y las probetas lavadas por Carlos por . . .	$(8/13)x$
Las que lavó Carlos, más las 65 restantes lavadas por Juan y Roberto es igual al total de probetas .	$(8/13)x + 65 = x$
Sumar –65 que es inverso aditivo de 65 . .	$(8/13)x + 65 + (-65) = x + (-65)$
Entonces	$(8/13)x = x - 65$

Ahora hay que juntar los términos con la incógnita x en el miembro izquierdo de la igualdad.

Sumamos –x, que es inverso aditivo de x .	$(8/13)x + (-x) = x + (-x) - 65$
Es decir	$(8/13)x - x = -65$
Factorizamos x	$((8/13) - 1)x = -65$
Como (8 / 13) -1= -5/13 entonces . .	$((8/13) - 1)x = (-5/13)x = -65$
Multiplicar ambos miembros por el inverso multiplicativo de (-5/13) que es (-13 / 5)	$(-13/5)\cdot(-5/13)x = (-13/5)(-65)$
Entonces	$x = (-13)(-65)/5$
Por lo que	$x = 845/5$
Finalmente	$x = 169$

Que es el número total de probetas.

Ejemplo 3. De los grupos A, B y C, el grupo A es el menos numeroso y su número de reprobados también. El número de reprobados de B es el triple de A más 8 y el de C es el quíntuplo de A menos 2, respectivamente

¿Cuántos alumnos reprueban en A, B y en C?

PLANTEAMIENTO:

Representar el número de reprobados en A con .	x
El triple de reprobados en A, más 8 es el número de reprobados de B . . .	$3x + 8$
El quíntuplo de reprobados de A, menos 2	

es el número de reprobados de C . . . . . $5x - 2$

El número de reprobados de B y el de reprobados de C es igual.

Entonces . . . . $3x + 8 = 5x - 2$

Juntamos constantes en el miembro derecho de la igualdad $3x + 8 - 8 = 5x - 2 - 8$

Es decir . . . . $3x = 5x - 10$

Se pasan los términos con x al miembo izquierdo

de la igualdad . . . . . . $3x+(-5x) = 5x +(-5x)-10$

Simplificamos . . . . . . $-2x = -10$

Multiplicamos por -1/2, ... $(-1/2)(-2)x = (-1/2)(-10)$

Así que . . . . $x = -1(-10) / 2$

Tenemos pues que . . . . $x = 5$

Conclusión: el número de reprobados en A es 5. El número de reprobados de B es el triple de los de A más ocho. Por consiguiente, son $3(5) +8 = 23$

Como B y C tienen igual número de reprobados entonces C tiene 23 reprobados.

Cualquier persona sentirá que es difícil encontrar la secuencia de pasos para solucionar una ecuación pero una vez comprendida, siempre será igual. Traten de ver que cada paso tiene una razón lógica. En muy poco tiempo podrán saltarse muchos de ellos.
Por el momento, practíquenlos para comprenderlos enteramente.

Ejemplo 4. En un grupo escolar que organizó su posada, del número total de integrantes, la mitad cooperó con los refrescos. Otra tercera parte del grupo llevó comida, otras tres personas se encargaron de la música y finalmente quedaron 2 sin que se les asignara algo que hacer. ¿Cuántas personas tiene el grupo?

PLANTEAMIENTO:

El número de personas del grupo se puede representar con x

La mitad y la tercera parte de ese grupo se representan

respectivamente con . . . . . . $x/2$, $x/3$

Al número total de personas, restamos la mitad que llevó refrescos, la tercera parte que llevó comida y los tres que llevaron música . . . $x-(1/2)x -(1/3)x - 3$

Eso dará como resultado dos, que son las personas a las que no se les asignó nada.

Lo que se representa como . . . . $x-(1/2)x-(1/3)x-3=2$
Sumando 3 en ambos miembros . . . $x-(1/2)x-(1/3)x-3+3=2+3$
Es decir . . . . $x-(1/2)x-(1/3)x=5$

Aquí conviene explicar algo: En la ecuación anterior, aparecen como denominadores el 2 y el 3 en $x/2$ y $x/3$. Cuando ocurre así, una forma de eliminarlos es multiplicar por un múltiplo de ellos en ambos miembros de la ecuación, digamos 6.
Pero recuerden que para no alterar la igualdad, se deben aplicar las mismas operaciones en ambos miembros de la igualdad.

Multiplicamos por 6 . . . . . $6(x-1/2x-1/3x)=6(5)$
Distribuimos el número 6 . . . . . $6x-6(1/2x)-6(1/3x)=30$
Entonces . . . . $6x-3x-2x=30$
Es decir . . . . $x=30$
Ahora ya sabemos que el grupo tiene 30 alumnos.

Ejemplo 5. Lorenzo echa volados con sus cuates apostando dinero.
De la cantidad de dinero que tenía al inicio, debió restar una quinta parte que perdió.
Después ganó la mitad de dinero que tenía al principio.
Si finalizó con \$26, ¿con cuánto dinero comenzó ?
PLANTEAMIENTO:
Representar la cantidad de dinero que tenía al inicio con x
La quinta parte y la mitad del dinero inicial se representan
respectivamente con . . . . . $x/5$, $x/2$
Al dinero inicial, restó la quinta parte y después le
sumó la mitad y quedaron \$26 . . . . . $x-x/5+x/2=26$
Multipliquemos ambos miembros por un múltiplo de
5 y 2 para quitar denominadores, digamos 10 . $10(x-x/5+x/2)=10(26)$
Distribuimos al 10 . . . . . . $10x-10(x/5)+10(x/2)=260$
Entonces . . . . $10x-2x+5x=260$
Así que . . . . $13x=260$

Multiplicar por 1/13	$(1/13)\cdot 13x = (1/13)\cdot 260$
Tenemos pues	$(13/13\cdot)x = 1(260)/13$
Así que	$x = 260/13$
Haciendo la división, ...	$x = 20$

Conclusión: Lorenzo inició sus apuestas con 20 pesos.

Ejemplo 6. Poncho, Beto y Eric cooperaron para comprar un balón de basquet. Poncho fue quien dio más (exactamente \$260) y Eric quien dio menos. Beto dio el cuádruplo de lo dado por Eric más \$50. Además, lo que Beto cooperó fue igual a lo dado por Poncho menos el doble de lo de Eric. ¿Con cuánto cooperó Eric ?

PLANTEAMIENTO:

Lo dado por Poncho es	\$ 260
Lo dado por Eric puede representarse con . . .	x
Beto cooperó con el cuádruplo de lo de Eric, más \$50 .	$4x+50$
Esa cantidad es igual a lo de Poncho, menos el doble de lo de Eric	$4x+ 50 = 260 -2x$
Juntemos las constantes en un miembro de la igualdad (digamos el derecho)	$4x+50+(-50) = 260 -2x+(-50)$
Entonces	$4x = 210 - 2x$
Juntemos los términos con x en el otro miembro .	$4x + 2x = 210 - 2x + 2x$
Entonces	$6x = 210$
Multipliquemos por 1/6	$(1/6)\ 6x =(1/6)\ 210$
Tenemos pues que	$x = 210/6$
Entonces lo que Eric cooperó fue	$x = \$35$
Beto dio	$4(35)+50 = \$\ 190$

Conclusión: Poncho dio \$260, Beto \$190 y Eric cooperó con \$35.

Como ven, los pasos que se siguen tienen una secuencia lógica. Intentaré hacerlo también en las secciones siguientes.

1.4 OTRAS HECHOS REPRESENTADOS CON ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

¿No les gustaría conocer otras maneras en que pueden presentarse ecuaciones de primer grado para que amplíen su panorama del tema y, además, sea material que pueda servirles? Aquí está a su disposición esperando que les ayude.

ECUACIONES Y PROPORCIONES.

Veamos cómo es que al plantear una proporción directa, surge una ecuación de primer grado. Haré 2 preguntas y aunque no sepan las respuestas, pueden leer las opciones mostradas.

1-¿**Saben qué significa una razón en matemáticas** ?

Respuesta: Es simplemente el cociente de dos cantidades.

Vean los ejemplos siguientes:

a) la razón entre 40 y 8 es 40/8

b) la razón entre 5 y 10 es 5/10

c) la razón entre 3/9 y 8/9 es (3/9) / (8/9)

2 ¿**Saben que es una proporción**?

Respuesta: Es la igualdad entre dos razones.

Nuevamente vean estos ejemplos:

a) la razón entre 40 y 8 es 40/8 y la razón entre 10 y 2 es 10/2.

Entonces la igualdad 40/8 = 10/2 es una proporción.

b) Sea x un número desconocido. La razón entre x y 5 es **x**/5 y la razón entre 15 y 2.5 es 15/2.5. Entonces la igualdad **x**/5 = 15/2.5 es una proporción donde aparece el valor no conocido **x**. Esta proporción es pues una ecuación de primer grado

c) Otra vez, sea x un número no conocido. La razón entre 6 y **x** es 6/**x** y la razón entre 9 y 4.5 es 9/4.5

Así que la igualdad 6/**x** = 9/4.5 es otra proporción con el valor desconocido **x**.

Por lo que en ambos ejemplos anteriores, tenemos una ecuación de primer grado.

Para encontrar dicho valor, aplicamos lo que sabemos de ecuaciones.

Resolvamos la primera proporción . . .	$\mathbf{x}/5 = 15/2.5$
Para dejar libre a x, multiplicamos por 5 . .	$(\mathbf{x}/5)5 = (15/2.5)5$
Tenemos	$5\mathbf{x}/5 = (15)(5) / 2.5$
Entonces	$\mathbf{x} = 75/2.5$
Concluimos que el valor de **x** es	$\mathbf{x} = 30$

Resolvamos la segunda proporción . . .	$6/\mathbf{x} = 9/4.5$
Lo que puede escribirse como	$6(1/\mathbf{x}) = 9/4.5$
Multiplicamos por **x**, que es inverso multiplicativo de 1/**x**	$6(1/\mathbf{x})\mathbf{x} = (9/4.5)\mathbf{x}$
Entonces	$6(\mathbf{x}/\mathbf{x}) = (9/4.5)\mathbf{x}$
(**Opcional**) Intercambiar los miembros de la igualdad	$(9/4.5)\mathbf{x} = 6$
Pero eso es lo mismo que	$9\mathbf{x}/4.5 = 6$
Multiplicamos por 4.5/9, que es inverso multiplicativo de 9/4.5	$(4.5/9)9\mathbf{x}/4.5 = (4.5/9)\ 6$
Se tiene	$(4.5/9)(9/4.5)\mathbf{x} = (4.5)(6) / 9$
Así que	$\mathbf{x} = 27/9$
Concluimos que	$\mathbf{x} = 3$

Ahora veamos unos ejemplos prácticos sobre proporciones.

Ejemplo 1. " No entiendo lo que enseña el maestro de matemáticas" fue lo que dijeron 255 alumnos a una encuesta realizada a un total de 300 chicos.

¿Cuántos alumnos responderán igual en otra encuesta realizada a 1100 alumnos, suponiendo que la proporción se mantiene?

PLANTEAMIENTO:

De los datos obtenidos en la encuesta, la razón entre quienes no entienden al profesor y el total de alumnos es 255/300

Representemos al número de alumnos que no entenderían al profesor de matemáticas de un total de 1100 entrevistados con la razón . . x/1100

Como supondremos que se conservará la proporción (igualdad entre razones),

entonces . . . . $x/1100 = 255/300$

Multiplicar por 1100 que es inverso de 1/1100 $x/1100(1100)= 255/300\ (1100)$

Entonces . . . . $x(1100/1100) = 255(1100)/300$

Haciendo las operaciones, concluimos que . $x = 935$

que son los jóvenes que responderían que no entienden al profesor de matemáticas en una encuesta hecha a 1100 muchachos.

Observación : En el ejemplo anterior se hizo la razón

(número de alumnos que no entiendan al profesor) / (total de alumnos encuestados)

y teníamos la proporción $x/1100 = 255/300$

Pero si cambiamos el orden como hacemos la razón, quedaría

(total de alumnos encuestados) /(número de alumnos que no entienden al profesor).

Y tendríamos $1100/x = 300/255$.

Veamos que también se obtendría el mismo resultado.

Tenemos . . . . $1100/x = 300/255$

Y puede ser escrito como . . . . $1100(1/x) =300/255$

Multiplicamos por x, que es el inverso de 1/x . $1100(1/x)\ x= (300/255)x$

Así que . . . . $1100(x/x) = (300/255)x$

(Opcional) Cambiamos el orden de los miembros $(300/255)\ x = 1100$

Multiplicativo por 255/300, que es inverso

multiplicativo de 300/255 . . . $(255/300)(300/255)\ x= (255/300)1100$

Entonces . . . . . $x = (255)(1100)/300$

Así que . . . . . $x = 280500 / 300$

Concluimos que . . . . $x = 935$

Que es lo mismo que obtuvimos antes.

Ejemplo 2. Un dato del que los estudiantes no llegan a enterarse, es que de cada 100 alumnos, 25 padres de familia asisten a la escuela para cerciorarse de las calificaciones de sus hijos sin avisarles. Si una escuela tiene 3500 alumnos, ¿cuántos padres se estima que asistan para comprobar esas calificaciones?

PLANTEAMIENTO:

La razón puede plantearse

total de alumnos /número de padres que preguntan calificaciones

Entonces se tiene la proporción . .	$x/3500 = 25/100$
Multiplicamos por 3500, que es el inverso multiplicativo de 1/3500	$(x/3500)3500=25/100)3500.$
Es decir	$x(3500/3500) = 25(3500)/100$
Entonces	$x = (25)(3500)/100$
Lo cual es	$x = 87500/100$
Finalmente	$x = 875$

Conclusión: Se estima que 875 padres comprueben personalmente las calificaciones de sus hijos.

Ejemplo 3. En la clase de física, Juan tiene que convertir pulgadas en centímetros. Si tres pulgadas equivalen a 7.62 centímetros, ¿cuántos centímetros son 15.5 pulgadas ?

PLANTEAMIENTO:

Las razones son (3 pulgadas) / (7.62 cm)	y (15.5pulgadas) / (x cm)
Omitiendo unidades, la proporción es . .	$3 / 7.62 = 15.5 / x$
Lo que puede ser escrito como . . .	$3 / 7.62 = 15.5 (1/x)$
Multiplicar por x (inverso multiplicativo de 1/x) .	$(3/7.62)\, x = 15.5(1/x)x$
Entonces	$(3/7.62)x = 15.5$
Multiplicamos por 7.62/3 que es el inverso multiplicativo de 3/7.62 . .	$(7.62/3)\,(3/7.62)x = (7.62 / 3)15.5$
Por lo que	$x = (7.62)\,(15.5) / 3$

Entonces . . . . $x = 108.11 / 3$

Finalmente . . . . $x = 39.37$

Conclusión: 15.5 pulgadas equivalen a 39.37 centímetros.

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO.

Una aplicación más sobre ecuaciones de primer grado, podemos encontrarla en expresiones que involucran valores absolutos.

El valor absoluto de un número x es la distancia de ese número (en la recta numérica) al cero. Saben que una distancia puede ser cero o positiva **pero nunca negativa**, por lo que el valor absoluto, que se representa por | x |, es positivo o cero **pero nunca negativo.** Todo esto se representa así:

Si x es negativo entonces	| x | = -x
Si x es cero entonces	| x | = 0
Si x es positivo entonces	| x | = x

Quiero comentar el primer caso que dice: Si x es negativo entonces | x | = -x

Lo que este enunciado significa es que, si un valor x es negativo, su valor absoluto cambia de signo, para expresarse como -x, el cual sería positivo finalmente.

Observen los valores absolutos de números negativos:

| -2/5 | = -(-2/5) = 2/5

| -6 | = -(-6) = 6

| -9 | = - (-9)= 9

Ahora los valores absolutos de números positivos:

| 2/5 | = 2/5

| 6 | = 6

| 7.1 |= 7.1

¿Se fijaron que los números que son iguales pero con signo diferente, tiene el mismo valor absoluto?

Miren esto:	| -2/5 | = 2/5	y	| 2/5 | = 2/5
También esto	| -6 | = 6	y	| 6 | = 6

Observen las siguientes preguntas y respuestas.

1) ¿Cuáles son los números x tales que $|x| = 6$? **Respuesta :** $x = -6$ y $x = 6$

2) ¿Cuáles son los números x tales que $|x| = 9$? **Respuesta :** $x = -9$ y $x = 9$

3) ¿Cuáles son los números x tales que $|x| = 7.2$? **Respuesta :** $x = -7.2$ y $x = 7.2$

4) ¿Cuáles son los números x tales que $|3x| = 12$?

Respuesta : $3x = -12$ y $3x = 12$

es decir, $x = -12/3$ y $x = 12/3$

entonces $x = -4$ y $x = 4$

Finalmente los números -4 y 4 son las soluciones buscadas.

¿Creen que haya ecuaciones que tengan valores absolutos ?

Sí las hay. Miren cómo se resuelven.

Ejemplo 1. Resolver $|x| - 4 = 6$

Solución.

Sumamos 4, que es inverso aditivo de 4 . $|x| - 4 + 4 = 6 + 4$

Entonces . . . . . . $|x| = 10$

Entonces las soluciones son . . . $x = -10$ y $x = 10$

Ejemplo 2. Resolver $|x| + 8 = 10$

Solución:

Sumamos –8, que es inverso aditivo de 8 . $|x| + 8 - 8 = 10 - 8$

Es decir . . . . . . $|x| = 2$

Entonces las soluciones son . . . $x = 2$ y $x = -2$

Ejemplo 3. Resolver $|x| = -2$

Solución: **Nunca puede ocurrir que el valor absoluto de un número sea negativo,** como en este caso, que es -2. Entonces esta ecuación no tiene solución.

Si les cuesta entender por qué, recuerden que el valor absoluto de un número representa la distancia de cero a ese número, pero **no hay distancias negativas**.

Ejemplo 4. Resolver: $3|x| - 8 = 10$.

Solución:

Sumamos 8, que es inverso aditivo de 8 . . .	$3|x| - 8 + 8 = 10 + 8$
Entonces	$3|x| = 18$
Multiplicamos por 1/3, pues es el inverso multiplicativo de 3	$(1/3)\, 3|x| = (1/3)\, 18$
Entonces	$|x| = 18/3$
Así que tenemos	$|x| = 6$
Finalmente	$x = -6$ y $x = 6$

Ejemplo 5. Resolver $6 + |x| - 9 = 5$

Solución:

Sumamos las constantes y obtenemos	$|x| -3 = 5$
Sumamos 3, que es el inverso aditivo de –3 . . .	$|x| -3 + 3 = 5 + 3$
Queda	$|x| = 8$.
Conclusión:	$x = -8$ y $x = 8$

Como ya vieron, una ecuación de primer grado que involucra valores absolutos, no fue muy difícil de tratar.

Ahora les propondré algunos ejercicios que son muy semejantes a los que ya hicimos para que ustedes los resuelvan personalmente.

1.5 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Los partidos de fútbol de América contra Chivas, León contra Atlante y Pumas contra Puebla se jugaron sucesivamente en el estadio Azteca llenándolo absolutamente.
Si se vendieron 327354 boletos, ¿cuál es el cupo del coloso de Santa Úrsula ?

2. Rosi y Lalo son los dos chicos más entrometidos del grupo. Según ellos, la profesora de inglés sostiene un romance con un profesor viudo, que es 18 años mayor que ella. También saben que la suma de las edades de ellos es 92 años. Lo que no han logrado descubrir es la edad de ella y nos piden los ayudemos a averiguarla.

3. Al acabar el extraordinario de química, nos dio un hambre terrible y fuimos a la tortería. Por 11 tortas (del mismo costo) y 12 refrescos (también del mismo precio), pagamos en total $194.5 Cada torta costó $9.50 pero, ¿cuánto costó cada refresco?

4. En la clase de matemáticas ya me enseñaron que para obtener, digamos, el 9%, el 10% o el 30% de 520, se multiplica respectivamente 520(0.09), 520(0.10) y 520(0.35). Como había descuentos del 40% en los discos de Britney Spears, únicamente pagué el 60% del precio de cada disco. Si compré sus 4 discos más recientes y gasté $214.8, ¿cuál era el precio, sin descuento de cada uno, si cada disco costaba lo mismo?

5. Alicia no quería comprar el Atlas de Geografía pues su costo representaba tres octavas partes de su presupuesto en una quincena.
Si el libro le costó $101.25, ¿ cuánto dinero tiene Alicia quincenalmente ?

6. Marisela esta haciendo una encuesta personal. Sabe que 8/10 de las chicas de su salón ya tienen novio, más las 6 chicas que no lo tienen, son el total de las alumnas del salón. ¿Cuántas muchachas hay en ese salón ?

7. El "profe" de "mate" me prometió un punto adicional, si resuelvo este planteamiento: Él tiene dos grupos de primer año y uno de tercer año. Los 2 grupos de primer año tienen el mismo número de alumnos y el grupo de tercer año tiene menos alumnos.

Un grupo de primero tiene el triple de alumnos que el grupo de tercero, menos 15.
El otro grupo de primero tiene el doble de alumnos que el grupo de tercero, más 10.
¿Cuántos alumnos hay en cada uno de los tres grupos ?

8. Para bailar en la fiesta, Lupita, Rosa y Celia llevaron sus discos.
De los que llevó Celia (que fueron el número menor), Rosa llevó el triple, más uno. Lupita llevó el doble de los llevados por Celia, más cuatro. Además, Lupita y Rosa dijeron que llevaron el mismo número de discos. ¿Cuántos discos llevó cada una ?

9. Para los gastos que requirieron en su exposición, 4 chavos juntaron una cantidad de dinero. De esa cantidad pagaron, respectivamente, la mitad para acetatos, la tercera parte para copias y la novena parte para plumones.
Les sobraron $5 pero, ¿cuánto reunieron inicialmente?

10. Julio es mi mejor cuate pero no quiso decirme cuánto dinero llevó cuando visitamos Teotihuacán. Sólo me dijo que gastó la 1/3 parte, la 1/4 parte y la 1/6 parte en pasaje, comida y entrada respectivamente. También me prestó $30 y finalmente le sobraron $15. Planteen una ecuación para saber cuánto llevaba inicialmente.

11. Preguntando al azar a 5 alumnos de un grupo de matemáticas, no supieron responder cuál es la solución de la ecuación $|2x| - 15 = 40$.
¿Ustedes podrán responderlo?

12. Un equipo de amigos afirmaron que la segunda ecuación de las siguientes
a) $3|x| = 18$ b) $3|x| = -18$
sí tiene solución. ¿ Ustedes qué opinan ?

13. ¿Hay soluciones para la ecuación $(-5/3)\,|22x| = -10$?
Si las hay, decir cuáles son y por qué. Pero si no, explicar por qué.

1.6 RESPUESTAS.

Ejercicio 1. $x = 109118$ personas caben en el azteca.

Ejercicio 2. $x = 37$ años es la edad de la maestra y la del profesor es 55 años.

Ejercicio 3. $x = \$7.5$ es el precio de cada refresco.

Ejercicio 4. $x = 89.5$ pesos es el precio, sin descuento, de cada disco.

Ejercicio 5. $x = 270$ pesos es lo tiene a la quincena.

Ejercicio 6. $x = 30$ muchachas hay en el grupo de Marisela.

Ejercicio 7. Hay 60 alumnos en cada grupo de primero y 25 alumnos en el grupo de tercer año.

Ejercicio 8. Celia llevó 3 discos, Rosa y Guadalupe llevaron 10 cada una.

Ejercicio 9. $x = 90$ pesos reunidos.

Ejercicio 10. $x = 180$ pesos llevaba Julio para gastar.

Ejercicio 11. $x = 55/2$ y $x = -55/2$

Ejercicio 12. $3|x| = 18$ tiene las soluciones $x = 6$ y $x = -6$
$3|x| = -18$ no tiene solución.

Ejercicio 13. Las soluciones de $(-5/3)\,|\,22x\,| = -10$ son

$x = 3/11$ y $x = -3/11$.

CAPÍTULO 2: HISTORIA DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

2.1 Historia breve de las ecuaciones de primer grado.
2.2 Método de la falsa posición.
2.3 Anecdotario.
2.4 Algunas ecuaciones históricas de primer grado.

2.1 HISTORIA BREVE DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Ya que hemos estudiado ecuaciones de primer grado, quisiera platicarles algo sobre la historia de este tema pues creo que les resultará agradable y nos ayudará a reconocer su importancia.

El álgebra es una rama fundamental de las matemáticas y su desarrollo empezó muchos siglos antes de nuestra era con las ideas aportadas por personas que vivieron en tiempos y culturas diferentes, que intentaban resolver los problemas prácticos que enfrentaban en su vida cotidiana, así como problemas que agradaban a su intelecto con el único fin de querer aprender de ellos y sentir el gusto de poder saber más.

Entre los problemas que desde hace cuatro mil años fueron abordados, están ciertos tipos de ecuaciones de primer grado. Tenemos información de ello por documentos históricos que prueban que los egipcios y babilonios lograron resolver algunos tipos de ecuaciones, y como se mencionaba anteriormente, estos hechos fueron conocidos pues quedaron registrados en papiros.

Uno de esos documentos fue encontrado por un anticuario escocés llamado Henry Rhind, que al buscar tesoros de la civilización egipcia antigua, encontró dichos códices que se ha calculado, fueron escritos 1650 años antes de Cristo.

También existe el papiro de Moscú, que se cree que tiene más o menos la misma antigüedad que el de Rhind, además hay evidencias que quedaron en monumentos, lápidas, tablillas, etcétera.

Entre los problemas que se mencionan ahí, están ciertas ecuaciones de primer grado de la forma siguiente:

$$x + \mathbf{a}x = \mathbf{b}$$

$$x + \mathbf{a}x + \mathbf{b}x = 0$$

en donde **a** y **b** eran valores conocidos y x era la incógnita que ellos denominaban "aha", expresión que significaba "montón".

El nombre con el que se conoce el método que solucionaba este tipo de ecuaciones es "el método de la falsa posición" que consistía en dar un valor concreto a la incógnita y ver si con él, se cumplía la igualdad. Pero si no, probaban con otro valor y así sucesivamente hasta encontrar el que sí satisfacía la ecuación.

Hasta ese momento, podían decir que la ecuación estaba resuelta. Como ven, era un método de ensayo y error pues lo hacían todas las veces necesarias hasta hallar el número que cumpliera la ecuación.

En la antigüedad era complicado encontrar la solución de una ecuación pues no había los medios ni los símbolos actuales para facilitarnos el trabajo y que fueran los más adecuados.

Los babilonios hicieron aportaciones aproximadamente en el mismo periodo pero trabajaron en sistemas de ecuaciones lineales y en ecuaciones de segundo grado.

El desarrollo siguiente se dio en la Grecia antigua, pero ellos estuvieron más interesados en temas geométricos.

Fue en el comienzo de la era cristiana, que en China, los matemáticos de aquel país obtuvieron ciertos avances en varios métodos para resolver ecuaciones de primer grado y segundo grado pero también métodos para resolver lo que hoy conocemos como sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Se calcula que los primeros documentos matemáticos que existieron provienen del siglo III después de Cristo y se llaman Sulvasutras. Su contenido estaba relacionado con la construcción de templos. Entre los problemas que sobresalen, está el de hallar el lado de un rectángulo, conociendo el otro lado y sabiendo que su área era igual al área de un cuadrado dado. Este problema solía resolverse por la regla de la falsa posición.
En el siglo VII el matemático indio Brahmagupta proponía cómo resolver ecuaciones lineales y representaba la incógnita con la abreviatura "ya". Se sabe que representaba las operaciones con la primera sílaba de la palabra que representaba el valor a encontrar. También introdujo las reglas fundamentales para el manejo de los números positivos y negativos.

Otro pueblo que hizo aportaciones a las matemáticas, y en especial a las ecuaciones de primer grado fue el árabe, que se extendía por Europa, África y Asia llegando su influencia hasta lo que hoy es la India, aproximadamente desde el siglo octavo de nuestra era.

En el siglo IX de nuestra era, el matemático Al-jwarizmi escribió el primer texto dedicado enteramente al álgebra que incluía teoría de ecuaciones y ejemplos.

Es a Abu Kamil a quien se le atribuye una obra que trata sobre la solución de ecuaciones de diversos tipos por los métodos de la falsa posición.
El camino que el álgebra recorrió no se limitó al estudio de ecuaciones de primer grado. También fueron analizadas otras ecuaciones de grado mayor logrando encontrar soluciones para algunas pero no para otras.

Como ven, el tema proviene de tiempos inmemorables y lo que resolvemos, no proviene de hace 100 o 200 años sino que tiene antigüedad de miles de años.

El material que ahora reciben ya está ordenado y clasificado. Sin embargo, su uso no ha pasado de moda y aunque muchas cosas son anticuadas o han dejado de usarse, estos conceptos siguen vigentes y han ayudado al desarrollo del pensamiento científico.

Ahora les propongo que vean detenidamente qué era el método de la falsa posición, el que ya les mencionado y comparemos lo que se hacía ingeniosamente antes con lo que hacemos ahora.

2.2 MÉTODO DE LA FALSA POSICIÓN.

En el papiro de Rhind, aparece una ecuación muy peculiar que dice:

"Un montón y un séptimo del mismo montón es igual a 24"

Es lógico pensar que para quien expresó esto, un montón no es la misma cantidad que el montón que cualquiera de nosotros pudiera imaginar. Pero sin caer en diferencias con el egipcio de la antigüedad que escribió esto, les propongo que mejor veamos cómo resolvían este problema.

Si se representa el montón con . . . $\mathbf{x}$

Entonces la séptima parte del mismo montón es $(1/7)\mathbf{x}$

El problema podría simbolizarse así . . $\mathbf{x} + (1/7)\mathbf{x} = 24$

El método se basaba en dar un valor tentativo a **x**, el que se probaba y si satisfacía la ecuación, el problema quedaba resuelto.

Si no, le asignaban otro valor a **x** para ver en ese segundo intento si ahora sí cumplía la ecuación. Si este segundo valor la satisfacía, entonces el trabajo había concluido pero si no, otra vez se le daba otro valor a **x**.

Esto se hacía tantas veces como fuera necesario hasta encontrar la solución correcta.

Pero mejor hagámoslo directamente dando, tentativamente, a montón el valor de 14 para ver si es el valor que da solución a la ecuación.

Entonces si . . . . $\mathbf{x} = 14$

Debería ocurrir con ese valor que . . . . $\mathbf{x} + (1/7)\mathbf{x} = 24$

Considerémoslo así. Entonces . . . . . $(14) + (1/7)(14)$

$= 14 + 2 = 24$

Hemos llegado a que . . . . $16 = 24$

Pero $16 = 24$ es una contradicción.

Como al final no tuvimos una igualdad entonces decimos que 14 no satisface la ecuación o que 14 no es la solución de ella.

Probemos ahora dando a montón un valor mayor, digamos, 28 y a ver qué pasa.

Ahora debería ocurrir que con $\mathbf{x} = 28$, . . . $\mathbf{x} + (1/7)\mathbf{x} = 24$

Así que . . . . $(28) + (1/7)(28)$

$=28 + 4 = 32$

Ahora llegamos a que . . . . . $32=24$

Pero 32 = 24 es de nuevo otra contradicción.

Como nuevamente no obtuvimos una igualdad con el valor propuesto, decimos un vez más, que 28 no satisface la ecuación o que no es la solución de ella.

Cuando probamos el valor $\mathbf{x} = 14$, vimos que la ecuación $\mathbf{x} + (1/7)\mathbf{x}$, adquiría el valor de 16 pero no de 24, como esperabamos.

Después probamos con el valor $\mathbf{x} = 28$ y vimos que $\mathbf{x} + (1/7)\mathbf{x}$ tenía el valor de 32, pero no el valor de 24 como se deseaba.

Lo lógico era entonces probar con un valor intermedio a 14 y 28 para ver si podía encontrarse la solución. Por ejemplo, que $\mathbf{x} = 21$ para ver que ocurría.

Entonces si . . . . $\mathbf{x} = 21$

Con ese valor, debería ocurrir que . . . $\mathbf{x} + (1/7)\mathbf{x} = 24$

Ahora tenemos que . . . . . $(21) + (1/7)(21)$

$=21 + 3 = 24$

Ahora sí llegamos a que . . . . . $24=24$

Entonces $\mathbf{x} = 21$ sí es, al fin, la solución buscada, con lo que el problema quedaba resuelto.

Aunque encontrar la solución del problema era lo fundamental, las ideas para solucionarlo también eran importantes pues dejaban experiencias que eran aprendidas y aprovechadas para casos similares.

Ahora les propongo lean las siguientes anécdotas. Ojalá les parezcan bonitas.

2.3 ANECDOTARIO.

Dejemos el estudio y disfrutemos leyendo algunas anécdotas relacionadas con el álgebra y las ecuaciones de primer grado.

Significado de Al-jabr wa´l y Al muqabala

En el antiguo Uzbekistán de los siglos VIII y IX de nuestra era, existió un matemático cuyo nombre completo era *Abu Jafar Mohamet Ibm Mose Al-jwarizmi*, a quien, debido a la dificultad de su nombre, se le llamó simplemente Al-Jwarizmi. Él hizo uno de los primeros escritos formales que presentaba la teoría de ecuaciones de manera que no se había hecho antes. El libro tenía el siguiente "breve título":

" ***Kitab al muhtasar fi hisab al-jabr wa´l muqabala*** ".

Observen la palabra en árabe antiguo subrayada referente al nombre de su obra:

al jabr wa´l

que con los cambios que sufren las lenguas y las palabras con el transcurso del tiempo, se transformó al español contemporáneo en la palabra:

álgebra

También observen el nombre abreviado en árabe del escritor del que estamos hablando:

Al-jwarizmi

Dicho nombre dio origen a la palabra en el español de nuestros días:

Algoritmo

que significa "procedimiento que debe seguirse para llegar a la solución de un problema"

Significado de la palabra álgebra.

Fue en la España medieval del siglo XII cuando el monje inglés Robert de Chester, que pertenecía a la famosa escuela de traductores de Toledo, tuvo a bien hacer la traducción del árabe al latín (pues esta última lengua era usada en la edad media para escribir el conocimiento científico) la obra sobre álgebra de Al jwarizmi.

Él dio a la palabra ***Al-jabr wa'l*** el significado de

RESTAURACIÓN,

que hablando de ecuaciones, era "pasar un término de un miembro de la igualdad al otro".

La frase " ***Al muqabala*** " la entendió como

REDUCCIÓN o SIMPLIFICACIÓN,

que también hablando de ecuaciones era "eliminación de términos iguales en ambos miembros de la igualdad".

Veamos ahora un ejemplo de cada uno de estos procesos para que no quede duda:

Con el procedimiento "***Al-jabr wa 'l***"
(pasar un término de un miembro de la igualdad al otro), la ecuación $4x^2 + 6x - 2 = 9x + 5$
se transforma en $4x^2 + 6x - 2 - 9x = 5$
pues el término 9x pasó del miembro derecho al izquierdo.

Con el procedimiento "***Al muqabala***"
(eliminación de términos iguales que están en ambos miembros de la igualdad),
la ecuación $9x^2 + 3x = 3x + 4$,
se transforma en $9x^2 = 4$
pues el término 3x se eliminó de ambos miembros.

¿ Qué pretendía Al-jwarizmi con su obra ?

La obra de este estudioso estaba dedicada a la matemática y astronomía de su tiempo pero también a lo que leerán en seguida.

Su obra inicia así :

"Este interés por la ciencia con el que Alá ha dotado al califa Al Mamun, caudillo de los creyentes, me ha animado a componer esta obra breve sobre el cálculo por medio de "**Al-jabr wa'l** " y de "**Al-muqabala** ", en la que se contiene todo lo que es más fácil y útil en aritmética, por ejemplo, todo aquello para calcular herencias, hacer repartos justos y sin equívocos, resolver pleitos, realizar comercio y transacciones con terceros; así mismo todo aquello en donde esté implicada la agrimensura, la excavación de pozos y canales, la geometría y varios asuntos mas".

¿Qué les parece? Al-jwarizmi fue el primero en dejar por escrito el conocimiento algebraico que se conocía hasta entonces con el fin de poderlo ocupar en solucionar problemas prácticos relacionados con la vida cotidiana, tales como reparticiones de herencias, mediciones, comercio, trazos etcétera.
Nunca imaginó el alcance de la ciencia que él estudiaba y desarrollaba ni los problemas que los estudiantes de secundaria y bachillerato tendrían en su aprendizaje.

Epitafio algebraico de Diofanto

Cuenta la historia que hace ya muchísimos años, un caminante distraído, sin darse cuenta, se encontró ante una tumba y rápidamente leyó la inscripción de la lápida que el tiempo decidió conservar para que llegara hasta nosotros. El epitafio decía exactamente esto:

"Caminante, tú que aciertas a pasar por este lugar, detén tu marcha: estás ante la tumba de Diofanto. Será él quien te diga, si lo sabes leer, el número de años que tuvo su vida. Su infancia ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de desposarse y cinco años después, nació un hermoso niño que pereció ya adulto de una muerte desgraciada cuando hubo alcanzado la mitad del total de años que vivió su padre.
Este le sobrevivió, llorándole, durante cuatro años. De todo esto, transeúnte, no te será difícil deducir su edad".

La inscripción describía en forma hermosa la vida de Diofanto, matemático griego del siglo III de nuestra era, quien dedicó su vida al estudio de las matemáticas y en especial a las ecuaciones de primer grado, cuyas soluciones son números enteros, llamadas en honor a él "ecuaciones diofantinas".
Se cree que el caminante resolvió el problema "transformándolo al lenguaje algebraico" y ¡ casi se le sale el corazón cuando descubrió que esta inscripción podía representarse y resolverse algebraicamente !
Pero veamos cómo representar esto como una ecuación:

Los años que vivió Diofanto . x
Su infancia fue un sexto de su vida $(1/6)x$
Su adolescencia duró el siguiente
doceavo de su vida . . . $(1/12)x$
La siguiente séptima parte
vivió soltero . . . . $(1/7)x$
Cinco años estuvo casado sin hijos.
La siguiente mitad de su vida vivió
en compañía de su único hijo pero
éste murió dejando a su padre
desolado . . . . $(1/2)x$
Vivió cuatro años más y luego murió.

Sumar estos años es igual a la edad de
Diofanto: $1/6x + 1/12x + 1/7x + 5 + 1/2x + 4 = x$
Para quitar los denominadores, podemos
multiplicar todo por un múltiplo común a
6, 12, 7 y 2, que puede ser 84.
Tendremos entonces
$84(1/6x + 1/12x + 1/7x + 5 + 1/2x + 4) = 84x$
es decir, $14x+7x+12x+420+42x+336 = 84x$
Simplificando . $75x + 756 = 84x$
Así que . . $84x - 75x = 756$
Entonces . . $9x = 756$
Por lo que . . $x = 756/9$
Despejando x . $x = 84$
Así que Diofanto vivió 84 años.
Seguramente el tiempo no quiso borrar el
epitafio para recordar por siempre a este
hombre tan especial.

La palabra álgebra y otros idiomas.

Después de la traducción de la obra de Al-jwarizmi, sus textos se extendieron por la Europa del medievo.

Al no quedar contentos con la traducción de la expresión "**Al-jabr wa'l**", simplemente la asemejaron al latín.

Dependiendo del país, se escribía algeber, algebr, gebr etcétera.

Particularmente en España, la palabra algebrista, además de significar "persona que estudia el álgebra", significaba "persona que cura huesos dislocados".

Todo esto porque el vocablo original árabe significaba restitución, restauración o recolocación.

Que lo perdonen los faraones pues Henry Rhind "no sabía lo que hacía"

En 1858 durante una expedición a las ruinas arqueológicas en Egipto, un anticuario llamado Henry Rhind, "rescatando objetos viejos y sin valor", tuvo en sus manos un rollo de papiro con descripciones matemáticas sobre ecuaciones de primer grado estudiadas por egipcios en tiempos de los faraones.

Ya que eran "papeles viejos sin valor ni interés", se los llevó con él a Europa.

Estando allá, los arqueólogos determinaron la antigüedad del hallazgo, estableciendo que el papiro había sido hecho 1650 años antes de Cristo, pero los conocimientos que habían quedado ahí referidos, se conocían en Egipto 200 años atrás. Es decir, las ecuaciones lineales mencionadas, se conocían 1850 años antes de nuestra era. Así que los conceptos sobre ecuaciones tienen una antigüedad de más de 3500 años. ¿Pueden imaginar qué tipo de símbolos eran usados entonces para representar los problemas? Pues tenían que utilizar dibujos o jeroglíficos ya que no contaban con la notación actual, lo que representaba un obstáculo serio para expresar lo deseado. La forma en que resolvían el tipo de ecuaciones lineales mencionadas era por el método de la falsa posición, de la que ya hemos hablado.

Seguramente a lo largo de su vida ustedes conocerán mas anécdotas relacionadas con las matemáticas las cuales podrían agradarles. Ahora prosigamos.

2.4 ALGUNAS ECUACIONES HISTÓRICAS DE PRIMER GRADO.

Aquí les muestro algunas ecuaciones de primer grado que fueron planteadas hace siglos para que puedan ver la forma en que las solucionamos actualmente.

1) En el problemario de Adam Riese (1492 – 1559) aparece este problema:
Un hijo le pregunta a su padre cuántos años tiene. El padre le responde: Cuando tengas mis años, más la mitad de ellos, más la cuarta parte también de ellos y 2 años más, tendrás 100 años. ¿Cuántos años tiene el padre en ese momento ?

PLANTEAMIENTO:

Representar la edad actual del padre con . .	x
Entonces la mitad de años se representa con . .	$x/2$
La cuarta parte de los años se representa con .	$x/4$
La suma de las 3 cantidades anteriores más 2 es 100	$x + x/2 + x/4 + 2 = 100$

Como ocho es un múltiplo de dos y cuatro, multiplicamos por él en ambos miembros

para eliminar denominadores	$8(x + x/2 + x/4 + 2) = 8(100)$
Distribuyendo al 8	$8x+8(x/2)+8(x/4)+8(2) = 800$
Entonces	$8x + 4x + 2x + 16 = 800$
Simplificando	$14x + 16 = 800$
Por lo que	$14x = 784$
Despejando x	$x = 784/14$
Finalmente	$x = 56$

Conclusión: el padre tiene 56 años de edad en ese momento.

2) En el papiro de Rhind (Egipto, 1650 años antes de Cristo), aparece este problema:
Al quitarle a un número la séptima parte de él mismo, se obtiene 19.
¿Cuál es ese número?

PLANTEAMIENTO:

Representar al número con	x
La séptima parte de ese número es	$x/7$
Al número se le resta la séptima parte de él . .	$x - (x/7)$

Lo anterior es igual a 19 . . . . . $x - (x/7) = 19$

Multipliquemos por 7 ambos miembros para eliminar el denominador . . . . . $7(x - (x/7)) = 7(19)$

Distribuyendo . . . . . . $7x - 7(x/7) = 133$

Es decir . . . . $7x- x = 133$

Así que . . . . $6x = 133$

Entonces . . . . $x = 133/6$

3) En un acertijo aritmético de la antología griega, se calcula el número de alumnos de la escuela Pitagórica el cual dice: la mitad de ellos hacen matemáticas, una cuarta parte hace ciencia, una séptima parte permanecen en silencio. Además, hay 3 mujeres. ¿Cuántos había en total?

PLANTEAMIENTO:

Representemos el total de alumnos por . . . x

La mitad que hace matemáticas quedaría . . $x/2$

La cuarta parte que hace ciencia la representamos . $x/4$

Un séptimo están callados . . . . . $x/7$

La suma de ellos y las 3 mujeres es el total.

Entonces . . . . . . $x/2+ x/4 + x/7 + 3 = x$

Para eliminar los denominadores en x/2, x/4 y x/7, multipliquemos por un múltiplo de 2, 4 y 7 a la vez. Ese múltiplo puede ser 28.

Entonces . . . . . . $28(x/2 + x/4 + x/7 + 3) = 28x$

Distribuimos al 28 . . . . $28(x/2) +28(x/4) +28(x/7) +28(3) =28x$

Haciendo algunas "cuentecitas" . $14x + 7x + 4x +84 = 28x$

Sumando términos semejantes . . $25x + 84 = 28x$

Entonces . . . . . . $3x = 84$

Despejamos . . . . . $x = 84/3$

Por lo que . . . . . . $x = 28$

Conclusión: en la escuela pitagórica había 28 alumnos en total (25 hombres y 3 mujeres).

4) EL matemático Leonhard Euler (1707 – 1782) escribió un instructivo completo de álgebra donde aparece el siguiente problema: un padre dejó testamentado que sus tres hijos se repartieran una herencia de 1600 monedas. Según el testamento, el hijo mayor debía recibir 200 monedas más que el segundo. También, que el segundo reciba 100 monedas más que el menor. ¿Cuánto le toca a cada uno?

PLANTEAMIENTO:

Representar el número de monedas que le toca al menor con	x
EL segundo debe recibir 100 más que el menor .	$x + 100$
El mayor debe recibir 200 más que el segundo .	$(x + 100) + 200$
La suma de las tres cantidades es 1600 monedas	$x+(x+100)+(x+100)+200=1600$
Sumando se tiene	$3x + 400 = 1600$
Así que	$3x = 1200$
Despejando x	$x = 1200/3$
Entonces	$x = 400$

Conclusión: al menor le tocan 400 monedas, al segundo le tocan 400 +100 =500 monedas y al mayor le toca 500 + 200 = 700 monedas.

5) Finalmente retomemos el problema del montón del papiro de Rhind.

No crean que ya olvidé que este problema ya se realizó. Ahora lo quiero mostrar como lo hacemos actualmente para que comparen con la forma en que lo hacían antes (por tanteo) cuando usaban la regla de la falsa posición.

Un montón más la séptima parte de él es 24. ¿ De cuánto es el montón ?

PLANTEAMIENTO:

Representamos al montón por	x
Entonces la séptima parte del montón es . . .	$x/7$
La suma de las 2 cantidades anteriores es 24 . .	$x + (x/7) =24$
Multiplicamos por 7 para eliminar el denominador que aparece en x/7	$7(x+ x/7) = 7(24)$

Distribuimos al 7 . . . . $7x + 7(x/7) = 168$
Así que . . . . $7x + x = 168$
Lo que también es . . . . . . $8x = 168$
Despejamos x . . . . $x = 168/8$
Con lo que . . . . $x = 21$
Conclusión: El valor del montón del que hablaban era 21.

¿Qué les parecieron estos problemas que ejemplifican lo que se planteaba en los tiempos anteriores ?

No se les ocurra pensar que antes no los podían solucionar y que se tuvo que esperar hasta nuestros días para que "se lograra" pues sí pudieron hacerlo.

La intención era mostrar su solución con todas las ideas que ustedes ya conocen pero quizás con otra manera de hacerlo y también reconocer que estos problemas han surgido desde hace muchísimos años y que siguen apareciendo.

CAPÍTULO 3 : ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

3.1 Introducción.

3.2 Transformación de frases en lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico de problemas que se representan con ecuaciones de segundo grado.

3.3 Qué es factorizar.

3.4 Número de soluciones de una ecuación de segundo grado

3.5 Solución de una ecuación de segundo grado representada como producto de dos factores de primer grado.

3.6 Qué es la fórmula general para ecuaciones de segundo grado y solución de una ecuación de este tipo con dicha fórmula.

3.7 Análisis de las soluciones de una ecuación de segundo grado por medio del discriminante.

3.8 Problemas propuestos.

3.9 Respuestas.

3.1 INTRODUCCIÓN.

Como ya se ha visto en los capítulos anteriores, hay situaciones que se pueden representar con ecuaciones de primer grado. Pero estas ecuaciones no son las únicas que existen. También hay problemas que se pueden representar con ecuaciones de grado mayor.

Por supuesto que ustedes se preguntarán ahora, ¿ qué es el grado de una ecuación con una incógnita ? Vamos a explicar esto con detalle.

Si una ecuación con una incógnita tiene como exponente máximo el número n (cuando n toma algún valor entre los números naturales, es decir, 1,2,3,...etcétera) y el coeficiente de la incógnita no es cero, entonces se dice que la ecuación es de grado n.

En especial, si en una ecuación con una incógnita, el exponente máximo es el número 2 y el coeficiente de la incógnita con exponente 2 no es cero, se dice que la ecuación es de grado 2 o cuadrática.

Ya que estamos hablando de la forma en que se les llama a las ecuaciones, creo que les interesará saber que a las ecuaciones de primer grado también se le puede llamar **ecuaciones lineales**, a las de tercer grado se les dice **ecuaciones cúbicas** y a las de cuarto grado, **ecuaciones cuárticas.**

En este trabajo, cada vez que nos refiramos a una ecuación de cualquier grado, entenderemos que tiene únicamente una incógnita.

Veamos los ejemplos siguientes para aclarar estos conceptos.
La ecuación $-2x + 8 = 9$ es de primer grado.
La ecuación $345x = -18 + 8x^2$ es de segundo grado.
La ecuación $7x^2 - 9 = -3x$ también es de segundo grado.
La ecuación $-8x + 4x^3 = 9x^2 - 7$ es de tercer grado.
La ecuación $-8x + 4x^3 = -7 + 4x^3$ **no** es de tercer grado.

En cada una de las ecuaciones anteriores, el término de grado mayor puede estar en uno o en ambos miembros, por eso debemos ver ambos para no equivocarnos.
Las ecuaciones de primer grado se resuelven de una sola manera; sin embargo, para resolver ecuaciones de segundo grado, existen varios métodos. A lo largo de este capítulo, trabajaremos con algunos de ellos.

En las siguientes ecuaciones de segundo grado

$x^2 + 5x - 2 = 0$

$6x^2 - 3/2 = 13x$

$-4x + 7 = -8x^2$

$2x^2 + 6 = 10x^2 + (-2/7)x$

$-19 = (6/5)x^2$

Observen que ocurre lo siguiente:

1) La literal que se usa para representar la incógnita es **x** pero podría ser otra. Ustedes mismos pueden escoger la literal o el símbolo que deseen pues eso no altera nada. Aquí usamos la literal **x** porque es tradicional hacerlo.

2) El coeficiente que está multiplicando a la incógnita **x** con exponente 2 no es cero. Además, no es necesario que aparezca el término de grado uno o el término independiente.

En los ejemplos:

$5x^2 - (6/7)x = 0$ el coeficiente de x^2 es 5

$(-3/5)x^2 - 3x = 9$ el coeficiente de x^2 es -3/5

Pero lo que nunca podrá ocurrir es que el coeficiente de x^2 sea cero, esto es, que tengamos $0x^2$ pues $0x^2 = 0$

Siendo así, no tendríamos el término que forma precisamente la ecuación de segundo grado.

Es posible que en la secundaria les hayan dicho que la forma más usual para escribir una ecuación de segundo grado es la siguiente:

$$\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$$

Esta forma de expresar una ecuación cuadrática se llama **la forma general de las ecuaciones de segundo grado**. Lo anterior significa que:

a) El término de segundo grado (llamado **término cuadrático**) $\mathbf{a}x^2$ no puede faltar pues si no, no tendríamos una ecuación cuadrática. Además, el coeficiente **a** no puede ser cero por la razón explicada unos renglones atrás.

b) En el término de primer grado **b**x (llamado **término lineal**), el coeficiente **b** puede ser cualquier número real incluyendo al cero.
c) La constante **c** (llamado **término independiente**), también puede ser cualquier número real incluyendo al cero.
d) El miembro derecho de la ecuación es cero.

Sin embargo, si una ecuación de segundo grado no está escrita en la forma general, siempre es posible rescribirla de esa manera.
Por ejemplo:

$-9x^2 + 5x = 6$	puede escribirse como	$-9x^2 + 5x - 6 = 0$ con $a = -9$, $b = 5$ y $c = 6$.
$6x^2 = 2x - 6$	puede escribirse como	$6x^2 - 2x + 6 = 0$ con $a = 6$, $b = -2$ y $c = 6$.
$8 = 7x^2$	puede escribirse como	$-7x^2 + 8 = 0$ con $a = -7$, $b = 0$ y $c = 8$.
$-4x^2 = 7x$	puede escribirse como	$-4x^2 - 7x = 0$ con $a = -4$, $b = -7$ y $c = 0$.

Es importante expresar una ecuación de segundo grado en la forma general, para asegurarnos que estamos hablando de lo mismo pues, cuando apliquemos la fórmula general para resolver este tipo de ecuaciones, se trabajará directamente con los coeficientes a, b, y c. Pues por ejemplo, $3x^2+5x = 0$ es igual que $3x^2 = -5x$ pero $3x^2+5x = 0$ no es igual $3x^2 = 5x$.

¿Qué les parecería responder la siguiente pregunta para ver si no se "han hecho bolas" ?

¿ De las opciones siguientes, cuál es la forma general de las ecuaciones de segundo grado?

a) La forma general debe ser $ax^2+bx+c = 0$
con **a** = 0 , y **b** y **c** coeficientes cualesquiera.

b) La forma general debe ser $ax^2+bx+c = 0$
con **a** diferente de 0 pero **b** y **c** son números reales cualesquiera.
c) La forma general debe ser $ax^2+bx+c = 0$
con **a** = 0 y **b** = 0 y **c** un número real cualquiera.

Si no se acuerdan, revisen rápidamente el material anterior para saber qué respuesta deben escoger y únicamente que de plano no lo sepan, busquen la respuesta A en la página 96.

3.2 TRANSFORMACIÓN DE FRASES EN LENGUAJE COTIDIANO AL LENGUAJE ALGEBRAICO DE PROBLEMAS QUE SE REPRESENTAN CON ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

¿No creen que el primer paso de un problema, después de leer el enunciado y comprender lo pedido (aunque no se sepa cómo solucionarlo), es expresar en lenguaje algebraico lo que está en palabras ?

Representar en forma algebraica (es decir, en forma matemática) lo que está dicho verbalmente no es siempre directo.

¿No les gustaría ver ejemplos para aprender cómo hacerlo y luego intentarlo nosotros?
Pues vamos a entrarle sin tantos rodeos con algunos ejemplos que creo les servirán.

Ejemplo 1. En un terreno cuadrado cercano a la prepa, los estudiantes solían hacer de las suyas (ustedes entienden, ¿ o no?). Por lo que el dueño decidió cercarlo con malla metálica. El terreno tiene 2025 metros cuadrados de área.

¿Cuántos metros de malla ocupó ?

PLANTEAMIENTO:

Como el lote es cuadrado, representemos
el largo del terreno con x

Sabemos que el área de un cuadrado se
obtiene elevando el lado al cuadrado . . . área = x^2

Un dato que nos dan es que el área del terreno es 2025 metros cuadrados

Entonces . . . . $x^2 = 2025$

Lo que también puede escribirse como . . . $x^2 - 2025 = 0$

Es así como nuestro problema queda expresado algebraicamente.

Ejemplo 2. El triple del cuadrado de un número es 27/16 ¿Cómo planteamos algebraicamente el enunciado para que nos permita conocer ese número?

PLANTEAMIENTO:

Representar al número con	x
El cuadrado de ese número se representa con .	x^2
El triple del cuadrado de ese número se expresa con	$3x^2$
El triple del cuadrado de ese número es 27/16 .	$3x^2 = 27/16$
También puede ser puesto como . . .	$3x^2 - 27/16 = 0$

Así nuestro problema ya está planteado.

Ejemplo 3. En un libro sobre tesoros y piratas, aparecía la fórmula siguiente para abrir un cofre.

"De estas llaves numeradas del 1 al 15, sólo una de ellas, la del número adecuado, abrirá el cofre del tesoro. Para saber cuál es, hay que resolver lo siguiente:

Al número de esa llave, hay que multiplicarlo por sí mismo, y a eso multiplicarlo por tres.

A lo anterior, hay que sumarle 6 veces el número y después restar 45.

Todo eso debe igualarse a cero."

¿Cuál será el número de la llave ?

PLANTEAMIENTO:

Representar al número con	x
El cuadrado de dicho número se representa con .	x^2
El triple del cuadrado de ese número al cuadrado es	$3x^2$
Seis veces el número se simboliza con . . .	$6x$
El triple del número que se multiplica por sí mismo, más 6 veces el número, menos 45 . .	$3x^2 + 6x - 45$
Lo anterior es igualado a cero	$3x^2 + 6x - 45 = 0$

Con esto, nuestro enunciado queda representado aunque otro asunto será encontrar sus soluciones.

Ejemplo 4. En una carrera estudiantil, el camino pasaba por los dos catetos de un triángulo rectángulo de longitudes 200 y 300 metros respectivamente.

Un competidor lo sabía e hizo trampa.

Aprovechando que nadie lo veía, corrió por la hipotenusa de dicho triángulo.

Obtener la distancia que recorrió al hacer trampa.

PLANTEAMIENTO:

Representamos a la hipotenusa del triángulo que es el lado mayor con	x
También al cateto menor de 200 metros con . .	y
Y al cateto mayor de 300 metros con	z
El teorema de Pitágoras dice que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos.	
Lo que se represента así	$x^2 = y^2 + z^2$
Pero también puede escribirse como . . .	$x^2 - y^2 - z^2 = 0$
Como $y = 200$ y $z = 300$	$x^2 - (200)^2 - (300)^2 = 0$
Finalmente	$x^2 - 130000 = 0$

Nuevamente hemos conseguido expresar algebraicamente nuestro enunciado y como ven, nos ha costado sólo un poco más de esfuerzo.

Si se obtiene el valor de x, podremos saber el valor de la hipotenusa, que es el lado por el que pasó el corredor que hizo trampa.

Ejemplo 5. Representemos ahora el enunciado: ¿cuál es el número que cumple que al elevarlo al cuadrado y multiplicarlo por tres, menos 15 unidades es igual a 132 ?

PLANTEAMIENTO:

Representar ese número con	x
Y al número elevado al cuadrado con . . .	x^2
El triple del número elevado al cuadrado es . .	$3x^2$
A lo anterior quitarle 15 y todo será igual a 132 .	$3x^2 - 15 = 132$

Lo que también puede expresarse como . . $3x^2 - 15 - 132 = 0$

Finalmente como . . . . . . $3x^2 - 147 = 0$

Con lo que otra vez hemos logrado nuestro objetivo. Cuando se resuelva esta ecuación, se sabrá el valor del número x.

Ejemplo 6. El ancho de un patio rectangular es 3 metros menos que el largo. También se sabe que el área de ese patio son 70 metros cuadrados.

¿Pero cuál es el largo ?

PLANTEAMIENTO:

Se sabe que el área de un rectángulo se obtiene con (largo)(ancho)

Representemos el largo del patio con . . . largo = x

El ancho es igual al largo menos tres . . . ancho = x-3

Entonces largo por ancho (es decir el área)

es 70 metros cuadrados . . . . . $x(x - 3) =70$

Desarrollando el miembro izquierdo, se obtiene . $x^2 - 3x = 70$

También puede escribirse como . . . . $x^2 - 3x - 70 = 0$

Esta última expresión simboliza nuestro problema.

Al resolver esta ecuación, se obtendrá el valor del largo.

Además, si al valor del largo, le restan tres unidades, se obtendrá el valor del ancho.

Ejemplo 7. La pista de un salón de baile es circular con área igual a 81.7 metros cuadrados. Se necesita saber la longitud del radio. Veamos cómo podemos plantearlo.

PLANTEAMIENTO:

Si r representa el radio de un círculo, el área se representa con $\pi \cdot r^2$

Como el valor del área nos lo dan, se iguala . . . $\pi \cdot r^2 = 81.7$

También podemos representarlo así . . . . $\pi \cdot r^2 - (81.7) = 0$

Ya expresamos nuestro problema como nos pedían.

Ejemplo 8. Si tuvieran la expresión: "tres veces un número, más el cuadrado de él, más dos unidades es todo igual a cero". ¿Cómo se representaría esto?

PLANTEAMIENTO:

Representemos al número con x

Tres veces el número se representa con . . . $3x$

Representar el cuadrado de ese número con . . x^2

El cuadrado de x, más tres x, más 2 . . . . $x^2 + 3x + 2$

Todo lo anterior igual a cero es . . . . $x^2 + 3x + 2 = 0$

Nuestro enunciado queda representado así.

Ejemplo 9. En un grupo de más de 20 alumnos, la sesentava parte del cuadrado del número total de ellos entregaron sus prácticas correctas.

Además, otra sexta parte del número total de ellos las hicieron incorrectas.

Finalmente, diez de ellos no las entregaron.

Si sumamos estas tres cantidades, se obtiene el número total de alumnos .

¿Cuántos alumnos son?

PLANTEAMIENTO:

El total de alumnos puede representarse con . x

Una sesentava parte del cuadrado del total de ellos se simboliza con . . . . . . $(1/60)x^2$

La sexta parte del número de alumnos se representa con $(1/6)x$

Sumando los dos pasos anteriores, más diez es el total de alumnos . . . . . $(1/60)x^2 + (1/6)x + 10 = x$

Lo cual puede ser escrito como . . . . $(1/60)x^2 + (1/6)x - x + 10 = 0$

Pero también así . . . . . . $(1/60)x^2 + (1/6)x - (6/6)x + 10 = 0$

Simplificando queda . . . . . $(1/60)x^2 - (5/6)x + 10 = 0$

El problema ya ha sido expresado con una ecuación de segundo grado.

Cuando lo resolvamos, sabremos el número de alumnos.

Ejemplo 10. Hay dos números tales que multiplicados son 242. El segundo es la mitad del primero. ¿Cuáles son esos números ?

PLANTEAMIENTO:

Si se representa el primer número con . .	x
El segundo número es la mitad del primero .	$x/2$
El producto de ellos se representa con .	$x(x/2)$
Lo cual es igual a 242.	$x(x/2) = 242$
Así que	$(1/2)x^2 = 242$
Pero también podemos escribir . . .	$(1/2)x^2 - 242 = 0$

Ya expresamos nuestro problema con una ecuación de segundo. Al resolverla, se obtiene el valor del primer número de ellos, que es x.

El valor de x entre dos será el valor del segundo.

NOTA: Los dos problemas siguientes podrían ser más difíciles de entender pues son más complicados. No se desesperen si no los comprenden totalmente en la primera lectura.

Ejemplo 11. Cuatro muchachos de un equipo de dibujo compraron algunos lápices sueltos por $24.80. La siguiente vez compraron una caja completa que tenía cuatro lápices más y que costaba $28.8

Además, al comprar por caja, cada lápiz costaba $0.70 menos. Plantear esto como una ecuación de segundo grado para saber cuántos lápices compraron por $24.80.

PLANTEAMIENTO:

Representemos el número inicial de lápices que compraron con	**n**
Dicha incógnita n es la que buscaremos.	
Representar el costo de cada lápiz con . . .	x
Entonces el número de lápices por su costo, es lo que se pagó la primera vez	$nx = 24.8$

Para saber el precio de cada lápiz, se despeja x . $x = (24.8)/\mathbf{n}$

Al comprar por caja, el precio de cada lápiz disminuyó \$0.70 . . . . $(24.8/\mathbf{n}) - (0.7)$

Tuvieron cuatro lápices más al comprar una caja . $\mathbf{n} + 4$

El número de lápices de la caja completa por su precio es . . . . . . $(\mathbf{n}+4)\,((24.8/\mathbf{n}) - (0.7))$

La caja completa de lápices costó \$28.8 . . $(\mathbf{n}+4)((24.8/\mathbf{n}) - (0.7)) = 28.8$

Como $(24.8/n) - (0.7) = (24.8 - 0.7\mathbf{n}) / \mathbf{n}$,

Entonces . . . . . $(\mathbf{n}+4)\,((24.8-0.7\mathbf{n}) / \mathbf{n}) = 28.8$

Pasar el denominador **n** al miembro derecho . . . . $(\mathbf{n}+4)(24.8 - 0.7\mathbf{n}) = 28.8\mathbf{n}$

Multiplicando binomios . . . $24.8\mathbf{n} - 0.7\mathbf{n}^2 + 4(24.8) - 4(0.7\mathbf{n}) = 28.8\mathbf{n}$

Pasar 28.8n al miembro izquierdo $(24.8)\mathbf{n} - 0.7\,\mathbf{n}^2 + 4(24.8) - 4(0.7\mathbf{n}) - (28.8)\mathbf{n} = 0$

Simplificando y reacomodando $(-0.7)\mathbf{n}^2 - (6.8)\,\mathbf{n} + 99.2 = 0$

Nuevamente esta es la ecuación de segundo grado que representa el problema enunciado pero esta vez, nuestra variable es **n.**

Ejemplo 12. Juan pagó \$105 al "disparar" un refresco para cada uno de los amigos que estaban con él y el suyo también.

Si les hubiera invitado también a otros 5 chavos que se fueron antes, habría comprado todo un paquete que tenía el número exacto de refrescos para todos y que costaba \$120.

Además, al comprar por paquete, cada refresco costaba un peso menos.

¿Cuántos eran Juan y los que sí bebieron "chesco"?

PLANTEAMIENTO:

Representar el número de personas que bebieron refresco con . . . . . . $\mathbf{p}$

El valor p es el que nos interesa conocer.

Representemos el número de refrescos con . . x

El precio de todos los refrescos fue . . . $\mathbf{p}\,x = 105$

Entonces el precio por cada refresco fue . .	$x = 105/\mathbf{p}$
Si se hubieran quedado los cinco que se fueron, el número de personas sería	$\mathbf{p} + 5$
Al comprar por paquete, el precio de cada refresco disminuía \$ 1	$(105/\mathbf{p}) - 1$

El número de personas que estaban al inicio, por el valor de cada refresco, si se compraran por paquete, es el costo de dicho paquete.

Es decir, se tendría	$(\mathbf{p} + 5)(\,(105/\mathbf{p}) - 1)\,) = 120$
Como $(105/p) - 1 = (105-p) / p$, entonces . .	$(\mathbf{p} + 5)(\,(105 - \mathbf{p}\,) / \mathbf{p}\,) = 120$
Pasando el denominador p al miembro derecho, queda	$(\mathbf{p} + 5)(105 - \mathbf{p}) = 120\mathbf{p}$
Multiplicando binomios	$105\mathbf{p} - \mathbf{p}^2 + 525 - 5\mathbf{p} = 120\mathbf{p}$
Lo que es lo mismo que	$105\mathbf{p} - \mathbf{p}^2 + 525 - 5\mathbf{p} - 120\mathbf{p} = 0$
Simplificamos y queda	$-\mathbf{p}^2 - 20\mathbf{p} + 525 = 0$

Esta ecuación es la que representa las condiciones pedidas en el enunciado. Cuando se resuelva, se sabrá cuantas personas eran los que tomaron refresco, que es **p**.

Los ejemplos anteriores de transformación de un problema expresado en palabras al lenguaje algebraico, dan como resultado ecuaciones de segundo grado que al ser resueltas, nos proporcionan el valor de las incógnitas.
La intención no era resolverlos sino plantearlos y que reconocieran que hay problemas que pueden representarse con una ecuación de segundo grado.

3.3 QUÉ ES FACTORIZAR.

¿Recuerdan qué significa factorizar o escribir una expresión como producto de factores? Vamos a ver ejemplos con los que el concepto seguramente se aclarará.

Factorizar a	Una posible factorización es	Los factores son
42	$42=2\cdot3\cdot7$	2 ,3 y 7
15	$15=3\cdot5$	3 y 5
18	$18=2\cdot9$	2 y 9
$15x^2+2x-8$	$15x^2+2x-8=(3x-2)(5x-4)$	$(3x-2)$ y $(5x-4)$
$6x^2-2x-20$	$6x^2-2x-20=(2x+4)(3x-5)$	$(2x+4)$ y $(3x-5)$

La segunda columna dice "una posible factorización es" pues podría haber más. Por ejemplo, diferentes factorizaciones de 42 son:

Factorizaciones	Los factores son
$42=2\cdot3\cdot7$	2, 3 y 7
$42=(-6)\cdot(-7)$	(-6) y (-7)
$42=(21)(2)$	21 y 2

Lo que haremos en seguida, es ver por qué el polinomio de segundo grado $6x^2-2x-20$ pudo representarse como producto de los factores $2x+4$ y $3x-5$ de grado uno.

No intento explicar exhaustivamente el tema de factorizaciones, únicamente veremos el método para factorizar algún polinomio de segundo grado $\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ cuando **a**, **b** y **c** son enteros, lo que nos auxiliará en nuestro trabajo.

Observemos lo que pasa en el ejemplo siguiente que nos enseña un proceso que podremos aprovechar para casos similares:

Si multiplicamos $(3x - 2)(2x + 5)$, obtendremos

$$\begin{aligned}(3x-2)(2x+5) &= 3x(2x+5)+(-2)(2x+5)\\ &= (3x)(2x)+(3x)5+(-2)(2x)+(-2)(5)\\ &= (3x)(2x)+(3)(5)x+(-2)(2)x+(-2)(5)\\ &= 6x^2+[\mathbf{15}+(\mathbf{-4})]x+(-10)\\ &= 6x^2+(\mathbf{11})x+(-10)\end{aligned}$$

No es fácil observar esto pero, en esta ecuación, los números **15** y **–4** cumplen que
A) multiplicados son igual al producto de **a** y **c** y
B) sumados dan lo mismo que el coeficiente **b**.

Revisen los últimos dos pasos de nuestro desarrollo y verán que así es.
En resumen, si en un polinomio de la forma $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$ cuyos coeficientes **a**, **b** y **c** son enteros, cumplen las condiciones A) y B), entonces dicho polinomio puede expresarse como producto de dos factores de grado uno. En caso que alguna de estas dos condiciones no se cumpliera, el método no puede aplicarse.
Aquí les doy algunos ejemplos para practicar este método.

Ejemplo 1. Dada la ecuación $8x^2 - 14x + 3 = 0$, encontrar su factorización como dos factores de primer grado.
Solución:

Los coeficientes de la ecuación son . .	**a** = 8, **b** = -14, **c** = 3
Buscaremos dos números, que llamaremos **m** y **n**, tales que al multiplicarlos, nos den como resultado el producto de **a** y **c**. Así . .	**m·n** =(8)(3)
También deben cumplir que la suma de ellos sea el valor de **b.** Así . . .	**m** + **n** = -14
Como **m·n** =24 es positivo, **m** y **n** deben ser los dos positivos o los dos negativos.	
Algunas parejas posibles son . . .	6 y 4, -6 y -4
	12 y 2, -12 y -2

Pero sólo la última pareja cumple que
al sumarse dan -14 pues . . . . . $-12 + (-2) = -14$
También es cierto que . . . . . $-12x + (-2)x = -14x$
Como nuestra ecuación es . . . . $8x^2 -14x + 3$
Puede rescribirse como . . . . $=8x^2 -12x -2x +3$
Además, $8x^2$ y $12x$ tienen como factor común
a $4x$, entonces podemos escribir . . $=4x(2x) +4x(-3) +(-1)2x +(-1)(-3)$
Factorizamos $4x$ de los primeros dos sumandos $=4x(2x - 3) +(-1)(2x - 3)$
Factorizando $(2x-3)$, tenemos . . . $=(4x - 1)(2x - 3)$
Por consiguiente, los factores buscados son $4x -1$ y $2x -3$ y la ecuación ya factorizada es $8x^2 -14x + 3 = (4x-1)\cdot(2x-3) = 0$.

Ejemplo 2. Dada la ecuación $7x^2 + 32x -15 = 0$, factorizarla como producto de dos factores de primer grado.

Solución:

Los coeficientes de la ecuación son . . $\mathbf{a} = 7$, $\mathbf{b} = 32$, $\mathbf{c} = -15$
Buscaremos dos números **m** y **n** tales que
multiplicados den el valor de **a** por **c** . . $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} =(7)(-15)= -105$
y sumados tengan el valor de **b** . . $\mathbf{m} + \mathbf{n} = 32$
Como $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = -105$, ambos números deberán
ser de signo contrario. Algunas parejas para
obtener -105 son . . . . . -21 y 5, 21 y -5
-35 y 3, 35 y -3

Observen que sólo la última pareja cumple que al sumar
los valores, dan el valor de **b**. Veamos . . $32 =35 + (-3)$
Expresamos al término de primer grado como $32x = 35x - 3x$.
La ecuación original es . . . . $7x^2 + 32x -15$
Por lo que podemos escribirla como . . $=7x^2 + 35x - 3x -15$

Los sumandos $7x^2$ y $35x$ tienen como factor común a **7x**. Podemos expresar esto como . $=(7x)x + (7x)5 + (-3)x + (-3)5$

Factorizamos 7x de los primeros dos factores $=7x(x + 5) - 3(x + 5)$

Factorizamos $x + 5$ . . . . . $=(7x - 3)(x + 5)$

Concluimos que los factores buscados son $7x - 3$ y $x + 5$ y la ecuación factorizada es $7x^2 + 32x - 15 = (7x - 3)(x + 5) = 0$

Ejemplo 3. Dada la ecuación $-30x^2 + 14x + 8 = 0$, factorizarla como producto de dos factores de grado 1.

Solución:

Los coeficientes de la ecuación son . . $\mathbf{a} = -30$, $\mathbf{b} = 14$, $\mathbf{c} = 8$

Buscamos dos números **m** y **n** que multiplicados sean el producto **ac** . . $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = -240$

y sumados, tengan el valor de **b** . . . $\mathbf{m} + \mathbf{n} = 14$

Como **mn** es negativo, tenemos que buscar números de signo contrario.

Algunas parejas posibles para obtener –240 son 120 y 2, -2 y 120

-60 y 4, -4 y 60

24 y 10, 24 y –10

Nuevamente la pareja que nos interesa está en último lugar pues sólo esos dos números sumados dan como resultado 14. Entonces $14 = 24 + (-10)$

Así que . . . . . . $14x= 24x - 10x$.

Como la ecuación es . . . . . $-30x^2 + 14x + 8$

Puede rescribirse . . . . . . $= -30x^2 + 24x -10x + 8$

Como $-30x^2$ y $24x$ tienen el factor común $-6x$ y $-10x$ y 8 tienen el factor común –2, escribimos $=(-6x)5x+(-6x)(-4) +(-2)5x +(-2)(-4)$

Factorizamos –6x de los sumandos primero y segundo y –2 de los sumandos tercero y cuarto $=-6x(5x -4) - 2(5x - 4)$

Factorizando $5x - 4$ . . . . . $= (-6x - 2)(5x - 4)$

Concluimos que los factores buscados son $-6x-2$ y $5x-4$ y la ecuación factorizada es $-30x^2 + 14x + 8 = (-6x-2)(5x-4) = 0$.

Les propongo que resuelvan el siguiente ejercicio:
Dada la expresión $6x^2 - 11x - 10$, exprésala como producto de dos factores lineales.
Si quieren comprobar su resultado, vean la respuesta B que está en la página 96.

3.4 NÚMERO DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

¿Alguna vez el profe les ha preguntado cuántas soluciones tiene a lo más una ecuación de segundo grado ? ¿Serán 0, 1, 2, 3 o más soluciones?
¿Qué saben de esto o qué opinan?
Vean la tabla siguiente que les sugiere la respuesta

TABLA

Si la ecuación es de:	Número de soluciones
Grado 1	Tiene a lo más una solución, es decir, tiene cero soluciones o una solución.
Grado 2	**¿ Número de soluciones ?**
Grado 3	Tiene a lo más 3 soluciones, es decir, puede tener o cero, o una, o dos, o tres soluciones, respectivamente.

¿Se dan cuenta ?. La respuesta que buscamos debe ser muy similar a la información que tenemos de las ecuaciones de grado uno y las de grado tres.
Si aun así "no les cae el veinte", busquen la respuesta C en la página 96.

Ahora se preguntarán ¿por qué es así? Pues debido nada más ni nada menos al **teorema fundamental del álgebra** que dice que si tenemos un polinomio de grado n, cuando n es un número entero mayor a cero, igualado a cero entonces existirá al menos un número **x** que cumple que, al evaluar el polinomio en dicho número **x**, dará como resultado el número cero.

Cualquier número **x** que cumpla esta propiedad se le llama una solución del polinomio. Así que una ecuación de grado n igualada a cero, tiene al menos una solución.

Veamos un ejemplo relacionado con este resultado.

Ejemplo: Vemos que el polinomio $\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} - 3 = 0$ es de segundo grado y los valores $\mathbf{x} = 1$ y $\mathbf{x} = -3$ son soluciones de él, pues al evaluarlo en tales valores, lo hacen cero.

Comprobemos:

Con $\mathbf{x} = 1$ tenemos, $(1)^2 + 2(1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 3 - 3 = 0$

Y con $\mathbf{x} = -3$ tenemos, $(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 9 - 9 = 0$

Otro hecho importante del álgebra que nos será útil es el siguiente:

"Sean a y b cualesquiera dos números reales. Si al hacer su producto, éste es cero, es decir, $a \cdot b = 0$, sería por que $a = 0$ o $b = 0$"

Este resultado también significa que si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, puede ser por que tanto **a** como **b** son cero a la vez.

Pero lo que nunca ocurrirá es que si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ entonces se pueda concluir que ni $\mathbf{a} = 0$ ni $\mathbf{b} = 0$.

¿Qué tal si vemos algunos ejemplillos para que no les quede duda de cómo usar este resultado ?

Ejemplo 1. Si $-3 \cdot x = 0$ es porque -3 es cero o x es cero. Pero sabemos que -3 no puede ser cero. Así que la única opción que queda es que $x = 0$.

Ejemplo 2. Si (18/2)(x + 2) = 0 entonces es porque el factor 18/2 es cero o por que el factor x + 2 es cero. Pero ya sabemos que no puede ocurrir que 18/2 sea cero. Entonces solamente queda que x + 2 = 0.

¿Responderían esta pregunta para ver si no "se están haciendo bolas" ?

¿Cuál es el objetivo de factorizar una ecuación de segundo grado, cuando eso es posible ?

a) Expresarla como suma de dos ecuaciones de grado uno.

b) Expresarla en producto de dos factores de grado uno.

c) Encontrar las soluciones fácilmente cuando factorizar no parece complicado.

¿Cuál sería su respuesta? Si de plano no la saben, podrán encontrarla en la respuesta D en la página 96.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

3.5 SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO REPRESENTADA COMO PRODUCTO DE DOS FACTORES DE PRIMER GRADO

Supongamos que, por algún motivo,

en la ecuación . . . $12x^2 - 5x - 2 = 0$

hacemos la factorización . . . $12x^2 -5x -2 = (3x -2)(4x +1)$

Entonces . . . . . $12x^2 -5x -2 =(3x -2)\cdot(4x +1) = 0$

¿Tienen idea para qué pueda servir la expresión $(3x -2)\cdot(4x +1) = 0$ en lugar de $12x^2 -5x -2 = 0$?

Si a la ecuación original la expresamos como el producto de dos factores de primer grado, entonces (usando el hecho algebraico que acabamos de mencionar), podremos encontrar sus soluciones en forma directa si despejamos x de cada uno de los factores. Vean estos ejemplos.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $12x^2 - 5x -2 = 0$ por factorización.

Solución:

Como . . . . $12x^2 -5x -2 = (3x - 2)\cdot(4x + 1)$

Entonces . . . $(3x - 2)\cdot(4x + 1) = 0$

Por lo que hemos visto, . $3x - 2 = 0$ o $4x + 1 = 0.$

Primero supongamos que . $3x - 2 = 0.$

Eso significa que . . $3x = 2$

Despejando **x** se tiene, . $\mathbf{x = 2/3}$.

Después supongamos que $4x + 1 = 0$

Por consiguiente . . $4x = -1$

Otra vez despejando x, . $\mathbf{x = -1/4}$

Conclusión: Las dos soluciones de la ecuación $12x^2 - 5x - 2 = 0$, son $\mathbf{x = 2/3}$ y $\mathbf{x = -1/4}$.

Observen que al tener la ecuación anterior factorizada, con cada uno de los factores se obtienen sus soluciones de la ecuación original.

Nota: Comprobaré que ambos valores son las soluciones de $12x^2 - 5x - 2 = 0$.
Primero: se sustituye el valor $\mathbf{x = 2/3}$ en $12x^2 - 5x - 2$ y se ve si da el valor 0.
$12(2/3)^2 - 5(2/3) - 2 = 12(4/9) - 5(2/3) - 2 = (48/9) - (10/3) - 2 = (48 - 30 - 18)/9 = 0.$

Segundo: se sustituye el valor $\mathbf{x = -1/4}$ en $12x^2 - 5x - 2$ y se ve si también da el valor 0.
$12(-1/4)^2 - 5(-1/4) - 2 = 12(1/16) - 5(-1/4) - 2 = (12/16) + (5/4) - 2 = (12 + 20 - 32)/16 = 0.$

Así que los valores $\mathbf{x = 2/3}$ y $\mathbf{x = -1/4}$ sí son las soluciones de la ecuación.

Siempre que se desea comprobar si un valor es solución de una ecuación, se procede como lo hice aquí.

Ejemplo 2. Dada la ecuación $8x^2 - 14x + 3 = 0$, encontrar sus soluciones por factorización.
Solución:
En la sección "que es factorizar", vimos que . $8x^2 - 14x + 30 = (4x - 1)(2x - 3)$
Por consiguiente . . . . . $(4x - 1)(2x - 3) = 0$
Esto significa que . . . . . $4x - 1 = 0$ o $2x - 3 = 0$
Supongamos primero que $4x - 1 = 0$. Entonces $\mathbf{x = 1/4}$
Ahora supongamos que $2x - 3 = 0$. Así que $\mathbf{x = 3/2}$
Conclusión: las dos soluciones de $8x^2 - 14x + 3 = 0$ son $\mathbf{x = 1/4}$ y $\mathbf{x = 3/2}$

Ejemplo 3. Dada $7x^2 + 32x - 15 = 0$, encontrar sus soluciones por factorización.
Solución:
Ya vimos que esta ecuación se factoriza como $7x^2 + 32x - 15 = (7x - 3)(x + 5)$
Así que . . . . . . $(7x - 3)(x + 5) = 0$

Lo cual significa que . . . . $7x - 3 = 0$ o $x + 5 = 0$

Primero supongamos que $7x - 3 = 0$. Entonces **$x = 3/7$**

Después supongamos que $x + 5 = 0$. Entonces **$x = -5$**

Finalmente, las dos soluciones son . . **$x = 3/7$** y **$x = -5$**

Ejemplo 4. Dada $-30x^2 + 14x + 8 = 0$, encontrar sus soluciones por factorización.

Solución:

Hemos visto ya que la ecuación se factoriza como $-30x^2 + 14x + 8 = (-6x - 2)(5x - 4)$

Por lo que . . . . . . $(-6x - 2)(5x - 4) = 0$

Entonces . . . . . . $-6x - 2 = 0$ o $5x - 4 = 0$

Si $-6x - 2 = 0$ entonces . . . . **$x = -2/6 = -1/3$**

Pero si $5x - 4 = 0$ entonces . . . **$x = 4/5$**

Concluimos que las dos soluciones posibles son **$x = -1/3$** y **$x = 4/5$**

Ejemplo 5. Les propongo que resolvamos por factorización este ejercicio ya planteado anteriormente: Juan pagó \$105 al "disparar" un refresco para cada uno de los amigos que estaban con él y el suyo también.

Si les hubiera invitado también a otros 5 chavos que se fueron antes, habría comprado todo un paquete que tenía el número exacto de refrescos para todos y que costaba \$120.

Además, al comprar por paquete, cada refresco costaba un peso menos.

¿Cuántos eran Juan y los que sí bebieron "chesco"?

Solución :

La ecuación ya planteada antes es . . $-\mathbf{p}^2 - 20\mathbf{p} + 525 = 0$

Los coeficientes de esta ecuación de segundo grado son . . . . . $\mathbf{a} = -1$, $\mathbf{b} = -20$ y $\mathbf{c} = 525$

Buscamos dos números m y n tales que su producto sea igual a **ac** . . . $m \cdot n = -525$

Y sumados sean **b**	$m + n = -20$
Pero observen que -35 y 15 cumplen que .	$(-35)(15) = -525$
Y además	$-35 + 15 = -20$
De esto último, tenemos	$-35\mathbf{p} + 15\mathbf{p} = -20\mathbf{p}$
Como nuestra ecuación es . . .	$-\mathbf{p}^2 - 20\mathbf{p} + 525$
Sustuimos –20p y queda	$= -\mathbf{p}^2 - 35\mathbf{p} + 15\mathbf{p} + 525$
Como $-\mathbf{p}^2$ y $-35\mathbf{p}$ tienen como factor común a $-\mathbf{p}$	
y 525 = (35)(15), se tiene . . .	$=(-\mathbf{p})\mathbf{p} + (-\mathbf{p})(35) + 15p + 15(35)$
Factorizamos –p de los primeros dos sumandos	
y 35 de los dos últimos, se tiene . . .	$= -\mathbf{p}(\mathbf{p} + 35) + 15(\mathbf{p} + 35)$
Factorizamos $\mathbf{p} + 35$	$=(-\mathbf{p} + 15)(\mathbf{p} + 35)$
Ya que	$-\mathbf{p}^2 - 20\mathbf{p} + 525 = 0$
Entonces también	$(-\mathbf{p} + 15)(\mathbf{p} + 35) = 0$
Ahora supongamos que $-\mathbf{p} + 15 = 0$. Así que	$\mathbf{p} = 15$
Después supongamos que $\mathbf{p} + 35 = 0$. Por lo que	$\mathbf{p} = -35$
Concluimos que las dos soluciones son .	$\mathbf{p} = 15$ y $\mathbf{p} = -35$

<u>IMPORTANTÍSIMO:</u>

Este problema nos muestra, con sus soluciones, una cualidad de las ecuaciones de segundo grado: Cuando la ecuación tiene dos soluciones, podemos escoger como ciertas aquellas que sí se adecuen o sean coherentes con nuestro problema.

Algebraicamente las dos pueden ser soluciones correctas pero si únicamente una de ellas se adapta a las condiciones del problema, la otra no se considera.

En el nuestro caso específico, ya que $\mathbf{p}$ = número de personas, no es posible que $\mathbf{p} = -35$, puesto que no se puede tener un número negativo de personas y elegimos el valor $\mathbf{p} = 15$.

Ejemplo 6. Este ejercicio les dará una sorpresa. Encontrar las soluciones de la ecuación $4\mathbf{p}^2 - 40\mathbf{p} + 100 = 0$.

Solución:

Tenemos que	$\mathbf{a} = 4$, $\mathbf{b} = -40$, $\mathbf{c} = 100$
Buscamos dos números m y n tales que sean el producto de **a** y **c.** Entonces	$mn = 400$
Y que sumados tengan el valor de **b**	$m + n = -40$
Como -40 es negativo, los números buscados tendrán signo contrario.	
Algunas parejas que dan 400 son	5 , 80 y -5, -80
	10, 40 y -10, -40
	20, 20 y -20, -20
Pero estoy seguro que ya observaron que la última pareja de número cumplen que sumados dan –40.	
Ya que –40 = -20 -20 entonces . .	$-40\mathbf{p} = -20\mathbf{p} - 20\mathbf{p}$.
Como	$4\mathbf{p}^2 - 40\mathbf{p} + 100$
Usando lo anterior, tenemos . .	$= 4\mathbf{p}^2 - 20\mathbf{p} - 20\mathbf{p} + 100$
Pero $4\mathbf{p}^2$ y $40\mathbf{p}$ tienen como factor común a $2\mathbf{p}$ También $-20\mathbf{p}$ y 100 tienen como factor común a –10. Por lo que podemos escribir	$= 2\mathbf{p}(2\mathbf{p}) + 2\mathbf{p}(-10) + (-10)2\mathbf{p} + (-10)(-10)$
Factorizamos $2\mathbf{p}$ de los sumandos primero y segundo y –10 de los sumandos tercero y cuarto. Quedaría, ...	$= 2\mathbf{p}(2\mathbf{p} - 10) - 10(2\mathbf{p} - 10)$
Ahora factorizamos $2\mathbf{p} - 10$ . . .	$= (2\mathbf{p} - 10)(2\mathbf{p} - 10)$
Como	$4\mathbf{p}^2 - 40\mathbf{p} + 100 = 0$
Entonces	$(2\mathbf{p} - 10)(2\mathbf{p} - 10) = 0$
Por consiguiente, ...	$2\mathbf{p} - 10 = 0$ o $2\mathbf{p} - 10 = 0$
El primer factor dice que $2\mathbf{p} = 10$ por lo que .	$\mathbf{p} = 5$
El segundo factor es igual y también da .	$\mathbf{p} = 5$

En pocas palabras, hay una única solución.

TAMBIÉN IMPORTANTE: El ejemplo que acabamos de ver, muestra que hay ecuaciones cuadráticas con una sola solución.

Para probar su comprensión, conviene que contesten la pregunta siguiente:

Dada una ecuación cuadrática que se quiere solucionar por factorización (cuando eso es posible), ¿cuál de estas opciones describe lo deseado ?

a) Se disminuye el grado de la ecuación en una unidad y después se resuelve como ecuación de primer grado.

b) Se representa la ecuación como producto de dos factores de primer grado y se resuelve cada factor.

c) Se expresa la ecuación como dos sumandos de primer grado cada uno y se resuelve alguno de ellos.

La respuesta E que se encuentra en la página 97 puede servirles para comparar lo que respondieron ustedes.

Problema: Muy probablemente en algún examen de los que les hagan, les podrían preguntar algo como esto: ¿Cómo se factoriza la ecuación $12x^2 - 29x + 15 = 0$ como producto de dos factores de grado uno y cuáles son sus soluciones?

Aquí les pongo algunas opciones. ¿Cuál de ellas será?

a) $(3x - 3)(4x - 5)$ con $x = 1$ y $x = 5/4$
b) $(3x - 2)(4x + 10)$ con $x = 2/3$ y $x = -5/2$
c) $(3x - 5)(4x - 3)$ con $x = 5/3$ y $x = 3/4$
d) $(-3x + 5)(4x + 3)$ con $x = 5/3$ y $x = -3/4$

También de este problema, pueden ver la respuesta, si la necesitan, en la página 97.

3.6 QUÉ ES LA FÓRMULA GENERAL PARA ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE ESTE TIPO CON DICHA FÓRMULA.

El método de factorización que conocimos en la sección anterior, sólo puede ser eficaz algunas veces y ya dijimos anteriormente en qué condiciones. Por eso, los algebristas de algunos siglos atrás buscaron un método general, es decir, una fórmula que resolviera todo tipo de ecuación de segundo grado.

Ahora mismo verán cómo se obtiene. Pero no se preocupen si no entienden la deducción. Si les causa dificultad, usen la fórmula inmediatamente y dejen para después esta explicación. ¡ Empecemos pues y a ver cómo salimos de ésta !

Ya vimos que la forma general de las ecuaciones de segundo grado es . . . . . $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$

con **a** diferente de 0

También puede ser escrita como . . $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x = -\mathbf{c}$

Dividiendo ambos miembros entre **a**, se obtiene $(\mathbf{a}/\mathbf{a})x^2 + (\mathbf{b}/\mathbf{a})x = -\mathbf{c}/\mathbf{a}$

Es decir . . . . . . $x^2 + (\mathbf{b}/\mathbf{a})x = -\mathbf{c}/\mathbf{a}$

Transformar el miembro izquierdo para formar un trinomio cuadrado perfecto . $x^2 + (\mathbf{b}/\mathbf{a})x + (\mathbf{b}/2\mathbf{a})^2 = (\mathbf{b}/2\mathbf{a})^2 - (\mathbf{c}/\mathbf{a})$

Así que . . . . . . $x^2+(\mathbf{b}/\mathbf{a})x + (\mathbf{b}^2/4\mathbf{a}^2) =(\mathbf{b}^2/4\mathbf{a}^2) -(\mathbf{c}/\mathbf{a})$

Expresando el miembro izquierdo como un binomio al cuadrado y simplificando el miembro derecho, . . . $(x + (\mathbf{b}/2\mathbf{a}))^2 = (\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac})/4\mathbf{a}^2$

Extrayendo raíz cuadrada . .

$$x + \frac{\mathbf{b}}{2\mathbf{a}} = \frac{\pm\sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$$

Despejando x . . . . . .

$$x = \frac{-\mathbf{b}}{2\mathbf{a}} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$$

Finalmente simplificando . . . .

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

La expresión anterior es la **fórmula general para solucionar las ecuaciones de segundo grado.** Para obtener las dos soluciones posibles, separamos los dos valores que puede tomar el radical involucrado. Vean pues.

La primera solución se obtiene así $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La segunda solución se obtiene así $$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es importante recordar que esta fórmula general sólo se puede aplicar a una ecuación de segundo grado que previamente se ha escrito en la forma general.

De lo contrario, se podrían obtener resultados equivocados.

Como el número obtenido de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ puede resultar ser cero, un valor positivo o uno negativo, la solución puede ser un número real o uno que no sea real.

Vean estos ejemplos numéricos para que se aclare lo que acabamos de ver.

Ejemplo 1. Dada la ecuación $2x^2 - 4x + 6 = 0$, encontrar las soluciones de ella usando la fórmula general.

Solución:

Como **a** = 2, **b** = -4 y **c** = 6, sustituimos estos valores en la fórmula general.

Tenemos $$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(6)}}{2(2)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-32}}{4}$$

Puesto que -32 es negativo y $\sqrt{-32}$ no es un número real sino un número imaginario, la ecuación no tiene soluciones en los números reales.

Ejemplo 2. Dada la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$, encontrar sus soluciones usando la fórmula general.

Solución:

Como $\mathbf{a} = 1$, $\mathbf{b} = -6$, $\mathbf{c} = 9$, sustituimos estos valores en la fórmula general y tenemos

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2}$$

Ahora separamos raíces $\quad \mathbf{x_1} = \frac{6 + 0}{2} = 3 \quad$ y $\quad \mathbf{x_2} = \frac{6 - 0}{2} = 3$

En conclusión, la ecuación tiene una única solución.

Ejemplo 3. Si nos dan la ecuación $(1/2)x^2 - 10x + 18 = 0$, encontrar sus soluciones usando la fórmula general.

Solución:

Como $\mathbf{a} = 1/2$, $\mathbf{b} = -10$, $\mathbf{c} = 18$, sustituimos estos valores en la fórmula general.

Entonces $\quad x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1/2)(18)}}{2(1/2)} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{1} = 10 \pm \sqrt{64} = 10 \pm 8$

Separando las soluciones, tenemos que

$$\mathbf{x_1} = 10 + 8 = 18 \quad \text{y} \quad \mathbf{x_2} = 10 - 8 = 2$$

Por consiguiente, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.

Resolvamos, también como ejemplo, un problema práctico que ya habíamos planteado anteriormente usando la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo : Cuatro muchachos de un equipo de dibujo compraron algunos lápices sueltos por \$24.80. La siguiente vez compraron una caja completa que tenía cuatro lápices más y que costaba \$28.8.

Además, al comprar por caja, cada lápiz costaba \$0.70 menos. Plantear esto como una ecuación de segundo grado para saber cuántos lápices compraron por \$24.80.

Solución:

En el ejercicio 11 de la sección **3.2** vimos el planteamiento de este problema. Quedaba así . . . $(-0.7)\mathbf{p}^2 - (6.8)\mathbf{p} + 99.2 = 0$

Observen que aquí la incógnita es **p**, que es el número de lápices comprados por \$24.80

Los coeficientes son . . . . . $\mathbf{a} = -0.7$, $\mathbf{b} = -6.8$, $\mathbf{c} = 99.2$

Aplicamos la fórmula general

$$\mathbf{p} = \frac{-(-6.8) \pm \sqrt{(-6.8)^2 - 4(-0.7)(99.2)}}{2(-0.7)}$$

$$= \frac{6.8 \pm \sqrt{46.24 + 277.76}}{-1.4}$$

$$= \frac{6.8 \pm \sqrt{324}}{-1.4}$$

$$= \frac{6.8 \pm 18}{-1.4}$$

Si separamos raíces, tenemos $\mathbf{p}_1 = \frac{6.8 + 18}{-1.4} = \frac{24.8}{-1.4} = -17.71$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{6.8-18}{-1.4} = \frac{-11.2}{-1.4} = 8.0$$

Como **p** = número de lápices, su valor no puede ser negativo, por lo que únicamente escogemos la solución positiva, esto es, **p** = 8 lápices y desechamos la solución negativa. Así el problema queda resuelto.

3.7 ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO POR MEDIO DEL DISCRIMINANTE.

Ya que vimos cómo se usa la fórmula general para solucionar las ecuaciones de segundo grado, les propongo que vean un método mediante el que podemos saber de qué forma es la solución, que consiste en analizar $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}$.

Este número $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}$, por ser especial, recibe el nombre de **discriminante** pues uno de los significados de discriminar es distinguir una cosa de otra. En este caso, él nos permitirá saber cuántas soluciones tiene una ecuación cuadrática y de qué tipo son.

En la antigüedad, los algebristas no entendían cómo solucionar ecuaciones de segundo grado cuyo discriminante era negativo pues la raíz cuadrada de un número de este tipo no existe en los números reales.

Incluso hubo intentos por inventar algún símbolo que permitiera manejar dichas raíces aún sin comprenderlo completamente.

Esto lo hicieron Cardano y Ferrari en el siglo XVI, Descartes en el siglo XVII y después Euler en el siglo XVIII quien ya representaba la raíz cuadrada de –1 con el símbolo **i** por considerarla una unidad imaginaria.

Fue en los inicios del siglo XIX cuando el matemático alemán Karl Friedrich Gauss presentó a los números complejos junto con sus operaciones y sus propiedades, lo cual permitía manejar cualquier tipo de raíz en ecuaciones de segundo grado o grados mayores.

Nota: Lo siguiente les podrá resultar más difícil de entender. Si después de la primera lectura así les parece, déjenlo para después o considérenlo optativo y únicamente usen las conclusiones que son obtenidas.

Mencionaré varios hechos algebraicos que usaremos.

Primero: $\sqrt{-1} = \mathbf{i}$ que es la unidad imaginaria que acabamos de mencionar.

Segundo: Recuerden que al sacar raíz cuadrada de números negativos, se obtienen números imaginarios. Por ejemplo, como $-3 = 3(-1)$

entonces $\sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{3}\cdot\mathbf{i}$

Tercero: Si tenemos un número positivo r, entonces -r es negativo.
Esto último podemos escribirlo como $-r = r(-1)$ es negativo.
Si ahora extraemos raíz entonces, $\sqrt{-r} = \sqrt{r(-1)} = \sqrt{r}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{r}\cdot \mathbf{i}$

Esto dice que:

1) Un número negativo lo podemos expresar como -1 por el inverso aditivo de ese número, el cual es positivo y que

2) extraer raíz cuadrada a un número negativo es lo mismo que extraer raíz cuadrada al inverso aditivo de él (que es positivo) y multiplicar por la unidad imaginaria **i**.

Veamos cómo usamos esto para estudiar los diferentes casos cuando el **discriminante** es negativo, cero o positivo.

A) Suponer que el **discriminante es negativo**, o en símbolos, $b^2 - 4ac < 0$

Si . . . . $b^2 - 4ac < 0$

Entonces . . . . . . $(b^2 - 4ac)(-1) > 0$

Así que, ... $(b^2 - 4ac) = (b^2 - 4ac)(-1)(-1) < 0$

Extrayendo raíz cuadrada a
la expresión anterior . . . $\sqrt{(b^2 - 4ac)(-1)(-1)}$

$$= \sqrt{(b^2 - 4ac)(-1)}\ \sqrt{(-1)}$$

$$= \sqrt{(b^2 - 4ac)(-1)}\ \mathbf{i}$$

En palabras, $(b^2 - 4ac)(-1)$ es positivo y $\sqrt{(b^2 - 4ac)(-1)}$ también es positivo.
Además, al extraer raíz cuadrada al número negativo $b^2 - 4ac$, obtendremos el número imaginario $\sqrt{(b^2 - 4ac)(-1)}\ \mathbf{i}$

En la formula general podremos escribir

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)(-1)}\ \mathbf{i}}{2a}$$

Separamos las raíces $\mathbf{x_1} = \dfrac{-\mathbf{b} + \sqrt{(\mathbf{b}^2\text{-}4\mathbf{ac})\,(-1)}\ \mathbf{i}}{2\mathbf{a}}$

$$\mathbf{x_2} = \frac{-\mathbf{b} - \sqrt{(\mathbf{b}^2\text{-}4\mathbf{ac})\,(-1)}\ \mathbf{i}}{2\mathbf{a}}$$

Conclusión: Si el **discriminante es negativo** entonces las raíces de la ecuación no son reales sino imaginarias, son diferentes y tienen la forma anterior.

B) Suponer que el **discriminante es cero**, o en símbolos, $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac} = \mathbf{0}$

Así que $\sqrt{\mathbf{b}^2\text{-}4\mathbf{ac}} = \sqrt{0} = 0$.

Por consiguiente, $x = \dfrac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}} = \dfrac{-b \pm 0}{2\mathbf{a}}$

Separamos las soluciones, $\mathbf{x_1} = (-\mathbf{b} + \mathbf{0}) / 2\mathbf{a} = -\mathbf{b} / 2\,\mathbf{a}$

y $\mathbf{x_2} = (-\mathbf{b} - \mathbf{0}) / 2\mathbf{a} = -\mathbf{b} / 2\,\mathbf{a}$

Conclusión: cuando el **discriminante es cero** entonces $\mathbf{x_1} = \mathbf{x_2}$, es decir, sólo hay una solución.

C) Finalmente suponer que el **discriminante es positivo**, esto es, $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac} > \mathbf{0}$

Entonces $\sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}$ también es un número positivo y tiene 2 raíces que son

$$\sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}} \quad \text{y} \quad -\sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}$$

Por ejemplo, las raíces del número positivo 9 son $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{9} = -3$.

En la fórmula general

$$\mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$$

únicamente tenemos que separar las soluciones

$$\mathbf{x_1} = \frac{-\mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{x_2} = \frac{-\mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$$

Conclusión: Una ecuación cuyo **discriminante es positivo**, tiene dos soluciones diferentes y reales con la forma anterior.

Veamos un ejemplo numérico aprovechando el análisis hecho, en especial, cuando el discriminante no es positivo.

Ejemplo. Sea $2x^2 - 4x + 6 = 0$. Encontrar sus soluciones por fórmula general.
Solución:
Como . . . $\mathbf{a} = 2$, $\mathbf{b} = -4$, $\mathbf{c} = 6$
Entonces el discriminante es $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac} = 16 - 4(2)(6) = -32$
Como $-32 < 0$, entonces $\sqrt{-32} = \sqrt{32(-1)} = \sqrt{32}\sqrt{(-1)} = \sqrt{32}\,\mathbf{i}$, que no es un número real sino imaginario.
De acuerdo al análisis hecho, la ecuación tiene dos soluciones imaginarias y diferentes las cuales son:

$$\mathbf{x_1} = \frac{4 - \sqrt{32}\cdot\mathbf{i}}{4} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{x_2} = \frac{4 + \sqrt{32}\,\mathbf{i}}{4}$$

3.8 PROBLEMAS PROPUESTOS.

Los problemas propuestos aquí son muy similares a aquellos resueltos como ejercicios anteriormente. Podrían costar un poquitín de trabajo pero resuélvanlos para obtener pleno conocimiento del tema.

1) Factoriza las ecuaciones siguientes como producto de dos polinomios de grado uno.

a) $6x^2 - x - 15 = 0$

b) $5x^2 + 18x - 8 = 0$

c) $40x^2 - 7x - 3 = 0$

d) $-x^2 + 12x - 32 = 0$

e) $9x^2 + 0x - 4 = 0$

f) $-8x^2 + 18x - 4 = 0$

Nota: Las siguientes son soluciones de las ecuaciones anteriores, pero sólo que ya las hayan factorizado, podrán reconocerlas.

Además, hay soluciones que están de más y no corresponden a ninguna de las ecuaciones anteriores con la intención de despistarlos, así que piensen bien antes de escoger las respuestas.

i) $x = 4$ y $x = 2/5$

ii) $x = -2/3$ y $x = 2/3$

iii) $x = 1/2$ y $x = -4/3$

iv) $x = 4$ y $x = 8$

v) $x = 3/4$ y $x = -4$

vi) $x = -2$ y $x = 5$

vii) $x = 3/2$ y $x = 5/3$

viii) $x = -1/5$ y $x = 3/8$

ix) $x = -1/4$ y $x = -2$

Problema : Al comprar algunos folletos de trigonometría, ciertos estudiantes pagaron \$100 por ellos pero después supieron que al comprar el paquete completo de folletos que tenía tres ejemplares más, cada uno de ellos costaba de 10 pesos menos pagando 80 pesos por todo el paquete. ¿ Inicialmente cuántos folletos compraron y cuál era su precio ? La respuesta, si la desean ver, está en la página 97.

3.9 RESPUESTAS.

Pregunta A: De las opciones siguientes, ¿ cuál es la forma general de las ecuaciones de segundo grado ?

a) La forma general debe ser $ax^2 + bx + c = 0$
con $a = 0$, y b y c coeficientes cualesquiera.

b) La forma general debe ser $ax^2 + bx + c = 0$
con a diferente de 0 pero b y c son números reales cualesquiera.

c) La forma general debe ser $ax^2 + bx + c = 0$
con $a = 0$ y $b = 0$ y c un número real cualquiera.

Respuesta : Inciso b) La forma general de las ecuaciones de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$ con a diferente de cero, pero b y c que son coeficientes cualesquiera.

Pregunta B: : Dada la expresión $6x^2 - 11x - 10$, exprésenla como producto de dos factores lineales.

Respuesta : La factorización de $6x^2 -11x -10$ es

$$6x^2 - 11x - 10 = (3x + 2)\cdot(2x - 5).$$

Pregunta C : ¿Cuántas soluciones tiene a lo más una ecuación de segundo grado?

Respuesta : Una ecuación de segundo grado tiene a lo más dos soluciones.

Pregunta D: ¿Cuál es el objetivo de factorizar una ecuación de segundo grado, cuando eso es posible ?

a) Expresarla como suma de dos ecuaciones de grado uno

b) Expresarla en producto de dos factores de grado uno.

c) Encontrar las soluciones fácilmente cuando factorizar no parece complicado.

Respuesta: Tanto el inciso b) como el c) dan información de porqué sirve factorizar una ecuación cuadrática.

Pregunta E : Dada una ecuación cuadrática que se quiere solucionar por factorización (cuando eso es posible), ¿cuál de estas opciones describe lo deseado ?

a) Se disminuye el grado de la ecuación en una unidad y después se resuelve como ecuación de primer grado.

b) Se representa la ecuación como producto de dos factores de primer grado y se resuelve cada factor.

c) Se expresa la ecuación como dos sumandos de primer grado cada uno y se resuelve alguno de ellos.

Respuesta E: El inciso b) es el correcto.

Respuesta al problema propuesto en la página 95: Al comprar algunos folletos de trigonometría, ciertos estudiantes pagaron \$100 por ellos pero después supieron que al comprar el paquete completo de folletos que tenía tres ejemplares más, cada uno de ellos costaba de 10 pesos menos pagando 80 pesos por todo el paquete.

¿ Inicialmente cuántos folletos compraron y cuál era su precio ?

Si representamos con n = número inicial de folletos comprados y

x =precio de cada folleto al comprar individualmente.

Entonces n = 5 folletos y x = 20 pesos.

Así que n + 3 = 8 y x -10 = 10.

CAPITULO 4: HISTORIA DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

4.1 Historia breve y anecdotario.
4.2 Algunas ecuaciones históricas de segundo grado.

4.1 HISTORIA BREVE Y ANECDOTARIO.

Nuevamente les propongo que nos relajemos leyendo un poco de la historia de las ecuaciones de segundo grado, la cual, además de ser interesante por si sola, nos ayuda a comprender el tema de una forma agradable.
Hasta donde se sabe, dicha historia comenzó hace aproximadamente 3800 años en Babilonia. Quienes allá pensaban en estos problemas de matemáticas, eran capaces de resolver muchas ecuaciones de este tipo, sin los métodos con los que contamos en la actualidad (que son por factorización y usando la fórmula general) los que estudiamos en el capítulo anterior.

El gusto por este tipo de ecuaciones también fue notorio en el imperio árabe, vigente entre los siglos VIII y XV, el cual se extendía por muchos países del norte de África, algunos del sur de Europa y muchas regiones de Asia, llegando incluso a la región que hoy es conocida como la República de Uzbekistán.

Ahí vivió Al-jwarizmi entre los siglos VIII y IX, quien fue el primero en recopilar en un documento lo que se sabía de álgebra hasta ese momento. En ese texto se incluía la solución de algunas ecuaciones de segundo grado, tanto de problemas de la vida diaria como de problemas teóricos que eran de su agrado.
Estoy seguro que ya imaginaron que la forma en que las representaban y resolvían ecuaciones cuadráticas no era la misma que como se hace hoy.

Pero ahora veamos dos ejemplos de cómo enunciaban ecuaciones cuadráticas en tiempos de Al-jwarizmi y cómo él las resolvía.

Ejemplo 1: ¿Cuál es el cuadrado que sumado a **2 raíces** da como resultado el **número simple 35** ?

Traduzcamos el enunciado anterior:

¿Cuál es el cuadrado ? claramente significa obtener un número x que se multiplique por si mismo, es decir, x^2.

Sumado a 2 raíces quiere decir sumar a lo anterior, 2 veces el mismo número que se busca , es decir, 2x.

Da como resultado 35, que tanto Al-jwarizmi como nosotros lo entendemos igual.

Todo esto junto se representa como $x^2 + 2x = 35$ y buscamos los números que satisfacen esta expresión.

Veamos con todo detalle la forma como Al-jwarizmi describía la solución:

Primero) Hay que tomar la mitad del número " **2 raíces** ". Entonces 2/2 = 1

Segundo) Multiplicar el número obtenido anteriormente por si mismo: $1 \cdot 1 = 1$.

Tercero) A esta última cantidad se le suma **el número simple 35**: 1 + 35 = 36.

Cuarto) Extraer raíz cuadrada del último número obtenido: $\sqrt{36} = 6$

Quinto) A la cantidad obtenida en el paso cuarto, se le resta la mitad de las raíces, que es el número obtenido en el paso 1 : 6 – 1 = 5

Conclusión: Entonces 5 es la solución buscada.

Comparemos ese método con lo obtenido usando la fórmula general:

La fórmula general es

$$x = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$$

Nuestra ecuación es $x^2 + 2x - 35 = 0$, así que $\mathbf{a} = 1$, $\mathbf{b} = 2$ $\mathbf{c} = -35$

Entonces $$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-35)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4+140}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2}$$

Separamos raíces $x_1 = \frac{-2+12}{2} = 5$ y $x_2 = \frac{-2-12}{2} = -7$

Estas son las 2 soluciones pero en tiempo de Al-jwarizmi (incluyéndolo a él), la segunda solución no se obtenía, por lo que creían que únicamente tenía una solución.

Veamos otro ejemplo donde Al-jwarizmi sí encontraba 2 soluciones.

Ejemplo 2: ¿Cuál es el cuadrado que sumado al **número simple 8** da como resultado **6 raíces** ?

Usemos otra vez nuestras habilidades de "traductores" para interpretar el enunciado.

¿Cuál es el cuadrado? significa obtener un número x que se multiplica por si mismo, esto es, x^2.

Sumado al número simple 8 quiere decir que a x^2 hay que sumarle 8.

Da como resultado 6 raíces significa que lo anterior tiene que ser igual a 6x pues una raíz era el número x

Juntando todo lo que hemos traducido queda, $x^2 + 8 = 6x$.

Primero) Hay que tomar la mitad del número 6 raíces: $6/2 = 3$.

Segundo) Multiplicar el resultado anterior por si mismo: $3^2 = 9$.

Tercero) De esa cantidad (del paso anterior), restarán el número simple 8: $9 - 8 = 1$.

Cuarto) Tomar la raíz cuadrada del número del paso anterior: $\sqrt{1} = 1$.

Quinto) A la mitad de las raíces, restar la cantidad obtenida en el paso cuarto: $3 - 1 = 2$.

Así obtenía la primera solución que era 2.

Sexto) Paso adicional usado para obtener otra raíz cuando se podía.

Si quisieran, (así decía Al-jwarizmi), pueden sumar la cantidad del paso cuarto a la mitad de las raíces (lo obtenido en paso primero): $1 + 3 = 4$ y así se obtiene una solución más.

Conclusión: Las dos soluciones obtenidas por Al-jwarizmi eran los números 2 y 4.

Como ven, el método de Al-jwarizmi era muy ingenioso pero largo y no general para todos los casos pues sólo funcionaba para raíces no negativas.

Tuvo que pasar mucho tiempo (exactamente hasta el siglo XVI) hasta que se encontró la fórmula general para resolver todo tipo de ecuaciones de segundo grado.

Obtengamos ahora las soluciones pon la fórmula general para compararlas con las obtenidas por Al-jwarizmi.

Como la ecuación es $x^2 + 8 = 6x$, la cual en la forma general se escribe $x^2 - 6x + 8 = 0$, tenemos $\mathbf{a} = 1$, $\mathbf{b} = -6$, $\mathbf{c} = 8$.

Así que $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \qquad = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Separando soluciones tenemos $\mathbf{x_1} = 8/2 = 4$ y $\mathbf{x_2} = 4/2 = 2$

En conclusión, las soluciones coinciden con las obtenidas por Al-Jwarizmi.

Desde antes de Al-jwarizmi, no se conocía un método para resolver ecuaciones como $x^2 + 4 = 0$, porque los matemáticos de esas épocas no sabían como interpretar la raíz cuadrada de un número negativo.

Fue durante el Renacimiento cuando en Italia, que era el país con los mejores algebristas de aquellos días, tuvieron la sospecha que debía añadirse un concepto nuevo para poder tratar estos casos.

Fueron específicamente los matemáticos Giralomo Cardano y Rafael Bombelli quienes señalaron la conveniencia de usar algo, quizás un número nuevo y especial que ayudara en la solución de las ecuaciones de grados 2, 3 y 4.

Con el tiempo, se llegó a la conclusión era necesario usar "un número auxiliar e imaginario para estos casos trabajosos", al que precisamente por su condición de imaginario, representaron con el símbolo **i**, el cual no era comprendido del todo pero ayudaba a solucionar ecuaciones como $x^2 + 4 = 0$.

Dicho número **i**, llamado **unidad imaginaria**, debía cumplir que

Primero) **i** $= \sqrt{-1}$.

Segundo) $\mathbf{i^2 = i \cdot i} = (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = (\sqrt{-1})^2 = -1$

Por ejemplo, para obtener la raíz cuadrada de –4, se procedía así:

$$\sqrt{(-4)} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{(4)}\,\sqrt{(-1)} = 2 \cdot \mathbf{i}$$

Junto con el desarrollo de la fórmula de segundo grado, los métodos de factorización y el uso de la unidad imaginaria, este tipo de problemas pudo ser resuelto finalmente.

Como ven, la historia de este tema muestra cómo tuvieron que pasar siglos para poder tener las soluciones de estas ecuaciones en cuyo trabajo intervinieron muchas personas que aportaron cada una sus ideas.

4.2 ALGUNAS ECUACIONES HISTÓRICAS DE SEGUNDO GRADO.

He aquí solamente algunos ejemplos de ecuaciones de segundo grado que fueron propuestas en siglos anteriores. Se las menciono con el propósito que vean algo de lo que se hacía antes sobre este tema y también para resolverlas con los métodos que disponemos actualmente.

En el siglo XVI, el matemático Christoff Rudolff era el matemático alemán más famoso de su país y publicó la primera obra de álgebra en alemán llamada "Coss", en la cual menciona estos problemas.

Problema 1: Hay tres números que se encuentran en la proporción 1:2:4. La suma de sus cuadrados es 189. ¿Cuáles son esos números?

PLANTEAMIENTO:

Representar el primer número por . . . x

El segundo número se representa por . . . $2x$

El tercer número se representa por . . . $4x$

Por la proporción guardada entre ellos, los cuadrados de esos números son . . . . . x^2, $4x^2$ y $16x^2$

La suma de esos cuadrados es 189 . . . $x^2 + 4x^2 + 16x^2 = 189$

Es decir . . . . $21x^2 = 189$

También puede expresarse como . . . $21x^2 - 189 = 0$

Entonces **a** =21, **b** = 0 y **c** = -189.

La solución por la fórmula general es

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(21)(-189)}}{2(21)} = \frac{\pm\sqrt{15876}}{42} = \frac{\pm 126}{42} = \pm 3$$

Separando raíces $\mathbf{x_1} = 3$ y $\mathbf{x_2} = -3$

Comprobemos con $\mathbf{x_1}$: $(\mathbf{x_1})^2 = 9$, $(2\,\mathbf{x_1})^2 = 36$ y $(4\mathbf{x_1})^2 = 144$.

Entonces $9 + 36 + 144 = 189$

Ahora con $\mathbf{x_2}$: $(\mathbf{x_2})^2 = 9$, $(2\,\mathbf{x_2})^2 = 36$ y $(4\mathbf{x_2})^2 = 144$

Así que $9 + 36 + 144 = 189$.

Problema 2: Representemos un cierto número por x. Ahora, formemos un factor con la diferencia del cuadrado del número y el número tres. Después, formemos otro factor con la suma del cuadrado del mismo número y el número tres.

Si se multiplican ambos factores, se obtiene 72. ¿Cuál será ese número?

PLANTEAMIENTO:

Representar al número por	x
El número menos tres es	$x - 3$
El número más tres es	$x + 3$
El producto de los 2 factores anteriores es setenta y dos	$(x - 3)(x + 3) = 72$
Desarrollar el producto	$x^2 - 9 = 72$
También es	$x^2 - 9 - 72 = 0$
Es decir	$x^2 - 81 = 0$

Así que $\mathbf{a} = 1$, $\mathbf{b} = 0$ y $\mathbf{c} = -81$

Con la fórmula general, se tiene

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-81)}}{2(1)} = \frac{\pm\sqrt{324}}{2} = \frac{\pm\sqrt{324}}{2} = \frac{\pm\ 18}{2}$$

Separando raíces $\mathbf{x_1} = 9$ y $\mathbf{x_2} = -9$

Comprobemos estos resultados

Si $\mathbf{x_1} = 3$ entonces $(\mathbf{x_1})^2 = 9$ y $\mathbf{x_1}^2 - 81 = (9)^2 - 81 = 0.$

Si $\mathbf{x_2} = -3$, tenemos $(\mathbf{x_2})^2 = 9$ y $\mathbf{x_2}^2 - 81 = (9)^2 - 81 = 0.$

Es decir, las soluciones son correctas.

Ahora con $\mathbf{x_2}$: $(\mathbf{x_2})^2 = 9$, $(2\,\mathbf{x_2})^2 = 36$ y $(4\mathbf{x_2})^2 = 144$

Así que $9 + 36 + 144 = 189$.

Problema 2: Representemos un cierto número por x. Ahora, formemos un factor con la diferencia del cuadrado del número y el número tres. Después, formemos otro factor con la suma del cuadrado del mismo número y el número tres.

Si se multiplican ambos factores, se obtiene 72. ¿Cuál será ese número?

PLANTEAMIENTO:

Representar al número por	x
El número menos tres es	$x - 3$
El número más tres es	$x + 3$
El producto de los 2 factores anteriores es setenta y dos	$(x - 3)(x + 3) = 72$
Desarrollar el producto	$x^2 - 9 = 72$
También es	$x^2 - 9 - 72 = 0$
Es decir	$x^2 - 81 = 0$

Así que $\mathbf{a} = 1$, $\mathbf{b} = 0$ y $\mathbf{c} = -81$

Con la fórmula general, se tiene

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-81)}}{2(1)} = \frac{\pm\sqrt{324}}{2} = \frac{\pm\sqrt{324}}{2} = \frac{\pm\ 18}{2}$$

Separando raíces $\mathbf{x_1} = 9$ y $\mathbf{x_2} = -9$

Comprobemos estos resultados

Si $\mathbf{x_1} = 3$ entonces $(\mathbf{x_1})^2 = 9$ y $\mathbf{x_1}^2 - 81 = (9)^2 - 81 = 0$.

Si $\mathbf{x_2} = -3$, tenemos $(\mathbf{x_2})^2 = 9$ y $\mathbf{x_2}^2 - 81 = (9)^2 - 81 = 0$.

Es decir, las soluciones son correctas.

Problema 3: Representemos un número con x.

A ese número le sumamos 2 y así formemos un factor. Por otro lado, al mismo número se le resta 3 para formar otro factor.

Finalmente multipliquemos ambos factores y obtendremos 104.

¿Cuál será dicho número ?

PLANTEAMIENTO:

Representemos al número por . . .	x
El número más dos es	$x + 2$
El número menos tres es	$x - 3$
Multiplicamos los dos factores anteriores	$(x + 2)(x - 3) = 104$
Desarrollando el producto . . .	$x^2 - x - 6 - 104 = 0$
Simplificando	$x^2 - x - 110 = 0$

Así que **a** = 1, **b** = -1 y **c** = -110.

Resolvamos con la fórmula general

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-110)}}{2(1)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 440}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{441}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 21}{2}$$

Separando raíces $\mathbf{x_1} = 22 / 2$ y $\mathbf{x_2} = -20 / 2$

Finalmente $\mathbf{x_1} = 11$ y $\mathbf{x_2} = -10$

Comprobemos con $\mathbf{x_1}$: $\mathbf{x_1} + 2 = 13$ y $\mathbf{x_1} - 3 = 8$ entonces $(13)(8) = 104$

Ahora con $\mathbf{x_2}$: $\mathbf{x_2} + 2 = -8$ y $\mathbf{x_2} - 3 = -13$ entonces $(-8)(-13) = 104$
Es decir, todo es correcto.

Estos son solamente algunos ejemplos y la intención era mostrar la forma como los resolvemos actualmente, lo cual nos puede parecer fácil pero eso no ocurría en la antigüedad pues no siempre se contó con la fórmula general.
Quizá ustedes puedan encontrar algunos otros ejemplos más para comparar cómo los resolvían antes y cómo los resolvemos ahora.

CAPITULO 5 : HISTORIA SOBRE ECUACIONES DE GRADO MAYOR.

5.1 Historia y anécdotas de las ecuaciones de tercer grado y cuarto grado.
5.2 Transformación de algunos símbolos algebraicos con el paso del tiempo.
5.3 Cronología breve del álgebra.

5.1 HISTORIA Y ANECDOTAS DE LAS ECUACIONES DE TERCER GRADO Y CUARTO GRADO.

Al final del siglo XV, ya era conocida la fórmula general para resolver las ecuaciones de segundo grado aunque la forma en que se expresaban simbólicamente no era como la usamos ahora. Sin embargo, no sabían qué pasaba con ecuaciones de grado mayor. Lógicamente comenzaron a pensar en las ecuaciones de tercer grado y cuarto grado. La historia, como verán, tiene todos los elementos que hacen tener éxito a las telenovelas actuales pues involucra traiciones, intrigas, plagios, deslealtades, etcétera y está ubicada en la Italia del siglo XVI.

En ese tiempo, los algebristas acostumbraban concursar para mostrar sus habilidades y sus conocimientos sobre estos temas. El primero en solucionar ecuaciones de tercer grado de la forma $x^3 + cx = d$ fue un matemático de la universidad de Bolonia llamado Scipione Del Ferro quien, por supuesto, no revelaba su conocimiento para aventajar a sus contrincantes en tales justas.

Lo que ellos se jugaban era dinero, propiedades, animales, joyas pero también su prestigio. Sin embargo, estando muy cerca de su muerte, Del Ferro lo reveló a uno de sus alumnos llamado Antonio María Del Fiore.

Hasta nuestros días, quien presenta un descubrimiento sobresaliente, adquiere fama, lo que a su vez le puede proporcionar remuneración.

En aquellos tiempos, esto era similar y teniendo la fórmula conocida, Del Fiore retó públicamente a un matemático con conocimientos más aventajados en el tema cuyo nombre era Niccolo Fontana.

Él es mejor conocido como Tartaglia, palabra italiana que significa tartamudo pues se cree que una caída en su niñez lo dejó con dicho desventaja.

Tartaglia aceptó el reto confiadamente proponiéndole a Del Fiore 30 problemas relacionados con ecuaciones de tercer grado y Del Fiore hizo lo mismo.

La historia narra que el plazo para saber el resultado final era de 8 días, en los cuales Del Fiore no descansó pero tampoco pudo resolver ningún problema mientras que Tartaglia resolvió todos los que su contrincante le propuso en un plazo de 2 horas.

Esto era por que él había obtenido una fórmula que mantenía en secreto y era más general que la dada por Scipione Del Ferro a Del Fiore.

Del Fiore perdió y comprendió que se había equivocado tanto de contrincante como de táctica, pues una fórmula no es garantía por si sola, sino que había que entender cómo aplicarla y las limitaciones que tenía.

Desde el momento en que se proclamó campeón, Tartaglia fue el amo y señor de los torneos de álgebra, lo que llamó la atención de otro matemático cuyo papel resulta ser el estelar por su participación en los conflictos en que se vio envuelto por esos mismos temas. Su nombre era Giralomo Cardano quien era profesor de la universidad de Milán.

Cardano buscó acercarse a Tartaglia y el encuentro se llevó a cabo el 25 de marzo de 1539, hecho conocido pues Tartaglia tomó nota y quedó escrito en sus pasajes autobiográficos.

En esa reunión, Cardano insistió mucho a Tartaglia para que le revelara las fórmulas que conocía sobre la solución de la ecuación de tercer grado y sí logró convencerlo.

Las notas textuales sobre sus diálogos son éstas:

> **Cardano:** "***Juro por los Santos Evangelios y por mi fe como Caballero, no hacer públicos tus descubrimientos, si me los cuentas. Del mismo modo prometo y aseguro por mi fe de buen cristiano que los escribiré de manera cifrada, de tal forma que nadie que los lea tras mi muerte pueda comprenderlos. Si yo, en opinión vuestra soy un hombre honesto, decídmelo y, si no lo pensáis así, demos entonces por terminada esta conversación***".

Tartaglia : "***Si no confiara yo en vuestros juramentos, entonces yo mismo merecería ser considerado un ateo y me entregaría a las Santas Cortes***".

Pasaron 6 años de esto y Giralomo Cardano publicó un libro cuyo nombre completo era "**Ars Magna Sive De Regulis Algebraicis**", en el que se mencionaba la forma para resolver la ecuación general de tercer grado, expresando que el descubridor era Tartaglia. En el capítulo XI de dicha obra aparece lo siguiente:

"***Scipione Del Ferro, de Bolonia, hace más de treinta años inventó esta regla y la comunicó a Antonio María Del Fiore de Venecia quien celebró un certamen con Niccolo Tartaglia de Brescia, lo que dio ocasión a que Niccolo la descubriera por sí mismo, el cual me la dio a mí, suprimida la demostración como consecuencia de mis ruegos.***

Pertrechado de este auxilio, busqué la demostración por varios caminos lo que fue muy difícil".

Tartaglia se sintió traicionado por tal hecho pues él esperaba publicar su propio libro con su descubrimiento pero Cardano se le adelantó argumentando que después de la revelación de Tartaglia, tuvo acceso a los archivos de la universidad de Bolonia en los que figuraban los trabajos de Scipione Del Ferro, que eran muy parecidos a los de Tartaglia por lo cual se sintió liberado de cumplir dicho juramento.
Tal fue la furia de Tartaglia, que retó públicamente a Cardano a duelo pero quien respondió fue alguien que había sido exalumno de Cardano y en aquel entonces era ya su yerno llamado Ludovico Ferrari.
Dicho desafío terminó, según algunos historiadores, en empate tácito.

Cardano también narró la historia que lo llevó a encontrar la fórmula para solucionar las ecuaciones de cuarto grado, pues su yerno Ferrari, la había obtenido.

Ferrari tenía el vicio del juego y además, le gustaba estar envuelto en riñas callejeras. A la corta edad de 43 años, murió envenenado por su hermana a la que había despojado de la herencia que le correspondía, por lo que Cardano dio a conocer este descubrimiento aunque mencionando a Ferrari como el autor.

En cuanto a Giralomo Cardano, él fue quien estuvo relacionado con los 2 descubridores de las ecuaciones de tercer y cuarto grados. Este médico, astrónomo y matemático vivió entre los años 1501 y 1576.

En 1545, publicó su obra más importante llamada "Ars Magna Sive De Regulis Algebraicis" en la cual mostraba los métodos de solución de las ecuaciones que hemos ya mencionado. Los que han tenido oportunidad de leer dicho texto histórico mencionan que no es fácil de entender pues no usaba la notación matemática como la usamos actualmente, aunque también lo hacían así todas las personas de su época pues describía los conceptos por medio de palabras que únicamente los muy conocedores podían comprender.

Incluso cuando ya era anciano, Cardano estaba envuelto en controversias, pues cuando tenía 70 años, escribió un tipo de carta astral que describía la vida de Jesucristo, motivo por el cual la Santa Inquisición lo encarceló.

En ese tiempo, si alguien osaba hacer tal acción, podía ser quemado vivo aunque él se salvó y fue liberado tras 77 días de prisión y 86 días más vigilado en su domicilio.

Pero mejor leamos el extracto siguiente donde él mismo narró su detención:

> ***"El 6 de octubre de ese año, me metieron a la cárcel, en donde si no tomo en consideración que me quitaban la libertad, me trataron cortésmente. El 22 de diciembre de 1570, a la misma hora y el mismo día de la semana en que fui detenido, esto es, viernes y al caer la noche, regresé a mi casa en libertad vigilada: Mi casa era una segunda prisión para mí. La duración de mi encierro fue de 77 días, el periodo de libertad vigilada duró 86. En total 163 días..."***

La Inquisición le prohibió terminantemente escribir o enseñar temas de matemáticas, pero en 1571, bajo la protección papal, vivió los últimos años de su vida en Roma. Sus biógrafos también narran que él mismo calculó la fecha de su muerte, la que coincidió debido a que no comía ni bebía para que se cumpliera su predicción.

El último matemático de esa época fue Rafael Bombelli, quien leyó el "Ars Magna" de Cardano teniendo 19 años de edad.
Él también escribió un tratado de álgebra en la forma más completa de lo que se sabía en esos años y era más entendible que la de Cardano. Su obra se llamaba "L'Algebra" en donde intentó usar números imaginarios para la solución de una ecuación cúbica sin soluciones reales. Bombelli describió este intento como "una idea útil y loca", entendiendose loca como experimental y atrevida, pues se podía operar formalmente con números imaginarios, aunque no existieran".
Fue hasta dos siglos más tarde que Leonardo Euler, matemático suizo de los más sobresalientes de todos los tiempos, empezó a formalizar a los números complejos comenzando con nombrar a la unidad imaginaria con el símbolo **i** como actualmente la usamos.

Como pueden ver, la historia sobre este tema tiene elementos interesantes ya sea por si misma como por las personas participantes. Además, es sorprendente que todos ellos vivieron en la misma época.

5.2 TRANSFORMACIÓN DE ALGUNOS SÍMBOLOS ALGEBRAICOS CON EL PASO DEL TIEMPO.

¿Han imaginado si la notación matemática que usamos actualmente ha sido siempre la misma?. De hecho, ha evolucionado para bien ya que contar con los signos adecuados, nos facilita el trabajo y la comprensión de los conceptos.

Observen algunos ejemplos que muestran la transformación que ha sufrido la notación con el paso del tiempo:

1484: El matemático francés Nicolás Chuquet escribía

4^2 p 3^1 égault 10°

Hoy : Esto lo escribimos así

$4x^2 + 3x = 10.$

1494: El matemático italiano Luca Pacioli ponía

Trouame..l..n°.che.gi_to al suo quadrat° Facia.12.

Hoy: Escribimos solamente

$x + x^2 = 12$

1514: El matemático holandés Vander Hoecke escribía

4Se - 51Pri is gbelijc 453/5

Hoy: Escribimos así

$4x^2 - 51x = 453/5$

1545: En Italia, Giralomo Cardano escribía

cub' p 6 reb' aequalis 20

Hoy : Escribimos así

$x^3 + 6x = 20.$

1556: También en Italia, Tartaglia escribía
Trouame uno número che azontali la sua
Radicce cuba uenghiste, cive.6.
Hoy : Escribimos

$$x + \sqrt[3]{x} + 6.$$

1599: El matemático francés Jean Buteo
escribía

I() P6_ P 9 [I() P3_ P 24

Hoy: Escribimos así

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + 24$$

1600: El matemático inglés Thomas Harriot
escribía aaa - 3.bb.a __ + 2.ccc
Hoy : Escribimos $a^3 - 3b^2 a = 2c^3$

1637: El matemático francés René Descartes
escribía

$$yy \propto cy - (cx/b)y + ay - ac$$

Hoy: Escribimos

$$y^2 = cy - (cx/b)y + ay - ac$$

1693: El matemático inglés John Wallis
escribía bxxx +cxx + dx + e = 0
Hoy: Escribimos $bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Estos son solamente algunos ejemplos de la transformación de la notación algebraica en siglos anteriores.

Como ven, la diferencia entre una notación y otra es muy evidente con el paso del tiempo y su transformación ha simplificado la escritura y la solución de problemas.

La notación ha cambiado con las ideas de muchas personas en diferentes momentos pero siempre con la intención de mejorar y es seguro que continuará cambiando.

5.3 CRONOLOGÍA BREVE DEL ÁLGEBRA.

Como ustedes ya han visto, las matemáticas tienen una historia tan vieja como la misma humanidad, En especial, la historia del tipo de ecuaciones que estamos estudiando en este trabajo, tiene casi cuatro mil años que empezaron a estudiarse. Ahora quisiera escribir una cronología de conceptos matemáticos y personajes que seguro les interesará:

SIGLO XVIII ANTES DE CRISTO

Tanto en Babilonia como en Mesopotamia, resolvían ecuaciones de primer grado y segundo grado.
El primer método que usaron fue el de la regla de la falsa posición. Su conocimiento también incluía la solución de sistemas de 2 ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas.

SIGLO XVI ANTES DE CRISTO

Probablemente por la influencia de los babilonios y mesopotámicos, los egipcios usaron los mismos conocimientos (e incluso los mejoraron) para resolver problemas prácticos de distribución de materiales, víveres y construcción. La notación que usaban estaba basada en jeroglíficos, por lo que era difícil de entender por cualquiera.
A los siglos anteriores a este corresponden los papiros tanto de Rhind como el de Moscú que ya mencionamos en el capítulo II.

SIGLO V ANTES DE CRISTO

El matemático Pitágoras, del que ya han escuchado hablar y que perteneció a la cultura griega, sentó las bases de la forma de pensar en matemáticas. Aunque sus aportaciones más significativas fueron en la geometría.

SIGLO III ANTES DE CRISTO

La escuela griega hacía aportaciones en varias ramas del saber, en especial en matemáticas. Fue Arquímedes quien propuso ideas para poder escribir números que eran grandes.
Pudo hacer una aproximación muy cercana y suficiente, para efectos prácticos, de otro número que también es un conocido suyo desde la primaria. ¿Ya adivinaron que se trata del número π =3.1416?.
Fueron los griegos quienes se dieron cuenta de su importancia, por lo cual decidieron ponerle ese símbolo especial que corresponde a una letra del alfabeto griego. También en esta época vivió Euclides, quien reglamentó los conceptos geométricos que desde entonces se siguen usando.
En su obra "Elementos de Geometría", él dedicó un libro al estudio de números y otro libro a las potencias enteras de las fracciones.
La geometría propuesta por Euclides seguirá siempre vigente.

SIGLO I DE NUESTRA ERA

En el lejano Oriente, específicamente en China, se compiló la obra llamada "El arte del Cálculo" en nueve capítulos, que era un compendio de varios autores con varias técnicas para dar solución a ciertas ecuaciones de primer grado y también de segundo grado, así como también sistemas lineales de 2 ecuaciones con dos incógnitas.

SIGLO II

Nuevamente la escuela griega brilló con el matemático Nicómano de Gerasa quien propuso en su obra "Introducción a la Aritmética" las reglas indispensables para el uso correcto de los números.

SIGLO III

Diofanto de Alejandría, griego del que ya han escuchado hablar, dio a conocer su obra llamada "Aritmética". Su mérito fundamental es el uso sistemático de algunas ecuaciones de grados 1 y 2. Fue visionario al comprender que en matemáticas se trabaja con cantidades desconocidas, por lo que propuso usar símbolos especiales para las incógnitas. Para tal fin, él usó la primera sílaba de la palabra griega "arithmos" que significa número. Es considerado el precusor del álgebra. ¿Recuerdan el epitafio de Diofanto que también mencionamos en el capítulo II ?

SIGLO VII

En India, cuna de la numeración que usamos mundialmente, en el año 628, el matemático Brahmagupta describió las reglas para el uso de los números negativos y de los positivos.

SIGLO IX

Al-jwarizmi vivió en esta época. Fue el primero en hacer un compendio de todo el conocimiento algebraico que había hasta aquel momento, que incluía ecuaciones de grados 1 y 2, así como métodos de solución. Él recibió el caudal de conocimientos de su cultura, la cual era la más avanzada entonces. Su obra quedó al servicio de todas las matemáticas.

SIGLO X

Otro matemático de la cultura árabe pero esta vez de Egipto, cuyo nombre es Abu Kamil continuó la obra de Al-jwarizmi. Dichos conocimientos serían aprovechados por Fibonacci siglos después.

SIGLO X

También en este siglo el matemático Abu Wafa Al Bujzani analizó los trabajos de Al-jwarizmi y Diofanto. Debido a la atención que él tuvo en esos trabajos, que matemáticos de la Europa medieval conocieron las sendas obras para aprender de ellas.

FINALES DEL SIGLO X

Otro musulmán destacado fue Al-karaji que resolvió algunas ecuaciones de grado par pero su legado principal es que, debido a él, el simbolismo de la matemática musulmana mejoró y el álgebra logró no tener que usar herramientas geométricas para poder bastarse sola.

SIGLO XII

En la célebre escuela de traductores de Toledo, varios monjes tuvieron a bien poner en latín (lengua que aunque ya era muerta, era la universal para la difusión de la ciencia en la Europa medieval), la obra matemática musulmana. Mención especial tiene el monje inglés Robert De Chester que tradujo la obra de Al-jwarizmi "Kitab al muhtasar fi hisab al-jabr wa'l muqabala"

COMIENZOS DE SIGLO XIII

Debido quizás al impacto de las matemáticas desarrolladas por el imperio árabe, Leonardo De Fibonacci, también conocido como Leonardo De Pisa, viajó a África para aprender del conocimiento que había allá, especialmente sobre el sistema de numeración indoarábigo, el uso del ábaco, la aritmética y el álgebra.
Esos conceptos le sirvieron para escribir su libro "Tratado del ábaco" que fue fuente de conocimiento e inspiración para los estudiosos de Europa.

SIGLO XV

Ya casi al final de este siglo, fue en Francia que el matemático Nicolás Chuquet formalizó el uso de los números negativos en Occidente (pues en Oriente ya eran conocidos) al igual que el uso de exponentes.

Mientras que en Alemania en1489, Johann Widmann D'Eger simplificó las palabras "piu" (más) y "minus" (menos) con los símbolos + y – para la suma y la resta.

SIGLO XVI

Alemania, 1525: EL mejor matemático de este país en ese siglo, Christoph Rudolff propuso el signo de radicales √ para operaciones con raíces.

Italia, entre 1545 y 1560: Cardano y Bombelli pensaban en la necesidad del uso de números imaginarios para poder solucionar ecuaciones de grado mayor a uno. Bombelli lo pensaba como una idea quizá osada pero con la que era interesante experimentar.

Inglaterra, 1557: Robert Recorde propuso e introdujo el símbolo = para representar la igualdad que resultó una aportación magnífica.

SIGLO XVII

En Francia, René Descartes vuelve a juntar el álgebra y la geometría creando la geometría analítica y propuso el uso de las primeras letras del abecedario para las constantes y las últimas para las variables o incógnitas, costumbre muy arraigada incluso en este siglo XXI. Además formalizó la notación exponencial como la conocemos actualmente.

Este es un recorrido por la historia de las matemáticas y el álgebra en particular, breve pero significativo, Intenta darles una panorámica de su transformación y evolución. Seguramente conocerán otros hechos en sus estudios que ampliarán lo aquí leen.

CONCLUSIÓN

Desde el momento que inicié esta tesis, tuve la intención de presentar los conceptos matemáticos que aquí expongo con un lenguaje sencillo y similar al que usan los jóvenes, así como ejemplos y situaciones accesibles o familiares para ellos.

También quise mencionar algunos hechos históricos relacionados con los temas, pues considero que es imprescindible contextualizarlos, con el fin de hacerlos más claros, amenos e interesantes.
Además, no es frecuente que algún autor de un texto de enseñanza de las matemáticas se extienda en estos conceptos con las características que he mencionado.

Tengo la convicción de haber escrito sobre un tema que es fundamental en la enseñanza de las matemáticas, de forma accesible con la que el estudiante se sienta identificado y reconozca que los conceptos en esta ciencia, no tienen por qué aprenderse solemnemente sino que también pueden aprenderse a través de situaciones cotidianas o hechos divertidos que nos ocurren a diario.
Los jóvenes agradecen esto y lo he constatado en las aulas, donde al dialogar con ellos, expresan su interés por contar con explicaciones más detalladas de hechos científicos e históricos pero también de situaciones conocidas y cercanas a su realidad diaria.

Estoy seguro que las matemáticas son una ciencia viva, que se enriquece a diario con ideas nuevas y que los profesores debemos mostrarlas como algo agradable, observando tanto lo que el alumno aprende como lo que se le dificulta .
Si deseamos mejorar verdaderamente el aprendizaje en esta disciplina, debemos transmitirla en forma amena y variada para que nosotros no caigamos en la monotonía y ellos en la memorización. También asegurarnos que han comprendido lo transmitido, lo cual finalmente redundará en un aprendizaje más sólido y significativo.
Esto les dará la certeza de que las matemáticas son aliadas del razonamiento y no un obstáculo en su camino

BIBLIOGRAFÍA

History of Mathematics, Volumen I.
Por David Eugene Smith.
Editado por Dover Publications, Inc, Nueva York.
Capítulo 2 pags 47-48, capítulo 5 pags 164-171, capítulo 6 pags 214-216, capítulo 8 pags 292-324.

Introduction to the Histoty of Mathematics.
Por Howard Eves, Cuarta Edición.
Editado por Holt, Rinehart and Winston, Año 1974.
Capítulo 2 pags 40-43, capítulo 7 pags 192-194, capítulo 8 pags 208-221, 219-223.

Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.
Por Morris Kline.
Editado por Oxford University Press, Año 1972.
Capítulo 13 pags 263-265.

The History of Mathematics: A Reader.
Por John Fauvel y Jeremy Gray.
Editado por Mac Millan Press, Año 1987.
Capítulo 6 pags 228-229, capitulo 8 pags 253-256, 259-260.

Historia de las Matemáticas.
Por Jean Paul Collette, Segunda Edición.
Editado por Editorial Siglo XXI, Tomo 1, México, Año 1986.
Capítulo 8 pags196-200, capítulo 9 página 228, capítulo 10 pags 260-261, 266-268, 270-274.

Obras Generales Consultadas:

Álgebra.

Por Elena de Oteyza de Oteyza, Carlos Garciadiego, Emma Lam Osnaya.

Editado por Prentice Hall Hispanoamericana.

Primera Edición, Año 1996, México.

Álgebra.

Por Eduardo Carpinteyro Vigil y Rubén B. Sánchez Hernández.

Editado por Publicaciones Cultural.

Primera Edición, Año 2002, México.

Álgebra para preuniversitarios.

Por Rodolfo Alvarado García.

Editado por Editorial Esfinge.

Primera edición, Año 2001, México.

Álgebra contemporánea.

Por Paul K. Rees, Fred W. Sparks, Charles Sparks Rees.

Editado por McGraw-Hill.

Primera edición en español, Año 1983, México.