00324
34

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS MATEMATICOS PARA DETERMINAR EL LIMITE MAXIMO DE RETENCION PARA EL SEGURO DE SALUD EN MEXICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

RODOLFO SEBASTIAN VELAZQUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

ACT. FERNANDO ELEAZAR VANEGAS CHAVEZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2003

A

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Rodolfo Sebastián Velázquez
FECHA: 7/11/2003
FIRMA: Rodolfo Sebastián V.

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Modelos Matemáticos para determinar el Límite Máximo de Retención para el Seguro de Salud en México

realizado por RODOLFO SEBASTIAN VELAZQUEZ

con número de cuenta 08955489-8, quien cubrió los créditos de la carrera de:
MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	ACT. FERNANDO ELEAZAR VANEGAS CHAVEZ
Propietario	ACT. RICARDO HUMBERTO SEVILLA AGUILAR
Propietario	ACT. FELIPE ZAMORA RAMOS
Suplente	ACT. RICARDO VILLEGAS AZCORRA
Suplente	M. EN C. FELIX CAPULIN PEREZ

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

B

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia, el apoyo que me brindo durante el tiempo que curse la carrera, no presionándome para terminarla, y en segundo lugar a mi director de tesis y sinodales que hicieron posible que llevara acabo la realización de la presente tesis, por último a todos mis compañeros y maestros que me animaron para terminar la carrera y la tesis.

C

INDICE

Página

D

INTRODUCCION

Lo que se desarrolla en la presente tesis, es primeramente el tema de la seguridad social, enfocado principalmente al Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), iniciando con su historia y siguiendo con su desarrollo, principales cambios, hasta llegar al punto en el que se menciona que debido a que las instituciones del sector salud no cubren las necesidades de la población, algunas compañías aseguradoras empiezan a prestar servicios médicos y privadas de salud para un mercado de nivel medio y alto a través de clínicas, hospitales y redes médicas, pero sin ninguna regulación y posteriormente con las modificaciones a la Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de seguros (LGISMS), las aseguradoras entraran de lleno a la administración de los servicios de salud con sus planes de carácter médico surgiendo así las Instituciones de Seguros Especializadas en Salud (ISES).

Posteriormente se trata el tema del límite de retención, tratando primeramente, su concepto, aquí se explica la idea abstracta y general, el pensamiento expresado con palabras, sus características, definición, se fija y enuncia con claridad y exactitud su significado, las tablas para el cálculo de la retención, esto se da cuando la Dirección de una compañía haya fijado los importes de la retención por riesgo o siniestro y por evento, el departamento de reaseguro procederá a elaborar las tablas de retenciones, o sea la lista de retenciones que corresponde a la calidad de los distintos negocios, dentro de cada ramo, después se habla de los factores para determinar la retención tales como la ley, el ramo, perfil de la cartera, clase de reaseguro etc., ya que los modelos incluirán algunos de estos factores, y por ultimo se habla de reaseguro en el ramo de salud, en donde se menciona que las aseguradoras solo pueden contratar reaseguro del extranjero con empresas inscritas en el registro de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), también se habla de las clasificaciones del reaseguro tanto del punto de vista técnico como operativo.

En el capitulo 3 y 4 se llega al punto principal que es la presentación de los siete modelos matemáticos. En el modelo que utiliza el Método de Multiplicadores de Lagrange, se define una función como una variable aleatoria que mide el riego máximo de los montos retenidos y lo que se desea es que para un valor esperado de la variable aleatoria su varianza sea mínima, lo cual se logra determinando sus valores característicos utilizando el principio de la varianza mínima. Es decir, se quiere que la varianza de la variable aleatoria sea mínima bajo la condición de que la esperanza de la misma variable sea constante.

El modelo del Valor Óptimo se ejemplifica a través de un plan de vida, siendo el monto retenido y en consecuencia el monto reasegurado las cantidades a determinar se suponen cantidades cedidas y cantidades más favorables u óptimas reaseguradas, por lo tanto se contemplan tanto los montos en riesgo como las primas que se están pagando por ellos. El método supone un monto de suma asegurada como límite de retención y se evalúa el valor en una expresión que incluye los montos del riego y de la prima, si el monto de la suma asegurada es menor que la expresión del monto del riesgo y de la prima, aún no se tiene el límite buscado, el monto de suma asegurada queda en retención; este procedimiento se lleva acabo hasta que se encuentra un índice para el cual se cumpla que el monto de la suma asegurada sea mayor que la expresión de monto del riesgo y la prima, siendo el límite una parte de la expresión del monto y de la prima.

En el modelo en Base a un Problema de Riesgo y Rendimiento se considera la determinación del limite de retención como un problema de riesgo y rendimiento, es decir, dado que la cedente esta expuesta a la ocurrencia de un evento desfavorable(la ocurrencia de muerte para sus asegurados), se desea en base a tal eventualidad, obtener una cierta "ganancia" o un cierto "rendimiento", reflejando éste como el minimizar del costo máximo que tenga que desembolsar la cedente ante la ocurrencia de un siniestro, o bien, que el riesgo total de la cantidad a retener sobre cada póliza llegue a ser mínimo.

En el modelo de Teoría del Riesgo, se habla de la estabilidad y solvencia económica del ente asegurador, de las teorías del riesgo tanto a nivel individual como colectivo, de magnitudes de estabilidad como es el recargo técnico o de seguridad y las reservas de solvencia, del proceso de riesgo, y un ejemplo numérico en el cual se emplea el reaseguro de exceso de pérdida para una cartera homogénea y no homogénea calculándose el costo medio con reaseguro y sin reaseguro, después las ecuaciones de estabilidad una vez introducido el reaseguro obteniéndose de aquí el pleno y por último se sustituyen los valores numéricos.

El modelo que considera el Capital y las Reservas solo toma en cuenta el capital contable, las reservas y las primas, como los recursos con los que cuenta la compañía para afrontar la máxima desviación por siniestralidad que se pueda presentar.

El modelo de la Pérdida Máxima Probable se basa en el perfil de la cartera de sumas aseguradas y primas de la compañía, este modelo aparte de las variables mencionadas requiere también conocer el número de riesgos por rango de suma asegurada, A partir de estas tres variables se obtienen los demás valores necesarios para determinar el límite máximo de retención, como son, la cuota de tarifa (prima anual / suma asegurada), la prima y la suma asegurada acumulada por cada uno de los rangos en que se dividió la cartera. El siguiente paso es realizar el cálculo de las primas, del monto disponible para cubrir siniestros (es un porcentaje de la prima anual) y de la pérdida máxima probable que se tendría al variar el límite de retención. Por último se obtiene un índice que indica la capacidad que se tiene para cubrir los posibles siniestros, el valor del índice más cercano a uno nos dice hasta que límite de suma asegurada nos conviene retener.

El modelo de la Suma Reclamada está basado en los montos de sumas reclamadas o siniestros y en las primas emitidas que tiene una compañía en cierto periodo del tiempo, requiere también conocer el número de siniestros por rango de suma reclamada, partir de estas variables se obtienen los demás valores necesarios para determinar el límite máximo de retención, como son la prima y la suma reclamada por cada uno de los rangos. Posteriormente se hace el cálculo de las primas, del monto disponible para cubrir siniestros, y por ultimo se obtiene el índice que indica la capacidad que se tiene para cubrir reclamaciones, el valor más cercano a uno, nos indica hasta que límite de suma reclamada nos conviene retener. Como podemos ver este modelo es muy semejante al modelo de la Pérdida Máxima Probable

Por último se ve cual es el mejor modelo matemático para determinar el Límite Máximo de Retención para el Seguro de salud en México ya que cada modelo tiene su detalle para poderse aplicar, unos debido a que dependen de la experiencia de las aseguradoras, otros por que son muy teóricos y otros por que usan conceptos no muy aplicables a nuestro país.

1.1 Antecedentes de la Seguridad Social en México

Los únicos antecedentes verdaderos de la legislación moderna sobre aseguramiento de los trabajadores y de sus familiares, se encuentran a principios del siglo XX, en los últimos años de la época porfiriana: En dos disposiciones de rango estatal: la Ley de accidentes de trabajo del Estado de México, expedida el 30 de abril de 1904, y la Ley sobre Accidentes de Trabajo, del estado de Nuevo León, expedida en Monterrey el 9 de abril de 1906. En estos dos ordenamientos legales se reconocía, por primera vez en el país, la obligación para los empresarios de atender a sus empleados en caso de enfermedad, accidente o muerte, derivados del cumplimiento de sus labores. Para 1915 se formuló un proyecto de Ley de Accidentes que establecía las pensiones e indemnizaciones a cargo del empleador, en el caso de incapacidad o muerte del trabajador por causa de un riesgo profesional.

La base constitucional del seguro social en México se encuentra en el artículo 123 de la carta Magna promulgada el 5 de febrero de 1917. Ahí se declara "de utilidad social el establecimiento de cajas de seguro populares como los de invalidez, de vida, de cesación involuntaria en el trabajo, de accidentes y de otros con fines similares."

A finales de 1925 se presentó una iniciativa de Ley sobre Accidentes de Trabajo y Enfermedades Profesionales. En ella se disponía la creación de un Instituto Nacional de Seguros Sociales, de administración tripartita pero cuya integración económica habría de corresponder exclusivamente al sector patronal. También se definía con precisión la responsabilidad de los empresarios en los accidentes de trabajo y se determinaba el monto y la forma de pago de las indemnizaciones correspondientes. La iniciativa del seguro obrero suscitó la inconformidad de los empleadores que no estaban de acuerdo en ser los únicos contribuyentes a su sostenimiento y consideraban que también otros sectores deberían aportar. En 1929 el Congreso de la Unión modificó la fracción XXIX del artículo 123 constitucional para establecer que "se considera de utilidad pública la expedición de la Ley Seguro Social y ella comprenderá seguros de invalidez, de vida, de cesación Involuntaria del Trabajo, de enfermedades y accidentes y otros con fines análogos. Con todo, habrían de pasar todavía casi quince años para que la Ley se hiciera realidad."[1]

1.2 Proyectos de ley de la seguridad social en México

En 1935 el presidente Lázaro Cárdenas envió a los legisladores un proyecto de Ley del Seguro Social, en el cual se encomendaba la prestación del servicio a un Instituto de Seguros Sociales, con aportaciones y administración tripartitas, que incorporaría a todos los asalariados del sector privado, tanto industriales como agrícolas. Sin embargo, se consideró que el proyecto requería aún estudios ulteriores. Por encargo del mismo Cárdenas, se elaboró un nuevo proyecto que resumía la experiencia de los anteriores. Su principal autor fue el titular de la Secretaría de Gobernación, Licenciado Ignacio García Téllez. Colaboraron varios especialistas en derecho, medicina y economía, basados en la legislación expedida en otros países hispanoamericanos.

El proyecto de García Téllez se refería a la creación de un Instituto de Seguros Sociales, de aportación tripartita, que incluía al Estado, a los trabajadores asegurados y a sus patrones y que cubriría o prevendría los siguientes riesgos sociales: enfermedades profesionales y accidentes de trabajo, enfermedades no profesionales y maternidad, vejez e invalidez y desempleo.

Aprobado el proyecto por un consejo de ministros, fue enviado a la Cámara de Diputados en diciembre de 1938. Pero tampoco esta vez pudo llegar más adelante pues a los legisladores les

[1] http://www.imss.gob.mx/IMSS/estoesimss/imss_misión.htm

pareció conveniente que se elaborara un documento más completo fundamentado en estudios actuariales. Por otra parte, la situación del momento, de fuerte crisis provocada por la expropiación petrolera, exigía promover antes que nada la unidad nacional.

Por otra parte, a partir de 1939 la situación de guerra motivó muchas inquietudes por encontrar soluciones a los problemas de desigualdad económica y social. Uno de los puntos de acuerdo de los firmantes de la carta del Atlántico fue que, una vez derrotadas las potencias nazifascistas había que lanzarse a la búsqueda de instituciones tanto nacionales como internacionales que procuraran, aparte de la paz y la tranquilidad mundiales "la seguridad de que todos los hombres de todos los países, pudieran vivir libres tanto de temores como de necesidades". [2]

1.3 Nacimiento de la seguridad social en México

Por lo anterior, hacia 1942 confluían todas las circunstancias favorables para que finalmente pudiera implantarse en México el Seguro Social. El interés del Presidente Ávila Camacho por las cuestiones laborales ya se había manifestado desde el mismo día que asumió la presidencia, cuando anuncio la creación de la Secretaría de Trabajo y Previsión Social y la encomendó a quien fuera Secretario de Gobernación del régimen anterior, el licenciado Ignacio García Téllez. Atendiendo a la tónica del momento, la función inicial de la naciénte dependencia fue limar asperezas y procurar la conciliación obrero-patronal.

En diciembre del mismo año se envió a las cámaras la iniciativa de Ley, proponiendo como suprema justificación, que se cumpliría así uno de los más caros ideales de la Revolución Mexicana. Se trataba "de proteger a los trabajadores y asegurar su existencia, su salario, su capacidad productiva y la tranquilidad de la familia; contribuir al cumplimiento de un deber legal, de compromisos exteriores y de promesas gubernamentales". El congreso aprobó la iniciativa y el 19 de enero de 1943 se publicó en el Diario Oficial de la Federación la Ley del Seguro Social.

Ahí se determina, desde los artículos iniciales, que la finalidad de la seguridad social es garantizar el derecho humano a la salud, la asistencia médica, la protección de los medios de subsistencia y los servicios sociales necesarios para el bienestar individual y colectivo. Como instrumento básico de la seguridad social se establece el Seguro Social y para administrarlo y organizarlo, se decreta la creación de un organismo público descentralizado, con personalidad y patrimonio propios, denominado Instituto Mexicano del Seguro Social.

1.4 Los primeros años de la seguridad social en México

Al iniciarse las actividades del nuevo organismo, su primer director, Vicente Santos Guajardo y una planta de empleados mínima, se dedicaron, entre otras cosas, a realizar los proyectos e investigaciones que implicaban la instrumentación de las diversas ramas de aseguramiento; estudiar las experiencias de otros países en el campo de la seguridad social para aprovecharlas en México; divulgar el sentido las posibilidades de la seguridad social y realizar una intensa labor de convencimiento, tanto entre los trabajadores como entre los empresarios, acerca de los alcances de la Ley y de las ventajas que reportaría a unos y a otros su aplicación. Se determinó que el Seguro Social empezaría a funcionar en el Distrito Federal a partir de enero del año siguiente; mientras tanto se procedió a la inscripción de los patrones.

[2] http://www.imss.gob.mx/IMSS/estoesimss/imss_misión.htm

En diciembre de 1943 el Lic. García Téllez es nombrado nuevo director del Instituto y unos cuantos días después, el 6 de enero de 1944, se pone en marcha formalmente el otorgamiento de servicios médicos en todas las modalidades prescritas.

Sin embargo, durante algunos meses continuaron las manifestaciones de inconformidad y los ataques contra la introducción del sistema. Estos provenían de varios sectores empresariales que se resistían al nuevo pago implicado en las cuotas de la seguridad social. Curiosamente, también algunos grupos sindicales realizaron numerosas expresiones de rechazo. Poco a poco se fueron atenuando las posiciones más violentas ante la actitud decidida del gobierno de poner en marcha el Seguro Social en todos sus ramos. Antes de que concluyera 1946 el sistema operaba ya en Puebla, Monterrey y Guadalajara; el Instituto, tras sus primeros tiempos de dificultades políticas y angustias financieras, había alcanzado la seguridad económica necesaria y el reconocimiento general por la importancia de sus beneficios.

Implantado el régimen en su modalidad urbana en los principales centros de población, se decidió iniciar paulatinamente el aseguramiento de los trabajadores del campo.

1.5 Tiempos de crecimiento de la seguridad social en México

En el período 1946-1952, se fue consolidando en el Instituto un notable equipo sociomédico, al tiempo que se ampliaban los servicios y el régimen se extendía a otras entidades federativas. Se inauguró el primer hospital de zona, La Raza y también el primer edificio principal ubicado en el Paseo de la Reforma, de la ciudad de México. Durante la administración 1952-1958 se buscó asegurar el equilibrio financiero de la institución mediante la reorganización administrativa. Se diseño un plan de inversiones que incluía la construcción de grandes unidades hospitalarias y se inició en el Distrito Federal el sistema de Medicina Familiar. A finales del período estaban cubiertos los principales centros industriales y agrícolas del país.

En los años siguientes continuó creciendo no sólo el número de asegurados y beneficiarios sino también la cantidad de prestaciones a otorgar. Por las reformas a la Ley del Trabajo de 1962 quedó a cargo del Instituto proporcionar los servicios de guardería infantil para los hijos de trabajadoras. El Centro Médico Nacional entró en funcionamiento pleno y ampliaron los servicios de prestaciones sociales por medio de teatros, actividades deportivas y talleres. Para 1964 ya se encontraban protegidos por el Seguro Social poco más de 6 millones de mexicanos, cifra que se incrementaría en 50 % en el período comprendido entre 1964 y 1970.

A partir de 1970 hay un giro importante en la manera de entender la realidad nacional; se percibe la necesidad de hacer extensivos a toda la población los frutos del desarrollo económico logrado por el país. El Seguro Social se entiende como una de las instituciones más eficaces para construir justicia social entre los mexicanos y se busca favorecer su expansión y consolidar su funcionamiento. Durante 1972 se iniciaron estudios para realizar múltiples e importantes adiciones a la Ley del Seguro Social; fueron aprobadas por el Congreso de la Unión y publicadas en marzo de 1973. La nueva Ley ampliaba los beneficios del régimen obligatorio, extendía la seguridad social a ejidatarios, comuneros y pequeños propietarios organizados e implantaba el ramo de guarderías en toda la república.

El rasgo más trascendente de esta Ley fue la clara intención de que el Seguro Social no se quedara en una mera instancia de justicia laboral sino que, en medida de las posibilidades, tendiera a construir una "seguridad social integral". En estos términos se entiende la facultad otorgada al Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), de extender su acción a poblaciones marginadas, sin capacidad de pagar cuota alguna. Así comenzó a operar el programa de Solidaridad Social por cooperación comunitaria, financiado por la Institución y por el Estado. Se convirtió, en 1979, en el programa IMSS-Coplamar por cooperación comunitaria y, al desaparecer el organismo Coplamar, tomo el nombre que lleva hasta la fecha: Programa IMSS-Solidaridad.

A pesar de los momentos difíciles de los años 1982 y siguientes, el instituto siguió avanzando para lograr que la totalidad de la población con una relación formal de trabajo se incorporara al sistema de seguridad social. Para 1987 el régimen ordinario cubría ya casi 33 millones de mexicanos, de los cuáles más de 7 millones eran asegurados permanentes.

Las crisis económicas de los últimos tiempos han afectado seriamente la situación financiera y, por consiguiente operativa de la Institución. Durante todo el año 1995 se realizó un profundo proceso de auto-examen, para detectar todo aquello que había dejado de ser funcional y buscar, con la colaboración de los involucrados y de la población en general, la solución a los problemas de fondo. De este proceso surgió la iniciativa de una nueva Ley del Seguro Social, aprobada por el Congreso de la Unión y publicada en el Diario Oficial de la Federación en diciembre del mismo año. La nueva ley entre otras cosas modifica radicalmente el sistema de pensiones para asegurar su viabilidad financiera y una mayor equidad en el mediano y largo plazos.

Posteriormente a la fundación del IMSS, se crearon otras instituciones y programas que otorgan servicios de bienestar social: en 1959, con motivo del 21 aniversario de la expedición del estatuto jurídico de la Federación de Sindicatos de Trabajadores al Servicio del Estado(FSTSE) se efectuó una ceremonia en el Palacio de Bellas Artes en donde el presidente Adolfo López Mateos presento al Congreso de la Unión la iniciativa de ley que dio origen al Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (ISSSTE).Discutida y aprobada esta iniciativa, la Dirección General de Pensiones y de Retiro se transformó en 1960 en el (ISSSTE), nadie puede negar que en la actualidad el (ISSSTE) es un modelo de seguridad social, pues otorga oportunidades en la salud, la vivienda, las pensiones, los préstamos, la protección al salario, la cultura, el deporte y la recreación. Se crea también, el Instituto del Seguro Social para las Fuerzas Armadas Mexicanas (ISSFAM), el Instituto del Fondo Nacional de la Vivienda para los Trabajadores (INFONAVIT), el Fondo para la vivienda del Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (FOVISSSTE), el programa de Desarrollo Integral de la Familia (DIF), además de los servicios de la Secretaría de Salud (SS).[3]

Actualmente, el IMSS cuenta con una infraestructura superior a mil setecientas unidades médicas a las cuales asisten más de setecientas mil personas por día, además, cubre cerca de un millón y medio de pensiones mensualmente y en sus guarderías recibe a sesenta y un mil niños diariamente. No obstante lo anterior, el estado reconoce que el sistema público tiene deficiencias y limitaciones que son necesarias corregir y pretende hacerlo a través de la generación de ahorro interno y crecimiento del empleo, además de resolver la situación critica por la que actualmente atraviesa dicho instituto.

1.6 Principales modificaciones en el IMSS

Desde que el IMSS fue creado, ha sufrido varias modificaciones con el fin de ampliar y mejorar la calidad en el servicio, pero durante la trayectoria institucional se han efectuado transferencias de recursos entre los distintos ramos de aseguramiento, especialmente del ramo de Invalidez, Vejez, Cesantía, Muerte y Guarderías para sufragar el déficit financiero del ramo de Enfermedades y Maternidad, el cual al ser creado en 1943, consideró una cuota para dar servicio exclusivamente al

[3] http://informatica.issste.gob.mx/website/quees/quees.html

trabajador, servicio que a cambio de la misma cuota, fue extendido a sus familiares directos provocándose así el desfinanciamiento.

Lo anterior ocasionó que el ramo de Invalidez, Vejez, Cesantía en edad avanzada y Muerte (IVCM) ya no tuviera reservas para cubrir las pensiones y que el ramo de guarderías ya no tuviera recursos para favorecer su crecimiento y satisfacer la demanda del servicio, obligando a estos dos ramos a dejar de transferir recursos al ramo de Enfermedades y Maternidad, con la cual se marca una pauta que exige una transformación que permite garantizar la suficiencia financiera del ramo.

Dentro de los factores que han favorecido el desfinanciamiento del ramo de Enfermedades y Maternidad, encontramos la incorporación al esquema de diversos grupos con condiciones irregulares de trabajo, tales como los trabajadores estacionales del campo, miembros de sociedades locales de crédito ejidal, productores y trabajadores de caña de azúcar, henequeros, tabacaleros, algodoneros, cafeticultores, vendedores de lotería, entre otros. Por otra parte, las enfermedades crónico degenerativas, características de sociedades avanzadas, han avanzado y además, no se puede pasar por alto el hecho de que las contribuciones y la cobertura de la seguridad social están directamente vinculadas a la situación del empleo y los salarios, ya que al disminuir el empleo formal, se mantiene la cobertura y bajan los ingresos del instituto. La recaudación al estar ligada a los salarios y no al costo de los servicios, depende de la evolución de éstos, por lo que en épocas en que los salarios no crecen en términos reales, los ingresos institucionales disminuyen. Por otra parte, los recursos del Instituto pertenecientes a otros ramos, por ejemplo, Retiro, Invalidez, Vejez, Cesantía y Muerte, Riesgos de trabajo, Guarderías, recursos destinados para actividades culturales y deportivas, se vieron seriamente afectados por que se utilizaron para solventar el ramo de Enfermedades y Maternidad, además de verse involucrados otros factores como la corrupción.

En la iniciativa de nueva Ley del Seguro Social (LSS) de 1995, se propusieron modificaciones al ramo de Enfermedades y Maternidad con el objetivo de ampliarlo y fortalecerlo. Estas consistieron en separar el financiamiento de las prestaciones en especie, del financiamiento de las prestaciones en dinero, así como la ampliación de la cobertura de los servicios de salud, lo cual implicó la cobertura de un seguro de salud para la familia con el que, cualquier trabajador que no sea sujeto al régimen obligatorio, podrá establecer un contrato con el Instituto para que él y su familia tengan derecho a las prestaciones médicas y de igual manera, las empresas podrán suscribir convenios con reversión de cuotas para beneficio de sus empleados sin poner en riesgo el equilibrio financiero del Instituto. Esto según el capitulo IV del seguro de enfermedades y maternidad sección primera, generalidades, artículo 89, fracción III que dice: "el instituto prestará los servicios que tienen encomendados, en la siguiente forma.

Podrá celebrar convenios con quienes tuvieren establecidos servicios médicos y hospitalarios, pudiendo convenirse, si se tratare de patrones con obligación al seguro, en la reversión de una parte de la cuota patronal y obrera en la proporción a la naturaleza y cuantía de los servicios relativos. En dichos convenios se pactará, en su caso, el pago de subsidios mediante un sistema de reembolsos. Estos convenios no podrán celebrarse sin la prueba anuencia de los trabajadores o de su organización representativa.

En todo caso, las personas, empresas o entidades a que se refiere este artículo, estarán obligadas a proporcionar al Instituto los informes y estadísticas médicas o administrativas que éste exigiere y a sujetarse a las instrucciones, normas técnicas, inspecciones y vigilancia prescritas por el mismo Instituto, en los términos de los reglamentos que con respecto a los servicios médicos se expidan."[4]

[4] ley del IMSS

Dentro del Sistema Nacional de Salud las instituciones encargadas de prestar los servicios se dividen en tres grupos:

1. instituciones que obtienen financiamiento tripartita(gobierno, empleados, y patrones)
    - IMSS(Instituto Mexicano del Seguro Social)
    - ISSSTE(Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado)
    - SDN(Secretaría de la Defensa Nacional)
    - SM(Secretaría de Marina)
    - PEMEX (Petróleos Mexicanos)
2. El segundo grupo opera con recursos gubernamentales.
    - SS(Secretaría de Salud)
    - DIF(Sistema Nacional para el Desarrollo Integral de la Familia)
    - DDF(Departamento del Distrito Federal)
    - Instituto Nacional de Adultos en Plenitud(antes INSEN)
3. El tercer grupo lo conforman las instituciones privadas. Estas operan bajo la supervisión de la Secretaría de Salud.

En México los organismos públicos y privados del Sector Salud dedicados a otorgar la cobertura de servicios médicos se han preocupado por mejorarla. El IMSS en lo particular, tiene como consigna dar prioridad a un programa de calidad, es decir, atender bien a todos los derechohabientes principalmente en los rubros siguientes:

- Calidad de los servicios.
- Reducción del tiempo de espera en la consulta médica familiar.
- Abatimiento del diferimiento quirúrgico, es decir, que una persona que requiera una operación no espere al grado que ponga en riesgo su vida.
- Desaturación de los servicios de urgencias.
- Abastecimiento de medicinas.
- Limpieza de las instalaciones.

Este proceso de renovación del Instituto es para dar respuesta a la creciente demanda de servicios con mayor calidad y, con ello, contrarrestar en parte la mala imagen que tiene no sólo entre sus derechohabientes sino también en la población en general, considerando las acciones siguientes:

- Atención con vocación de servicio.

- Atención domiciliaria al enfermo crónico: como lo son los adultos mayores que lamentablemente tendrían que hospitalizarse, ahora están en su propio hogar de acuerdo con un tratamiento médico para deshospitalizar la atención.

- Plan integral de calidad, los propios trabajadores del IMSS se organizan en equipos de mejora para dar soluciones a las problemáticas más comunes dentro del Instituto.

- Programa piloto respecto a la atención, citas vía telefónica con el médico y la clínica de la zona que más le convenga al asegurado. Este hasta el momento, se aplica únicamente en determinadas unidades de medicina familiar. De está manera se pretende dar mejores servicios a los asegurados y sus beneficiarios, sin descuidar a los médicos, toda vez que aquellos que den consultas mediante está modalidad tendrán el beneficio de percibir más ingresos, ya que independientemente de su sueldo recibirán una cantidad extra por cada derechohabiente que atiendan.

No obstante los avances observados, existen problemas como los epidemiológicos, cambios demográficos de la población, demanda creciente de servicios con calidad y eficiencia, que imposibilitan al sector público a seguir otorgando un servicio de calidad, presentando graves deficiencias.

1.7 Surgimiento de las instituciones de Seguros Especializadas en Salud (ISES)

Dado lo anterior, el sector privado ha realizado grandes inversiones enfocadas a cubrir las deficiencias de capacidad y calidad que tienen las Instituciones de Salud del Sector Público, ofreciendo servicios altamente eficientes dirigidos a la prevención y mantenimiento de la salud, tratando de evitar cirugías y/o tratamientos mas complicados.

La situación que provocó los cambios en el Ramo de Salud gira en dos aspectos:

- El indudable descrédito del IMSS

- La capacidad de comercialización de las aseguradoras que resalta los beneficios de la iniciativa privada en el Ramo de Salud.

Por tal motivo algunas compañías aseguradoras han comenzado a prestar servicios médicos y de salud para un mercado de nivel medio y alto a través de clínicas, hospitales y redes médicas privadas, con lo cual se dará una competencia entre el servicio de salud prestado por el Estado y la iniciativa privada.

Por otra parte, existe la posibilidad de revertir el pago de cuotas de la seguridad social, al menos parcialmente, a los empresarios que suscriban seguros de enfermedad privados para sus empleados. Por ejemplo, existen bancos y empresas que han proporcionado a su personal una asistencia médico sanitaria antes de la entrada en vigor de la ley de la seguridad social, ya que disfrutan hoy de la reversión de cuotas. Esta medida puede dar un fuerte impulso a los seguros de salud privados, pues en definitiva, supondría otorgar la libertad de elección entre el seguro estatal y el privado.

Con la aprobación de la iniciativa de reforma a la Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de seguros (LGISMS), las aseguradoras entrarán de lleno a la administración de los servicios de salud con sus planes de carácter médico. Situación que les redituará un mejor beneficio por su enorme capacidad de comercialización, teniendo en la mira a las personas que tengan capacidad económica y que estén inconformes con el sistema de atención médica del IMSS.

Los cambios a la (LGISMS) publicadas en el Diario Oficial de la Federación (DOF) el 3 de enero de 1997, se hicieron a raíz de las tendencias marcadas por los mercados nacionales e internacionales, con el propósito de incluir el ramo de salud dentro de la operación de Accidentes y Enfermedades.

Con el decreto de reforma a la LGISMS, publicado en el Diario Oficial de la Federación (DOF) del 31 de diciembre de 1999, se estableció que el ramo de salud sólo podrá practicarse por instituciones de seguros autorizadas y, de manera adicional, el ramo de gastos médicos. La operación y desarrollo del Ramo de Salud estará sujeto a las disposiciones de carácter general que emita la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), previa opinión de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) y de la Secretaría de Salud (SS).

Así mismo, con los cambios a la LGISMS, publicado en el Diario Oficial de la Federación (DOF) del 31 de diciembre de 1999, se modifica el concepto de "Operación Activa de Seguros" y se crea la figura jurídica de las Instituciones de Seguros Especializadas en Salud (ISES).

En cuanto a las facultades de la Secretaría de Salud (SSA) tenemos que para instrumentar la regulación y supervisión necesarias para ordenar este mercado, se incorporan modificaciones a los artículos, 3^0, 7^0, 16^0, 75^0, 105^0 y 106^0 de LGISMS, las cuales pueden resumirse de la siguiente forma:

En el artículo 7^0 se faculta a la Secretaría de Salud para participar en las disposiciones de carácter general que regulen la operación y desarrollo del ramo de Salud.

El artículo 16^0 se estipula que estas empresas necesitan obtener un dictamen de la SSA para conseguir su autorización como ISES.

El artículo 75^0 señala las causas de revocación cuando las ISES no presenten el dictamen que emite la SSA.

El artículo 105^0 señala la obligatoriedad de las ISES de presentar anualmente un dictamen emitido por la SSA.

El artículo 106^0 señala la facultad de la SSA para inspeccionar y vigilar los servicios y productos de salud, materia de los contratos de seguro que celebren las ISES.

Así, grandes consorcios financieros podrán incursionar en el sector de los servicios de salud públicos porque en la iniciativa de reforma analizada y aprobada, la población en general, incluyendo a los derechoshabientes del IMSS, tendrá la alternativa de adquirir un seguro de salud, siempre y cuando sus percepciones salariales sean superiores al mínimo mensual del Distrito Federal.

El objetivo explicito de la iniciativa aprobada es otorgar protección jurídica a los intereses del público usuario de los servicios de seguro en el Ramo de Salud, implicando modificaciones a diversas disposiciones con el fin de precisar la prestación de los servicios de salud, aun cuando se realice con recursos e instalaciones propios, como operación activa de seguros y con ello autorizar la práctica del ramo respectivo únicamente a instituciones de seguros. Las empresas así autorizadas, podrán operar conjuntamente el ramo de gastos médicos.

Sin embargo, el objetivo implícito de la iniciativa se enfoca a la participación de la inversión privada, vía aseguradoras, en el Ramo de Salud, para lo cual no fue necesario reformar la Ley del Seguro Social ni la del ISSSTE. Estas compañías privadas tendrán en la mira a las personas que obtienen ingresos económicos superiores a tres salarios mínimos. Atenderán a un sector de la población de ingresos de nivel medio y alto que actualmente no reciben los beneficios o la atención médica en el IMSS.

Los beneficiados de estas organizaciones serán aquellas empresas que deseen brindar una prestación adicional a sus trabajadores, profesionistas independientes, comerciantes, prestadores de servicios y en general, personas que no cuentan con un servicio de salud de tipo social.

Por su costo relativamente bajo, las personas podrán contar con servicios de atención médica de primer contacto a través de clínicas, hospitales y redes de prestadores de servicios, sin la necesidad de contratar un seguro de Gastos Médicos Mayores que para muchas personas resulta inaccesible por sus altos costos.

De tal manera que las personas que tengan la capacidad económica para contratar un Seguro de Salud con una compañía autorizada, definitivamente si tienen la posibilidad de obtener servicios médicos de mayor calidad, entonces podrán decidirse por contratar con una aseguradora una póliza del Seguro de Salud en vez de optar por el servicio médico, tanto como para él y su familia, de parte del IMSS.

En el decreto publicado en el DOF del 31 de diciembre de 1999, se modifica en la LGISMS, la definición de operación activa de seguros para el caso de servicios dirigidos a prevenir o restaurar la salud, otorgando únicamente el derecho de ésta práctica a instituciones de seguros autorizadas para este efecto, surgiendo así las Instituciones de Seguros Especializadas en Salud (ISES).

Las reglas para la operación del Ramo de Salud publicadas el 24 de mayo del 2000 establecen los lineamientos que regirán esta operación en los siguientes aspectos: requisitos de autorización, el contralor médico, el capital mínimo pagado, el capital mínimo de garantía, las reservas técnicas, la inversión, la contabilidad, registro de bases técnicas, reaseguro, sistema estadístico, la operación y comercialización.

La gran mayoría de los productos de las (ISES) no tiene suma asegurada, tienen una cobertura ilimitada con respecto al monto de indemnización.

El objetivo del mercado es la reversión de cuotas, esta de darse, tendría que ser bajo el esquema que ofrece el IMSS, el cual no contempla límite de suma asegurada, razón por la cual surge el presente trabajo.

2.1 La retención

La retención juega un importante papel en la planeación del programa de reaseguro: es en base a esta que la cedente fincará la planeación del programa de reaseguro.

En este capitulo se estudia el concepto y definición de limite de retención, pero antes se explica cual es la diferencia entre concepto y definición.

Concepto es la idea abstracta y general, es el pensamiento expresado con palabras, mientras que definición es fijar y enunciar con claridad y exactitud el significado de una palabra.

2.2 Concepto y características

La retención es la parte representada en dinero del riesgo que la compañía cedente (aseguradora) se hace responsable por cuenta propia, por posibles reclamos al ocurrir una pérdida.

La retención de la compañía se establece de acuerdo a la posición financiera existente y al capital que la respalda.

Es representada generalmente como una cantidad fija máxima, o bien como un porcentaje del riesgo, que nunca sobrepasa el límite superior establecido.

Esto no implica que siempre se cubrirá la retención en su totalidad, ya que ésta puede variar de acuerdo al ramo o a las características propias del negocio que se contrate, quedando muchas veces condicionada a las políticas de suscripción y a la clasificación que se tenga de los riesgos por asegurar tomando en cuenta la naturaleza de los bienes.

Por tanto tenemos que la capacidad de retención de la cedente refleja su solidez financiera y vista en un periodo de tiempo mostrará la tendencia de crecimiento de acuerdo a resultados anteriores, que serán la base para decidir o no modificar la retención.

Una vez que la compañía aseguradora ha establecido su retención en el riesgo por asegurar, tendrá que ofrecer a reaseguro el excedente, para así poder responder al cliente hasta la totalidad de la suma asegurada, en caso de una pérdida completa.

Otra opción que tiene la cedente, si es que su capacidad de retención no cubre la totalidad de la suma asegurada que se le solicita es el coaseguro

Un problema que surge, para la dirección de la compañía aseguradora, es restablecer su retención óptima, que no se basa siempre en una fórmula o criterio preestablecido. Es primordial considerar la experiencia obtenida en años anteriores, los términos legales existentes y la situación financiera de la compañía.

Debido a que en la determinación de la retención se consideran los objetivos a seguir y las políticas de suscripción internas de la compañía, las cuales están relacionadas con la naturaleza del negocio y del ramo a suscribir, y como las prioridades varían de una compañía a otra, no puede hablarse de que exista un a retención correcta. No existe por lo tanto un criterio general para establecer el nivel de retención bajo determinadas condiciones. Cuando mucho puede aplicarse un modelo que incorpore los factores que influyen, contando así con una herramienta para la toma de decisiones.

Es importante en la determinación de la retención de cada ramo, el volumen de primas que este aporta, el índice de siniestralidad, la estructura de las sumas aseguradas de los negocios, y principalmente en el caso del ramo de incendio, la determinación precisa de la perdida máxima probable, aspecto difícil de establecer como porcentaje de la suma asegurada total, sobre todo en grandes riesgos comerciales e industriales. Dicha determinación muchas veces implica la participación del asegurador como del reasegurador, ambos con gente especializada, para así calcular verazmente la peligrosidad intrínseca de cada riesgo.

Dada la importancia de la adecuada elección de la retención, actividad correspondiente a la directiva de la compañía, es necesario para obtener un programa de reaseguro redituable, poder modificar la retención. La variación debe ser de acuerdo a la estimación de pérdida probable de cada riesgo. Entonces se hace indispensable la creación de tablas de retención máxima de acuerdo a la calidad de los riesgos, con el fin de aprovechar en lo mayor posible la captación de prima y reducir los costos.

2.3 Definición

Se mencionan dos muy parecidas:

La retención es el importe que la compañía puede y quiere poner en juego, por cuenta propia, en la suscripción de cada negocio o de un conjunto de riesgos.

La retención es la suma máxima que la compañía está dispuesta a pagar en cualquier siniestro que afecte a una póliza, a un riesgo o a un grupo de riesgos.

A continuación se hace necesario la explicación y precisiones de algunas palabras de estas definiciones:

Retención: también se le conoce con el nombre de pleno, conservación, participación de la cedente, Franquicia, compromiso, neto, etc., según la forma de reaseguro y del mercado.

Importe: el importe puede expresarse en un porcentaje o en una cantidad determinada de suma asegurada por riesgo o en una cantidad determinada de siniestro.

Puede poner en juego: esto es debido a que las posibilidades de la compañía son limitadas por sus medios financieros y por las características de su cartera y también por la existencia de las disposiciones legales que fijan la retención máxima, globalmente o en cada ramo.

Quiere poner en juego: lo que esto significa es que como el seguro es todavía una cosa muy aleatoria y que, a pesar de ciertas reglas que se basan en la experiencia, el elemento especulativo no ha desaparecido. Por lo tanto la fijación de las retenciones máxima será objeto de una decisión de más alto nivel.

Por cuenta propia: lo que este término significa es que la compañía retendrá el porcentaje convenido o los importes por riesgo o siniestro para si misma por completo. En este contexto la conclusión de un contrato de reaseguro destinado a disminuir la retención estipulada por otro contrato de reaseguro deberá ser declarada al reasegurador del contrato original.

En la suscripción: el importe de la retención, por riesgo o por siniestro, deberá ser conocido en ocasión de la suscripción, es decir antes que el asegurador se hubiese comprometido hacia su futuro asegurado.

Cada negocio: es importante que los departamentos de la compañía tengan instrucciones precisas no solamente en cuanto a las retenciones máximas, sino también a su escalonamiento en función de la calidad del negocio suscrito.

Conjunto de riesgos: este término se refiere a las acumulaciones que en numerosos ramos pueden producirse, como son mercancías a bordo de un barco, pasajeros a bordo de un avión, un conjunto de edificios en una manzana.

2.4 Tablas de retenciones

Cuando la Dirección de una compañía haya fijado los importes de la retención por riesgo o siniestro y por evento, el departamento de reaseguros procederá a elaborar las tablas de retenciones, o sea la lista de retenciones que corresponden a la calidad de los distintos negocios, dentro de cada ramo. Se tomará en cuenta el hecho de que los importes indicados por la gerencia se refieren a riesgos normales y que, por lo tanto pueden aumentarse para riesgos de calidad mejor y, a la inversa, disminuirse en negocios más expuestos. En este estudio, no se entra en todos los detalles que deben tomarse en cuenta para la elaboración de dichas tablas, por lo que solo examinamos los elementos esenciales en cada ramo.

Accidentes Personales (individuales o colectivos)

Las actividades profesionales y extraprofesionales (como lo es un empleado de oficina y un piloto aficionado) dan la amplitud del riesgo; sin embargo, debido a que las estadísticas han demostrado que los peligros de la vida diaria fuera de la profesión, son tan grandes como los riesgos derivados del trabajo, muchas compañías han adoptado el sistema de una retención uniforme, con algunas excepciones para profesiones o aficiones particularmente peligrosas.

Aviación

Considerando también la posible acumulación de distintas pólizas sobre un mismo riesgo (casco, responsabilidad civil, accidentes personales, etc.) la compañía fijará su retención teniendo en cuenta la clase de avión (respecto al uso), la experiencia estadística, los aeropuertos utilizados, etc.

Fianzas

La solvencia, la calidad y liquidez de las garantías de recuperación del cliente, así como la estructura de la cartera en este ramo, son los criterios para fijar un porcentaje de retención.

Incendio

Los factores determinantes son la ubicación del riesgo, su construcción, el contenido, la actividad desplegada, los medios de prevención y de protección contra siniestros. La inclusión de coberturas adicionales (por terremoto, huracán y otras) modifica los criterios para la retención.

Un aspecto delicado es la fijación de un porcentaje de siniestro máximo probable en los grandes riesgos industriales, es un cálculo complicado y aleatorio que normalmente no debería hacerse sin la colaboración del reasegurador, con el fin de evitar discusiones desagrables en caso de siniestro.

En general, se considera que las coberturas de Ganancias Brutas (Pérdida de Utilidades o Lucro Cesante) hacen cúmulo con la cobertura de incendio, de modo que se aplica una retención combinada a ambos ramos.

Básicamente se conocen dos sistemas de tablas de retenciones. Algunas compañías practican uno de ellos, el cual sostiene la teoría de que la calidad del riesgo (calidad física y probabilidad de siniestros de las distintas coberturas) está reflejada en las tasas de prima. En principio, este sistema es muy lógico. No tiene en cuenta, sin embargo, la circunstancia de que en el seguro de Incendio y de sus riesgos accesorios, las estadísticas no son nada perfectas y que, por esta razón, las tasas de tarifa son tan solo una aproximación y contienen además elementos comerciales de importancia.

Ejemplo: Tabla de retenciones simplificada del Ramo de Incendio.

Tasa de Prima al %.	Retención Máxima
Hasta 3.50	US $ 1, 500,000
De 3.51 hasta 4.50	US $ 1, 000,000
De 4.51 hasta 5.50	US $ 750,000
De 5.51 hasta 7.50	US $ 500,000
Más de 7.50	US $ 350,000

Cabe señalar que este ejemplo es muy convencional, es decir, según lo que la tarifa de alguna compañía aseguradora o reaseguradora, sobre todo extranjera, establecería como tasas de prima viables. Sin embargo, en el transcurso de la década de los noventa tanto en México como en todo el mundo, se practica el mercado blando donde la cuota promedio de riesgo en este ramo no pasa de dos al millar.

El otro sistema está basado en la calidad de los riesgos, el cual se maneja precisamente en mercado blando. Depende del grado de peligrosidad, pero también de la competencia del mercado que presente cada riesgo para determinar su tasa de riesgo. Algunas compañías cuando tratan de sostenerse con cuotas de tarifa dejan de suscribir, hasta que llega el momento en que deben de ceder y también aceptar riesgos de uno al millar. Esta situación prevalece hoy en día.

Infidelidad

En las pólizas individuales, la clasificación del riesgo (profesión) y el importe asegurado (antiselección) serán los factores determinantes. Para las pólizas colectivas lo serán la extensión de la cobertura y el monto de la misma.

Ramos técnicos

En los ramos de ingeniería, la retención deberá ser fijada en muchos casos basándose en las características individuales de cada riesgo. En los casos más usuales se tendrán en cuenta la modalidad de cobertura, la ubicación y el monto asegurado.

Robo

Se tiene en cuenta la cobertura (valor entero, primer riesgo relativo o absoluto), la ubicación del riesgo, su tipo y las medidas de seguridad. Para este tipo de riesgos, las compañías reducen al máximo su retención en virtud de tratarse de ramos preferentemente de pérdida o de servicio como se le llama.

Transportes (mercancía y cascos).

La estructura de la retención depende normalmente del tipo de transporte, de la clase y calidad del medio de transporte para las mercancías y de la clase y calidad del buque en los cascos.

Automóviles, Responsabilidad Civil y accidentes de trabajo.

Estos ramos, en general, se reaseguran por contratos de exceso de pérdida; se fijará un importe de retención por siniestro que, además de tener en cuenta la capacidad financiera y la cartera de la compañía, dependerá también de las cotizaciones alternativas ofrecidas por los reaseguradores.

A continuación veremos un ejemplo de la determinación de la retención básica de varios ramos, para una compañía.

Capital de la compañía:	US $ 600,000
Reservas no catastróficas:	US $ 450,000
Reservas para catástrofes:	US $ 150,000

La cartera se compone esencialmente de los siguientes ramos:

Incendio: riesgos comerciales e industriales.

Transportes de carga: pólizas de importes medianos, que cubren importaciones por vía marítima sin posibilidad de determinar cúmulos.

Automóviles: valor de un vehículo no superior a US $ 20,000, responsabilidad civil US $ 50,000 por evento

Accidentes personales: pólizas individuales con un importe promedio de US $ 50,000 (riesgo de muerte).

Volumen de primas retenido por cuenta propia:

Incendio:	US $ 400,000
Transportes:	US $ 80,000
Automóviles:	US $ 600,000
Accidentes personales:	US $ 80,000

Las retenciones utilizadas actualmente por la compañía son las siguientes:

Incendio:	US $ 40,000 de suma asegurada para el mejor riesgo.
Transportes:	US $ 20,000 sobre buques clasificados 100 a 1.
Automóviles:	US $ 20,000 por siniestro.
Accidentes personales:	US $ 20,000 para el riesgo de muerte.

Comentarios

En general la gerencia decidió poner en juego, como máximo el 2% de los fondos propios, por riesgo o siniestro (US $ 20,000 aproximadamente).

Incendio: se supone que la retención de US $ 40,000 vale para riesgos de primera categoría, con un siniestro máximo probable (SMP) inferior al 50 % de la suma asegurada, y con una frecuencia de siniestralidad normal. Con esto, se arriesga un 5 % de las primas retenidas en el ramo. La retención se entiende por el conjunto de las coberturas de Incendio y Lucro Cesante.

Transportes: aunque el buque está clasificado 100 a 1, una pérdida total siempre es posible y hay que contar con los riesgos que se corren en los puertos y, particularmente, con la circunstancia de que el importe de US $ 20,000 represente un 25 % del volumen de primas retenido por cuenta propia. Sería prudente reexaminar los cálculos que han llevado a la compañía a retener un importe que parece elevado.

Automóviles: tomando en consideración la frecuencia y el costo promedio relativamente elevados de los siniestros, parece algo exagerado la retención (primer riesgo) de US $ 20,000 ya que representa el 3.3 % del volumen de primas. Un monto de US $ 10,000 parecería más adecuado, especialmente al no implicar un aumento desmesurado del costo de la cobertura de reaseguro.

Accidentes: se trata de una retención uniforme basada ante todo en las posibilidades financieras de la compañía; con relación al volumen de primas, la misma es demasiado elevada. Sin embargo, una reducción traería consigo una disminución de las primas retenidas y no mejoraría por consiguiente la relación retención/primas. Un pleno (retención) de conservación inferior seria, no obstante, aconsejable para los riesgos agravados.

En el ejemplo que hemos escogido, las retenciones por evento se han fijado sobre la base de decisión de la compañía de no perder más del 20 % de las reservas no catastróficas y del 50 % de las reservas especiales para el caso de catástrofe:

20 % de las reservas no catastróficas:	US $ 90,000
50 % de las reservas para catástrofes:	US $ 75,000
Retención por evento:	US $ 165,000

También aquí la decisión definitiva deberá tomarse después de haber examinado las ofertas de reaseguro, puesto que no vale la pena poner en juego los fondos propios si el costo de la cobertura de reaseguro no es demasiado elevado.

2.5 Factores para determinar la retención

Entre los factores que se deben considerar para determinar la retención a utilizar se encuentran los siguientes:

La Ley

El articulo número 37 de la Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de seguros establece.

"La Secretaría de Hacienda y Crédito Público determinará, mediante reglas de carácter general, los porcentajes de la sumas de capital mínimo de garantía y reserva de previsión que sirvan de base para fijar cada operación o ramo, los limites de retención de las instituciones en un solo riesgo".

Según el acuerdo publicado en el Diario Oficial de la Federación el 28/05/1998 por el que se modifica la séptima de las reglas para fijar los límites máximos de retención de las instituciones y sociedades mutualistas de seguros en las operaciones de seguro y reaseguro. En las operaciones y ramos de los seguros de accidentes y enfermedades así como de daños, el limite máximo de retención (LMR) no será superior al cinco por ciento de la suma del saldo de su reserva de previsión (Rva Prev) correspondiente a las observaciones y ramos a que se refiere esta Regla en el caso de las instituciones de seguros se podrán adicionar los activos computables al capital mínimo de garantía de acuerdo a los límites de inversión establecidos en las Reglas para el Capital Mínimo de Garantía de las Instituciones de Seguros (AcCMG), y cuando la institución de seguros de que se trate presente un margen de solvencia global, podrá considerar los activos computables al capital mínimo de garantía en exceso a los límites de inversión previstos en las citadas Reglas (AcExc CMG) por lo tanto la formula para calcular dicho límite es:

$$LMR = 5\ \% * (Rva\ Prev + AcCMG + AcExc\ CMG)$$

"Las instituciones de seguros fijarán anualmente, dentro de los porcentajes a que se refiere el párrafo anterior, sus limites máximo y mínimo de retención, tomando en cuenta el volumen de sus operaciones, el monto de sus recursos y el de las sumas en riesgo, la experiencia obtenida respecto al comportamiento de la siniestralidad, así como las políticas que aplique la institución para ceder y aceptar reaseguro tanto del país como del extranjero, haciéndolo del conocimiento de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas a más tardar el 31 de Enero de cada año, la que ordenará a las instituciones de seguros los ajustes que procedan."

El Ramo

Bajo condiciones sanas de operación el ramo no sería determinante al fijar la retención puesto que la cedente aplicaría la retención máxima en cada ramo sí su cartera brindara resultados positivos. Como esto no sucede así en el mercado asegurador se toma la medida de retener lo menos posible en ramos sin resultados positivos con el fin de no desviar los resultados a retención de la compañía, esto trae como consecuencia un desequilibrio en la suerte del resultado global del ramo, cargándose al reasegurador dichos resultados, sin embargo, dicha pérdida será compensada con los resultados positivos de algún otro ramo. Bajo estas circunstancias la cedente deberá tener precaución en establecer un cuadro de reaseguradoras que compartan pérdidas y ganancias en el programa global de reaseguro de la cedente.

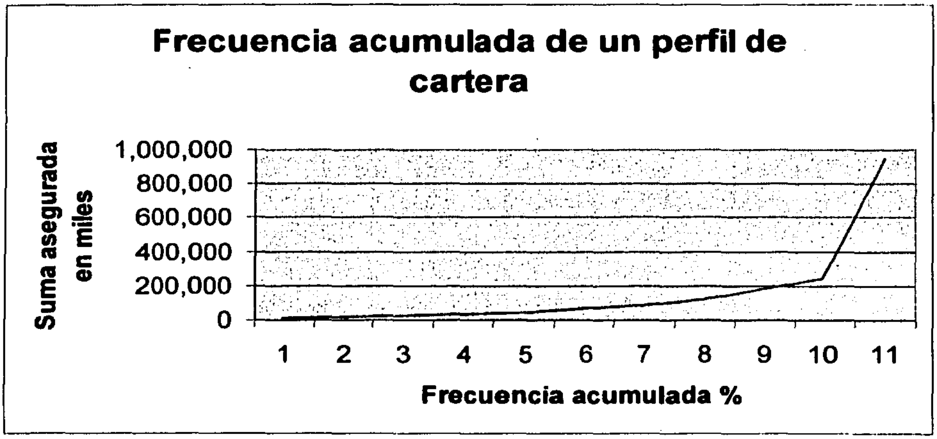
Perfil de Cartera

El estudio del perfil de cartera nos ofrece los elementos técnicos para visualizar la composición de los riesgos de un ramo en la cartera de la cedente.

La utilización del perfil de cartera en el estudio de la retención es el siguiente:

Supongamos que se tiene el siguiente perfil de cartera en miles de dólares.

Rango de sumas aseguradas		Número de riesgos	Suma asegurada promedio	Frecuencia	Frecuencia acumulada %	Primas	Primas acumuladas
Hasta	10,000	250	6,200	2.5	2.5	4,650	4,650
10,000	20,000	2,300	14,700	23.0	25.5	94,700	99,350
20,000	30,000	3,200	25,350	32.0	57.5	283,900	383,250
30,000	40,000	2,000	34,400	20.0	77.5	220,150	603,400
40,000	50,000	1,050	45,100	10.5	88.0	177,600	781,000
50,000	75,000	700	66,600	7.0	95.0	181,800	962,800
75,000	100,000	200	85,900	2.0	97.0	68,700	1,031,500
100,000	150,000	150	122,750	1.5	98.5	55,250	1,086,750
150,000	200,000	80	178,300	0.8	99.3	60,600	1,147,350
200,000	300,000	20	245,150	0.2	99.5	14,200	1,161,550
Más de	300,000	50	949,300	0.5	100.0	118,650	1,280,200



En base a esta información y a la gráfica con la frecuencia acumulada de sumas aseguradas, se puede sugerir una retención de 75,000, puesto que el 95 % de los riesgos asegurados tienen una suma asegurada menor o igual a este valor. En caso de que la retención legal máxima de la cedente resultara insuficiente para llegar al límite superior del rango sugerido, ésta podrá adquirir una ampliación a su retención por medio de un contrato Working Cover, el cual le dará la oportunidad de ampliar su retención a un costo de reaseguro conveniente.

Clase de reaseguro

La clase de reaseguro es determinante para la retención, es diferente la retención que la cedente maneja en forma proporcional de la que maneja en forma no proporcional, en la primera la cedente maneja la retención por riesgo en la segunda lo hará incluso por evento es decir afectando varios riesgos para lo cual la cedente tendrá que determinar la prioridad a utilizar en ese caso.

Resultados del ramo

Al analizar la cedente los resultados de suscripción de cada ramo, se determinará el resultado global y el resultado a retención, si el resultado global es positivo, la cedente tenderá a retener lo más posible, si por el contrario el resultado es negativo, la cedente buscará obtener menos negocio a retención. En cualquiera de los dos casos el reasegurador participará en el mejor de los casos en poco negocio bueno, radica aquí la importancia de un planteamiento lo más equitativo posible entre la cedente y el reasegurador tratando de balancear los resultados del programa.

Definición del problema

Donde habrán de definirse los recursos con los cuales la empresa responderá por los riesgos retenidos. La determinación del modelo matemático que habrá de emplearse puede ser considerado en este punto.

Tamaño de la cartera

Al aumentar el tamaño de la cartera, si la distribución de siniestros no se altera, se podrá aumentar el nivel de retención, manteniendo la misma probabilidad de ruina.

Probabilidad de siniestros

Se deberá de tener en cuenta el periodo durante el cual se mantiene vigente la retención (usualmente un año), y los siniestros que en dicho periodo ocurran, ya que en general la probabilidad del siniestro esta relacionada directamente con la magnitud del periodo estudiado. También deberá tenerse en cuenta la heterogeneidad de los riesgos cubiertos, pues se pueden tener desviaciones importantes en las probabilidades asociadas a la siniestralidad, alterar la composición de la cartera.

Severidad

Habrá de tomarse en cuenta tanto el número de siniestros como la severidad de los mismos, ya que de ocurrir alguno de ellos, y debido a su posible magnitud, pueden influir en gran manera sobre el costo total de los siniestros.

Capital y reservas

Debe tenerse en cuenta el capital así como la reserva acumulada que pueden responder en casos extremos por los siniestros que ocurran. Mayores montos de ambos rubros permitirán establecer un más alto nivel de retención.

Recargo sobre primas

El recargo que se aplique a las primas, generará un recurso adicional que permitirá a la cedente responder por los riesgos suscritos de una manera más adecuada.

Probabilidad de ruina

Es definida como la probabilidad de que durante un periodo, el monto de siniestros exceda el importe de reserva inicial de dicho periodo.

Dada la complejidad de involucrar todos los factores que deben contemplarse en el cálculo de la retención, cada compañía habrá de determinar los elementos que considerará en el modelo matemático que utilizará.

2.6 Determinación de la Retención por Riesgo

Para las cedentes –y para las reaseguradoras también- es muy importante determinar los importes de retención máxima en cada ramo. Existe cierto número de fórmulas matemáticas a este respecto que, se tratan en el siguiente capitulo. En la práctica, estas decisiones de las compañías son determinadas por el sentido común, no tanto de los técnicos, sino más bien de funcionarios del más alto nivel.

Para tal efecto, se "sabe" que debe existir alguna relación entre la retención máxima y

- el capital pagado y las reservas no catastróficas de la compañía,

- el importe de las inversiones líquidas (caja, bancos, obligaciones y acciones fácilmente realizables), que permiten a la empresa pagar sin demora los siniestros por cuenta propia.

- la estructura de las sumas aseguradas de la cartera, y

- el volumen de primas en cada ramo, que permite absorber las fluctuaciones de la siniestralidad.

Mientras que las compañías fuertemente desarrolladas podrán tener en cuenta todos los factores indicados anteriormente, las entidades jóvenes, que tienen carteras aún muy desequilibradas, deberán fijar retenciones que, ante todo, sean función de su capacidad financiera; ellas "pondrán en juego" una proporción más importante de su capital (manteniéndose por cierto dentro del marco de las disposiciones legales y de las normas naturales de prudencia) que las grandes compañías.

He aquí algunas reglas empíricas observadas en la práctica por las compañías grandes. A título de comparación, entre paréntesis se indica lo que corresponde a compañías jóvenes:

- la retención máxima por riesgo y por siniestro no sobrepasa el 1% del capital y de las reservas no catastróficas (hasta el 5%),

- la retención por siniestro se sitúa alrededor del 1% del volumen de primas retenidas por cuenta propia en el ramo en cuestión (hasta el 10%),

- la retención máxima por siniestro en el ramo más importante no excede del 20% de los medios líquidos disponibles.

Conviene mencionar aún que en buen número de países, afectados por la inflación, el capital nominal de una compañía de seguros a menudo no representa sino una parte muy pequeña de sus medios financieros efectivos. Corresponderá entonces a la dirección de la compañía decidir cuáles habrán de ser las bases financieras para la determinación de la retención.

2.7 Determinación de la Retención por Evento

Luego de fijar la retención por riesgo o siniestro, la compañía deberá tomar una decisión respecto a la conservación por evento catastrófico. Se tendrá cuenta del hecho de que las catástrofes no se producen con frecuencia y de que los intervalos bastante largos deberían permitir a las compañías acumular reservas especiales de previsión. En algunos países, las autoridades de supervisión exigen que una parte importante de las primas relativas a riesgos catastróficos sea apartada cada año e invertida en valores que no pueden ser afectados por la misma catástrofe. La retención por evento dependerá pues del importe de las reservas especiales acumuladas a este efecto, teniendo en cuenta también la circunstancia de que la compañía podría recurrir a ciertas reservas de capital. Por lo tanto, la retención por evento podría fijarse en un múltiplo de la retención por riesgo o siniestro individual.

En México, en el año de 1995, se estipuló exclusivamente para el ramo de Terremoto y Erupción Volcánica la constitución de la Reserva Especial Catastrófica, que consistía en apartar el 10 % de la prima de riesgo cobrada al asegurado para tal fin, lo que significaba que el reasegurador no debía tener en cuenta esta cantidad como parte de la prima que le cedería la cedente, por cada uno de los negocios con esta cobertura. Por ejemplo:

Cobertura	Prima Neta al Asegurado	Reserva Especial Catastrófica (10%)	Prima Neta para Ofertar a Reaseguro
Incendio y Otros Riesgos:	US$ 125,780	US$ 0	US$ 125,780
Terremoto y Erupción Volcánica	US$ 95,450	US$ 9,545	US$ 85,905
Total:	US$ 221,230	US$ 9,545	US$ 211,685

En este ejemplo se menciona Incendio y Otros Riesgos porque era la cobertura básica de este tipo de pólizas, es decir, las aseguradoras no podían, ni querían vender pólizas de Incendio sin esta cobertura, para no vender únicamente el riesgo catastrófico, según lo estipulaba la tarifa en México y en casi todo el resto del mundo. No obstante, hoy en día, son coberturas que ya se manejan por separado en nuestro país.

Sin embargo, la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, a través de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, publica en la circular S-10.4.1 del 20 de marzo de 1998 que la constitución de esta Reserva Especial Catastrófica será conforme a nuevos procedimientos.

2.8 Reaseguro

Se establecen los términos en que las ISES podrán realizar contratos de reaseguro para la diversificación de sus riesgos. A fin de cuidar la calidad del reaseguro empleado, las aseguradoras solo pueden contratar reaseguro del extranjero con empresas inscritas en el registro de la SHCP.

El reaseguro es una forma de seguro de segundo grado, a través de cuyas modalidades una aseguradora procura homogeneizar y limitar las responsabilidades a su cargo, para normalizar el comportamiento de la cartera de riegos asumidos que afecten la frecuencia, severidad, entre otros. Visto de otra manera se podría decir que el reaseguro es asegurar lo ya asegurado. Las razones básicas del reaseguro son dos:

- Reducir la probabilidad de que el monto de los siniestros no sobrepase una cierta cantidad, estabilizando así los resultados.
- Aumentar la capacidad de suscripción.

Y por otra parte, la reaseguradora puede brindar experiencia en cuanto a causales de siniestralidad, asesoría técnica, ofrecer productos que se han desarrollado en otros países y asesoria en la selección de riegos.

Los tipos de reaseguro que existen desde el punto de vista técnico son:

- Proporcionales (reaseguro de riesgos), en los que encontramos el cuota parte y excedentes.

- No proporcionales (reaseguro de siniestros), por ejemplo, exceso de pérdida por riesgo (WXL-working cover), exceso de pérdida por catástrofe (XL), limitación de siniestralidad (stop loss).

Desde el punto de vista operativo, es decir en cuanto a la relación jurídica que existe entre la compañía aseguradora y reaseguradora, se pueden dividir en facultativos y automáticos.

- Facultativos: se llevan acabo riesgo por riesgo, hasta cierto punto es un poco complicado porque el asegurador debe esperar hasta que el reasegurador acepte compartir el riesgo para poder celebrar el contrato de seguro.

- Automático: se pacta de manera anticipada en el contrato las características de los riesgos a cubrir por el reasegurador, de tal manera que la aseguradora se compromete a ceder aquellos riesgos que cumplan dichas características y el reasegurador, por otra parte se obliga a aceptarlos. Para el asegurador, este tipo de contratos tiene la ventaja de operar libremente sin necesidad de estar consultando al reasegurador sobre la aceptación de algún riesgo.

3.1 Modelo que utiliza el método de multiplicadores de Lagrange

Uno de los principales problemas que estudia la teoría de riesgo, es la determinación del límite de retención. Un modelo matemático se presenta a continuación para definir este límite. Este modelo solamente funciona para reaseguro proporcional

Sea N el total de riesgos de una cartera formado por la suma de riesgos independientes n_i.

Sea S (i) la variable aleatoria que denota el cúmulo real de reclamaciones en un periodo de cálculo, supongamos en un año contable.

Sea la prima directa P (i) que servirá para pagar las posibles reclamaciones.
Considerando retenciones proporcionales a_i, se define la siguiente función.

$$z = \sum_{i=1}^{N} a_i P(i) - \sum_{i=1}^{N} a_i S(i)$$

Como una variable aleatoria que mide el riesgo máximo de los montos retenidos n_i. Se desea que para un valor esperado de la variable z, su varianza sea mínima. Esto se logra determinando los valores característicos a_i utilizando el principio de varianza mínima. Es decir, se quiere que Var[z] sea mínima bajo la condición de que E[z] sea constante, siendo E el operador esperanza.

Por el método de multiplicadores de Lagrange[1], el mínimo de los puntos a_i serán aquellos donde las derivadas parciales de

$$\Phi = \mathrm{Var}[z] + \mu\, E[z] \qquad \text{Sean cero}$$

Por ser $S(i)$ variable aleatoria independiente para toda i diferente de j

$$\mathrm{Var}[z] = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \mathrm{Var}[S(i)] \quad ; \qquad E[z] = \sum_{i=1}^{N} a_i \left[P(i) - E[S(i)]\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i L(i)$$

Donde L (i)= [P (i)-E [S (i)]] representa el recargo contenido en las primas P (i) que nos representará el excedente técnico. Por tanto, tenemos que:

$$\Phi = \mathrm{Var}[z] + \mu E[z] = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \ \mathrm{Var}[S(i)] + \mu \sum_{i=1}^{N} a_i L(i)$$

Al obtener las derivadas parciales respecto a a_i para toda i, se obtiene:

$\delta\Phi/\delta a_i = 2a_i \mathrm{Var}[S(i)] + \mu L(i) = 0$ Para toda i, despejando a_i obtenemos:

$a_i = -\mu L(i)/2\ \mathrm{Var}[S(i)]$ para toda i

[1] Ver anexo A

$$\therefore\ a = \frac{-\mu\sum_{i=1}^{N} L(i)}{2\sum_{i=1}^{N} Var[S(i)]} \quad \text{o} \quad a = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i}{N}$$

Mediante los siguientes ejemplos se verá el cálculo de la retención mediante este método

Sea $n = 1000$
$N = 25$
$\mu = 1$

N	Prima	Siniestros	E(S(i))	L(i)	VAR(S(i))	a_i
1	106,100	71,200	3,390	102,710	359,905	14.27%
2	119,200	82,200	3,914	115,286	198,286	29.07%
3	141,600	91,700	4,168	137,432	420,368	16.35%
4	159,200	105,100	4,777	154,423	294,221	26.24%
5	178,000	98,200	4,910	173,090	557,789	15.52%
6	200,800	103,100	5,426	195,374	474,269	20.60%
7	201,700	103,300	5,165	196,535	290,816	33.79%
8	219,500	109,500	5,763	213,737	256,901	41.60%
9	219,800	118,100	5,905	213,895	271,026	39.46%
10	236,100	131,600	6,267	229,833	356,333	32.25%
11	239,500	126,100	6,305	233,195	329,974	35.34%
12	260,300	136,200	6,810	253,490	375,684	33.74%
13	259,400	142,800	6,800	252,600	296,000	42.67%
14	279,300	130,500	7,250	272,050	265,000	51.33%
15	282,700	131,900	7,328	275,372	320,948	42.90%
16	300,400	149,100	7,847	292,553	388,187	37.68%
17	296,400	153,700	8,089	288,311	318,772	45.22%
18	322,100	173,800	8,690	313,410	384,105	40.80%
19	317,700	171,300	8,565	309,135	315,026	49.06%
20	338,400	201,400	9,155	329,245	357,835	46.01%
21	360,100	169,700	9,428	350,672	332,712	52.70%
22	379,200	189,400	9,968	369,232	400,058	46.15%
23	379,300	198,900	9,945	369,355	309,974	59.58%
24	400,500	197,800	10,411	390,089	427,661	45.61%
25	407,000	221,900	11,095	395,905	448,921	44.10%
					a =	**37.68%**

Para el siguiente se tomaron los mismos datos únicamente se modificó el valor de $\mu = 1.5$

N	Prima	Siniestros	E(S(i))	L(i)	VAR(S(i))	a_i
1	106,100	71,200	3,390	154,064	359,905	21.40%
2	119,200	82,200	3,914	172,929	198,286	43.61%
3	141,600	91,700	4,168	206,148	420,368	24.52%
4	159,200	105,100	4,777	231,634	294,221	39.36%
5	178,000	98,200	4,910	259,635	557,789	23.27%
6	200,800	103,100	5,426	293,061	474,269	30.90%
7	201,700	103,300	5,165	294,803	290,816	50.69%
8	219,500	109,500	5,763	320,605	256,901	62.40%
9	219,800	118,100	5,905	320,843	271,026	59.19%
10	236,100	131,600	6,267	344,750	356,333	48.37%
11	239,500	126,100	6,305	349,793	329,974	53.00%
12	260,300	136,200	6,810	380,235	375,684	50.61%
13	259,400	142,800	6,800	378,900	296,000	64.00%
14	279,300	130,500	7,250	408,075	265,000	77.00%
15	282,700	131,900	7,328	413,058	320,948	64.35%
16	300,400	149,100	7,847	438,829	388,187	56.52%
17	296,400	153,700	8,089	432,466	318,772	67.83%
18	322,100	173,800	8,690	470,115	384,105	61.20%
19	317,700	171,300	8,565	463,703	315,026	73.60%
20	338,400	201,400	9,155	493,868	357,835	69.01%
21	360,100	169,700	9,428	526,008	332,712	79.05%
22	379,200	189,400	9,968	553,847	400,058	69.22%
23	379,300	198,900	9,945	554,033	309,974	89.37%
24	400,500	197,800	10,411	585,134	427,661	68.41%
25	407,000	221,900	11,095	593,858	448,921	66.14%
					a =	**56.52%**

Dependiendo del valor que tome μ, la variable **a** que represente el porcentaje de retención se irá modificando, por lo tanto, la retención dependerá directamente de la μ óptima de acuerdo a la experiencia de cada aseguradora.

3.2 Modelo del Valor Óptimo

En seguida se presentará un segundo modelo, para poder calcular el límite de retención óptimo

Este modelo se ejemplificará a través de un plan de vida.

Consideremos una cartera que se tiene formada por n pólizas.

Sean $S_1, S_2, \ldots, S_n$ las sumas aseguradas de cada póliza.
Sean $s_1, s_2, \ldots, s_n$ las sumas aseguradas cedidas en forma proporcional de las anteriores pólizas.

Por lo tanto las cantidades retenidas serán en consecuencia:

$$S_1 - s_1, S_2 - s_2, \ldots, S_n - s_n$$

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ las tasas de las primas de reaseguro por unidad de suma asegurada, por lo que el total de primas cedidas en reaseguro es:

$$B = s_1 P_1 + s_2 P_2 + \ldots + s_n P_n$$

Los riesgos medios de los seguros retenidos son:

$$(S_1 - s_1)M_1, (S_2 - s_2)M_2, \ldots, (S_n - s_n)M_n$$

Donde $M_i = v(1 - rm_i)\sqrt{p_i q_i}$

La formula anterior representa el riesgo medio de un seguro individual para la duración de un año, por unidad de suma asegurada y edad asegurada i, donde:

$v = 1/(1 + i')$ Factor de descuento,

i = el interés técnico,

rm_i = reserva matemática

q_i = probabilidad de muerte para una persona de edad i,

$p_i = 1 - q_i$ Probabilidad de sobre vivencia para una persona de edad i

Por el teorema de Hattendorf, sabemos que el cuadrado del riesgo medio del total de la cartera asegurada es igual a la suma de los cuadrados de los riesgos medios de los seguros individuales (toda vez que se supone riesgos independientes). Haciendo uso del teorema tenemos:

$$M^2 = (S_1 - s_1)^2 M_1^2 + (S_2 - s_2)^2 M_2^2 + \ldots + (S_n - s_n)^2 M_n^2$$

La determinación del límite, se hará bajo la siguiente condición: El cuadrado del riesgo total del monto retenido debe ser un valor mínimo.

Siendo el monto retenido y en consecuencia el monto reasegurado, las cantidades a determinar, supondremos que los montos s_i son las cantidades cedidas y que las cantidades más favorables u optimas reaseguradas son las x_i.

La condición que determinará el límite involucra:

- El riesgo medio retenido, es decir:

$$(s_1 - x_1)^2 M_1^2 + \ldots + (s_n - x_n)^2 M_n^2$$

- La diferencia entre lo que se paga de primas de reaseguro con las cantidades reaseguradas supuestas s_i, respecto a lo que se pagaría con las cantidades óptimas x_i, es decir:

$$\left[x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n - \left(s_1P_1 + s_2P_2 + \ldots + s_nP_n\right)\right]h$$

Donde h es una constante.

Es natural suponer que al determinar las cantidades más favorables a retener, se contemple tanto los montos en riesgo como las primas que se están pagando por ellos. Los anteriores supuestos determinan la ecuación:

$$L = \left(S_1 - x_1\right)^2 M_1^2 + \ldots + \left(S_n - x_n\right)^2 M_n^2 + \left(x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n - B\right)h$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \left[v\left(1 - rm_i\right)\left(S_i - x_i\right)\right]^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i P_i - B\right)h$$

Para obtener un mínimo, igualamos a cero las derivadas parciales de primer orden de la función L, entonces:

$$\delta L/\delta x_1 = hP_1 - 2\left(S_1 - x_1\right)M_1^2 = 0$$

$$\delta L/\delta x_2 = hP_2 - 2\left(S_2 - x_2\right)M_2^2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\delta L/\delta x_i = hP_i - 2\left(S_i - x_i\right)M_i^2 = 0$$

Entonces, despejando x_i

$$hP_i - 2S_iM_i^2 + 2x_iM_i^2 = 0$$

$$2x_iM_i^2 = 2S_iM_i^2 - hP_i$$

$$x_i = \frac{2S_iM_i^2}{2M_i^2} - \frac{hP_i}{2M_i^2}$$

$$x_i = S_i - \frac{hP_i}{2M_i^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[1]$$

Como $B = s_1P_1 + s_2P_2 + \ldots + s_nP_n$ **B Prima cedida**

Sustituimos el valor s_i por el óptimo x_i, obteniendo lo siguiente.

$$B' = \left(S_1 - \frac{hP_1}{2M_1^2} \right)P_1 + \dots + \left(S_n - \frac{hP_n}{2M_n^2}\right) P_n \qquad B' \quad \text{Prima cedida óptima.}$$

$$B' = S_1P_1 - \frac{hP_1^2}{2M_1^2} + \dots + S_nP_n - \frac{hP_n^2}{2M_n^2}$$

Es decir $B = \sum_{i=1}^{n}(S_iP_i) - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i^2}{M_i^2}$

Sea $C_i = \sum_{i=1}^{n}(S_iP_i)$; $D_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{M_i^2}$ entonces $B = C_i - \frac{h}{2}D_i$

Despejando a h obtenemos:

$$\frac{h}{2}D_i = C_i - B$$

$$h = \frac{2(C_i - B)}{D_i}$$

Y sustituyendo el valor de h en la ecuación [1] queda de la siguiente manera:

$$x_i = S_i - \frac{\frac{2(C_i - B)}{D_i}P_i}{2M_i^2}$$

$$= S_i - \frac{(C_i - B)P_i}{D_iM_i^2} \quad \dots\dots\dots\dots [2]$$

En base a la ecuación (2), habrán de separarse los montos de sumas aseguradas en retenidas y cedidas, para esto igualamos a cero la ecuación y despejamos a S_i; lo cual implica que estamos reteniendo el total del riesgo.

$$S_i - \frac{(C - B)P_i}{DM_i^2} = 0$$

$$S_i = \frac{(C - B)P_i}{DM_i^2}$$

El método supone un monto de suma asegurada S_1 como limite de retención, y se evalúa el valor en la siguiente expresión.

$$\frac{(C_1 - B)P_1}{D_1 M_1^2} \quad \text{Si se tiene la siguiente desigualdad}$$

$$S_1 \leqslant \frac{(C_1 - B)P_1}{D_1 M_1^2}$$

Aun no se tiene el límite buscado, y el valor S_1 queda en retención; este procedimiento se lleva acabo hasta que se encuentra un índice para el cual se cumpla que:

$$S_k \leqslant \frac{(C_k - B)P_k}{D_k M_k^2} \quad y \quad S_{k+1} > \frac{(C_{k+1} - B)P_{k+1}}{D_{k+1} M_{k+1}^2} \quad \text{Siendo el límite } \frac{C_{k+1} - B}{D_{K+1}} \quad y \quad f_k = \frac{P_{K+1}}{M_{K+1}^2}$$

Se ha considerado hasta ahora sólo el riego medio total de la cartera de seguros, sin embargo este se compone de dos partes:

- El riesgo medio retenido M_r
- El riego medio cedido M_c

Mismos que satisfacen la igualdad: $M^2 = M_r^2 + M_c^2$

El riesgo medio retenido será (toda vez que se supone un límite S_j): $M_r^2 = \sum_1^n n_i S_i^2 M_i^2$

Para una r_m promedio total se tiene que $M_i^2 = M_0$, donde: $M_r^2 = \sum n_i S_i^2 M_0^2$ y $M_c^2 = M^2 - M_r^2$

Y por otro lado se tiene que la cuota de reaseguro es $Px = qx(1 - rm)v$

Finalmente sustituimos en la expresión del riesgo con los valores x_i obtenidos:

$$M^2 = (S_1 - x_1)^2 M_1^2 + (S_2 - x_2)^2 M_2^2 + ... + (S_n - x_n)^2 M_n^2 \text{..............} [3]$$

Además de [2] tenemos que $S_i - x_i = \frac{(C - B)P_i}{DM_i^2}$ por tanto, sustituyendo esta expresión en la ecuación [3] referente al riesgo obtenemos:

$$M^2 = \frac{(C - B)^2 P_1^2}{D^2 M_1^4} M_1^2 + \frac{(C - B)^2 P_2^2}{D^2 M_2^4} M_2^2 + \text{........} + \frac{(C - B)^2 P_n^2}{D^2 M_n^4} M_i^2$$

$$M^2 = \frac{(C-B)^2 P_1^2}{D^2 M_1^2} + \frac{(C-B)^2 P_2^2}{D^2 M_2^2} + \ldots\ldots + \frac{(C-B)^2 P_n^2}{D^2 M_n^2}$$

$$= \frac{(C-B)^2}{D^2}\left[\frac{P_1^2}{M_1^2} + \frac{P_2^2}{M_2^2} + \ldots + \frac{P_n^2}{M_n^2}\right]$$

$$= \frac{(C-B)^2}{D^2}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^2}{M_i^2}\right]$$

Como $D = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^2}{M_i^2}$

Entonces $M^2 = \frac{(C-B)^2}{D^2} D = \frac{(C-B)^2}{D}$ despejando C-B nos queda:

$C - B = M\sqrt{D}$ y para el monto reasegurado $C_K - B_K = M_C \sqrt{D_K}$

Teniendo esto presente a la hora de considerar $D = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^2}{M_i^2}$, que es la suma de cocientes cuadrados de primas de reaseguro y cuadrados de riesgos medios.

A continuación se vera un ejemplo:

Grupo de asegurados	Numero de asegurados	Suma asegurada promedio
1	7,104	1,000
2	3,340	2,000
3	3,234	3,000
4	546	4,000
5	6,602	5,000
6	537	6,000
7	112	7,000
8	295	8,000
9	80	9,000
10	3,654	10,000
11	268	12,000
12	1,041	15,000
13	432	20,000
14	262	25,000
15	110	30,000
16	108	40,000
17	121	50,000
18	40	60,000
19	110	75,000
20	96	100,000
21	25	120,000
22	48	150,000
23	20	200,000
24	7	300,000
25	2	400,000
26	1	500,000
total	**28,195**	**2,152,000**

Reserva media = 43, 755,000

Reserva matemática = $rm_0 = 0.232928$

$v = 1/(1+i)$ Con $i = 4.5\ \%$ nos da $v = 0.956937$

Consideramos la edad promedio de la cartera igual a 42, es decir $x = 42$

$qx = 0.010252$

$Px = 0.00752537$ cuota de reaseguro

$Px\beta = 0.0079016$ ($\beta = 1.05$ recargo de la prima)

$px = 0.989748$ probabilidad de sobrevivencia

$Mx = 0.0739411$ porcentaje

$Mx^2 = 0.0054672$

$Px\beta^2 = 0.0000624$

$Px\beta/Mx^2 = f_1 = 1.445257$

$D = Px^2/Mx^2 = 0.01141$

Considerando hasta 25,000 de retención:

$Mr = 82{,}613$

$Mc = 94{,}492$

$Dk = 7.8569$

$Ck - Bk = 264{,}863$

$(Ck - Bk)/Dk = 33{,}989$

$$\frac{Ck - Bk}{Dk} f_i = 49{,}123$$

Considerando hasta 40,000 de retención:

$Mr = 91{,}164$

$Mc = 81{,}695$

$Dk = 5.3674$

$Ck - Bk = 189{,}267$

$(Ck - Bk)/Dk = 35{,}263$

$$\frac{Ck - Bk}{Dk} f_i = 50{,}936$$

Considerando hasta 60,000 de retención:

$Mr = 103{,}692$

$Mc = 61{,}955$

$Dk = 3.5288$

$Ck - Bk = 116{,}382$

$(Ck - Bk)/Dk = 32{,}981$

$$\frac{Ck - Bk}{Dk} f_i = 47{,}666$$

Como este es el primer valor para el cual se cumple que la retención fijada es mayor que el valor calculado, se tiene acorde con el método que la retención será 47,666.

3.3 Modelo en base a un problema de riesgo y rendimiento

En este modelo, el limite de retención se verá como un problema de riesgo y rendimiento, es decir, dado que la cedente esta expuesta a la ocurrencia, de un evento desfavorable(en este caso particular la ocurrencia de muerte para sus asegurados), se desea en base a tal eventualidad, obtener una cierta "ganancia" o un cierto "rendimiento", buscando minimizar el costo máximo que tenga que desembolsar la cedente ante la ocurrencia de un siniestro, o bien, que el riesgo total de la cantidad retenida sobre cada póliza llegue a ser mínima.

Dentro de las alternativas de inversión a través de la relación que existe entre riesgo y rendimiento, se elige la opción de determinar la máxima desviación estadística por mortalidad que puede afectar a una compañía. Se necesita medir la desviación de mortalidad sobre los riesgos retenidos, tomando en consideración los recursos que se tienen para amparar tales riesgos.

Para esto se parte de los siguientes supuestos:

Sea x la variable aleatoria que denota la ocurrencia de un siniestro, por lo tanto x puede tomar los valores:

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 1$$

Donde:

$P(x = 0) = p$; no ocurre un siniestro en un periodo t

$P(x = 1) = q$; ocurre un siniestro en el periodo t (probabilidad de muerte)

Por lo tanto, se asocia al evento la función de probabilidad Bernoulli:

$$f(x) = p^x q^{1-x} \qquad x = 0,1$$

Y para el conjunto de expuestos se tiene:

$$f(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

El riesgo de mortalidad en la cartera de seguros se determina a través de la desviación estándar y dados los supuestos planteados, se considera la función de probabilidades asociada al evento como una binomial.

Sea n el número de asegurados, redefinimos x como el número de éxitos en n ensayos de la binomial.

Para un tamaño de n suficientemente grande, en este caso de asegurados y por el teorema de De Moivre-Laplace[2], la distribución binomial se puede aproximar por medio de la normal con media $u = np$ y $\sigma^2 = npq$

[2] Ver anexo B

Se tiene por lo tanto un índice de dispersión normalizado y se debe elegir entre varias opciones, la óptima para la compañía. Habrá que tomar en cuenta el criterio de la varianza promedio y la adversión al riesgo:

"El criterio de la varianza promedio, se basa en el patrón general de que los inversionistas, en promedio, se oponen al riesgo. Al tomar decisiones de inversión, se hace una elección de ventajas y desventajas que existen entre los rendimientos esperados y el riesgo en el que se incurre. De esto se desprende que los valores con más riesgo requieren mayor rendimiento esperado, que el de los valores con menor grado de riesgo."

Se emplea el término inversión, por considerar que la adecuada elección del límite de retención, puede ser contemplada en términos de lo que refleja en los resultados de la cedente como una inversión.

Para calcular cualquier desviación estándar se utiliza:.

$$\sigma^2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)^2 \, Pr}$$

En general dentro de la teoría de riesgo y rendimiento, se considera a σ^2 como la desviación estándar de los rendimientos esperados de la cartera, donde:

a_i Rendimiento esperado de la cartera

b_i Rendimiento real

Pr probabilidad de ocurrencia del factor de riesgo (probabilidad de muerte)

Así en término de seguros, denotamos:

a_i Importe de la cesión

Ya que al determinar el monto a retener, se define un rendimiento esperado.

b_i Importe del seguro directo.

También por los supuestos de normalidad:

$$\sigma_i^2 = n_i pq \quad \text{Por lo que} \quad Pr = \sqrt{n_i pq}$$

Será la desviación media cuadrática del número de fallecimientos.

Por lo tanto: $$\sigma_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 \sqrt{n_i pq}}$$

Este valor, calculado al inicio del periodo del que se desea determinar el límite de retención, es generado con la información del periodo anterior, por lo cual se evalúa el valor de dicho monto al final del periodo en estudio, esto es:

$$\sigma_{0i} = (1+i')\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}\,\sqrt{n_i pq} \qquad \text{Con} \quad i' \quad \text{interés técnico}$$

Sobre este monto se agregan las primas que permiten a la compañía responder por las desviaciones de la mortalidad. Sea Pmret el valor por unidad de prima que la cedente retiene, es decir, la prima retenida.

Con este monto se tiene un límite inicial M:

$$M_0 = (1+i')\mathrm{Pmret}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}\,\sqrt{n_i pq}$$

Finalmente, al modelar o trabajar con una distribución normal, se debe elegir un nivel de confianza, α, a fin de asociar una media del error en la estimación estadística que se está efectuando.

$$P(x \geqslant \alpha) = 1 - P(x \leqslant \alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$$

Por lo tanto se determina el cuartil c y se llega finalmente a:

$$M_0 = (1+i')(c)\mathrm{Pmret}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}\,\sqrt{n_i pq}$$

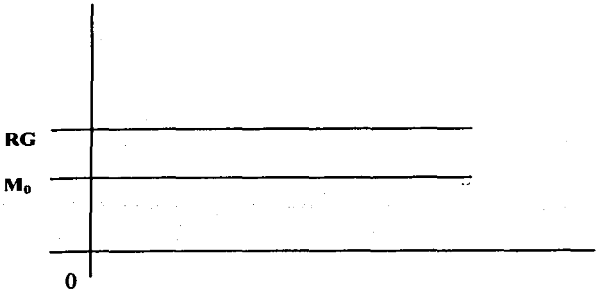
Donde: q = probabilidad de muerte
p = 1-q

Así, se deben comparar los límites M_1 obtenidos con los diferentes valores que se tengan de la cartera asegurada, y evaluarlos respecto a los recursos que tenga la compañía (capital, reserva legal, reservas especiales), eligiendo como límite un valor que no rebase el monto de los recursos que la cedente destina al ramo en cuestión.

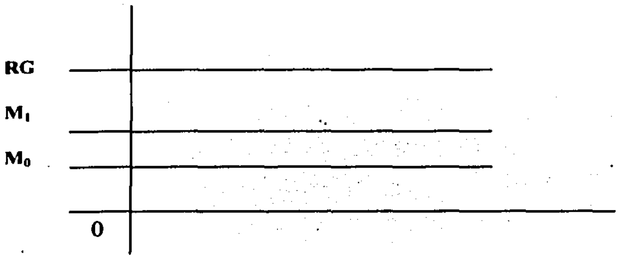
Es decir, obtener un valor M_j para el cual:

$$M_j \leqslant RG \quad \text{Donde RG son los recursos de la compañía}$$

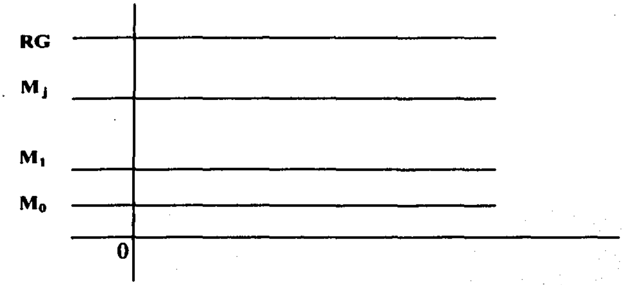
Gráficamente, dado un monto de recursos de garantía (RG) y un límite M_0, al inicio del periodo del cual se quiere determinar el límite de retención para el rango de sumas aseguradas de la cartera, se tiene que:



Si $M_0 \leqslant RG$, se considera otro límite de retención M_1 tal que $M_1 \geqslant M_0$, se compara igualmente respecto a RG



Este procedimiento se repite hasta que se encuentre el índice j para el cual $M_j \leqslant RG$ acorde con el rendimiento esperado de la cedente sin sobrepasar el límite máximo de retención fijado por las autoridades correspondientes.



3.4 Modelo de teoría del riesgo

Estabilidad y solvencia

Teniendo en cuenta que las operaciones de seguro son de naturaleza aleatoria, y por lo tanto, surgen desviaciones del mismo carácter y, se tiene que un problema principal es el de la estabilidad económica del ente asegurador.

En esta sección se trata de analizar estas desviaciones y proporcionar medidas para neutralizar sus efectos. Estas medidas deben ser suficientes para mantener el equilibrio del ente asegurador compatible con un precio equitativo del seguro, es decir, se trata de compatibilizar el principio de equidad con el principio de estabilidad o solvencia.

El principio de solvencia surge al considerar que las operaciones de seguro no se pueden realizar de forma aislada. La necesidad técnica de realizar estas operaciones en forma masiva nos conduce a la existencia de un ente que, con independencia de su forma jurídica (sociedad anónima o mutualidad), constituye una organización empresarial. Se trata de empresas de naturaleza financiera, las cuales tienen en común que el servicio que prestan lo hacen mediante operaciones de naturaleza financiera. En el caso de las empresas de seguros ingresan primas y después pagan siniestros. Esta forma de actuar nos dice:

- Que se trata de operaciones basadas en la confianza, de tal forma que el conjunto de asegurados constituye una masa muy sensible e interrelacionada, y por tanto, cualquier anormalidad (como lo es el no pagar siniestros, por ejemplo) va acompañada de una carga psicológica y social que termina afectando al conjunto de la institución.

- El hecho de que los ingresos se produzcan antes que los pagos y el carácter aleatorio de éstos pone en primer plano el objetivo de la estabilidad o solvencia del ente asegurador. Este problema se agudiza en un contexto de inflación, ya que el coste de los siniestros se ve incrementado en relación a las previsiones contenidas en las primas.

En comparación con la industria, en la aseguradora aparece un tanto invertido el proceso productivo. Por esta razón, el volumen y estabilidad de la masa pasiva viene a ocupar el primer plano en los problemas de la solvencia del ente asegurador, esta es la razón de por qué las distintas legislaciones exigen capitales y reservas mínimas a las empresas de seguros para poder operar en el mercado.

En las aseguradoras el concepto de solvencia precede al de beneficio, es decir, dado que si una empresa no es solvente, no tendrá recursos para pagar los posibles siniestros.

Para mantener la estabilidad de las entidades financieras, el precio del servicio (crédito, seguridad, etc.) lleva un componente para cubrir el riesgo de la empresa (recargo de seguridad, tipos de interés que compensan los riesgos, etc.). Este componente es preciso detraerlo antes de definir el beneficio imputable técnicamente al ejercicio que se cierra. Es decir, hay que mantener el grado de solvencia prefijado y después obtener el beneficio del ejercicio.

En lo referente a la supervisión por parte de la CNSF (Comisión Nacional de Seguros y Fianzas), esta debe vigilar cuidadosamente la estabilidad de la entidad a fin de defender los legítimos intereses de los asegurados, ya que la eficacia en la tarificación (primas equitativas) es función que incumbe básicamente al mercado, especialmente si se garantiza una transparencia informativa de cara al asegurado.

En consecuencia, es importante definir los elementos que intervienen para manejar la estabilidad o la solvencia de la aseguradora.

a) Los recargos técnicos o de seguridad (λ)

b) El reaseguro cedido (M o pleno de propia retención).

Teorías del riesgo

El objeto de toda teoría del riesgo es el de proporcionar un modelo de naturaleza estocástica respecto a las fluctuaciones aleatorias derivadas de las operaciones de seguro, a fin de instrumentar las medidas necesarias para garantizar la solvencia dinámica de la empresa.

Lógicamente este modelo será susceptible de aplicación a todas aquellas instituciones financieras (bancos, fondos de inversión, etc.) en donde se den los mismos principios científicos, en cuanto a la naturaleza aleatoria derivada de sus operaciones específicas.

Estas medidas deben ser compatibles con el objetivo del beneficio correspondiente a la actividad aseguradora, y sin que tampoco encarezca excesivamente el precio del seguro.

Por otra parte se puede conseguir el mismo grado de estabilidad o solvencia con distintas combinaciones (λ , M) con lo cual se presenta un problema de elección que exige dar entrada a criterios económicos.

Toda teoría del riesgo relaciona las siguientes magnitudes:

$$\text{Cartera:}\begin{cases}\text{Número de pólizas}\\ \text{Distribuciones básicas}\\ \text{Grado de homogeneidad}\end{cases} = C$$

Reaseguro cedido = M

Recargo de seguridad = λ

Índice de estabilidad o probabilidad de ruina = ε

Es decir: $$\Psi[C, M, \lambda, \varepsilon] = 0 \text{ .... (1)}$$

El índice de estabilidad ε es un elemento subjetivo que podemos fijar, como valor estándar, en el presente trabajo 0.3 %. Esta depende mucho de la experiencia de cada compañía

Para una cartera dada C y fijado el índice de estabilidad ε se tiene que la función (1) dependerá de las magnitudes:

$$\varphi[M, \lambda] = 0 \text{ .... (2)}$$

En la literatura actuarial sobre esta materia encontramos dos clases de teorías del riesgo: individual y colectiva. Primeramente trataremos el riesgo individual.

Riesgo individual

Se considera el riesgo total de la compañía como el resultado de lo que acontece a todas las pólizas individuales que componen su cartera. Es decir, la siniestralidad total en un período de tiempo determinado (por ejemplo un año) será la suma de las variables aleatorias correspondientes a la siniestralidad anual de cada una de las pólizas individuales.

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n$$

ζ = Siniestralidad total de cartera.

ζ_i = Siniestralidad de la póliza i-ésima (i = 1,2,..., n).

Asumiendo que los sumandos son variables independientes, con la misma función de distribución $F(X_i)$, la variable suma (ζ) tendrá por función de distribución

$$F(X) = F(X_1) * F(X_2) * F(X_3) * \ldots * F(X_n) = F^{n(*)}(X_i)$$

Es decir la convolución n-ésima de $F(X_i)$.

De acuerdo con el teorema central del límite la distribución de ζ será aproximadamente normal si el número de sumandos (número de pólizas) es suficientemente grande.

Consideremos una cartera C formada por n pólizas distribuidas en (h) categorías homogéneas.

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_h$$

Cada categoría j (j = 1,2,.., h) está formada por pólizas cuyos factores de riesgo tienen el mismo nivel. Por ejemplo en el seguro de salud, estos factores podrían ser: edad de la persona, sexo, situación económica, hábitos, actividades deportivas, etc.

Denominamos (ζ_{ij}) la variable aleatoria asociada a la siniestralidad anual de la póliza i perteneciente a la categoría homogénea j. Es decir,

$$\zeta_1 = \zeta_{11} + \zeta_{21} + \zeta_{31} + \ldots + \zeta_{n_1 1} = \sum_{i=1}^{n_1} \zeta_{i1}$$

Siendo ζ_1 la siniestralidad anual total de la primera categoría.

Los parámetros de ζ_{i1} son:

$E[\zeta_{i1}] = P_1$ $\qquad$ $Var[\zeta_{i1}] = \sigma_1^2$ $\qquad$ $\forall \ i = 1, 2, 3, \ldots, n_1$

Esto suponiendo que la esperanza y la varianza de cada una de las pólizas que componen a la primera categoría es la misma.

Análogamente para las siguientes categorías resulta

$$\zeta_2 = \zeta_{12} + \zeta_{22} + \zeta_{32} + \ldots + \zeta_{n_2 2} = \sum_{i=1}^{n_2} \zeta_{i2}$$

$E\,[\zeta_{i2}] = P_2$ $\qquad$ $Var[\zeta_{i2}] = \sigma_2^2$ $\qquad$ $\forall\ i = 1, 2, 3, \ldots, n_2$

.
.
.
.

$$\zeta_h = \zeta_{1h} + \zeta_{2h} + \zeta_{3h} + \ldots + \zeta_{n_h h} = \sum_{i=1}^{n_h} \zeta_{ih}$$

$E\,[\zeta_{ih}] = P_h$ $\qquad$ $Var[\zeta_{ih}] = \sigma_h^2$ $\qquad$ $\forall\ i = 1, 2, 3, \ldots, n_2$

La variable ζ (siniestralidad anual de toda la cartera) es:

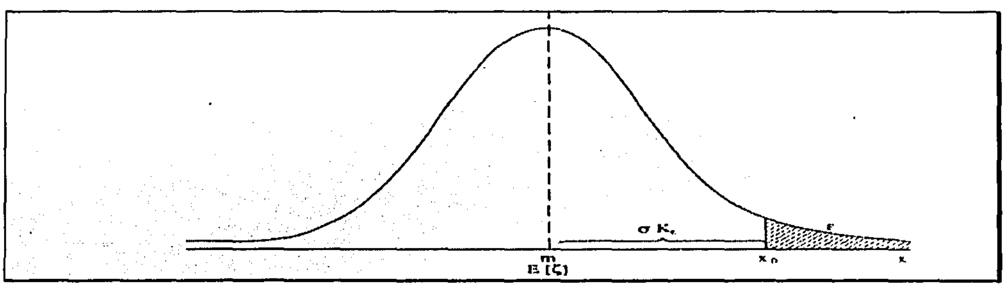
$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_h$$

Con parámetros:

$$E[\zeta] = m = E[\zeta_1] + E[\zeta_2] + E[\zeta_3] + \ldots + E[\zeta_h] = \sum_{j=1}^{h} n_j P_j$$

$$Var[\zeta] = \sigma^2 = Var[\zeta_1] + Var[\zeta_2] + Var[\zeta_3] + \ldots + Var[\zeta_h] = \sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2$$

Asumiendo la hipótesis de independencia de los sumandos. Si el número total de pólizas que componen la cartera es suficientemente grande, aplicando el teorema central del límite se puede aproximar ζ por el modelo normal (m; σ).



$$\int_{X_0}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}dx=\varepsilon$$

Fijado un índice de probabilidad de ruina ε tal que $P[\zeta > X_0]=\varepsilon$ resulta:

$$P[\zeta > X_0] = P\left[\frac{\zeta-m}{\sigma} > \frac{X_0-m}{\sigma}\right] = P\left[v > \frac{X_0-m}{\sigma}\right] = P[v > K_\varepsilon] = \varepsilon$$

K_ε Se obtiene de las tablas de la distribución normal (0,1) una vez fijado ε. Como

$$X_0 = \sigma.K_\varepsilon + m$$

Donde K_ε es el número de desviaciones estándar. La diferencia $D = X_0 - m = \sigma.K_\varepsilon$, debe cubrirse con las magnitudes de estabilidad del ente asegurador

Magnitudes de estabilidad

1. recargo técnico o de seguridad (λ), debe cumplir la siguiente desigualdad

$$\sum_{j=1}^{h}\lambda n_j P_j \geqslant D$$

Sustituyendo el valor de D, tenemos:

$$\sum_{j=1}^{h}\lambda n_j P_j \geqslant \sigma.K_\varepsilon$$

De donde se deduce que: $$\lambda \geqslant \frac{K_\varepsilon\sqrt{\sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^{h} n_j P_j}$$

2. Reservas de solvencia (S)

El recargo técnico (λ) y las reservas de solvencia S deben cumplir la condición:

$$\sum_{j=1}^{h}\lambda n_j P_j + S \geqslant D$$

Es decir:

$$\lambda \geqslant \frac{K_\varepsilon \sqrt{\sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2} - S}{\sum_{j=1}^{h} n_j P_j} \qquad (\lambda \text{ variable de decisión})$$

0 bien:

$$S \geqslant K_\varepsilon \sqrt{\sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2} - \sum_{j=1}^{h} \lambda n_j P_j \qquad (S \text{ variable de decisión})$$

3. reaseguro cedido (M).

Denominando $P_j(M)$ el monto de siniestro medio anual de cada póliza de la categoría j, neta de reaseguro y $\sigma_j(M)$ la desviación típica del monto de siniestro a cargo de la cedente, la ecuación básica del modelo es:

$$\sum_{j=1}^{h} \lambda n_j P_j(M) \geqslant K_\varepsilon \sqrt{\sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2(M)}$$

Ecuación en la que si se considera λ como dato establecido, entonces el valor de M (retención propia) será la variable de decisión.

Ejemplo

Una cartera compuesta de 1000 pólizas, agrupadas en 4 categorías homogéneas, tiene los siguientes parámetros de monto de siniestro neto de reaseguro.

categoría	n	P	σ
1	100	4,000	1,000
2	400	6,000	1,000
3	200	8,000	1,200
4	300	2,000	2,000

Para este caso obtendremos el recargo técnico (λ) considerando una probabilidad de ruina ε=0.5%, este valor de ruina depende de cada compañía.

$$E(\zeta) = m = \sum_{j=1}^{4} n_j P_j(M) = 4{,}000 * 100 + 6{,}000 * 400 + 8{,}000 * 200 + 10{,}000 * 300 = 7{,}400{,}000$$

$$Var(\zeta) = \sum_{j=1}^{4} n_j \sigma_j^2(M) = 1{,}000{,}000 * 100 + 1{,}000{,}000 * 400 + 1{,}440{,}000 * 200 + 4{,}000{,}000 * 300$$

$$= 1{,}988{,}000{,}000$$

$\sigma(\zeta) = 44{,}580$

Por lo tanto $\zeta \equiv N(7{,}400{,}000;44{,}580)$

En las tablas de la distribución normal, para $\varepsilon = 0.5\%$ es $K_\varepsilon = 2.58$, de donde,

$$\lambda = \frac{2.58 * 44{,}580}{7{,}400{,}000} = 0.0155$$

Por lo tanto al costo de la prima se le cobrará un recargo del 1.55 %

Supongamos que se tiene una reserva de solvencia de 100,000 por lo tanto el valor de λ sería:

$$\lambda = \frac{2.58 * 44{,}580 - 100{,}000}{7{,}400{,}000} = 0.2\%$$

Riesgo colectivo

Esta teoría se basa en los siguientes supuestos:

a) Opera con sumas de riesgo tanto positivas como negativas.

b) Opera con un tiempo (τ) llamado operacional en donde τ es igual al número medio de siniestro en el tiempo físico [0,t). Es decir, $\tau = t * E(v)$

c) Ocurrido un siniestro dará lugar a una indemnización de cuantía X_k. Esta variable aleatoria tendrá distribución V(x) independiente del tiempo. Representaremos por:

$$C_r = \int_0^\infty x^r dV(x) = \text{momento de orden r}$$

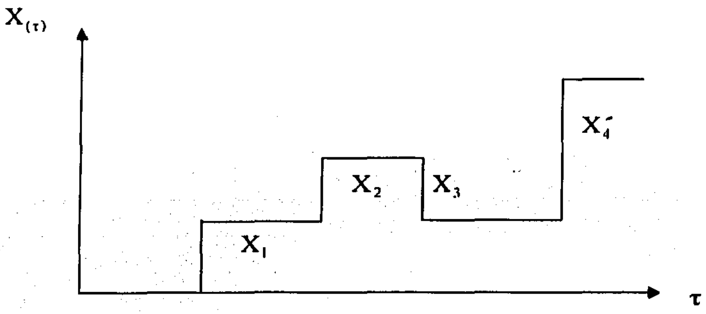
$$\text{Para } r = 1 \quad C_1 = \text{Costo medio} = \int_0^\infty x dV(x)$$

$$\varphi_x(is) = \int_0^\infty e^{isx} dV(x) = \text{Función característica}$$

d) Las primas de riesgo (es decir sin recargos de seguridad ni recargos comerciales) son la esperanza matemática de la siniestralidad.

Proceso de riesgo

En la siguiente figura aparece una trayectoria muestral del proceso de riesgo.



En donde $X_{(\tau)}$ representa la pérdida total en $[0, \tau)$.

Es decir: $X_{(\tau)} = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$ es la siniestralidad total

Siendo n la variable asociada al número de siniestros acaecidos en el tiempo $[0, \tau)$

En la figura aparecen saltos asociados al acaecimiento de riesgos con sumas positivas, como sería, el fallecimiento en un seguro para caso de muerte, y, también saltos asociados a riesgos con sumas negativas, por ejemplo, fallecimiento de un asegurado que estaba percibiendo una renta contratada a prima única.

En lo sucesivo consideraremos especialmente el caso de sumas de riesgos positivas.

Este proceso se supone que satisface las hipótesis siguientes:

1. Es de incrementos independientes. Es decir:

   $X(\tau_0 + h) - X(\tau_0)$ y $X(\tau_1 + h) - X(\tau_1)$

   Son independientes. En otras palabras el acaecimiento y la cuantía de un siniestro no tienen influencia en el acaecimiento y la cuantía del siguiente.

2. Es de incrementos estacionarios. Es decir:

   $X(\tau_0 + h) - X(\tau_0)$

   Depende solamente de h y no de τ_0. Esto supone que los riegos son independientes del tiempo, o sea, que el número de siniestros y su cuantía es independiente de que estemos situados, por ejemplo, en el año 2000 o en el 2001.

3. Las funciones muestrales del proceso son funciones de salto. Ello supone que acaecido un siniestro se paga inmediatamente.

Con esta hipótesis la distribución conjunta de cualquier número finito de variables $X_{(\tau_1)}, X_{(\tau_2)}, \ldots X_{(\tau_n)}$ estará completamente determinada por estas propiedades, y la familia de distribuciones finito-dimensionales, así obtenida satisfacerá las condiciones de Kolmogoroff.

Distribución de $X_{(\tau)}$ en un horizonte finito

Suponiendo que en el periodo $[0, \tau)$ han ocurrido n siniestros, la siniestralidad total vendrá dada por:

$$X_{(\tau)} = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$$

Partiendo de $X_{(0)} = 0$, y para un τ fijo podemos poner:

$$F(x,\tau) = P[X_{(\tau)} \leq X] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) V^{n(*)}(x)$$

En donde

$$V^{n(*)}(x) = \int_0^x V^{n-1(*)}(x-z)dV(z) \qquad y \qquad V^{1(*)}(x) = V(x)$$

$$P_n(\tau) = P[N_\tau = n] = \frac{e^{-\tau}.\tau^n}{n!} \qquad \text{Poisson}$$

$$P_n(\tau) = P[N_\tau = n] = \binom{-h}{n}\left(\frac{-\tau}{\tau+h}\right)^n\left(\frac{h}{\tau+h}\right)^h \qquad \text{binomial negativa}$$

Donde $E(v)=1$ y $\sigma^2(v) = \frac{1}{h}$

La función característica de $F(x, \tau)$ es:

$$\varphi_{X_{(\tau)}}(is) = \int_0^{\infty} e^{isx} dF(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \int_0^{\infty} e^{isx} V^{n(*)}(x) = \varphi_n[\varphi_x(is)]$$

Es decir:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_n[\varphi_x(is)] = e^{\tau[\varphi_x(is)-1]} & \text{Poisson} \\ \\ \varphi_n[\varphi_x(is)] = \left[1 - \frac{\tau}{h}(\varphi_x(is)-1)\right]^{-h} & \text{binomial negativa} \end{array}\right\} \quad \varphi_x(is) = \int_0^{\infty} e^{isx} dV(x)$$

Desarrollando en serie se obtienen los parámetros:

Media P = $\tau\, c_1$ Poisson ; $\tau\, c_1$ binomial negativa

Varianza = $\tau\, c_2$ Poisson ; $\tau\, c_2$ binomial negativa

Momento de tercer orden = $\tau\, c_3$ Poisson ; $\tau\, c_3 + 3\dfrac{\tau^2 c_1 c_2}{h} + 2\dfrac{(\tau c_1)^2}{h}$ binomial negativa

Aproximaciones de la función de distribución de la siniestralidad total

El problema de la obtención de las aproximaciones para $F(x, \tau)$ fue ya investigado por Lundberg a principios de siglo. Pudiendo considerarse como principales métodos de aproximación de la distribución del daño total los siguientes:

Aproximación normal

Si llamamos:

$$P = E\left[X_{(\tau)}\right] = \tau\, c_1 \qquad \text{(prima pura)}$$

$$\sigma^2 = E\left[X_{(\tau)} - \tau\, c_1\right]^2 \qquad \text{(varianza)}$$

$$c_1 = \int_0^\infty x\, dV(x) \qquad \text{(costo medio)}$$

Resulta que operando en unidades de costo medio del siniestro, es decir, $c_1 = 1$, entonces $P = \tau$.

La variable tipificada v es:

$$v = \frac{X_{(\tau)} - P}{\sigma} = \frac{X_{(\tau)} - P}{\sigma}$$

De donde

$$F_0(v, \tau) = F(\tau + v.\ \sigma, \tau) \qquad \text{(función de distribución)}$$

$$f_0(v, \tau) = F_0'(v, \tau) \qquad \text{(función de densidad)}$$

Cumpliéndose que: $X_{(\tau)} = \tau + v.\ \sigma$

El desarrollo de Edgeworth de $f_0(v, \tau)$ es:

$$f_0(v,\ \tau) = \varphi(v) - \frac{M_3}{3!\sigma^3}\ \varphi^{III}(v) + \frac{1}{4!}\left(\ \frac{M_4}{\sigma^4}\ -3\right)\varphi^{IV}(v)+\ldots$$

Por lo que si se toma el primer término del desarrollo,

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}$$

Se tiene la aproximación normal.

Esta aproximación es aceptable en los siguientes casos:

a) Poisson. Para $\tau \to \infty$ (Esther).

b) Binomial negativa. Para $\tau \to \infty$; $h \to \infty$; $v/h = K$ (constante) (Ammeter).

Aproximación Normal Power (NP)

En el desarrollo de Edgeworth aparecen las derivadas sucesivas de $\varphi(v)$ que dan lugar a que para cuando $v \to \infty$, sea una serie divergente. No obstante para valores comprendidos en un entorno de la media el desarrollo proporciona aproximaciones aceptables. Pero desde el punto de vista de la teoría del riesgo esto no es suficiente, ya que se necesitan cálculos para casos en que la desviación supere a dos o tres veces la desviación típica.

En este sentido el método NP parte de la variable normal tipificada:

$$v = \frac{X_{(\tau)} - P}{\sigma}$$

Por lo que la siniestralidad total será:

$$X_{(\tau)} = \tau . c_1 + v . \sqrt{\tau . c_2}$$

Que conduce a la aproximación normal de la distribución de Poisson compuesta:

$$F(x,\ \tau) \approx \varphi\left(\frac{x-\tau . c_1}{\sqrt{\tau . c_2}}\right) = \varphi(v) = \int_{-\infty}^{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

La idea consiste en aproximar v por medio del desarrollo:

$$\gamma = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \ldots..$$

En que los coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots.$, se determinan mediante el desarrollo de Edgeworth:

$$f_0(v, \tau) = \varphi(v) - \frac{M_3}{3!\sigma^3}\varphi^{III}(v) + \frac{1}{4!}\left(\frac{M_4}{\sigma^4} - 3\right)\varphi^{IV}(v) + \ldots$$

En efecto mientras que la aproximación normal se establece en base a la ecuación:

$$\varphi(v) = 1 - \varepsilon \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[3]$$

Siendo ε la probabilidad de ruina de la empresa, la nueva variable γ satisfacerá la ecuación

$$1 - \varepsilon = \varphi(v + \Delta v) - \frac{1}{6\lambda_1}\varphi^3(v + \Delta v) + \frac{1}{24\lambda_2}\varphi^4(v + \Delta v) + \frac{1}{72\lambda_1^2}\varphi^6(v + \Delta v) + \ldots\ldots\ldots\ldots[4]$$

Dada la probabilidad de que $\gamma \leqslant v + \Delta v$ que es $1 - \varepsilon$.

$$\lambda_1 = \frac{M_3}{\sigma_3} \qquad\qquad \lambda_2 = \frac{M_4}{\sigma_4}$$

Los coeficientes a_i se obtienen sustituyendo en [4]

$$v + \Delta v = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 +$$

E igualando los segundos miembros de las expresiones [3] y [4]. Para ello Δv se puede poner así:

$$F(\Delta v) = \varphi(v) - \left[\varphi(v + \Delta v) - \frac{1}{6\lambda_1}\varphi^3(v + \Delta v) + \frac{1}{24\lambda_2}\varphi^4(v + \Delta v) + \frac{1}{72\lambda_1^2}\varphi^6(v + \Delta v) + \ldots\ldots\right] = 0$$

Aplicando el método de Newton de acuerdo con el desarrollo

$$x = \hat{x} - \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})} - \frac{1}{2}\frac{f''(\hat{x})}{f'(\hat{x})}\left\langle\frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})}\right\rangle^2$$

Se obtiene la solución de la ecuación $f(x) = 0$ donde $\hat{x}$ es una solución aproximada de la misma.

Hagamos entonces $x = \Delta v$ y $\hat{x} = 0$ por lo que sustituyendo y haciendo operaciones queda:

$$\Delta v = \frac{\frac{1}{6\lambda_1}(v^2 - 1) + \frac{1}{24\lambda_2}(v^3 - 3v) + \frac{1}{72\lambda_1^2}(v^5 - 10v^3 + 15v)}{1 + \frac{1}{6\lambda_1}(v^3 - 3v) + 0} + \frac{1}{2}\frac{v + 0}{1 + 0}\left\langle\frac{\frac{1}{6\lambda_1}(v^2 - 1)}{1 + 0}\right\rangle^2$$

$$= \frac{1}{6\lambda_1}(v^2 - 1) + \frac{1}{24\lambda_2}(v^3 - 3v) - \frac{1}{36\lambda_1^2}(2v^3 - 5v)$$

O también:

$$\frac{X_{(\tau)} - P}{\sigma} = v + \Delta v = v + \frac{1}{6\lambda_1}(v^2 - 1) + \frac{1}{24\lambda_2}(v^3 - 3v) - \frac{1}{36\lambda_1^2}(2v^3 - 5v) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [5]$$

Como se puede observar la aproximación normal es un caso particular de la expresión [3] (solo el segundo término).

Generalmente el método NP consiste en tomar los dos primeros términos del desarrollo, es decir:

$$\frac{X_{(\tau)} - P}{\sigma} = v + \frac{1}{6\lambda_1}(v^2 - 1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [6]$$

Que nos permite partir de $1-F(x, \tau) = \varepsilon$ obtener v en las tablas de la normal (0,1) y calcular $X_{(\tau)}$ en la ecuación [6].

Aproximación gamma

A partir de la función de distribución gamma:

$$\Gamma(x,\alpha) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-\mu} \mu^{\alpha-1} d\mu$$

Vamos a hacer el siguiente cambio de variable

$$\Gamma(ax+b,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{ax+b} e^{-\mu} \mu^{\alpha-1} d\mu$$

La cual tiene tres parámetros, lo que permite mejorar la aproximación de la función del daño total.

Teniendo en cuenta la variable tipificada,

$$\frac{X_{(\tau)} - P}{\sigma} = z$$

Donde $P = \tau . c_1$ y $\sigma = \sqrt{\tau . c_2}$ (Poisson)

$$F(x, \tau) = \varphi(z) = \int_0^{az+b} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-\mu} \mu^{\alpha-1} d\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{az+b} e^{-\mu} \mu^{\alpha-1} d\mu$$

En la distribución gamma el momento ordinario de orden K es

$$\alpha_K = \frac{\Gamma(\alpha+K)}{\Gamma(\alpha)}$$

Y al ser z una variable tipificada sus tres primeros momentos son:

$\alpha_1(z) = 0$ $\qquad$ $\alpha_2(z) = 1$ $\qquad$ $\alpha_3(z) = \lambda_1 = \frac{M_3}{\sigma_3}$ (coeficiente de simetría)

Por lo tanto $\quad \alpha_1(az+b) = a\,\alpha_1(z)+b = b$

Teniendo en cuenta que:

$$\alpha_1 = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha$$

Resulta $\quad b = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha$

Análogamente $\quad \alpha_2(az+b) = a^2 + \alpha_2(z) + b^2 + 2ab\,\alpha_1(z) = a^2 + b^2 = \alpha(\alpha+1)$

Ya que $\quad \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)$

Es decir, $\quad a = \sqrt{\alpha}$

$$\begin{aligned}\alpha_3(az+b) &= a^3\,\alpha_3(z) + 3a^2b\,\alpha_2(z) + 3ab^2\,\alpha_1(z) + b^3\\ &= a^3\,\lambda_1 + 3a^2b + b^3\\ &= \alpha\,\sqrt{a}\,\lambda_1 + 3\alpha^2 + \alpha^3\\ &= \alpha(\alpha+1)(\alpha+3)\end{aligned}$$

De donde se obtiene que:

$$\alpha = \frac{4}{\lambda_1^2}$$

La aproximación de F(x, τ) por medio de una distribución gamma es, por consiguiente:

$$F(x,\tau) \approx \Gamma(ax+b,\alpha) = \Gamma\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\sqrt{\alpha}+\alpha,\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\mu}\mu^{\alpha-1}d\mu = \int_0^{\frac{x-\tau c_1}{\sqrt{\tau c_2}}} e^{-\mu}\mu^{\alpha-1}d\mu$$

Siendo $\tau\, c_1$, la media; $\sqrt{\tau c_2}$ la desviación típica y λ_1 el coeficiente de simetría y $\alpha = \frac{4}{\lambda_1^2}$.

Este método de aproximación tiene la importante propiedad de que cuando el tamaño de la cartera crece y el número de siniestros, sigue el modelo de la binomial negativa, la correspondiente variable de Poisson ponderada compuesta tiende a la función gamma.

El problema de la ruina en un horizonte infinito

En este punto se va a manejar dos magnitudes de estabilidad: las reservas de solvencia (S_0) y el recargo de seguridad (λ), lo que permite plantear el problema de la ruina de la empresa aseguradora mediante criterios de seguridad más aptos para tomar decisiones a largo plazo.

Proceso de ruina

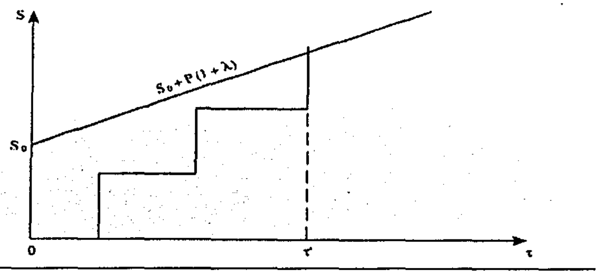
El importe de los fondos acumulados en $[0, \tau)$ viene dado por: $A_{(\tau)} = S_0 + (1+\lambda) P - X_{(\tau)}$

Siendo $P = \tau . c_1$

$X_{(\tau)}$ = la variable asociada a la siniestralidad total en el periodo $[0, \tau)$

Llamaremos a: $Y_{(\tau)} = (1+\lambda) P - X_{(\tau)}$ la función de beneficio o ganancia en el periodo $[0, \tau)$

En la siguiente figura aparece la representación gráfica de los fondos acumulados y una trayectoria muestral de $Y_{(\tau)}$. En el momento τ se cumple $A_{(\tau)} < 0$ y se dice que se ha presentado el proceso de ruina.



Las hipótesis básicas de este proceso $Y_{(\tau)}$ son las mismas que las del proceso $X_{(\tau)}$ estudiado anteriormente, es decir, es un proceso de incrementos independientes y estacionarios.

Se llama probabilidad de ruina a la probabilidad de que se presente el suceso ruina en el futuro. Es decir, $P[A_{(\tau)} < 0]$, o bien, $P[Y_{(\tau)} < -S_0]$.

Una propiedad importante de la probabilidad de ruina viene dada por el siguiente teorema:

Si $D[Y_{(\tau)}]$ es una función decreciente y $E[e^{D(Y_{(\tau)})}] \leqslant 1$, la probabilidad de ruina (ε) es igual o menor que $-D(-S_0)$, expresión independiente de τ.

En efecto, representado por $F_\tau(Y)$ la función de distribución de $Y_{(\tau)}$ tenemos:

$$E[\,e^{D(Y_{(\tau)})}\,]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{D(Y_{(\tau)})}dF_\tau(Y) \geqslant \int_{-\infty}^{-S_0} e^{D(Y_{(\tau)})}dF_\tau(Y) \geqslant e^{D(-S_0)}\int_{-\infty}^{-S_0} dF_\tau(Y)=e^{D(-S_0)}\,F_\tau(-S_0)$$

Como $F_\tau(-S_0)=P[\,Y_{(\tau)}<-S_0]=\varepsilon_{(\tau)}$, tenemos $E[\,e^{D(Y_{(\tau)})}\,]\geqslant e^{D(-S_0)}\,\varepsilon_{(\tau)}$

Luego, despejando $\varepsilon_{(\tau)}$ tenemos: $\varepsilon_{(\tau)} \leqslant e^{-D(-S_0)}\,E[\,e^{D(Y_{(\tau)})}\,]$

Pero, por hipótesis $E[\,e^{D(Y_{(\tau)})}\,]\leqslant 1$, resulta, $\varepsilon_{(\tau)}=\varepsilon\leqslant e^{-D(-S_0)}$

La determinación de la función $D[\,Y_{(\tau)}\,]$ puede hacerse mediante las siguientes consideraciones. Asumamos que las probabilidades $P[\,Y_{(\tau)}>0]$ y $P[\,Y_{(\tau)}<0]$ no son nulas, en cuyo caso podemos poner la función característica:

$$\varphi(is)=E[\,e^{isY_{(\tau)}}\,]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{isY}dF_\tau(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta Y}dF_\tau(Y)$$

Expresión que tiende a infinito cuando $\theta = is \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

Por otra parte, como $\varphi''(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty} Y^2e^{\theta Y}dF_\tau(Y)>0$

Tendremos, en definitiva, que la función característica de $Y_{(\tau)}$ tiene por representación una curva parabólica cuyo vértice, es decir, su valor mínimo, corresponde a $\theta\geqslant 0$ o $\theta<0$ según que $E[\,Y_{(\tau)}\,]$ sea negativa, nula o positiva. En el caso, en que $E[\,Y_{(\tau)}\,]>0$, la ecuación.

$$\varphi(is)=\varphi(\theta)=1$$

Tiene dos raíces: $\theta_1=0$ y $\theta_2=r_2$ siendo $r_2<0$

Luego en la expresión calculada anteriormente $\varepsilon\leqslant e^{-D(-S_0)}$ podemos poner

$$D(Y_{(\tau)})=r_2\,Y_{(\tau)}=-\left|r_2\right|Y_{(\tau)}$$

Ya que $E[\,e^{0Y_{(\tau)}}\,]=E[\,e^{r_2Y_{(\tau)}}\,]=1$

Sustituyendo, el teorema de la probabilidad de ruina queda $\varepsilon \leqslant e^{-D(-S_0)} = e^{-|r_2|S_0}$

Si tomamos $|r_2| = R$ tenemos $\varepsilon \leqslant e^{-RS_0}$

Esta expresión nos da la cuota superior de la probabilidad de ruina en un horizonte infinito. Expresión que también se le conoce como el teorema DeFinetti, desigualdad de Lundberg o de Cramer.

El coeficiente de ajuste R se obtiene de $E[e^{-RY_{(\tau)}}] = 1$ teniendo en cuenta que la función característica de $Y_{(\tau)}$ es:

$$\varphi_{X_{(\tau)}}(is) = \varphi_n[\varphi_X(is)]$$

Siendo $$\varphi_X(is) = \int_0^\infty e^{isx} dV(X)$$

$$Y_{(\tau)} = P(1+\lambda) - X_{(\tau)}$$

Sustituyendo $Y_{(\tau)}$ en $E[e^{-RY_{(\tau)}}]$ se obtiene:

$$E[e^{-R[P(1+\lambda)-X_{(\tau)}]}] = e^{-RP(1+\lambda)} . E[e^{RX_{(\tau)}}] = 1$$

Por lo tanto $$e^{RP(1+\lambda)} = E[e^{RX_{(\tau)}}] = \varphi_n[\varphi_X(is)]$$

Siendo $$\varphi_X(R) = \int_0^\infty e^{RX} dV(X)$$

Como ya sabemos φ_n es la función característica de la distribución del número de siniestros que ahora hemos de suponer que se trata de un proceso de Poisson (exigido por la hipótesis de independencia y estacionalidad del proceso); por lo tanto:

$$e^{RP(1+\lambda)} = \varphi_n[\varphi_X(is)] = e^{\tau[\varphi_X(R)-1]}$$

De esta igualdad podemos concluir que $RP(1+\lambda) = \tau[\varphi_X(R)-1]$

Ahora como $P = \tau . c_1$

Sustituyendo en la igualdad anterior y operando para despejar $\varphi_X(R)$ tenemos

$$R. \tau . c_1(1+\lambda) = \tau[\varphi_X(R)-1]$$

$$R.c_1(1+\lambda) = \varphi_X(R)-1$$

$$\varphi_X(R) = 1 + (1+\lambda)\, R.\, c_1$$

Entonces:

$$\varphi_X(R) = \int_0^{\infty} e^{RX} dV(X) = 1 + (1+\lambda)\, R.\, c_1$$

Donde $$c_1 = \int_0^{\infty} x\, dV(X) \quad \text{y} \quad \varepsilon \leqslant e^{-RS_0}$$

De esta manera hemos elaborado un modelo de naturaleza estocástica que nos relaciona las dos magnitudes básicas de solvencia: la reserva de estabilidad (S_0) y el recargo de la prima (λ) con la probabilidad de ruina (ε), por lo que una vez fijado ε se puede obtener una magnitud conocida la otra. Nos falta un tercer componente, el reaseguro, que introduciremos a continuación.

Elementos de solvencia (reaseguro)

Desde el punto de vista actuarial podemos establecer los siguientes sistemas de reaseguro.

Reaseguro de riesgos o sumas

Es aquel en que la suma cedida por el asegurador directo y aceptada por el reasegurador es proporcional al riesgo asumido por el cedente, es por esto que también se le conoce como reaseguro proporcional.

Se tienen tres modalidades:

a) **Reaseguro cuota-parte**. Se trata de concesiones individuales y proporcionales al riesgo corrido por el cedente, en esta modalidad la cesión es constante en relación a la suma asegurada, es decir se retiene un porcentaje fijo.

Si $\frac{1}{K}$, con $K > 1$ es la cuota retenida por el cedente, se tiene:

Suma de riesgo neta de reaseguro: $\frac{1}{K} S_t$ (S_t es la suma asegurada de un riesgo individual)

Suma de riesgo reasegurada: $(1 - \frac{1}{K}) S_t$

Para un siniestro de cuantía: x

A cargo del cedente: $\frac{1}{K} x$

A cargo del reaseguro: $(1 - \frac{1}{K})\,x$

Esta modalidad no permite homogeneizar las retenciones del cedente pues si $\frac{1}{K} = 0.20$ cederá el 80% de todos los riesgos con independencia de las sumas aseguradas.

Para evitar este inconveniente surge la siguiente modalidad.

b) **Reaseguro de excedente**. Aquí la participación varía según sea la suma asegurada y la naturaleza del riesgo. Aparece el concepto de pleno de retención o conservación (M).

Si la suma asegurada es S se tiene los siguientes dos casos:

Para $S \leq M$ no hay reaseguro.

Para $S > M$ hay reaseguro.

La suma de riesgo neta de reaseguro viene dada por: $\frac{M}{S} S = M$

Para un siniestro de cuantía x será:

A cargo del cedente: $\frac{M}{S}\,x$

A cargo del reaseguro: $\frac{S - M}{S}\,x$

c) **Mixta**. Cuota parte y excedente. Estas modalidades se aplican en aquellas entidades que comienzan, o necesitan apoyo financiero.

Desde el aspecto técnico tienen el inconveniente de que sólo reduce efectos en la cuantía pero no en la heterogeneidad de los riesgos, además es más cara por que las cesiones son individuales.

Reaseguros de pérdidas o siniestros

En este sistema las cesiones ya no se fijan en proporción a las sumas aseguradas, por ello se llaman reaseguros no proporcionales

Se pueden distinguir dos modalidades:

a) **Reaseguro de excess-loss.** El reasegurador cubre lo que supera al pleno por siniestro fijado por la cedente.

Se distinguen los casos siguientes:

- Que se refiera a una póliza. Se le llama también excedente de siniestros de primera especie o seguro a segundo riesgo.

- Que se refiera a un conjunto de pólizas o una cartera (por ejemplo, terremoto); conocido en el ámbito asegurador como exceso de pérdida catastrófico.

Las ventajas son:

- Cubre los siniestros de elevada cuantía.
- Cubre siniestros múltiples en un solo suceso o evento.

Las desventajas son:

- No cubre las pérdidas que provienen de un gran número de siniestros.
- No cubre del riesgo de ruina de la empresa.

b) **Reaseguro stop-loss.** El reasegurador asume pagar el exceso de siniestralidad total que se estipule, generalmente un tanto por ciento del total de primas. Por referirse a la totalidad de la cartera se le llama reaseguro totalmente colectivo.

Las ventajas de esta modalidad:

- Cubre las fluctuaciones aleatorias de la siniestralidad debidas tanto a grandes siniestros como a las pérdidas ocasionadas por un gran número de ellos.
- Es el único que puede eliminar el riesgo de la empresa.

Influencia en las ecuaciones de estabilidad

El proceso de reaseguro tiene unas repercusiones en la cartera y en las ecuaciones de estabilidad que es preciso poner de manifiesto antes de abordar cualquier problema. Para ello hay que partir de la teoría del riesgo. Nosotros partiremos de la teoría del riesgo colectivo. Analizaremos la influencia de las distintas modalidades en las distribuciones básicas y total (stop-loss). Las distribuciones básicas y variables afectadas de reaseguro llevan el índice cero.

Reaseguro		antes	después
Cuota-parte	distribución de montos de siniestros	$V(x)$	$V_0(y)$
Excedente	costo medio	$C_1 = \int_0^\infty x dV(x)$	$C_1^0 = \int_0^\infty y dV_0(y)$
Excess-loss	primas retenidas	$P = \tau . C_1$	$P_0 = \tau . C_1^0$

		antes	después
Stop-loss	distribución	$F(x, \tau)$	$F_0(x, \tau)$
	primas retenidas	$P = \int_0^\infty x dF(x,\tau)$	$P_0 = \int_0^\infty x dF_0(x,\tau)$

A continuación se verá el efecto del reaseguro en las ecuaciones de estabilidad, para lo cual suponemos que se tiene un siniestro de monto x.

Reaseguro cuota-parte

Siendo $\frac{1}{K}$, con $K > 1$ la cuota retenida por el cedente será:

$$y = \frac{1}{K}.x \qquad \text{ó} \qquad x = K.y$$

$$V_0(y) = V\,(K.y)$$

$$P_0 = \tau.\int_0^\infty y.dV_0(y) = \tau\,.\,C_1^0 = \frac{1}{K}.P$$

$$V_0(R) = \int_0^\infty e^{Ry} dV(K.y) = \int_0^\infty e^{Rx/K} dV(x)$$

Reaseguro de excedente

M = pleno de retención

S = suma asegurada

Si $S \leq M$ No hay reaseguro

Si $S > M$ Hay reaseguro

Pleno de retención o conservación: $M < S$ M = pleno de retención

S = suma asegurada

Siniestro neto de reaseguro: $\frac{M}{S}.x$

Siniestro a cargo del reaseguro: $\frac{S-M}{S}.x$

Para ver la Influencia del reaseguro sobre V(x) necesitaremos definir los siguientes valores:

q(s)ds = probabilidad de que acontecido un siniestro la suma asegurada esté en (s, s+ds).

$p_s(x)$ = probabilidad que dado un siniestro de monto X, se tenga una suma asegurada S.
Se tiene:

$$V_0(y) = \int_0^M q(s)p_s(y)ds + \int_M^\infty q(s)\tfrac{s}{M}\,p_s(\tfrac{s}{M}.y)ds$$

Dado que

$$Y = \frac{M}{S}x \qquad \text{si} \quad M < S$$

$$Y = X \qquad \text{si} \quad S \leqslant M$$

Reaseguro excess-loss con prioridad M

$$V_0(y) = \begin{cases} dV(x) & \text{para } X < M \quad (Y = X) \\ \\ \int_M^\infty dV(x) & \text{para } X \geqslant M \quad (Y = M) \end{cases}$$

$$P = \tau.\int_0^\infty y dV_0(y) = \tau.\left\langle \int_0^M x dV(x) + M\int_M^\infty dV(x) \right\rangle = \tau.C_1^0$$

$$V_0(R) = \int_0^M e^{RX} dV(x) + e^{RM}\int_M^\infty dV(x) = \int_0^\infty e^{Ry} dV_0(y)$$

Reaseguro stop-loss con prioridad N

En esta modalidad es afectada la distribución del daño total:

$$dF_0(x,\tau)\begin{cases} dF(x,\tau) & \text{para } X < N \ \ (N = \% \text{ porcentaje sobre primas}) \\ \int_N^{\infty} dF(x,\tau) & \text{para } X = N \end{cases}$$

$$P_0 = \int_0^N x\,dF(x,\tau) + N\int_N^{\infty} dF(x,\tau) = \int_0^{\infty} x\,dF_0(x,\tau)$$

La relación que existe, después de introducir el reaseguro, entre las magnitudes de estabilización estudiada es:

$\varepsilon \approx e^{-RS_0}$ Desigualdad de Lundberg

$$e^{(1+\lambda)P_0R} = \int_0^{\infty} e^{Rx}\,dF_0(x,\tau) = \begin{cases} e^{\tau[V_0(R)-1]} & \text{Poisson} \\ \left[1 - \frac{\tau}{h}(V_0(R)-1)\right]^{h} & \text{Binomial negativa} \end{cases} \quad \ldots\ldots.. [7]$$

Siendo $V_0(R) = \int_0^{\infty} e^{Ry}\,dV_0(y)$

Problemas de reaseguro

Los tres problemas básicos que se presentan en el reaseguro son:

a) Fijación del sistema o modalidad de reaseguro.

b) Fijación del pleno.

c) Cálculo de la prima, una vez fijado el pleno.

Los dos primeros son de elección y requieren de la existencia de un criterio de decisión. Como estos criterios pueden estar basados en distintos principios, distinguiremos los siguientes casos:

a) Criterios basados exclusivamente en el principio de estabilidad.

b) Criterios que dan entrada, al costo del reaseguro.

c) Criterios que incluyen un orden de preferencias del empresario.

En este trabajo en particular nos basaremos en el principio de estabilidad.

En la práctica se tienen dos posibles casos:

1) Horizonte infinito

Supongamos que se tiene una probabilidad de ruina $\Psi(S_0)$ de que nunca se agote la reserva S_0 a la que se van abonando las primas recargadas.

Se considera que existe una estabilidad satisfactoria para $\Psi(S_0) \leqslant 1\ \%$. Este porcentaje depende de la preferencia del empresario por el riesgo.

Este criterio se utiliza cuando además de los recargos de seguridad incluidos en las primas se dispone de una reserva de solvencia que se puede utilizar en cualquier momento para cubrir el exceso de siniestralidad.

De acuerdo con este criterio el pleno de retención se calcula con arreglo a las siguientes fórmulas:

El valor de R_0 obtenido de $\Psi(S_0) = e^{-RS_0} = \varepsilon_0 \Rightarrow R = R_0$ se sustituirá en:

$$e^{(1+\lambda)P_0 \cdot R_0} = \begin{cases} e^{\tau[V_0(R)-1]} & \text{Poisson} \\ \left[1 - \frac{\tau}{h}(V_0(R)-1)\right]^{-h} & \text{Binomial negativa} \end{cases}$$

Donde

$$V_0(R) = \int_0^\infty e^{Ry} dV_0(y) \quad \text{función característica de la cuantía del siniestro}$$

2) criterio F (horizonte finito)

Este criterio se basa en el criterio de la probabilidad $\varepsilon_0 = 1 - F(x_0, \tau)$, es decir, la probabilidad de que las disponibilidades X_0 de un ejercicio no sean suficientes para hacer frente a la siniestralidad total.

Es preciso aplicar este criterio cuando los fondos de seguridad de la compañía se nutren exclusivamente de los recargos de seguridad que llevan las primas, o también cuando las reservas constituidas no se pueden disponer más que en casos excepcionales, como ocurre en el caso de las reservas para riesgos catastróficos.

En seguida se definen las variables a utilizar:

$X(\tau)$ = siniestralidad total en el periodo $[0, \tau)$.

$C_1^0 . \tau . (1+\lambda)$ = primas recargadas netas de reaseguro en $[0, \tau)$.

El criterio consiste en calcular un pleno (M) tal que.

$$P\,[X(\tau) \geqslant C_1^0 . \tau . (1+\lambda)] = 1 - F\,[C_1^0 . \tau . (1+\lambda), \tau] = \varepsilon_0$$

En donde la función: $F\,[C_1^0 . \tau . (1+\lambda), \tau]$

Se sustituye por la distribución que explique mejor el comportamiento de los siniestros, estas pueden ser: normal, normal power, gamma, etc.

En general si fijamos el volumen de primas como nuestra retención, es decir, $P_0 = C_1^0 . \tau . (1+\lambda)$, aplicando los criterios anteriores, las modalidades que dan mayor estabilidad, es decir, menor probabilidad de ruina ε en orden de eficacia. Stop-loss, exceso de pérdida (excess-loss), excedente y cuota parte.

Igualmente, si tratamos de minimizar la varianza de la siniestralidad neta de reaseguro, las modalidades no proporcionales nos dan la menor varianza.

Para el reaseguro proporcional (cuota parte, excedente) y un importe x se tiene lo siguiente:

- Reaseguro proporcional (cuota parte, excedente):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{cedente} & x_0 = t.\,x \\ \text{reasegurador} & x_1 = (1-t).\,x \end{array}\right\} \quad 0 < t < 1$$

Donde $t = \dfrac{1}{K}$, con $k > 1$, que es la cuota retenida por el cedente.

- Reaseguro no proporcional.

Para un pleno de retención M la prima del cedente es (sin recargo de seguridad).

$$P_0 = \int_0^M x\,dF(x,\tau) + M\int_M^\infty dF(x,\tau)$$

Y del reasegurador

$$P_1 = \int_M^\infty (x-M)\,dF(x,\tau)$$

Vamos a demostrar que para un P_1 fijo la modalidad no proporcional representa el riesgo mínimo o varianza mínima entre todos los reaseguros admisibles.

Representando por T la transformación derivada de dar entrada al reaseguro, para un siniestro cualquiera de cuantía x resulta.

$$x_0 = T.x \qquad \text{(cedente)}$$

$$x_1 = x - T.x \qquad \text{(reasegurador)}$$

$$P_0 = \int_0^\infty T.x dF(x,\tau) = E(T.x)$$

$$P_1 = \int_0^\infty (x - T.x) dF(x,\tau) = \int_0^\infty x - dF(x,\tau) - \int_0^\infty T.x dF(x,\tau) = P - E(T.x) = P - P_0 \qquad P = \text{prima total}$$

$$\sigma^2(T.x) = \int_0^\infty [T.x - E(T.x)]^2 dF(x,\tau) = \int_0^\infty [[T.x - M] + [M - E(T.x)]]^2 dF(x,\tau)$$

$$= \int_0^\infty (T.x - M)^2 dF(x,\tau) + \int_0^\infty [M - E(T.x)]^2 dF(x,\tau) + 2\int_0^\infty [T.x - M][M - E(T.x)] dF(x,\tau)$$

$$= \int_0^\infty (T.x - M)^2 dF(x,\tau) + \int_0^\infty [M - E(T.x)]^2 dF(x,\tau) + 2[M - E(T.x)] \int_0^\infty [T.x - M] dF(x,\tau)$$

El tercer sumando es: $2(M-E(T.x))(E(T.x)-M) = -2[M-E(T.x)]^2$

Luego $\sigma^2(T.x) = \int_0^M (T.x - M)^2 dF(x,\tau) - [M - E(T.x)]^2 \geqslant \int_0^M (T.x - M)^2 dF(x,\tau) - [M - P_0]^2$

$$\geqslant \int_0^M (x - M)^2 dF(x,\tau) - [M - P_0]^2$$

Enseguida se obtendrá la varianza para un reaseguro no proporcional:

$$T^{*}.x = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant M \\ M & \text{si } x > M \end{cases}$$

$$\sigma^2(T^{*}.x) = \int_0^M (x - M)^2 dF(x,\tau) + \int_M^\infty (M - M)^2 dF(x,\tau) - [M - P_0]^2 = \int_0^M (x - M)^2 dF(x,\tau) - [M - P_0]^2$$

De donde $\sigma^2(T.x) \geqslant \sigma^2(T^{*}.x)$. Por cual queda demostrado que la varianza del reaseguro no proporcional es menor al proporcional.

Ejemplo

Una entidad aseguradora cuya reserva de solvencia para el ramo X es de 180 millones de pesos, tiene las características siguientes:

1) Un volumen de primas comerciales de 600 millones de pesos.

2) Los gastos de administración ascienden a 240 millones de pesos.

3) La siniestralidad imputable a las citadas primas se estima en 300 millones de pesos, y, el número medio de siniestros está estimado en 5,000.

4) La función de densidad de probabilidad del monto del siniestro esta dada por la siguiente formula:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \alpha\, e^{-\alpha x} \qquad x \geqslant 0$$

Supongamos que la probabilidad de ruina $\varepsilon = e^{-2}$ y que el tipo de reaseguro es el de exceso de pérdida. Se van a ver dos casos:

a) Cartera homogénea.

b) Cartera no homogénea con coeficiente de heterogeneidad h igual 50

Tomando los valores anteriores obtenemos los siguientes resultados:

300, 000,000 pesos.	P = E(x) (prima de riesgo)
240, 000,000 pesos.	G = (gastos de administración)
540, 000,000 pesos.	Prima neta sin recargo

El recargo técnico o de seguridad implícito es $\lambda P = \lambda(300 \text{ millones}) = 60$ millones, por lo tanto, el valor de λ

$$\lambda = \frac{60{,}000{,}000}{300{,}000{,}000} = .20$$

a) Obtención de C_1

$P = \tau\, C_1 = 5{,}000.\ C_1 = 300{,}000{,}000$ por lo tanto C_1 = costo medio de siniestros = 60,000

Por otro lado tenemos.

$$C_1 = \int_0^{\infty} x dV(x) = \int_0^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{60{,}000}$$

b) Obtención de C_1^0

$$C_1^0 = \int_0^{\infty} y dV_0(y) = \int_0^{M} x dV(x) + M\int_M^{\infty} dV(x) = \int_0^{M} x\alpha e^{-\alpha x} dx + M\int_M^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

Resolviendo las integrales usando cambio de variable tenemos:

$w = \alpha x$

$\alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-w} dw$

Resulta $\quad C_1^0 = \dfrac{1}{\alpha}[1 - e^{-\alpha M}]$

Si operamos en unidades de costo medio ($C_1 = 1$), tenemos $\alpha = 1 \Rightarrow C_1^0 = 1 - e^{-M}$

c) Ecuaciones de estabilidad una vez introducido el reaseguro. La expresión [7] la podemos escribir como:

$$e^{(1+\lambda)P_0 R} = \left[1 - \tfrac{\tau}{h}(V_0(R) - 1)\right]^{h}$$

$$e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}C_1^0 . R} = 1 - \tfrac{\tau}{h}(V_0(R) - 1)$$

$$\frac{\tau}{h} V_0(R) = 1 - e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}C_1^0 . R} + \frac{\tau}{h}$$

$$V_0(R) = \frac{1 - e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}C_1^0 . R}}{\frac{\tau}{h}} + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{[8]}$$

Pero también por definición de $V_0(R)$ como función característica de la cuantía del siniestro neta de reaseguro tenemos.

$$V_0(R) = \int_0^{M} e^{Rw} e^{-w} dw + e^{RM} \int_M^{\infty} e^{-w} dw \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{[9]}$$

Igualando [2] y [3].

$$V_0(R) = \int_0^{M} e^{Rw} e^{-w} dw + e^{RM} \int_M^{\infty} e^{-w} dw = 1 + \frac{1 - e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}C_1^0 . R}}{\frac{\tau}{h}}$$

$$\frac{1-e^{-M(1-R)}}{1-R}+e^{-M(1-R)} = 1+\frac{1-e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R}}{\frac{\tau}{h}}$$

$$\frac{1}{1-R}\left[1-e^{-M(1-R)}+(1-R)\, e^{-M(1-R)}\right]= 1+\frac{1-e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R}}{\frac{\tau}{h}}$$

$$\frac{1}{1-R}\left[1-Re^{-M(1-R)}\right]= 1+\frac{1-e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R}}{\frac{\tau}{h}}$$

El primer miembro de esta ecuación se puede desarrollar aproximando a $e^{-M(1-R)}$ por un polinomio de Taylor alrededor del cero.

$$\frac{1}{1-R}\quad \left\{1-R\left[1-\frac{M(1-R)}{1!}+\frac{M^2(1-R)^2}{2!}-.....\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{1-R}\ \left\{(1-R)+\frac{MR(1-R)}{1!}-\frac{M^2R(1-R)^2}{2!}+...\right\}$$

$$=\left[1+MR-\frac{M^2R(1-R)^2}{2!}+...\right]$$

A su vez el miembro de la derecha también se puede desarrollar aproximando $e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R}$ por un polinomio de Taylor alrededor del cero.

$$e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R}=1-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R+\frac{1}{2}(1+\lambda)^2\,\frac{\tau^2}{h^2}(1-e^{-M})^2R^2-.....$$

$$\frac{1-e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R}}{\frac{\tau}{h}}=(1+\lambda)(1-e^{-M})R-\frac{1}{2}(1+\lambda)^2\,\frac{\tau}{h}\,(1-e^{-M})^2R^2-.....$$

Aproximando nuevamente e^{-M} y tomando los primeros tres términos tenemos la siguiente aproximación:

$$\approx(1+\lambda)\left(M-\tfrac{M^2}{2}\right)R-\frac{1}{2}(1+\lambda)^2\,\frac{\tau}{h}M^2R^2+....$$

$$1+\frac{1-e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R}}{\frac{\tau}{h}}\approx 1+(1+\lambda)M\left(1-\tfrac{M}{2}\right)R-\frac{1}{2}(1+\lambda)^2\,\frac{\tau}{h}M^2R^2+....$$

Igualando los resultados obtenidos tenemos:

$$1+MR-\frac{M^2R(1-R)^2}{2} \approx 1+(1+\lambda)M\left(1-\tfrac{M}{2}\right)R-\frac{1}{2}(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}M^2R^2+\ldots$$

Cancelando los unos y dividiendo entre MR, tenemos:

$$1-\frac{M(1-R)}{2} \approx (1+\lambda)\left(1-\tfrac{M}{2}\right)-\frac{1}{2}(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}MR+\ldots$$

Distribuyendo $(1+\lambda)$ en el lado derecho:

$$1-\frac{M(1-R)}{2} \approx (1+\lambda)-(1+\lambda)\frac{M}{2}-\frac{1}{2}(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}MR+\ldots$$

$$\frac{1}{2}(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}MR+(1+\lambda)\frac{M}{2}-\frac{M(1-R)}{2} \approx (1+\lambda)-1$$

$$M\left[\frac{1}{2}(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}R+(1+\lambda)\frac{1}{2}-\frac{(1-R)}{2}\right] \approx \lambda$$

$$M\left[(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}R+(1+\lambda)-(1-R)\right] \approx 2\lambda$$

$$M\left[(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}R+R+\lambda\right] \approx 2\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[10]$$

Sustituyendo en [10] el coeficiente R obtenido a partir de la desigualdad de Lundberg.

$$R=\frac{1}{S_0}(-\log\ \varepsilon)$$

Queda

$$M \approx \frac{2\lambda}{(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}\ R+R+\lambda}=S_0\cdot\frac{2\lambda}{(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}(-\log\varepsilon)+(-\log\varepsilon)+\lambda S_0}$$

d) Sustituyendo los valores numéricos en unidades de costo medio para la cartera no homogénea ($h = 50$) se tiene lo siguiente.

$$M \approx 3{,}000.\ \frac{(2)(.20)}{(1.2)^2\frac{5{,}000}{50}2+2+(.20)(3000)} \approx 1.40$$

$M \approx (1.40)\,(60{,}000)=84{,}000$ pesos.

Cartera homogénea ($h \longrightarrow \infty$)

$$M \approx 3{,}000.\ \frac{(2)(.20)}{2+(.20)(3000)} \approx 2$$

$M \approx (2)\ (60{,}000) = 120{,}000$ pesos.

Es lógico que para un mismo índice de estabilidad o probabilidad de ruina (ε). Se obtenga un pleno de propia retención más bajo cuando la distribución del número de siniestros es la binomial negativa (cartera heterogénea) que cuando es homogénea (Poisson), ya que esta última distribución tiene menor varianza.

4.1 Modelo que considera el capital y las reservas

Se consideran únicamente los recursos que posee la empresa, los cuales garantizarán cubrir la totalidad de siniestros ocurridos.

Considerando que las compañías aseguradoras cuentan con el capital contable, las reservas y las primas, como los recursos para afrontar la desviaciones por siniestralidad que se puede presentar. El límite de retención, habrá de garantizar que ante las circunstancias más adversas, el capital contable no se vea consumido en su totalidad.

El límite de retención M, habrá de ser tal que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$S_M \leqslant C + P_M (1 - G - U)$$

Donde:

S_M Siniestralidad máxima esperada con retención igual a M

C Capital contable

P_M Primas retenida dada una retención igual a M

G Gastos de adquisición y administración.

U Margen de utilidad

Este método implica que las compañías con grandes capitales van a poder suscribir más riesgos que las pequeñas empresas debido a que su retención será mayor que estas últimas.

Por ejemplo, supongamos que se tienen dos compañías de seguros X y Z, las cuales tienen para cierto ramo el mismo volumen de primas de $100 millones y que además sus carteras son muy parecidas y por consiguiente el monto de siniestros esperados es semejante para ambas compañías por la cantidad de $150 millones.

También tenemos que las dos instituciones cuentan con capitales contables muy diferentes, $50 millones para la aseguradora X y $200 millones para la compañía Z.

Suponiendo que los gastos y el margen de utilidad representan el 30% de la prima, se obtendrían los siguientes resultados:

Recursos compañía X = 50, 000,000 + 100, 000,000(1-0.3)
= 50, 000,000 + 70, 000,000
= 120, 000,000

Por lo tanto tenemos que: 150, 000,000 > 120, 000,000

Esto significa que la compañía no puede retener el 100% de la cartera, por lo cual tendría que buscar el límite adecuado donde la suma del capital contable mas la prima de riesgo fuera mayor a los siniestro esperados.
Recursos compañía Z = 200, 000,000 + 100, 000,000 (1-0.3)

$$= 200,000{,}000 + 70,000{,}000$$
$$= 270,000{,}000$$

Por lo tanto tenemos que: 150, 000,000 < 270, 000,000, lo cual significa que la compañía puede retener el 100% de su cartera.

En general, se puede decir que en este método no tiene demasiada importancia el perfil de la cartera de la compañía, sino el capital con que cuente cada aseguradora, ya que aunque la compañía X cuente con el mismo tipo de cartera que Z, este tiene un mayor límite de retención por su capital contable.

4.2 Modelo de la Pérdida Máxima Probable

Este modelo se basa en el perfil de la cartera de sumas aseguradas

Para explicar este modelo, es necesario definir antes las variables involucradas, lo cual se efectuará a continuación:

SA_j = rango de suma asegurada

NR = número de riesgos

Suma asegurada total = suma de los límites de responsabilidad de cada uno de los riesgos contenidos en cada uno de los rangos

Primas anuales de tarifa = prima de tarifa de todos los riesgos de cada rango

CT_j = cuota de tarifa al millar, es decir:

$$CT_j = \frac{\text{primas anuales de tarifa}}{\text{suma asegurada total}} \times 1000$$

Número de siniestros = número de siniestros por rango de suma asegurada

Monto de siniestros = monto total de siniestros por rango de suma asegurada

El siguiente cuadro muestra un ejemplo:

Determinación del Límite Máximo de Retención

Cifras en miles de pesos

SAj = Rango de suma asegurada		NR = Número de riesgos	Suma asegurada total	Primas anuales de tarifa	CTj= Cuota de tarifa al millar = Prima/Suma Aseg.	Siniestros		
Mas de	Hasta					Numero	Monto	Suma Aseg
-	1,000	1,000	500,000	1,250	2.50	2	600	1,000
1,000	5,000	2,000	6,000,000	18,000	3.00	4	7,200	12,000
5,000	10,000	4,000	30,000,000	105,000	3.50	13	58,500	97,500
10,000	25,000	6,000	105,000,000	420,000	4.00	23	241,500	402,500
25,000	50,000	10,000	375,000,000	1,687,500	4.50	57	1,282,500	2,137,500
50,000	100,000	8,000	600,000,000	3,000,000	5.00	51	2,295,000	3,825,000
100,000	500,000	4,000	1,200,000,000	6,600,000	5.50	35	6,300,000	10,500,000
		35,000	**2,316,500,000**	**11,831,750**	**5.11**	**185**	**10,185,300**	**16,975,500**

RET_j = nivel de retención j, que no es más que el límite superior del rango de suma asegurada

NRA_i = número de riesgos asegurados con la condición de que $SA \leqslant RET_j$

$$NRA_i = \sum_{j=1}^{i} NR_j \qquad \text{donde} \quad i = 1, \dots, 7$$

NR = número de riesgos

SAA = suma asegurada acumulada de riesgos con la condición de que $SA \leqslant RET_j$

$$SAA_i = \sum_{j=1}^{i} SAT_j \qquad \text{donde} \quad i = 1, \dots, 7$$

SAT_j = suma acumulada total

PAA_j = prima acumulada de riesgos con la condición de que $SA \leqslant RET_j$

$$PAA_j = \sum_{j=1}^{i} PTA_j \qquad \text{donde} \quad i = 1, \dots, 7$$

PTA_j = prima total acumulada

SAR_j = suma asegurada retenida total correspondiente a cada límite de retención

$SAR_j = (NRA_7 - NRA_j)*RET_j + SAA_j$

PAR_j = prima anual retenida total correspondiente a cada límite de retención

$$PAR_j = PAA_j + \frac{RET_j}{1{,}000} * \sum_{i=j+1}^{7} (NR_i * CT_i) \qquad \text{donde } j = 1, \dots, 6$$

CRP_j = cuota de riesgo pura promedio

$PAR_7 = PAA_7$

$$CRPj = \frac{PARj}{SARj * FCRP}$$

FCRP = factor de cuota de riesgo pura = cuota de riesgo / cuota de tarifa 60%

MSD = monto disponible para cubrir siniestros

MSD = PAR*FMCS

FMCS = factor de margen para cubrir siniestros

FMCS = cuota de riesgo*(1+MS+UT) / cuota de tarifa

PMP_j = pérdida máxima probable a nivel retención

$$PMP_j = CRP_j * \sum_{j=1}^{7} NR_j * SA_j$$

IRj = índice de retención

$$IR_j = MDS_j / PMP_j$$

Nivel de retención j	No. riesgos asegurados con SA<=RETj	SA acumulada de riesgos con SA<=RETj	Prima acumulada de riesgos con SA<=RET	SA retenida total correspondiente a retención	Prima anual retenida total correspondiente al nivel de retención	Cuota de riesgo pura promedio	Monto disponible cubrir siniestros	Pérdida Máxima Probable a nivel retención	Indice de Retención
RETj	NRA	SAA	PAA	SARj	PARj	CRPj = PARj/SARj*FCRP	MDS = PAR * FMCS	PMPj = CRPj * NR * SAj	IRj = MDSj/PMPj
1,000	1,000	500,000	1,250	34,500,000	152,250	0.265%	115,710	92,674	1.249
5,000	3,000	6,500,000	19,250	166,500,000	744,250	0.268%	565,630	469,346.8	1.205
10,000	7,000	36,500,000	124,250	316,500,000	1,434,250	0.272%	1,090,030	951,635.1	1.145
25,000	**13,000**	**141,500,000**	**544,250**	**691,500,000**	**3,219,250**	**0.279%**	**2,446,630**	**2,444,116.1**	**1.001**
50,000	23,000	516,500,000	2,231,750	1,116,500,000	5,331,750	0.287%	4,052,130	5,014,185.0	0.808
100,000	31,000	1,116,500,000	5,231,750	1,516,500,000	7,431,750	0.294%	5,648,130	10,291,246.3	0.549
500,000	35,000	2,316,500,000	11,831,750	2,316,500,000	11,831,750	0.306%	8,992,130	53,629,775.5	0.168

Por lo tanto tenemos que el nivel de retención es de $ 25, 000 por que es donde el índice de retención esta mas cercano a uno.

4.3 Modelo de la Suma Reclamada

Este modelo está basado en los montos de sumas reclamadas o siniestros y en las primas emitidas que tiene una compañía en cierto período del tiempo.

Para explicar este modelo, es necesario definir antes las variables involucradas, lo cual se efectuará a continuación:

SR_j = rango de sumas reclamadas

Número de siniestros = número de siniestros por rango de suma reclamada

Monto de siniestros = monto total de siniestros por rango de suma reclamada

Primas anuales (PR) = prima emitida de todos los riesgos de cada rango

RET_j = nivel de retención j, que no es más que el límite superior del rango de suma reclamada

NRA_i = número de reclamaciones con la condición de que $SR \leqslant RET_j$

$$NRA_i = \sum_{j=1}^{i} NR_j \quad \text{donde} \quad i = 1, \ldots, 7$$

NR = número de siniestros

SRA = suma reclamada acumulada de siniestros con la condición de que $SR \leqslant RET_j$

$$SRA_i = \sum_{j=1}^{i} MS_j \qquad \text{donde} \quad i = 1, \ldots, 7$$

MS_j =Monto de siniestros total

PA_j = prima acumulada con la condición de que $SR \leqslant RET_j$

El siguiente cuadro muestra un ejemplo:

Determinación del Límite Máximo de Retención — **Cifras en pesos**

SRj = Rango de reclamaciones		Siniestros		Primas anuales	Nivel de retención j	No. reclamaciones con SR<=RETj	SR acumulada de siniestros con SR<=RETj	Prima acumulada con SR<=RET
Mas de	Hasta	Numero	Monto		RETj	NRA	SRA	PA
-	1,000	1,080	900,000	1,600,000	1,000	1,080	900,000	1,600,000
1,000	5,000	780	3,800,000	4,700,000	5,000	1,860	4,700,000	6,300,000
5,000	10,000	350	3,200,000	4,000,000	10,000	2,210	7,900,000	10,300,000
10,000	**25,000**	**175**	**4,300,000**	**5,300,000**	**25,000**	**2,385**	**12,200,000**	**15,600,000**
25,000	50,000	86	4,200,000	4,900,000	50,000	2,471	16,400,000	20,500,000
50,000	100,000	79	7,700,000	9,500,000	100,000	2,550	24,100,000	30,000,000
100,000	500,000	28	12,600,000	15,000,000	500,000	2,578	36,700,000	45,000,000
		2578	**36,700,000**	**45,000,000**				

SRR_j = suma reclamada retenida total correspondiente a cada límite de retención

$SRR_j = (NRA_7 - NRA_j) * RET_j + SRA_j$

PAR_j = prima anual retenida total correspondiente a cada límite de retención

$$PAR_j = PA_j + \sum_{i=j+1}^{7} PR_i * (SR_j / SR_i) \qquad \text{donde } j = 1, \ldots, 6$$

SRj = Rango de reclamaciones		SR retenida total correspondiente a retención	Prima anual retenida total correspondiente al nivel de retención	Monto disponible cubrir siniestros	Indice de Retención
Mas de	Hasta	SRRj	PARj	MDS = PAR * FCRP	IRj = MDSj/SRRj
-	1,000	2,398,000	3,375,000	2,700,000	1.126
1,000	5,000	8,290,000	10,475,000	8,380,000	1.011
5,000	10,000	11,580,000	14,650,000	11,720,000	1.012
10,000	**25,000**	**17,025,000**	**21,175,000**	**16,940,000**	**0.995**
25,000	50,000	21,750,000	26,750,000	21,400,000	0.984
50,000	100,000	26,900,000	33,000,000	26,400,000	0.981
100,000	500,000	36,700,000	45,000,000	36,000,000	0.981

Similarmente que en el método de sumas aseguradas, se puede ver que el rango de sumas reclamadas es de $ 25, 000 por que es donde el índice de retención esta mas cercano a uno.

Llegado a este punto se está en las condiciones de poder opinar cual sería el mejor modelo matemático para determinar el límite máximo de retención para el seguro de salud en México, se platicará enseguida las características principales de cada modelo y de acuerdo a eso se definirá cual es el mejor para aplicarse al seguro de salud que es el tema de este estudio, ya que no todos los modelos vistos pueden ser fácilmente aplicados en México con las características actuales que tiene el sector además de que algunos usan el concepto de suma asegurada el cual no existe en este tipo de seguro.

El modelo que utiliza el Método de Multiplicadores de Lagrange es muy sencillo, pero tiene algunos inconvenientes como son: solamente se puede aplicar si el esquema de reaseguro es proporcional, además incluye una μ que depende bastante de la experiencia de cada compañía, lo cual puede ocasionar que un valor mal estimado de μ, que ocasionaría un límite de retención mal fijado.

El modelo del Valor Optimo es un poco más complicado ya que se requiere utilizar más variables y calcular más factores, pero su problemática radica principalmente que está diseñado para la operación de vida, en la cual el riesgo cubierto que es muerte solamente ocurre una vez para un individuo, pero en el caso de salud se tiene que una persona puede tener varios siniestros en un año Este modelo consiste en encontrar un valor óptimo, utilizando para ello las sumas aseguradas directas y cedidas en forma proporcional, las tasas de las primas de reaseguro por unidad de suma asegurada, el riesgo medio de un seguro individual con duración de un año por unidad de suma asegurada y edad asegurada i; como se puede observar este método radica en parte en las sumas aseguradas de las pólizas, el cual es un concepto que no existe en el seguro de salud. Además el método supone un monto de suma asegurada como limite de retención el cual como ya se comentó arriba en el seguro de salud no se utilizan sumas aseguradas.

El modelo en Base a un Problema de Riesgo y Rendimiento esta un poco más completo, pero también esta inclinado hacia el área de vida, y por lo tanto estamos en la misma situación que el segundo modelo. se considera la determinación del limite de retención como un problema de riesgo y rendimiento, es decir, dado que la cedente esta expuesta a la ocurrencia de un evento desfavorable(la ocurrencia de muerte para sus asegurados), se desea en base a tal eventualidad, obtener una cierta "ganancia"o un cierto "rendimiento", reflejando éste como el minimizar del costo máximo que tenga que desembolsar la cedente ante la ocurrencia de un siniestro, o bien, que el riesgo total de la cantidad a retener sobre cada póliza llegue a ser mínimo.

El modelo de Teoría del Riesgo es muy matemático y muy extenso, por lo tanto para aplicarlo a una aseguradora sería muy difícil de aplicar computacional mente. En el cual se habla de la estabilidad y solvencia económica del ente asegurador, de las teorías del riesgo tanto a nivel individual como colectivo, de magnitudes de estabilidad como lo es el recargo técnico o de seguridad y las reservas de solvencia, del proceso de riesgo, es decir una trayectoria muestral del proceso de riesgo, la distribución de la siniestralidad en un horizonte finito, aproximaciones de la función de distribución de la siniestralidad total, tales como la aproximación normal, aproximación normal power, aproximación gamma, el problema de la ruina en un horizonte infinito, los sistemas de reaseguro, ecuaciones de estabilidad, problemas del reaseguro dos criterios basados exclusivamente en el principio de estabilidad

El modelo que considera el Capital y las Reservas es el más sencillo de todos los expuestos y solo toma en cuenta el capital contable, las reservas y las primas, que son los recursos con los que cuenta la compañía para afrontar la máxima desviación por siniestralidad que se pueda presentar, en este modelo no importa el perfil de la cartera sino el capital contable que tenga cada compañía, ya que puede haber una compañía pequeña que tenga poco capital pero una cartera sana, pero tenga un límite de retención menor que una compañía grande debido a que tiene un mayor capital sin importar que tan mala sea su cartera. Aunque este método si se puede aplicar a salud no es el más conveniente dado que no depende de factores técnicos.

El modelo de la Pérdida Máxima Probable se basa en el perfil de la cartera de sumas aseguradas y primas de la compañía, este modelo aparte de las variables mencionadas requiere también conocer el número de riesgos por rango de suma asegurada. A partir de estas tres variables se obtienen los demás valores necesarios para determinar el límite máximo de retención, como son, la cuota de tarifa (prima anual / suma asegurada), la prima y la suma asegurada acumulada por cada uno de los rangos en que se dividió la cartera. Como podemos ver este modelo usa el concepto de suma asegurada el cual no existe en este tipo de seguro.

El modelo de la Suma Reclamada está basado en los montos de sumas reclamadas o siniestros y en las primas emitidas que tiene una compañía en cierto período del tiempo, ya que este modelo no maneja el concepto de sumas aseguradas y computacionalmente es fácil de manejarlo, además de que no es necesario conocer la función de distribución de los siniestros y no depende de la experiencia de la compañía aseguradora se puede decir que es el mejor modelo para calcular el Límite Máximo de Retención para el Seguro de Salud en México.

Para conocer en que consiste este método es necesario saber la definición de punto estacionario, un punto estacionario de la función diferenciable $f(x_1,....,x_n)$ sobre el lugar geométrico.

$$\varphi_1(x_1,....,x)=0,.....,\varphi_m(x_1,.....x_2)=0 \qquad \varphi_1,......,\varphi_m \quad \text{Diferenciables,}$$

Es un punto p_0 de dicho lugar geométrico tal que

$$\nabla f(p_0)+\mu_1\nabla\varphi_1(p_0)+...+\mu_m\nabla\varphi_m(p_0)=0$$

Para ciertos valores $\mu_1,........,\mu_m \quad \in \quad R$

Por tanto, tales puntos estacionarios deben satisfacer las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\mu_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}+.....+\mu_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i}=0 \qquad i=1,......,n$$

Y las ecuaciones

$$\varphi_j(x_1,.....,x_n)=0 \qquad j=1,.......,m$$

El método para obtener los puntos estacionarios consiste en formar la función

$$f+\mu_1\varphi_1+......+\mu_m\varphi_m$$

Igualar a cero sus parciales con respecto a $x_1,.....,x_n$ y sus parciales con respecto a $\mu_1,.....,\mu_m$ y resolver el sistema formado por estas n + m ecuaciones.

Teorema de De Moivre-Laplace

(Parte I)

Si 'x' y 'n' $\rightarrow +\infty$ de manera tal que $\dfrac{x - np}{\sqrt{npq}} \rightarrow z < +\infty$ entonces se verifica que:

$$\sqrt{npq}\binom{n}{x} p^{x} q^{n-1} \rightarrow \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Con el resultado anterior se permite calcular la binomial por la formula:

$$b(x, n, p) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-1} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad \text{donde} \quad z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

Con lo cual se estaría aproximando la distribución Normal, recordando que al tipificar una Normal se tiene que $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

(Parte II)

Si X es una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n pruebas de un proceso de Bernoulli con probabilidad 'p', entonces se debe verificar que:

$$P(a < X \leqslant b) = \Phi\left\langle \frac{b - np}{\sqrt{npq}} \right\rangle - \Phi\left\langle \frac{a - np}{\sqrt{npq}} \right\rangle$$

http://www.imss.gob.mx/IMSS/estoesimss/imss_misión.htm 2 4/08/2002

http://informatica.issste.gob.mx/website/quees/quees.html 02/10/2002

http://strix.ciens.ucv.ve/~teorprob/guiasteoricas/cap6/cap6.html

Aspectos generales de las Instituciones de Seguros Especializadas en Salud (ISES)
Verónica Margarita González Guerrero
Tesis de licenciatura 2002.

Aspectos de reaseguro vida
Nava Álvarez Efraín
Tesis de licenciatura 1993.

Análisis y perspectivas del reaseguro Tradicional y en México en vísperas del siglo XXI
Vanegas Chávez Fernando Eleazar
Tesis de licenciatura 1998.

El reaseguro de daños en México como empresa reaseguradora
Castellano López José Antonio
Tesis de licenciatura 1991.

El reaseguro determinación de los límites técnicos de la retención del asegurador
Román Curto Maria Elda
Tesis de licenciatura 1980

El reaseguro en el ramo de vida
Sánchez Rubio Patricia
Tesis de licenciatura 1981

El reaseguro de vida en México
Luemo Solorio José
Tesis de licenciatura 1982

Reaseguro no proporcional
Solórzano Braver Juan
Tesis de licenciatura 1967

Seguro y reaseguro de los riesgos catastróficos
García Mellero Ana
Tesis de licenciatura 1974

La técnica actuarial aplicada al reaseguro no proporcional con particular referencia al stop-loss
González Franyutti Elsa
Tesis de licenciatura 1990

El reaseguro de daños en México como empresa reaseguradora
López Castellanos José
Tesis de licenciatura 1990

Seguro y reaseguro en las finanzas y en la economía de un país
Yánez Acosta María
Tesis de licenciatura 1991

Matemática actuarial
Ubaldo Nieto de Alba
Jesús Vegas Ascensio
Fundación MAPFRE estudios instituto de ciencias del seguro
Colección Universitaria

El Reaseguro de los Ramos Generales
Suiza de Reaseguros

Cálculo avanzado
Gonzalo Zubieta Russi
Instituto de Matemáticas y Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Fondo Educativo Interamericano

Ley del IMSS 1997

Cálculo con geometría analítica
Earl W. Swokowski
Grupo Editorial Iberoamericano

Probabilidad y estadística
Ronald E. Walpolle
Raymond H. Myers
Cuarta Edición
McGRAW-HILL

Mathematical Methods in Risk Theory
Bühlman, H.
New York: Springer. 1970

Risk Theory
Beard, R.E; Pentikainen, T.; and Pesonen, E.
London: Methuen. 1977