

00323
12



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ANALISIS PRELIMINAR DE LA SENSIBILIDAD NUMERICA DE LA CONSTANTE DE JACOBI"

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A:
CASTRO BENITEZ GUILLERMO SALVADOR

DIRECTOR DE TESIS: JULIA ESPRESATE EINBESCHUTZ



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
 "Análisis preliminar de la Sensibilidad Numérica de la Constante de Jacobi"

realizado por Castro Benítez Guillermo Salvador

con número de cuenta - 09756772-1 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
 Propietario

Dra. Julia Espresate Einbeschütz

Julia Espresate E.

Propietario

Dra. Xóchitl Guillermina Blanco Cano

Xóchitl Blanco

Propietario

Dr. Juan Manuel Lozano Mejía

Juan Manuel Lozano

Suplente

Dr. Angel Prieto Ruíz

Angel Prieto Ruiz

Suplente

Dr. Edmundo Moreno Díaz

Consejo Departamental de Física

Patricia Goldstein Menache
 DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
 Coordinadora de Licenciatura

Autorizo a la Dirección General de Inspección de la UNAM a difundir en forma electrónica y impresa el contenido de mi trabajo intelectual.

NOMBRE: Guillermo Salvador
Castro Benítez

FECHA: 7/11/03

FIRMA: 777

EN MEMORIA

A mis papás

Dedicatorias

**A mis papás, por haberme dado lo necesario para llegar hasta aquí y aún
más para poder llegar más lejos.
Los extraño!!!**

**A Karla, por haberme acompañado durante todo el camino.
Va por tí.**

A mis hijos, porque sus sonrisas me dieron ánimos.

Agradecimientos

A los responsables de que esté aquí, mis padres.

A los miembros de mi jurado.

A mi asesora, la Dra. Julia Espresate, por haber aprendido de ella mucho más de lo que ella se imagina.

A la Dra. Xóchitl Blanco, por los valiosos comentarios sobre mi tesis y porque vamos a tener aún más tiempo para aprender.

Al Dr. Edmundo Moreno, por haberme enseñado tanto en tan poco tiempo.

Al Dr. Juan Manuel Lozano, porque una entrevista valió un semestre completo.

Al Dr. Ángel Prieto, porque sus comentarios y preguntas sobre mi tesis me enseñaron mucho.

A mis compañeros de la carrera, ¿Qué hubiera sido sin ellos?

A Diana, porque un cambio de Instituto no significa un cambio de amigos.

A Pepe, porque una gran mujer merece estar con un gran hombre.

A todos mis profesores de carrera.

Al último y la más importante, a Karla por su compañía y porque todo su esfuerzo no fue en vano.

“Análisis Preliminar de la Sensibilidad Numérica de la Constante de Jacobi”

Tesis presentada por: Castro Benítez Guillermo Salvador

F

INDICE GENERAL

INTRODUCCION	1
CAPITULO 1: EL PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS	
1.1. Definiciones y ecuaciones de movimiento	5
1.2. La constante de Jacobi	8
CAPITULO 2: ECUACIONES DE MOVIMIENTO	
2.1. Ecuaciones de movimiento con el origen en el primario y ejes no rotantes	15
2.2. La necesidad de un código numérico	18
2.3. El código numérico	19
CAPITULO 3: ORBITAS RESONANTES	
3.1. Orbitas resonantes de primer orden	23
CAPITULO 4: RESULTADOS DE LAS INTEGRACIONES NUMERICAS	
4.1. Integraciones de una órbita resonante	27
4.2. Integraciones de una órbita no resonante	38
CAPITULO 5: DEPENDENCIA DE C_j A SUS VARIABLES A MEDIDA QUE SE VAN ACUMULANDO ERRORES	
5.1. Variación en las condiciones iniciales	45
CONCLUSIONES	51
APENDICE A	53
APENDICE B	57
REFERENCIAS	63

INTRODUCCION

La mayoría de los fenómenos naturales son sistemas dinámicos cuya representación matemática involucra en general ecuaciones diferenciales muy complicadas y difíciles de resolver analíticamente.

La llegada de las computadoras digitales dió una herramienta que hoy en día es común para aproximar las soluciones numéricamente en un lapso de tiempo considerablemente reducido.

Uno de los problemas abordados desde finales del siglo *XIX*, e incluso antes, en Mecánica Celeste es el Problema Plano, Circular de Tres Cuerpos, cuya solución involucra un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, acoplado, no lineal para el cual no hay hasta la fecha una solución analítica.

En 1836, *Jakob Jacobi* (1804-1851), intentó encontrar alguna solución simplificando ligeramente el problema. Jacobi supuso que sólo existían dos cuerpos gravitacionalmente masivos girando en órbita circular alrededor de su centro de masa, y un tercer cuerpo sin masa gravitacional, es decir, de masa despreciable respecto a las de los otros dos (que llamaremos partícula) cuyo movimiento está determinado por la fuerza ejercida por los dos cuerpos masivos, pero de tal manera que su presencia no modifica en modo alguno el movimiento de ellos. Así surgió el ahora denominado *Problema Circular, Restringido de Tres Cuerpos*. Jacobi encontró una constante de movimiento para la partícula, constante que ahora lleva su nombre, dando una gran aportación a la Mecánica Celeste. El Problema Circular, Restringido de Tres Cuerpos se denomina *Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos* (PPCRTC) cuando la partícula sin masa se mueve en el mismo plano orbital en el que se mueven los dos cuerpos masivos. Como los dos cuerpos masivos están en órbitas circulares no perturbadas, sus órbitas son conocidas y por tanto sus posiciones y velocidades en cualquier instante de tiempo se pueden predecir. Así pues, el PPCRTC consiste en encontrar la trayectoria de la partícula infinitesimal que se mueve bajo la influencia gravitacional de los dos cuerpos masivos. En el PPCRTC se está violando la 3ª *Ley de Newton* ya que si en algún momento la partícula gana o pierde momento angular

o energía, esto no se refleja en el movimiento de ninguna de las otras dos masas, y siendo la fuerza gravitacional un campo conservativo, la energía total (tomando en cuenta los tres cuerpos) y el momento angular debieran conservarse pero no sucede así debido a las suposiciones que se han hecho. De modo que la única constante de movimiento en este problema es la *Constante de Jacobi*.

Las ecuaciones que involucra este problema sólo pueden ser resueltas numéricamente, es decir, aproximando los valores exactos usando computadoras y los correspondientes métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales.

La computadora es una herramienta poderosa que ha podido hacer lo que al ser humano le tomaría mucho tiempo hacer para la solución de este tipo de problemas matemáticos. Sin embargo al no tener precisión infinita, las computadoras acumulan errores en sus cálculos y, hablando específicamente del Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos, del cual no conocemos la solución analítica para el movimiento de la partícula, la única forma de saber si la computadora está calculando la órbita correctamente es monitoreando el valor de la Constante de Jacobi. Dependiendo de por cuánto tiempo deseemos conocer la trayectoria de la partícula nos tenemos entonces que conformar con una "razonable" conservación de dicha constante hasta cierto número de cifras decimales. El no conocer la solución del movimiento de la partícula de antemano, nos obliga a confiar en la trayectoria calculada por la computadora basándonos exclusivamente en la conservación más o menos precisa de su constante de movimiento.

En esta tesis se analizará precisamente este criterio de conservación que es uno de los criterios más utilizados para evaluar la calidad de una integración numérica y se demuestra que bajo ciertas circunstancias este criterio puede no ser un buen indicador de la calidad de los resultados, ya que estos presentan cambios cualitativos (no cuantitativos) importantes. Cambios a los que la Constante de Jacobi no es sensible y se deben a los errores numéricos que se acumulan durante la integración. Es decir, se pueden obtener órbitas cualitativamente incorrectas a pesar de tener una buena conservación de la Constante de Jacobi.

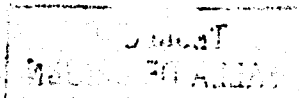
En el primer capítulo de esta tesis se deduce la expresión para la Constante de Jacobi en términos de la posición y velocidad de la partícula, referidos al sistema con ejes rotantes y origen en el centro de masa de los dos cuerpos masivos.

En el capítulo II se describen las ecuaciones de movimiento que integra el código

numérico y las tres subrutinas principales que lo conforman.

En el capítulo III se describen las órbitas resonantes y se explica en primera aproximación qué sucede en una órbita resonante.

En el capítulo IV se presentan los resultados de las integraciones numéricas tanto de la órbita resonante como de la no resonante y en el capítulo V se presenta un estudio preliminar sobre la sensibilidad del valor de la Constante de Jacobi a medida que se van acumulando errores en las 4 variables de posición y velocidad de la partícula. Para esto se fueron haciendo cambios sobre cada una de las variables dejando fijo el valor de las demás. Al final de este capítulo se presentan las conclusiones.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPITULO 1. EL PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS

1.1. Definiciones y ecuaciones de movimiento

El problema consiste en describir el movimiento de una partícula infinitesimal que se mueve bajo la influencia gravitacional de otros dos cuerpos masivos que giran alrededor de su centro común de masa (CM), en órbita circular. En este trabajo supondremos que la partícula orbita en el mismo plano que definen los dos cuerpos masivos. Una condición muy importante es que esta partícula es tan pequeña que no afecta las órbitas de los dos cuerpos masivos y estos sí afectan a la partícula. Por esta razón nos referiremos a la partícula como una partícula sin masa, sin estrictamente así serlo.

A este problema se le conoce como el **Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos (PPCRTC)**.

Como se trata de un problema con tres cuerpos, sea m_1 la masa del cuerpo primario, m_2 la masa del cuerpo secundario (con $m_2 < m_1$) y a la partícula sin masa la llamaremos P . La distancia entre m_1 y m_2 es constante por lo que podemos definirla como nuestra unidad de distancia, es decir:

$$a \equiv 1, \quad (1.1.1)$$

donde a es el semieje mayor de la órbita, que en este caso coincide con el radio.

Para definir una unidad de masa tomemos la suma de las masas, es decir :

$$m_1 + m_2 \equiv 1. \quad (1.1.2)$$

El secundario tiene una velocidad angular constante respecto al primario, esto nos permite definir la unidad de tiempo de la siguiente manera:

$$\frac{1}{n} \equiv 1, \quad (1.1.3)$$

donde n está dada por:

$$n = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}}, \quad (1.1.4)$$

y G es la Constante Universal de Gravitación que en nuestro nuevo sistema de unidades debe tener un valor unitario para que se cumpla la ecuación 1.1.3.

Usando la definición (1.1.2) y con $G = 1$, se tiene:

$$G(m_1 + m_2) = 1 ,$$

de aquí definimos:

$$Gm_1 \equiv \mu_1 , \tag{1.1.5}$$

y

$$Gm_2 \equiv \mu_2 . \tag{1.1.6}$$

De estas dos últimas definiciones podemos ver que:

$$\mu_1 + \mu_2 = 1 . \tag{1.1.7}$$

De aquí que μ_1 y μ_2 son las masas de los dos cuerpos masivos en nuestro nuevo sistema de unidades.

Sean dos sistemas de referencia Cartesianos, uno con ejes que rotan a la misma velocidad angular de m_1 y m_2 y el otro con ejes no rotantes. Ambos sistemas de referencia tienen origen en CM y en $t = 0$ sus ejes coinciden.

Las coordenadas de P respecto al sistema no rotante son (X', Y', Z') y respecto al sistema rotante son (x, y, z) (Ver Fig1.1). Aunque P se está moviendo en un plano y no tiene coordenadas Z' y z , éstas se tomarán en cuenta para los cálculos ya que el momento angular sí tiene esta componente y en general esta restricción no es obligatoria.

Respecto al sistema rotante, el primario y el secundario están en reposo. Las coordenadas medidas desde CM para cada una de las masas son $(-\mu_2, 0, 0)$ y $(\mu_1, 0, 0)$ para μ_1 y μ_2 respectivamente. Mientras que respecto al sistema no rotante, sus coordenadas son (X_1', Y_1', Z_1') y (X_2', Y_2', Z_2') que dependen del tiempo para μ_1 y μ_2 respectivamente.

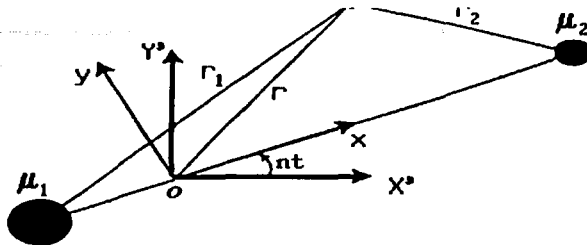


Fig. 1.1. Los dos sistemas de referencia con origen en CM . El primado tiene ejes fijos y el no primado tiene ejes rotantes. Las dos masas y la partícula tienen coordenadas en cada uno de ellos relacionadas. Los ejes Z' y z coinciden con el eje de rotación que sale del punto O y es perpendicular al plano de la hoja.

Aplicando la 2ª Ley de Newton y utilizando (1.1.5) y (1.1.6), la ecuación de movimiento para P en el sistema (X', Y', Z') es:

$$\ddot{\vec{r}} = \mu_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}, \quad (1.1.8)$$

La ecuación (1.1.8) representa la fuerza por unidad de masa que siente la partícula y $\ddot{\vec{r}}$ representa la segunda derivada temporal de \vec{r} . De la Fig 1.1 vemos que:

$$r_1^2 = (X'_1 - X')^2 + (Y'_1 - Y')^2 + (Z'_1 - Z')^2 \quad (1.1.9)$$

y

$$r_2^2 = (X'_2 - X')^2 + (Y'_2 - Y')^2 + (Z'_2 - Z')^2, \quad (1.1.10)$$

donde \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son los vectores de posición relativos entre P y las dos masas respectivamente.

Poniendo la ecuación (1.1.8) en componentes:

$$\ddot{X}' = \mu_1 \frac{X'_1 - X'}{r_1^3} + \mu_2 \frac{X'_2 - X'}{r_2^3}, \quad (1.1.11)$$

$$\ddot{Y}' = \mu_1 \frac{Y'_1 - Y'}{r_1^3} + \mu_2 \frac{Y'_2 - Y'}{r_2^3}, \quad (1.1.12)$$

$$\ddot{Z}' = \mu_1 \frac{Z'_1 - Z'}{r_1^3} + \mu_2 \frac{Z'_2 - Z'}{r_2^3}. \quad (1.1.13)$$

1.2. La constante de Jacobi

En el *PPCRTC* no se conservan la energía mecánica total, ni el momento angular total del sistema, debido a que P no afecta las órbitas de los cuerpos masivos. Sin embargo, existe una constante de movimiento llamada la **Constante de Jacobi** o **Integral de Jacobi**.

En esta sección deduciremos la expresión para esta constante de movimiento.

Las coordenadas de P en el sistema no rotante, están en términos de sus coordenadas en el sistema rotante, con origen en CM , de la siguiente forma:

$$X' = x \cos nt - y \sin nt, \quad (1.2.1)$$

$$Y' = x \sin nt + y \cos nt, \quad (1.2.2)$$

$$Z' = z. \quad (1.2.3)$$

Aunque en nuestro sistema de unidades la n es unitaria, la voy a conservar en las ecuaciones para ver cómo aparecen términos de velocidad y aceleración debido a que estamos montados en un sistema que gira.

Derivando las tres últimas ecuaciones respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{X}' = \cos nt(\dot{x} - ny) - \sin nt(\dot{y} + nx), \quad (1.2.4)$$

$$\dot{Y}' = \cos nt(\dot{y} + nx) + \sin nt(\dot{x} - ny), \quad (1.2.5)$$

$$\dot{Z}' = \dot{z}. \quad (1.2.6)$$

Derivando una vez mas respecto al tiempo tenemos que:

$$\ddot{X}' = \cos nt(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) - \sin nt(\dot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) , \quad (1.2.7)$$

$$\ddot{Y}' = \cos nt(\dot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) + \sin nt(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) , \quad (1.2.8)$$

$$\ddot{Z}' = \ddot{z} . \quad (1.2.9)$$

De la misma forma, transformamos las coordenadas del primario:

$$X'_1 = x_1 \cos nt - y_1 \sin nt , \quad (1.2.10)$$

$$Y'_1 = x_1 \sin nt + y_1 \cos nt , \quad (1.2.11)$$

$$Z'_1 = z_1 , \quad (1.2.12)$$

y para el secundario tenemos que:

$$X'_2 = x_2 \cos nt - y_2 \sin nt , \quad (1.2.13)$$

$$Y'_2 = x_2 \sin nt + y_2 \cos nt , \quad (1.2.14)$$

$$Z'_2 = z_2 , \quad (1.2.15)$$

utilizando las ecuaciones (1.2.10) a (1.2.15) con las ecuaciones (1.2.1) a (1.2.3) obtenemos:

$$X'_1 - X' = (x_1 - x) \cos nt - (y_1 - y) \sin nt , \quad (1.2.16)$$

$$Y'_1 - Y' = (x_1 - x) \sin nt + (y_1 - y) \cos nt , \quad (1.2.17)$$

$$Z'_1 - Z' = z_1 - z \quad (1.2.18)$$

y

$$X'_2 - X' = (x_2 - x) \cos nt - (y_2 - y) \sin nt , \quad (1.2.19)$$

$$Y'_2 - Y' = (x_2 - x) \sin nt + (y_2 - y) \cos nt , \quad (1.2.20)$$

$$Z'_2 - Z' = z_2 - z , \quad (1.2.21)$$

que son las coordenadas de \vec{r}_1 y \vec{r}_2 en el sistema inercial, en términos de sus coordenadas respecto al sistema rotante.

Sustituyendo las ecuaciones (1.2.7) a (1.2.9) en las ecuaciones (1.1.11) a (1.1.13) y usando de la ecuación (1.2.16) a la (1.2.21) respectivamente, nos queda que:

$$\ddot{X}' = \frac{\mu_1}{r_1^3} [(x_1 - x) \cos nt - (y_1 - y) \sin nt] + \frac{\mu_2}{r_2^3} [(x_2 - x) \cos nt - (y_2 - y) \sin nt] = \cos nt(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) - \sin nt(\dot{y} + 2n\dot{x} - n^2y), \quad (1.2.22)$$

$$\ddot{Y}' = \frac{\mu_1}{r_1^3} [(x_1 - x) \sin nt + (y_1 - y) \cos nt] + \frac{\mu_2}{r_2^3} [(x_2 - x) \sin nt + (y_2 - y) \cos nt] = \cos nt(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) - \sin nt(\dot{y} + 2n\dot{x} - n^2y), \quad (1.2.23)$$

$$\ddot{Z}' = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z. \quad (1.2.24)$$

En esta última ecuación usamos el hecho de que $z_1 = z_2 = 0$.

Como estamos referidos al sistema que rota con origen en *CM*:

$$r_1^2 = (x - (-\mu_2))^2 + y^2 + z^2 \quad (1.2.25)$$

y

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2. \quad (1.2.26)$$

Ahora multiplicando (1.2.22) y (1.2.23) por $\cos nt$ y $\sin nt$ respectivamente y sumando ambas obtenemos:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} (x + \mu_2) + \frac{\mu_2}{r_2^3} (x - \mu_1) \right].$$

Recordemos que las coordenadas del primario y secundario referidas al sistema rotante son $(-\mu_2, 0, 0)$ y $(\mu_1, 0, 0)$ respectivamente y no varían en el tiempo.

Multiplicando las mismas ecuaciones pero ahora por $-\sin nt$ y $\cos nt$ y sumando ambas obtenemos:

$$\dot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y.$$

En esta última se utilizó el hecho de que el primario y el secundario están sobre el eje "x" rotante y por lo tanto $y_1 = y_2 = 0$.

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de la partícula referidas a un sistema que rota junto con el primario y el secundario y con origen en CM son:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = -\left[\frac{\mu_1}{r_1^3}(x + \mu_2) + \frac{\mu_2}{r_2^3}(x - \mu_1)\right], \quad (1.2.27)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -\left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right]y, \quad (1.2.28)$$

$$\ddot{z} = -\left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right]z, \quad (1.2.29)$$

esta última por (1.2.9) y (1.2.24). Note que el lado derecho de las ecuaciones (1.2.27) a (1.2.29) sólo depende de la posición, por lo tanto podemos definir una función escalar U tal que:

$$U \equiv U(x, y, z),$$

que está dada por:

$$U \equiv \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}. \quad (1.2.30)$$

Calculando las derivadas parciales de esta función escalar respecto a cada una de sus variables y tomando en cuenta que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_1} \right) = -\frac{x + \mu_2}{r_1^3}, \quad (1.2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_1} \right) = -\frac{y}{r_1^3}, \quad (1.2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1} \right) = -\frac{z}{r_1^3}, \quad (1.2.33)$$

y además:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_2} \right) = -\frac{x - \mu_1}{r_2^3}, \quad (1.2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_2} \right) = -\frac{y}{r_2^3}, \quad (1.2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_2} \right) = -\frac{z}{r_2^3}. \quad (1.2.36)$$

Obtenemos las parciales de U como:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = n^2 x - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} (x + \mu_2) + \frac{\mu_2}{r_2^3} (x - \mu_1) \right], \quad (1.2.37)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = n^2 y - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y, \quad (1.2.38)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z. \quad (1.2.39)$$

Con estas relaciones podemos reescribir las ecuaciones de movimiento (1.2.27), (1.2.28) y (1.2.29) de la siguiente forma:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (1.2.40)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (1.2.41)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1.2.42)$$

Aunque U está definida positiva, esto es por pura convención. Para hacer que esta función sea tratada como usualmente se hace en física, con la energía gravitacional, podemos definirla de la siguiente forma:

$$U^* = -U,$$

con esto las ecuaciones (1.2.40), (1.2.41) y (1.2.42) se pueden reescribir como:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = -\frac{\partial U^*}{\partial x}, \quad (1.2.43)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = -\frac{\partial U^*}{\partial y}, \quad (1.2.44)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial U^*}{\partial z}. \quad (1.2.45)$$

Si el lado izquierdo de estas tres últimas ecuaciones son las aceleraciones sufridas por la partícula, entonces a U^* es un pseudo-potencial. Los términos $2n\dot{y}$ y $2n\dot{x}$ son

los correspondientes a las aceleraciones de Coriolis que aparecen por estar referidos a un sistema no inercial, como era de esperarse.

Multipliquemos las ecuaciones (1.2.40), (1.2.41) y (1.2.42) por \dot{x} , \dot{y} y \dot{z} respectivamente y después las sumamos, dando como resultado:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z},$$

de aquí que:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{dU}{dt}. \quad (1.2.46)$$

Integrando la ecuación (1.2.46) respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + C_2) = U - C_1, \quad (1.2.47)$$

donde:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2, \quad (1.2.48)$$

y v^2 es el cuadrado de la magnitud del vector velocidad.

Usando la ecuación (1.2.48) en la ecuación (1.2.47) y desarrollando obtenemos:

$$v^2 = 2U - C_j, \quad (1.2.49)$$

con C_1 , C_2 constantes de integración y $C_j = 2C_1 + C_2$.

De aquí que:

$$C_j = 2U - v^2. \quad (1.2.50)$$

Con esto queda demostrado que en el *PPCRTC* existe una constante de movimiento, llamada la **Constante de Jacobi** que está denominada por C_j y que se puede expresar en términos de la posición y velocidad de la partícula respecto al sistema rotante y con origen en *CM*.

Sustituyendo las ecuaciones (1.2.30) y (1.2.48) en (1.2.50) se obtiene:

$$C_j = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2. \quad (1.2.51)$$

Esta es la única constante de movimiento en el *PPCRTC* por lo que éste no puede ser resuelto analíticamente y son necesarios métodos numéricos para resolverlo. Como las computadoras no tienen precisión infinita, se tiene uno que conformar con una conservación hasta cierto número de cifras significativas en C_j (debido a la acumulación en los errores numéricos), para decidir si el método numérico utilizado está haciendo bien o mal la integración.

En el Apéndice A se hace una deducción de la *Constante de Jacobi* usando formalismo *Lagrangiano y Hamiltoniano*.

La aproximación al *PPCRTC* es común en la solución a muchos sistemas dinámicos. En particular, en el Sistema Solar en muchas ocasiones sólo se toman en cuenta la atracción gravitacional de Júpiter y el Sol con los cometas y con los asteroides y, en el caso de anillos planetarios, las masas del planeta y uno de sus satélites.

CAPITULO 2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

2.1. Ecuaciones de movimiento con el origen en el primario y ejes no rotantes

En el capítulo anterior se demostró que en la *PPCRTC* existe una constante de movimiento. Respecto a un sistema con ejes X', Y' que no rotan y origen en CM , para P las ecuaciones de movimiento están dadas por (1.1.11) y (1.1.12), si restringimos el movimiento de P al plano definido por la órbita de m_1 y m_2 .

A continuación deducimos las ecuaciones de movimiento para P sólo que ahora en un sistema de referencia con origen en m_1 y ejes que no rotan, por tanto m_1 no tiene ninguna ecuación de movimiento por ser el origen.

De acuerdo a la notación que hemos utilizado, \vec{r} es el vector de posición de la partícula respecto a un origen arbitrario y \vec{r}_1 es el vector de posición relativo a m_1 de P (Ver Fig.1.1). En este capítulo estamos poniendo el origen en m_1 , por lo que \vec{r} coincide con \vec{r}_1 . En la Fig.2.1 se observan los vectores de posición de los dos cuerpos masivos y de la partícula respecto a un sistema de referencia inercial con origen arbitrario O y con ejes fijos. Relativos a m_1 , se muestran los vectores de posición de la partícula, usando la misma notación que en el capítulo anterior (Ver Fig.2.1) y definiendo el vector $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 \equiv \vec{r}_{1,2}$, que tiene componentes $X'_1 + X'_2 \equiv X'_{1,2}$ y $Y'_1 + Y'_2 \equiv Y'_{1,2}$.

Aplicando la 2ª Ley de Newton y la Ley de la Gravitación Universal en el sistema inercial para cada uno de los cuerpos (recordemos que la partícula no ejerce fuerza gravitacional sobre m_1 y m_2), se obtiene:

$$m_1 \ddot{\vec{R}}_1 = Gm_1 m_2 \frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3}, \quad (2.1.1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{R}}_2 = -Gm_1 m_2 \frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3}, \quad (2.1.2)$$

$$\ddot{\vec{R}} = -Gm_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}. \quad (2.1.3)$$

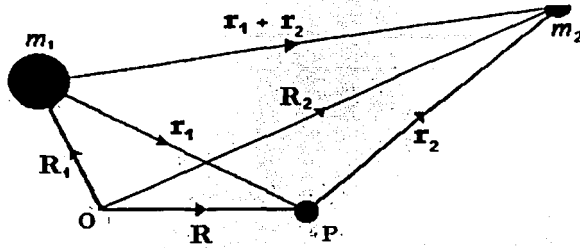


Fig.2.1. Los vectores de posición respecto a un origen arbitrario O que es inercial y los vectores de posición respecto a un sistema con origen en m_1 que está siendo acelerado por m_2 , por lo que no es inercial.

La ecuación (2.1.3) representa la fuerza por unidad de masa que siente la partícula, debida a la presencia de m_1 y m_2 y las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2) son las fuerzas que sienten las masas por interacción gravitacional mútua.

De la Fig.2.1 podemos ver que $\vec{r}_1 = \vec{R} - \vec{R}_1$ y $\vec{r}_{1,2} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$.

Las segundas derivadas temporales de estos vectores, calculadas en el sistema inercial, son:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{R}} - \ddot{\vec{R}}_1 \quad (2.1.4)$$

y

$$\ddot{\vec{r}}_{1,2} = \ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_1. \quad (2.1.5)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (2.1.4) y (2.1.5) las expresiones para $\ddot{\vec{R}}_1$, $\ddot{\vec{R}}_2$ y $\ddot{\vec{R}}$ de las ecuaciones (2.1.1), (2.1.2) y (2.1.3) respectivamente, tenemos que:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3},$$

y

$$\ddot{\vec{r}}_{1,2} = -Gm_1 \frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3}.$$

Agrupando términos en estas dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + Gm_2 \left[\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3} \right] \quad (2.1.6)$$

y

$$\ddot{\vec{r}}_{1,2} = -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3}. \quad (2.1.7)$$

Las ecuaciones (2.1.6) y (2.1.7) son las ecuaciones de movimiento para la partícula y m_2 respectivamente.

En este sistema de referencia los ejes no están rotando, pero el origen (m_1) está sufriendo una aceleración debida a la presencia del secundario, por lo tanto, éste no es un sistema inercial. En la ecuación (2.1.6), los dos primeros términos del lado derecho representan las interacciones entre P y cada una de las masas (ver ecuación (2.1.3)), mientras que el último término corresponde a la aceleración que sufre el primario debido al secundario (ver último término en la ecuación (2.1.1)). Al último término en la ecuación (2.1.6) se le conoce como *término indirecto* y aparece como consecuencia de la elección de un origen que no está fijo, en el que, si bien los ejes no rotan, el origen se mueve alrededor de CM . Si nos referimos a CM , el *término indirecto* no aparece en la ecuación de movimiento de P (ver ecuación (1.1.8)).

Por su parte, la ecuación (2.1.7) es la ecuación de movimiento relativa entre m_1 y m_2 . En ella aparece la suma y no la multiplicación de las masas, debido también a que el origen está en m_1 que no está en reposo. Sin embargo, la solución a esta ecuación es la misma que la del problema de campo o fuerza central, es decir, la trayectoria que describen las masas es una cónica en general y su energía depende de las condiciones iniciales. En este caso particular, la órbita de m_2 alrededor de m_1 describe un círculo y por lo tanto están "amarradas" gravitacionalmente.

Definamos ahora:

$$G(m_1 + m_2) \equiv \mu. \quad (2.1.8)$$

Usando esta definición junto con (1.1.5) y (1.1.6), las ecuaciones (2.1.6) y (2.1.7) se pueden escribir como:

$$\ddot{\bar{r}}_1 = -\mu_1 \frac{\bar{r}_1}{r_1^3} + \mu_2 \left[\frac{\bar{r}_2}{r_2^3} - \frac{\bar{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3} \right], \quad (2.1.9)$$

$$\ddot{\bar{r}}_{1,2} = -\mu \frac{\bar{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3}. \quad (2.1.10)$$

2.2. La necesidad de un código numérico

Escribiendo las ecuaciones de movimiento para P y m_2 (ya que m_1 no se mueve en este sistema) en componentes:

$$\begin{aligned} \ddot{X}'_1 = & -\mu_1 \frac{X'_1}{[(X'_1)^2 + (Y'_1)^2]^{3/2}} + \mu_2 \left[\frac{X'_2}{[(X'_2)^2 + (Y'_2)^2]^{3/2}} \right. \\ & \left. - \frac{X'_1 + X'_2}{[(X'_{1,2})^2 + (Y'_{1,2})^2]^{3/2}} \right], \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Y}'_1 = & -\mu_1 \frac{Y'_1}{[(X'_1)^2 + (Y'_1)^2]^{3/2}} + \mu_2 \left[\frac{Y'_2}{[(X'_2)^2 + (Y'_2)^2]^{3/2}} \right. \\ & \left. - \frac{Y'_1 + Y'_2}{[(X'_{1,2})^2 + (Y'_{1,2})^2]^{3/2}} \right], \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

y

$$\ddot{X}'_{1,2} = -\mu \frac{X'_{1,2}}{[(X'_{1,2})^2 + (Y'_{1,2})^2]^{3/2}}, \quad (2.2.3)$$

$$\ddot{Y}'_{1,2} = -\mu \frac{Y'_{1,2}}{[(X'_{1,2})^2 + (Y'_{1,2})^2]^{3/2}}, \quad (2.2.4)$$

recordando que:

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (X'_1)^2 + (Y'_1)^2, \\r_2^2 &= (X'_2)^2 + (Y'_2)^2, \\r_{1,2}^2 &= (X'_{1,2})^2 + (Y'_{1,2})^2.\end{aligned}$$

y que las X'_i y Y'_i son coordenadas Cartesianas con origen en m_1 y ejes no rotantes.

Las ecuaciones (2.2.1) a (2.2.4) forman un sistema de segundo orden, acoplado, no lineal. Hasta la fecha no existe una forma de resolver este problema analíticamente, por lo que es necesario aproximar la solución de forma numérica y esto implica un integrador numérico o código. En la siguiente sección se habla brevemente sobre el que utilizamos para encontrar soluciones numéricas aproximadas.

2.3. El código numérico

En esta sección se explicará de manera breve el código que utilizamos para integrar la órbita de una partícula.

Hay varios códigos que integran ecuaciones diferenciales. Para esta tesis usamos uno que utiliza el método llamado *Bulirsch – Stoer* que aparece en la 2a. edición de *Numerical Recipes* (Press et al. 1992). Este método nos asegura gran precisión a bajo costo de CPU.

En este problema conocemos los valores iniciales de las variables dependientes tanto en la posición como en la velocidad, llamémoslas X_i 's, la variable independiente será el tiempo t . El objetivo es obtener una lista de valores para $X_i(t_k)$, durante todo el intervalo que dure la integración, donde $t_0 < t_k < t_f$ con $t_0 = 0$ y t_f los puntos inicial y final de la integración respectivamente.

El método *Bulirsch – Stoer* consiste en avanzar las variables dependientes en un intervalo de tiempo H , el cual a su vez se subdivide en intervalos de longitud h . El número de subintervalos está predeterminado y tiene un límite. Para este caso $n = 1, 2, 3, \dots, 12$.

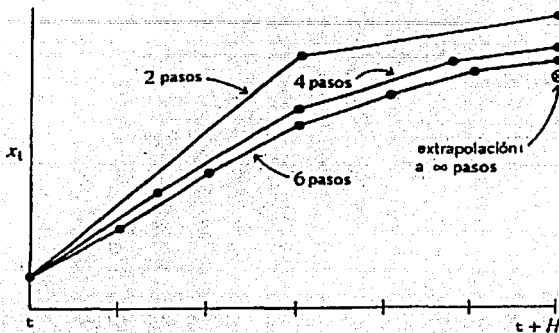


Fig. 2.2. El paso H es subdividido en primera instancia en dos subintervalos, evaluando en cada uno de los extremos. Se realiza una extrapolación a $n = \infty$ y si no se alcanza la precisión requerida se subdivide en más subintervalos. Cuando se alcanza el máximo de subintervalos a dividir ($n = 12$), sin alcanzar la precisión requerida se reduce el tamaño del paso H .

En cada extremo de los subintervalos se evalúan las funciones X_i y mediante una extrapolación polinomial en potencias de h se ajusta una curva en todo el intervalo H .

Las ecuaciones que integra el código son las ecuaciones de movimiento de la partícula y del cuerpo secundario (ecs. 2.2.1 - 2.2.4) y los resultados que se obtienen son las posiciones y velocidades de cada uno de ellos a distintos tiempos durante el intervalo de integración $[t_0, t_f]$.

La parte fundamental del integrador está formada por tres rutinas anidadas llamadas: *algorithm*, *stepper* y *driver*. A continuación una breve explicación de como funciona cada una de ellas.

LA RUTINA ALGORITHM

Con la información proporcionada por las segundas derivadas evaluadas al tiempo t , esta rutina regresa valores de las variables dependientes al tiempo $t + h$. No hay forma de que esta rutina tome alguna decisión en cuanto a si los valores encontrados cumplen o no con la precisión requerida para hacer algún tipo de ajuste. La subrutina llamada *STOERM* fue diseñada para sistemas en donde la fuerza no depende de la velocidad, es

decir, para sistemas conservativos, como lo es en nuestro caso el campo gravitacional. Por esta razón utilizamos esta subrutina que aparece también en *Numerical Recipes*.

LA RUTINA STEPPER

Esta rutina es la encargada de llamar a la rutina *algorithm*. Aquí están contenidas las fórmulas básicas del método *Bulirsch - Stoer*. Esta rutina decide acortar el paso de ser necesario y llamar en cada ocasión a la rutina *algorithm* hasta que se alcance un criterio de error predeterminado por el usuario, criterio que se maneja con el parámetro *eps*.

El nombre de la subrutina que usamos es *BSSTEP* y lo que hace es incrementar el intervalo en el tiempo en un valor H , el cual es subdividido en primera instancia en dos subintervalos evaluando las X_i 's en los extremos de éstos regresando nuevos valores en $t+h$. De ser necesario subdivide otra vez el intervalo H pero ahora en un número mayor de subintervalos y se hace otra evaluación. Cada evaluación es hecha por la rutina *algorithm* y el número máximo de subdivisiones es en nuestro caso $n = 12$. La extrapolación se hace de tal forma que regresa valores obtenidos con $n = \infty$ (ver Fig.2.2) junto con una estimación en el error, si éste es satisfactorio, de acuerdo al criterio dado por el usuario, se sigue entonces con el siguiente paso H y si no lo es se sigue con la siguiente n (subdivide en más intervalos) y vuelve a evaluar. Cuando se llega al máximo de subdivisiones, en lugar de seguir subdividiendo, reduce el paso H y comienza a subdividirlo en $n = 2$, es por esta razón que a este método se le conoce como de paso variable.

LA RUTINA DRIVER

Esta rutina comienza y detiene la integración, almacena resultados intermedios y sirve de interface con el usuario. Para nuestros propósitos usamos la subrutina llamada *ODEINT* en libro ya mencionado y como datos de salida de la subrutina tenemos los valores de las X_i 's en el intervalo $[t_0, t_f]$. Cualquier cantidad relevante para graficar puede ser calculada a partir de esta lista. Por ser este método de paso variable se requiere de un paso de tiempo mínimo de tal forma que si el paso es mayor a éste entonces el dato se almacena, esto es para evitar una saturación de datos.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

CAPITULO 3. ORBITAS RESONANTES

3.1. Orbitas Resonantes de primer orden

Analizando geoméricamente un caso muy general de una resonancia, tomemos dos cuerpos moviéndose alrededor de un cuerpo central. La Fig.3.1 muestra la configuración al tiempo t_0 y a distintos tiempos de las órbitas. Como podemos observar, la conjunción se da en el periápside del cuerpo interior (a), que en nuestro caso es la partícula. Sea T' el período del secundario (exterior) y T el período de la partícula sin masa. (b) En $T = (1/4)T'$ y despreciando cualquier interacción entre ambos, la partícula está ahora en el apoápside de su órbita y aunque este es el punto de máxima aproximación entre las órbitas de ambos, el secundario no está cerca para afectar a la partícula. (c) En $T = (1/2)T'$ la partícula está otra vez en su periápside y el secundario ha recorrido la mitad de su órbita alrededor del cuerpo central. (d) Cuando la partícula vuelve a estar en el punto de máxima aproximación, es decir, en su apoápside, el secundario está a 90° de distancia. (e) El sistema vuelve a su configuración original cuando la partícula ha completado dos órbitas y el secundario sólo una. En este caso decimos que la partícula está en resonancia 2:1 con el secundario.

En otras palabras, una resonancia se da cuando podemos escribir el cociente de las velocidades angulares promedio de P y del secundario en términos del cociente de dos números enteros, es decir:

$$\frac{n'}{n} = \frac{p}{p+q}, \quad (3.1.1)$$

donde n' y n son las velocidades angulares promedio del secundario y la partícula respectivamente y están definidas en la ecuación (1.1.4) con p y q enteros.

De la ecuaciones (1.1.4) y (3.1.1) podemos deducir la siguiente relación:

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \left(\frac{a}{a'} \right)^{3/2} = \frac{p}{p+q}, \quad (3.1.2)$$

donde a y a' son el semieje mayor de la partícula y del secundario respectivamente. En una relación $p+q : q$, a y q se le conoce como el orden de la resonancia.

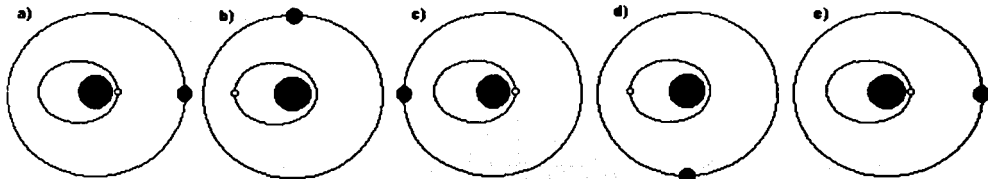


Fig.3.1. Posiciones relativas entre el secundario (círculo mediano en negro) y la partícula sin masa (círculo pequeño). (a) La conjunción ocurre en el periápside de la partícula. (b) La partícula ha recorrido media órbita y m_2 sólo un cuarto de su órbita. (c) Se ha completado un período de P y m_2 está a mitad de su órbita. Este punto es el más cercano entre las dos órbitas y nunca llegan a encontrarse en este punto. (d) La partícula llega una vez más al apoápside de su órbita y m_2 está casi por completar un período. (e) Se da la conjunción cuando P ha completado dos períodos y el secundario sólo uno.

En nuestro caso la relación es 2:1, por lo tanto $p = 1$ y $q = 1$, así, de la ecuación (3.1.2) podemos encontrar el semieje inicial de la partícula al cual va a estar en resonancia 2:1, es decir:

$$a = a' \left(\frac{\mu_1}{4} \right)^{1/3}, \quad (3.1.3)$$

será el semieje mayor al cual la partícula completará dos órbitas mientras que el secundario completará sólo una. Si queremos al semieje en unidades del semieje mayor del secundario, es decir, usando nuestra convención para las unidades de distancia, obtenemos:

$$\frac{a}{a'} = \left(\frac{\mu_1}{4} \right)^{1/3}. \quad (3.1.4)$$

Para entender en primera aproximación la física que involucran las resonancias observemos la Fig.3.2, en ésta tenemos, en una órbita interna y excéntrica, a la partícula y en la órbita externa y circular al secundario.

Cuando la primera conjunción (en t_0) ocurre en el periápside, las siguientes conjunciones ocurrirán en ese mismo punto debido a que las fuerzas tangenciales justo antes y justo después del encuentro son iguales y se anulan (ver Fig.3.2(b)). Debido a que la fuerza radial ejercida por el cuerpo externo sobre P siempre está en dirección opuesta a la ejercida por el cuerpo central en la conjunción, habrá una aceleración que lleve a P hacia una órbita externa. Como resultado, la partícula alcanzará su periápside más tarde en la siguiente conjunción, por tanto, la longitud del periápside se ha movido en sentido progrado.

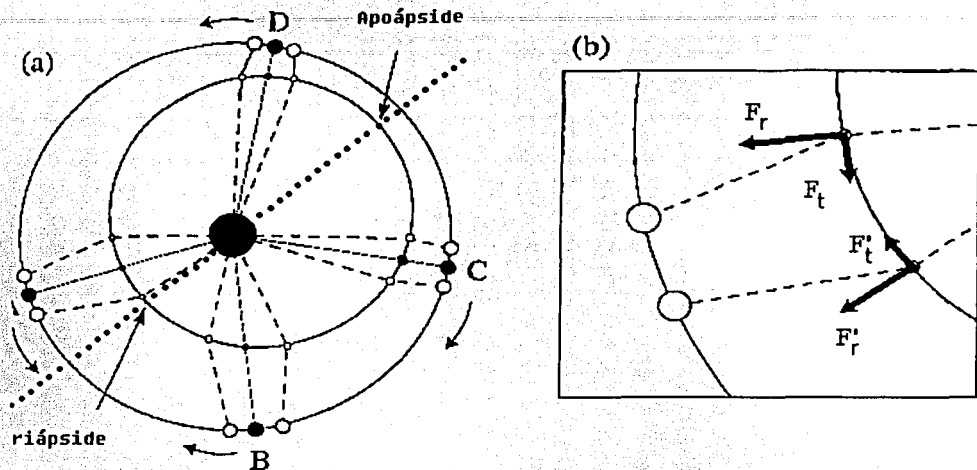


Fig.3.2. (a) La partícula sin masa orbita entre m_1 y m_2 en el sentido de las flechas. Las conjunciones ocurridas en los puntos (A), (B), (C) y (D) ocurren cada vez más cerca del periápside debido a la diferencia de las fuerzas tangenciales que actúan sobre P antes y después de la conjunción y a la diferencia del tiempo de interacción de estas fuerzas sobre P antes y después de la conjunción. (b) Acercamiento del punto (A) donde se muestran las componentes radial y tangencial de la fuerza debida a m_2 sobre P . La notación no primada indica el momento antes de la conjunción y la notación primada el momento después de la conjunción.

Sin pérdida de generalidad, analizaremos un punto próximo al periápside y uno próximo al apoápside.

En la Fig.3.2(b) se observa un acercamiento al punto "A" marcado en la Fig.3.2(a), aquí las líneas punteadas representan la dirección de las fuerzas que actúan sobre P ; justo antes de la conjunción (notación no primada) y justo después de la conjunción (notación primada), la fuerza gravitacional debida al secundario tiene dos componentes, una tangencial y otra radial, la componente tangencial estará en la misma dirección de la velocidad tangencial en ese punto de la órbita y por lo tanto cambiará el momento angular de P , es decir, la acelerará ó la frenará. En el punto "A" la partícula se aproxima al periápside de su órbita, por lo tanto, justo antes de la conjunción la distancia entre ambos cuerpos

es menor que justo después, además la partícula va más lento justo antes que justo después, todo esto en conjunto da como resultado que la fuerza tangencial justo después de la conjunción (F_t') sea menor que la fuerza tangencial justo antes (F_t). La resultante de estas dos interacciones será en la misma dirección y sentido de la velocidad tangencial de P en ese punto de la órbita, por lo tanto, al aumentar su velocidad tangencial (su momento angular) pasará a una órbita externa con la consecuente disminución en su velocidad angular promedio ($\dot{n} < 0$) y como consecuencia, las siguientes conjunciones ocurrirán más cerca del periápside. El mismo análisis se puede hacer para el punto "B" marcado en la Fig.3.2(a).

Analicemos ahora qué sucede si la conjunción en t_0 ocurre en un punto próximo al apoápside de la órbita. Tomando el punto "C" de la misma figura observemos que la partícula se mueve hacia su apoápside, por lo tanto, justo antes de la conjunción, los dos cuerpos estarán mas lejos que justo después. La partícula se aproxima al punto en su órbita donde la velocidad es máxima, ésto da como resultado que la fuerza tangencial sea mayor justo después de la conjunción lo cual se traduce en una disminución del momento angular de P y un aumento en su velocidad angular promedio ($\dot{n} > 0$), es decir, la partícula pasará a una órbita interior y las siguientes conjunciones ocurrirán más cerca del periápside. Lo mismo ocurre si se analiza el punto "D" de la figura.

De este análisis podemos concluir que el punto estable en este sistema será el periápside de la órbita. Estable en el sentido de que todas las conjunciones que no ocurran en el periápside tenderán hacia este punto y seguiran ocurriendo cerca de él.

Como podemos observar, los cambios en la órbita de un cuerpo que esté en resonancia no serán apreciables en el transcurso de un solo período. Las interacciones que se dan cada dos períodos de la partícula con el secundario no se cancelan en ningun otro punto de su trayectoria.

Los efectos resonantes son efectos acumulativos sobre la partícula, que se observan después de un largo tiempo de interacciones entre P y m_2 .

CAPITULO 4. RESULTADOS DE LAS INTEGRACIONES NUMERICAS

4.1. Integraciones de una órbita resonante

En esta sección presentaremos los resultados de las integraciones numéricas y las gráficas correspondientes.

En la sección 2.3 vimos muy brevemente cómo funciona el código que usamos para obtener los resultados de este capítulo. Debemos recordar que el código integra las ecuaciones de movimiento de la partícula y del secundario (ecuaciones 2.2.1 - 2.2.4), que están en coordenadas Cartesianas con origen en el primario y ejes que no rotan. Como ya vimos, el código da como resultado una lista de valores para las variables independientes en varios instantes de tiempo que también están en coordenadas Cartesianas. Las gráficas que presentamos en este capítulo tienen en el eje horizontal a la variable independiente (t) y en el eje vertical no tienen a las coordenadas Cartesianas (x, y, \dot{x}, \dot{y}). Es común en mecánica celeste graficar, en lugar de las coordenadas Cartesianas, los elementos orbitales instantáneos de la partícula, como el semieje mayor ($a(t)$) y la excentricidad ($e(t)$). En el marco del *PPCRTC*, éstos no son constantes y cambian en el tiempo, se les llaman elementos orbitales osculantes debido a que en cada momento la partícula "visita" elipses distintas, es decir, cada una con un semieje mayor y excentricidad distintas a cada momento. Los elementos orbitales osculantes se calculan ignorando instantáneamente la presencia del secundario y tomando en cuenta sólo al primario y a la partícula. Como tenemos cuatro coordenadas Cartesianas, necesitamos entonces cuatro elementos orbitales osculantes para poder pasar de unas coordenadas a otras (Ver Apéndice B). Los dos elementos orbitales que faltan son: el argumento del periapside ($\varpi(t)$) y la verdadera anomalía ($f(t)$). Para este trabajo, la excentricidad inicial de la partícula es cero por lo que ϖ no está definida en $t = 0$ y el semieje mayor (o radio) de la órbita coincide con el eje X' positivo, por lo que $f_0 = 0$. La partícula comienza en conjunción con el secundario, por lo tanto $f'_0 = 0$, donde f'_0 es la verdadera anomalía inicial del secundario y ya sabemos que éste está en órbita circular, por lo que $e'_0 = 0$, donde e'_0 denota la excentricidad inicial de m_2 . El valor inicial del semieje mayor de P es $a_p = 0.63005724618926$, en donde todas las cifras se toman en cuenta. Este valor para a_p fue encontrado empíricamente por Espresate y Lissauer (2001) (*EL*) buscando la órbita inicialmente circular donde la partícula sufriera

las mayores perturbaciones. Para calcular la Constante de Jacobi, se toman las mismas coordenadas Cartesianas que da el código y se trasladan a *CM* junto con una rotación de los ejes, justo como se dedujo en la sección 1.2.

Hicimos varias integraciones y en cada una de ellas cambiamos el error, *eps*, con el que trabaja el código, y la duración de las integraciones. La Tabla I muestra los valores numéricos de los parámetros usados en cada una de las integraciones. El valor del cociente de masas es $m_2/m_1 = 10^{-6}$ para todas ellas. Este cociente de masas corresponde a un sistema similar al sistema *Sol - Tierra*. Las condiciones iniciales de *P* y de m_2 son las dichas anteriormente.

TABLA I
DATOS NUMERICOS DE LAS INTEGRACIONES

Integración No.	<i>eps</i>	Duración (en periodos de m_2)
1	5×10^{-10}	40,000
2	5×10^{-11}	40,000
3	5×10^{-12}	40,000
4	5×10^{-13}	40,000
5	5×10^{-14}	250,000
6	5×10^{-15}	250,000
7	5×10^{-15}	1×10^6

Las gráficas que se muestran en la Fig.4.1 corresponden a la integración 1 de la Tabla I. En ésta se muestra (de arriba hacia abajo) la evolución del error fraccional en la Constante de Jacobi, el semieje mayor (en unidades de separación de m_1 y m_2) y la excentricidad de la partícula respectivamente, todas en función del tiempo, que está en unidades de los periodos orbitales de m_2 .

Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos

$$\epsilon_{ps} = 5 \times 10^{-10}$$

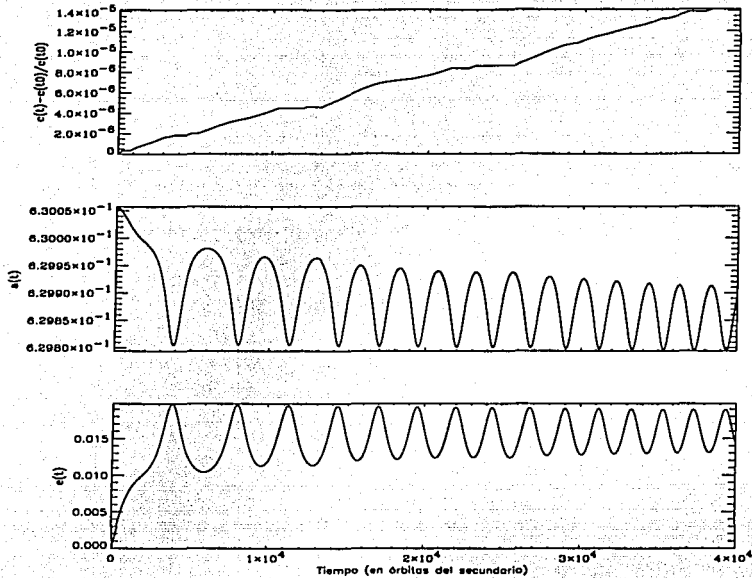


Fig.4.1. Integración número 1 en la Tabla I. La gráfica superior muestra el error fraccional de C_j , la segunda gráfica hacia abajo muestra el comportamiento del semieje mayor osculante en unidades de la distancia de separación entre m_1 y m_2 y la gráfica inferior muestra la evolución de la excentricidad. La Constante de Jacobi se conserva hasta 4 cifras y tanto el semieje mayor como la excentricidad presentan un comportamiento cíclico. Durante la integración las oscilaciones disminuyen en amplitud. El número de máximos en la excentricidad es 15.

Podemos observar que la Constante de Jacobi se conserva hasta cuatro cifras decimales al final de la integración, mientras que el semieje mayor y la excentricidad de la partícula nunca regresan a su valor inicial y las oscilaciones disminuyen en amplitud al transcurrir el tiempo. Sin embargo, no podemos asegurar o descartar que este sea el comportamiento real de la órbita, ya que este error es grande por el número de cifras que se conservan en la Constante de Jacobi.

Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos

$$\epsilon ps = 5 \times 10^{-11}$$

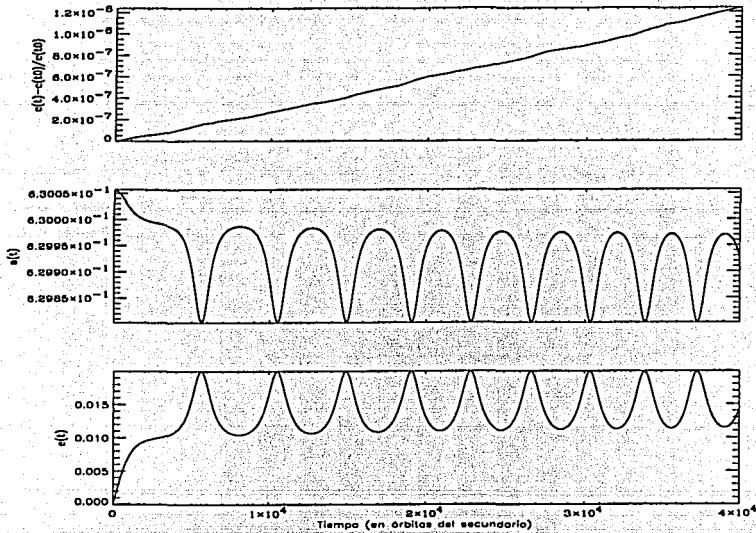


Fig.4.2. Resultados de la integración 2 de la Tabla I y se presentan en el mismo orden que la Fig.4.1.

El número de máximos en la excentricidad ha disminuido respecto a la anterior ya que ahora contamos 9. Las oscilaciones siguen disminuyendo en amplitud y no se observa un comportamiento periódico. La Constante de Jacobi se conserva hasta 5 cifras al final de la integración.

Las gráficas para la integración 2 de la Tabla I donde se reduce la tolerancia del error, ϵps , por un factor de diez, se muestran en la Fig.4.2 y en el mismo orden que las anteriores. La constante de Jacobi al final de la integración se conserva hasta cinco cifras decimales, mientras que el semieje mayor y la excentricidad presentan un comportamiento similar a la integración anterior, sin embargo, no es el mismo si tomamos en cuenta que en la anterior contamos 15 máximos en las oscilaciones de la excentricidad y en ésta sólo 9. Observamos que estas oscilaciones no disminuyen su amplitud de manera apreciable al paso del tiempo, pero nunca se alcanzan, en el lapso de la integración, los valores en las condiciones iniciales de P , es decir, no parece ser una solución periódica.

$$\epsilon ps = 5 \times 10^{-12}$$

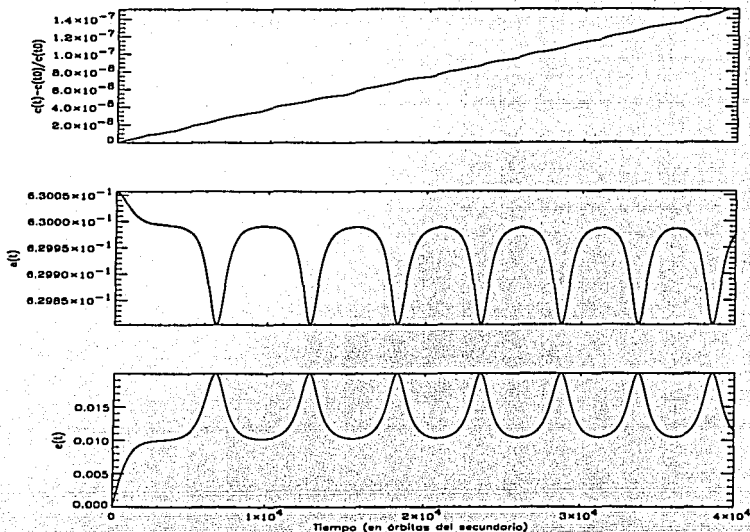
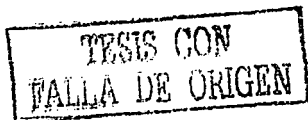


Fig.4.3. Resultados correspondientes a la integración 3 (Tabla I). Se presentan en el mismo orden de las anteriores. La constante de Jacobi se conserva hasta 6 cifras al final de la integración y las oscilaciones en la excentricidad han disminuido en número respecto a las anteriores ya que ahora contamos 7 máximos. No se aprecia a simple vista un descenso en sus amplitudes.

Al hacer una integración más precisa otra vez por un factor de 10, obtuvimos los resultados que se presentan en la Fig.4.3, que corresponden a la integración número 3 de la Tabla I. En la gráfica superior se observa que la Constante de Jacobi se conserva hasta seis cifras decimales a las 40,000 órbitas de m_2 . El número de máximos en las oscilaciones de la excentricidad (para el mismo intervalo de tiempo) disminuye respecto a las integraciones anteriores, que ahora son 7 aunque no se aprecia disminución en amplitud, sin embargo, seguimos observando que los valores de las condiciones iniciales no se alcanzan de nuevo en el resto de la integración y por tanto, en este mismo intervalo de tiempo la solución sigue siendo no-periódica.



Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos

$$\epsilon ps = 5 \times 10^{-13}$$

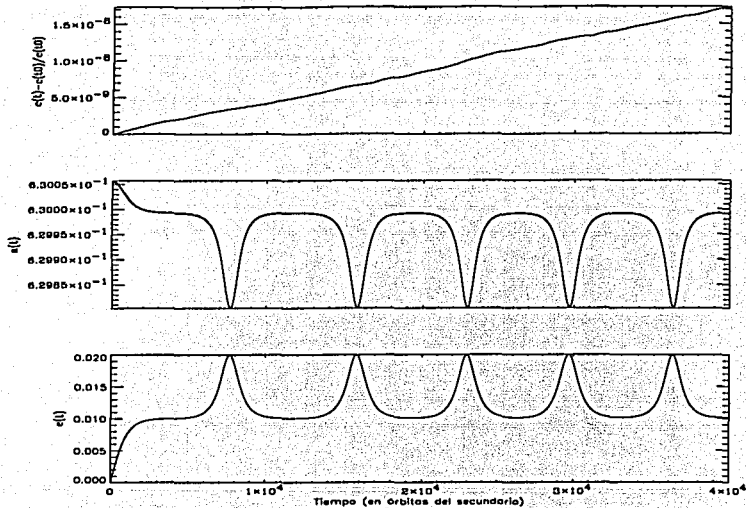


Fig.4.4. Resultados correspondientes a la integración 4 de la Tabla I. En la gráfica superior podemos ver que C_J se conserva hasta 7 cifras al final de la integración y contamos sólo 5 máximos en las oscilaciones de la excentricidad. El valor máximo de las oscilaciones del semieje mayor, después del valor inicial, se ubica ~ 0.6300 .

Para una integración más exacta y por el mismo intervalo de tiempo, la Fig.4.4 muestra las gráficas con $\epsilon ps = 5 \times 10^{-13}$, que corresponden a la integración número 4 de la Tabla I. La Constante de Jacobi ahora se conserva hasta siete cifras al final de la integración. Las gráficas para el semieje mayor y la excentricidad muestran oscilaciones, como en las integraciones anteriores, pero el período es ahora más grande y por tanto el número de máximos (mínimos) en excentricidad (semieje mayor) se reduce de nuevo para el mismo intervalo de tiempo. El máximo después del valor inicial en el semieje mayor es de ~ 0.6300 .

Para ver como van cambiando los periodos de las oscilaciones presentadas hasta el momento, la Fig.4.5 y 4.6 muestran las gráficas de los primeros 15,000 periodos en el tiempo para el semieje mayor y la excentricidad respectivamente, sobrepuestas con sus respectivos valores de ϵps .

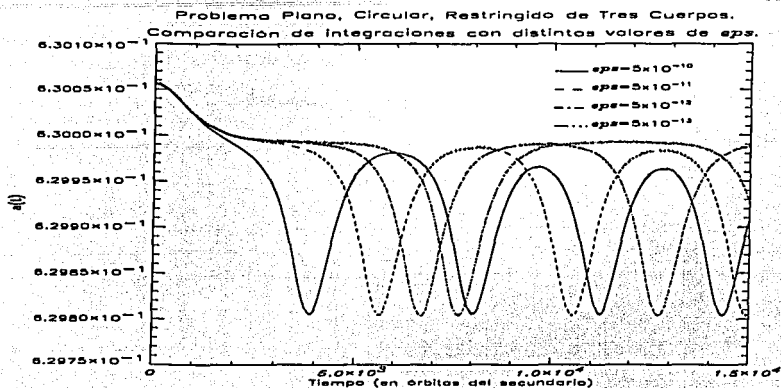


Fig.4.5. Superposición de los primeros 15,000 periodos, correspondientes a las integraciones 1, 2, 3 y 4 de la Tabla I para el semije mayor. Nótese como cambian los periodos en las oscilaciones y sus amplitudes. Cada integración cambia en un factor de 10 y no hay forma de saber cual es el comportamiento real de P .

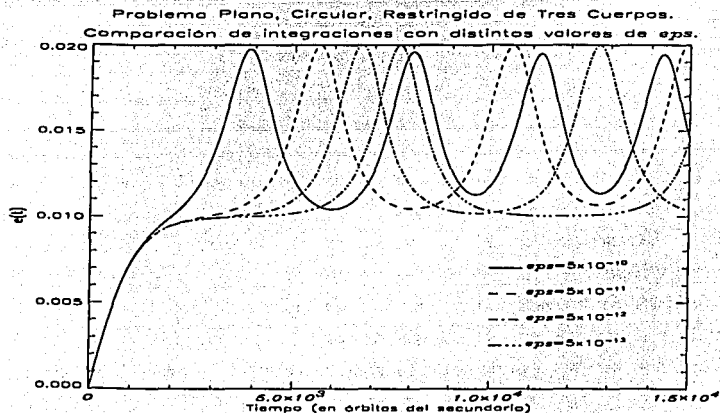


Fig.4.6. Superposición de los primeros 15,000 periodos para la excentricidad correspondientes a las integraciones 1, 2, 3, 4 (Tabla I). Los periodos y amplitudes de las oscilaciones cambian al cambiar en un factor de 10 la tolerancia en el error.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos

$$\epsilon = 5 \times 10^{-14}$$

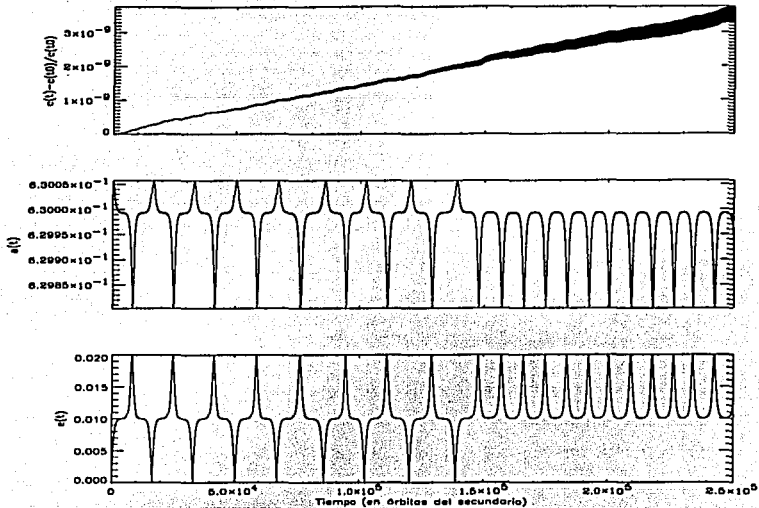


Fig.4.7. Resultados de la integración 5 (Tabla I). En la gráfica superior vemos que C_J se conservamos hasta 8 cifras. La órbita se ha vuelto periódica por lo menos durante los primeros 140,000 periodos y cualitativamente su comportamiento es distinto al mostrado en las integraciones anteriores.

La siguiente integración es la correspondiente a la número 5 en la Tabla I, donde el intervalo por el que integramos ya es mayor y $\epsilon = 5 \times 10^{-14}$. Las gráficas del error fraccional de la Constante de Jacobi, el semieje mayor y la excentricidad se muestran en la Fig.4.7, respectivamente. A las 40,000 se observan únicamente dos oscilaciones completas en la excentricidad y las oscilaciones son cualitativamente distintas a todas las anteriores; el valor inicial del semieje mayor y la excentricidad se alcanzan durante este intervalo, es decir, la órbita se ha vuelto periódica! al menos durante las primeras 1.4×10^5 órbitas de m_2 .

El número de cifras que conservamos de la Constante de Jacobi a los 250,000 periodos es 8, que se puede considerar como buena ya que en la literatura es común encontrar integraciones con *Bulirsch-Stoer* y otros métodos que conservan 5 ó 6 cifras y son dadas como buenas (Chambers (2002), Levison (1994), Hahn (1999), Levison (2000)).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos

$\epsilon ps = 5 \times 10^{-15}$

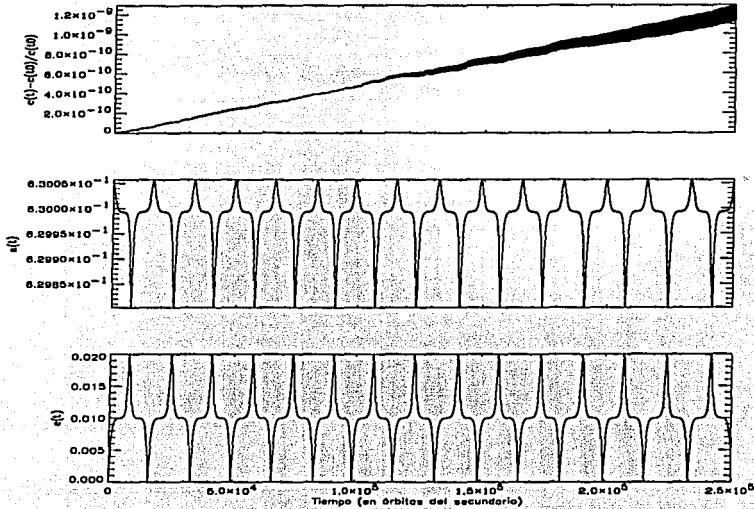


Fig.4.8. Resultados de la integración 6 (Tabla I). La mejor precisión con la que trabajamos muestra que el comportamiento periódico se mantiene durante toda la Integración. La Constante de Jacobi la conservamos hasta 8 cifras, aunque es aproximadamente 4 veces mejor que la de la Fig.4.7.

La mejor precisión con la que trabajamos es con $\epsilon ps = 5 \times 10^{-15}$. La Fig.4.8 muestra las gráficas correspondientes a la integración número 6 de la Tabla I por un intervalo de tiempo igual a la integración anterior. La Constante de Jacobi se conserva hasta ocho cifras decimales a los 250,000 periodos de m_2 . Tanto el semieje mayor como la excentricidad oscilan de tal forma que regresan a su valor inicial durante este intervalo de tiempo y por tanto la órbita es periódica durante toda la integración.

Para una partícula con estas condiciones iniciales, podemos observar que la Constante de Jacobi no es sensible a cambios cualitativos en su órbita. Aunque conservemos hasta 8 cifras en la Constante de Jacobi, al hacer la integración, un código numérico va acumulando errores (no importa qué tan lentamente lo haga) y eventualmente comenzará a hacer las cosas cualitativamente mal, aunque la diferencia cuantitativa no sea muy grande.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos

$eps = 5 \times 10^{-15}$

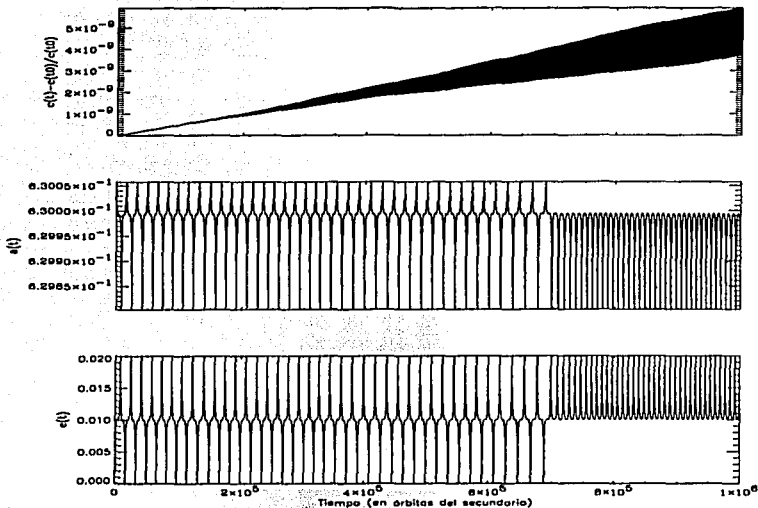


Fig.4.9. Resultados de la integración 7 de la Tabla I. Muestra que aún con la mejor tolerancia en el error con la que trabajamos, los errores numéricos se van acumulando al hacer la integración, hasta que eventualmente se refleja en los resultados. La Constante de Jacobi la conservamos hasta 8 cifras también pero es cuatro veces mejor que la de la Fig.4.8.

Podríamos pensar entonces que un valor de $eps = 5 \times 10^{-15}$ es el mejor para trabajar y creer que nuestro resultado está bien, pero sólo si se integra por 250,000 periodos de m_2 . Si queremos hacer una integración por un periodo de tiempo más grande, debemos recordar que el código seguirá acumulando errores que se verán reflejados eventualmente en nuestros resultados. El fin de la siguiente integración es probar este hecho.

En la Fig.4.9 podemos observar los resultados de la integración número 7 de la Tabla I. La Constante de Jacobi se conserva hasta ocho cifras y tanto el semieje mayor como la excentricidad regresan al valor inicial en sus ciclos hasta que la integración sufre un cambio cualitativo del mismo tipo que los observados anteriormente, pero mucho más tarde en el tiempo ($t \sim 700,000$ órbitas de m_2), cuando los errores numéricos provocan de nuevo un cambio cualitativo en la órbita.



La escala en la que cambian los elementos orbitales no es tan grande como para provocar un cambio también grande en el valor de la constante de Jacobi, sin embargo, cambios cualitativos de este tipo en las órbitas implican un resultado físicamente erróneo.

Podríamos hacer un símil de este ejercicio pensando en una esfera de metal que rueda sobre una superficie que se frena debido a la fricción. Si pulimos la superficie, la esfera llegará más lejos antes de frenarse una vez más. Podemos seguir puliendo la superficie pero la fricción eventualmente detendrá el movimiento de la esfera y si eliminamos del todo la fricción la esfera rodará sin detenerse. Al pedirle al código ser más preciso cambiando el ϵ , estamos "puliendo la superficie" para que el comportamiento del semieje mayor y la excentricidad de la Fig.4.8 se mantenga por un periodo más grande hasta que los errores numéricos (fricción) "detengan el movimiento".

Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos
 $\epsilon = 5 \times 10^{-16}$

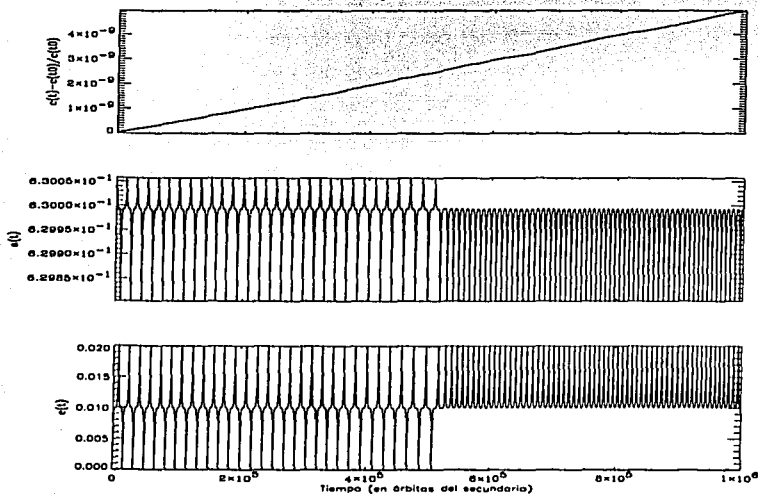


Fig.4.10. Resultados de una integración equivalente a la número 7 de la Tabla 1 pero con un procesador distinto. Esta órbita no sólo es sensible a la tolerancia en el error que usemos para integrar, lo es también a la computadora utilizada. El comportamiento observado en la Fig.4.8 se mantiene hasta $t \sim 500,000$ cuando en el caso anterior se mantuvo hasta $t \sim 700,000$.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Esta órbita no sólo es sensible a la precisión con la que se trabaja. Para demostrarlo presentamos en la Fig.4.10 una integración equivalente a la número 7 de la Tabla I pero hecha con un procesador distinto. Podemos observar que la conservación de la Constante de Jacobi es hasta ocho cifras al final de la integración y tanto el semieje mayor como la excentricidad se comportan como lo hacen en la integración anterior, sólo que ahora es alrededor de la órbita número 500,000 del secundario cuando la integración se descompone.

Al integrar las ecuaciones de movimiento para una partícula cuyas condiciones iniciales la ponen en una resonancia 2:1, ésta resulta ser demasiado sensible a la tolerancia en el error con el cual estemos trabajando. Si nos confiamos en los resultados obtenidos aún con la tolerancia más pequeña y aunque conservemos hasta 8 cifras en el valor de la Constante de Jacobi, no podemos confiar en que no existe algún cambio cualitativo en la integración numérica de los elementos orbitales osculantes de P (Ver Fig.4.7).

Si hacemos las integraciones con una mejor precisión, tal vez el comportamiento de los elementos orbitales de la partícula cuando los grafiquemos será periódico durante más tiempo, o mejor aún durante todo el intervalo de integración.

Al estar P en resonancia la coloca en una situación dinámica muy particular. Hay interacciones gravitacionales con el secundario que no se cancelan en ninguna otra posición a lo largo de su órbita (ver Fig.3.1), los errores numéricos en una resonancia se propagan más rápido. Con este fin, en la sección 4.2 exploraremos la región fuera de una resonancia, haciendo integraciones con condiciones iniciales para P distintas a las de esta sección.

4.2. Integraciones de una órbita no resonante

En esta sección haremos un ejercicio similar al de la sección anterior, integrando las ecuaciones de movimiento para la partícula dándole condiciones iniciales tales que la colocan en una zona que no está en la resonancia EL . El semieje resonante "nominal" está dado por la ecuación (3.1.4):

$$\frac{a}{a'} \equiv a_r = \left(\frac{\mu_1}{4} \right)^{1/3}, \quad (4.2.1)$$

donde a μ_1 la podemos calcular sabiendo que $m_2/m_1 = 10^{-6}$.

Utilizando la ecuación 1.1.7 obtenemos como resultado:

$$\mu_1 = \frac{10^{-6}}{1 + 10^{-6}} . \quad (4.2.2)$$

De aquí que $\mu_1 = 0.999999$, que lo sustituimos en (4.2.1) y obtenemos que el semieje resonante es $a_r = 0.629960315$ en unidades de la separación entre m_1 y m_2 .

A partir de este semieje mayor inicial nos movemos hacia el primario $5 \times 10^{-4} a_r$. Entonces tenemos que el semieje mayor inicial de la partícula será:

$$a_p(t = 0) = a_r(1 - 5 \times 10^{-4}) , \quad (4.2.3)$$

donde a_p es el semieje mayor inicial de la partícula que está desplazado del semieje resonante, de tal forma que P ya no está en la resonancia EL . De (4.2.3) obtenemos que $a_p = 0.629645335$ en unidades de la separación entre m_1 y m_2 .

Las demás condiciones iniciales para P son las mismas de la sección anterior, es decir, $e_0 = f_0 = 0$, ϖ_0 no está definida y para m_2 , $e'_0 = f'_0 = 0$.

En la Tabla II se muestran el número de integraciones hechas con sus respectivos valores de eps y la duración de la integración. El punto es mostrar que fuera de la resonancia los errores numéricos no se propagan tan rápido como en la resonancia, por lo que nada más fue necesario hacer dos integraciones, una con un error grande y otro pequeño, basándonos en las integraciones de la sección anterior.

TABLA II
DATOS NUMERICOS DE LAS INTEGRACIONES (Caso no resonante)

Integración No.	eps	Duración (en periodos de m_2)
1	5×10^{-11}	500,000
2	5×10^{-15}	5×10^6

Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos
 $\epsilon ps = 5 \times 10^{-11}$ (Caso no resonante)

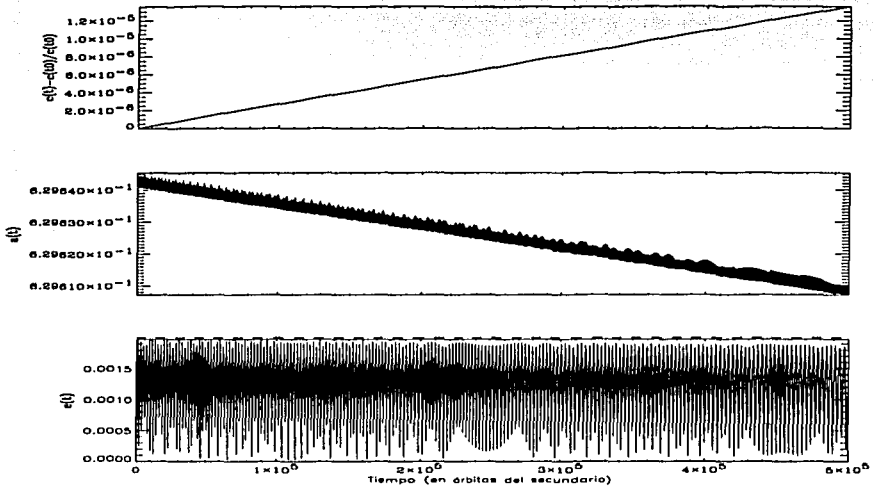


Fig.4.11. Resultados de la integración 1 en la Tabla II. En la gráfica superior se muestra el error fraccional de la Constante de Jacobi, la segunda hacia abajo muestra la evolución del semieje mayor resonante en unidades de la distancia de separación entre m_1 y m_2 y en la gráfica inferior se muestra la evolución de la excentricidad. De la gráfica para el semieje mayor podemos observar que el valor promedio de éste decae al transcurrir la integración, esto es debido a que la tolerancia en el error con la que se trabaja es grande. La gráfica de la excentricidad muestra cambios en la amplitud y período de sus oscilaciones debido a la tolerancia de error. La constante de Jacobi se conserva hasta 4 cifras al final de la integración.

En la Fig.4.11 se muestra la evolución del error fraccional de la Constante de Jacobi, el semieje mayor y la excentricidad de P, respectivamente, correspondiente a la integración 1 de la Tabla II. La Constante de Jacobi la conservamos hasta 5 cifras a los 500,000 periodos de m_2 . Lo primero que podemos observar en la gráfica del semieje mayor, es que éste va disminuyendo de valor al transcurrir el tiempo, indicando un claro deterioro en la integración, ya que esto significaría que P va cayendo al primario. Sin embargo, el comportamiento cíclico no presenta cambios cualitativos importantes como los vistos en



el caso resonante. La amplitud de las oscilaciones no cambia significativamente. Por su parte, en la gráfica de la excentricidad observamos ciclos que cambian en amplitud pero tampoco en una forma significativa como en el caso resonante.

Para observar en más detalle los cambios de amplitud y periodo en las oscilaciones de la excentricidad, en la Fig.4.12 se presentan los primeros 15,000 periodos (línea sólida), superpuestos con periodos de igual tamaño a la mitad y al final de la integración (línea punteada). Nótese que el desfaseamiento en los periodos no es constante, indicando que el periodo de las oscilaciones también cambia.

Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos
Superposición de la excentricidad a distintos intervalos de tiempo
 $\epsilon_{ps} = 5 \times 10^{-11}$ (Caso no resonante)

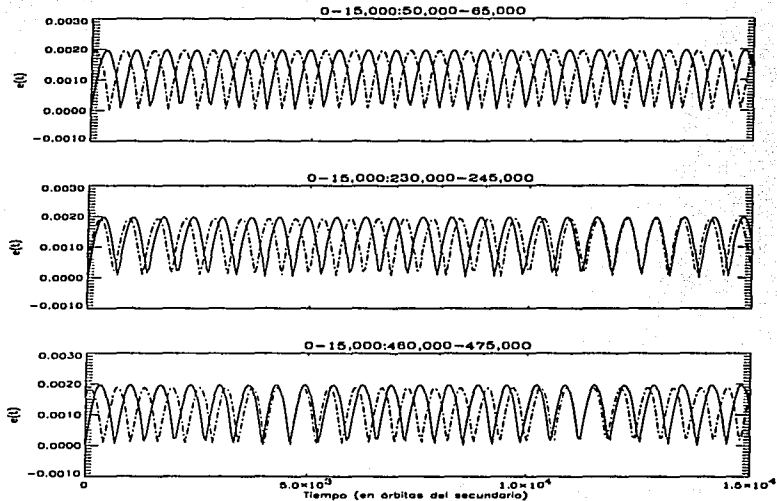


Fig.4.12. Superposición de las oscilaciones en la excentricidad durante los primeros 15,000 periodos con las de un intervalo igual al principio de la integración (gráfica superior), a la mitad de la integración (segunda gráfica hacia abajo) y al final de la integración (gráfica inferior). La línea sólida corresponde a las oscilaciones de los primeros 15,000 periodos y la línea punteada a las oscilaciones con las que se están superponiendo. Nótese cómo en las tres gráficas los desfaseamientos no son constantes, ésto indica un cambio en los periodos de las oscilaciones, pero no hay un cambios cualitativos del comportamiento.

Problema Plano, Circular, Restringido de Tres Cuerpos
 $\epsilon_{ps} = 5 \times 10^{-10}$ (Caso no resonante)

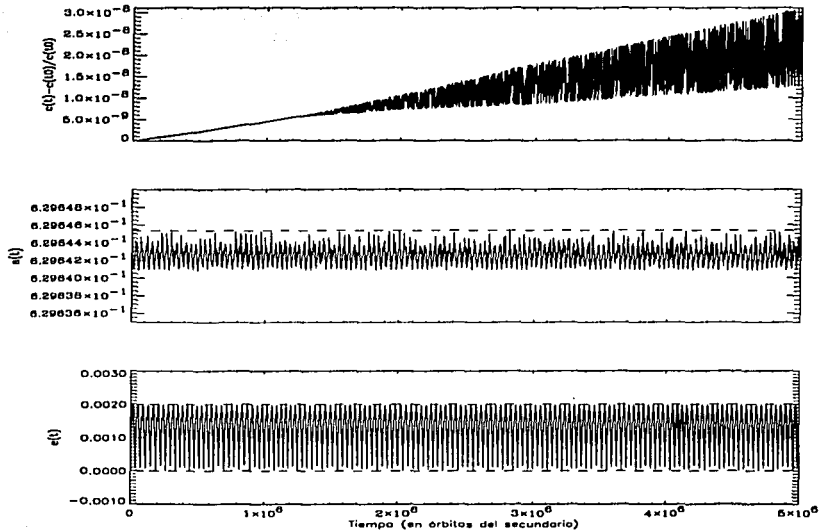


Fig.4.13. Resultados de la integración 2 (Tabla II). Se muestran en el mismo orden que la Fig.4.11. Observamos que la Constante de Jacobi la conservamos hasta 7 cifras al final de la integración. Nótese que el valor del semieje mayor ya no decae, la línea punteada indica el valor inicial del semieje mayor. La gráfica de la excentricidad ya no muestra cambios notables en su período y amplitud.

La Fig.4.13 muestra los resultados de la integración 2 de la Tabla II y en el mismo orden que la Fig.4.11. Observamos que en la gráfica superior la Constante de Jacobi la conservamos en su valor hasta 7 cifras al término de la integración. El semieje mayor promedio ya no cae en su valor como lo hacía en la integración anterior aún cuando esta integración es diez veces más larga. Las oscilaciones tampoco presentan cambios cualitativos significativos como en el caso resonante. Por su parte la excentricidad presenta oscilaciones para las cuales no se aprecian cambios mayores en su amplitud y debido a la cantidad de oscilaciones es necesario ver en detalle la superposición de los primeros 5,000 periodos con intervalos del mismo tamaño a la mitad y al final de la integración.

Superposición de la excentricidad a distintos intervalos de tiempo
 $\epsilon_{ps} = 5 \times 10^{-16}$ (Caso no resonante)

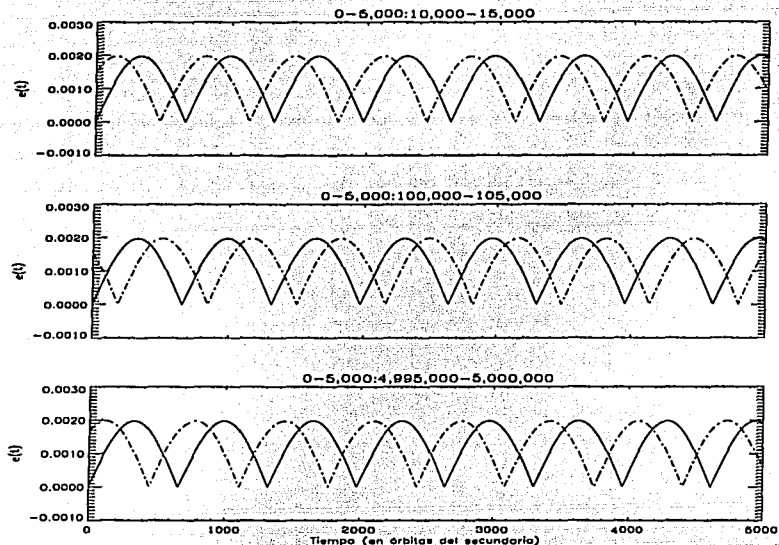


Fig.4.14. Superposición de la oscilaciones en la excentricidad durante los primeros 5,000 periodos con las de un intervalo igual al principio de la integración (gráfica superior), a la mitad de la integración (segunda gráfica hacia abajo) y al final de la integración (gráfica inferior). La línea sólida corresponde a las oscilaciones de los primeros 15,000 periodos y la línea punteada a las oscilaciones con las que se están superponiendo. Los periodos de las oscilaciones son constantes ya que su desfaseamiento es constante.

Los resultados se muestran en la Fig.4.14. Nótese que los desfaseamientos en las oscilaciones son constantes lo que indica que los periodos en las oscilaciones de la excentricidad no cambian y la amplitud tampoco durante toda la integración.

De este ejercicio podemos observar que el hecho de que la partícula comience con un semieje mayor no resonante hace que en las integraciones numéricas los errores no se propaguen tan rápido como el caso en el que el semieje mayor inicial es resonante.

Una integración con $\epsilon_{ps} = 5 \times 10^{-11}$ sigue siendo mala y con pocas cifras conservadas en la Constante de Jacobi. Hasta 5×10^6 periodos en una integración con $\epsilon_{ps} = 5 \times 10^{-15}$,

podemos confiar en los resultados obtenidos por el código numérico ya que no han afectado de manera cualitativa y significativa el comportamiento de los elementos orbitales de P .

La variación en la Constante de Jacobi respecto a su valor inicial se debe al cambio de todas y cada una de las variables de la que ésta depende. En el siguiente capítulo se estudiará brevemente a cuál condición inicial es más sensible la Constante de Jacobi, es decir, los errores de qué variable provocan un mayor cambio en C_j al momento de estar integrando numéricamente.

CAPITULO 5. DEPENDENCIA DE C_j A SUS VARIABLES A MEDIDA QUE SE VAN ACUMULANDO ERRORES

5.1. Variación en las condiciones iniciales

La Constante de Jacobi depende de las condiciones iniciales de la partícula y en la sección 1.2 se dedujo tomando como referencia un sistema Cartesiano con origen en CM y ejes que rotan con la misma velocidad de los dos cuerpos masivos alrededor del origen con velocidad angular constante. La expresión para la Constante de Jacobi en términos de las coordenadas descritas está dada por la ecuación (1.2.51) que por conveniencia la reescribimos a continuación:

$$C_j = (x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2, \quad (5.1.1)$$

donde restringimos el movimiento de P al plano definido por m_1 y m_2 y el término n^2 se ha quitado de la ecuación recordando que $n = 1$. Además:

$$r_1^2 = (x - (-\mu_2))^2 + y^2 \quad (5.1.2)$$

y

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2. \quad (5.1.3)$$

Como podemos ver, la Constante de Jacobi está en función de la posición y velocidad de P . Para poder ver la superficie que define esta Constante necesitaríamos un espacio de 5 dimensiones, por lo que sólo haciendo cortes en dos dimensiones podríamos ver como esta cambiando esta superficie.

Todos los términos de los que depende la Constante de Jacobi están acumulando errores al hacer la integración numérica y todos contribuyen a la variación en su valor respecto al inicial. En este capítulo veremos de manera introductoria a qué variable es más sensible en sus errores la Constante de Jacobi.

Para ésto hicimos un programa en *Fortran 77* que varía sólo una condición inicial dejando las otras fijas. El programa divide un intervalo dado por el usuario en 500 subintervalos de igual tamaño y en cada uno de ellos calcula el valor de C_j .

Los intervalos son porcentuales, es decir, suponemos un error porcentual en el cálculo de alguna condición inicial y vemos el error porcentual que éste produce en el cálculo de C_j . Si la condición inicial es cero, no se le da al programa un error porcentual, se le da un intervalo que es igual en tamaño al que tuvo su contraparte ya sea de velocidad o de posición, es decir, en nuestro caso $x = 0.63005624619$ y el error que suponemos es 10%, por lo tanto a su contraparte en la posición, y , que su valor inicial es cero, le asociamos un intervalo de 0.063005624619 , que es el 10% del valor inicial en x . El cambio en el cálculo de la Constante de Jacobi siempre es porcentual. Aunque la posición de m_2 está fija respecto al sistema rotante, veremos que pasa si hay también un error en el cálculo de la posición del secundario (x_s, y_s) .

Las condiciones iniciales son: $x = 0.63005624619, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0.62976646368682$ y el valor de la Constante de Jacobi es $C_j = 3.17468204075254$.

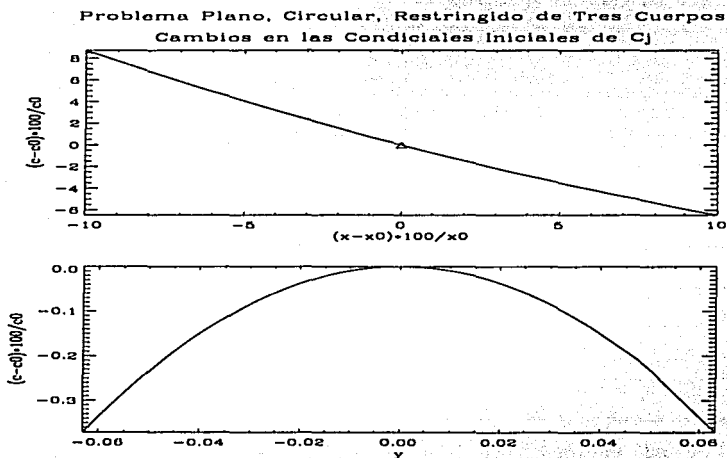


Fig.5.1. Cambio porcentual que sufre la Constante de Jacobi cuando la partícula varía en su condición inicial en x (gráfica superior) y en y (gráfica inferior). En el eje horizontal de la gráfica superior hacia la izquierda está m_1 y hacia la derecha m_2 . El eje horizontal de la gráfica inferior indica una condición inicial en y negativa si es hacia la izquierda y positiva si es hacia la derecha. Los cambios en la coordenada x de P afectan en mayor proporción al valor de la Constante de Jacobi.

En la Fig.5.1 se presentan las gráficas para un cambio del 10% en el valor inicial de x y un cambio en y (que en magnitud es igual al cambio en la coordenada x), respectivamente. El eje horizontal en la gráfica superior está dispuesto de tal forma que hacia la izquierda nos acercamos al primario y hacia la derecha nos acercamos al secundario. De esta gráfica observamos que si se produce un cambio de hasta 10% en dirección al primario, el valor de la Constante de Jacobi crece alrededor de 8%. Si el cambio es en dirección de m_2 y hasta un 10%, entonces el valor de C_J decrece alrededor del 6%. En la gráfica inferior de la Fig.5.1 el eje horizontal está dispuesto de forma que si el movimiento es a la derecha entonces P comienza en el eje y positivo y si es hacia la izquierda entonces P comienza en el eje y negativo. En esta gráfica podemos ver que no importando si P comienza en el lado positivo o negativo del eje y , el valor de la Constante de Jacobi siempre decrece y en los extremos su cambio es de -0.37% del valor inicial.

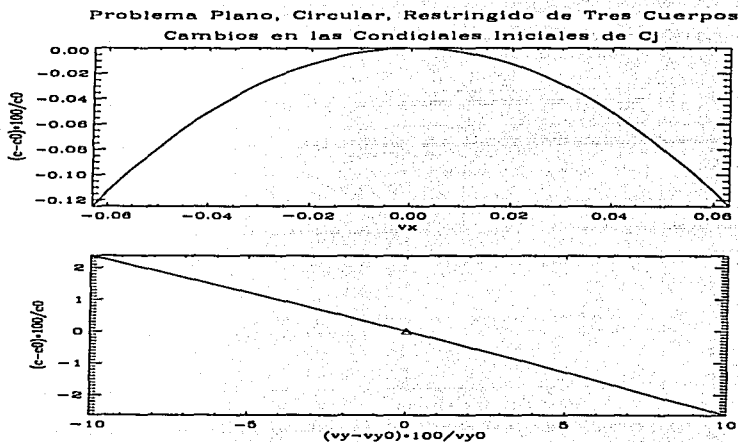


Fig.5.2. Cambio porcentual que sufre la Constante de Jacobi en su valor si la coordenada \hat{x} cambia (gráfica superior) y si la coordenada \hat{y} cambia (gráfica inferior). El eje horizontal de la gráfica superior indica hacia la izquierda que P comienza con una componente x negativa y hacia la derecha positiva. El eje horizontal de la gráfica inferior indica hacia la izquierda que P comienza con una coordenada \hat{y} menor y hacia la derecha mayor. La Constante de Jacobi es más sensible a cambios en la coordenada \hat{y} que a los cambios en la coordenada \hat{x} de P .

La gráfica superior de la Fig.5.2 muestra el cambio porcentual que tiene el valor de C_j si la coordenada \hat{x} cambia en un intervalo igual en magnitud al cambio en \hat{y} . El eje horizontal indica si P comienza con la componente \hat{x} negativa (hacia la izquierda) o positiva (hacia la derecha). Podemos observar que no importa si P comienza con su componente \hat{x} apuntando hacia m_1 o hacia m_2 , el valor de la Constante de Jacobi en cualquier caso decrece alcanzando un cambio de -0.12% en los extremos.

Por su parte, en la gráfica inferior se presenta el cambio porcentual que tiene el valor de la Constante de Jacobi si hay un cambio de 10% en la coordenada \hat{y} . El eje horizontal está dispuesto de forma tal que hacia la izquierda indica que P comienza con una velocidad en \hat{y} menor y hacia la derecha comienza con una velocidad en \hat{y} mayor. Aquí vemos que si P comienza con una velocidad en \hat{y} menor hasta un 10% del valor inicial, la Constante de Jacobi aumenta su valor hasta alrededor de un 2.3% . Si P comienza con una velocidad en \hat{y} mayor hasta un 10% , el valor de C_j decrece hasta un 2.6% .

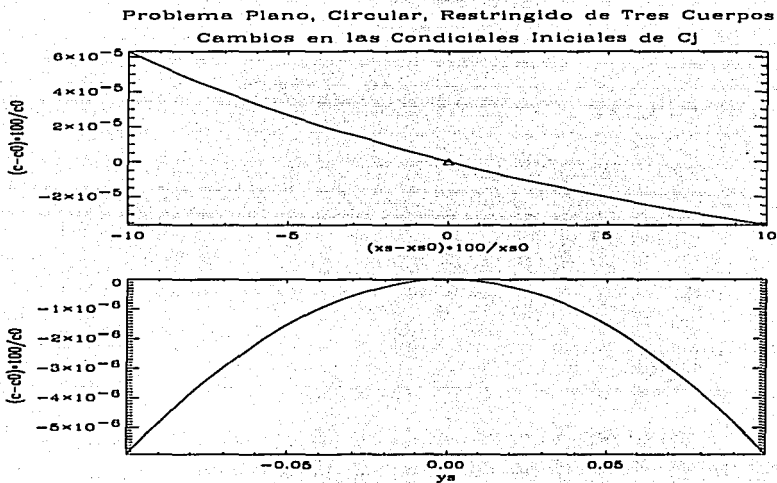


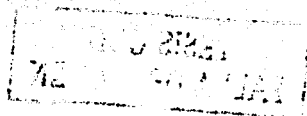
Fig.5.3. Cambio porcentual que sufre la Constante de Jacobi en su valor si m_2 se desplaza por errores numéricos hacia la derecha o hacia la izquierda sobre el eje X (gráfica superior) y hacia arriba o hacia abajo del eje Y (gráfica inferior). En ambas gráficas es mínimo el cambio en el valor de la Constante de Jacobi.

En la Fig.5.3 se presentan los cambios porcentuales que sufre la Constante de Jacobi en su valor inicial si cambian las posiciones en x_s y y_s del secundario, respectivamente. Los ejes horizontales de ambas gráficas están dispuestos de la misma forma que las de la Fig.5.1.

Podemos observar que si el secundario acumula un 10% de error hacia la izquierda (hacia m_1) o a la derecha, la Constante de Jacobi no cambia en su valor inicial de forma significativa. La gráfica inferior nos muestra que si m_2 ligeramente arriba o abajo del eje y la Constante de Jacobi tampoco sufre un cambio significativo en su valor.

Todos los errores acumulados en las coordenadas de las que depende C_j son responsables del cambio en su valor inicial. Definitivamente es más sensible a cambios en las coordenadas de posición y velocidad de P y no tan sensible a los errores en la posición del secundario.

De la Fig.5.2 podemos concluir que el valor de C_j es más sensible a errores en la coordenada \dot{y} que a los de la coordenada \dot{x} . La gráfica superior de la Fig.5.1 nos indica que C_j es más sensible a los errores en la coordenada x de P que a todas las demás variables. Son los errores en la coordenada x los que provocan un mayor cambio en el valor de la Constante de Jacobi durante la integración.



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

CONCLUSIONES

En esta tesis hemos mostrado la integración numérica de una órbita resonante en el marco del *PPCRTC*, en la que, si bien la Constante de Jacobi se conserva hasta ocho cifras, los resultados prueban estar mal. Sin importar qué método numérico se utilice, siempre las computadoras acumularán errores que eventualmente se reflejarán en los resultados. Entre menor sea la precisión con la que se trabaje, más pronto aparecerán cambios cualitativos en las órbitas integradas. En ciertos casos no se pueden garantizar resultados correctos aún con la conservación de siete u ocho cifras en la Constante de Jacobi, ya que los cambios cualitativos que se presenten pueden quedarse oscilando cerca del valor correcto y nunca afectar en forma significativa el valor de C_j . El problema es que como no se conoce la solución, no podemos saber de antemano con certeza qué integraciones son susceptibles de presentar este comportamiento.

Cuando el semieje mayor inicial se aleja de la resonancia los errores numéricos no se propagan tan rápido, pero siempre están presentes y causarán errores en las integraciones, siendo los errores en la coordenada x los que producen un mayor cambio en el valor de la Constante de Jacobi.

Se mostró cómo esta órbita no sólo es sensible a la tolerancia en el error, también lo es si se trabaja con distintas computadoras, es decir, se pueden esperar resultados distintos de computadoras distintas.

Por ser esta órbita tan sensible resulta ideal para hacer las siguientes sugerencias a los que utilizan algún método de integración numérica y en especial a los que utilizan el método de *Bulirsch - Stoer* que aparece en la 2a. edición de *Numerical Recipes* (Press et al. 1992):

- 1) Determinar el tiempo total que se planea integrar (t_f).
- 2) Determinar el valor de *eps* que se piensa utilizar durante la integración.
- 3) Realizar la integración usando las condiciones iniciales dadas aquí para la órbita resonante. Si al graficar sus resultados se observa un comportamiento igual al obtenido en la Fig.4.8 (ya sea en la excentricidad o el semieje mayor), se puede estar seguro que su código y la computadora están haciendo bien las integraciones por el intervalo de tiempo

dado. En caso contrario lo recomendable es disminuir el intervalo de integración o reducir el valor dado de ϵ . Siendo más persistentes en esta recomendación cuando se trabaja cerca de una resonancia por ser en donde se propagan con mayor rapidez los errores numéricos.

La sensibilidad de la órbita es debida a que está en una llamada "separatriz" y su interpretación podría entenderse mejor viendo el *Mapa o Corte del Espacio-Fase de Poincaré*, cuyo estudio rebasa los objetivos de esta tesis, lo que da pie para mencionar el trabajo que queda por realizar: *i)* Encontrar las condiciones iniciales de las separatrices cerca de otras resonancias siempre con excentricidad igual a cero en el sistema con origen en m_1 y no rotante con distintos cocientes de masas. *ii)* Hacer ejercicios similares a los de esta tesis cambiando el cociente de masas. *iii)* Encontrar una expresión analítica para el semieje mayor inicial y órbita circular de las separatrices en función del cociente de masas. *iv)* Hacer el *Mapa de Poincaré* para cada separatriz encontrada. *v)* Entender cómo trabajan los integradores simplécticos y hacer un estudio usando éstos para ver en qué mejoran los resultados. *vi)* Hacer un estudio más profundo de los resultados obtenidos en el capítulo 5 de esta tesis.

APENDICE A

En este apéndice se deducirá la *Constante de Jacobi* mediante el formalismo *Lagrangiano* y *Hamiltoniano*. Tomando un sistema con tres grados de libertad, nuestras coordenadas generalizadas son:

$$\begin{aligned}q_1 &= x, \\q_2 &= y, \\q_3 &= z.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Y nuestras velocidades generalizadas son:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \dot{x}, \\ \dot{q}_2 &= \dot{y}, \\ \dot{q}_3 &= \dot{z}.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Retomando nuestros dos sistemas de referencia del capítulo 1, sabemos que la relación que existe entre la velocidad medida desde el sistema no rotante y la velocidad medida desde el sistema rotante, con origen ambos en *CM*, es:

$$(\vec{v})' = \vec{v} + (\vec{\omega} \times \vec{r}),\tag{A.3}$$

donde $(\vec{v})' = (\dot{X}', \dot{Y}', \dot{Z}')$, $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $\vec{\omega} = (0, 0, n)$ y $\vec{r} = (x, y, z)$.

Haciendo el producto cruz $(\vec{\omega} \times \vec{r})$, y sustituyendo en (A.3), obtenemos que $(\vec{v})'$ es:

$$(\vec{v})' = (\dot{x} - ny, \dot{y} + nx, \dot{z}).\tag{A.4}$$

De aquí que la energía cinética por unidad de masa (*T*) es:

$$T = \frac{1}{2}(v')^2 = \frac{1}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + n^2(x^2 + y^2) - 2n(\dot{x}y - \dot{y}x)].\tag{A.5}$$

Por otro lado, la energía potencial por unidad de masa (U) es:

$$U = - \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right), \quad (\text{A.6})$$

donde:

$$r_1^2 = (x - (-\mu_2))^2 + y^2 + z^2$$

y

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2.$$

Por lo tanto, el Lagrangiano (L) es:

$$L = T - U = \frac{1}{2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + n^2 (q_1^2 + q_2^2) - 2n\dot{q}_1 q_2 + 2n\dot{q}_2 q_1] - U. \quad (\text{A.7})$$

Calculando ahora los momentos generalizados, sabemos que:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 - q_2, \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 + q_1, \\ p_3 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = \dot{q}_3. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

La ecuación de Lagrange nos dice que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad (\text{A.9})$$

donde $k = 1, 2, 3$.

Como podemos observar de (A.7), $L = L(q_k, \dot{q}_k)$. Por lo tanto:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt}. \quad (\text{A.10})$$

Usando la ecuación (A.9) en (A.10) obtenemos:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt}. \quad (\text{A.11})$$

Pero sabemos que:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k},$$

por lo que (A.11) queda:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dp_k}{dt} \dot{q}_k + p_k \frac{d\dot{q}_k}{dt},$$

que podemos reescribirla como:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (p_k \dot{q}_k) .$$

De aquí que:

$$\frac{d}{dt} (p_k \dot{q}_k - L) = 0 . \quad (A.12)$$

Al término $(p_k \dot{q}_k - L)$ se le conoce como el *Hamiltoniano* (H) y de (A.12) podemos ver que H es una constante de movimiento y $H = H(q_k, p_k, t)$.

Calculando ahora el *Hamiltoniano* de P , tomando en cuenta que $\dot{q}_1 = p_1 + q_2$, $\dot{q}_2 = p_2 - q_1$ y $\dot{q}_3 = p_3$, obtenemos:

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2}, \quad (A.13)$$

que es el *Hamiltoniano* de la partícula en el marco del Problema Circular Restringido de Tres Cuerpos, que es una constante de movimiento en este problema.

La ecuación (A.13) se puede poner en términos de $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, resultando:

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2}, \quad (A.14)$$

Por último, la *Constante de Jacobi* se define como:

$$C_j = -2H ,$$

por lo que (A.14) la reescribimos como:

$$C_j = (x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2, \quad (A.15)$$

que es la expresión deducida en la sección 1.2 (ecuación (1.2.51)), tomando la $n = 1$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

APENDICE B

En este apéndice se presentan las ecuaciones para transformar las coordenadas Cartesianas a elementos orbitales. Las coordenadas Cartesianas están medidas desde un sistema con origen en m_1 y ejes X', Y', Z' fijos. Los elementos orbitales osculantes de la partícula se calculan instantáneamente ignorando la presencia de m_2 , éstos son (Ver Fig.B.1):

Semieje mayor a .

Excentricidad e .

Inclinación i .

Longitud del nodo ascendente Ω .

Argumento del periápside ϖ .

Verdadera anomala f .

La inclinación (i) y la longitud del nodo ascendente (Ω) están relacionados con un espacio tridimensional (Ver Fig.B.2).

Por simplicidad usaremos notación Cartesiana no primada, recordando que corresponden al sistema no rotante.

En coordenadas Cartesianas, la distancia de m_1 a la partícula es:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (B.1)$$

y el cuadrado de la magnitud del vector velocidad es:

$$v^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2. \quad (B.2)$$

La energía mecánica de P es:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu_1}{r} = -\frac{\mu_1}{2a}, \quad (B.3)$$

como podemos ver, la energía solo depende del semieje mayor.

Despejando de (B.3) al semieje mayor (a) tenemos que:

$$a = -\frac{\mu_1}{2E}. \quad (B.4)$$

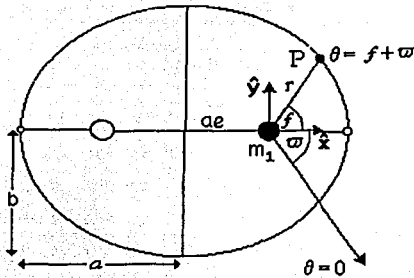


Fig.B.1. En esta figura se muestra la órbita de P que se encuentra en el plano orbital. Al ángulo f se le llama verdadera anomalía y al ángulo ϖ se le llama argumento del periastron. En un espacio tridimensional, las coordenadas de P están referidas a otro plano de referencia.

La magnitud del momento angular (\vec{L}) (constante de movimiento en el problema de dos cuerpos), en términos de los elementos orbitales está dada por:

$$L = \sqrt{a\mu_1(1 - e^2)}, \quad (B.5)$$

de donde podemos despejar a la excentricidad (e) dando como resultado:

$$e = \sqrt{1 - \frac{L^2}{a\mu_1}}, \quad (B.6)$$

recordando que las componentes del momento angular son:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} = (Y\dot{Z} - Z\dot{Y})\hat{X} + (Z\dot{X} - X\dot{Z})\hat{Y} + (X\dot{Y} - Y\dot{X})\hat{Z}. \quad (B.7)$$

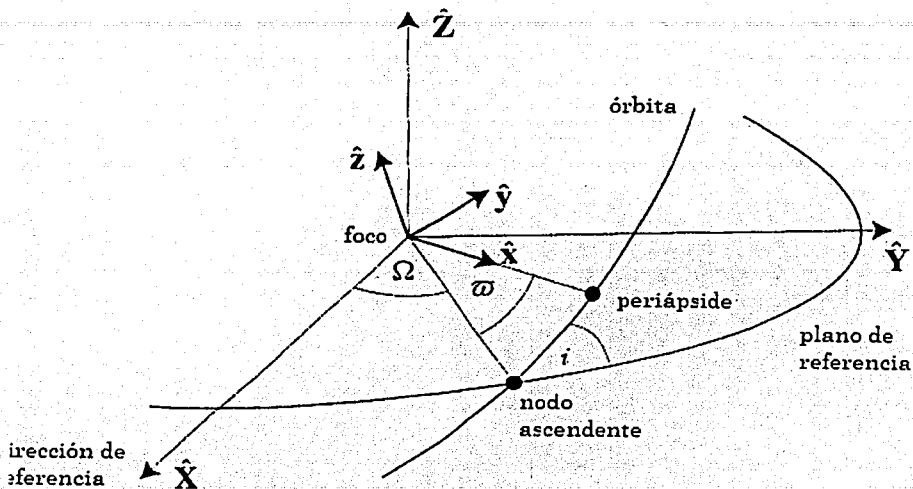


Fig.B.2. En esta figura se muestran los dos planos con los que trabajamos, uno de referencia y otro el plano orbital de P . Al trabajar en un espacio tridimensional los ángulos Ω e i toman sentido. Como los dos orígenes coinciden, el vector de posición coincide para ambos planos.

El vector \vec{L} sobre el plano orbital sólo tiene componente z , pero respecto al plano de referencia tendrá componentes sobre los tres ejes. De la Fig.B.2 podemos observar que estas componentes están dadas por:

$$L_x = L \sin i \sin \Omega, \quad (B.8)$$

$$L_y = -L \sin i \cos \Omega, \quad (B.9)$$

$$L_z = L \cos i. \quad (B.10)$$

De la ecuación (B.10) podemos calcular i , dando como resultado:

$$i = \cos^{-1} \left(\frac{L_z}{L} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{XY - YX}{L} \right). \quad (B.11)$$

De las ecuaciones (B.8) y (B.9) podemos calcular Ω de la siguiente forma:

$$\sin \Omega = \frac{L_x}{L \sin i} \quad (B.12)$$

y

$$\cos \Omega = \frac{-L_y}{L \sin i} \quad (B.13)$$

de aquí que:

$$\tan \Omega = \frac{-L_x}{L_y},$$

por lo tanto:

$$\Omega = \tan^{-1} \left(\frac{-Y\dot{Z} + Z\dot{Y}}{Z\dot{X} - X\dot{Z}} \right) \quad (B.14)$$

Para calcular f usamos la ecuación polar de la elipse, ya que en un sistema con origen en m_1 , ésta es válida:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (B.15)$$

Diferenciando (B.15) respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{r} = \frac{Le \sin f}{a(1 - e^2)}, \quad (B.16)$$

en ésta última usamos el hecho de que:

$$L = r^2 \dot{f} \quad (B.17)$$

Despejando $\cos f$ y $\sin f$ de (B.15) y (B.16), respectivamente, obtenemos:

$$\cos f = \frac{1}{e} \left[\frac{a(1 - e^2)}{r} - 1 \right] \quad (B.18)$$

y

$$\sin f = \frac{a(1 - e^2)}{Le} \dot{r} \quad (B.19)$$

usando estas dos últimas ecuaciones tenemos que:

$$f = \tan^{-1} \left(\frac{\sin f}{\cos f} \right). \quad (B.20)$$

Por medio de tres rotaciones podemos poner las coordenadas X, Y, Z en términos de las coordenadas en el plano orbital de P , que son: x, y, z . Estas rotaciones están representadas por las siguientes matrices de rotación:

$$P_1 \equiv \begin{pmatrix} \cos \varpi & -\sin \varpi & 0 \\ \sin \varpi & \cos \varpi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B.21)$$

$$P_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}, \quad (B.22)$$

$$P_3 \equiv \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B.23)$$

De la Fig.B.2 podemos ver que la primera matriz representa una rotación sobre el eje z por un ángulo ϖ , la segunda una sobre el eje x por un ángulo i y la tercera representa una rotación sobre el eje z por un ángulo Ω , en ese mismo orden, para obtener:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P_3 P_2 P_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (B.24)$$

De la Fig.B.1 podemos ver que podemos reescribir (B.24) de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P_3 P_2 P_1 \begin{pmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (B.25)$$

Haciendo las multiplicaciones de matrices, (B.25) queda:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos(\varpi + f) - \sin \Omega \cos i \sin(\varpi + f) \\ \sin \Omega \cos(\varpi + f) + \cos \Omega \cos i \sin(\varpi + f) \\ \sin(\varpi + f) \sin i \end{pmatrix}. \quad (B.26)$$

De (B.26) podemos calcular $(\varpi + f)$ de las expresiones para Z/r y X/r . Haciendo $\theta = \varpi + f$, obtenemos:

$$\sin \theta = \frac{Z}{r \sin i}, \quad (B.27)$$

$$\cos \theta = \sec \Omega \left[\frac{X}{r} + \sin \Omega \cos i \sin \theta \right]. \quad (B.28)$$

De estas dos últimas ecuaciones podemos calcular ϖ de la siguiente forma:

$$\varpi = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) - f, \quad (B.29)$$

donde f se calculó con (B.20).

Por lo tanto, las seis ecuaciones que necesitamos son la (B.4), (B.6), (B.11), (B.14), (B.20) y (B.29).

REFERENCIAS

- Chambers, J. E., Quintana, E. V., Duncan M. J., Lissauer J. J. 2002. *Symplectic Integrator Algorithms for Modeling Planetary Accretion in Binary Star Systems*. The Astronomical Journal **123**, 2884-2894.
- Danby, M. A. J. 1992. *Fundamentals of Celestial Mechanics*. William-Bell, 2^a ed. Richmond, VA.
- Esprestate, J. 1997. Tesis Doctoral. *Torca lineal sobre un anillo planetario centrado en una resonancia de primer orden*. UNAM.
- Esprestate, J. y J. J. Lissauer 2001. *Resonant Satellite Torques on Low Optical Depth Particulate Disks. II. Numerical Simulations*. Icarus., **152**, 29-47.
- Hahn, J. M. & Malhotra, R. 1999. *Orbital Evolution of Planets Embedded in a Planetesimal Disk*. The Astronomical Journal, **117**, 3041-3053.
- Levison, H. F. & Duncan, M. J. 1994. *The Long-Term Dynamical Behavior of Short-Period Comets*. Icarus **108**, 18-36.
- Levison, H. F. & Duncan, M. J. 2000. *Symplectically Integrating Close Encounters with the Sun*. The Astronomical Journal, **120**, 2117- 2123.
- Moulton, F. R. 1970. *An Introduction to Celestial Mechanics*. Dover Publications, Inc., New York.

Murray, C. D. y Dermott, S. F. 1999. *Solar System Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., y Flannery, B. P. 1992. *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2ª ed.; Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Preston, G. C. y Lovaglia, A. R. 1971. *Modern Analytic Geometry*. Harper & Row Publishers, New York, NY

Wisdom, J. 1987. *Urey Prize Lecture: Chaotic Dynamics in the Solar System*. *Icarus* 72, 241-275.