

01183
4



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería

**ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES
DE SAINT-VENANT Y RICHARDS
EN EL RIEGO POR MELGAS**

M. I. HEBER ELEAZAR SAUCEDO ROJAS

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA (HIDRÁULICA)

Director de tesis: Dr. Carlos Fuentes Ruiz

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CUERNAVACA, MOR.

2003



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN DISCONTINUA

AGRADECIMIENTOS

El Dr. Carlos Fuentes Ruiz ha propiciado que el espíritu universitario haya permeado en quien esto suscribe, situación que reconozco con el más sincero de los agradecimientos.

A los señores Doctores revisores de este trabajo:

Dr. Waldo Ojeda Bustamante
Dr. Jaime Collado Moctezuma
Dr. Luis Rendón Pimentel
Dr. Benjamín de León Mojarro
Dr. Víctor Manuel Ruiz Carmona
Dr. Hermilo Ramírez León

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo referencial.

NOMBRE: Heber E. Savado Rojas

FECHA: 6/NOV/2003

FIRMA: [Firma]

DEDICATORIA

A Dios

A la familia de cuya fundación soy copartícipe:

Claudia Ivette, Edgar Heber y quienes sigan.

A la familia que de la cual me correspondió iniciar la consolidación:

Eleazar, Catalina, Adriana, Ernesto, Adán, Edith y Ma. Guadalupe.

A los nuevos integrantes de mi familia:

Esthela y Alberto

A la memoria del Dr. Alberto Barrios Álvarez

**ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES
DE SAINT-VENANT Y RICHARDS
EN EL RIEGO POR MELGAS**

INTRODUCCIÓN	1
OBJETIVOS	4
CAPÍTULO I: ESTADO DEL ARTE DE LA MODELACIÓN DEL RIEGO POR MELGAS	5
1.1. Introducción	5
1.2. Fases hidráulicas del riego por melgas	5
1.3. Descripción del flujo del agua a superficie libre	6
1.3.1. Ecuaciones de Saint-Venant	6
1.3.2. Modelo de inercia cero	7
1.3.3. Modelo de onda cinemática	8
1.3.4. Modelo hidrológico o de balance de volumen	8
1.4. Descripción del flujo del agua en el suelo	9
1.4.1. Ecuación de Richards	9
1.4.2. Ecuación de Philip	10
1.4.3. Ecuación de Parlange	11
1.4.4. Ecuación de Green y Ampt	11
1.4.5. Ecuación de Kostiaikov-Lewis	12
1.5. Soluciones analíticas en el riego por gravedad	12
1.6. Modelos numérico para riego por melgas	13
1.6.1. Modelo hidrológico o de balance de volumen	13
1.6.1.1. Leyes de infiltración sin base fisico-matemática	13
1.6.1.2. Leyes de infiltración con base fisico-matemática e hipótesis simplificadoras	14
1.6.1.3. Ley de infiltración conforme a la ecuación de Richards	14
1.6.2. Modelo de onda cinemática	14
1.6.2.1. Leyes de infiltración sin base fisico-matemática	14
1.6.3. Modelos de inercia cero	15
1.6.3.1. Leyes de infiltración sin base fisico-matemática	15
1.6.4. Modelos con ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta	15
1.6.4.1. Leyes de infiltración sin base fisico-matemática	15
1.6.4.2. Leyes de infiltración con base fisico-matemática e hipótesis simplificadoras	17
1.6.5. Modelos con ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum completa	18
1.6.5.1. Leyes de infiltración sin base fisico-matemática	18
1.6.5.2. Leyes de infiltración con base fisico-matemática e hipótesis simplificadoras	19
1.6.1.3. Ley de infiltración conforme a la ecuación de Richards	19

CAPÍTULO II: DESARROLLO DE UN ESQUEMA NUMÉRICO PARA EL ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE SAINT-VENANT Y RICHARDS EN EL RIEGO POR MELGAS	20
2.1. Flujo del agua en el suelo: ecuación de Richards	20
2.1.1. Condiciones límites	21
2.1.2. Características hidrodinámicas	22
2.1.3. Cálculo de la lámina infiltrada	22
2.1.4. Solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional	23
2.1.5. Validación del esquema numérico para la ecuación de Richards	24
2.2. Flujo del agua sobre la superficie del suelo: ecuaciones de Saint-Venant	30
2.2.1. Esquema numérico para la fase de avance	30
2.2.1.1. Introducción	30
2.2.1.2. Condiciones límites	31
2.2.1.3. Solución numérica monótona de las ecuaciones de Saint-Venant	31
2.2.1.4. Solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant utilizando un esquema numérico con ponderaciones en tiempo y espacio	35
2.2.2. Comparación de soluciones numéricas obtenidas mediante el esquema propuesto con las obtenidas por un esquema ponderado en tiempo y espacio	41
2.2.2.1. Discretización del dominio de solución	41
2.2.2.2. Comparación de soluciones numéricas	41
2.2.3. Verificación del funcionamiento del esquema propuesto para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards	47
2.2.4. Esquema numérico para las fases de almacenamiento, consumo y recesión	50
2.2.4.1. Introducción	50
2.2.4.2. Fase de almacenamiento	51
2.2.4.3. Fase de consumo	55
2.2.4.4. Fase de recesión	55
2.2.5. Aplicación	57
 CAPÍTULO III: VERIFICACIÓN NUMÉRICA DE LA HIPÓTESIS DEL TIEMPO DE CONTACTO EN EL RIEGO POR MELGAS	 61
3.1. Introducción	61
3.2. La hipótesis del tiempo de contacto	63
3.3. Efecto de la pendiente topográfica de la melga	67
 CAPÍTULO IV: APLICACIONES	 70
4.1. Caracterización hidrodinámica de suelos utilizando pruebas de riego	71
4.2. Efecto de la posición del manto freático en la evolución del frente de avance en el riego por melgas	73
4.2.1. Introducción	73
4.2.2. Caracterización hidrodinámica	74

4.2.3. Calibración y verificación de la aplicabilidad del modelo	76
4.2.4. Forma general del efecto de la posición del manto freático en el frente de avance	79
4.3. Cálculo del gasto óptimo para la aplicación de una lámina de riego	79
4.3.1. Introducción	79
4.3.2. Diseño del riego por melgas	80
4.3.2.1. Pruebas de riego	80
4.3.2.2. Modelos matemáticos	80
4.3.3. Eficiencias en el riego por melgas	81
4.3.3.1. Eficiencia de aplicación	81
4.3.3.2. Eficiencia de requerimiento de riego	81
4.3.3.3. Eficiencia de uniformidad	82
4.3.4. Cálculo del gasto óptimo	82
4.3.4.1. Introducción	82
4.3.4.2. Relación entre la longitud de la melga y el gasto óptimo	84
4.3.5. Cuadro de diseño del riego por melgas	85
4.3.6. Cálculo del gasto óptimo en el riego por melgas con presencia de un manto freático	88
CONCLUSIONES	91
BIBLIOGRAFÍA	92

INDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 2.1	Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional	21
Ilustración 2.2.	Comparación de la solución analítica y la solución numérica en la arcilla clara de Yolo: a) paso de tiempo máximo de 30 s, b) paso de tiempo máximo de 180 s.	29
Ilustración 2.3.	Comparación de la solución analítica y la solución numérica en la arena del río Isère: a) paso de tiempo máximo de 30 s, b) paso de tiempo máximo de 180 s.	29
Ilustración 2.4.	Disposición de las celdas de cálculo para la fase de avance.	31
Ilustración 2.5.	Comparación de la solución numérica obtenida mediante un esquema reportado en al literatura (línea punteada) y el esquema propuesto en este trabajo (línea continua) para régimen de Chézy.	43
Ilustración 2.6.	Comparación de la solución numérica obtenida mediante un esquema reportado en al literatura (línea punteada) y el esquema propuesto en este trabajo (línea continua) para régimen de Chézy.	43
Ilustración 2.7.	Solución numérica para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant en su forma de inercia cero y la ecuación de Richards, obtenida mediante un esquema numérico ponderado en tiempo y espacio para la solución de las ecuaciones de Saint-Venant.	44
Ilustración 2.8.	Variación respecto al gasto de aporte en la cabecera de la melga de la proporción (δh) entre el máximo cambio de monotonía de la solución numérica obtenida con un esquema presentado en la literatura y el tirante normal. Las curvas inferiores corresponden a $\kappa = 1/54$ y las superiores a un valor 20 veces menor $\kappa = 1/1080$.	46
Ilustración 2.9.	Verificación del funcionamiento del esquema numérico: comportamiento asintótico hacia el tirante normal en diferentes posiciones a lo largo de una melga.	48
Ilustración 2.10.	Verificación del funcionamiento del esquema numérico: comportamiento asintótico de la posición del frente de avance para un gasto de aporte y conductividad a saturación específicos.	49
Ilustración 2.11.	Verificación del funcionamiento del esquema numérico: solución de la ecuación del flujo gradualmente variado comparada con la solución numérica proporcionada por el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards.	49
Ilustración 2.12.	Disposición de las celdas de cálculo para las fases de avance, almacenamiento, consumo y recesión.	51
Ilustración 2.13.	Perfiles de flujo obtenidos durante la fase de avance, correspondientes a tiempos de 1,5, 10 y 20 minutos.	58

Ilustración 2.14.	Curvas de avance y recesión, obtenidas mediante el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards.	58
Ilustración 2.15.	Detalle de la evolución de tirantes al final de la melga durante la fase de almacenamiento.	59
Ilustración 2.16.	Aspectos de las cuatro fases del riego por melgas.	59
Ilustración 2.17.	Evolución del potencial de presión en la cabecera de la melga.	60
Ilustración 2.18.	Evolución del potencial de presión a lo largo de la melga (fase de recesión).	60
Ilustración 3.1.	Comparación de las curvas de avance obtenidas sin considerar y considerando la hipótesis del tiempo de contacto.	64
Ilustración 3.2.	Detalle de la comparación de las curvas de avance obtenidas sin considerar y considerando la hipótesis del tiempo de contacto.	65
Ilustración 3.3.	Comparación de los perfiles de flujo obtenidos sin considerar y considerando la hipótesis del tiempo de contacto.	65
Ilustración 3.4.	Comparación de la evolución de la lámina infiltrada y del tirante en la cabecera de la melga sin considerar y considerando la hipótesis del tiempo de contacto.	66
Ilustración 3.5.	Acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards unidimensional. Evolución del tirante y la lámina infiltrada en diferentes puntos localizados a lo largo de la melga.	66
Ilustración 3.6.	Acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards bidimensional. Evolución del tirante y la lámina infiltrada en diferentes puntos localizados a lo largo de la melga.	67
Ilustración 3.7.	Comparación de las curvas de avance obtenidas sin considerar y considerando la hipótesis del tiempo de contacto. Pendiente topográfica de la melga $J_0 = 0.020$.	68
Ilustración 3.8.	Comparación de la evolución de la lámina infiltrada y del tirante en la cabecera de la melga sin considerar y considerando la hipótesis del tiempo de contacto. Pendiente topográfica de la melga $J_0 = 0.020$.	69
Ilustración 4.1.	Ilustración 4.1. Caracterización hidrodinámica del suelo utilizando datos de avance de una prueba de riego por melgas. $q_0 = 0.0032 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, $\theta_0 = 0.2749 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. $R^2 = 0.9982$, error cuadrático medio ECM = 25.12 cm con $\psi_d = -32.75 \text{ cm}$ y $K_s = 1.84 \text{ cm}/\text{h}$.	72
Ilustración 4.2.	Verificación de la aplicabilidad del modelo para la fase de avance del riego por melgas $q_0 = 0.0024 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, $\theta_0 = 0.3017 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. $R^2 = 0.9980$, error cuadrático medio ECM = 49.05 cm.	72
Ilustración 4.3.	La curva granulométrica de la <i>arcilla de La Chontalpa</i> ajustada con la ecuación (4.4), $R^2 = 0.9886$	76

Ilustración 4.4.	Calibración del modelo utilizando los datos de la primera prueba de riego. $R^2 = 0.9984$	77
Ilustración 4.5.	Verificación de la aplicabilidad del modelo variando la profundidad del manto freático de 152 cm a 52 cm como producto de la aplicación del primer riego. $R^2 = 0.9909$	78
Ilustración 4.6.	Verificación de la aplicabilidad del modelo variando la profundidad del manto freático de 152 cm a 50 cm y el gasto de aporte de $q_o = 0.001428 \text{ m}^3 / \text{s} / \text{m}$ (gasto total $Q_o = 15 \text{ lps}$) a $q_o = 0.001238 \text{ m}^3 / \text{s} / \text{m}$ (gasto total $Q_o = 13 \text{ lps}$). $R^2 = 0.9821$	78
Ilustración 4.7.	Evolución del frente de avance para diferentes profundidades iniciales del manto freático en la <i>arcilla de la Chontalpa</i> . Gasto de aporte de $q_o = 0.001428 \text{ m}^3 / \text{s} / \text{m}$ (gasto total $Q_o = 15 \text{ lps}$).	79
Ilustración 4.8.	Variación de la eficiencia de uniformidad para diferentes longitudes de melga y gastos de aporte en el suelo <i>franco de Montecillo</i> . Lámina de riego 10 cm.	85
Ilustración 4.9.	Relación entre la longitud de melga y el gasto de aporte óptimo para el suelo <i>franco de Montecillo</i> para tres láminas de aplicación: 8, 10 y 12 cm.	89
Ilustración 4.10.	Relación entre la longitud de melga y el gasto de aporte óptimo para el suelo <i>arcilla de la Chontalpa</i> . Lámina de riego de 10 cm y profundidad inicial del manto freático de 200 cm.	90

INDICE DE CUADROS

Cuadro 2.1.	Parámetros de las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange para dos suelos contrastantes.	28
Cuadro 2.2.	Error relativo máximo obtenido al comparar las soluciones analítica y de elemento finito para dos suelos contrastantes.	28
Cuadro 4.1.	Características hidrodinámicas para el diseño del riego por melgas	86
Cuadro 4.2.	Cuadro 4.2. Diseño del riego por melgas: gasto en lps/m^2 para la aplicación óptima de la lámina de riego. Factor de fricción $\kappa=1/54$, pendiente topográfica $J_o = 0.002$.	87
Cuadro 4.3.	Cuadro 4.3. Diseño del riego por melgas: gasto en lps/m^2 para la aplicación óptima de la lámina de riego. Factor de fricción $\kappa=1/540$, pendiente topográfica $J_o = 0.0005$.	88
Cuadro 4.4.	Cuadro 4.4. Gasto de riego (lps/m^2) para la aplicación óptima de la lámina de riego en la <i>arcilla de la Chontalpa</i> .	90
Cuadro 4.5.	Cuadro 4.5. Tiempo de riego (horas) para la aplicación óptima de la lámina de riego en la <i>arcilla de la Chontalpa</i> .	90

RESUMEN

Se modela el riego por melgas acoplado numéricamente las ecuaciones de Saint-Venant para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo y la ecuación de Richards para modelar el flujo del agua en el suelo. La solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant se desarrolla mediante un esquema lagrangiano en diferencias finitas, para la ecuación de Richards se utilizan elementos finitos en el espacio y diferencias finitas implícitas en el tiempo. Se propone un esquema numérico que genera una solución monótona, para las fases de avance, almacenamiento y consumo la solución numérica se obtiene mediante un esquema de paso de tiempo constante, para la fase de recesión se hace uso de un esquema de paso de espacio fijo. Se han realizado cuatro aplicaciones del acoplamiento: i) se ha verificado que la hipótesis del tiempo de contacto, la cual establece la predominancia del flujo vertical del agua en el suelo, es una muy buena aproximación para describir el flujo del agua en el riego por melgas. ii) el modelo numérico es utilizado para la caracterización hidrodinámica de suelos mediante pruebas de riego, iii) se ha modelado el efecto de la profundidad del manto freático en la evolución del frente de avance en el riego por melgas, concluyéndose que dicho efecto es mayor cuanto más cercana sea la posición inicial del manto respecto a la superficie del suelo, y iv) el modelo se utiliza para calcular el gasto óptimo necesario para aplicar una lámina de riego, se ha verificado que existe una relación básicamente lineal entre dicho gasto y la longitud de la melga independientemente de la condición inicial de distribución de las presiones en el suelo.

SUMMARY

Border irrigation is simulated by using a numerical model based on the coupled system of Saint-Venant equations to describe the surface water flow and the Richards equation to describe the subsurface water flow. The numerical solution of the Saint-Venant equations is developed by a lagrangian finite differences scheme, for the Richards equation use is made of finite elements in space and implicit finite differences in time. It is proposed a numerical scheme that allows to obtain a monotonous numerical solution, for the hydraulic phases of advance, storage and consumption the numerical solution is obtained by a constant time step scheme, and for the recession phase by a constant space step scheme. Four applications of the coupled system are effectuated: i) it is verified that the contact time hypothesis, wich states the predominance of the vertical water flux in the soil, is a very good aproximation for the description of the water flow in the soil during the border irrigation, ii) the numerical model is used for soil hydrodynamical characterization using data from irrigation tests, iii) it is modeled the effect of a water table in the soil profile on the evolution of the advance front in border irrigation, and is concluded that a shallow water table has a greater effect in advance wave velocity, and iv) the model is used to compute the optimal inflow necessary to applicate an irrigation depth, and is verified the existence of a basically lineal relation between the optimal inflow and the border length independently of the initial distribution of the water pressure in the soil.

INTRODUCCIÓN

Los campos del conocimiento donde existe una componente utilitaria en la descripción del orden de las cosas, tienen que ver con aplicaciones del ingenio para la solución de problemas que generen aplicaciones inmediatas, es decir se relacionan con la aplicación de la ciencia a la ingeniería, en este ámbito se inscribe el presente trabajo, que pretende por una parte la descripción detallada y suficientemente precisa, en el contexto de la mecánica de Newton, del fenómeno físico-matemático denominado riego por melgas y por la otra verificar algunas técnicas utilizadas en los procesos de diseño del riego teniendo como premisa optimizar el uso del agua.

La herramienta fundamental adoptada en este trabajo es el uso de ecuaciones diferenciales parciales altamente no lineales, que partiendo de la hipótesis del continuo describen las razones de cambio de las variables hidráulicas del riego por melgas en el tiempo y el espacio. La base de la descripción es el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo con la ecuación de Richards para modelar el flujo del agua en el suelo, la interacción se produce vía el tirante de agua sobre la superficie del suelo y la lámina de agua infiltrada en el mismo, considerando que el cálculo de cualquiera de ellos hace necesario conocer el otro. La estructura adoptada para desarrollar la exposición es como sigue:

En el capítulo I se presentan las ecuaciones de base y una revisión de los modelos más difundidos que se utilizan para simular el flujo del agua en el riego por melgas, agrupándolos conforme al tipo de aproximaciones que utilizan para describir tanto el flujo del agua sobre la superficie del suelo como el flujo del agua en el suelo. Como elementos de comparación han sido seleccionados el número de fases del riego que pueden simular de entre las cuatro que describen el proceso completo: avance, almacenamiento, consumo y recesión, así como el tipo de método numérico utilizado para la solución de las ecuaciones diferenciales involucradas en la descripción del proceso, asimismo se reconocen los casos en que han sido efectuadas calibraciones o verificaciones de la aplicabilidad de los modelos utilizando datos de pruebas de riego.

En el capítulo II se presenta un esquema numérico desarrollado en este trabajo que permite obtener una solución monótona para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por melgas. La solución de las ecuaciones de Saint-Venant se aproxima utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas, mientras que para la ecuación de Richards se utilizan elementos finitos para la integración en el espacio y diferencias finitas implícitas para la integración en el tiempo. A partir del análisis de diferentes formas de aproximación de las derivadas espaciales y temporales, así como de la forma de cálculo de los coeficientes de la ecuación de cantidad de movimiento se deduce que, para obtener una solución numérica monótona es conveniente que se efectúe la discretización de la ecuación de momentum teniendo en cuenta tres aspectos: i) las derivadas en el espacio y la pendiente de fricción en una celda de cálculo se aproximan adelante en el tiempo, ii) las derivadas en el tiempo se aproximan

utilizando una forma ponderada en tiempo y espacio, iii) los coeficientes son calculados en el tiempo anterior. La solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant para las fases de avance, almacenamiento y consumo se aproxima utilizando un esquema de paso de tiempo constante, mientras que para la fase de recesión se hace uso de un esquema de paso de espacio fijo. El modelo permite generar resultados que son aplicables a las escalas de espacio y tiempo propias de pruebas de riego efectuadas tanto en campo como en laboratorio.

La verificación numérica del grado de aproximación de la hipótesis del tiempo de contacto es el tema central del capítulo III. La hipótesis, que es ampliamente utilizada en el estudio del riego por melgas, asume que el agua tiene un movimiento predominantemente vertical en el suelo, es decir que la ley de infiltración es única a lo largo del desarrollo de la melga. La prueba numérica de la hipótesis del tiempo de contacto ha sido efectuada acoplando las ecuaciones de Saint-Venant con la ecuación de Richards en su forma unidimensional y bidimensional, el primer acoplamiento corresponde al uso de la hipótesis del tiempo de contacto mientras que el segundo prescinde de la misma. La diferencia entre las variables hidráulicas obtenidas mediante ambos procedimientos, muestra que el uso de la hipótesis del tiempo de contacto conduce a obtener curvas que representan fases de avance más lentas pero que no difieren significativamente de aquellas obtenidas sin tener en cuenta dicho supuesto, es decir, la hipótesis del tiempo de contacto es una muy buena aproximación para la descripción del flujo del agua en el suelo en el riego por melgas.

Los resultados obtenidos en los capítulos anteriores sirven como base para efectuar tres aplicaciones mostradas en el capítulo IV, la primera se relaciona con la utilización del modelo con fines de caracterización hidrodinámica de suelos haciendo uso de pruebas de riego, la segunda trata sobre el efecto de la presencia de un manto freático somero sobre la evolución del frente de avance y en la tercera se verifica que existe una relación aproximadamente lineal entre la longitud de la melga y el gasto de aporte necesario para lograr una aplicación óptima del riego. El modelo es utilizado con fines de caracterización hidrodinámica de suelos asumiendo que se conocen los valores de los contenidos volumétricos de agua a saturación y residual, así como de los parámetros de forma tanto de la característica de humedad como de la curva de conductividad, obtenidos por ejemplo mediante el procedimiento sugerido por Fuentes (1992), la aplicación consiste en hacer uso de un procedimiento inverso para determinar la conductividad hidráulica a saturación y la escala de presiones de la curva característica de humedad del suelo. El efecto de la profundidad del manto freático en la evolución del frente de avance en el riego por melgas es simulado mediante el modelo numérico desarrollado en capítulos anteriores y haciendo uso de la hipótesis del tiempo de contacto verificada precedentemente. El modelo ha sido calibrado y se ha verificado su aplicabilidad utilizando datos de un experimento de campo realizado en La Chontalpa, Tabasco, Mex., reportados por Pacheco (1995). El acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards se ha utilizado para determinar el gasto óptimo necesario para aplicar una lámina de riego. El gasto óptimo ha sido considerado como aquel para

el cual el Coeficiente de Uniformidad de Christiansen es máximo, manteniendo valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego, y se ha evidenciado que tiene un comportamiento aproximadamente lineal con respecto a la longitud de la melga independientemente de la condición inicial de distribución de las presiones en el suelo.

OBJETIVOS

El objetivo general del presente trabajo es modelar el riego por melgas mediante el acoplamiento numérico de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards, la primera de ellas es utilizada para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo, y la segunda para modelar el flujo del agua en el suelo. Los objetivos particulares tienen que ver con aplicaciones del acoplamiento a los siguientes problemas: i) verificación numérica del grado de aproximación de la hipótesis del tiempo de contacto en el riego por melgas, la cual establece que la función que describe la evolución en el tiempo de la lámina de agua infiltrada en el suelo es la misma a lo largo del desarrollo de la melga, es decir, asume la predominancia del flujo vertical del agua en el suelo, ii) caracterización hidrodinámica de los suelos utilizando pruebas de riego en combinación con la metodología propuesta por Fuentes (1992), iii) modelación del efecto de la presencia de un manto freático en el perfil del suelo en la evolución del frente de avance y iv) cálculo del gasto de riego óptimo, es decir aquel para el cual se obtiene la mayor eficiencia de uniformidad manteniendo valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego.

CAPÍTULO I

ESTADO DEL ARTE DE LA MODELACIÓN DEL RIEGO POR MELGAS

Resumen

En este capítulo es presentada una revisión de los modelos más difundidos que se utilizan para simular el flujo del agua en el riego por melgas, agrupándolos conforme al tipo de aproximaciones que utilizan para describir tanto el flujo del agua sobre la superficie del suelo como el flujo del agua en el suelo. Se ha tenido en cuenta el número de fases del riego que pueden simular de entre las cuatro que describen el proceso completo: avance, almacenamiento, consumo y recesión. Se reporta sucintamente el tipo de método numérico utilizado para la solución de las ecuaciones diferenciales involucradas en la descripción del proceso y se reconocen los casos donde se presentan calibraciones o verificaciones de la aplicabilidad de los modelos utilizando datos experimentales.

1.1. Introducción

Es hasta fechas recientes que se ha dado una mayor importancia al papel que desempeña el suelo en la modelación del riego por gravedad, en los modelos pioneros reportados en la literatura e incluso en varios actuales, se tiene en cuenta su efecto a través de leyes de infiltración muy simplificadas que tienen deficiencias desde el punto de vista de la representación físico-matemática del proceso. Una limitante a tener en cuenta es, por ejemplo, que la estimación de los parámetros que intervienen en estas leyes de infiltración dependen de las condiciones inicial y de frontera en que se efectúan las pruebas de infiltración que sirven para calibrar los parámetros que en ellas intervienen.

La complejidad que presenta el tratamiento analítico de las ecuaciones diferenciales que pueden utilizarse para modelar el riego por gravedad, ha motivado que se hayan presentado un número reducido de funciones analíticas para describir el fenómeno obtenidas para formas simplificadas de las ecuaciones de movimiento. Esta situación ha motivado el uso de aproximaciones numéricas para la obtención de soluciones discretas, que permiten determinar las formas de las variables hidráulicas para puntos particulares del dominio de solución de las ecuaciones diferenciales.

1.2 Fases hidráulicas del riego por melgas

En el riego por melgas pueden distinguirse cuatro fases: avance, almacenamiento, consumo y recesión. La fase de avance inicia con la introducción del agua en la melga y termina cuando se alcanza el extremo de la misma. La fase de almacenamiento comienza a partir de que

el agua llega al extremo de la melga y culmina cuando se deja de aplicar el gasto de aporte en la cabecera. La fase de consumo se define como el tiempo que transcurre desde el momento en que se deja de aplicar el gasto de aporte en la cabecera de la melga hasta la desaparición del tirante en dicha posición. La fase de recesión comienza a partir de que el tirante de agua desaparece en el inicio de la melga y termina cuando el tirante desaparece en el otro extremo de la misma.

Los modelos para riego por melgas en su mayoría tienen en cuenta solamente la fase de avance. En el ámbito experimental se reconoce la fase de avance como aquella que presenta la identificación más sencilla y por lo tanto la que ocupa el interés en la mayoría de los trabajos experimentales efectuados tanto en campo como en laboratorio.

El modelo desarrollado en este trabajo describe las cuatro fases del riego por melgas haciendo uso de las ecuaciones diferenciales parciales altamente no lineales de Saint-Venant y Richards para el cálculo del flujo del agua sobre la superficie del suelo y del flujo del agua en el suelo respectivamente.

1.3. Descripción del flujo del agua a superficie libre

1.3.1. Ecuaciones de Saint-Venant

En una melga la relación entre su ancho y el tirante de agua permite considerar las ecuaciones correspondientes al escurrimiento sobre una superficie de ancho infinito (Woolhiser, 1975, en Mahmood y Yevhevich, 1975):

Continuidad:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

Cantidad de movimiento:

$$h^2 \frac{\partial q}{\partial t} + 2qh \frac{\partial q}{\partial x} + (gh^3 - q^2) \frac{\partial h}{\partial x} + gh^3 (J - J_0) + \beta qh \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

donde $q(x, t) = U(x, t)h(x, t)$ es el gasto por unidad de ancho de melga [L^2T^{-1}], x es la coordenada espacial en la dirección principal del movimiento del agua en la melga [L]; t es el tiempo [T]; U es la velocidad media [LT^{-1}]; h el tirante de agua [L]; J_0 es la pendiente topográfica de la melga [LL^{-1}]; J la pendiente de fricción [LL^{-1}]; $v_i = \partial I / \partial t$ es el flujo de infiltración [LT^{-1}], es decir el volumen de agua infiltrado en la unidad de tiempo por unidad de

ancho y por unidad de longitud de la melga, I es la lámina infiltrada [L]; g es la aceleración gravitacional [LT^{-2}]; el parámetro adimensional $\beta = 1 - \alpha$, siendo $\alpha = 1 - U_{ix} / U$, donde U_{ix} es la proyección en la dirección del movimiento de la velocidad de salida de la masa de agua debido a la infiltración.

Para cerrar el sistema es necesario disponer de una relación entre las variables hidráulicas q y h con la pendiente de fricción, dicha relación se denomina ley de resistencia hidráulica. Fuentes *et al.* (2004) han demostrado que no es posible utilizar la ley de resistencia de Manning-Strickler en el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards. Lo anterior tiene como base el análisis en los tiempos muy cortos del acoplamiento, se deduce que la ley de resistencia de Manning-Strickler solamente puede ser utilizada para un reducido número de funciones gasto de riego aplicado en la cabecera de la melga, en particular para cuando el gasto de riego se comporta como una función potencia 1/6 del tiempo, en consecuencia, dicha ley de resistencia no debe utilizarse en el caso importante en que el gasto de riego es constante. Asimismo se deduce que, en caso de hacer uso de dicha ley de resistencia, sus parámetros dependen de las condiciones de frontera, en particular la evolución de la lámina de riego en los tiempos muy cortos dependerá del gasto de riego, situación que es falsa en el contexto de la ley de infiltración proporcionada por la ecuación de Richards. En consecuencia, en este trabajo se adopta el uso de una ley potencial de resistencia (Fuentes *et al.*, 2004) que incluye como casos particulares a las de Chézy y Poiseuille:

$$q = \kappa v \left(\frac{h^3 g J}{v^2} \right)^d \tag{1.3.}$$

Existen formas de las ecuaciones de Saint-Venant en las que no se tiene en cuenta el efecto de la infiltración en la conservación de la cantidad de movimiento, motivo por el cual en este trabajo se les denomina ecuaciones de Saint-Venant con ecuación de cantidad de movimiento incompleta. Entre las formas simplificadas de las ecuaciones de Saint-Venant se reconocen el modelo de inercia cero u onda difusiva, el modelo de onda cinemática y el modelo hidrológico o de balance de volumen.

1.3.2. Modelo de inercia cero

El modelo de inercia cero puede obtenerse eliminando los términos inerciales de la ecuación de momentum (ecuación 1.2):

$$\frac{\partial h}{\partial x} = J_o - J \tag{1.4}$$

de tal forma que las ecuaciones (1.1) y (1.4) constituyen el modelo de inercia cero.

Fuentes *et al.* (2001) conceptualizan el modelo de inercia cero teniendo en cuenta en la ecuación de momentum que la derivada material es cero, en contraparte a la forma tradicional mostrada en la ecuación (1.3), expresan las ecuaciones de Saint-Venant en términos de la velocidad media $U(x, t) = q(x, t)/h(x, t)$ y consideran que no existe extracción de agua, de tal forma que la ecuación (1.2) puede escribirse como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

la ecuación (1.1) expresada para la velocidad media, en combinación con la ecuación (1.5) constituyen el modelo de inercia cero en este enfoque.

1.3.3. Modelo de onda cinemática

Se puede simplificar aún más la aproximación eliminando el término de la variación del tirante en el espacio en la ecuación (1.4), lo cual resulta en la ecuación del flujo uniforme:

$$J = J_0 \quad (1.6)$$

la combinación de las ecuaciones (1.1) y (1.6) constituye el modelo de onda cinemática.

1.3.4. Modelo hidrológico o de balance de volumen

Si se ignora la ecuación de cantidad de movimiento y se resuelve solamente la ecuación de continuidad (ecuación 1.1) se obtiene el modelo de balance de volumen o modelo hidrológico. La versión integral de la ecuación de continuidad puede escribirse para el caso de una melga como:

$$Q_0 t = \int_0^{x_r} h(x, t) dx + \int_0^{x_r} I(x, t) dx$$

donde x_r es la posición del frente de avance en el tiempo. Si se considera un valor medio del tirante y que el suelo es homogéneo se puede escribir:

$$Q_0 t = \bar{h} x_r(t) + \int_0^{x_r} I(\tau) dx \quad (1.7)$$

donde $\tau = t - t_x$ es el tiempo de contacto, siendo t_x el tiempo que tarda el frente de avance en llegar a una distancia x . Es común utilizar una función exponencial o potencia para expresar la función de avance $x_r(t)$ y existen diversas aproximaciones para estimar el tirante medio \bar{h} .

Los modelos de onda cinemática e hidrológico, tienen un rango de aplicabilidad limitado en comparación con el modelo hidrodinámico, constituido por la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant, y con el modelo de inercia cero. El modelo de onda cinemática se limita respecto a las condiciones de pendiente y no puede manejar condiciones de frontera aguas abajo que afecten el flujo aguas arriba (Cunge *et al.*, 1980). El uso del modelo de balance de volumen también está limitado por las condiciones de la pendiente topográfica de la melga.

1.4. Descripción del flujo del agua en el suelo

1.4.1. Ecuación de Richards

La descripción del proceso de infiltración del agua en el suelo puede efectuarse teniendo como base la ecuación de Richards (1931), que resulta de la combinación de la ecuación de continuidad con el campo de velocidades calculado conforme a la ley de Darcy y que en su forma tridimensional, sin tener en cuenta la extracción de agua por las plantas, se escribe como:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla \psi] - \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (1.8)$$

donde ψ es el potencial de presión del agua en el suelo expresado como la altura de una columna equivalente de agua [L] (positivo en la zona saturada y negativo en la zona no saturada del suelo); $C(\psi) = d\theta/d\psi$ es denominada la capacidad específica de humedad del suelo, $\theta = \theta(\psi)$ es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo o contenido volumétrico de agua [L^3L^{-3}] y es una función de ψ conocida como curva característica de humedad o curva de retención del agua; $K = K(\psi)$ es la conductividad hidráulica [LT^{-1}] que en un suelo parcialmente saturado es una función del potencial de presión; el potencial gravitacional es asimilado a la coordenada espacial z orientada positivamente hacia abajo [L], $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ es el operador gradiente; x , y y z son las otras dos coordenadas espaciales [L] y t el tiempo [T].

Childs y Collis-George (1950) introdujeron el concepto de difusividad capilar o difusividad hidráulica:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} \quad (1.9)$$

para obtener a partir de la ecuación (1.8) una ecuación tipo Fokker-Planck para la infiltración:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (1.10)$$

La ley de infiltración, es decir la forma en que evoluciona la lámina infiltrada en el tiempo, puede obtenerse mediante la integración de los perfiles de humedad generados con la solución de la ecuación de Richards.

El estudio de soluciones analíticas para describir el flujo del agua en el suelo se aborda considerando la ecuación Fokker-Planck de la infiltración unidimensional. Existen soluciones que proporcionan formas analíticas exactas para algunos casos específicos, como por ejemplo la solución para una columna de suelo sujeta a una condición de Neumann en su superficie, teniendo en cuenta una condición inicial de contenido volumétrico de agua constante en el perfil de suelo. Sin embargo, el tratamiento del riego por gravedad involucra básicamente una condición de frontera tipo Dirichlet, para la cual a la fecha no ha sido publicada la solución general para cualquier forma de las características hidrodinámicas del suelo y válida para todo tiempo, se han efectuado grandes esfuerzos para obtener soluciones aproximadas para una columna de suelo, entre las cuales pueden citarse las de Philip (1957a) y Parlange (1982) que en este caso son referenciadas debido a que se utilizan en algunos modelos del riego por melgas.

Existen otro tipo de enfoques que no tienen como base directa la ecuación Fokker-Planck, sino que hacen uso de hipótesis simplificadoras del flujo del agua en el suelo, como por ejemplo la consideración de un flujo en pistón (Green y Ampt, 1911) que no obstante puede representarse como una solución límite de la ecuación tipo Fokker-Planck de la infiltración unidimensional para una difusividad proporcionada por una función Delta de Dirac (Fuentes, 1992), es decir esta aproximación tiene una base físico-matemática. Una forma con fundamento significativamente menor es asimilada cuando se considera la existencia *a priori* de una función potencia entre la lámina infiltrada y el tiempo (Kostiakov, 1932; Lewis, 1938).

1.4.2. Ecuación de Philip

Philip (1957a) utiliza la ecuación Fokker-Planck de la infiltración unidimensional para intentar dar solución general al problema de la infiltración en una columna semi-infinita de suelo sujeta a una condición de contenido volumétrico de agua constante en la superficie, generalizando la solución de similaridad fundamentada en la transformación de Boltzman. La solución de Philip es una serie de Taylor en la raíz cuadrada del tiempo válida para los tiempos lo "suficientemente cortos" que en términos de la lámina infiltrada se expresa como (Fuentes, 1992):

$$I(t) = S\sqrt{t} + S_2 t + \dots \quad (1.11)$$

donde $S = S_1$ es denominada sorbilidad por Philip (1957b).

1.4.3. Ecuación de Parlange

La ecuación de Parlange (Haverkamp *et al.*, 1990; citado por Singh y Ballamundi, 1996) para el cálculo de la lámina infiltrada se escribe como:

$$I(t) = K_o t + \frac{(h - h_{\text{str}})(\theta_s - \theta_o)K_s}{V_1 - K_s} + \frac{S^2 + 2h_{\text{str}}K_s(\theta_s - \theta_o)}{2\delta(K_s - K_o)} \ln \left[1 + \frac{\delta(K_s - K_o)}{V_1 - K_s} \right] \quad (1.12)$$

donde θ_o es el contenido volumétrico de agua inicial [L^3L^{-3}], θ_s el contenido volumétrico de agua a saturación [L^3L^{-3}], K_o la conductividad hidráulica correspondiente al contenido volumétrico de agua inicial [LT^{-1}], K_s la conductividad hidráulica a saturación [LT^{-1}], $V_1 = \partial I / \partial t$ es el flujo de infiltración [LT^{-1}], S la sorbilidad [$LT^{-1/2}$], h_{str} el valor mínimo de presión en un ciclo de humedecimiento [L], en el cual existe una fase continua de no humedecimiento, δ es un parámetro de forma que indica la variación de la conductividad hidráulica (K) con el contenido volumétrico de agua (θ) y está dado por la relación:

$$\delta(\theta_s - \theta_o)(K_s - K_o) = \int_{\theta_o}^{\theta_s} (K_s - K) d\theta \quad (1.13)$$

La ecuación de Parlange es una solución cuasi-analítica de la ecuación Fokker-Planck de la infiltración unidimensional en un suelo homogéneo e isotrópico. En el caso del riego por gravedad todos los parámetros de la ecuación de Parlange pueden ser evaluados ajustando datos experimentales de almacenamiento superficial y de evolución del frente de avance (Schmitz *et al.* 1985) y además se ha demostrado que todos los parámetros son independientes del tiempo y del procedimiento de evaluación (Haverkamp *et al.*, 1990).

1.4.4. Ecuación de Green y Ampt

Green y Ampt (1911) toman como base la ley de Darcy con el objeto de deducir una ecuación simple para la infiltración vertical del agua en el suelo teniendo en cuenta las siguientes hipótesis: a) el perfil de humedad inicial en una columna de suelo es uniforme: $\theta = \theta_o$, b) la presión del agua en la superficie del suelo es hidrostática: $\psi = h \geq 0$, siendo h el tirante de agua, c) existe un frente de humedecimiento bien definido caracterizado por una presión negativa

$\psi = \psi_f < 0$; ψ_f es denominado presión en el frente de humedecimiento, d) la región entre la superficie del suelo y el frente de humedecimiento (z_f) está completamente saturada (flujo en pistón): $\theta = \theta_s$ y $K = K_s$. La combinación de estas hipótesis, de la ecuación de continuidad y de la ley de Darcy, permiten obtener la expresión siguiente para la lámina infiltrada (Fuentes, 1992):

$$I(t) = K_s t + \lambda \ln \left(1 + \frac{I}{\lambda} \right) \quad (1.14)$$

con $\lambda = (h + h_f)(\theta_s - \theta_o)$, donde $h_f = -\psi_f$ es la succión en el frente de humedecimiento.

1.4.5. Ecuación de Kostiaikov-Lewis

La ecuación de Kostiaikov (1932) describe la evolución de la lámina infiltrada mediante una función potencia de un solo término cuya variable independiente es el tiempo:

$$I(t) = k t^a \quad (1.15)$$

donde $I(t)$ es la lámina infiltrada en la columna de suelo, k y a son parámetros de ajuste. Esta ecuación tiene dos desventajas importantes: i) no puede ser ajustada para diferentes condiciones de campo que tienen una influencia marcada en el proceso de infiltración como el contenido volumétrico de agua y ii) para tiempos de aplicación del riego grandes la ecuación predice velocidades de infiltración que tienden a cero, lo cual no es necesariamente correcto. Para subsanar la última de las limitaciones se introduce un término lineal en el tiempo y se obtiene una forma modificada denominada la ecuación de Kostiaikov-Lewis:

$$I(t) = k t^a + f_o t \quad (1.16)$$

el término f_o representa la velocidad de infiltración en los tiempos largos que en teoría debe ser equivalente a la conductividad hidráulica a saturación del suelo

1.5. Soluciones analíticas en el riego por gravedad

El tratamiento analítico para el caso de la interacción entre el flujo del agua a superficie libre y el flujo subsuperficial ha tenido un desarrollo contenido. La búsqueda de soluciones analíticas se ha enfocado utilizando básicamente los modelos de onda cinemática y de balance de volumen o hidrológico, es aún menor la cantidad de trabajos que utilizan al menos la forma de inercia cero de las ecuaciones de Saint-Venant.

El desarrollo de soluciones analíticas para el caso del modelo hidrológico o de balance de volumen se ha enfocado teniendo en cuenta formas de ley de infiltración en potencia tipo Kostiakov (Wilke y Smerdon, 1965, Hart *et al.*, 1968), la ley de infiltración de Parlange (1971, 1972b) (Parlange, 1973) o la ley de infiltración proporcionada por una forma truncada de la solución de Philip (1957a) (Philip y Farrell, 1964).

La obtención de soluciones analíticas para el modelo de onda cinemática del flujo del agua sobre la superficie del suelo, ha sido abordada asumiendo leyes de infiltración constante (Sherman y Singh, 1982) o lineal (Weir, 1983).

Schmitz y Seus (1989) desarrollan una solución analítica para calcular la velocidad, o el gasto, así como la posición del frente de avance en todo punto del desarrollo de una melga, utilizando la forma de inercia cero de las ecuaciones de Saint-Venant para pendiente topográfica nula. La solución es utilizada tanto de manera independiente como formando parte de un modelo numérico en el cual permite calcular las variables hidráulicas para los primeros niveles de tiempo.

Fuentes *et al.* (2001) utilizan métodos de similitud para desarrollar una solución analítica para la forma de inercia cero de las ecuaciones de Saint-Venant cuando no existe extracción de agua.

1.6. Modelos numéricos para riego por melgas

Es posible distinguir diferentes modelos para el riego por melgas dependiendo de la aproximación que utilizan para describir tanto el flujo del agua a superficie libre como el flujo del agua en el suelo, además de tener en cuenta los métodos numéricos utilizados para su implementación y las fases del riego que son capaces de simular. A continuación se presentan los modelos que tienen mayor difusión, incluyendo algunos que se utilizan para el riego por surcos o por cuadros de inundación cuando así se considera conveniente.

1.6.1. Modelo hidrológico o de balance de volumen

1.6.1.1. Leyes de infiltración sin base fisico-matemática

En combinación con el modelo hidrológico para describir el flujo del agua a superficie libre se han utilizado diversas aproximaciones para modelar el flujo del agua en el suelo. Lewis y Milne (1938) utilizan la ecuación de Kostiakov-Lewis para el cálculo de la lámina infiltrada necesaria para resolver la forma integral de la ecuación de conservación de masa, la solución numérica para el flujo a superficie libre se obtiene utilizando una aproximación en diferencias finitas haciendo uso generalmente de un paso de tiempo constante.

1.6.1.2. Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadoras

Una mejora en la descripción del flujo del agua en el suelo es realizada por Rendón *et al.* (1997), quienes utilizan la ecuación de Green y Ampt (1911) para describir el flujo del agua en el suelo. El modelo desarrollado permite simular las cuatro fases del riego, tanto para melgas como para surcos y se constituye en una herramienta que tiene una difusión considerable entre los diseñadores de riego por gravedad de México.

1.6.1.3. Leyes de infiltración conforme a la ecuación de Richards

Pacheco (1995) utiliza la ecuación de Richards unidimensional para describir de manera detallada el flujo del agua en el suelo, el modelo permite simular solamente la fase de avance del riego por gravedad, tanto en melgas como en surcos. La ecuación de Richards para el potencial de presión es resuelta utilizando una aproximación en diferencias finitas centradas. El modelo ha sido utilizado para describir pruebas de riego efectuadas en una parcela experimental localizada en el estado de Tabasco, México.

1.6.2. Modelo de onda cinemática

1.6.2.1. Leyes de infiltración sin base físico-matemática

En combinación con el modelo de onda cinemática se utiliza generalmente la ecuación de Kostiakov-Lewis para describir el flujo del agua en el suelo: Walker y Humpherys (1983), Chen (1970) y Smith (1972).

El modelo de Walker y Hupherys (1983) es de los que mayor difusión han tenido y fue desarrollado para describir solamente tres fases del riego por surcos: avance, almacenamiento y recesión, debido a que en el modelo de onda cinemática no es posible incorporar la fase de consumo, asociada a la recesión vertical, asimismo, dado que en dicho modelo no es posible incorporar condiciones de frontera aguas abajo que alteren el flujo aguas arriba se hace necesario considerar un surco o una melga con extremo final abierto. Se tiene en cuenta tanto la aplicación continua del gasto en el inicio de la melga como una aplicación intermitente y se utiliza básicamente la aproximación numérica presentada por Strelkoff y Katopodes (1978) para el caso de las ecuaciones de Saint-Venant en forma de inercia cero, adaptada en este caso para la solución numérica de la ecuación de continuidad. El modelo es aplicado para reproducir datos de pruebas de riego reportadas en la literatura, siete de ellas corresponden a riego continuo y cuatro a riego intermitente y fueron efectuadas en Colorado, Utah y Idaho en los Estados Unidos. Los autores concluyen que el modelo de onda cinemática puede predecir satisfactoriamente las fases de avance, almacenamiento y recesión del riego por surcos y que para fines prácticos, a menos

que se tengan pendientes topográficas menores que $J_0 = 0.001$, no es necesario utilizar modelos más complicados que la onda cinemática.

1.6.3. Modelos de inercia cero

1.6.3.1. Leyes de infiltración sin base físico-matemática

El modelo de Strelkoff y Katopodes (1977) ha permanecido como un clásico en la modelación del riego por melgas, los autores desarrollan una solución numérica para la forma de inercia cero de las ecuaciones de Saint-Venant que tiene como base un esquema lagrangiano en diferencias finitas, mientras que para describir el flujo del agua en el suelo se adopta la ecuación de Kostiakov-Lewis. El modelo desarrollado permite describir las fases de avance, consumo y recesión. Los autores hacen énfasis en que el modelo de onda cinemática y el modelo hidrológico o de balance de volumen presentan serias deficiencias al describir la evolución del frente de avance para pendientes topográficas pequeñas según se observó en pruebas de riego efectuadas en Idaho, Estados Unidos. Los resultados proporcionados por el modelo de inercia cero son comparados con aquellos obtenidos al utilizar las ecuaciones de Saint-Venant en su forma completa y evaluados en su capacidad de describir pruebas de riego haciendo uso de datos experimentales obtenidos en Arizona, Estados Unidos. Se presenta un análisis de los costos de computación asociados con el uso del modelo de inercia cero y de la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta.

Es importante señalar que la mayoría de los modelos tanto de inercia cero como de onda cinemática no han sido adaptados para tener en cuenta una condición de melga cerrada al final del dominio de solución, esto reviste particular importancia debido a que en general las zonas bajo riego presentan problemas de disponibilidad de agua, situación que hace necesario evitar su desperdicio impidiendo el flujo fuera del dominio de las melgas.

1.6.4. Modelos con ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta

1.6.4.1. Leyes de infiltración sin base físico-matemática

En esta categoría se encuentra el trabajo de Sakkas y Strelkoff (1974) quienes utilizan la ecuación de Kostiakov-Lewis para describir el flujo del agua en el suelo y las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta para describir el flujo del agua a superficie libre, el modelo presentado permite describir solamente la fase de avance del riego por melgas. Se utiliza una aproximación basada en el método de las características para obtener una solución numérica del problema, las ecuaciones características son resueltas utilizando un algoritmo predictor-corrector haciendo uso de un método de Euler y de la regla trapezoidal respectivamente. Se muestra la forma en que el modelo describe los datos obtenidos en una

prueba de riego efectuada en Colorado, Estados Unidos, se observa concordancia entre los resultados obtenidos utilizando el modelo desarrollado por los autores y otro reportado en la literatura, sin embargo ambas series de valores no coinciden con los datos observados en campo, situación que se atribuye a la variabilidad de la infiltración a lo largo de la melga y a los cambios de rugosidad y pendiente que pueden existir en campo.

El modelo desarrollado por Katopodes y Strelkoff (1977) permite describir las fases de avance, consumo y recesión del riego por melgas haciendo uso de la ecuación de Kostiakov-Lewis para describir el flujo del agua en el suelo y las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta para describir el flujo del agua a superficie libre. Las ecuaciones de Saint-Venant son resueltas utilizando el método de las características, se hace uso de un método en diferencias finitas con paso de tiempo prescrito para resolver las ecuaciones características teniendo en cuenta un algoritmo de malla móvil. Los resultados proporcionados por el modelo son comparados tanto con resultados obtenidos mediante otros modelos reportados en la literatura como con datos de pruebas de riego en melgas con extremo final abierto efectuadas en Arizona, Estados Unidos. El paso de tiempo empleado varía entre cinco y 15 segundos y se utilizan diez nudos en la discretización del espacio para cada nivel de tiempo.

Wallender y Rayej (1990) utilizan la ecuación de Kostiakov-Lewis para describir el flujo del agua en el suelo y las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo. Las aplicaciones se realizan para modelar el riego por surcos utilizando una aproximación en diferencias finitas con una malla fija en el espacio, se hace uso de un algoritmo de "disparo" para calcular el paso de tiempo necesario para alcanzar las posiciones sucesivas en la malla espacial. Se describe solamente la fase de avance del riego por surcos. Los resultados que se obtienen con el modelo de paso de espacio constante y paso de tiempo variable son comparados con aquellos generados por un modelo hidrodinámico reportado en la literatura de paso de tiempo constante y paso de espacio variable, así como con datos reportados de pruebas de riego efectuadas en Arizona, Estados Unidos, el modelo presentado sobrestima ligeramente tanto los datos de campo como los resultados generados por el modelo de paso de tiempo fijo. Se utiliza un paso de espacio de diez metros y se obtienen pasos de tiempo del orden de 2 minutos.

Bautista y Wallender (1992) presentan un modelo que es básicamente una extensión del expuesto anteriormente aplicando el método del "disparo" a las fases tanto de avance como de almacenamiento y recesión del riego por surcos. El modelo tiene como base el uso de las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo y una forma modificada de la ecuación de Kostiakov-Lewis para describir el flujo del agua en el suelo, se indica que el modelo puede considerar funciones de infiltración estocásticas para representar la variabilidad de la infiltración a lo largo del surco, pero que esta situación puede generar problemas de convergencia en el algoritmo de "disparo". Las

ecuaciones de movimiento son resueltas utilizando un esquema numérico en diferencias finitas con paso de espacio constante.

En los dos trabajos anteriores puede apreciarse el uso de pasos de tiempo que en el contexto de los modelos hidrodinámicos pueden considerarse muy grandes ($\delta t > 2 \text{ min}$ en el primero y $\delta t > 5 \text{ min}$ en el segundo).

García (1994) resuelve las ecuaciones de flujo a superficie libre utilizando una aproximación en diferencias finitas desarrolladas para una malla adaptiva, es decir, una malla que se obtiene haciendo uso de una transformación de coordenadas teniendo en cuenta el dominio de flujo como una región de longitud unitaria. Para la discretización de las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta se utiliza el método de interpolación integral. La ecuación de Kostiaikov-Lewis es adoptada para describir el flujo del agua en el suelo y se hace uso de una correlación con la ecuación de Green y Ampt para calcular los parámetros para diferentes contenidos volumétricos de agua iniciales. El modelo simula las cuatro fases del riego tanto continuo como intermitente.

1.6.4.2. Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadoras

En estos trabajos se hace uso de leyes de infiltración que tienen base físico-matemática, es decir, que son soluciones analíticas aproximadas de la ecuación Fokker-Planck de la infiltración unidimensional. Singh y Ballamundi (1996) utilizan la ecuación de Parlange (Haverkamp *et al.* 1990) para describir el flujo del agua en el suelo. Para resolver las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta se utiliza un esquema en diferencias finitas tipo MacCormak de naturaleza explícita, efectuándose iteraciones solamente para resolver la ecuación de Parlange discretizada en diferencias finitas, habiéndose resuelto las formas discretas mediante un método Newton-Raphson. Se propone el uso de una malla refinada en las cercanías del frente de avance para aumentar la precisión de la descripción del fenómeno. El modelo es validado utilizando datos de pruebas de riego reportadas en la literatura efectuadas en Arizona, E.U. Es necesario indicar que este modelo asume la existencia de un pequeño tirante sobre la superficie del suelo con al finalidad de hacer posible la aplicación del esquema MacCormak, lo cual desde el punto de vista físico-matemático no es correcto. Se presenta una comparación entre dos curvas de avance obtenidas teniendo en cuenta dos valores diferentes del tirante pequeño asignado como condición inicial sobre la melga y se concluye, desde el punto de vista de los autores, que el efecto del cambio en dicho tirante es despreciable. Se estudia la influencia de tener en cuenta el valor del tirante de agua en el cálculo de la infiltración y en consecuencia en los resultados de las simulaciones del riego y los autores concluyen que es importante tener en cuenta el tirante en el cálculo de la infiltración solamente cuando se simulan melgas largas en suelos con sorbilidad baja.

1.6.5. Modelos con ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum completa

1.6.5.1. Leyes de infiltración sin base físico-matemática

Akanbi y Katopodes (1998) modelan el riego por cuadros de inundación utilizando una aproximación tipo Petrov-Galerkin de elementos finitos para resolver la forma bidimensional de las ecuaciones de Saint-Venant conocidas como ecuaciones de aguas someras, haciendo uso de una malla deformable que se obtiene mediante una transformación de coordenadas. La ecuación de Kostiakov es utilizada para describir el flujo del agua en el suelo. La verificación de la aplicabilidad del modelo se realiza comparando los resultados generados mediante su aplicación con datos experimentales obtenidos en una prueba de riego por melgas reportada en la literatura, esto es, se valida utilizando un experimento básicamente unidimensional. Un paso de tiempo máximo de un segundo es utilizado al inicio de las simulaciones.

Playán, Walker y Merkle (1994), realizan una modelación del riego por cuadros de inundación, hacen uso de un esquema explícito tipo "leapfrog" en diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum completa en su forma bidimensional y utilizan la ecuación de Kostiakov-Lewis para representar el flujo del agua en el suelo. Se utiliza una condición inicial diferente de cero debido, según los autores, a la necesidad de evitar singularidades en el proceso de simulación, sin embargo esta situación no guarda concordancia con el planteamiento físico-matemático del problema. Se verifica la aplicabilidad del modelo desarrollado comparando los resultados que se obtienen de su aplicación con aquellos proporcionados por un modelo unidimensional para el riego por melgas denominado SIRMOD y con datos de campo obtenidos en una prueba de riego efectuada en Zaragoza, España, la comparación de resultados para la validación unidimensional permite observar que el modelo genera curvas de avance con cambios de monotonía en el tiempo, situación que no debería presentarse cuando se resuelven ecuaciones en medios homogéneos con variables que se asumen continuas en el tiempo y el espacio. El modelo permite utilizar diferentes valores del coeficiente y el exponente de la ecuación de Kostiakov en diversos puntos del dominio de solución para tener en cuenta el efecto de la variabilidad de las propiedades del suelo en el espacio, la aplicación se realiza para un caso hipotético en el cual los suelos son caracterizados utilizando las familias de infiltración del Servicio de Conservación de Suelos de los Estados Unidos (USCS).

1.6.5.2. Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadoras

Catalán *et al.* (1988) desarrollan un modelo para describir la fase de avance del riego por melgas haciendo uso de la ecuación de Parlange (1985) para modelar el flujo del agua en el suelo y las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum completa para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo, sin embargo el procedimiento no tiene en cuenta el efecto en la lámina infiltrada debido al cambio del tirante de agua sobre la superficie del suelo. Las

ecuaciones de Saint-Venant son resueltas utilizando una aproximación lagrangiana en diferencias finitas centradas en espacio y tiempo, resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas resultante mediante un procedimiento Newton-Raphson recomendado por Walker y Skogerboe (1983) y Strelkoff (1983). El modelo se utiliza para reproducir datos experimentales obtenidos en dos pruebas de riego efectuadas en el Estado de México, México.

1.6.5.3. Leyes de infiltración conforme a la ecuación de Richards

Saucedo *et al.* (2000 2001, 2002, 2003) presentan diversos trabajos en los cuales se modelas las cuatro fases del riego por melgas mediante el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum completa con la ecuación de Richards en sus formas unidimensional y bidimensional. La aproximación se realiza utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Saint-Venant, mientras que la ecuación de Richards es integrada en el espacio utilizando elementos finitos y en el tiempo mediante una aproximación en diferencias finitas implícitas. Con la finalidad de efectuar calibraciones del modelo y verificar su aplicabilidad se utilizan datos reportados en la literatura relacionados con pruebas de riego efectuadas en Tabasco y el Estado de México, México. Se tienen en cuenta diversas condiciones de flujo en el riego por melgas, tanto para el caso de una melga en un perfil de suelo semi-infinito con distribución del contenido de agua inicial constante, como para el caso en que se tiene la presencia de un manto freático somero. El modelo ha sido utilizado para corroborar un resultado presentado en la literatura (Rendón *et al.*, 1997) que establece la proporcionalidad entre la lámina de riego aplicada y el gasto con el que debe ser efectuado el riego para obtener la mayor eficiencia de uniformidad, manteniendo valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego.

Existe un modelo más elaborado desde el punto de vista numérico (Bradford y Katopodes, 1998) que hace uso de las ecuaciones de Navier-Stokes para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo y de la ecuación de Richards bidimensional para describir el flujo del agua en el suelo. El modelo tiene problemas significativos de balance de masa según lo reportan los autores, no ha sido contrastado con datos experimentales y hasta la fecha no se han realizado aplicaciones para describir el riego a la escala de una parcela.

CAPÍTULO II

DESARROLLO DE UN ESQUEMA NUMÉRICO PARA EL ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE SAINT-VENANT Y RICHARDS EN EL RIEGO POR MELGAS

Resumen

En este capítulo se presenta un esquema numérico propuesto para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por melgas. La solución de las ecuaciones de Saint-Venant se aproxima utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas, mientras que para la ecuación de Richards se utilizan elementos finitos para la integración en el espacio y diferencias finitas implícitas para la integración en el tiempo. A partir del análisis de diferentes formas de aproximación de las derivadas espaciales y temporales, así como de la forma de cálculo de los coeficientes de la ecuación de cantidad de movimiento se deduce que, para obtener una solución numérica monótona es conveniente que se efectúe la discretización de la ecuación de momentum teniendo en cuenta tres aspectos: i) las derivadas en el espacio y la pendiente de fricción en una celda de cálculo se aproximan adelante en el tiempo, ii) las derivadas en el tiempo se aproximan utilizando una forma ponderada en tiempo y espacio, iii) los coeficientes son calculados en el tiempo anterior. La solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant para las fases de avance, almacenamiento y consumo se aproxima utilizando un esquema de paso de tiempo constante, mientras que para la fase de recesión se hace uso de un esquema de paso de espacio fijo.

El modelo permite generar resultados que son aplicables a las escalas de espacio y tiempo propias de pruebas de riego efectuadas tanto en campo como en laboratorio.

2.1. Flujo del agua en el suelo: ecuación de Richards

El riego es un fenómeno que se efectúa en tres dimensiones, lo cual hace necesario que el flujo del agua en el suelo sea descrito utilizando la ecuación (1.7) en su forma tridimensional, sin embargo, debido al esfuerzo de cómputo que esto significa, es conveniente aceptar la hipótesis de que el fenómeno se efectúa en planos paralelos al desarrollo de la melga, entonces es posible utilizar la forma bidimensional de la ecuación de Richards:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (2.1)$$

que ha de resolverse sobre el dominio de solución que se muestra en la ilustración 2.1.

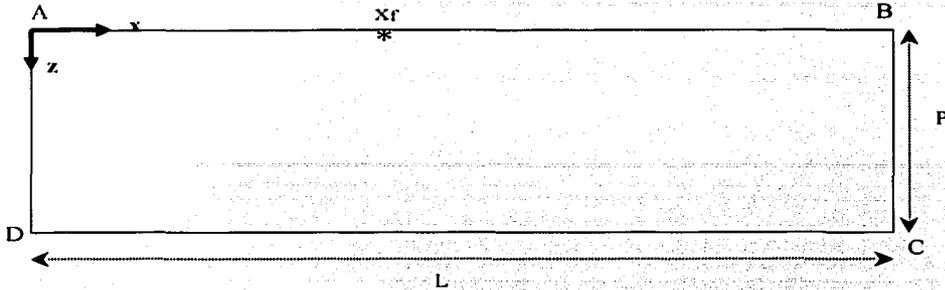


Ilustración 2.1. Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional.

2.1.1. Condiciones límites

Como condición inicial para la solución de la ecuación de Richards bidimensional se debe especificar la distribución de las presiones en el espacio:

$$\psi = \psi_0(x, z) \quad (2.2)$$

Las condiciones de frontera correspondientes pueden considerarse como sigue: $\overline{Ax_f}$ frontera tipo Dirichlet con potencial prescrito utilizando las ecuaciones de Saint-Venant, $\overline{x_f B}$, \overline{BC} y \overline{DA} fronteras tipo Neumann con flujo nulo, \overline{CD} frontera bajo gradiente unitario:

$$\psi = h, \quad x \in \overline{Ax_f}, \quad z = 0, \quad t > 0 \quad (2.3)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = 0, \quad x \in \overline{x_f B}, \quad z = 0, \quad t > 0 \quad (2.4)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = L, \quad z \in \overline{BC}, \quad t > 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = -1, \quad x \in \overline{CD}, \quad z = P, \quad t > 0 \quad (2.6)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad z \in \overline{DA}, \quad t > 0 \quad (2.7)$$

2.1.2. Características hidrodinámicas

La solución de la ecuación de Richards hace indispensable representar las propiedades hidrodinámicas del suelo expresando el potencial de presión (ψ) como una función del contenido volumétrico de agua (θ) y la conductividad hidráulica K como una función de θ .

Para la descripción del flujo del agua durante una prueba de riego es necesaria la caracterización hidrodinámica del suelo. Como es señalado por Fuentes *et al.* (1992), la combinación de las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange es conveniente en estudios teóricos, como la construcción de soluciones analíticas exactas, y en estudios experimentales puede ser más conveniente la utilización de la combinación de la curva de retención propuesta por van Genuchten (1980), considerando la restricción de Burdine (1953), con la curva de conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964), debido a que satisfacen las propiedades integrales de la infiltración y a la facilidad para la identificación de sus parámetros.

La curva de retención propuesta por van Genuchten (1980) se escribe como:

$$\frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m} \quad (2.8)$$

donde ψ_d es un valor característico de la presión del agua en el suelo, m y n son dos parámetros de forma empíricos relacionados por la restricción de Burdine (1953): $m = 1 - 2/n$, con $0 < m < 1$ y $n > 2$, θ_s es el contenido volumétrico de agua a saturación efectiva del suelo y θ_r es el contenido volumétrico de agua residual.

La conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964) se representa como:

$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (2.9)$$

donde η es un parámetro de forma empírico y positivo.

2.1.3. Cálculo de la lámina infiltrada

La lámina infiltrada, necesaria para resolver numéricamente las ecuaciones de Saint-Venant se calcula como:

$$I(x_i, t) = \int_0^F [\theta(x_i, z, t) - \theta_0(x_i, z, 0)] dz \quad (2.10)$$

donde F es la posición del frente de humedecimiento y θ_0 es el contenido volumétrico de agua inicial en la columna de suelo localizada en una posición x_i , dichas posiciones corresponden con los puntos donde se resuelven las formas discretas de las ecuaciones de Saint-Venant.

2.1.4. Solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional

La ecuación de Richards bidimensional es discretizada en el espacio utilizando elementos finitos y en el tiempo mediante un esquema implícito en diferencias finitas. El procedimiento se encuentra bien documentado en la literatura y pueden consultarse los detalles en Neumann (1973) y Huyakorn y Pinder (1983). Se asume la solución de elemento finito expresada como una combinación lineal de funciones de base $\varphi_j(x, z)$ definidas en relación con la función delta de Kronecker y aplicadas a cada nudo en particular:

$$\psi_n(x, z, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \varphi_j(x, z) \quad (2.11)$$

donde $a_j(t)$ son coeficientes a ser determinados y n el número de nudos donde se obtiene la solución de elemento finito. Se sustituye en la primera forma débil de la ecuación de Richards, que se obtiene al multiplicar dicha ecuación por una función de peso y aplicar el teorema de Green, teniendo en cuenta lo siguiente: i) Se consideran las funciones de peso iguales a las funciones de base (φ) correspondientes a los nudos interiores. ii) Se asume una variación lineal de las características hidrodinámicas sobre cada elemento expresándola mediante las funciones de forma, *i.e.*: $\hat{C} = \varphi_g C_g$ y $\hat{K} = \varphi_g K_g$, iii) Se utiliza un sistema de masa concentrado con la finalidad de obtener una matriz diagonal y para mejorar la estabilidad del esquema (Neumann, 1973; Mori, 1980). Se aproxima la derivada temporal mediante un esquema implícito en diferencias finitas y se obtiene:

$$\left[\frac{\mathbf{M}^{k+1}}{\Delta t} + \mathbf{K}^{k+1} \right] \mathbf{a}^{k+1} = \left[\frac{\mathbf{M}^{k+1}}{\Delta t} \right] \mathbf{a}^k + \mathbf{B}^{k+1} + \mathbf{Q}^{k+1} \quad (2.12)$$

donde las matrices se calculan como se indica a continuación cuando se utilizan funciones de base lineales:

$$M_{kj} = \sum_{j=1}^n \left[C_j \int_R \varphi_j \varphi_k dR \right] = \sum_e C_j \frac{\Delta}{3} \quad (2.13)$$

$$K_{kj} = \sum_{j=1}^n \left[K_e \int_R \varphi_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right) dR \right] = \sum_e \frac{K}{4\Delta} (m_j m_k + p_j p_k) \quad (2.14)$$

$$B_k = K_e \int_R \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} dR = \sum_e \frac{K}{2} p_k \quad (2.15)$$

$$Q_k = \int_{\Gamma} q \varphi_k d\Gamma = \sum_e \frac{q L_j}{2} \quad (2.16)$$

en las ecuaciones anteriores $\bar{\varphi}$ representa las funciones denominadas de masa concentrada, definidas como funciones unitarias en la región baricéntrica correspondiente a un nudo específico, y cero en el resto del dominio. R es el dominio de solución y Γ la porción de su frontera sujeta a una condición de tipo Neumann, Δ es el área del elemento, K es la conductividad en el elemento calculada como el promedio aritmético de las conductividades obtenidas en cada una de sus esquinas (como consecuencia de la forma adoptada para las funciones de base), C_j es la capacidad específica estimada en el nudo j , L_j es la longitud de frontera correspondiente a cada nudo bajo condición de Neumann, m y p son factores geométricos definidos según las funciones de base: $m_i = z_j - z_k$ y $p_i = x_j - x_k$ donde los subíndices i, j , y k corresponden a las esquinas del elemento triangular y corren sobre sus tres posibles permutaciones secuenciadas.

La solución numérica para la forma unidimensional de la ecuación de Richards puede consultarse por ejemplo en Rathfelder y Abriola (1994), en este caso ha sido utilizado un esquema de elementos finitos en el espacio y de diferencias finitas implícitas en el tiempo.

2.1.5. Validación del esquema numérico para la ecuación de Richards

La dificultad de establecer un criterio general de convergencia y estabilidad para la ecuación de Richards, hace necesario validar el esquema desarrollado comparando los resultados obtenidos mediante su aplicación y aquellos proporcionados por una solución analítica.

En el riego por gravedad la condición de frontera en la superficie de la columna de suelo es de tipo Dirichlet con valor del potencial de presión variable conforme evoluciona el tirante de agua en el tiempo, sin embargo hasta la fecha no se dispone de una solución analítica exacta para

esta condición de frontera. La validación puede efectuarse haciendo uso de una solución desarrollada para una condición de frontera tipo Neumann en la superficie de la columna.

Existen soluciones exactas para una columna semi-infinita de suelo sujeta a una condición de flujo constante en la superficie de la misma. Las soluciones exactas se han construido para las características hidrodinámicas propuestas por Fujita (1952) y Parlange *et al.* (1982).

La forma para la difusividad hidráulica propuesta por Fujita (1952) es:

$$D(\Theta) = \left(\frac{K_s \lambda_c}{\theta_s - \theta_r} \right) \left[\frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha\Theta)^2} \right] \quad (2.17)$$

donde Θ representa el grado de saturación:

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.18)$$

θ_r es el contenido volumétrico de agua residual, θ_s es el contenido volumétrico de agua a saturación, K_s la conductividad hidráulica a saturación, λ_c es la escala de Bouwer (1964), y α es un parámetro de forma ($0 < \alpha < 1$).

La relación entre la difusividad y conductividad hidráulicas propuesta por Parlange *et al.* (1982) permite deducir (Fuentes *et al.*, 1992):

$$K(\Theta) = K_s \frac{\Theta [1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta]}{1 - \alpha\Theta} \quad (2.19)$$

donde β es un parámetro adimensional ($0 < \beta < 1$). La curva característica de humedad o curva de retención resulta de la definición $D(\theta) = K(\theta)d\psi/d\theta$, es decir:

$$\psi = \psi_c \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[\frac{1 - \alpha\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[\frac{1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] \right\} \quad (2.20)$$

donde $\psi_c = -\lambda_c$.

Para las características de Fujita y Parlange, con el caso particular de α variable y $\beta = 1$, se han desarrollado soluciones analíticas exactas en una columna semi-infinita de suelo sujeta a una condición de flujo constante en la superficie del suelo y a un contenido de agua inicial

constante. En flujo bifásico la solución es presentada por Rogers *et al.* (1983), y en flujo monofásico por Sanders *et al.* (1988). La solución del último trabajo ha sido adaptada por Warrick y Parkin (1995) para el caso del drenaje en una columna semi-infinita de suelo y para el flujo del agua en una columna finita por Hills y Warrick (1993). La solución para el caso general de α y β variables es presentada por Fuentes (1992):

$$\Theta(\zeta, t_*) = \frac{\mu(\zeta, t_*)}{1 - \alpha + \alpha \mu(\zeta, t_*)} \quad (2.21)$$

$$\mu(\zeta, t_*) = \frac{\alpha Q - (1 - \beta)}{2\beta} - \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{\beta [u_r(\zeta, t_*) + u_c(\zeta, t_*)]} \left[\frac{\partial u_r(\zeta, t_*)}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_c(\zeta, t_*)}{\partial \zeta} \right] \quad (2.22)$$

$$z_*(\zeta, t_*) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}} \left[\left(1 - \alpha + \alpha \frac{\alpha Q - (1 - \beta)}{2\beta} \right) \zeta \right] + \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[\frac{\exp(\lambda^2 t_*)}{u_r(\zeta, t_*) + u_c(\zeta, t_*)} \right] \quad (2.23)$$

siendo:

$$u_r = \frac{1}{2} \exp(-\lambda \zeta + \lambda^2 t_*) \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{t_*}} - \lambda \sqrt{t_*} \right) + \frac{1}{2} \exp(\lambda \zeta + \lambda^2 t_*) \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{t_*}} + \lambda \sqrt{t_*} \right) \quad (2.24)$$

$$u_c = \frac{1}{2\sqrt{\pi t_*}} \int_0^\infty \exp[A(\zeta)] \left[\exp \left(-\frac{(\zeta - \zeta')^2}{4t_*} \right) - \exp \left(-\frac{(\zeta + \zeta')^2}{4t_*} \right) \right] d\zeta' \quad (2.25)$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{1 - \alpha}} \sqrt{(1 - \beta)^2 + 2[2\beta(1 - \alpha) - \alpha(1 - \beta)]Q + (\alpha Q)^2} \quad (2.26)$$

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \alpha}} \left[\alpha Q \zeta - \int_0^\zeta (1 - \beta + 2\beta \mu_1(\zeta')) d\zeta' \right] \quad (2.27)$$

en donde las variables adimensionales están definidas por:

$$z_* = \frac{z}{\lambda_c} \quad (2.28)$$

$$t_* = \frac{K_s}{(\theta_s - \theta_r) \lambda_c} t \quad (2.29)$$

El cálculo de la función $A(\zeta)$ requiere del conocimiento de la condición inicial. Por simplicidad se escogerá un contenido de agua constante en todo el perfil (θ_i). El valor correspondiente μ_i se calcula utilizando la ecuación (2.21). La función resultante $A(\zeta) = [\alpha Q - (1 - \beta + 2\beta \mu_i)] \zeta / 2\sqrt{1 - \alpha}$, permite obtener de la ecuación (2.25) la solución para u_c de manera cerrada.

La solución analítica para el perfil de humedad $\theta(z, t)$ es paramétrica, es decir de la forma $\theta(\zeta, t) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \Theta[\zeta, K_s t / \lambda_c (\theta_s - \theta_r)]$ y $z = \lambda_c z \cdot [\zeta, K_s t / \lambda_c (\theta_s - \theta_r)]$, con $\zeta \geq 0$ como parámetro.

La semejanza entre los perfiles de humedad generados con el esquema numérico y los proporcionados por la solución exacta está influenciada básicamente por la discretización del dominio en espacio y tiempo. Debido al esfuerzo de cómputo que se requiere para realizar verificaciones del comportamiento de la solución de elemento finito para la ecuación de Richards bidimensional, se ha optado por mantener fija la discretización del espacio y modificar la discretización en el tiempo. El paso de tiempo inicial escogido es $\Delta t = 0.050$ s, el cual se incrementa gradualmente conforme al número de iteraciones que es necesario realizar dentro de cada paso de tiempo hasta alcanzar un paso de tiempo máximo fijado (Δt_{\max}). Se han adoptado las siguientes reglas: para una tolerancia dada, si el esquema converge en un número menor o igual a P iteraciones, el paso de tiempo se incrementa en, por ejemplo, 5%; si el número de iteraciones necesario para alcanzar la convergencia es mayor que W, donde $W > P$, se reduce el paso de tiempo en, por ejemplo, 25%.

Los pasos de espacio mínimos escogidos son $\Delta x_{\min} = 0.04$ cm, y $\Delta z_{\min} = 0.04$ cm, y los máximos son $\Delta x_{\max} = 10.0$ cm y $\Delta z_{\max} = 10.0$ cm, los valores mínimos de los pasos de espacio se localizan en la zona aledaña a la superficie del suelo y al inicio de la melga. Se ha utilizado el método del gradiente conjugado precondicionado (Noor y Peters, 1987) con almacenamiento libre de ceros para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas que resulta de la aplicación del método del elemento finito.

La validación del esquema numérico ha sido efectuada para las formas discretas de la ecuación de Richards tanto bidimensional como unidimensional, el último caso es necesario para capítulos posteriores de este trabajo. La validación del modelo es realizada para dos suelos contrastantes, una arcilla clara de Yolo, USA y una arena del río Isère, Francia, cuyos valores de los parámetros de Fujita y Parlange son reportados por Fuentes *et al.* (1992) y se muestran en el cuadro 2.1.

Cuadro 2.1. Parámetros de las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange para dos suelos contrastantes.

Suelo	θ_r [cm ³ / cm ³]	θ_s [cm ³ / cm ³]	λ_c [cm]	K_s [cm / h]	α	β
Arcilla clara de Yolo, USA	0.2285	0.4950	27.05	0.0443	0.8912	1.0
Arena del Isère, Francia	0.0438	0.3120	9.20	15.3700	0.8820	1.0

Para el caso de la validación del esquema numérico para la ecuación de Richards bidimensional, se seleccionó una columna cercana a la frontera de la malla bidimensional para efectuar la comparación entre los perfiles de humedad generados por el esquema numérico con los proporcionados por la solución analítica. En el cuadro 2.2 se presentan los valores del contenido de agua inicial y del flujo de agua en la superficie del suelo seleccionados para realizar la comparación entre los perfiles de humedad calculados con la solución numérica y la solución analítica en los dos suelos presentados en el cuadro 2.1. Para los dos pasos de tiempo máximos escogidos, $\Delta t_{\max} = 30$ s y 180 s se muestra la comparación gráfica entre los perfiles de humedad en la ilustración 2.2 para la arcilla, y en la ilustración 2.3 para la arena.

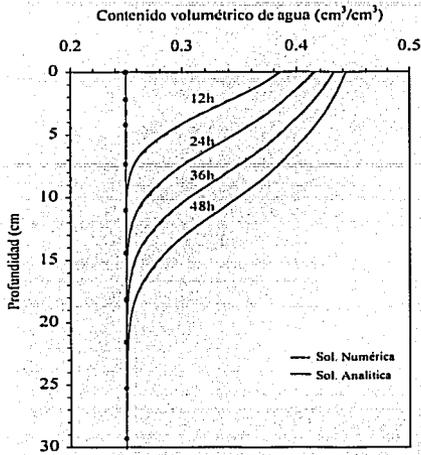
Los errores relativos máximos entre las dos soluciones para los dos pasos de tiempo escogidos son calculados con la expresión:

$$E_{\max} = \max \left| \frac{\theta_{\text{num}} - \theta_{\text{exacta}}}{\theta_{\text{exacta}}} \right| \times 100 \quad (2.30)$$

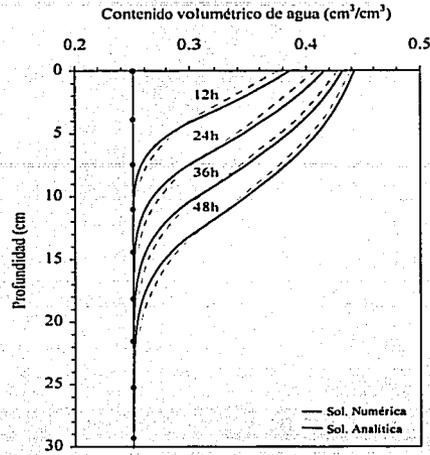
Cuadro 2.2. Error relativo máximo obtenido al comparar las soluciones analítica y de elemento finito para dos suelos contrastantes.

Suelo	θ_o [cm ³ / cm ³]	q_o [cm / h]	$\Delta t_{\max} = 30$ s	$\Delta t_{\max} = 180$ s
			E_{\max} (%)	E_{\max} (%)
Arcilla clara de Yolo, USA	0.2500	0.040	0.210	0.211
Arena del Isère, Francia	0.1000	4.000	0.172	0.315

Los errores presentados en el cuadro 2.2, para los dos pasos de tiempo mencionados, muestran que el error en la arcilla no es significativo mientras que el error en la arena es de aproximadamente el doble. Si se desea aceptar un error menor de 0.25% en ambos suelos se puede escoger como paso de tiempo máximo: $\Delta t_{\max} = 30$ s.

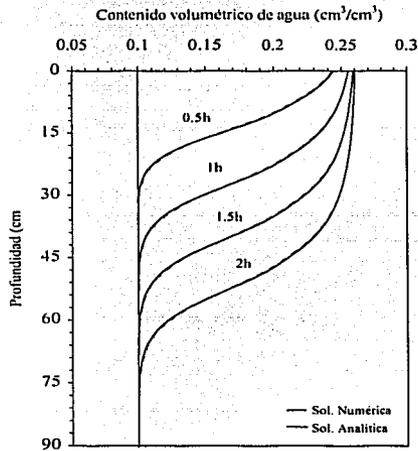


a)

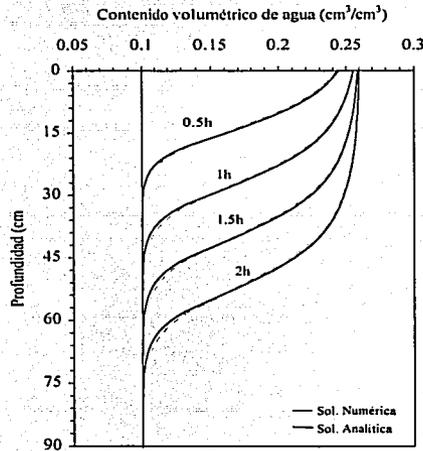


b)

Ilustración 2.2. Comparación de la solución analítica y la solución numérica en la arcilla clara de Yolo: a) paso de tiempo máximo de 30 s, b) paso de tiempo máximo de 180 s.



a)



b)

Ilustración 2.3. Comparación de la solución analítica y la solución numérica en la arena del río Yère: a) paso de tiempo máximo de 30 s, b) paso de tiempo máximo de 180 s.

La validación de la solución numérica de la ecuación de Richards unidimensional ha sido efectuada siguiendo el procedimiento antes descrito, el uso de pasos de espacio en la dirección z y paso de tiempo iguales a los utilizados para el caso bidimensional, permite obtener una cota del error máximo relativo de 0.17% para la arcilla clara de Yolo y de 0.09% para la arena del Isère. Entonces, si se desea aceptar un error menor de 0.20% en ambos suelos contrastantes se puede escoger un paso de tiempo máximo: $\Delta t_{\max} = 30$ s. Para la simulación del riego por melgas se ha empleado una discretización mas fina que la utilizada en el proceso de validación con la finalidad de mantener los errores en niveles todavía más bajos. Los valores adoptados para los pasos de espacio mínimo y máximo son: $\Delta z_{\min} = 0.02$ cm y $\Delta z_{\max} = 1.0$ cm, $\Delta x_{\min} = 0.02$ cm y $\Delta x_{\max} = 1.0$ cm para la ecuación de Richards bidimensional y $\Delta z_{\min} = 0.02$ cm, $\Delta z_{\max} = 1.0$ cm para la ecuación de Richards unidimensional. Para el paso de tiempo se ha utilizado un valor constante de $\delta t = 0.5$ s.

2.2. Flujo del agua sobre la superficie del suelo: ecuaciones de Saint-Venant

2.2.1. Esquema numérico para la fase de avance

2.2.1.1. Introducción

La descripción del flujo del agua en el riego por melgas requiere tener en cuenta la ecuación de Richards para describir el flujo del agua en el suelo y las ecuaciones de Saint-Venant para el flujo del agua sobre la superficie del suelo, de tal forma que su acoplamiento permita conocer las formas de los perfiles de flujo superficial y la distribución de los potenciales de presión en el suelo según avanza el riego. El tirante proporcionado por la solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant se utiliza para definir una condición de frontera tipo Dirichlet para la ecuación de Richards, cuya solución numérica permite el cálculo de la lámina infiltrada necesaria para la solución de las ecuaciones de Saint-Venant, teniéndose por lo tanto un procedimiento iterativo.

El esquema numérico para resolver las ecuaciones de Saint-Venant en su forma completa (ecuaciones 1.1 y 1.2) tiene como base el esquema presentado por Strelkoff y Katopodes (1977) para la forma de inercia cero de las ecuaciones de Saint-Venant. La solución de las formas discretas linealizadas de las ecuaciones de Saint-Venant obtenida aproximando el gasto y tirante medios para cada celda de cálculo centrados en el espacio e implícitos en el tiempo, permite obtener una solución numérica para la forma del perfil de flujo superficial que cumple con el requisito de ser monótona decreciente en el sentido del movimiento del agua, situación que no se cumple en el caso de algunas de las aproximaciones reportadas en la literatura, cuando son aproximados el gasto y tirante medios para cada celda de cálculo centrados en espacio y tiempo. La falta de monotonía de la forma del perfil de flujo superficial no es reportada de manera

explícita en la literatura (Walker y Scogerboe, 1983; Strelkoff, 1983, Catalán *et al.* 1988), sin embargo al hacer uso de los procedimientos descritos en estos trabajos, es posible detectar el problema que existe en la monotonía de la solución para el perfil de flujo superficial, situación que no se presenta cuando se utiliza el esquema numérico desarrollado en este trabajo.

2.2.1.2. Condiciones límites

Las condiciones inicial y de frontera que deben sujetar a las ecuaciones de Saint-Venant para modelar la fase de avance en el riego por melgas son las siguientes:

$$q(x,0) = 0 \quad \text{y} \quad h(x,0) = 0 \quad (2.31)$$

$$q(0,t) = q_0, \quad q(x_r,t) = 0 \quad \text{y} \quad h(x_r,t) = 0 \quad (2.32)$$

donde $x_r(t)$ es la posición del frente de onda para el tiempo t y q_0 el gasto de aporte en la entrada de la melga, que puede variar en el tiempo en caso de requerirse.

2.2.1.3. Solución numérica monótona de las ecuaciones de Saint-Venant

La ecuación de continuidad se discretiza utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas considerando la deformación de la frontera del dominio de solución para seguir el frente de avance. En la ilustración 2.4 se muestra la disposición de las celdas para expresar en diferencias finitas las ecuaciones de Saint-Venant.

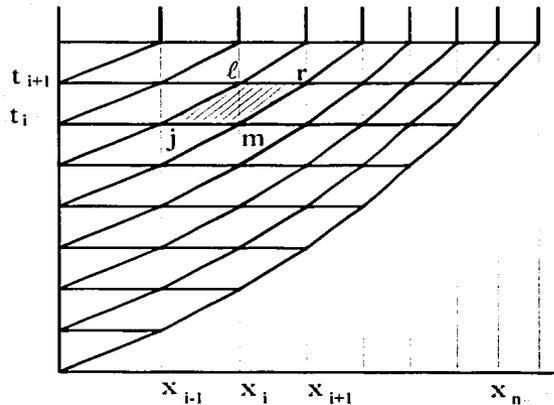


Ilustración 2.4. Disposición de las celdas de cálculo para la fase de avance.

La forma discreta de la ecuación de continuidad es:

$$\begin{aligned}
 & [\omega q_r + (1 - \omega)q_j] \delta t - (x_r - x_j) [\omega(h_r + I_r) + (1 - \omega)(h_j + I_j)] \\
 & - [\omega q_r + (1 - \omega)q_m] \delta t + (x_r - x_m) [\omega(h_r + I_r) + (1 - \omega)(h_m + I_m)] \\
 & - [\phi h_r + (1 - \phi)h_j + \phi I_r + (1 - \phi)I_j] (x_r - x_r) \\
 & + [\phi h_j + (1 - \phi)h_m + \phi I_j + (1 - \phi)I_m] (x_m - x_j) = 0
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Para obtener formas monótonas de los perfiles de flujo superficial, según será mostrado en la sección 2.2.2., se propone la siguiente forma de discretización de la ecuación de momentum:

$$\begin{aligned}
 & 2q\bar{h}(q_r - q_r) \delta t + (g\bar{h}^3 - q^2)(h_r - h_r) \delta t + \bar{h}^2(x_r - x_r) [\omega q_r + (1 - \omega)q_r - \omega q_m - (1 - \omega)q_j] \\
 & + g \delta t \bar{h}^3(x_r - x_r) [\omega J_r + (1 - \omega)J_r - J_o] + \beta \delta t q\bar{h}(x_r - x_r) [\omega I_r + (1 - \omega)I_r - \omega I_m - (1 - \omega)I_j] = 0
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

los valores medios de gasto y tirante por celda pueden ser calculados ponderando en el tiempo y en el espacio los valores de los extremos de la misma, sin embargo, se mostrará en la sección 2.2.2. que es conveniente calcular los valores medios para cada celda ponderando en el espacio y utilizando valores implícitos en el tiempo:

$$q = (1 - \phi)q_m + \phi q_j \tag{2.35}$$

$$\bar{h} = (1 - \phi)h_m + \phi h_j \tag{2.36}$$

Se introducen las variables pequeñas δh_r , δq_r , δh_r y δq_r tales que, para las celdas interiores se tiene:

$$h_r = h_j + \delta h_r \tag{2.37}$$

$$h_r = h_m + \delta h_r \tag{2.38}$$

$$q_r = q_j + \delta q_r \tag{2.39}$$

$$q_r = q_m + \delta q_r \tag{2.40}$$

La variable δq_r de la última celda es sustituida por la variable $\delta\delta$ que denota la corrección a la posición del frente de avance:

$$x_{r_i} = x_{r_{i-1}} + \delta\delta \quad (2.41)$$

donde x_{r_i} es la posición del frente de avance para el tiempo i - ésimo. Para la primera celda se escribe:

$$h_\ell = h_m + \delta h_\ell \quad (2.42)$$

$$q_\ell = q_m + \delta q_\ell \quad (2.43)$$

El sistema de ecuaciones algebraicas es resuelto utilizando el método del gradiente conjugado preconditionado, lo anterior tiene como finalidad reducir los errores de redondeo asociados con la utilización de métodos directos. Debido a la naturaleza implícita del cálculo de los valores medios de gasto y tirante para cada celda de cálculo, solamente se resuelve una vez el sistema para adelantar los perfiles de flujo en el tiempo.

El paso de tiempo se denota como δt y los factores de peso en el tiempo y el espacio como ω y ϕ respectivamente. Las expresiones que definen las entradas del sistema matricial se muestran a continuación según el tipo de celda que se trate:

CONTINUIDAD

Primera celda

$$[-\phi(x_r - x_\ell)]\delta h_\ell + [-\omega\delta t]\delta q_r + [(\omega + \phi - 1)(x_r - x_\ell)]\delta h_r = \quad (2.44)$$

$$-\omega\delta t q_\ell - [\omega(h_m + I_r) + (1 - \omega)(h_m + I_m) - \phi h_m - \phi I_\ell - (1 - \phi)h_m - (1 - \phi)I_r](x_r - x_\ell)$$

Celdas interiores

$$[\omega\delta t]\delta q_\ell + [-\omega(x_m - x_j) - \phi(x_r - x_\ell)]\delta h_\ell + [-\omega\delta t]\delta q_r + [(\omega + \phi - 1)(x_r - x_\ell)]\delta h_r =$$

$$\delta t(q_m - q_j) - [\phi h_j + \phi I_j + (1 - \phi)h_m + (1 - \phi)I_m - \omega(h_j + I_\ell) + (1 - \omega)(h_j + I_j)](x_m - x_j) \quad (2.45)$$

$$- [\omega(h_m + I_r) + (1 - \omega)(h_m + I_m) - \phi h_j - \phi I_\ell - (1 - \phi)h_m - (1 - \phi)I_r](x_r - x_\ell)$$

Ultima celda

$$\begin{aligned}
 & [\omega \delta t] \delta q_\ell + [-\omega(x_m - x_j) - \phi(x_m - x_j)] \delta h_\ell + [-\phi(h_j + I_j)] \delta \delta = \\
 & -\delta t q_j - [\phi h_j + \phi I_j + \omega(h_j + I_j) - (1 - \omega)(h_j + I_j) + \phi h_j + \phi I_\ell] (x_m - x_j)
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Primera celda

$$\begin{aligned}
 & \left[-2\delta t (g\bar{h}^3 - q^2) - 3\phi g \delta t \bar{h}^3 (x_r - x_\ell) \frac{J_m}{h_m} \right] \delta h_\ell + \left[2q\bar{h}\delta t + (1 - \phi) \frac{g\delta t}{d} \bar{h}^3 (x_r - x_\ell) \frac{J_m}{q_m} + (1 - \phi) \bar{h}^2 (x_r - x_\ell) \right] \delta q_r \\
 & + \left[\delta t (g\bar{h}^3 - q^2) - 3(1 - \phi) g \delta t \bar{h}^3 (x_r - x_\ell) \frac{J_m}{h_m} \right] \delta h_r = -g \delta t \bar{h}^3 (x_r - x_\ell) (J_m - J_o) \\
 & - \beta q \bar{h} (x_r - x_\ell) [(1 - \phi) I_r + \phi I_\ell - I_m]
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Celdas interiores:

$$\begin{aligned}
 & \left[-2q\bar{h}\delta t + \phi \frac{g\delta t}{d} \bar{h}^3 (x_r - x_\ell) \frac{J_j}{q_j} + \phi \bar{h}^2 (x_r - x_\ell) \right] \delta q_\ell + \left[-\delta t (g\bar{h}^3 - q^2) - 3\phi g \delta t \bar{h}^3 (x_r - x_\ell) \frac{J_j}{h_j} \right] \delta h_\ell + \\
 & \left[2q\bar{h}\delta t + (1 - \phi) \frac{g\delta t}{d} \bar{h}^3 (x_r - x_\ell) \frac{J_m}{q_m} + (1 - \phi) \bar{h}^2 \right] \delta q_r + \left[\delta t (g\bar{h}^3 - q^2) - 3(1 - \phi) g \delta t \bar{h}^3 (x_r - x_\ell) \frac{J_m}{h_m} \right] \delta h_r \\
 & = -2q\bar{h}\delta t (q_m - q_j) - \delta t (g\bar{h}^3 - q^2) (h_m - h_j) - g(x_r - x_\ell) \delta t \bar{h}^3 ((1 - \phi) J_m + \phi J_j - J_o) \\
 & - \beta q \bar{h} (x_r - x_\ell) \{ [(1 - \phi) I_r - \phi I_\ell] - [(1 - \phi) I_m - \phi I_j] \}
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Ultima celda:

$$\begin{aligned} & \left[-2q\bar{h}\delta t + \frac{g\delta t}{d}\bar{h}^3(x_m - x_j)\frac{J_j}{q_j} + \bar{h}^2(x_m - x_j) \right] \delta q_\ell + \left[-\delta t(g\bar{h}^3 - q^2) - 3g\delta t\bar{h}^3(x_m - x_j)\frac{J_j}{h_j} \right] \delta h_\ell + \\ & \left[g\delta t\bar{h}^3(J_j - J_o) + \phi\beta q\bar{h}(I_\ell - I_j) \right] \delta\delta = 2q\bar{h}\delta t q_j + \delta t(g\bar{h}^3 - q^2)h_j - g\delta t\bar{h}^3(x_m - x_j)(J_j - J_o) \\ & - \phi\beta q\bar{h}(x_m - x_j)(I_\ell - I_j) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Para el primer nivel de tiempo se tiene:

CONTINUIDAD

$$[-\phi(x_r - x_\ell)]\delta h_\ell + [-\phi I_\ell]\delta\delta = -\omega\delta t q_\ell \quad (2.50)$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$[-2\delta t(g\bar{h}^3 - q^2)]\delta h_\ell + [2g\bar{h}^3(J_\ell - J_o) + \bar{h}^2 q_\ell + \beta q\bar{h} I_\ell]\delta\delta = 4q\bar{h}\delta t q_\ell \quad (2.51)$$

La forma discreta de las ecuaciones de movimiento para el primer nivel de tiempo es resuelta utilizando un método Newton-Raphson.

En las formas discretas se ha considerado el factor de peso en el espacio $\phi = 1/2$ para las celdas interiores (Strelkoff y Katopodes, 1977), para la última celda y el primer nivel de tiempo se ha utilizado $\phi = \pi/4$ deducido a partir del análisis para los tiempos cortos del acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards presentado por Fuentes (1992). El factor de peso en el tiempo asignado es $\omega = 0.60$ (Strelkoff y Katopodes, 1977).

2.2.1.4. Solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant utilizando un esquema numérico con ponderaciones en tiempo y espacio

Un procedimiento alternativo para la solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant es hacer uso de una aproximación basada en ponderaciones en el espacio y el tiempo tanto para aproximar las derivadas como para el cálculo de los coeficientes para la solución de la ecuación de momentum. En este caso el sistema de ecuaciones algebraicas que resulta de las formas discretas debe ser resuelto mediante un método Newton-Raphson. Se escriben tanto las

formas discretas como los valores medios de gasto y tirante para cada celda teniendo en cuenta factores de peso en espacio y tiempo, para la ecuación de continuidad se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & [\omega q_r + (1-\omega)q_j] \delta t - (x_r - x_j) [\omega(h_r + I_r) + (1-\omega)(h_j + I_j)] + \\
 & - [\omega q_r + (1-\omega)q_m] \delta t + (x_r - x_m) [\omega(h_r + I_r) + (1-\omega)(h_m + I_m)] \\
 & - [\phi h_r + (1-\phi)h_r + \phi I_r + (1-\phi)I_r] (x_r - x_r) \\
 & + [\phi h_j + (1-\phi)h_m + \phi I_j + (1-\phi)I_m] (x_m - x_j) = 0
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

mientras que la forma discreta de la ecuación de momentum resulta:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2q}{h^2} [\omega(q_r - q_r) \delta t + (1-\omega)(q_r - q_r) \delta t] \\
 & + \left(g - \frac{q^2}{h^3} \right) [\omega(h_r - h_r) \delta t + (1-\omega)(h_m - h_j) \delta t] \\
 & + \frac{1}{h} \{ [(1-\phi)q_r + \phi q_r] (x_r - x_r) - [(1-\phi)q_m + \phi q_j] (x_m - x_j) \} \\
 & + g(J - J_o) [\omega(x_r - x_r) + (1-\omega)(x_m - x_j)] \delta t \\
 & + \beta \delta t \frac{q}{h^2} (x_r - x_r) [\omega I_r + (1-\omega)I_r - \omega I_m - (1-\omega)I_j] = 0
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

los valores medios de gasto y tirante se calculan teniendo en cuenta todos los valores extremos de cada celda de cálculo:

$$q = \omega[(1-\phi)q_r + \phi q_r] + (1-\omega)[(1-\phi)q_m + \phi q_j] \tag{2.54}$$

$$\bar{h} = \omega[(1-\phi)h_r + \phi h_r] + (1-\omega)[(1-\phi)h_m + \phi h_j] \tag{2.55}$$

en consecuencia la pendiente de fricción media en la celda se calcula como:

$$J = \left[\frac{v^{2d-1} q}{\kappa g^d h^{3d}} \right]^{1/d} \tag{2.56}$$

Las expresiones correspondientes a la aplicación del método Newton-Raphson para resolver el sistema de ecuaciones generado mediante la aplicación a cada celda de cálculo de las ecuaciones (2.52) y (2.53) teniendo en cuenta la(2.54) y (2.55) son:

$$\frac{\partial R_{c_i}}{\partial h_\ell} \delta h_\ell + \frac{\partial R_{c_i}}{\partial q_\ell} \delta q_\ell + \frac{\partial R_{c_i}}{\partial h_r} \delta h_r + \frac{\partial R_{c_i}}{\partial q_r} \delta q_r = -R_{c_i} \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial R_{m_i}}{\partial h_\ell} \delta h_\ell + \frac{\partial R_{m_i}}{\partial q_\ell} \delta q_\ell + \frac{\partial R_{m_i}}{\partial h_r} \delta h_r + \frac{\partial R_{m_i}}{\partial q_r} \delta q_r = -R_{m_i} \quad (2.58)$$

donde Rc y Rm representan el lado izquierdo de la forma discreta de la ecuación de cantidad de movimiento (2.52) y de la ecuación de conservación de masa (2.53), $i = 1, 2, \dots, n-1$ es el número de celda y n el número de celdas utilizadas para en la discretización. La variable δq_r de la última celda es sustituida por la variable δx_r que denota la corrección a la posición del frente de la corriente, las expresiones correspondientes para la última celda son:

$$\frac{\partial R_{c_n}}{\partial h_\ell} \delta h_\ell + \frac{\partial R_{c_n}}{\partial q_\ell} \delta q_\ell + \frac{\partial R_{c_n}}{\partial x_r} \delta x_r = -R_{c_n} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial R_{m_n}}{\partial h_\ell} \delta h_\ell + \frac{\partial R_{m_n}}{\partial q_\ell} \delta q_\ell + \frac{\partial R_{m_n}}{\partial x_r} \delta x_r = -R_{m_n} \quad (2.60)$$

El sistema de ecuaciones algebraicas que es necesario resolver para cada iteración del método Newton-Raphson, se construye teniendo en cuenta que cada entrada del sistema matricial está asociada con la derivada de Rc o Rm con respecto a una de las incógnitas. La forma explícita de las derivadas se muestra a continuación según el tipo de celda que se trate:

CONTINUIDAD

Primera celda

$$\frac{\partial R_c}{\partial h_r} = -\phi(x_r - x_\ell) \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial R_c}{\partial q_\ell} = 0 \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial R_c}{\partial h_r} = (\omega + \phi - 1)(x_r - x_\ell) \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial R_c}{\partial q_r} = -\omega \delta t \quad (2.64)$$

Celdas interiores

$$\frac{\partial R_c}{\partial h_\ell} = -\omega(x_m - x_j) - \phi(x_r - x_\ell) \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial R_c}{\partial q_\ell} = \omega \delta t \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial R_c}{\partial h_r} = (\omega + \phi - 1)(x_r - x_\ell) \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial R_c}{\partial q_r} = -\omega \delta t \quad (2.68)$$

Ultima celda

$$\frac{\partial R_c}{\partial h_\ell} = -\omega(x_m - x_j) - \phi(x_r - x_\ell) \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial R_c}{\partial q_\ell} = \omega \delta t \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial R_c}{\partial x_r} = -\phi h_\ell - \phi I_\ell \quad (2.71)$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Primera celda

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_m}{\partial h_r} = & 2\omega^2 \phi \delta t q (q_r - q_\ell) - (g\bar{h}^3 - q^2) \omega \delta t \\ & + 3\omega^2 \phi g \delta t \bar{h}^2 (h_r - h_\ell) \\ & + 2\omega \phi \bar{h} \{ (1 - \phi) q_r + \phi q_\ell \} (x_r - x_\ell) - q_m (x_m - x_j) \\ & - 3\omega^2 \phi \delta t g J_o \bar{h}^2 (x_r - x_\ell) \\ & + \beta \omega \phi q \{ (1 - \phi) I_r + \phi I_\ell \} (x_r - x_\ell) - I_m (x_m - x_j) \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial R_m}{\partial q_c} = 0 \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_m}{\partial h_r} = & 2\omega^2(1-\phi)\delta t q (q_r - q_c) + (gh^3 - q^2)\omega\delta t \\ & + 3\omega^2(1-\phi)g\delta t h^2 (h_r - h_c) \\ & + 2\omega(1-\phi)\bar{h} \{[(1-\phi)q_r + \phi q_c](x_r - x_c) - q_m(x_m - x_j)\} \\ & - 3\omega^2(1-\phi)\delta t g J_o h^2 (x_r - x_c) \\ & + \beta\omega(1-\phi)q \{[(1-\phi)I_r + \phi I_c](x_r - x_c) - I_m(x_m - x_j)\} \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_m}{\partial q_r} = & 2\omega\delta t q \bar{h} + 2\omega^2(1-\phi)\bar{h}\delta t (q_r - q_c) \\ & - 2\omega^2(1-\phi)\delta t q (h_r - h_c) \\ & + (1-\phi)\bar{h}^2 (x_r - x_c) + \omega^2(1-\phi)\delta t \frac{J}{dq} gh^3 (x_r - x_c) \\ & + \beta\omega(1-\phi)\bar{h} \{[(1-\phi)I_r + \phi I_c](x_r - x_c) - I_m(x_m - x_j)\} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Celdas interiores

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_m}{\partial h_c} = & 2\omega\phi q \delta t [\omega(q_r - q_c) + (1-\omega)(q_m - q_j)] - (gh^3 - q^2)\omega\delta t \\ & + 3\omega\phi g\delta t h^2 [\omega(h_r - h_c) + (1-\omega)(h_m - h_j)] \\ & + 2\omega\phi\bar{h} \{[(1-\phi)q_r + \phi q_c](x_r - x_c) - [(1-\phi)q_m + \phi q_j](x_m - x_j)\} \\ & - 3\omega\phi\delta t g J_o h^2 [\omega(x_r - x_c) + (1-\omega)(x_m - x_j)] \\ & + \beta\omega\phi q \{[(1-\phi)I_r + \phi I_c](x_r - x_c) - [(1-\phi)I_m + \phi I_j](x_m - x_j)\} \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_m}{\partial q_c} = & -2\omega\delta t q \bar{h} + 2\omega\phi\bar{h} [\omega\delta t (q_r - q_c) + (1-\omega)(q_m - q_j)] \\ & - 2\omega\phi\delta t q [\omega(h_r - h_c) + (1-\omega)(h_m - h_j)] \\ & + \phi\bar{h}^2 (x_r - x_c) + \omega\phi\delta t \frac{J}{dq} gh^3 [\omega(x_r - x_c) + (1-\omega)(x_m - x_j)] \\ & + \beta\omega\phi\bar{h} \{[(1-\phi)I_r + \phi I_c](x_r - x_c) - [(1-\phi)I_m + \phi I_j](x_m - x_j)\} \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_m}{\partial h_r} = & 2\omega(1-\phi)\delta t \bar{q} [\omega(q_r - q_\ell) + (1-\omega)(q_m - q_j)] + (g\bar{h}^3 - q^2)\omega\delta t \\
 & + 3\omega(1-\phi)g\delta t \bar{h}^2 [\omega(h_r - h_\ell) + (1-\omega)(h_m - h_j)] \\
 & + 2\omega(1-\phi)\bar{h} \{[(1-\phi)q_r + \phi q_\ell](x_r - x_\ell) - [(1-\phi)q_m + \phi q_j](x_m - x_j)\} \\
 & - 3\omega(1-\phi)\delta t g J_o \bar{h}^2 [\omega(x_r - x_\ell) + (1-\omega)(x_m - x_j)] \\
 & + \beta\omega(1-\phi)\bar{q} \{[(1-\phi)I_r + \phi I_\ell](x_r - x_\ell) - [(1-\phi)I_m + \phi I_j](x_m - x_j)\}
 \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_m}{\partial q_r} = & 2\omega\delta t \bar{q} \bar{h} + 2\omega(1-\phi)\bar{h} [\omega\delta t(q_r - q_\ell) + (1-\omega)(q_m - q_j)] \\
 & - 2\omega(1-\phi)\delta t \bar{q} [\omega(h_r - h_\ell) + (1-\omega)(h_m - h_j)] \\
 & + (1-\phi)\bar{h}^2(x_r - x_\ell) + \omega(1-\phi)\delta t \frac{J}{d\bar{q}} g\bar{h}^3 [\omega(x_r - x_\ell) + (1-\omega)(x_m - x_j)] \\
 & + \beta\omega(1-\phi)\bar{h} \{[(1-\phi)I_r + \phi I_\ell](x_r - x_\ell) - [(1-\phi)I_m + \phi I_j](x_m - x_j)\}
 \end{aligned} \quad (2.79)$$

Ultima celda

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_m}{\partial h_\ell} = & -2\omega\phi\bar{q}\delta t [\omega q_\ell + (1-\omega)q_j] - (g\bar{h}^3 - q^2)\omega\delta t \\
 & - 3\omega\phi g\delta t \bar{h}^2 [\omega h_\ell + (1-\omega)h_j] \\
 & + 2\omega\phi\bar{h} \{[\phi q_\ell](x_r - x_\ell) - [\phi q_j](x_m - x_j)\} \\
 & - 3\omega\phi\delta t g J_o \bar{h}^2 [\omega(x_r - x_\ell) + (1-\omega)(x_m - x_j)] \\
 & + \beta\omega\phi\bar{q} \{[\phi I_\ell](x_r - x_\ell) - [\phi I_j](x_m - x_j)\}
 \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_m}{\partial q_\ell} = & -2\omega\delta t \bar{q} \bar{h} - 2\omega\phi\delta t \bar{h} [\omega q_\ell + (1-\omega)q_j] \\
 & - 2\omega\phi\delta t \bar{q} [\omega h_\ell + (1-\omega)h_j] \\
 & + \phi\bar{h}^2(x_r - x_\ell) + \omega\phi\delta t \frac{J}{d\bar{q}} g\bar{h}^3 [\omega(x_r - x_\ell) + (1-\omega)(x_m - x_j)] \\
 & + \beta\omega\phi\bar{h} \{[\phi I_\ell](x_r - x_\ell) - [\phi I_j](x_m - x_j)\}
 \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial R_m}{\partial x_r} = \phi\bar{h}^2 q_\ell + \omega\delta t g\bar{h}^3 (J - J_o) + \phi\beta\bar{q} \bar{h} I_\ell \quad (2.82)$$

En las formas discretas se ha considerado el factor de peso en el espacio $\phi = 1/2$ para las celdas interiores (Strelkoff y Katopodes, 1977), para la última celda y el primer nivel de tiempo se ha utilizado $\phi = \pi/4$ deducido a partir del análisis para los tiempos cortos del acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards presentado por Fuentes (1992). El factor de peso en el tiempo es asignado como $\omega = 0.60$ (Strelkoff y Katopodes, 1977).

2.2.2. Comparación de soluciones numéricas obtenidas mediante el esquema propuesto con las obtenidas por un esquema ponderado en tiempo y espacio

El modelo numérico se utiliza para describir el flujo del agua durante un riego por melgas, el experimento es reportado por Fuentes (1992) y se dispone de los siguientes datos: parámetros para la característica de van Genuchten (1980): $\theta_s = 0.4865$, $\theta_r = 0.0$, $m = 0.1258$, $n = 2.2878$, parámetro para la conductividad de Brooks y Corey (1964): $\eta = 11.0$, parámetros para la ley de resistencia de Fuentes *et al.* (2004): $d = 1$, $\kappa = 1/54$, valor inicial del contenido volumétrico de agua $\theta_o = 0.2749$, gasto unitario $q_o = 0.0032 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, pendiente topográfica $J_o = 0.002 \text{ cm}/\text{cm}$, longitud de la melga $L = 100 \text{ m}$, parámetro en la ecuación de cantidad de movimiento: $\beta = 2$. Los parámetros θ_s , θ_r , m y η de las características hidrodinámicas fueron determinados a partir de la curva granulométrica del suelo siguiendo la metodología propuesta por Fuentes (1992). Los valores de los parámetros $\psi_d = -32.75 \text{ cm}$ y $K_s = 1.84 \text{ cm}/\text{h}$ fueron calibrados utilizando un procedimiento inverso para describir datos de una prueba de riego efectuada en el experimento descrito.

2.2.2.1. Discretización del dominio de solución

Se ha utilizado un paso de tiempo constante $\Delta t = 0.5 \text{ s}$ para obtener la solución numérica del acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards. En el caso de la ecuación de Richards se utilizaron pasos de espacio mínimo y máximo: $\Delta z_{\min} = 0.02 \text{ cm}$ y $\Delta z_{\max} = 1.0 \text{ cm}$. La discretización adoptada para la solución de la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant guarda semejanza con las reportadas en la literatura: Katopodes y Strelkoff (1977) utilizan $\Delta t_{\min} = 5 \text{ s}$, Akanbi y Katopodes (1988) hacen uso de $\Delta t_{\max} = 1 \text{ s}$ y en ambos casos se obtienen resultados consistentes en las variables hidráulicas del riego.

2.2.2.2. Comparación de soluciones numéricas

Un esquema numérico tradicionalmente utilizado en la modelación del riego por melgas para la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant, consiste en una aproximación mediante un esquema lagrangiano en diferencias finitas donde las derivadas son estimadas haciendo uso de ponderaciones que toman en cuenta los valores de las variables hidráulicas en

todos los extremos de cada celda de cálculo (Walker y Skogerboe, 1983; Strelkoff, 1983; Catalán *et al.*, 1988), sin embargo este tipo de aproximación puede generar problemas de monotonía en la solución numérica. A partir del análisis de diferentes formas de aproximación de las derivadas tanto espaciales como temporales, así como de la forma de cálculo de los coeficientes de la ecuación de cantidad de movimiento, se ha observado que, para obtener una solución numérica monótona es conveniente efectuar la discretización de la ecuación de cantidad de movimiento teniendo en cuenta tres aspectos: i) las derivadas en el espacio y la pendiente de fricción en una celda de cálculo se aproximan adelante en el tiempo, ii) las derivadas en el tiempo se aproximan utilizando una forma ponderada en tiempo y espacio, iii) los coeficientes son calculados en el tiempo anterior. La forma discreta de la ecuación de continuidad puede ser obtenida mediante el procedimiento tradicional que considera la deformación de la frontera por tratarse de un esquema lagrangiano (*e.g.* Strelkoff y Katopodes, 1977).

En el caso del esquema reportado en la literatura, la naturaleza de las aproximaciones hace necesario resolver el sistema de ecuaciones algebraicas, que resulta de la aplicación del método de diferencias finitas, mediante un procedimiento Newton-Raphson, mientras que para el esquema propuesto es este trabajo es posible avanzar los perfiles de flujo en el tiempo, para una iteración específica del acoplamiento, resolviendo solamente una vez el sistema de ecuaciones algebraicas.

La solución obtenida mediante la aplicación del esquema reportado en la literatura muestra cambios de monotonía en las primeras celdas de cálculo independientemente del tipo de régimen de flujo, lo cual no sucede al utilizar el esquema propuesto en este trabajo. La situación puede variar desde cambios de monotonía poco apreciables (ilustración 2.5.) hasta cambios de monotonía muy significativos (ilustración 2.6.)

Es importante hacer notar que el comportamiento descrito anteriormente se tiene aún cuando se utilizan formas muy simplificadas de la ley de infiltración, por ejemplo una ecuación de Kostiaikov en combinación con la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant. Sin embargo, para el caso en que se utiliza la forma de inercia cero de las ecuaciones de Saint-Venant y las ecuaciones de Richards o Kostiaikov para el cálculo de la lámina infiltrada, la solución obtenida cumple con el requisito de ser monótona decreciente en el sentido del movimiento del agua, independientemente del procedimiento utilizado para obtener las formas discretas de las ecuaciones de movimiento (ilustración 2.7). El resultado anterior permite suponer que la falta de monotonía presente cuando se usa la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant se debe al incremento en el grado de complejidad de las ecuaciones de cantidad de movimiento.

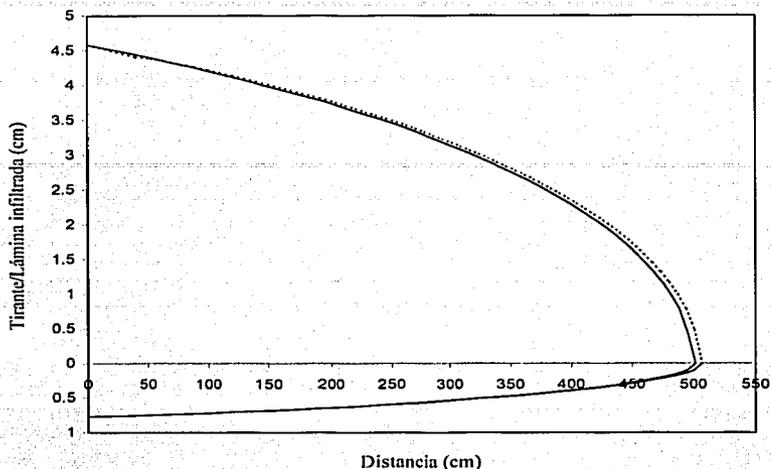


Ilustración 2.5. Comparación de la solución numérica obtenida mediante un esquema reportado en la literatura (línea punteada) y el esquema propuesto en este trabajo (línea continua) para régimen de Chézy.

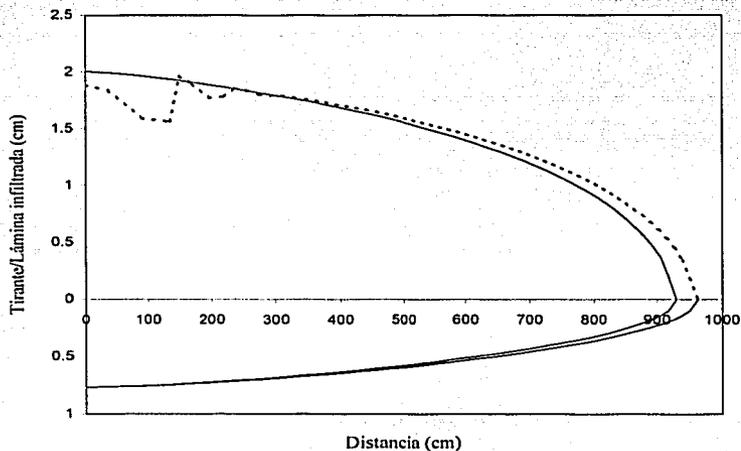


Ilustración 2.6. Comparación de la solución numérica obtenida mediante un esquema reportado en la literatura (línea punteada) y el esquema propuesto en este trabajo (línea continua) para régimen de Chézy.

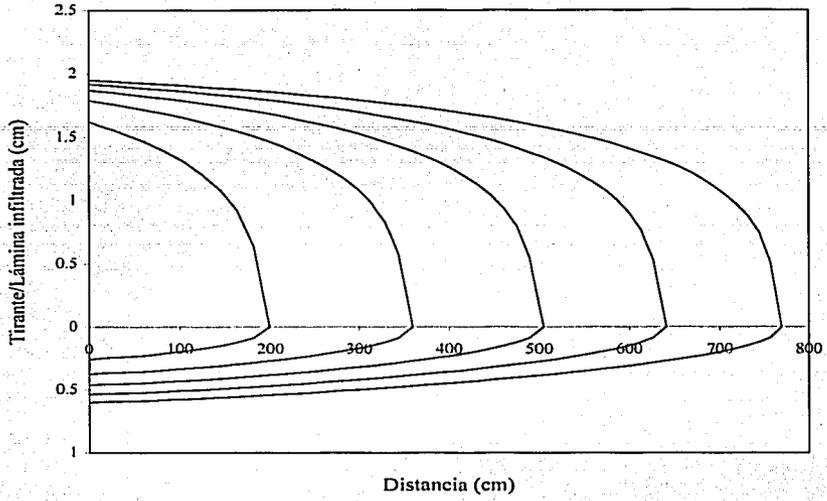


Ilustración 2.7. Solución numérica para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant en su forma de inercia cero y la ecuación de Richards, obtenida mediante un esquema numérico ponderado en tiempo y espacio para la solución de las ecuaciones de Saint-Venant.

El tamaño de los cambios de monotonía varía conforme crece el gasto, y en consecuencia el número de Froude. Para comparar los cambios de monotonía se seleccionó el tirante normal como escala característica, el factor de fricción (κ) se calcula para cada tipo de régimen a partir de un valor base teniendo en cuenta que, para un gasto dado, se desea tener el mismo tirante normal independientemente de la potencia d de la ley de resistencia, manteniendo de esta forma un patrón de comparación único para cada gasto.

El tirante normal se calcula como (Fuentes 1992):

$$h_n = \sqrt[3]{\frac{\omega q_o}{g J_o}} \tag{2.83}$$

con

$$\omega = J_o \cdot v \left(\frac{q_o}{v} \right)^{\frac{1}{d}-1} \tag{2.84}$$

donde $J_n = 1/\kappa^{1/d}$. El valor de h_n corresponde con el tirante normal para un canal en el que no se presenta infiltración.

La base del cálculo del factor de fricción para cada potencia (d) ha sido considerada como un valor arbitrario, en este caso se tiene en cuenta el factor observado en el experimento reportado en la literatura por Fuentes (1992): $\kappa = 1/54$, es decir el comportamiento correspondería con una rugosidad de la superficie del suelo típica de los experimentos de riego por melgas. El comportamiento que se obtiene de la relación entre el tamaño máximo del cambio de monotonía y el tirante normal, denominada δh , se muestra en las seis curvas inferiores de la ilustración 3.6, donde puede observarse que, en una etapa inicial la proporción disminuye conforme se incrementa el gasto, pero posteriormente aumenta sensiblemente. Al disminuir el valor base del coeficiente de fricción 20 veces, $\kappa = 1/1080$, es decir cuando se trata con superficies más rugosas, se aprecia en las seis curvas superiores de la ilustración 2.8, que existe un incremento permanente de la proporción δh conforme se incrementa el gasto en la cabecera de la melga, hasta que se alcanzan valores cercanos a la unidad, momento en el cual se generan tirantes negativos debido a los cambios de monotonía y el esquema se torna inestable. Los gastos de aporte en la cabecera de la melga que se presentan en la práctica de la modelación del riego por melgas generalmente pertenecen al intervalo de $0.001 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ a $0.005 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, e.g.: Strelkoff y Katopodes (1977): $q_o = 0.0024 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, $q_o = 0.0032 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, $q_o = 0.0042 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, Strelkoff (1977): $q_o = 0.0023 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, Wallender y Rayej (1990): $q_o = 0.0013 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, Fuentes (1992): $q_o = 0.0032 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ y $q_o = 0.0024 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, Playán *et al.* (1994): $q_o = 0.0018 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, Pacheco (1995): $q_o = 0.0013 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, Smerdon *et al.* (1988) y Balir y Smerdon (1988) reportan diversos experimentos donde se utiliza un gasto mínimo de $q_o = 0.0008 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ y un máximo de $q_o = 0.004 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$. Cuando se aplica el modelo basado en aproximaciones que toman en cuenta los valores de las variables hidráulicas en todos los extremos de cada celda de cálculo en el intervalo mencionado ($0.001 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ a $0.005 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$), en condiciones de rugosidad típicas del riego por melgas se obtiene que el tamaño relativo de los cambios de monotonía resulta irrelevante para fines prácticos, sin embargo, es necesario tener en cuenta que existen casos en los cuales el factor de fricción puede adquirir valores de un orden de magnitud mayor, por ejemplo, para un experimento de riego efectuado en la zona productora de arroz de La Chontalopa, Tab., México, se tiene $\kappa = 1/300$ según es mostrado en el capítulo IV, situación en la cual la utilización del modelo reportado en el literatura puede ser inconveniente.

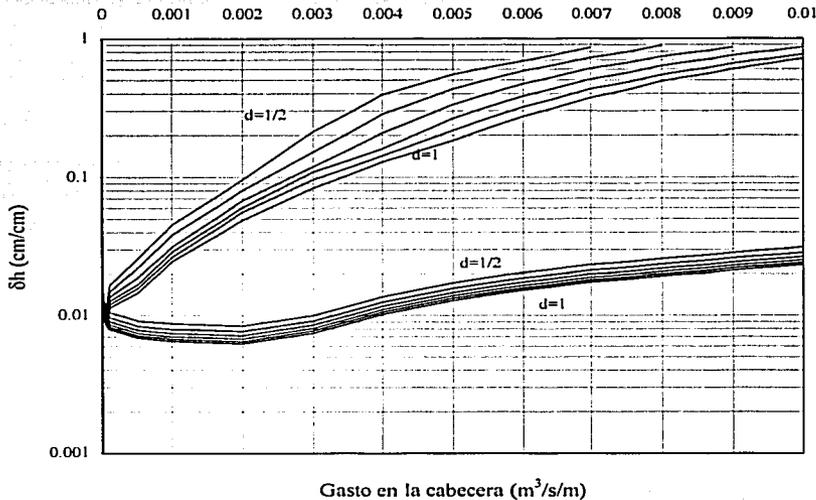


Ilustración 2.8. Variación respecto al gasto de aporte en la cabecera de la melga de la proporción (δh) entre el valor máximo del cambio de monotonía de la solución numérica obtenida con un esquema presentado en la literatura y el tirante normal. Las curvas inferiores corresponden a $\kappa = 1/54$ y las superiores a un valor 20 veces menor $\kappa = 1/1080$.

El análisis presentado no puede considerarse suficiente ni profundo, para ello sería necesario efectuar un análisis de estabilidad tanto del esquema propuesto en la literatura como del esquema desarrollado en este trabajo, sin embargo la metodología para efectuar dicho análisis no comprende hasta el presente problemas de valores en la frontera no lineales. En este aspecto se han efectuado avances significativos por algunos autores (García, 1994; Aguilar 2002) pero los resultados son difícilmente aplicables en la vecindad de la frontera donde se generan los cambios de monotonía. El ánimo de la discusión tiene que ver con el análisis de la generalidad de casos a los cuales es posible aplicar el esquema presentado en la literatura, mostrando que el esquema desarrollado en este trabajo cubre un mayor rango de condiciones de aplicabilidad sin modificar la monotonía de la solución numérica obtenida, pero sin pretender en forma alguna que sea la forma más general de aproximar la solución a los problemas de simulación del riego.

2.2.3. Verificación del funcionamiento del esquema propuesto para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards

Para verificar el funcionamiento del esquema desarrollado se han seleccionado tres condiciones que deben observarse en los tiempos largos del acoplamiento: i) el tirante debe tender asintóticamente al tirante normal independientemente de la posición a lo largo de la melga en la cual sea calculado, ii) se debe tener una posición máxima del frente de avance y iii) la solución obtenida debe tender en el límite cuando el tiempo tiende a infinito a la solución de la ecuación del flujo gradualmente variado.

En la ilustración 2.9 se muestran las curvas de evolución del tirante en diferentes puntos localizados a lo largo de una melga sin infiltración, obtenidas eliminando los términos necesarios en el esquema propuesto, puede apreciarse que existe un comportamiento asintótico hacia el tirante normal $h_n = 2.065$ cm. Las curvas más cercanas al eje de las ordenadas corresponden a puntos localizados más cerca de la cabecera de la melga. Es interesante notar que la función que describe la evolución del tirante en el tiempo varía con la posición en la melga.

La posición máxima del frente de avance puede calcularse teniendo en cuenta el principio de conservación, de una parte se tiene el gasto de aporte constante en la cabecera de la melga (q_o) y de otra el flujo que entra en el suelo sobre la longitud de avance, mismo que en los tiempos largos puede calcularse como el producto del flujo unitario proporcionado por la conductividad hidráulica a saturación y la longitud de melga, la igualdad de ambos flujos proporciona la posición máxima que puede esperarse en el frente de avance, esto es:

$$L_{\max} = \frac{q_o}{K_s} \quad (2.85)$$

en este caso $q_o = 0.0032 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ y $K_s = 1.84 \text{ cm}/\text{h}$ y se obtiene $L_{\max} = 626.09 \text{ m}$, que es el límite al cual tiende asintóticamente la posición del frente de avance según se aprecia en la ilustración 2.10.

Para los tiempos muy largos el comportamiento de la lámina infiltrada es (Fuentes, 1992): $I = K_s t$, en consecuencia $dl/dt = K_s$ y se deduce de la ecuación de continuidad (1.1) que $dq/dx = -K_s$, al sustituir en la ecuación de momentum (1.2) teniendo en cuenta el límite cuando el tiempo tiende a infinito, se obtiene:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{J_o - J - K_s(\beta - 2)q/gh^2}{1 - F^2} \quad (2.86)$$

donde $F^2 = q^2/gh^3$ es el cuadrado del número de Froude, si se considera $\beta = 2$ se obtiene la ecuación del flujo gradualmente variado:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{J_0 - J}{1 - F^2} \quad (2.87)$$

Mediante un método Runge-Kutta (Burden y Faires, 1985) es posible resolver el problema de valor inicial definido por la ecuación (2.87) sujeta a las condiciones $h(0) = h_n$, siendo h_n el tirante normal y $q(0) = q_0$, donde q_0 es el gasto de aporte en la cabecera de la melga. La solución así obtenida debe ser el límite de la solución numérica para el flujo superficial proporcionada por el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en la melga, lo cual es verificado en la ilustración 2.11.

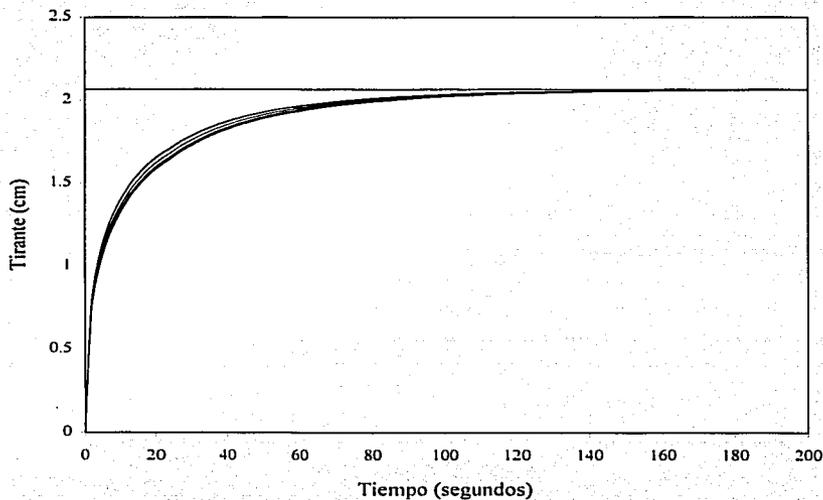


Ilustración 2.9. Verificación del funcionamiento del esquema numérico: comportamiento asintótico hacia el tirante normal en diferentes posiciones a lo largo de una melga.

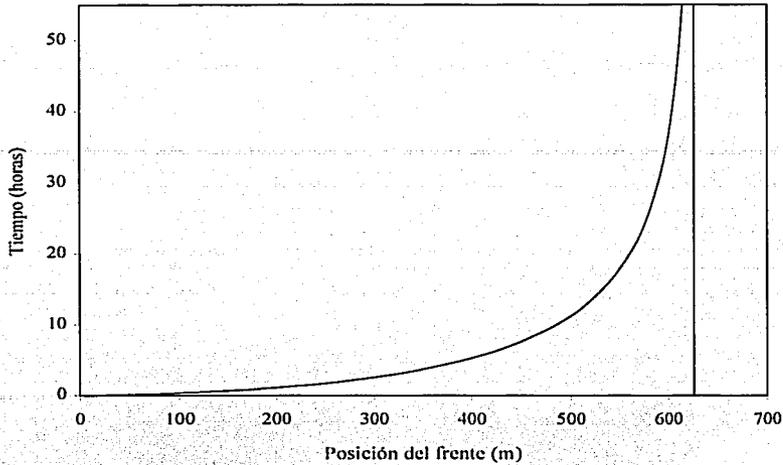


Ilustración 2.10. Verificación del funcionamiento del esquema numérico: comportamiento asintótico de la posición del frente de avance para un gasto de aporte y conductividad a saturación específicos.

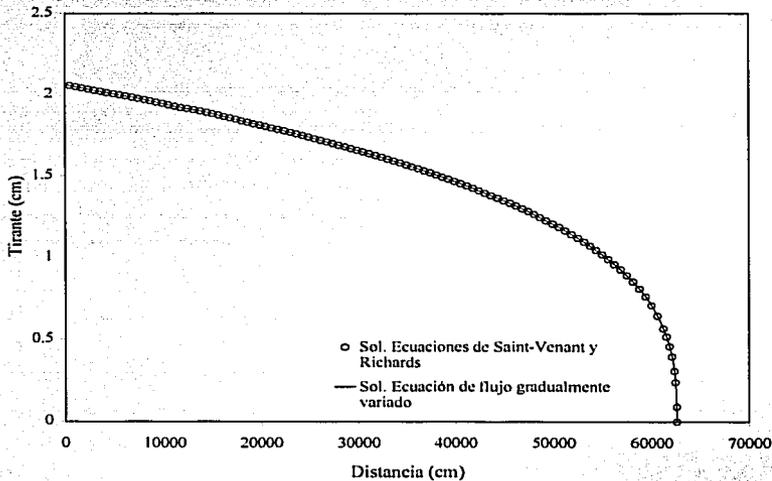


Ilustración 2.11. Verificación del funcionamiento del esquema numérico: solución de la ecuación del flujo gradualmente variado comparada con la solución numérica proporcionada por el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards.

2.2.4. Esquema numérico para las fases de almacenamiento, consumo y recesión

2.2.4.1. Introducción

En el riego por melgas pueden distinguirse cuatro fases: avance, almacenamiento, consumo y recesión. La fase de avance inicia con la introducción del agua en la melga y termina cuando se alcanza el extremo de la misma. La fase de almacenamiento comienza a partir de que el agua llega al extremo de la melga y culmina cuando se deja de aplicar el gasto de aporte en la cabecera. La fase de consumo se define como el tiempo que transcurre desde el momento en que se deja de aplicar el gasto de aporte en la cabecera de la melga hasta la desaparición del tirante en dicha posición. La fase de recesión comienza a partir de que el tirante de agua desaparece en el inicio de la melga y termina cuando el tirante desaparece en el otro extremo de la misma.

Para el desarrollo de un esquema numérico para las fases de almacenamiento, consumo y recesión se tiene en cuenta que el flujo del agua sobre la superficie del suelo es modelado utilizando las ecuaciones de Saint-Venant (ecuaciones 1.1. y 1.2) y la ley potencial de resistencia hidráulica de Fuentes *et al.* (2004) de la ecuación (1.3). El extremo aguas debajo de la melga se considera cerrado para evitar la pérdida de masa fuera del dominio de riego, en consecuencia las condiciones límites para la fase de almacenamiento son:

$$q(0, t) = q_0, \quad q(L, t) = 0 \quad (2.88)$$

donde L es la longitud de la melga y q_0 el gasto de aporte en la cabecera de la melga. Para la fase de consumo se tiene:

$$q(0, t) = 0, \quad q(L, t) = 0 \quad (2.89)$$

El flujo del agua en el suelo se modela utilizando la ecuación de Richards en su forma bidimensional (ecuación 2.1). Las condiciones límites que sujetan a la ecuación de Richards son aquellas proporcionadas por las ecuaciones (2.2)-(2.7). Las características hidrodinámicas consideradas son la combinación de la conductividad $K(\theta)$ de Brooks y Corey (1964) y de la característica de humedad $\theta(\psi)$ de van Genuchten (1980) con la restricción del modelo de Burdine (1953). La lámina infiltrada necesaria para resolver numéricamente las ecuaciones de Saint-Venant, se calcula conforme a la ecuación (2.10).

La disposición de las celdas de cálculo para las fases de almacenamiento, consumo y recesión se muestra en la ilustración 2.12. Es importante hacer notar que la configuración de las celdas para la fase de recesión obedece al hecho de que en lugar de utilizar un esquema de paso de tiempo constante, se hace uso de un esquema de paso de espacio fijo.

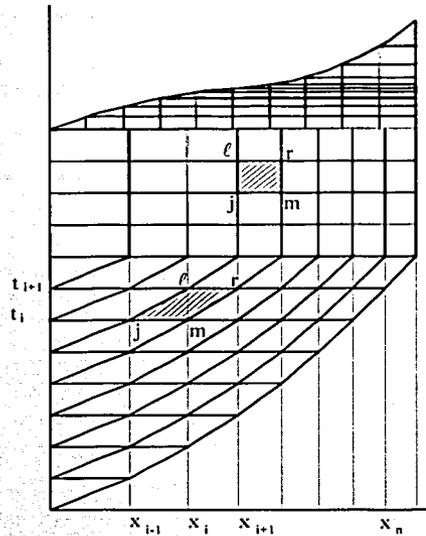


Ilustración 2.12. Disposición de las celdas de cálculo para las fases de avance, almacenamiento, consumo y recesión.

La forma discreta de la ecuación de continuidad para las fases de almacenamiento y consumo se escribe como:

$$\begin{aligned}
 & [\omega q_\ell + (1-\omega)q_j] \delta t - [\omega q_r + (1-\omega)q_m] \delta t \\
 & - [\phi h_\ell + (1-\phi)h_r + \phi I_\ell + (1-\phi)I_r](x_r - x_i) \\
 & + [\phi h_j + (1-\phi)h_m + \phi I_j + (1-\phi)I_m](x_m - x_j) = 0
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

para la ecuación de cantidad de movimiento la forma discreta es aquella proporcionada por la ecuación (2.34). Para guardar consistencia con el esquema desarrollado en este trabajo para la fase de avance, los valores medios se calculan con las ecuaciones (2.35) y (2.36).

2.2.2. Fase de almacenamiento

Se introducen las variables pequeñas δh_r , δq_r , δh_ℓ , δq_ℓ teniendo en cuenta que en términos numéricos deben diferenciarse dos etapas en la fase de almacenamiento, debidas a que en la última celda se tiene un tirante nulo en la punta de la onda al inicio de la fase de almacenamiento, que no puede servir para aproximar el tirante en el tiempo siguiente, situación que motiva el uso del tirante anterior en el espacio como base de cálculo. Las etapas se

denominarán enlace y cuasi-estacionaria, como se ha mencionado ambas difieren en la forma en que se aproxima la solución para el tirante final de la melga cerrada.

La linealización de las ecuaciones de movimiento en las celdas primera e interiores se efectúa conforme a las ecuaciones (2.37)-(2.40): $h_{\ell} = h_j + \delta h_{\ell}$, $h_r = h_m + \delta h_r$, $q_{\ell} = q_j + \delta q_{\ell}$, $q_r = q_m + \delta q_r$.

Para la última celda se tiene en la etapa de enlace:

$$h_{\ell} = h_j + \delta h_{\ell} \quad (2.91)$$

$$h_r = h_j + \delta h_r \quad (2.92)$$

$$q_{\ell} = q_j + \delta q_{\ell} \quad (2.93)$$

mientras que para la etapa cuasi-estacionaria:

$$h_{\ell} = h_j + \delta h_{\ell} \quad (2.94)$$

$$h_r = h_m + \delta h_r \quad (2.95)$$

$$q_{\ell} = q_j + \delta q_{\ell} \quad (2.96)$$

como se aprecia la forma de las aproximaciones en ambas etapas difiere en el cálculo de h_r .

Se obtienen las siguientes expresiones según el tipo de celda que se trate:

CONTINUIDAD

Primera celda

$$\begin{aligned} & [\phi(x_r - x_{\ell})] \delta h_{\ell} + [\omega \delta t] \delta q_r + [(1 - \phi)(x_r - x_{\ell})] \delta h_r = \\ & \delta t (q_j - q_m) + [\phi(I_j - I_{\ell}) + (1 - \phi)(I_m - I_r)] (x_r - x_{\ell}) \end{aligned} \quad (2.97)$$

Celdas interiores:

$$[-\omega\delta t]\delta q_\ell + [\phi(x_r - x_\ell)]\delta h_\ell + [\omega\delta t]\delta q_r + [(1-\phi)(x_r - x_\ell)]\delta h_r = \delta t(q_j - q_m) + [\phi(I_j - I_\ell) + (1-\phi)(I_m - I_r)](x_r - x_\ell) \quad (2.98)$$

Ultima celda

Enlace

$$[\omega\delta t]\delta q_\ell + [-\phi(x_r - x_\ell)]\delta h_\ell + [-(1-\phi)(x_r - x_\ell)]\delta h_r = -\delta t q_j - [\phi(I_j - I_\ell) + (1-\phi)(h_j + I_r)](x_r - x_\ell) \quad (2.99)$$

Cuasi-estacionaria

$$[\omega\delta t]\delta q_\ell + [-\phi(x_r - x_\ell)]\delta h_\ell + [-(1-\phi)(x_r - x_\ell)]\delta h_r = -\delta t q_j - [\phi(I_j - I_\ell) + (1-\phi)(I_m - I_r)](x_r - x_\ell) \quad (2.100)$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Primera celda:

$$\begin{aligned} & \left[-\omega\delta t(g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) - 3\phi g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_j}{h_j} \right]\delta h_\ell + \left[2q\bar{h}\delta t + (1-\phi)\bar{h}^2(x_r - x_\ell) + \phi\frac{g\delta t}{d}\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_m}{q_m} \right]\delta q_r \\ & + \left[\omega\delta t(g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) - 3(1-\phi)g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_m}{h_m} \right]\delta h_r = 2q\bar{h}\delta t(q_j - q_m) + \delta t(g\bar{h}^3 - \bar{q}^2)(h_j - h_m) \\ & - g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)[(1-\phi)J_m + \phi J_j - J_o] - \beta q\bar{h}(x_r - x_\ell)[\phi(I_\ell - I_j) + (1-\phi)(I_r - I_m)] \end{aligned} \quad (2.101)$$

Celdas interiores:

$$\begin{aligned}
 & \left[-2q\bar{h}\omega\delta t + \phi\bar{h}^2(x_r - x_\ell) + \phi\frac{g\delta t}{d}\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_j}{q_j} \right] \delta q_\ell + \left[-\omega\delta t(g\bar{h}^3 - q^2) - 3\phi g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_j}{h_j} \right] \delta h_\ell + \\
 & \left[2q\bar{h}\delta t + (1-\phi)\bar{h}^2(x_r - x_\ell) + (1-\phi)\frac{g\delta t}{d}\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_m}{q_m} \right] \delta q_r + \left[\omega\delta t(g\bar{h}^3 - q^2) - 3(1-\phi)g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_m}{h_m} \right] \delta h_r \\
 & = 2q\bar{h}\delta t(q_j - q_m) + \delta t(g\bar{h}^3 - q^2)(h_j - h_m) - g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)[(1-\phi)J_m + \phi J_j - J_o] \\
 & - \beta q\bar{h}(x_r - x_\ell)[\phi(I_\ell - I_j) + (1-\phi)(I_r - I_m)]
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

Ultima celda

Enlace

$$\begin{aligned}
 & \left[-2q\bar{h}\omega\delta t + \phi\bar{h}^2(x_r - x_\ell) + \phi\frac{g\delta t}{d}\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_j}{q_j} \right] \delta q_\ell + \left[-\omega\delta t(g\bar{h}^3 - q^2) - 3\phi g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_j}{h_j} \right] \delta h_\ell + \\
 & [\omega\delta t(g\bar{h}^3 - q^2)]\delta h_r = 2q\bar{h}(1-\omega)\delta t q_j + \delta t(1-\omega)(g\bar{h}^3 - q^2)h_j - \bar{h}^2(1-\phi)(x_r - x_\ell)q_j \\
 & - g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)(J_j - J_o) - \beta q\bar{h}(x_r - x_\ell)[(1-\phi)I_r + \phi(I_\ell - I_j)]
 \end{aligned} \tag{2.103}$$

Cuasi-estacionaria

$$\begin{aligned}
 & \left[-2q\bar{h}\omega\delta t + \phi\bar{h}^2(x_r - x_\ell) + \phi\frac{g\delta t}{d}\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_j}{q_j} \right] \delta q_\ell + \left[-\omega\delta t(g\bar{h}^3 - q^2) - 3\phi g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)\frac{J_j}{h_j} \right] \delta h_\ell + \\
 & [\omega\delta t(g\bar{h}^3 - q^2)]\delta h_r = -2q\bar{h}(1-\omega)\delta t q_m + \delta t(1-\omega)(g\bar{h}^3 - q^2)(h_j - h_m) - g\delta t\bar{h}^3(x_r - x_\ell)[J_j - J_o] \\
 & - \beta q\bar{h}(x_r - x_\ell)[(1-\phi)I_r + \phi(I_\ell - I_j)]
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

2.2.4.3. Fase de consumo

La fase de consumo comienza una vez que se tiene en el dominio de solución una cantidad de agua que permite disponer de una lámina media igual a la lámina de riego que desea aplicarse, y termina en el momento en que se consume el agua en la cabecera de la melga, dando inicio a la fase de recesión. Para modelar la fase de consumo se utilizan las aproximaciones de la fase de almacenamiento en su etapa cuasi-estacionaria considerando la eliminación del gasto en la cabecera de la melga en el cálculo de la primera celda. Se obtienen las siguientes expresiones para la primera celda, mientras que para las celdas interiores y la última celda se hace uso de las ecuaciones (2.98) y (2.100) para la ecuación de continuidad, y (2.102) y (2.104) para la ecuación de cantidad de movimiento:

CONTINUIDAD

$$\begin{aligned} & [\phi(x_r - x_r)] \delta h_r + [\omega \delta t] \delta q_r + [(1 - \phi)(x_r - x_r)] \delta h_r = \\ & - \delta t q_m + [\phi(I_j - I_r) + (1 - \phi)(I_m - I_r)] (x_r - x_r) \end{aligned} \quad (2.105)$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\begin{aligned} & \left[-\delta t (g \bar{h}^3 - q^2) - 3\phi g \delta t \bar{h}^3 (x_r - x_r) \frac{J_j}{h_j} \right] \delta h_r + \left[2q \bar{h} \delta t + (1 - \phi) \bar{h}^2 (x_r - x_r) + \phi \frac{g \delta t}{d} \bar{h}^3 (x_r - x_r) \frac{J_m}{q_m} \right] \delta q_r \\ & + \left[\delta t (g \bar{h}^3 - q^2) - 3(1 - \phi) g \delta t \bar{h}^3 (x_r - x_r) \frac{J_m}{h_m} \right] \delta h_r = -2q \bar{h} \delta t q_m + \delta t (g \bar{h}^3 - q^2) (h_j - h_m) \\ & - g \delta t \bar{h}^3 (x_r - x_r) [(1 - \phi) J_m + \phi J_j - J_o] - \beta q \bar{h} (x_r - x_r) [\phi(I_r - I_j) + (1 - \phi)(I_r - I_m)] \end{aligned} \quad (2.106)$$

2.2.2.4. Fase de recesión

La fase de recesión ha sido modelada mediante un esquema con paso de espacio constante (δx), que permite evitar los errores que se involucran en la reproducción del frente de recesión cuando se hace uso de un esquema con paso de tiempo constante, dichos errores tienen que ver con el hecho de que difícilmente se obtiene un tirante nulo en una posición de la malla donde se resuelven las ecuaciones de Saint-Venant para un tiempo que sea múltiplo del paso de tiempo constante empleado, motivando que el frente de recesión se corra de manera anticipada al nudo siguiente, no obstante que esta aproximación produce errores de balance poco significativos si se agrega a la lámina infiltrada el tirante que permanece sobre el nudo desde el cual se efectúa el

corrimiento del frente de recesión, es posible mejorar la aproximación utilizando un esquema con paso de espacio constante. Es necesario realizar una interpolación entre las variables tanto de las ecuaciones de Saint-Venant como de la ecuación de Richards para pasar de la malla de paso de espacio variable utilizada en las fases de consumo a una malla de paso de espacio constante.

La utilización de un esquema de paso de espacio constante genera un sistema de ecuaciones en el cual el número de incógnitas es inferior en dos unidades al número de ecuaciones, motivo por el cual se acepta no resolver la ecuación de conservación de momentum en la primera y la última de las celdas de cálculo. El paso de tiempo se calcula utilizando las variables hidráulicas de la primera celda teniendo en cuenta la forma discreta de la ecuación de continuidad:

$$\delta t (1 - \omega) q_m = \delta x [\phi I_j + (1 - \phi)(h_m + I_m) - I_r] \quad (2.107)$$

es importante señalar que se desconoce *a priori* el valor de I_r , motivo por el cual es necesario proporcionar un estimador inicial, en este caso se tienen en cuenta los valores de lámina infiltrada correspondientes al nudo de coordenada r en los dos niveles de tiempo anteriores, de tal forma que es posible aproximar la velocidad de infiltración y calcular el primer estimador como $I_{r1} = I_m + v_1 \delta t$, donde $v_1 = (I_r^{k-1} - I_r^{k-2}) / \delta t$ y se resuelve la ecuación (2.107) para el paso de tiempo mediante un procedimiento iterativo. Con el valor del paso de tiempo así obtenido se avanzan los perfiles de flujo superficial y subsuperficial resolviendo el sistema de ecuaciones que a continuación se muestra según el tipo de celda tratada:

CONTINUIDAD

Segunda celda

$$[\omega \delta t] \delta q_r + [(1 - \phi) \delta x] \delta h_r = -\delta t q_m + [\phi(I_j - I_r) + (1 - \phi)(I_m - I_r)] \delta x \quad (2.108)$$

Celdas interiores:

$$[-\omega \delta t] \delta q_\ell + [\phi \delta x] \delta h_\ell + [\omega \delta t] \delta q_r + [(1 - \phi) \delta x] \delta h_r = \delta t (q_j - q_m) + [\phi(I_j - I_\ell) + (1 - \phi)(I_m - I_r)] \delta x \quad (2.109)$$

Ultima celda:

$$[\omega \delta t] \delta q_\ell + [-\phi \delta x] \delta h_\ell + [-(1 - \phi) \delta x] \delta h_r = -\delta t q_j - [\phi(I_j - I_\ell) + (1 - \phi)(I_m - I_r)] \delta x \quad (2.110)$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Segunda celda

$$\begin{aligned} & \left[2q\bar{h}\delta t + (1-\phi)\bar{h}^2\delta x + \phi \frac{g\delta t}{d} \delta x \bar{h}^3 \frac{J_m}{q_m} \right] \delta q_r + \left[\omega\delta t(g\bar{h}^3 - q^2) - 3(1-\phi)g\delta t\delta x \bar{h}^3 \frac{J_m}{h_m} \right] \delta h_r = \\ & 2q\bar{h}\delta t(q_j - q_m) + \delta t(g\bar{h}^3 - q^2)(h_j - h_m) - g\delta t\delta x \bar{h}^3 [(1-\phi)J_m + \phi J_j - J_o] \\ & - \beta q\bar{h}\delta x [\phi(I_r - I_j) + (1-\phi)(I_r - I_m)] \end{aligned} \quad (2.111)$$

Celdas interiores

$$\begin{aligned} & \left[-2q\bar{h}\omega\delta t + \phi\bar{h}^2\delta x + \phi \frac{g\delta t}{d} \delta x \bar{h}^3 \frac{J_j}{q_j} \right] \delta q_r + \left[-\omega\delta t(g\bar{h}^3 - q^2) - 3\phi g\delta t\delta x \bar{h}^3 \frac{J_j}{h_j} \right] \delta h_r + \\ & \left[2q\bar{h}\delta t + (1-\phi)\bar{h}^2\delta x + \phi \frac{g\delta t}{d} \delta x \bar{h}^3 \frac{J_m}{q_m} \right] \delta q_r + \left[\omega\delta t(g\bar{h}^3 - q^2) - 3(1-\phi)g\delta t\delta x \bar{h}^3 \frac{J_m}{h_m} \right] \delta h_r = \\ & 2q\bar{h}\delta t(q_j - q_m) + \delta t(g\bar{h}^3 - q^2)(h_j - h_m) - g\delta t\delta x \bar{h}^3 [(1-\phi)J_m + \phi J_j - J_o] \\ & - \beta q\bar{h}\delta x [\phi(I_r - I_j) + (1-\phi)(I_r - I_m)] \end{aligned} \quad (2.112)$$

2.2.5. Aplicación

Con la finalidad de verificar que la solución generada por el modelo desarrollado para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards guarde formas lógicas para las variables hidráulicas del riego, se realiza una aplicación empleando datos reportados en la literatura mencionados en el apartado 2.2.2. (Fuentes 1992). La discretización es detallada en la parte final del apartado 2.1.5. En la ilustración 2.13 se muestran los perfiles de flujo obtenidos durante la fase de avance y en la ilustración 2.14 las curvas de avance y recesión para la melga cerrada. En la ilustración 2.15 se muestra un detalle del comportamiento de los tirantes de agua en la parte final de la melga durante la fase de almacenamiento. La ilustración 2.16 muestra las cuatro fases del riego por melgas. En la ilustración 2.17 se representa la evolución y recesión vertical del tirante en la cabecera de la melga vista a través del comportamiento del potencial de presión, en la ilustración 2.18 se muestra la evolución del potencial de presión proporcionado por la ecuación de Richards a lo largo de la melga durante la fase de recesión.

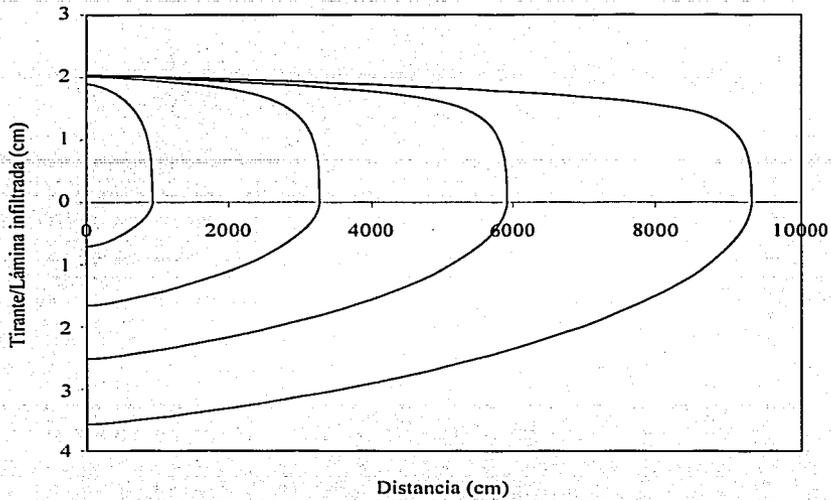


Ilustración 2.13. Perfiles de flujo obtenidos durante la fase de avance, correspondientes a tiempos de 1, 5, 10 y 20 minutos.

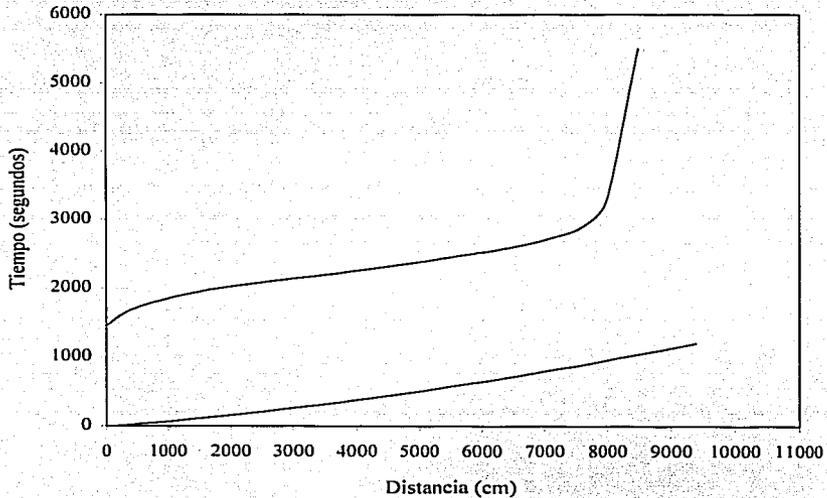


Ilustración 2.14. Curvas de avance y recesión, obtenidas mediante el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards.

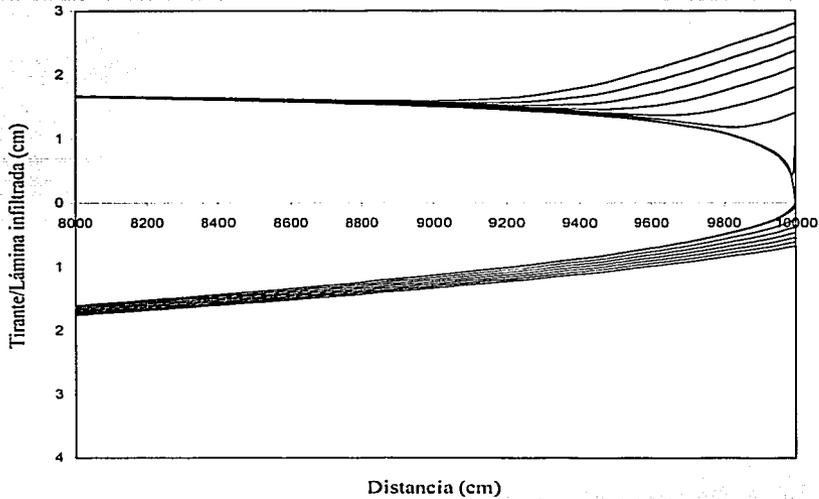


Ilustración 2.15. Detalle de la evolución de tirantes al final de la melga durante la fase de almacenamiento.

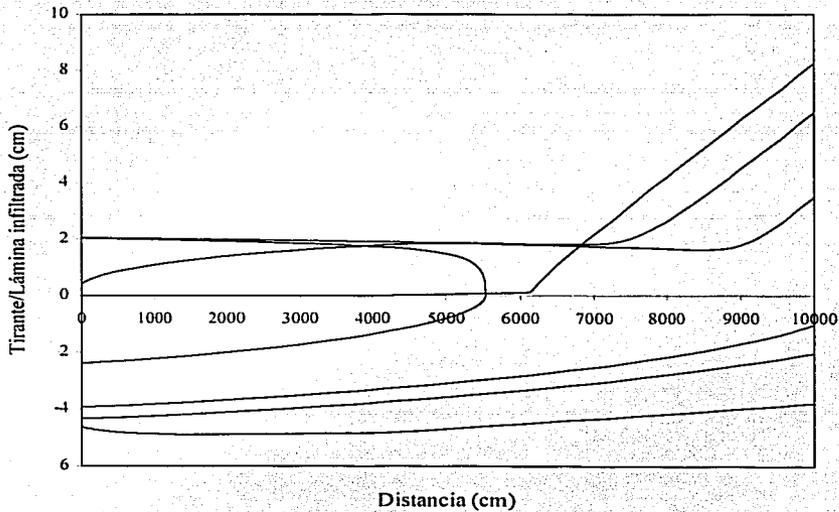


Ilustración 2.16. Aspectos de las cuatro fases del riego por melgas.

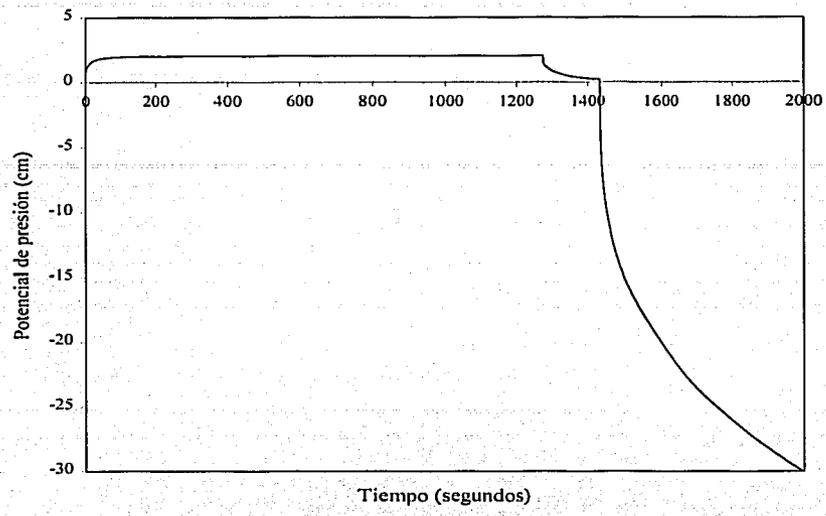


Ilustración 2.17. Evolución del potencial de presión en la cabecera de la melga.

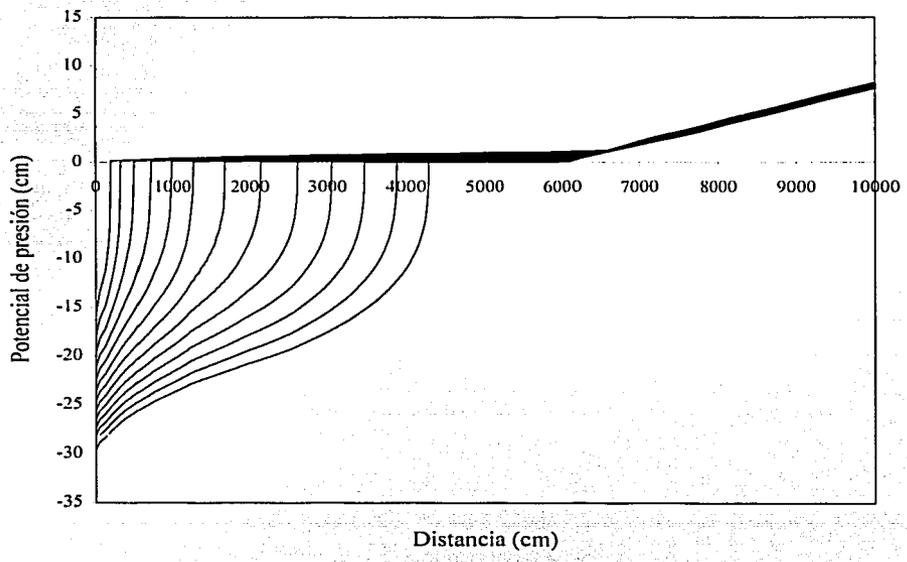


Ilustración 2.18. Evolución del potencial de presión a lo largo de la melga (fase de recesión).

CAPITULO III

VERIFICACIÓN NUMÉRICA DE LA HIPÓTESIS DEL TIEMPO DE CONTACTO EN EL RIEGO POR MELGAS

Resumen

La hipótesis del tiempo de contacto, ampliamente utilizada en el riego por melgas, asume que el agua tiene un movimiento predominantemente vertical en el suelo, es decir que la ley de infiltración es única a lo largo del desarrollo de la melga. En este capítulo se presenta una prueba numérica de la hipótesis del tiempo de contacto, la cual ha sido efectuada acoplando las ecuaciones de Saint-Venant con la ecuación de Richards en sus formas unidimensional y bidimensional, el primer acoplamiento corresponde al uso de la hipótesis del tiempo de contacto mientras que en el segundo se prescinde de la misma. La diferencia entre las variables hidráulicas obtenidas mediante ambos procedimientos, muestra que el uso de la hipótesis del tiempo de contacto conduce a obtener curvas que representan fases de avance más lentas, pero que no difieren significativamente de aquellas obtenidas sin tener en cuenta dicho supuesto, es decir, la hipótesis del tiempo de contacto es una muy buena aproximación para la descripción del flujo de agua en el suelo en el riego por melgas.

3.1. Introducción

La hipótesis del tiempo de contacto en el riego por melgas asume que el agua tiene predominantemente un movimiento vertical en el suelo y por lo tanto que la función que representa la evolución de la lámina de agua infiltrada en el suelo es única sobre todo punto del desarrollo de la melga si el suelo es considerado homogéneo.

Simbólicamente la hipótesis del tiempo de contacto puede representarse teniendo en cuenta que la posición del frente de avance puede ser descrita por la función:

$$x_f = X(t) \tag{3.1}$$

en consecuencia el tiempo en que la onda arriba a una sección arbitraria x está dado por:

$$t_x = X^{-1}(x) \tag{3.2}$$

entonces el tiempo de contacto se calcula como:

$$\tau = t - t_x \tag{3.3}$$

en la hipótesis del tiempo de contacto se supone que el volumen infiltrado puede ser determinado a partir de una función de una sola variable:

$$I(x, t) = I(\tau) = I(t - t_c) \quad (3.4)$$

La necesidad de verificar el grado de aproximación de la hipótesis del tiempo de contacto es motivada por la simplificación significativa que se obtiene mediante su aplicación en la descripción matemática del fenómeno del riego, lo cual es particularmente importante cuando se trata de desarrollar soluciones analíticas o de estudiar las relaciones constitutivas entre las variables hidráulicas como la ley de resistencia hidráulica.

El grado de aproximación de la hipótesis del tiempo de contacto puede verificarse numéricamente utilizando el acoplamiento entre las ecuaciones de Saint-Venant y la ecuación de Richards en sus formas unidimensional y bidimensional, el primer acoplamiento involucra la hipótesis del tiempo de contacto mientras que en el segundo se prescinde de la misma. El flujo del agua sobre la superficie del suelo es modelado utilizando las ecuaciones de Saint-Venant (ecuaciones 1.1. y 1.2.), se utiliza la ley de resistencia de Fuentes *et al.* (2004) de la ecuación (1.3.). Se tienen en cuenta las condiciones límite que deben sujetar a las ecuaciones de Saint-Venant para modelar la fase de avance en el riego por melgas, proporcionadas por las ecuaciones (2.31) y (2.32).

El flujo del agua en el suelo es modelado utilizando las formas unidimensional y bidimensional de la ecuación de Richards. Para el caso de la forma bidimensional el tratamiento es el mostrado en el apartado 2.1., mientras que para el análisis unidimensional, cuyo uso implica aceptar la hipótesis del tiempo de contacto en el riego por gravedad, se tiene en cuenta la ecuación de Richards escrita para la dirección vertical:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (3.5)$$

como condición inicial para la solución de la ecuación de Richards unidimensional se debe especificar la distribución de las presiones en el espacio:

$$\psi = \psi_0(z) \quad (3.6)$$

en la superficie del suelo se impone una condición de frontera tipo Dirichlet con potencial de presión igual al tirante de agua calculado mediante las ecuaciones de Saint-Venant:

$$\psi = h, \quad z = 0, \quad t > 0 \quad (3.7)$$

en la frontera inferior se tiene en cuenta una condición de gradiente unitario:

$$\frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = -1, \quad z = P, \quad t > 0 \quad (3.8)$$

donde P es la profundidad de la columna de suelo, que debe ser mayor que la máxima posición que el frente de humedecimiento alcanza durante el tiempo en que transcurre el riego.

3.2. La hipótesis del tiempo de contacto

Para realizar la prueba numérica de la hipótesis del tiempo de contacto se ha utilizado la caracterización hidrodinámica reportada en la literatura del suelo *franco de Montecillo*, la cual es presentada en el apartado 2.2.2.

Para la solución de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards se utilizó un paso de tiempo constante $\Delta t = 0.5$ s. La ecuación de Richards bidimensional se resolvió en un dominio de longitud $L = 100$ m y profundidad $P = 0.25$ m, se utilizaron pasos de espacio mínimo y máximo: $\Delta z_{\min} = 0.02$ cm, $\Delta x_{\min} = 0.02$ cm, $\Delta z_{\max} = 1.0$ cm y $\Delta x_{\max} = 1.0$ cm, habiéndose generado una malla rectangular regular de 260026 nudos con 500000 elementos. Para la solución del sistema de ecuaciones algebraicas que resulta de la aplicación del método del elemento finito, se utilizó como método de solución el gradiente conjugado preconditionado (Noor y Peters, 1987) con almacenamiento libre de ceros. Para la ecuación unidimensional de Richards ha sido utilizada una discretización que corresponde con las columnas utilizadas en la malla bidimensional. No obstante que la solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant se realiza mediante un esquema lagrangiano, la solución numérica de la ecuación de Richards se obtiene sobre el dominio de solución definido por toda la longitud de la melga y la profundidad considerada, previendo posibles efectos de redistribución del agua en el suelo.

La prueba numérica ha sido efectuada realizando ambos acoplamientos y permite concluir que la hipótesis del tiempo proporciona una muy buena aproximación para la descripción del flujo del agua en el riego por melgas. En la ilustración 3.1 se muestran las curvas de avance obtenidas sin considerar y considerando de la hipótesis del tiempo de contacto y en la ilustración 3.2 un detalle de la comparación, asimismo se muestran los perfiles de flujo (ilustración 3.3) y la evolución del tirante y de la lámina infiltrada en la cabecera de la melga (ilustración 3.4). En cada ilustración se han incluido los resultados correspondientes a la consideración y la prescripción de la hipótesis del tiempo de contacto. Se puede apreciar que existen diferencias del orden de centímetros en la posición del frente de avance entre ambos casos, el frente de la onda avanza más rápidamente cuando no se hace uso de la hipótesis del tiempo de contacto debido al flujo horizontal que existe en el suelo, situación que origina láminas infiltradas menores a las obtenidas

considerando flujo únicamente vertical y por lo tanto una respuesta de las ecuaciones de Saint-Venant generando una onda más rápida.

En las ilustraciones 3.5 y 3.6 se muestra la evolución tanto del tirante como de la lámina infiltrada en diversos puntos localizados a lo largo de la melga. Puede apreciarse que el supuesto de que la función que describe el proceso de la infiltración es la misma a lo largo de la melga es aceptable, y debe notarse que la hipótesis del tiempo de contacto para la infiltración no tiene el mismo significado para la evolución del tirante sobre la superficie del suelo, es decir, no obstante que la ley de infiltración puede considerarse única a lo largo del desarrollo de la melga, la función de evolución del tirante varía con la posición en la melga, situación que se había hecho notar en la sección 2.2.2. donde se analiza el caso en que no existe infiltración del agua en el suelo.

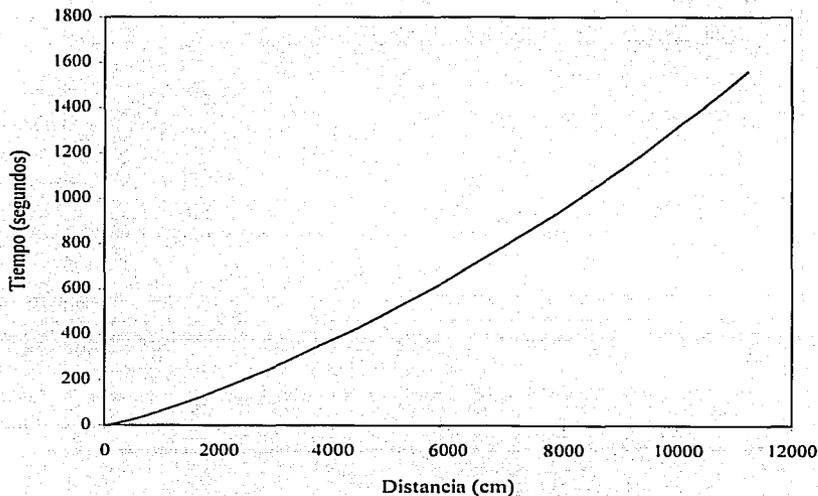
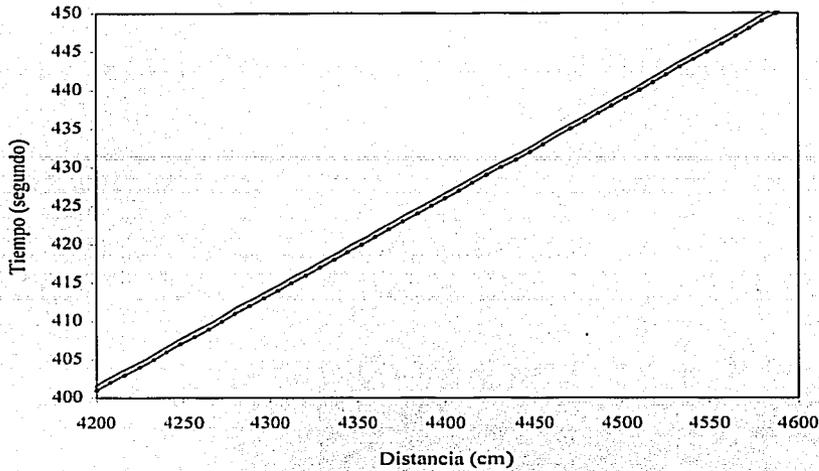


Ilustración 3.1. Comparación de las curvas de avance obtenidas sin considerar y considerando la hipótesis del tiempo de contacto.



— Hipótesis del tiempo de contacto - - Sin hipótesis del tiempo de contacto

Ilustración 3.2. Detalle de la comparación de las curvas de avance obtenidas sin considerar y considerando la hipótesis del tiempo de contacto.

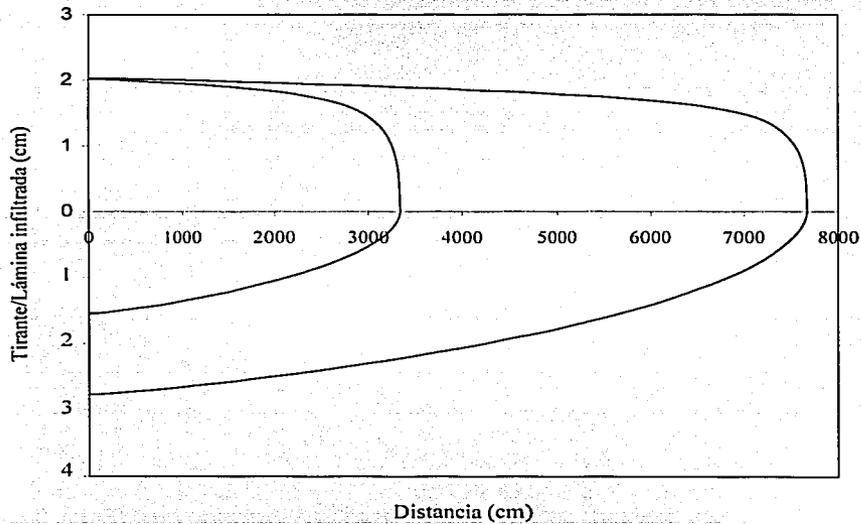


Ilustración 3.3. Comparación de los perfiles de flujo obtenidos sin considerar y considerando la hipótesis del tiempo de contacto.

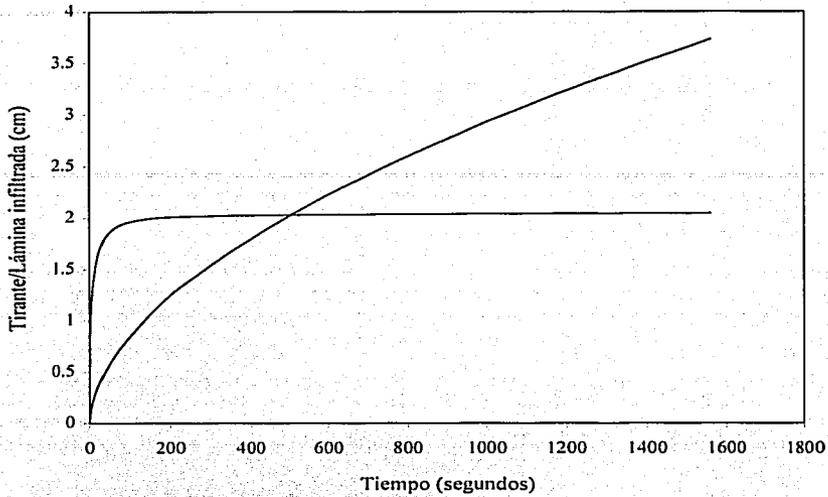


Ilustración 3.4. Comparación de la evolución de la lámina infiltrada y del tirante en la cabecera de la melga sin considerar y considerando la hipótesis del tiempo de contacto

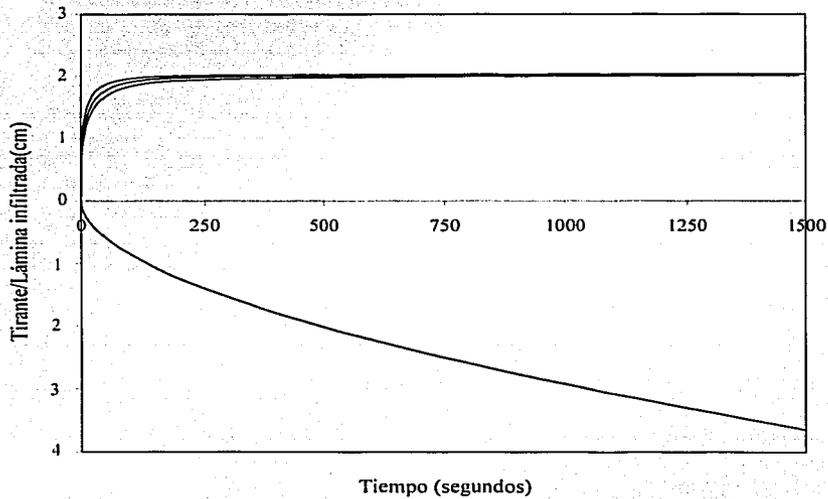


Ilustración 3.5. Acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards unidimensional. Evolución del tirante y la lámina infiltrada en diferentes puntos localizados a lo largo de la melga.

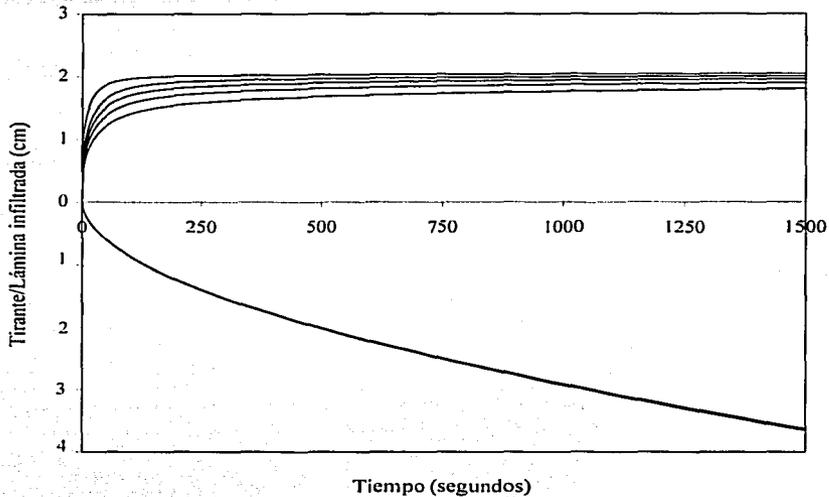


Ilustración 3.6. Acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards bidimensional. Evolución del tirante y la lámina infiltrada en diferentes puntos localizados a lo largo de la melga.

3.3. Efecto de la pendiente topográfica de la melga

La principal variable que puede alterar el resultado obtenido en la sección anterior es la pendiente topográfica de la melga, motivo por el cual se verifica su efecto en la prueba numérica de la hipótesis del tiempo de contacto. Se consideran las ecuaciones de Saint-Venant escritas teniendo en cuenta el ángulo del fondo de la melga (García 1994):

Continuidad:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad (3.9)$$

Cantidad de movimiento:

$$2qh \frac{\partial q}{\partial x} + (h^3 g \cos^4 \alpha - q^2) \frac{\partial h}{\partial x} + h^2 \cos \alpha \frac{\partial q}{\partial t} + h^3 g \cos^2 \alpha (J - \sin \alpha) + \beta qh \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad (3.10)$$

donde α es el ángulo que forma la base de la melga con la horizontal. La ecuación de Richards para el caso en que se considera la pendiente topográfica del terreno se escribe como (Philip, 1991):

Forma unidimensional:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \cos \alpha \quad (3.11)$$

Forma bidimensional:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \alpha - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \cos \alpha \quad (3.12)$$

Para un cambio de pendiente de un orden de magnitud, de $J_o = 0.0020$ a $J_o = 0.020$, siendo este último un valor considerablemente grande en el contexto del riego por melgas, se concluye que la hipótesis del tiempo de contacto continúa siendo una buena aproximación. En la ilustración 3.7 se muestran la comparación de las curvas de avance obtenidas mediante el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards unidimensional y bidimensional teniendo en cuenta la pendiente de la melga, en la ilustración 3.8 se muestra la evolución correspondiente del tirante y la lámina infiltrada.

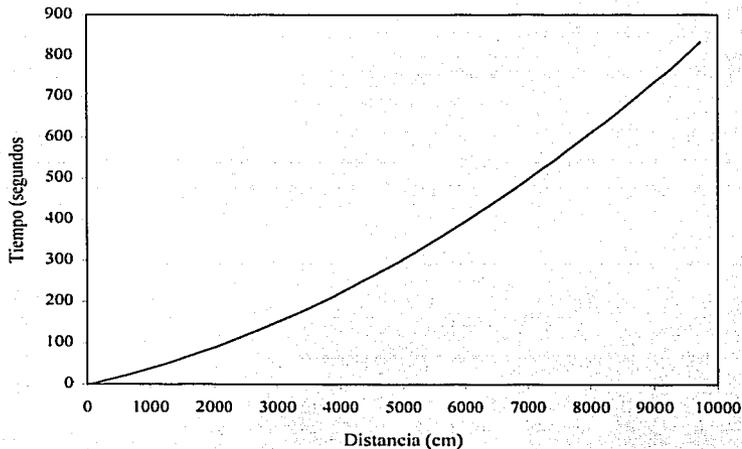


Ilustración 3.7. Comparación de las curvas de avance obtenidas sin considerar y considerando la hipótesis del tiempo de contacto. Pendiente topográfica de la melga $J_o = 0.020$.

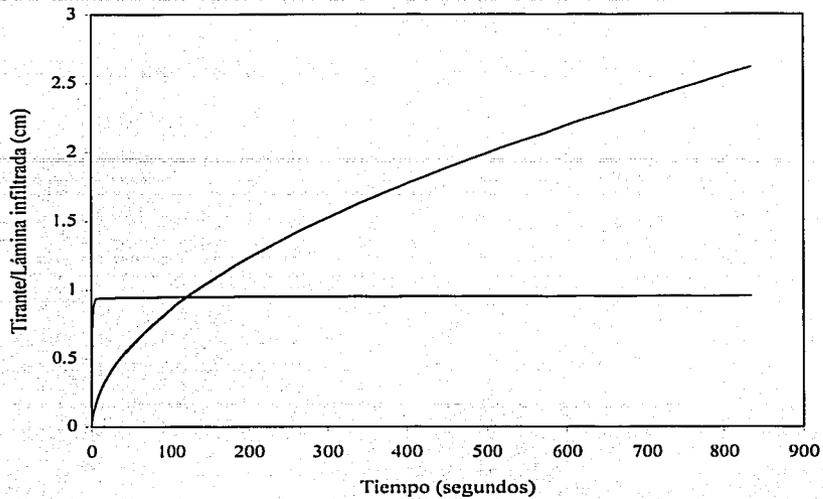


Ilustración 3.8. Comparación de la evolución de la lámina infiltrada y del tirante en la cabecera de la melga sin considerar y considerando la hipótesis del tiempo de contacto. Pendiente topográfica de la melga $J_o = 0.020$.

CAPÍTULO IV

APLICACIONES

Resumen

Los resultados obtenidos en los capítulos anteriores sirven como base para efectuar tres aplicaciones del acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards, la primera se relaciona con la utilización del modelo desarrollado con fines de caracterización hidrodinámica de suelos haciendo uso de pruebas de riego, la segunda trata sobre el efecto de la presencia de un manto freático somero sobre la evolución del frente de avance y en la tercera se verifica la existencia de una relación básicamente lineal entre la longitud de la melga y el gasto de aporte necesario para lograr una aplicación óptima del riego.

El modelo se utiliza con fines de caracterización hidrodinámica de suelos, asumiendo que se conocen los valores de los contenidos volumétricos de agua a saturación y residual, así como de los parámetros de forma tanto de la característica de humedad como de la curva de conductividad, obtenidos por ejemplo mediante el procedimiento sugerido por Fuentes (1992), la aplicación consiste en hacer uso de un procedimiento inverso para determinar la conductividad hidráulica a saturación y la escala de presiones de la curva característica de humedad del suelo.

El efecto de la profundidad del manto freático en la evolución del frente de avance en el riego por melgas es simulado utilizando el modelo numérico desarrollado en capítulos anteriores y haciendo uso de la hipótesis del tiempo de contacto verificada precedentemente. El modelo ha sido calibrado y se ha verificado su aplicabilidad utilizando datos reportados en la literatura por Pacheco (1995), relacionados con pruebas de riego efectuadas en La Chontalpa, Tabasco, Mex.

El modelo desarrollado se utiliza para determinar el gasto óptimo necesario para aplicar una lámina de riego específica. El gasto óptimo ha sido considerado como aquel para el cual el Coeficiente de Uniformidad de Christiansen es máximo, manteniendo valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego, y se ha evidenciado que tiene un comportamiento básicamente lineal con respecto a la longitud de la melga independientemente de la condición de distribución inicial de las presiones en el suelo.

4.1. Caracterización hidrodinámica de suelos utilizando pruebas de riego

El acoplamiento numérico de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por melgas puede ser utilizado para la caracterización hidrodinámica de los suelos, la aplicación se realiza utilizando datos de pruebas de avance y se ilustra con datos reportados en la literatura por Fuentes (1992). Los parámetros θ_s , θ_r , m y η de las características hidrodinámicas fueron determinados a partir de la curva granulométrica del suelo siguiendo la metodología propuesta por Fuentes (1992), se obtiene para la característica de van Genuchten (1980): $\theta_s = 0.4865 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $\theta_r = 0.0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $m = 0.1258$, $n = 2.2878$, mientras que el parámetro de forma para la conductividad de Brooks y Corey (1964) resulta $\eta = 11.0$. Los parámetros para la ley de resistencia de Fuentes *et al.* (2004): $d = 1$, $\kappa = 1/54$ han sido determinado conforme a las condiciones de flujo. La pendiente topográfica de la melga es $J_0 = 0.002$ y su longitud $L = 100 \text{ m}$. El parámetro que permite tener en cuenta el efecto de la infiltración sobre el balance de la cantidad de movimiento ha sido considerado como $\beta = 2$ conforme a Fuentes (1992).

Las dos pruebas de riego efectuadas difieren en el contenido volumétrico de agua al inicio del riego y en el gasto de aporte suministrado en la cabecera de la melga. La primera de las pruebas ha sido utilizada para caracterizar hidrodinámicamente al suelo, se tiene un valor inicial del contenido volumétrico de agua $\theta_0 = 0.2749 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ y un gasto unitario $q_0 = 0.0032 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$. La suma del cuadrado de los errores entre la evolución del frente de avance observada en campo y la obtenida mediante la aplicación del modelo es mínima con los valores de los parámetros $\psi_d = -32.75 \text{ cm}$ y $K_s = 1.84 \text{ cm}/\text{h}$. En la ilustración 4.1 se muestra la buena correspondencia entre ambas series de valores, $R^2 = 0.9982$; error cuadrático medio ECM = 25.12 cm.

La verificación de la aplicabilidad del modelo y de lo acertado de la caracterización hidrodinámica ha sido efectuada utilizando los datos obtenidos en la segunda prueba de riego, para este caso el valor inicial del contenido volumétrico de agua es $\theta_0 = 0.3017 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ y el gasto unitario $q_0 = 0.0024 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, en la ilustración 4.2 se muestra el buen acuerdo entre las mediciones de la evolución de la posición del frente de avance efectuadas en campo y los resultados proporcionados por el modelo presentado en este trabajo, $R^2 = 0.9980$, error cuadrático medio ECM = 49.05 cm

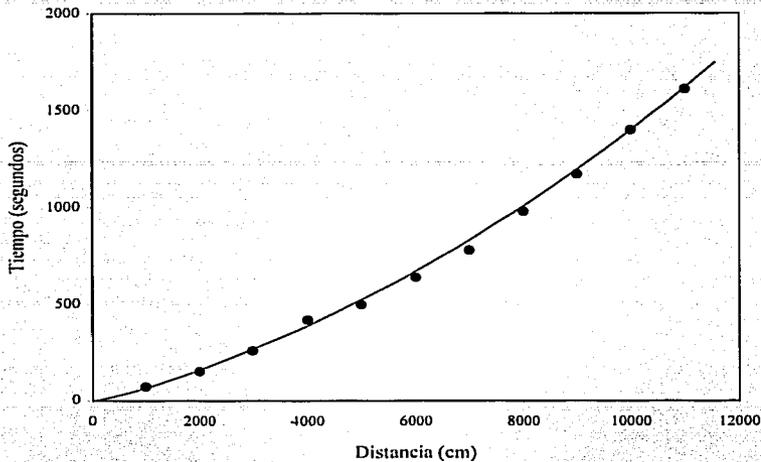


Ilustración 4.1. Caracterización hidrodinámica del suelo utilizando datos de avance de una prueba de riego por melgas: $q_0 = 0.0032 \text{ m}^3 / \text{s} / \text{m}$, $\theta_0 = 0.2749 \text{ cm}^3 / \text{cm}^3$. $R^2 = 0.9982$, error cuadrático medio $\text{ECM} = 25.12 \text{ cm}$ con $\psi_d = -32.75 \text{ cm}$ y $K_s = 1.84 \text{ cm} / \text{h}$.

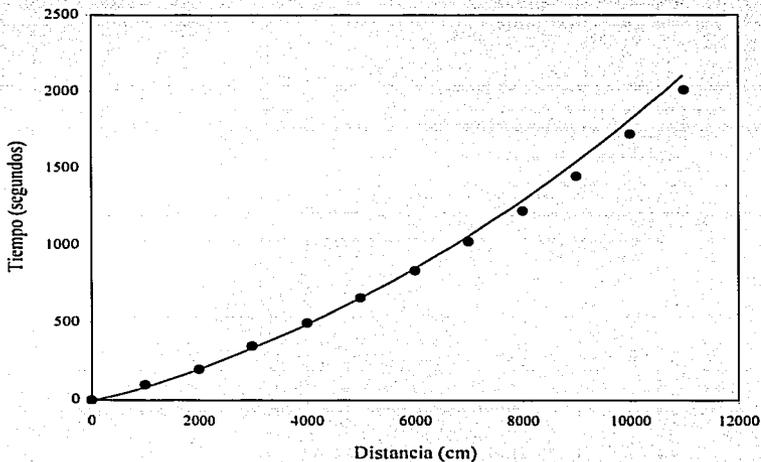


Ilustración 4.2. Verificación de la aplicabilidad del modelo para la fase de avance del riego por melgas $q_0 = 0.0024 \text{ m}^3 / \text{s} / \text{m}$, $\theta_0 = 0.3017 \text{ cm}^3 / \text{cm}^3$. $R^2 = 0.9980$, error cuadrático medio $\text{ECM} = 49.05 \text{ cm}$.

4.2. Efecto de la posición del manto freático en la evolución del frente de avance en el riego por melgas

4.2.1. Introducción

Es posible utilizar el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards para describir el efecto de la presencia de un manto freático somero sobre la evolución del frente de avance durante el riego por melgas. El tema ha sido abordado por Pacheco (1995) describiendo el flujo del agua sobre la superficie del suelo utilizando el modelo hidrológico y el flujo del agua en el suelo mediante la ecuación unidimensional de Richards, el presente trabajo mejora la descripción debido a que, de una parte se recurre a la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant para modelar el flujo del agua a superficie libre y de otra parte se efectúa el uso justificado, en el contexto de la prueba numérica de la hipótesis del tiempo de contacto mostrada en el capítulo III, de la ecuación de Richards unidimensional para describir el flujo del agua en el suelo.

El flujo del agua sobre la superficie del suelo es modelado utilizando las ecuaciones de Saint-Venant (ecuaciones 1.1 y 1.2) y la ley de resistencia de Fuentes *et al.* (2004) de la ecuación (1.3). Se tienen en cuenta las condiciones límite que deben sujetar a las ecuaciones de Saint-Venant para modelar la fase de avance en el riego por melgas, proporcionadas por las ecuaciones (2.31) y (2.32).

Habida cuenta de los resultados mostrados en el capítulo III respecto al buen grado de aproximación de la hipótesis del tiempo de contacto, el flujo del agua en el suelo ha sido modelado utilizando la ecuación de Richards en su forma unidimensional (ecuación 3.5). Como condición inicial para la solución de la ecuación de Richards unidimensional se considera una distribución hidrostática de las presiones teniendo como referencia la posición del manto freático, es decir:

$$\psi = z - P, \quad 0 \leq z \leq E_c, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

donde P es la profundidad del manto freático y E_c el espesor de la columna de suelo.

La condición de frontera en la superficie del suelo se asigna conforme al tirante de agua (h) proporcionado por las ecuaciones de Saint-Venant:

$$\psi = h, \quad z = 0, \quad t > 0 \quad (4.2)$$

La condición de frontera inferior se asigna teniendo en cuenta una columna de espesor mayor que la profundidad del manto freático, considerando en su base una condición de Neumann con flujo nulo:

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = 0, \quad z = E_c, \quad t > 0 \quad (4.3)$$

Las características hidrodinámicas consideradas son la combinación de la conductividad $K(\theta)$ de Brooks y Corey (1964) y de la característica de humedad $\theta(\psi)$ de van Genuchten (1980) con la restricción del modelo de Burdine (1953).

El paso de tiempo constante se ha asignado $\Delta t = 0.5$ s, tanto para las ecuaciones de Saint-Venant como para la ecuación de Richards, para la solución numérica de esta última se utilizaron pasos de espacio mínimo y máximo: $\Delta z_{\min} = 0.02$ cm y $\Delta z_{\max} = 1.0$ cm. La discretización de la ecuación de Richards se ha efectuado haciendo uso de valores de pasos de tiempo y espacio que generan una malla más fina que la utilizada en la validación presentada en el apartado 2.1.5., es decir para mantener una cota de error del 0.25%. La discretización utilizada para la solución de la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant guarda semejanza con las reportadas en la literatura: Katopodes y Strelkoff (1977): $\Delta t_{\min} = 5$ s, Akanbi y Katopodes (1988): $\Delta t_{\max} = 1$ s.

Se han utilizando los datos obtenidos en un experimento de riego por melgas efectuado en la zona productora de arroz de La Chontalpa, Tabasco, México, reportados por Pacheco (1995). El experimento consistió en realizar tres pruebas de riego, habiéndose utilizado la primera de estas para caracterizar hidrodinámicamente al suelo, las pruebas segunda y tercera han sido utilizadas para verificar la aplicabilidad del modelo, habiéndose variado en el caso de la segunda la posición del manto freático y en la tercera tanto la posición del manto freático como el gasto de aporte en la entrada de la melga.

4.2.2. Caracterización hidrodinámica

Las características hidrodinámicas presentan seis parámetros desconocidos, a saber: $\{\theta_r, \theta_s, m, \eta, \psi_d, K_s\}$. El contenido volumétrico de agua residual puede ser asumido igual a cero de acuerdo con Fuentes *et al.* (1992): $\theta_r = 0.0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. El contenido volumétrico de agua a saturación puede ser asimilado a la porosidad total del suelo (ϕ), si se asume que no queda aire atrapado en el suelo saturado: en la arcilla de La Chontalpa $\phi = 0.5245 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ y en consecuencia $\theta_s = 0.5245 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. El parámetro de forma m puede ser estimado a partir de la curva granulométrica y de la porosidad total de acuerdo con un procedimiento sugerido por Fuentes (1992).

La curva granulométrica experimental se ajusta con una función similar a la presentada en la ecuación (2.8):

$$F(D) = \left[1 + \left(\frac{D_g}{D} \right)^N \right]^{-M} \quad (4.4)$$

donde $F(D)$ es la frecuencia acumulada basada en el peso de las partículas cuyos tamaños son inferiores o iguales a D , D_g es un tamaño característico del tamaño de las partículas, M y N son dos parámetros de forma empíricos, y por congruencia: $M = 1 - 2/N$, con $0 < M < 1$ y $N > 2$. El buen ajuste de la curva granulométrica por la ecuación (4.4), $R^2 = 0.9886$, en la arcilla de La Chontalpa se muestra en la ilustración 4.3 con $D_g = 125.53 \mu\text{m}$ y $M = 0.1052$.

Haciendo $\lambda = mn$ y $\mu = MN$ el parámetro de forma m puede ser relacionado con M a través de la fórmula (Fuentes, 1992):

$$\frac{\mu}{\lambda} \cong 1 + \frac{2d-1}{2(1-d)} \quad (4.5)$$

donde d es el cociente de la dimensión fractal del suelo y la dimensión del espacio de Euclides ($d = D/3$) definido implícitamente en función de la porosidad total del suelo por (Fuentes *et al.*, 2001):

$$(1-\phi)^d + \phi^{2d} = 1 \quad (4.6)$$

Con la porosidad $\phi = 0.5245 \text{ cm}^3 / \text{cm}^3$ se obtiene: $d = 0.6994$. En la arcilla de la Chontalpa $\mu = MN = 0.2351$ y por lo tanto $\lambda = mn = 0.1413$, de donde $m = 0.066$.

En la ecuación de Brooks y Corey el parámetro η se puede estimar con la relación propuesta por Fuentes *et al.* (2001): $\eta = 2d(2/\lambda + 1)$. Con los valores precedentes se obtiene para la arcilla de la Chontalpa: $\eta = 21.19$.

Los dos parámetros restantes $\{\psi_d, K_s\}$ pueden ser estimados a partir de fenómenos transitorios del flujo del agua en el suelo. En la arcilla de la Chontalpa, los parámetros son estimados de manera de reproducir la curva de avance observada experimentalmente en una prueba de riego.

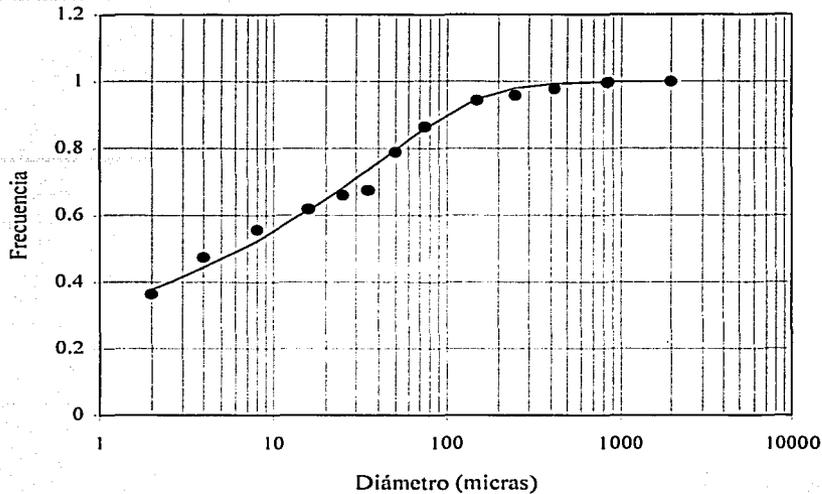


Ilustración 4.3. La curva granulométrica de la *arcilla de La Chontalpa* ajustada con la ecuación (4.4), $R^2 = 0.9886$

4.2.3. Calibración y verificación de la aplicabilidad del modelo

En la primera prueba de riego se dispone de los datos siguientes: gasto total de aporte en la entrada $Q_0 = 15$ lps, ancho de la melga $A = 10.5$ m, en consecuencia el gasto unitario de aporte en la entrada es $q_0 = 0.001428 \text{ m}^3 / \text{s} / \text{m}$, longitud de la melga $L = 100$ m, pendiente de la melga $J_0 = 0.00085$. Se ha utilizado un valor $\beta = 2$ del parámetro asociado al efecto de la infiltración en la ecuación de cantidad de movimiento. El cálculo del número de Reynolds permite clasificar el régimen de flujo laminar, por lo cual se utiliza $d = 1$ como parámetro de la ley de resistencia

La suma de los cuadrados de los errores entre la curva de avance calculada con el sistema acoplado de Saint-Venant y Richards y la curva de avance observada es mínima con los valores $\psi_d = -15$ cm y $K_s = 1.86$ cm/h. En la ilustración 4.4 se observa la buena concordancia entre las dos curvas de avance, $R^2 = 0.9984$, obtenida utilizando un coeficiente adimensional de la ley de resistencia $\kappa = 1/300$.

En las ilustraciones 4.5 y 4.6 se muestran los resultados de la verificación de la aplicabilidad del modelo. Utilizando los valores generados en la calibración se han reproducido

las observaciones de la segunda prueba de riego, que difiere de la primera en la posición inicial del manto freático que en este caso es de 50 cm. En la ilustración 4.5 se muestra el buen ajuste entre las curvas de avance observada y simulada ($R^2 = 0.9909$). La tercera prueba difiere de la primera en dos aspectos: la posición del manto freático y el gasto de aporte en la entrada. Como se ha mencionado, para el caso de la primera prueba se tiene una profundidad del manto freático de 152 cm y un gasto de aporte de $q_0 = 0.001428 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ (gasto total $Q_0 = 15 \text{ lps}$), mientras que en la tercera se tiene una profundidad del manto de 52 cm y se mantuvo un gasto de aporte en la entrada de $q_0 = 0.001238 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ (gasto total $Q_0 = 13 \text{ lps}$), en la ilustración 4.6 se muestra el buen ajuste entre las curvas de avance observada y simulada ($R^2 = 0.9821$). En ambos casos se ha utilizado un coeficiente adimensional de la ley de resistencia $\kappa = 1/300$.

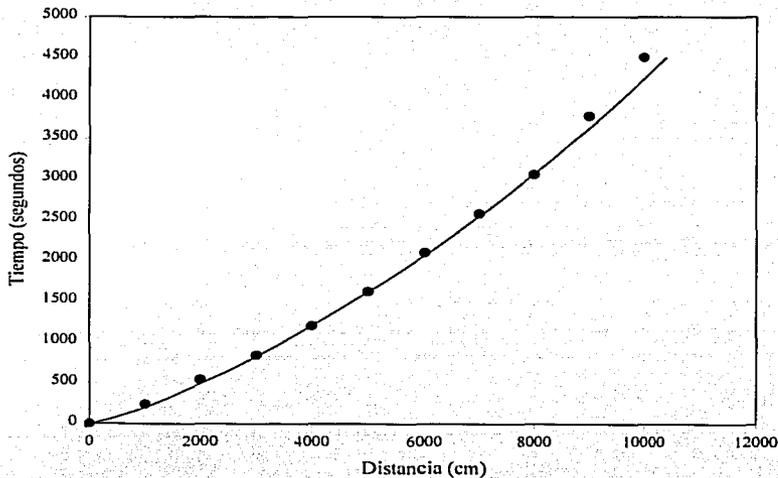


Ilustración 4.4. Calibración del modelo utilizando los datos de la primera prueba de riego.

$$R^2 = 0.9984$$

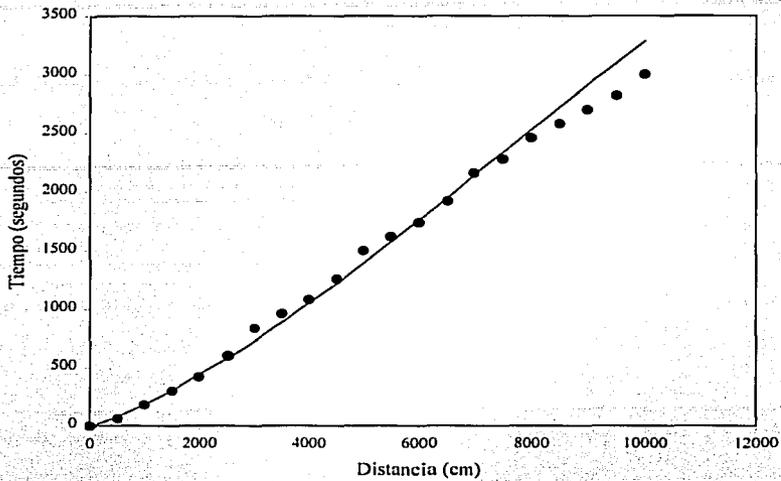


Ilustración 4.5. Verificación de la aplicabilidad del modelo variando la profundidad del manto freático de 152 cm a 52 cm como producto de la aplicación del primer riego. $R^2 = 0.9909$

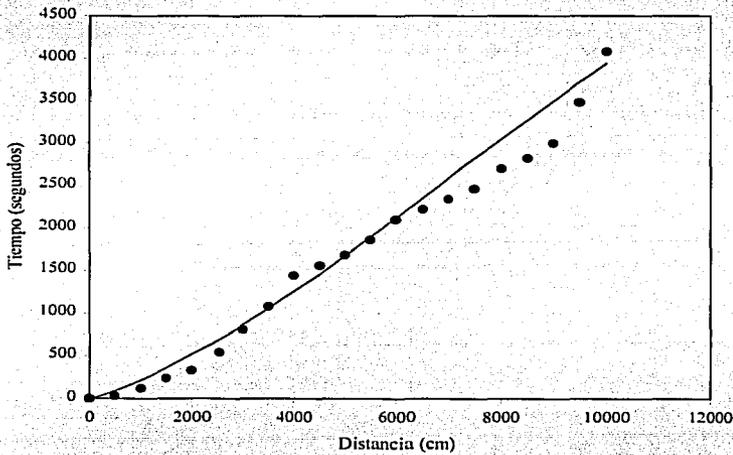


Ilustración 4.6. Verificación de la aplicabilidad del modelo variando la profundidad del manto freático de 152 cm a 50 cm y el gasto de aporte de $q_o = 0.001428 \text{ m}^3 / \text{s} / \text{m}$ (gasto total $Q_o = 15 \text{ lps}$) a $q_o = 0.001238 \text{ m}^3 / \text{s} / \text{m}$ (gasto total $Q_o = 13 \text{ lps}$). $R^2 = 0.9821$

4.2.4. Forma general del efecto de la posición del manto freático en el frente de avance

En la ilustración 4.7 se muestra la evolución de la posición del frente de avance en la arcilla de *La Chontalpa* para diferentes condiciones iniciales de posición del manto freático. Se hace evidente que el efecto de la posición del manto es mayor cuanto más cercana sea su posición inicial con respecto a la superficie del suelo.

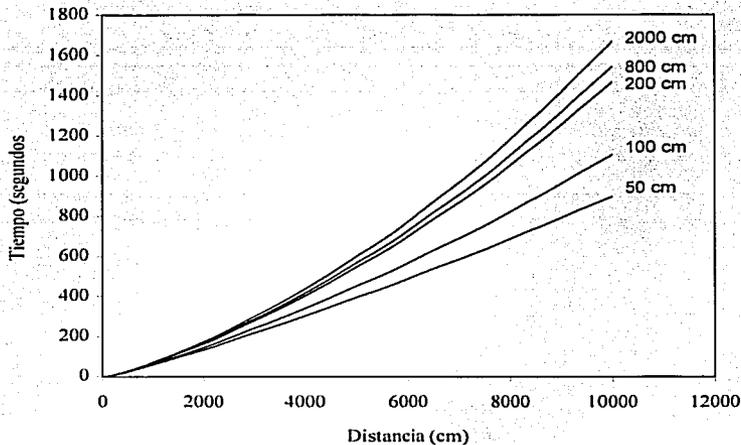


Ilustración 4.7. Evolución del frente de avance para diferentes profundidades iniciales del manto freático en la arcilla de *la Chontalpa*. Gasto de aporte de $q_o = 0.001428 \text{ m}^3 / \text{s} / \text{m}$ (gasto total $Q_o = 15 \text{ lps}$).

4.3. Cálculo del gasto óptimo para la aplicación de una lámina de riego

4.3.1 Introducción

El objetivo del diseño de riego por melgas es conseguir la aplicación de una lámina de riego requerida por el cultivo de la manera más uniforme posible, conservando valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego. El diseño del riego consiste en determinar el gasto de aporte y el tiempo durante el cual se aplica dicho gasto en la cabecera de la melga de forma tal que se cumpla con el objetivo mencionado, las variables predeterminadas son la longitud de la melga y aquellas relacionadas con la caracterización hidrodinámica del suelo.

La escuela húngara de riego ha propuesto que el gasto óptimo debe determinarse para una longitud de melga y que su valor debe actualizarse conforme a la proporción entre la nueva longitud y la longitud para la cual fue determinado el gasto óptimo. Rendón *et al.* (1997) han verificado que, en efecto, el gasto óptimo de diseño guarda una proporción lineal con la longitud de la melga en la cual debe aplicarse. El resultado es obtenido haciendo uso de un modelo formado por las ecuaciones de Lewis y Milne para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo y la ecuación de Green y Ampt (1911) para describir el flujo del agua en el suelo. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que las formas de las ecuaciones utilizadas por los autores citados son de las más simplificadas en el contexto de la modelación del riego por gravedad, motivo por el cual en este capítulo se verifica la relación de proporcionalidad entre el gasto óptimo y la longitud de la melga haciendo uso de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards, que en el contexto de la mecánica Newtoniana constituyen la forma más detallada de describir el proceso del riego.

4.3.2 Diseño del riego por melgas

Para el diseño del riego por melgas se pueden utilizar dos métodos (Rendón *et al.*, 1997): pruebas de riego y modelos matemáticos.

4.3.2.1. Pruebas de riego

Las pruebas de riego consisten en hacer experimentos de campo en donde las variables experimentales son el gasto de riego, la longitud de la melga y el tipo de suelo. Con base en los resultados de los experimentos, para cada tipo de suelo se obtiene una tabla o una relación empírica en donde se representan las combinaciones de gasto de riego unitario y longitud que permiten aplicar uniformemente una lámina de riego específica.

Las pruebas de riego tiene la desventaja de requerir un tiempo considerable para su ejecución, son costosas y se debe efectuar un gran número de ellas. Por estas razones son recomendadas sólo para calibrar los métodos de diseño (Rendón *et al.* 1997).

4.3.2.2. Modelos matemáticos

En la actualidad existen diversos modelos que permiten la descripción de las cuatro fases del riego por melgas haciendo uso de ecuaciones diferenciales o algebraicas, de tal forma que utilizando estos modelos matemáticos es posible describir el flujo del agua tanto en el suelo como sobre la superficie del mismo, prediciendo con cierto grado de aproximación el comportamiento de las variables hidráulicas durante el riego, en consecuencia, es posible estimar el gasto para el cual se tendrá la mayor uniformidad dadas las condiciones del suelo. Entre los modelos disponibles se puede mencionar el RIGRAV (Rendón *et al.* 1997) que utiliza una combinación

del modelo hidrológico para describir el flujo superficial y la ecuación de Green y Ampt (1911) para modelar el flujo del agua en el suelo. Otro modelo disponible es el BRDFW (Strelkoff *et al.* 1983), que utiliza la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant para describir el flujo superficial y una ley de infiltración tipo Kostiakov para describir el flujo del agua en el suelo, es decir, una forma que no tiene base físico-matemática para la descripción del fenómeno. Como se muestra a continuación el modelo desarrollado en este trabajo tiene utilidad con fines de diseño del riego por melgas con las ventajas de incorporar dos ecuaciones con base físico-matemática para describir el proceso.

4.3.3 Eficiencias en el riego por melgas

4.3.3.1. Eficiencia de aplicación

La eficiencia de aplicación (E_a) se define como:

$$E_a = \frac{V_r}{V_p} \tag{4.7}$$

donde V_r es el volumen requerido para satisfacer las necesidades de agua en la zona de raíces del cultivo [L^3] y V_p es el volumen de proyecto [L^3]. V_r se obtiene con la expresión: $V_r = L_n A_r$, donde L_n es la lámina de riego neta [L], definida conforme a los requerimientos de agua del cultivo, y A_r es la superficie de riego considerada [L^2]. El volumen de proyecto se calcula como: $V_p = Q_p T_r$, donde Q_p es el gasto de proyecto [$L^3 T^{-1}$] y T_r es el tiempo requerido para el riego [T]. Si en la expresión (4.7) el numerador y el denominador se dividen entre A_r se obtiene: $E_a = L_n / L_b$, siendo L_b la lámina de riego bruta y L_n la lámina de riego neta.

4.3.3.2. Eficiencia de requerimiento de riego

La eficiencia de requerimiento de riego (E_r) se define como:

$$E_r = \frac{V_d}{V_r} \tag{4.8}$$

donde V_r y V_d son respectivamente el volumen requerido por el cultivo y el volumen disponible [L^3]. Esta eficiencia indica la manera en que se están satisfaciendo las necesidades de agua del cultivo.

4.3.3.3. Eficiencia de uniformidad

En el riego lo ideal es que todas las plantas reciban la misma cantidad de agua, situación que equivale a aplicar una lámina uniforme en toda la longitud del riego. Para evaluar la uniformidad en la distribución de la lámina infiltrada se utiliza el coeficiente de uniformidad de Christiansen (CUC):

$$CUC = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |I_i - \hat{I}|}{n\hat{I}} \quad (4.9)$$

donde I_i es la lámina infiltrada en el punto i [L], \hat{I} es la lámina infiltrada media [L] y n es el número de puntos considerados para efectuar el cálculo. Generalmente se considera que un CUC mayor o igual que 0.80 es aceptable en el riego por melgas (Rendón *et al.*, 1997).

4.3.4. Cálculo del gasto óptimo

4.3.4.1. Introducción

El modelo numérico desarrollado para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards, es utilizado para la determinación del gasto para el cual se obtiene la mayor eficiencia de uniformidad manteniendo valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego, es decir, para determinar el gasto óptimo de riego teniendo en cuenta diferentes láminas de riego y longitudes de melga. En una primera etapa se realiza la estimación del gasto óptimo para el suelo *franco de Montecillo* reportado en la literatura (Fuentes 1992) y descrito en el apartado 2.2.2., posteriormente es realizada la estimación del gasto óptimo para diez tipos diferentes de suelo, los cuales fueron caracterizados hidrodinámicamente conforme a las relaciones de van Genuchten-Brooks y Corey, habiéndose determinado los parámetros que en ellas intervienen utilizando los valores reportados en la literatura por Rawls y Brakensiek (1983) relacionados con el triángulo de texturas.

Se ha utilizado un paso de tiempo constante $\Delta t = 1.0$ s para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards, en el caso de esta última se utilizaron pasos de espacio mínimo y máximo: $\Delta z_{\min} = 0.02$ cm y $\Delta z_{\max} = 1.0$ cm. La discretización de la ecuación de Richards se ha efectuado haciendo uso de valores de pasos de tiempo y espacio que generan una malla más fina que la utilizada en la validación presentada en el apartado 2.1.5. para mantener una cota de error relativo del 0.25%. La discretización utilizada para la solución de la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant guarda semejanza con las reportadas en la literatura: Katopodes y Strelkoff (1977): $\Delta t_{\min} = 5$ s, Akanbi y Katopodes (1988): $\Delta t_{\max} = 1$ s.

4.3.4.2. Relación entre la longitud de la melga y el gasto óptimo

La eficiencia de uniformidad medida a través del coeficiente de uniformidad de Christiansen (CUC) puede obtenerse para diferentes combinaciones de longitud y gasto de aporte en la cabecera de la melga, en la ilustración 4.8 se muestra un ejemplo de los valores que se obtienen para cuatro longitudes de melga en el caso del suelo *franco de Montecillo*, puede apreciarse que la eficiencia de uniformidad varía sensiblemente con el gasto de riego.

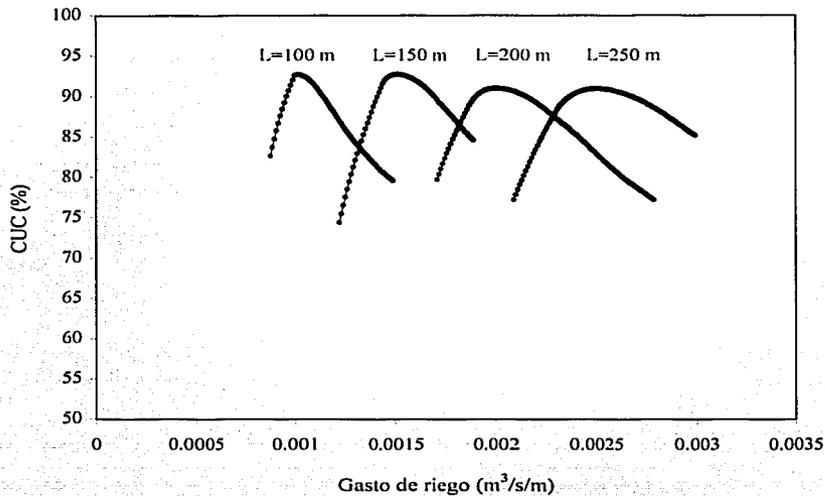


Ilustración 4.8. Variación de la eficiencia de uniformidad para diferentes longitudes de melga y gastos de aporte en el suelo *franco de Montecillo*. Lámina de riego 10 cm.

Para cada longitud de melga es posible determinar el valor del gasto de aporte que produce un máximo en el coeficiente de uniformidad manteniendo valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego, el gasto así determinado se denomina gasto óptimo. Al correlacionar diversos valores de gastos de aporte óptimos y longitudes de melga es posible establecer que existe una proporción lineal entre ambas variables para un suelo considerado homogéneo. El resultado anterior ha sido presentado por Rendón *et al.* (1997) quienes hacen uso de un modelo numérico que combina el modelo hidrológico para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo y de la ecuación de Green y Ampt (1911) para simular el flujo del agua en el suelo. En este caso se verifica el resultado utilizando un modelo hidrodinámico completo.

La cantidad de agua que es proporcionada en la cabecera de la melga puede calcularse como el producto del gasto de aporte (q_o) por el tiempo de riego (τ_r) mientras que la cantidad de agua que ha sido aplicada en la melga es proporcionada por el producto de la longitud de la melga (L) y la lámina de riego (ℓ_r), el balance de la masa proporciona:

$$q_o \tau_r = L \ell_r \quad (4.10)$$

entonces:

$$q_o = \frac{\ell_r}{\tau_r} L \quad (4.11)$$

si se especifican el tipo de suelo, la pendiente topográfica de la melga y el factor de fricción de la ley de resistencia hidráulica, es posible encontrar una relación lineal entre el gasto de aporte y la longitud de la melga, es decir:

$$q_o = c L \quad (4.12)$$

la comparación de las ecuaciones (4.11) y (4.12) implica que:

$$c = \frac{\ell_r}{\tau_r} \quad (4.14)$$

como c es un valor constante, se deduce que para la aplicación de una lámina de riego específica existe un tiempo de riego único para obtener un valor máximo del coeficiente de uniformidad.

A manera de ejemplo se muestra en la ilustración 4.9 la relación que guardan el gasto óptimo y la longitud de la melga para el suelo *franco de Montecillo*, las láminas aplicadas son 8, 10 y 12 cm, debe apreciarse que existe monotonía en el sentido de que la pendiente de la relación entre la longitud y el gasto óptimo disminuye conforme se incrementa la lámina de riego.

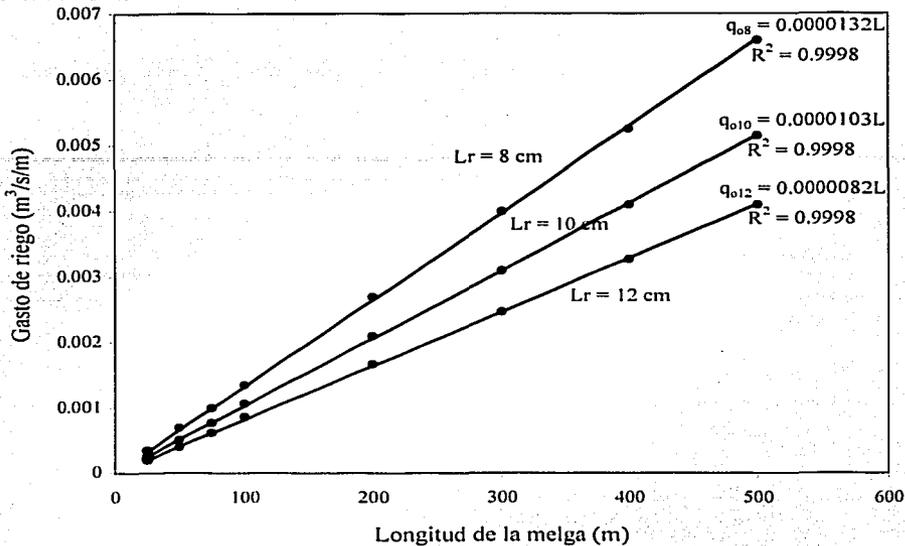


Ilustración 4.9 Relación entre la longitud de melga y el gasto de aporte óptimo para el suelo franco de Montecillo para tres láminas de aplicación: 8, 10 y 12 cm.

4.3.5. Cuadro de diseño del riego por melgas

Es posible obtener relaciones entre el gasto óptimo y la longitud de melga para diversos tipos de suelo, diferenciados según su caracterización hidrodinámica, procediendo como a continuación se indica. El contenido volumétrico de agua residual ha sido asumido igual a cero de acuerdo con Fuentes *et al.* (1992). El contenido volumétrico de agua a saturación ha sido asimilado a la porosidad total del suelo (ϕ), los valores de dicha porosidad han sido determinados haciendo uso de los valores proporcionados por Rawls y Brakensiek (1983) en relación con la textura del suelo. Para determinar el valor del parámetro de forma m de la característica de humedad del suelo, se reconstruyó una curva granulométrica para cada suelo con base en los porcentajes de arena, limo y arcilla presentes en el triángulo de texturas (IMTA, 1997). La curva granulométrica fue ajustada usando la ecuación (4.4) y se siguió el procedimiento sugerido por Fuentes (1992) indicado en el apartado 4.2.2. para determinar los valores de m y η , haciendo uso en el último caso de la porosidad total del suelo. La conductividad hidráulica a saturación se obtuvo de los gráficos reportados por Rawls y Brakensiek (1983) según la textura del suelo. La escala de presiones ψ_d se determinó en relación

con el parámetro de succión en el frente de humedecimiento (h_r) de la ecuación de Green y Ampt (1911) estimado para cada suelo mediante los gráficos de Rawls y Brakensiek (1983).

En el cuadro 4.1. se muestran los valores de los parámetros involucrados en las características hidrodinámicas para diez tipos de suelo.

Cuadro 4.1. Características hidrodinámicas para el diseño del riego por melgas

Textura del suelo	θ_s ($\text{cm}^3 / \text{cm}^3$)	θ_r ($\text{cm}^3 / \text{cm}^3$)	Ks (cm/h)	η	m	ψ_d (cm)
Arcilla	0.525	0	0.010	61.17	0.0229	132.50
Arcilla limosa	0.500	0	0.015	31.55	0.0440	94.70
Franco-arcillo-limoso	0.500	0	0.070	15.33	0.0905	57.80
Franco-arcilloso	0.475	0	0.150	19.30	0.0714	34.15
Arcilla arenosa	0.425	0	0.200	41.47	0.0327	23.70
Limo	0.500	0	0.500	5.60	0.2477	30.70
Franco	0.475	0	0.700	13.93	0.0989	19.20
Franco limoso	0.525	0	0.600	12.01	0.1165	29.35
Franco-arcillo-arenoso	0.425	0	1.500	18.44	0.0736	33.35
Franco arenoso	0.450	0	5.000	13.62	0.1004	9.52

El contenido volumétrico de agua necesario para asignar la condición inicial para la ecuación de Richards se determinó teniendo en cuenta la humedad aprovechable de cada tipo de suelo, suponiendo que se ha consumido el 50% de dicha humedad antes de la aplicación del riego. La humedad aprovechable se determinó restando los contenidos volumétricos de agua correspondiente a la capacidad de campo (CC) y al punto de marchitamiento permanente (PMP), los valores de CC Y PMP para cada tipo de suelo fueron calculados conforme a los reportados por Rawls y Brakensiek (1983) asociados al triángulo de texturas.

El conocimiento de los valores de los parámetros involucrados en las características hidrodinámicas para cada tipo de suelo y del valor del contenido volumétrico de agua inicial, hace posible calcular las relaciones entre la longitud de la melga y el gasto de riego óptimo para cada suelo dada una lámina de riego, el valor de la constante que relaciona ambas variables se expresa en términos de gasto de aporte por unidad de área, es decir por unidad de ancho y por unidad de longitud de melga, el resultado es mostrado en el cuadro de diseño 4.2.

Cuadro 4.2. Diseño del riego por melgas: gasto en lps/m^2 para la aplicación óptima de la lámina de riego. Factor de fricción $\kappa = 1/54$, pendiente topográfica $J_o = 0.002$.

Textura del suelo	Lr= 8 cm		Lr= 10 cm		Lr= 12 cm	
	q_o (lps/m^2)	Tr (h)	q_o (lps/m^2)	Tr (h)	q_o (lps/m^2)	Tr (h)
Arcilla	0.00012	224.1	0.00010	338.2	0.00009	445.0
Arcilla limosa	0.00014	201.6	0.00012	270.5	0.00011	362.5
Franco-arcillo-limoso	0.00060	44.1	0.00050	66.6	0.00046	82.9
Franco-arcilloso	0.00088	31.4	0.00078	44.0	0.00072	57.8
Arcilla arenosa	0.00090	28.7	0.00080	42.4	0.00077	52.0
Limo	0.00399	6.9	0.00333	10.0	0.00296	13.7
Franco	0.00411	6.4	0.00354	9.6	0.00326	12.5
Franco-limoso	0.00446	6.2	0.00388	8.8	0.00349	11.6
Franco-arcillo-arenoso	0.00490	5.8	0.00476	7.4	0.00464	9.0
Franco-arenoso	0.02476	1.2	0.02223	1.6	0.02073	2.0

En el Manual para Diseño de Zonas de Riego Pequeñas (IMTA, 1997) es presentado un cuadro de diseño similar al 4.2., sin embargo, es necesario hacer notar que dicho cuadro de diseño presenta algunas inconsistencias de monotonía entre la relación que guardan las variables gasto óptimo, tiempo de riego y lámina aplicada, si bien son un porcentaje pequeño, los resultados que rompen la monotonía pueden reflejar que el modelo utilizado presenta dificultades para reproducir el fenómeno para tiempos de riego grandes. El acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards permite obtener resultados que guardan la monotonía en las variables del diseño óptimo, según puede apreciarse en el cuadro 4.2. En el mismo sentido puede apreciarse que existen diferencias respecto a los gastos de aporte y los tiempos de riego obtenidos en este trabajo y los reportados en el manual citado, dichas diferencias son más significativas cuanto más arcilloso es el suelo, situación que puede deberse a la forma en que se modelan las fases de almacenamiento, consumo y recesión en el modelo utilizado para construir el cuadro de diseño del Manual para Diseño de Zonas de Riego Pequeñas (IMTA, 1997).

El cuadro de diseño 4.2. puede modificarse básicamente en atención a dos características: el factor de fricción de la ley de resistencia y la pendiente topográfica del suelo. Las mayores variaciones en las formas de los perfiles de flujo, y en consecuencia en la distribución final de la lámina infiltrada, se obtienen para los casos en que se disminuyan o incrementen significativamente tanto el factor de fricción como la pendiente topográfica. Para el caso en que se hace uso de valores significativamente menores que los utilizados para elaborar el cuadro 4.2.

tanto para el factor de fricción como para la pendiente topográfica, e.g. $\kappa = 1/540$ y $J_0 = 0.0005$, se obtiene el cuadro de diseño 4.3.

Cuadro 4.3. Diseño del riego por melgas: gasto en lps/m^2 para la aplicación óptima de la lámina de riego. Factor de fricción $\kappa = 1/540$, pendiente topográfica $J_0 = 0.0005$.

Textura del suelo	Lr= 8cm		Lr= 10cm		Lr= 12 cm	
	q_0 (lps/m^2)	Tr (h)	q_0 (lps/m^2)	Tr (h)	q_0 (lps/m^2)	Tr (h)
Arcilla	0.00012	224.1	0.00010	338.2	0.00009	445.0
Arcilla limosa	0.00014	201.6	0.00012	270.5	0.00012	332.3
Franco-arcillo-limoso	0.00064	41.3	0.00055	60.5	0.00049	77.8
Franco-arcilloso	0.00099	27.9	0.00089	38.6	0.00083	50.1
Arcilla arenosa	0.00111	23.3	0.00096	35.3	0.00086	46.5
Limo	0.00492	5.6	0.00421	7.9	0.00359	11.3
Franco	0.00574	4.6	0.00459	7.4	0.00399	10.2
Franco-limoso	0.00660	4.2	0.00504	6.8	0.00434	9.3
Franco-arcillo-arenoso	0.00706	4.0	0.00614	5.7	0.00564	7.4
Franco-arenoso	0.02662	1.1	0.02567	1.4	0.02431	1.7

Es posible apreciar que el efecto de la disminución del factor de fricción y la pendiente topográfica de la melga es mas evidente cuanto más gruesa sea la textura del suelo, para el caso de la arcilla el cambio en la constante de proporcionalidad entre el gasto óptimo y la longitud de la melga es insignificante, lo cual es probablemente debido a la baja conductividad hidráulica a saturación que tiene el suelo. La disminución del factor de fricción y de la pendiente topográfica origina un aumento en los tirantes de flujo, pero si se tiene en cuenta que la conductividad hidráulica a saturación es muy reducida en el caso de la arcilla tratada, la evolución de la lámina infiltrada en cada punto de desarrollo de la melga será prácticamente la misma no obstante el cambio de magnitud de los tirantes de flujo. En otras palabras, la constante de proporcionalidad entre el gasto óptimo de riego y la longitud de la melga depende básicamente de la conductividad hidráulica a saturación para el caso de las arcillas, es decir es regida predominantemente por el flujo del agua en el suelo.

4.3.6. Cálculo del gasto óptimo en el riego por melgas con presencia de un manto freático

Una extensión natural del análisis del efecto de la posición inicial de un manto freático sobre la evolución del frente de avance en el riego por melgas, presentado en el apartado 4.2., tiene que ver con el cálculo del gasto óptimo de riego cuando se presenta un manto freático en el

perfil de suelo. El suelo *Arcilla de la Chontalpa* para el cual se realiza el análisis es caracterizado hidrodinámicamente según se reporta en el apartado 4.2.

En la ilustración 4.10 se muestra que la relación entre el gasto óptimo y la longitud de la melga para la cual es estimado, es suficientemente bien descrita utilizando una correspondencia lineal. La ilustración se ha hecho teniendo en cuenta una lámina de riego de 10 cm, pero el comportamiento es similar independientemente de la lámina de riego que se desea aplicar. El resultado es similar al obtenido para el caso en que no se presenta un manto freático en el perfil del suelo, lo cual indica que la dependencia básicamente lineal que guardan la longitud de la melga y el gasto óptimo de riego es independiente de la condición inicial de distribución de las presiones en el suelo.

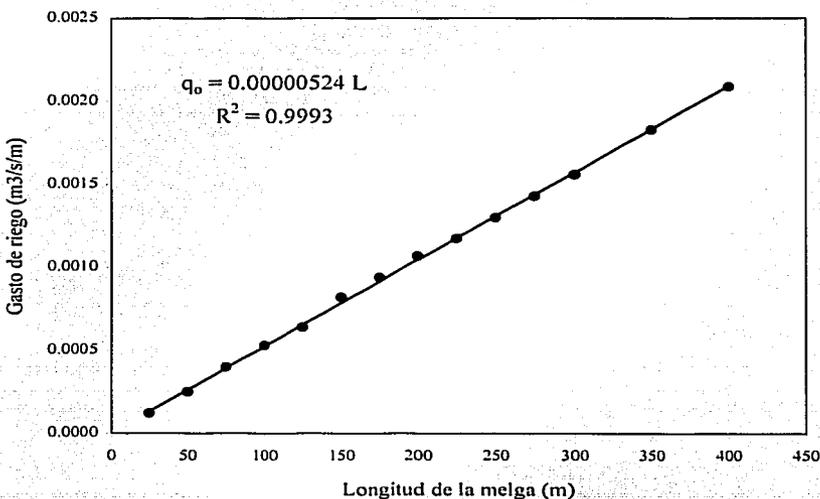


Ilustración 4.10. Relación entre la longitud de melga y el gasto de aporte óptimo para el suelo *arcilla de la Chontalpa*. Lámina de riego de 10 cm y profundidad inicial del manto freático de 200 cm.

En el cuadro 4.4 se muestran los valores del gasto unitario, es decir el gasto que debe aplicarse por unidad de ancho y por unidad de longitud de la melga, correspondientes a diferentes láminas de riego y profundidades iniciales del manto freático, las casillas vacías indican que la cantidad de agua que se desea aplicar es mayor que la cantidad de agua que puede aceptar el suelo. En el cuadro 4.5 se muestran los tiempos de riego correspondientes a los gastos unitarios mostrados en el cuadro 4.4. Las posiciones iniciales del nivel freático consideradas son 100, 150, 200 y 10000 cm y puede apreciarse que existe una tendencia creciente del gasto óptimo conforme se incrementa la profundidad del manto freático, mientras que el tiempo de riego muestra una

tendencia contraria. Debido a que las profundidades consideradas no se encuentran en la zona asintótica de la curva de retención de humedad, que se forma desde el manto freático hacia la superficie del suelo como consecuencia de la distribución de presiones hidrostática adoptada, no es posible alcanzar el previsible comportamiento asintótico del gasto óptimo de riego. No obstante lo anterior, los valores obtenidos pueden servir como guía para el manejo del agua en La Chontalpa, Tab., Mex.

Cuadro 4.4. Gasto de riego (lps / m^2) para la aplicación óptima de la lámina de riego en la *arcilla de la Chontalpa*.

PNF (cm)	Lr = 3	Lr = 5	Lr = 6	Lr = 8	Lr = 10	Lr = 12	Lr = 14
100	0.01162	0.01083	*	*	*	*	*
150	0.01455	0.01110	0.00896	0.00607	0.00441	*	*
200	0.01712	0.01141	0.00927	0.00688	0.00524	0.00445	0.00388
10000	0.03236	0.01976	0.01554	0.01221	0.01001	0.00826	0.00775

Cuadro 4.5. Tiempo de riego (horas) para la aplicación óptima de la lámina de riego en la *arcilla de la Chontalpa*.

PNF (cm)	Lr = 3	Lr = 5	Lr = 6	Lr = 8	Lr = 10	Lr = 12	Lr = 14
100	0.450	1.445	*	*	*	*	*
150	0.312	1.389	2.067	4.073	6.862	*	*
200	0.289	1.339	2.050	3.478	5.884	8.112	11.039
10000	0.022	0.817	1.200	2.139	3.012	4.578	5.505

CONCLUSIONES

La aplicación de ecuaciones diferenciales parciales altamente no lineales es la herramienta básica utilizada en este trabajo para describir el flujo del agua en el riego por gravedad en melgas. La modelación ha sido efectuada acoplando las ecuaciones de Saint-Venant para describir el flujo del agua a superficie libre que se presenta sobre el suelo y la ecuación de Richards para modelar el flujo del agua en el suelo. Las conclusiones que se desprenden de este trabajo son las siguientes:

1. Para el problema de valores en la frontera que representa el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por melgas se observa que, con la finalidad de obtener como solución numérica funciones monótonas, es conveniente efectuar la discretización de la ecuación de cantidad de movimiento teniendo en cuenta tres aspectos: i) las derivadas en el espacio y la pendiente de fricción en una celda de cálculo se aproximan adelante en el tiempo, ii) las derivadas en el tiempo se aproximan utilizando una forma ponderada en tiempo y espacio, y iii) los coeficientes son calculados en el tiempo anterior.

2. El modelo desarrollado para describir las cuatro fases hidráulicas de riego por melgas: avance, almacenamiento, consumo y recesión que tiene como base el uso de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards genera resultados que son aplicables a las escalas de espacio y tiempo relacionadas con pruebas de riego efectuadas tanto en campo como en laboratorio.

3. Se ha verificado numéricamente que la hipótesis del tiempo de contacto constituye una muy buena aproximación para describir la transferencia de agua en el suelo en el riego por melgas. La verificación se ha efectuado realizando el acoplamiento numérico de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards, cuando el acoplamiento se realiza utilizando la ecuación de Richards unidimensional se hace uso de la hipótesis del tiempo de contacto mientras que al recurrir a la forma bidimensional se prescinde de la misma. El uso de la hipótesis implica obtener frentes de onda que avanzan más lentamente, si bien no significativamente, que aquellos originados prescindiendo de dicho supuesto.

4. El acoplamiento numérico de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards, utilizado para analizar el efecto de la posición del manto freático en la evolución del frente de avance en el riego por melgas, permite evidenciar que el efecto del manto freático es mayor cuanto más cercana sea su posición inicial respecto a la superficie del suelo.

5. El uso del modelo hidrodinámico completo proporcionado por el acoplamiento numérico de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards, permite verificar que existe una relación básicamente lineal entre la longitud de la melga y el gasto de aporte óptimo, es decir aquel para el cual se obtiene la mayor uniformidad en la aplicación de una lámina de riego específica manteniendo valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego. La forma básicamente lineal de la relación entre la longitud de la melga y el gasto óptimo de riego se conserva aún cuando se tiene la presencia de un manto freático en el perfil del suelo, lo cual permite deducir que la naturaleza de la relación es independiente de la distribución inicial de las presiones en el suelo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Aguilar, A., 2002. *Propiedades de propagación de esquemas numéricos para la simulación de flujos a superficie libre*. Tesis de Doctorado en Ingeniería por la Universidad Nacional Autónoma de México, México. 318 pp.
2. Akanbi A., y N. Katopodes, 1988. *Model for flow propagation on initially dry land*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol 114, No. 7.
3. Bautista E., y W. Wallender, 1992. *Hydrodynamic furrow irrigation model with specified space steps*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, Vol. 118, No. 3.
4. Blair, A. W. y T.E. Smerdon, 1988. *Infiltration from irrigation advance data I: Experimental*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 114(1):18-29.
5. Bradford S., y N. Katopodes, 1998. *Nonhydrostatic model for surface irrigation*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, Vol 124, No. 4.
6. Brooks R. H., y A. T. Corey, 1964. *Hydraulic properties of porous media*. Hydrol. Pap. 3, Colo. State. Univ., Fort Collins.
7. Burden R., y J. D. Faires, 1985. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
8. Burdine N. T., 1953. *Relative permeability calculation from size distributions data*. Transactions AIME, 198:171-199.
9. Catalán E. A., J. Chavez, O. Palacios, B. Cuevas y C. Fuentes, 1988. *Modelo hidrodinámico para la predicción del avance en el riego por melgas*. Sobretiro de Agrociencia num 73. México.
10. Chen, C. L., 1970. *Surface irrigation using kinematic-wave method*. Journal of Irrigation and Drainage Division, ASEC, 118(3):450-465.
11. Childs, E. C., y N. Collis-George, 1950. *The permeability of porous materials*. Proc. Roy. Soc. Ser. A(201):392-405.
12. Cunge, J. A., F. M. Holly, y A. Verwey, 1980. *Practical aspects of computational river hydraulics*. Pitman publishing limited, London.
13. Fuentes C., 1992. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non saturés*. Tesis de Doctorado de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, Francia. 267 pp.
14. Fuentes C., R. Haverkamp, y J.-Y. Parlange, 1992. *Parameter constraints on closed-form soil-water relationships*. Journal of Hydrology. 134:117-142.

15. Fuentes, C., J.-Y. Parlange y H. Saucedo, 2001. *Una solución de similitud de las ecuaciones de Saint-Venant*. Memorias del XI Congreso Nacional de Irrigación, Guanajuato, México.
16. Fuentes, C., F. Brambila, M. Vauclin, J.-Y. Parlange, y R. Haverkamp, 2001. *Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados*. Ingeniería Hidráulica en México. 16(2): 119-137.
17. Fuentes, C., B de León, H. Saucedo y J.Y. Parlange, 2004. *El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: la ley potencial de resistencia hidráulica*. Ingeniería Hidráulica en México. (en prensa).
18. Fujita, H., 1952. *The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part I*. Textile Research Journal, 22:757-761.
19. Fujita, H., 1952. *The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part II*. Textile Research Journal, 22:757-761.
20. García V. N., 1994. *Simulación numérica de flujo intermitente para diseño de riego parcelario por gravedad*. Tesis de Doctorado en Ingeniería por la Universidad Nacional Autónoma de México. México. 316 pp.
21. Green, W. H., y G. A. Ampt, 1911. *Studies in soil physics, I: the flow of air and water through soils*. J. Agric. Sci., 4:1-24.
22. Hart, W. E., D. L. Basset, y T. Strelkoff, 1968. *Surface irrigation hydraulics-kinematics*. J. Irri. Darin. Div., ASCE, 94(4):156-165.
23. Haverkamp, R., J.-Y. Parlange, J. L. Starr, G. Schmitz y C. Fuentes, 1990. *Infiltration under ponded conditions: 3. A predictive equation based on physical parameters*. Soil Sci. 149: 292-300.
24. Hills, R. G. y A. W. Warrick, 1993. *A solution for soil water flow in a finite length*. Water Resources Research, vol 29: 1179-1184.
25. Huyakorn, P. S., y G. F. Pinder, 1983. *Computational Methods in Subsurface Flow*. Academic Press, San Diego, Calif.
26. IMTA: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, 1997. *Manual para diseño de zonas de riego pequeñas*. México.
27. Katopodes N., y T. Strelkoff, 1977. *Hydrodynamics of border irrigation, complete model*. Journal of the Irrigation and Drainage Division. IR3:309-324. 13188.
28. Kostiakov, A. N., 1932. *On the dynamics of the coefficient of water-percolation in soils and on the necessity for studying it from a dynamic point of view for purposes of amelioration*. Trans. Sixth International Society of Soil Science, Russian Part A: 17-21.

29. Lewis, M. R., y W. E. Milne, W. E., 1938. *Analysis of border irrigation*. Agri. Engr., 19:267-272.
30. Mori, M., 1983. *The finite element method and its applications*. Ed. Macmillan. USA.
31. Neumann, S. P., 1973. *Saturated-unsaturated seepage by finite elements*. Journal of the Hydraulics Division. ASCE. HY12, pap. 10201, pp2233-2250.
32. Noor, K. A. y J. M. Peters, 1987. *Preconditioned Conjugate Gradient Technique for the analysis of symmetric structures*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 24:2057-2070.
33. Or D., y W. R. Walker, 1996. *Effects of spatially variable intake on surface irrigation advance*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. Vol. 122, No. 2.
34. Pacheco, P. 1994. *Comparación de los métodos de riego por surcos y por melgas y alternativas de diseño en el cultivo del arroz (Oryza sativa L)*. Tesis de Maestría en Ciencias, Colegio de Postgraduados en Ciencias Agrícolas. México.
35. Parlange, J.-Y., 1971. *Theory of water movement in soils, 2, One-dimensional infiltration*. Soil Sci. 111:170-174.
36. Parlange, J.-Y., 1972b. *Theory of water movement in soils, 6, Effect of water depth over soil*. Soil Sci. 113:308-312.
37. Parlange, J.-Y., 1973. *Note on the infiltration advance front form border irrigation*. Water Resourses Research 9(4):1075-1078.
38. Parlange, J.-Y., R. D. Braddock, I. Lisle y R.E. Smith, 1982. *Three parameter infiltration equation*. Soil Sci., 111: 170-174.
39. Parlange, J.-Y., R. Haverkamp y J. Touma. 1985. *Infiltration under ponded conditions. Part I. Optimal analytical solutions and comparisions with experimental observations*. Soil Sci. 139:305-311.
40. Philip, J.R., 1957a. *The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution*. Soil Sci., 83: 345-357.
41. Philip, J.R., 1957b. *The theory of infiltration: 4. Sorptivity and algebraic infiltration equations*. Soil Sci., 84: 257-264.
42. Philip, J. R., y D. A. Farrell, 1964. *General solution of the infiltration-advance problem in irrigation hydraulics*. Geop. Res., 69(4):621-631.
43. Philip, J. R., 1991. *Hillslope infiltration: planar slopes*. Water Resourses Research, vol 27, no. 1: 109-117.

44. Playán E., W. R. Walker y G. P. Merkle, 1994. *Two-dimensional simulation of basin irrigation. I: Theory*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. Vol. 120, No. 5.
45. Playán E., W. R. Walker y G. P. Merkle, 1994. *Two-dimensional simulation of basin irrigation. II: Applications*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. Vol. 120, No. 5.
46. Rathfelder K., y R. Abriola, 1994. *Mass conservative numerical solutions of the head-based Richards equation*. Water Resources Research, vol 30, no. 9.
47. Rendón L., C. Fuentes y G. Magaña. 1997. *Diseño del riego por gravedad*. En Manual para Diseño de Zonas de Riego Pequeñas. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. México.
48. Richards, L. A., 1931. *Capillary conduction of liquids through porous mediums*. Physics 1:318-333.
49. Rogers, C., M. P. Stallybrass y D. L. Clements, 1983. *On the two-phase filtration under gravity and with boundary infiltration: Application of a Bäcklund transformation*. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 7:785-799.
50. Sakkas, G. J., y T. Strelkoff, 1974. *Hydrodynamics of surface irrigation, advanced phase*. Journal of the Irrigation and Drainage Division. IR1:31-48. 10422.
51. Sanders, G.C., J.-Y. Parlange, V. Kühnel, W.I. Hogart, D. Lockington, y J.P.J. O'Kane, 1988. *Exact nonlinear solution for constant flux infiltration*. J. of Hydrology, 97: 341-346.
52. Saucedo H., C. Fuentes y M. Zavala, 2000. *Acoplamiento numérico de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en la fase de avance del riego por melgas*. Memorias del X Congreso Nacional de Irrigación, Chihuahua, México.
53. Saucedo H., C. Fuentes, M. Zavala y J.-Y. Parlange, 2001. *La hipótesis del tiempo de contacto en el riego por gravedad*. Memorias del XI Congreso Nacional de Irrigación, Guanajuato, México.
54. Saucedo H., C. Fuentes, M. Zavala y J.-Y. Parlange, 2001. *Un modelo para describir el flujo del agua en el riego por melgas*. Memorias del XI Congreso Nacional de Irrigación, Guanajuato, México.
55. Saucedo H., C. Fuentes, M. Zavala y M. Vauclin, 2002. *Una solución de elemento finito para la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo*. Ingeniería Hidráulica en México, vol. XVII, núm. 1, pp. 93-105.
56. Saucedo H., P. Pacheco, C. Fuentes y M. Zavala, 2003. *Efecto de la posición del manto freático en la evolución del frente de avance en el riego por melgas*. Ingeniería Hidráulica en México, (en prensa).

57. Saucedo H., C. Fuentes y M. Zavala, 2003. *Gasto óptimo en el riego por melgas*. Memorias del XII Congreso Nacional de Irrigación, Zacatecas, Zac., México. Mesa 8. Modelación hidroagrícola.
58. Saucedo H., C. Fuentes y M. Zavala, 2003. *Cálculo del gasto óptimo de riego por melgas con presencia de un manto freático*. Memorias del XII Congreso Nacional de Irrigación, Zacatecas, Zac., México. Mesa 8. Modelación hidroagrícola.
59. Sherman, B., y V. P. Singh, 1982. *A kinematic model for surface irrigation: An extension*. Water Resources Research. Vol 18 (3): 659-667.
60. Schmitz G., R. Haverkamp y O. Palacios, 1985. *A coupled surface-subsurface model for shallow water flow over initially dry soil*. 21st Congress of the International Association for Hydraulic Research. Melbourne, Australia.
61. Schmitz G. H., y G. J. Seus, 1989. *Analytical model of level basin irrigation*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. 115(1):78-95.
62. Singh, V., y S. M. Bhallamundi, 1996. *Complete hydrodynamic border-strip irrigation model*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 122(4):189-197.
63. Smerdon, E. T., W. Balir y D. L. Reddell, 1988. *Infiltration from irrigation advance data I: Theory*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 114(1):5-17.
64. Smith, R. E., 1972. *Border irrigation advance and ephemeral flood waves*. Journal of Irrigation and Drainage Division, ASCE, 98(2):289-305.
65. Strelkoff T., 1977. *Algebraic computation of flow in border irrigation*. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 103 (IR3):357-377223-252.
66. Strelkoff T., y N. Katopodes, 1977. *Border-irrigation hydraulics with zero inertia*. Journal of the Irrigation and Drainage Division. IR3:325-342. 13189.
67. Strelkoff T., 1983. *BRDFLW, a mathematical model of border irrigation*. US Department of Agriculture. Agricultural Research Service. Phoenix, Arizona, USA.
68. Van Genuchten, M. Th., 1980. *A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils*. Soil Sci. Soc. Amer. J., 44: 892-898.
69. Walker, W. R., y G. V. Scogerboe, 1983. *The theory and practice of surface irrigation. A guide for study in Surface Irrigation Engineering*, Loganm Utah, USA.
70. Walker, W. R., y A. A. Humpherys, 1983. *Kinematic-wave furrow irrigation model*. Journal of the Irrigation and Drainage Engineering, vol 109(4):377-392.
71. Wallender W., y M. Rayej, 1990. *Shooting method for Saint-Venant equations of furrow irrigation*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. Vol. 116, No. 1.

72. Warrick, A. W., y G. W. Parkin, 1995. *Analytical solution for one-dimensional drainage: Burgers' and simplified forms*. Water Resources Res., 31: 2891-2894.
73. Weir, G. J., 1983. *A mathematical model for border strip irrigation*. Water Resources Research 19(4): 1011-1018.
74. Wilke, O. C., y E. T. Smerdon, 1965. *A solution to the irrigation advance problem*. J. Irr. And Drain. Div., ASCE, 91(3):23-34.
75. Woolhiser, D. A., 1975. *Simulation of unsteady overland flow*. En Unsteady flow in open channels, editado por K. Mahmood y V. Yevjevich, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, USA, vol II: 485-508.