

00323

48



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"COMPARACION DE DOS METODOS NUMERICOS EN INTEGRACIONES ORBITALES"

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

DIANA ALICIA NAVARRO GONGORA



DIRECTOR DE TESIS: DRA. JULIA ESPRESATE EIBENSCHUTZ



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

2003



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

A



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
"Comparación de Dos Métodos Numéricos en Integraciones Orbitales"

realizado por Navarro Góngora Diana Alicia  
con número de cuenta 09550442-7, quién cubrió los créditos de la carrera de Física.  
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

Dra. Julia Espresate Einbenschutz

*Julia Espresate E.*

Propietario

Dra. Vivianne Marquina Fábrega

*V. Marquina*

Propietario

Dr. Rafael Alberto Méndez Sánchez

*Rafael Méndez Sánchez*

Suplente

Dr. Marco Antonio Martos Núñez de Cáceres

*Marco Antonio Martos Núñez de Cáceres*

Suplente

Fís. Andrés Valentín Porta Contreras

*Andrés Valentín Porta Contreras*

Consejo Departamental de Física

*Patricia Goldstein Menache*

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE  
Coordinadora de Licenciatura



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

*A Pepe, por darme aliento cuando quería claudicar, por estar conmigo los días y las noches que dediqué a alcanzar este sueño, por tu sentido del humor, por hacerme reír cuando parecía imposible. Por estar a mi lado en los momentos de desesperación y en los momentos de alegría. Por que sin tu apoyo, tu comprensión y tu infinita paciencia no lo habría logrado. Por tu amor incondicional.*

*Gracias, mi amor.*

*A mis padres, por haberme dado la vida.*

*A mi madre, porque todo lo que soy te lo debo a ti, por enseñarme que podía luchar por mis sueños y alcanzar las estrellas que de niña me mostrabas, por impulsarme para llegar hasta este punto. Por enseñarme a ser honesta, a decir siempre lo que pienso y lo que siento. Por ser mi ejemplo a seguir y por enseñarme a levantarme de las caídas más difíciles. Por todo tu amor.*

*Te amo mamá.*

*A mi padre, por creer en mi como hija y como ser humano, por toda tu ternura, tu nobleza, tu amor y tu sentido del humor. Por enseñarme que nada es tan duro como para dejar a un lado los sueños. Por sentirte siempre orgulloso de mí y nunca tener miedo de decirme cuanto me amas. Por tu fe en mi.*

*Te amo papá.*

*A mis hermanos:*

*A Valeria, por ser lo más hermoso que me ha pasado en la vida, por existir, por todo el amor que nos tenemos. Por tu confianza y tu apoyo, por estar a mi lado a pesar de la distancia.*

*Te amo hermana.*

*A Christopher, por haber formado parte de mi vida, por toda tu ternura, por ser mi compañía en la soledad, por ser el ángel que me cuida.*

*Te extraño hermano.*

*A mi tita, por tu amor sin medida, por tus cuidados y tu dedicación desde mi primer minuto de vida. Porque siempre has creído y lo has dado todo por mí, por los momentos inolvidables que he vivido contigo, por los años más felices de mi vida. Por ser mi cimiento para crecer, por ser mi madre.*

*Te amo tita.*

*A mis tíos:*

*Amparo, porque siempre has creído en mí, porque en este largo camino de crecimiento has estado a mi lado y has confiado en que puedo lograrlo. Porque sin tu apoyo muchas cosas en mi vida no serían hoy realidad. Por todos tus consejos y todo tu amor.*

*Gracias por creer en mí, tía.*

*Santiago, por ser un ejemplo y una inspiración para mí, por tu peculiar forma de demostrarme que me quieres y que crees en mí. Porque sé que a pesar de las adversidades nunca dudaste que lo lograría.*

*Gracias tío.*

*A Gabriel, por ser un amigo que nos enseñó a todos que en la vida sólo tenemos que hacer lo que nos hace felices, por enseñarme que son los instantes en la vida los que hacen grande e inolvidable a una persona, como tú. Por dibujar en mi boca una sonrisa cada vez que estabas conmigo, porque sé que estarás ahí.*

*Gracias Gabriel.*

*A ti, porque sin ti no lo hubiera logrado. Y a Mí porque cada letra que está escrita en estas hojas lleva una parte de mi alma, por no claudicar por despertarme cada día sabiendo que tengo un sueño que quiero hacer realidad, por cada noche de duda y por cada mañana de esperanza y valor. Por todos estos años de lucha. Porque me lo merezco y lo he logrado.*

## AGRADECIMIENTOS

*Julia, gracias por haberme enseñado a amar de nuevo la física, por los conocimientos que has compartido conmigo, por tu fuerza y tu valor, por llevarme de la mano en este camino y sobre todo por ser mi amiga.*

*A mis sinodales y amigos, Vivianne Marquina, Rafael Méndez, Andrés Porta y Marco Martos. Por haberme dado su confianza y por creer en mi.*

*A Thomas Selligman, por que sin tu apoyo y tu confianza no habría logrado llegar al final del camino.*

*A Rafael Méndez y Gabriela Báez, porque ustedes me enseñaron que en la vida hay mucho más que física, porque son un modelo para mí, porque gracias a ustedes sé que sí se puede lograr lo que uno quiere.*

*A mis maestros, Pablo Barrera, Tatsuo Akachi, Cesar Rincón, Gabriela Del Valle, Rafael Méndez, Thomas Selligman, François Leyvras, Vivianne Marquina, María Luisa Marquina, Pepe Marquina, Rosalía Ridaura, Ma. De los Ángeles Ortiz, Marcos Ley Koo, Andrés Porta, Ramón Peralta, Julieta Fierro, Lourdes Velasco, Rocío Jáuregui y a todos los maestros que compartieron conmigo sus conocimientos y su pasión por la física.*

*A mis amigos de toda la vida, Adriana Acosta, Freya Vite, Adriana y Andrea Peralta, Mónica Martínez, Irasema Rodríguez, Catalina Villamil, Laura Fernández, Pablo Aznavurian, Bárbara Martínez, Claudia Pérez, Alejandra Marín, Ma. Luisa López, Lourdes Mañón, Abraham Pita, Xanic Zepeda.*

*A mis amigos de la facultad, por haber soportado todas mis crisis existenciales en la carrera y por todos los momentos que vivimos juntos: Eduardo Gómez, Horacio Tapia, José Antonio González, Julio Barreiro, Miguel Rodríguez, Hugo Hernández, Gabriel Pallares, Juan Vásques, Ángel P., Adriana Huerta, Mukuy Guevara, Alejandro Reyes, Edgar Díaz, Rubén Marín, Pomar, Tiber Ramírez, Francisco Nettel, Anselmo García, Omar Escamilla, Pablo Castañeda, Luis Santa Cruz, Mauricio Santillana, Javier Torales, Julián Miyoshi y todos aquellos que se me escapan en este momento.*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

*A mis compañeros originales de cubículo Guillermo Castro y Rodrigo Tapia por las discusiones sobre mecánica celeste y las tardes de risas incontenibles, a Janet Torrealba y Tomás Verdugo por divertidas conversaciones vespertinas. A mis nuevos compañeros de cubículo Atahualpa, Alenka y Liliana, por darme ánimo en el último tramo del camino.*

*Al Instituto de Astronomía.*

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	1
<b>CAPÍTULO I: EL PROBLEMA DE DOS CUERPOS</b>	
<b>1.1 Ecuaciones de Movimiento</b> .....	3
<b>1.2 Sistema de Coordenadas Polares</b> .....	6
<b>1.3 Posición y Velocidades Orbitales</b> .....	7
<b>CAPÍTULO II: EL PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR DE TRES CUERPOS</b>	
<b>2.1 Ecuaciones de Movimiento en el Sistema Inercial</b> .....	11
<b>2.2 Ecuaciones de Movimiento en el Sistema Rotante</b> .....	13
<b>2.3 La Integral de Jacobi</b> .....	17
<b>CAPÍTULO III: ECUACIONES DE MOVIMIENTO QUE INTEGRAN LOS MÉTODOS NUMÉRICOS</b>	
<b>3.1 Problema Plano Circular Restringido de Tres Cuerpos</b> .....	21
<b>3.2 Problema de Dos Cuerpos</b> .....	23
<b>3.3 Campo Central</b> .....	24
<b>3.4 Integradores</b> .....	24
<b>3.5 Método de Runge-Kutta de Paso Variable</b> .....	26
<b>3.6 Método de Bulirsch-Stoer</b> .....	29
<b>CAPÍTULO IV: RESULTADOS</b>	
<b>Introducción</b> .....	35
<b>4.1 Resultado para el Problema de Campo Central</b> .....	36

<b>4.2 Resultados para el Problema de Dos Cuerpos .....</b>	<b>40</b>
<b>4.3 Resultados para el Problema Plano Circular Restringido de Tres Cuerpos ....</b>	<b>51</b>
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>83</b>
<b>APÉNDICE A</b>	
<b>A.1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias .....</b>	<b>85</b>
<b>A.2 Método de Euler o de la Recta Tangente .....</b>	<b>86</b>
<b>A.3 Método de Runge-Kutta .....</b>	<b>90</b>
<b>A.4 Errores en los Procedimientos Numéricos .....</b>	<b>92</b>
<b>APÉNDICE B: ELEMENTOS OSCULANTES .....</b>	<b>95</b>
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>99</b>

# INTRODUCCIÓN

En la física existen muchos problemas que no pueden resolverse analíticamente, por lo que los científicos han buscado formas alternativas para resolverlos, como por ejemplo los métodos numéricos, que se utilizan para encontrar una aproximación a la solución analítica. Existen muchos tipos de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales, el primero que se utilizó fue el método de Euler y después se crearon a partir de esta primera idea, métodos que pudieran mejorar el resultado. Dos de los métodos más conocidos y utilizados actualmente son: "Runge-Kutta de paso variable" y el de "Bulirsch-Stoer". En la astronomía se utilizan mucho para la resolución de problemas de dinámica galáctica y mecánica celeste entre otros. Los resultados que se obtienen pueden variar dependiendo del método que se utilice. De ahí que el objetivo de esta tesis sea comparar los métodos antes mencionados, con la idea de encontrar cuál de los dos resulta mejor en integraciones orbitales.

El único problema conocido con solución analítica en mecánica celeste es el "Problema de campo central", que incluye el "Problema circular plano de dos cuerpos", en otras palabras se conocen la posición y la velocidad como funciones explícitas del tiempo. Sin embargo para el "Problema de tres cuerpos" no existe una expresión analítica para la posición y la velocidad como funciones explícitas del tiempo. Es ahí donde necesitamos utilizar los métodos numéricos.

El desarrollo de esta tesis consiste en realizar integraciones orbitales con los métodos Runge-Kutta de paso variable y Bulirsch-Stoer con el fin de comparar los resultados obtenidos con cada uno de ellos y así tener una idea más clara de en qué casos es más conveniente utilizar uno o el otro. Con esto se quiere encontrar un método que arroje resultados más precisos y de buena calidad, donde buena calidad implica que la solución numérica es muy aproximada a la solución analítica. Se busca también encontrar con cuál de ellos se obtienen más detalles. Otra razón muy importante es el tiempo de cómputo que utiliza cada uno, lo cual nos daría una idea acertada sobre cómo puede ahorrarse tiempo en integraciones muy largas.

Para desarrollar este objetivo se han escogido tres problemas particulares de la mecánica celeste: "El problema de campo central", "El problema de dos cuerpos" y "El problema plano circular restringido de tres cuerpos".

Para poder hacer una comparación que pueda arrojar resultados convincentes se debe contar con alguna cantidad que sepamos se conserve en dichos problemas. En los dos primeros casos, sabemos que tanto la energía como el momento angular son cantidades que se conservan. En el último caso, la única cantidad que se conserva es la constante de Jacobi. Son estas cantidades las que se utilizarán como parámetro de comparación entre ambos métodos. Se busca encontrar qué tipo de integraciones pueda ser más eficiente con alguno de ellos. Compararemos también el tiempo de cómputo que requiere cada uno de los métodos numéricos. Buscaremos también si hay alguna característica que los distinga notablemente en su desarrollo.

En el capítulo I se describe el problema de dos cuerpos y se obtienen las constantes de movimiento involucradas. En el capítulo II se describe el problema restringido de tres cuerpos y las constantes de movimiento involucradas en el problema, en un sistema inercial con origen en el centro de masa. En el capítulo III se desarrollan las ecuaciones de movimiento en un sistema de referencia no inercial con origen en el cuerpo primario, ya que son justo estas ecuaciones las que integran los métodos que se utilizan para resolverlas, los cuales se describen brevemente también en este capítulo. En el capítulo IV se muestran y discuten los resultados obtenidos. Y por último se plantean las conclusiones obtenidas en esta tesis.

# CAPÍTULO I

## EL PROBLEMA DE DOS CUERPOS

El problema de dos cuerpos consiste en dos masas puntuales moviéndose bajo la atracción gravitacional mutua descrita por la Ley de la Gravitación Universal:

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \quad (1.1)$$

Donde  $\vec{F}$  es la fuerza de atracción entre los dos cuerpos,  $G$  es la constante de gravitación universal,  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los cuerpos y  $\vec{r}$  es el vector de posición relativa entre ellos.

El movimiento de la mayoría de los planetas y satélites del sistema solar puede ser aproximado por el movimiento de dos cuerpos.

### 1.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Consideremos el movimiento de dos masas  $m_1$  y  $m_2$ , y asignemos dos vectores de posición  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  con respecto a un origen "O" fijado en el espacio inercial.

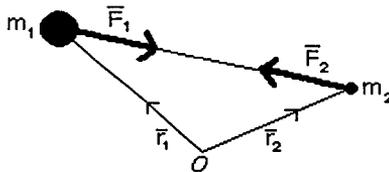


Fig. 1.1.1 Diagrama vectorial para las fuerzas que actúan sobre las masas  $m_1$  y  $m_2$ , con vectores de posición  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ .

El vector  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  denota la posición relativa de la masa  $m_2$  con respecto a la masa  $m_1$ .

La fuerza gravitacional experimentada por cada una de las masas es:

$$\vec{F}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} , \quad (1.1.1)$$

$$\vec{F}_2 = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} , \quad (1.1.2)$$

donde  $\vec{F}_1$  es la fuerza experimentada por la masa  $m_1$  y  $\vec{F}_2$  es la fuerza experimentada por la masa  $m_2$ . Si sumamos  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ , las consecuentes aceleraciones (segunda Ley de Newton) son:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 . \quad (1.1.3)$$

En esta ecuación  $\ddot{\vec{r}}_1$  es la aceleración experimentada por la masa  $m_1$  y  $\ddot{\vec{r}}_2$  es la aceleración experimentada por la masa  $m_2$ . Esta ecuación puede integrarse directamente una vez y obtenemos:

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{a} . \quad (1.1.4)$$

Integrando de nuevo

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{a}t + \vec{b} , \quad (1.1.5)$$

donde  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son vectores constantes. El vector posición del centro de masa está dado por:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} . \quad (1.1.6)$$

Derivando la ecuación (1.1.6) y usando (1.1.4) se obtiene:

$$\dot{\vec{R}} = \frac{\vec{a}}{m_1 + m_2} , \quad (1.1.7)$$

y sustituyendo la ecuación (1.1.5) en (1.1.6) se obtiene:

$$\vec{R} = \frac{\vec{a}t + \vec{b}}{m_1 + m_2} . \quad (1.1.8)$$

Estas nuevas ecuaciones nos dicen que el centro de masa se está moviendo en línea recta con velocidad constante, con respecto al origen  $O$ .

Para simplificar el problema podemos considerar el movimiento de  $m_1$  con respecto a  $m_2$  :

$$-G \frac{m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = \ddot{\vec{r}}_1 \quad , \quad (1.1.9)$$

y para  $m_2$  respecto a  $m_1$ :

$$G \frac{m_1}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = \ddot{\vec{r}}_2 \quad . \quad (1.1.10)$$

Si sumamos  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  obtenemos la siguiente ecuación:

$$G \frac{m_1 + m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 \quad . \quad (1.1.11)$$

Definimos:

$$\mu \equiv G(m_1 + m_2) \quad , \quad (1.1.12)$$

y derivando dos veces el vector  $\vec{r}$  se llega a:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 \quad . \quad (1.1.13)$$

La ecuación (1.1.11) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \ddot{\vec{r}} = 0 \quad . \quad (1.1.14)$$

Esta es la ecuación de movimiento, la cual describe el comportamiento de la separación entre  $m_1$  y  $m_2$ , sin importar a cuál de ellas se tome como el origen. Resolver esta ecuación es encontrar la trayectoria que describe el cuerpo  $m_2$  con respecto al cuerpo  $m_1$ , o viceversa, para lo cual se deben encontrar las constantes de movimiento, ya que se tienen cuatro variables  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  para  $m_2$ . Tomemos el producto vectorial de  $\vec{r}$  con la ecuación (1.1.14):

$$\left( \vec{r} \times \mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) + \left( \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \right) = 0 \quad . \quad (1.1.15)$$

El primer término de este producto vectorial es cero, por lo tanto nos queda la ecuación  $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$ . Ahora bien, si  $F = F(r)\hat{r}$ ,

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0$$

entonces

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0$$

por lo tanto

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h} \quad , \quad (1.1.16)$$

donde  $\vec{h}$  es un vector constante perpendicular a  $\vec{r}$  y  $\dot{\vec{r}}$  lo cual nos dice que el movimiento del cuerpo  $m_2$  respecto al cuerpo  $m_1$  (o viceversa), está en un plano perpendicular a la dirección de  $\vec{h}$ , lo que implica que los vectores de posición y velocidad siempre están en el mismo plano.

El movimiento del cuerpo  $m_2$  respecto al cuerpo  $m_1$  define un plano orbital y el vector constante  $\vec{h}$  que siempre es perpendicular al plano de la órbita, es el vector de momento angular. La ecuación (1.1.16) es el momento angular por unidad de masa.

## 1.2 SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Consideremos el movimiento de  $m_1$  y  $m_2$  en el plano orbital, utilizando coordenadas polares  $(r, \theta)$ , con el origen en el cuerpo  $m_1$ , tomamos una línea de referencia arbitraria donde  $\theta \equiv 0$ . La dirección de la línea de referencia permanece fija. Podemos entonces asignar a  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  como vectores unitarios, paralelo y perpendicular al radio vector de posición respectivamente, entonces podemos escribir los vectores de posición, velocidad y aceleración en coordenadas polares como:

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad , \quad (1.2.1)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad , \quad (1.2.2)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\theta} \quad . \quad (1.2.3)$$

Podemos reescribir la ecuación (1.1.14) sustituyendo la expresión para la aceleración de la ecuación (1.2.2) y nos queda de la siguiente forma:

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\theta} + \mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 0 \quad . \quad (1.2.4)$$

En esta ecuación el primer término es la aceleración radial y debe ser igual al tercer término pero con signo contrario para que la suma en la dirección  $\vec{r}$  sea cero; esto significa

que la aceleración radial tiene la misma magnitud que la fuerza, pero en sentido contrario. Por último el segundo término debe ser también cero para que la suma sea cero. Ahora podemos reescribir la ecuación (1.2.4) en la forma escalar:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (1.2.5)$$

Sustituyendo la ecuación (1.2.2) en la ecuación (1.1.16):

$$\begin{aligned} r\hat{r} \times (r\dot{\hat{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) &= \vec{h} \\ (r\hat{r} \times r\dot{\hat{r}}) + (r\hat{r} \times r\dot{\theta}\hat{\theta}) &= \vec{h} \end{aligned}$$

el segundo término del producto vectorial es  $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{z}$ , por lo que finalmente nos queda:

$$\vec{h} = r^2\dot{\theta}\hat{z} \quad (1.2.6)$$

donde  $\hat{z}$  es un vector unitario perpendicular al plano de la órbita y  $r^2\dot{\theta}$  es la magnitud del momento angular, que es constante para todo tiempo.

### 1.3 POSICIÓN Y VELOCIDADES ORBITALES

La ecuación (1.1.14) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, cuya solución general es:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(\theta - \varpi)] \quad (1.3.1)$$

donde  $e$  es una amplitud,  $\varpi$  es una fase y ambas están dadas por las condiciones iniciales.

Esta ecuación representa la órbita, o trayectoria, del cuerpo  $m_2$  alrededor del cuerpo  $m_1$  y a pesar de no ser una ecuación explícita del tiempo nos permite conocer la posición de  $m_2$  con respecto a  $m_1$  a lo largo de dicha trayectoria. La amplitud  $e$  es la excentricidad y la forma de la órbita depende de este valor. Podemos reescribir la ecuación (1.3.1) como:

$$r = \left( \frac{h^2}{\mu} \right) \frac{1}{1 + e \cos(\theta - \varpi)} \quad (1.3.2)$$

y si definimos  $p = \frac{h^2}{\mu}$ , entonces la ecuación (1.3.2) queda finalmente:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)} \quad (1.3.3)$$

Que es la ecuación general de una cónica en coordenadas polares. Donde  $p$  es el semilado recto, que depende de la excentricidad de la órbita. Según sea la forma de la órbita es el tamaño del semilado recto.

El momento angular depende del semieje mayor de la órbita y de la excentricidad, lo cual se mostrará más adelante. Tomando el problema de dos cuerpos para el Sistema Solar, la trayectoria de un planeta alrededor del Sol es elíptica.

En una órbita elíptica, las cantidades  $a$  (semieje mayor de la elipse) y  $e$  (excentricidad) están relacionadas por la expresión  $b^2 = a^2(1 - e^2)$ , donde  $b$  es el semieje menor de la elipse, por lo que la ecuación (1.3.3) se puede escribir como:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \varpi)} \quad (1.3.4)$$

Donde  $r$  se mide desde el foco de la órbita. En mecánica celeste se acostumbra utilizar el término longitud cuando se hace referencia a cualquier ángulo que está medido con respecto a una línea fija de referencia en un sistema inercial. Las cuatro posibles cónicas que puede seguir el cuerpo  $m_2$  como trayectoria son:

- 1) círculo  $e = 0$  y  $p = a$  (donde  $a$  es el semieje mayor y  $e$  es la excentricidad)
- 2) elipse  $0 < e < 1$  y  $p = a(1 - e^2)$
- 3) parábola  $e = 1$  y  $p = q$ , (donde  $q$  es la distancia del vértice al foco)
- 4) hipérbola  $e > 1$  y  $p = a(e^2 - 1)$

El ángulo  $\theta$  es llamado longitud verdadera. Los valores mínimo y máximo del radio orbital, medidos desde el foco, son

$$r_p = a(1 - e) \quad \text{para } \theta = \varpi \quad ,$$

y

$$r_a = a(1 + e) \quad \text{para } \theta = \varpi + \pi \quad .$$

Estos puntos en la órbita son llamados periápside ( $r_p$ ) y apoápside ( $r_a$ ) respectivamente, el ángulo  $\varpi$  se llama longitud del periápside, que para el problema de dos cuerpos es

una constante. Por conveniencia nos referiremos a ella como la coordenada angular del periápside. Definimos el ángulo  $f = \theta - \varpi$  el cual es llamado anomalía verdadera. Si  $\varpi$  es constante, la trayectoria es cerrada y la posición angular está descrita por  $f$  ó  $\theta$ , que son ángulos cuyo periodo es  $2\pi$ . Con esto podemos reescribir la ecuación (1.3.4) como:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (1.3.5)$$

Por lo tanto en  $f = 0$  se tiene  $r_p =$  periápside y cuando  $f = \pi$  se tiene  $r_a =$  apoápside. En el caso del problema de dos cuerpos, si la órbita es circular, la velocidad angular promedio,  $n$ , es constante. De la tercera ley de Kepler,  $P^2 = (4\pi^2 a^3)/\mu$ , y sabiendo que  $n = 2\pi/P$ , la velocidad angular promedio está dada por  $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ .

Derivemos ahora otra constante de movimiento tomando el producto escalar de  $\ddot{\vec{r}}$  con la ecuación (1.1.14). Usando la ecuación (1.2.2) para sustituirla en (1.1.14) y desarrollando:

$$(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \cdot \left( \mu \frac{(r\hat{r})}{r^3} + \frac{d^2(r\hat{r})}{dt^2} \right) = 0$$

En este producto escalar todos los términos en los que se encuentre  $\hat{r} \cdot \hat{\theta}$  se hacen cero, debido a que son vectores perpendiculares. Por lo tanto nos queda la ecuación escalar

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\dot{r}}{r^2} = 0 \quad (1.3.6)$$

donde  $\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \dot{r}\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$ . Si reescribimos este resultado como  $\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{r}^2) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}^2)$  podemos integrar la ecuación (1.3.6) de la siguiente manera

$$\frac{1}{2} \int \frac{d}{dt}(\dot{r}^2) dt + \frac{1}{2} \int \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}^2) dt = -\mu \int \frac{1}{r^2} dr ,$$

y obtenemos

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{\mu}{r} + E = cte. , \quad (1.3.7)$$

donde  $\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = v^2$ , donde  $v$  es la magnitud del vector velocidad de la partícula. Y finalmente podemos escribir la ecuación (1.3.7) como

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = E , \quad (1.3.8)$$

donde  $v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$  es el cuadrado de la velocidad y  $E$ , es la energía, es una constante de movimiento. El tipo de cónica que se obtiene para la trayectoria depende del valor de la energía, cuando  $E < 0$  es una elipse (o circunferencia), por lo que la partícula está amarrada gravitacionalmente,  $E = 0$  es una parábola, con  $v = 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , y finalmente cuando  $E > 0$  es una hipérbola, con  $v > 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

La ecuación (1.3.8) muestra que la energía orbital o energía total por unidad de masa se conserva. El problema de dos cuerpos tiene cuatro constantes de movimiento: la energía  $E$  y tres componentes del momento angular,  $\vec{h}$ .

Podemos obtener una expresión para la magnitud de la velocidad en términos del semieje mayor derivando la ecuación (1.3.5) con respecto al tiempo:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (1.3.9)$$

Con esta ecuación podemos conocer la magnitud de la velocidad en cualquier punto de la órbita  $r$ , ya que el semieje mayor  $a$  es constante y está determinado por las condiciones iniciales. La velocidad del cuerpo orbitante es máxima en el periápside ( $f = 0$ ) y mínima en el apoápside ( $f = \pi$ ).

Comparando la ecuación (1.3.9) con la ecuación (1.3.7), podemos ver que la energía se puede escribir como:

$$v^2 = 2E + \frac{2\mu}{r} = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Y obtenemos una nueva expresión para la integral de energía

$$E = -\frac{\mu}{2a}, \quad (1.3.10)$$

con la cual verificamos que la energía de una órbita elíptica es una función solamente de su semieje mayor y es independiente de la excentricidad.

# CAPÍTULO II

## EL PROBLEMA DE TRES CUERPOS: CASO RESTRINGIDO CIRCULAR

En el capítulo I se mostró cómo el problema de dos masas moviéndose bajo una fuerza de atracción gravitacional mutua, puede resolverse analíticamente y cómo el movimiento resultante siempre está confinado a trayectorias geométricas fijas, cerradas en un sistema inercial, si y sólo si, la energía total es menor que cero.

En este capítulo extenderemos el análisis considerando la atracción gravitacional de tres cuerpos. Nos enfocaremos al problema en el cual el tercer cuerpo tiene una masa despreciable, comparada con la masa de los otros dos y por tanto no afecta su movimiento.

Si los dos cuerpos masivos en dicho problema, se mueven en órbitas circulares alrededor de su centro de masa el problema del movimiento del tercer cuerpo es llamado: "Problema restringido circular de tres cuerpos". El que sea restringido implica que la tercera partícula tiene una masa gravitacional infinitesimal.

El problema restringido de tres cuerpos no ha podido resolverse analíticamente, sin embargo representa una buena aproximación para ciertos casos en el Sistema Solar. En este capítulo describiremos las ecuaciones de movimiento del problema de tres cuerpos y haremos énfasis en la importancia de la única cantidad constante en el caso restringido circular: "La constante de Jacobi".

### 2.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN EL SISTEMA INERCIAL

Primero haremos las consideraciones necesarias: tenemos tres cuerpos, el primero con masa  $m_1$ , el segundo con masa  $m_2$  y el tercero lo consideraremos como infinitesimal y lo denotaremos con la letra  $m$ .

El cuerpo infinitesimal es atraído por los dos cuerpos masivos, pero estos sólo están sometidos a su atracción gravitacional mutua.

Para el movimiento del cuerpo infinitesimal escribiremos las ecuaciones diferenciales de movimiento considerando lo siguiente:

1) Los dos cuerpos  $m_1$  y  $m_2$  se mueven en órbitas circulares alrededor de su centro de masa y el cuerpo infinitesimal  $m$  está sujeto a la atracción de los dos primeros.

2) Se escoge la unidad de masa, tal que  $(m_1 + m_2) = 1$ , y consideramos también que las masas están normalizadas a la suma.

3) Se escoge la unidad de distancia, tal que la distancia constante entre los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$  sea unitaria,  $a = 1$  (recordemos que en el caso de una órbita circular  $a = r$ ).

4) Consideraremos un conjunto de ejes  $X$  y  $Y$  en el centro de masa de los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$ . La dirección del eje  $X$  es a lo largo de la línea que une los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$  en  $t = 0$ . La dirección del eje  $Y$  es perpendicular al eje  $X$ . El movimiento de los cuerpos masivos es sobre el plano  $XY$ .

5) Para el movimiento del cuerpo infinitesimal  $m$ , consideraremos también la coordenada  $z$ . Donde el eje  $Z$  es perpendicular al plano  $XY$  en el que se mueven los cuerpos masivos. El eje  $Z$  está en la misma dirección que el vector del momento angular de  $m_1$  y  $m_2$ .

6) Los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$  tienen la misma velocidad angular promedio, cada uno respecto al otro y a su centro de masa.

7) La unidad de tiempo se escoge tal que la constante gravitacional,  $G$ , también es unitaria.

Como consecuencia de la forma en que se han escogido las unidades, la velocidad angular promedio de los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$ , es:

$$n = \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{a^{3/2}} = 1 \quad (2.1.1)$$

Sin embargo, conservaremos la velocidad angular promedio,  $n$ , en las ecuaciones (a partir de la rotación de los ejes), para enfatizar que todos los términos en las ecuaciones de movimiento son aceleraciones, cuando nos traslademos al sistema rotante.

Hasta ahora hemos utilizado un sistema donde el origen se encuentra en el centro de masa de un sistema inercial, pero encontrar la constante de Jacobi en un sistema rotante es mucho más sencillo.

## 2.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN EL SISTEMA ROTANTE

En la siguiente figura los ejes primados representan a un sistema rotante. El origen está localizado en el centro de masa de los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$ . Los ejes  $Z$  y  $Z'$  coinciden con el eje de rotación y la rotación es en sentido contrario a las manecillas del reloj (positivo).

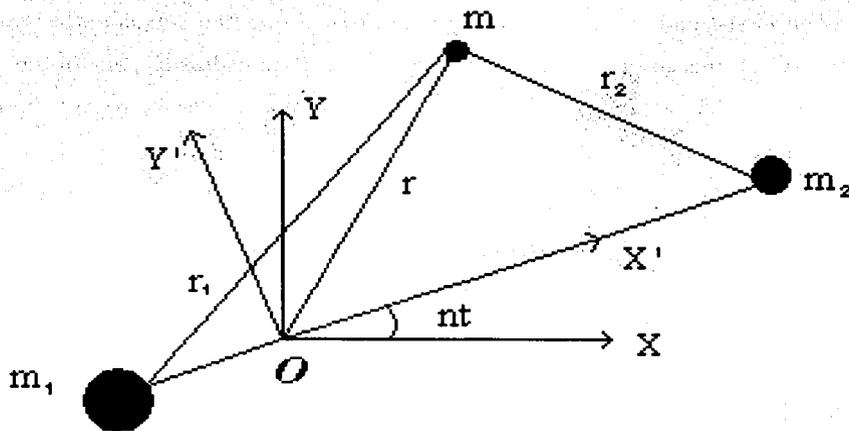


Fig. 2.1.1 Vista plana de la relación entre las coordenadas de la partícula  $m$  en el sistema inercial  $(x, y, z)$  y en el sistema rotante  $(x', y', z')$ .

Consideraremos un nuevo sistema de ejes que rotan con el origen en el centro de masa que está siempre en la línea que une a  $m_1$  con  $m_2$ . Los ejes rotan en la dirección en la cual los cuerpos masivos se mueven con una velocidad angular unitaria,  $n$  (ver ec. 2.2.6).

El eje  $Z'$  de este nuevo sistema, coincide con el eje  $Z$  del sistema inercial. La dirección del eje  $X'$  se escoge de tal manera que los dos cuerpos masivos,  $m_1$  y  $m_2$ , siempre tengan coordenadas  $(x_1', 0, 0)$  y  $(x_2', 0, 0)$ , tal que  $x_2' - x_1' \equiv 1$ .

Las coordenadas del cuerpo infinitesimal  $m$  en el sistema inercial, están relacionadas con las coordenadas en el sistema rotante por una matriz de rotación y son:

$$x = x' \cos nt - y' \sin nt, \quad (2.2.1)$$

$$y = x' \sin nt + y' \cos nt \quad (2.2.2)$$

y

$$z = z'. \quad (2.2.3)$$

Las coordenadas en el sistema rotante del cuerpo infinitesimal, están relacionadas con las coordenadas del sistema inercial por la transpuesta de la matriz utilizada para obtener las coordenadas (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3). Así las coordenadas en el sistema rotante para el cuerpo infinitesimal son:

$$x' = x \cos nt + y \sin nt, \quad (2.2.4)$$

$$y' = -x \sin nt + y \cos nt \quad (2.2.5)$$

y

$$z' = z. \quad (2.2.6)$$

Las segundas derivadas de las ecuaciones (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3) son:

$$\ddot{x} = [\ddot{x}' - 2n\dot{y}' - n^2x'] \cos nt - [\dot{y}' + 2n\dot{x}' - n^2y'] \sin nt, \quad (2.2.7)$$

$$\ddot{y} = [\ddot{x}' - 2\dot{y}' - n^2x'] \sin nt + [\dot{y}' + 2n\dot{x}' - n^2y'] \cos nt, \quad (2.2.8)$$

$$\ddot{z} = \ddot{z}'. \quad (2.2.9)$$

Escribimos las tres coordenadas en el sistema inercial, para los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$ , en términos de las coordenadas del sistema rotante, primero hagámoslo para  $m_1$ :

$$x_1 = x_1' \cos nt - y_1' \sin nt, \quad (2.2.10)$$

$$y_1 = x_1' \sin nt + y_1' \cos nt , \quad (2.2.11)$$

$$z_1 = z_1' . \quad (2.2.12)$$

Y ahora para  $m_2$ :

$$x_2 = x_2' \cos nt - y_2' \sin nt , \quad (2.2.13)$$

$$y_2 = x_2' \sin nt + y_2' \cos nt , \quad (2.2.14)$$

$$z_2 = z_2' . \quad (2.2.15)$$

Escribimos  $(x - x_1)$  y  $(x - x_2)$ , en términos de las coordenadas (2.2.10) y (2.2.13):

$$(x - x_1) = (x' - x_1') \cos nt - (y_1' - y') \sin nt , \quad (2.2.16)$$

$$(x - x_2) = (x' - x_2') \cos nt - (y_2' - y') \sin nt , \quad (2.2.17)$$

Igualamos el lado derecho de la ecuación (2.1.3) con la ecuación (2.2.7) y sustituimos las expresiones (2.2.16) y (2.2.17). Simplificando queda:

$$\begin{aligned} & [\ddot{x}' - 2n\dot{y}' - n^2 x'] \cos nt - [\dot{y}' + 2n\dot{x}' - n^2 y'] \sin nt = \\ & - \left[ m_1 \frac{(x' - x_1')}{(r_1')^3} + m_2 \frac{(x' - x_2')}{(r_2')^3} \right] \cos nt + \left[ m_1 \frac{(y' - y_1')}{(r_1')^3} + m_2 \frac{(y' - y_2')}{(r_2')^3} \right] \sin nt . \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Donde

$$r_1' = \sqrt{(x' - x_1')^2 + (y' - y_1')^2 + (z')^2} , \quad (2.2.19)$$

$$r_2' = \sqrt{(x' - x_2')^2 + (y' - y_2')^2 + (z')^2} . \quad (2.2.20)$$

Haremos exactamente lo mismo para  $\dot{y}$  (ec. 2.2.4), para lo cual necesitamos escribir  $(y - y_1)$  y  $(y - y_2)$ , en términos de las coordenadas (2.2.11) y (2.2.14):

$$(y - y_1) = (x' - x_1') \sin nt + (y' - y_1') \cos nt , \quad (2.2.21)$$

$$(y - y_2) = (x' - x_2') \sin nt + (y' - y_2') \cos nt . \quad (2.2.22)$$

Ahora igualamos el lado derecho de la ecuación (2.1.4) con la ecuación (2.2.8) y sustituimos las expresiones (2.2.21) y (2.2.22).

Simplificando queda:

$$\begin{aligned} & [\ddot{x}' - 2n\dot{y}' - n^2x'] \sin nt + [\dot{y}' + 2n\dot{x}' - n^2y'] \cos nt = \\ & - \left[ m_1 \frac{(x' - x_1')}{(r_1')^3} + m_2 \frac{(x' - x_2')}{(r_2')^3} \right] \sin nt - \left[ m_1 \frac{(y' - y_1')}{(r_1')^3} + m_2 \frac{(y' - y_2')}{(r_2')^3} \right] \cos nt. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Como  $z = z'$ ,  $z_1 = z_1'$ ,  $z_2 = z_2'$  y  $z_1' = z_2' = 0$ , al sustituir en la ecuación (2.1.5) queda:

$$\ddot{z}' = -m_1 \frac{z'}{(r_1')^3} - m_2 \frac{z'}{(r_2')^3}. \quad (2.2.24)$$

Ahora multiplicamos las ecuaciones (2.2.18) y (2.2.23) por  $\sin nt$  y  $\cos nt$  respectivamente. Si sumamos las ecuaciones restantes y simplificamos, obtenemos:

$$\ddot{x}' - 2n\dot{y}' - n^2x' = -m_1 \frac{(x' - x_1')}{(r_1')^3} - m_2 \frac{(x' - x_2')}{(r_2')^3}. \quad (2.2.25)$$

Seguimos el mismo procedimiento, pero ahora multiplicamos por  $-\sin nt$  la ecuación (2.2.18) y por  $\cos nt$  la ecuación (2.2.23), sumando ambas ecuaciones y simplificando queda finalmente:

$$\dot{y}' + 2n\dot{x}' - n^2y' = -m_1 \frac{(y' - y_1')}{(r_1')^3} - m_2 \frac{(y' - y_2')}{(r_2')^3}, \quad (2.2.26)$$

y la ecuación (2.2.24) queda exactamente igual. Como los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$  están localizados siempre sobre el eje  $x'$  (rotante),  $y_1' = 0$  y  $y_2' = 0$  para todo tiempo, por lo que la ecuación (2.2.26) se puede reescribir y las ecuaciones (2.2.24) y (2.2.25) se quedan igual:

$$\ddot{x}' - 2n\dot{y}' - n^2x' = -m_1 \frac{(x' - x_1')}{(r_1')^3} - m_2 \frac{(x' - x_2')}{(r_2')^3}, \quad (2.2.27a)$$

$$\ddot{y}' + 2n\dot{x}' - n^2 y' = -m_1 \frac{y'}{(r_1')^3} - m_2 \frac{y'}{(r_2')^3} , \quad (2.2.27b)$$

$$\ddot{z}' = -m_1 \frac{z'}{(r_1')^3} - m_2 \frac{z'}{(r_2')^3} . \quad (2.2.27c)$$

Estas son las ecuaciones diferenciales de movimiento para el cuerpo infinitesimal respecto de los ejes que rotan, y tienen la propiedad de no depender explícitamente del tiempo, porque las coordenadas de los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$ , permanecen constantes como una consecuencia de la manera particular en la que rotan los ejes.

Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales acopladas, no pueden resolverse analíticamente. Por esto la necesidad de utilizar métodos numéricos con los cuales se diseña un código que integra estas ecuaciones con respecto al tiempo y dan como resultado, la posición y la velocidad en cualquier instante de tiempo de una partícula, dados  $m_1$  y  $m_2$ .

La única utilidad de las ecuaciones (2.2.27) es demostrar la existencia de la única constante de movimiento que se conoce hasta ahora. De hecho las ecuaciones de movimiento que integran los dos códigos que se se comparan (Runge-Kutta de paso variable y Bulirsch-Stoer), son las que aparecen en el capítulo III.

### 2.3 LA INTEGRAL DE JACOBI

El lado derecho de las ecuaciones (2.2.24), (2.2.25) y (2.2.26) son aceleraciones que también pueden escribirse como el gradiente de una función escalar  $U$ :

$$\ddot{x}' - 2n\dot{y}' = \frac{\partial U}{\partial x'} , \quad (2.3.1)$$

$$\ddot{y}' - 2n\dot{x}' = \frac{\partial U}{\partial y'} , \quad (2.3.2)$$

$$\ddot{z}' = \frac{\partial U}{\partial z'} , \quad (2.3.3)$$

donde  $U = U(x', y', z')$  y está dada por:

$$U = \frac{n^2}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{m_1}{r_1'} + \frac{m_2}{r_2'} . \quad (2.3.4)$$

Si obtenemos las derivadas parciales de  $U$  y sustituimos  $r_1'$  y  $r_2'$  de las ecuaciones (2.2.19) y (2.2.20), podemos verificar las ecuaciones (2.3.1), (2.3.2) y (2.3.3). En la ecuación (2.3.4), el término  $\frac{n^2}{2}(x'^2 + y'^2)$  es el potencial centrífugo y el término en  $1/r_1'$  y  $1/r_2'$  es el potencial gravitacional.

Los términos  $-2ny'$  y  $-2n\dot{x}'$  en las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2) son los términos de Coriolis, los cuales dependen de la velocidad del cuerpo infinitesimal en el marco de referencia rotante. La fuerza de Coriolis resultante, está en un ángulo recto con respecto a la velocidad, por lo cual no realiza trabajo ( $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = 0$ ), por tanto, no modifica la energía cinética.

Notemos que en nuestra definición  $U$  es positiva. Sin embargo, esto es contrario en la práctica en física, y es puramente una convención en Mecánica Celeste.

Podemos entonces tomar un potencial negativo, tal que,  $U^* = -U$  y así las ecuaciones de movimiento tomarían la forma:

$$\ddot{x}' - 2ny' = -\frac{\partial U^*}{\partial x'} \quad , \quad (2.3.5)$$

$$\ddot{y}' - 2n\dot{x}' = -\frac{\partial U^*}{\partial y'} \quad , \quad (2.3.6)$$

$$\ddot{z}' = -\frac{\partial U^*}{\partial z'} \quad . \quad (2.3.7)$$

Debemos hacer notar también que  $U$  no es un potencial verdadero, y está mejor referido como una función escalar de la cual algunas (pero no todas) de las aceleraciones experimentadas por el cuerpo infinitesimal en el marco rotante, pueden derivarse. Por lo que  $U$  es llamado "pseudo-potencial".

Volvamos a las ecuaciones (2.3.1), (2.3.2) y (2.3.3), y multipliquemos por  $\dot{x}'$ ,  $\dot{y}'$  y  $\dot{z}'$  respectivamente:

$$\ddot{x}'\dot{x}' - \dot{y}'\dot{x}' = \dot{x}'\frac{\partial U}{\partial x'} \quad , \quad (2.3.8)$$

$$\ddot{y}'\dot{y}' - \dot{y}'\dot{x}' = \dot{y}'\frac{\partial U}{\partial y'} \quad , \quad (2.3.9)$$

$$\ddot{z}'\dot{z}' = \dot{z}'\frac{\partial U}{\partial z'} \quad , \quad (2.3.10)$$

sumemos estas tres ecuaciones y simplifiquemos para obtener una nueva ecuación

$$[\dot{x}'\dot{x}' + \dot{y}'\dot{y}' + \dot{z}'\dot{z}'] = \left[ \frac{\partial U}{\partial x'}\dot{x}' + \frac{\partial U}{\partial y'}\dot{y}' + \frac{\partial U}{\partial z'}\dot{z}' \right] \quad (2.3.11)$$

Sabemos que el lado derecho de esta ecuación se puede sustituir por  $dU/dt$  y reescribimos la ecuación anterior como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 + (\dot{z}')^2] = \frac{dU}{dt} \quad , \quad (2.3.12)$$

que podemos integrar fácilmente con respecto al tiempo

$$\frac{1}{2} \int d [(\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 + (\dot{z}')^2] = \int dU \quad ; \quad (2.3.13)$$

y al integrar queda:

$$\frac{1}{2} [(\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 + (\dot{z}')^2] + \frac{1}{2} C_1 = U - C_2 \quad . \quad (2.3.14)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$ , son constantes de integración.

Definimos  $2C_2 + C_1 = C_J$  por lo que la ecuación la podemos escribir de la siguiente forma:

$$(\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 + (\dot{z}')^2 = 2U - C_J \quad , \quad (2.3.15)$$

donde  $2U - C_J = v^2$  es la velocidad al cuadrado del cuerpo infinitesimal en el marco rotante, por lo que podemos reescribirla, usando la ecuación (2.3.4), como sigue:

$$(\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 + (\dot{z}')^2 = n^2(x'^2 + y'^2) + 2\frac{m_1}{r_1'} + 2\frac{m_2}{r_2'} - C_J \quad . \quad (2.3.16)$$

La cantidad  $2U - v^2 = C_J$  es una constante de movimiento, ya que dadas las condiciones iniciales, al calcular esta expresión analítica para valores de las posiciones y las velocidades que aparecen en ella, el valor de  $C_J$  siempre es el mismo. Esta es la integral de Jacobi o constante de Jacobi, llamada algunas veces integral de energía relativa. Es importante hacer notar que ésta no es una integral de energía porque en el problema res-

tringido de tres cuerpos, ni la energía ni el momento angular de la partícula de prueba se conservan. La integral o constante de Jacobi, es la única cantidad que se conserva en el problema restringido circular de tres cuerpos, lo que significa que el problema no puede resolverse para casos generales. Es justo esta cantidad, la que utilizaremos para verificar la precisión de ambos integradores numéricos. La constante de integración  $C_J$  se determina con las condiciones iniciales del problema.

# CAPÍTULO III

## ECUACIONES DE MOVIMIENTO QUE INTEGRAN LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Debido a que los métodos numéricos (ver introducción y apéndice A) que se comparan en esta tesis integran las ecuaciones de movimiento obtenidas en un sistema no inercial con origen en el cuerpo primario,  $m_1$ , esta sección está dedicada a obtener las ecuaciones en dicho sistema. Primero obtendremos las ecuaciones de movimiento para el problema plano restringido circular de tres cuerpos (PPRCTC), después para el problema de dos cuerpos (PDC) y por último para el problema de campo central (PCC).

### 3.1 PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS

El PPRCTC consiste de dos cuerpos masivos  $m_1$  y  $m_2$  que giran en órbita circular alrededor de su centro de masa, y un tercer cuerpo  $m$  sin masa gravitacional cuyo movimiento está determinado por las fuerzas que  $m_1$  y  $m_2$  ejercen sobre él.

Tomamos  $m_1$  como el origen de coordenadas y unos ejes cartesianos  $X$  y  $Y$  no rotantes. En este sistema solamente  $m_2$  y  $m$  se mueven, y en la Fig. 3.1 se muestran sus vectores de posición respecto a  $m_1$ .

Definimos  $\vec{D} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Recordemos que  $\vec{r}_1$  es el vector que une a  $m$  con  $m_1$  y que las masas de los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$  están normalizadas a la suma y las distancias están normalizadas a la separación de estos dos cuerpos. Por lo tanto, de la figura 3.1, las ecuaciones de movimiento para  $m$  y  $m_2$  son:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_1}{|\vec{r}_1|^3}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{|\vec{r}_2|^3}\vec{r}_2 - \frac{m_2}{|\vec{D}|^3}\vec{D} ; \quad (3.1.1)$$

$$\ddot{\vec{D}} = -(m_1 + m_2) \left[ \frac{1}{|\vec{D}|^3} \vec{D} \right] . \quad (3.1.2)$$

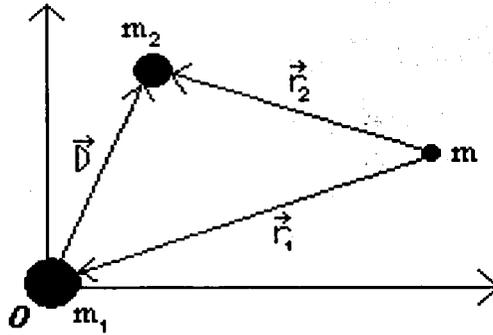


Fig. 3.1 Vectores de posición respecto a  $m_1$ , en un sistema inercial. Posiciones relativas a las masas  $m$ ,  $m_1$  y  $m_2$ .

La ecuación (3.1.1), es la ecuación de movimiento para el cuerpo  $m$ , relativo a  $m_1$ , pero sin ejes rotantes aunque este no es un sistema inercial. En esta ecuación los dos primeros términos del lado derecho indican las interacciones entre el cuerpo  $m$  y los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$ , mientras que el último término corresponde a la aceleración que sufre el cuerpo  $m_1$  debido al cuerpo  $m_2$ , a este término se le conoce como "Término indirecto" y aparece como consecuencia de elegir al origen en  $m_1$ , el cual no está fijo.

Si escribimos las ecuaciones de movimiento con respecto al centro de masa, entonces el término indirecto no aparece, (ver capítulo 2).

La ecuación (3.1.2) es la ecuación de movimiento relativa entre  $m_1$  y  $m_2$ , en ésta aparece la suma de las masas, y no el producto, debido a que el origen ( $m_1$ ) no está en reposo.

Escribiendo las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.2) en componentes cartesianas, se obtiene:

$$\ddot{x} = -m_1 \frac{x}{r_1^3} + m_2 \frac{x_2}{r_2^3} - m_2 \frac{(x_2 - x)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad (3.1.3)$$

$$\ddot{y} = -m_1 \frac{y}{r_1^3} + m_2 \frac{y_2}{r_2^3} - m_2 \frac{(y_2 - y)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad (3.1.4)$$

$$\ddot{D}_x = -(m_1 + m_2) \frac{D_x}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad (3.1.5)$$

$$\ddot{D}_y = -(m_1 + m_2) \frac{D_y}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad (3.1.6)$$

donde  $r_1 = (x^2 + y^2)^{1/2}$ , y  $(r_2 - r_1)^2 = ((x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2)^{1/2}$ . Las ecuaciones (3.1.3) a (3.1.6) forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden acopladas y no lineales, el cual será integrado numéricamente por los dos códigos. Como se demostró en el capítulo 2, existe una constante de movimiento para el problema restringido circular de tres cuerpos, la cual se usará para comparar la precisión y eficiencia de dichos códigos.

### 3.2 PROBLEMA DE DOS CUERPOS

Para el Problema de dos cuerpos, las ecuaciones de movimiento de  $m_2$  respecto a  $m_1$ , nos quedan de la siguiente forma:

$$\ddot{\vec{D}} = -(m_1 + m_2) \left[ \frac{1}{|\vec{D}|^3} \vec{D} \right]. \quad (3.2.1)$$

Si escribimos esta ecuación por componentes

$$\ddot{D}_x = -(m_1 + m_2) \frac{(x_2 - x)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad (3.2.2)$$

$$\ddot{D}_y = -(m_1 + m_2) \frac{(y_2 - y)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad (3.2.3)$$

Estas ecuaciones son las que integran los dos códigos para el problema de dos cuerpos. La solución a la ecuación (3.2.1) es una trayectoria cónica que describe el cuerpo  $m_2$  respecto a  $m_1$ , y el tipo de cónica depende de la energía. Si la órbita es cerrada, las masas están "amarradas" gravitacionalmente. Las cantidades que se monitorean para comparar

los códigos son "la energía" y "el momento angular", cantidades que se conservan en el Problema de dos cuerpos, así como la excentricidad y el semieje mayor que son cantidades que deben permanecer constantes, para una órbita en particular.

### 3.3 CAMPO CENTRAL

Un caso particular del problema de dos cuerpos es cuando  $m_1 \gg m_2$ , y se considera que el cuerpo  $m_2$  no afecta el movimiento del cuerpo  $m_1$ , por lo que de la suma de masas del lado derecho de la ecuación (3.2.1) sólo permanece  $m_1$ , y la ecuación que nos queda es

$$\ddot{\vec{D}} = -m_1 \frac{\vec{D}}{|\vec{D}|^3} \quad (3.3.1)$$

y esta ecuación por componentes cartesianas queda:

$$\ddot{D}_x = -m_1 \frac{D_x}{r_1^3}, \quad (3.3.2)$$

$$\ddot{D}_y = -m_1 \frac{D_y}{r_1^3}. \quad (3.3.3)$$

Las cantidades que se monitorean en este caso son las mismas que para el problema de dos cuerpos.

### 3.4 INTEGRADORES

El comportamiento de muchos procesos físicos, particularmente aquéllos en que los sistemas experimentan cambios dependientes del tiempo, pueden escribirse con ecuaciones diferenciales ordinarias, como en el caso del problema restringido circular de tres cuerpos. Si bien muchas de estas ecuaciones pueden resolverse con técnicas analíticas conocidas, un gran número de ecuaciones diferenciales asociadas a fenómenos físicos no pueden

ser resueltas de esta manera. Afortunadamente pueden generarse soluciones aproximadas numéricamente.

La idea principal de cualquier rutina para resolver el problema de valor inicial es siempre la siguiente: reescribir las derivadas  $dy$  y  $dt$  como incrementos finitos  $\Delta y$  y  $\Delta t$  (el tamaño del paso) y multiplicar la ecuación por  $\Delta t$ . Esto da las fórmulas algebraicas para el cambio de las funciones cuando la variable independiente  $t$ , es escalonada por un paso de tamaño  $\Delta t$ . En el límite cuando  $\Delta t$  es muy pequeño, se lleva a cabo una buena aproximación para la solución de la ecuación diferencial.

Todos los métodos para resolver estas ecuaciones tienen la misma idea: añadir (o sumar) pequeños incrementos a las funciones correspondientes a las derivadas (lado derecho de la ecuación 3.1.4), multiplicadas por pasos de cierto tamaño de la variable independiente. Tres métodos numéricos prácticos para resolver problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias son:

- 1) Métodos Runge-Kutta.
- 2) Extrapolación de Richardson y su implementación particular como el método de Bulirsch-Stoer.
- 3) Métodos predictor-corrector.

En esta tesis, se estudiarán el método Runge-Kutta de paso variable y el método Bulirsch-Stoer, también de paso variable.

En términos generales el método Runge-Kutta propaga una solución sobre un intervalo cambiando la información de varios pasos de estilo Euler (ver apéndice A).

El método de extrapolación de Richardson, utiliza la poderosa idea de extrapolar el resultado calculado para el valor que habría sido obtenido si el tamaño del paso hubiera sido mucho más pequeño que lo que en realidad fue. En particular la extrapolación a un paso de tamaño infinitesimal es la meta deseada. El primer integrador práctico de ecuaciones diferenciales ordinarias que implementó esta idea, fue el desarrollado por Bulirsch y Stoer.

Se utiliza el Runge-Kutta cuando no se sabe algo mejor o si se tiene un problema trivial donde la eficiencia del integrador no es una preocupación. El Runge-Kutta, aunque casi siempre tiene éxito, no es el más rápido, excepto cuando evaluar  $f_i$  tiene bajo costo de tiempo de CPU y cuando se requiere de una precisión moderada ( $\approx 10^{-5}$ ).

Cada uno de los tres métodos genera errores numéricos. Estos errores numéricos son introducidos en las soluciones por ser controlados por el integrador. En general los tres métodos pueden usarse para cualquier problema de valor inicial. Siempre es recomendable implementar un control adaptativo para el tamaño del paso, como se hace en el método "Runge-Kutta de paso variable", y en el "Bulirsch-Stoer" (Press et al, 1996)

Las rutinas de un integrador se pueden organizar en tres niveles anidados:

1) El nivel más bajo es llamado el algoritmo: implementa fórmulas básicas del método que se utilice, comienza con las variables independientes  $y_i$  en  $t$  y regresa nuevos valores de las variables dependientes  $y_i$  en el valor  $t + h$ . El algoritmo también produce alguna información sobre la calidad de la solución después del paso. Sin embargo, el algoritmo no es capaz de tomar la decisión de si la calidad de la solución es aceptable o no.

La decisión de control de calidad se encuentra en el siguiente paso, superior a la rutina algoritmo, la llamamos rutina escalonadora, o escalonador.

2) Rutina escalonadora: llama a la rutina algoritmo; puede rechazar el resultado y asignar un tamaño de paso más pequeño y llamar a la rutina algoritmo de nuevo, hasta que la compatibilidad con un criterio de precisión determinado se haya logrado. La tarea fundamental del escalonador es tomar el tamaño de paso más grande consistente con un funcionamiento específico. Sólo cuando ésto se ha realizado, el poder del algoritmo (o rutina algoritmo) se hace visible.

En un nivel superior al escalonador se encuentra la rutina conductora.

3) Rutina conductora: comienza y detiene la integración, almacena resultados intermedios y actúa como interface con el usuario, es decir, es la que como usuarios podemos manejar.

### 3.5 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE PASO VARIABLE

Ahora consideramos un control que adapte el tamaño del paso, con lo que se construye el método de Runge-Kutta de paso variable o paso adaptativo. Un buen integrador de

EDO's (ecuaciones diferenciales ordinarias) tiene un control adaptativo sobre sus propios procesos, haciendo cambios frecuentes en su tamaño de paso.

El propósito de este control es lograr una precisión predeterminada en la solución, con un mínimo de esfuerzo de cálculo. La precisión se pide en el parámetro "eps" ( $\epsilon$ ) del control y se monitorea analizando las constantes del problema. En esta tesis, las cantidades que se monitorean para los problemas de campo central y problema de dos cuerpos, son la energía y el momento angular; y en el problema plano circular restringido de tres cuerpos se monitorea la constante de Jacobi.

La implementación de un control que adapte el tamaño del paso, requiere que el algoritmo escalonador regrese la información acerca de su ejecución y haga una estimación del tamaño de paso  $h$ , para asegurar la exactitud deseada. Con un Runge-Kutta de cuarto orden, la técnica más sencilla es el doblamiento del paso (paso doble). Tomamos cada paso dos veces, una primera vez como un paso completo y una segunda vez de manera independiente como dos mitades de paso.

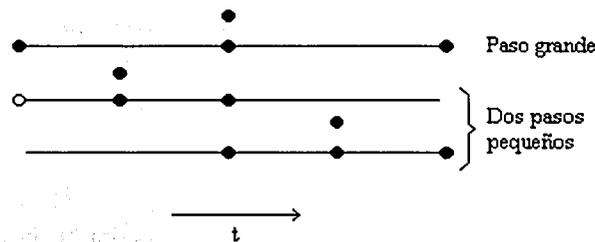


Fig. 3.5.1 Doblamiento de paso como un promedio para el control que adapta el tamaño del paso en el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

En la figura 3.5.1 los puntos donde se evalúa la derivada se muestran como círculos llenos. El círculo abierto representa la misma derivada que el círculo lleno inmediatamente anterior a él, así el número total de evaluaciones es once (contar número de puntos rellenos), para dos pasos. Comparar la precisión del paso grande con los dos pasos pequeños, nos da un criterio para ajustar el tamaño de paso para el siguiente paso, o para rechazar el paso

actual por considerarlo inexacto.

Cada uno de los tres pasos Runge-Kutta separados en el proceso, requieren cuatro evaluaciones, pero las primeras dos secuencias (simple y doble), parten de un punto inicial, así que el total de evaluaciones es once. Con esto además del control del tamaño del paso, logramos una aproximación a un paso más pequeño. El comparar la precisión del paso grande con los dos pasos pequeños, da un criterio para ajustar el tamaño de paso para el siguiente paso.

Denotemos la solución exacta para una forma avanzada de  $t$  a  $t + 2h$  por  $y(t + 2h)$  y dos soluciones aproximadas por  $y_1$  (para un paso de tamaño  $2h$ ) y  $y_2$  (para dos pasos, cada uno de tamaño  $h$ ). La diferencia entre las dos estimaciones numéricas es un indicador conveniente del error estimado.

$$\Delta \equiv y_2 - y_1 \quad (3.5.1)$$

Esta diferencia es la que debemos guardar como el grado de precisión que deseamos, ni muy grande ni muy pequeño, y esto lo hacemos ajustando el tamaño de paso  $h$ .

Un algoritmo alternativo que ajuste el tamaño del paso, está basado en un método de quinto orden con seis evaluaciones de la función. La diferencia de las dos estimaciones de la función  $y(t + h)$  puede usarse como un estimado del error para ajustar el tamaño del paso. Usar los mismos puntos de evaluación para avanzar la función y estimar el error es más arriesgado que el doblamiento del paso, donde el error estimado está basado en las evaluaciones de la función independiente.

La relación entre  $\Delta$  y  $h$  es la siguiente: si tomamos un paso  $h_1$  y produce un error  $\Delta_1$ , por consiguiente, el paso  $h_0$  que habría dado algún otro valor  $\Delta_0$  es fácilmente estimado como:

$$h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{1/2} \quad (3.5.2)$$

De aquí en adelante  $\Delta_0$  denotará la precisión que deseamos. Entonces la ecuación (3.5.2) se usa de dos maneras:

- a) Si  $\Delta_1$  es más grande que  $\Delta_0$  en magnitud, la ecuación nos dice qué tanto disminuye el tamaño de paso cuando retiramos el presente paso (fallido).
- b) Si  $\Delta_1$  es más pequeño que  $\Delta_0$  en magnitud, la ecuación dice qué tanto podemos incrementar (con toda seguridad) el tamaño de paso, para el siguiente paso.

La extrapolación local consiste en aceptar el valor de  $y_{n+1}$  de quinto orden, aún cuando el error estimado en realidad aplica al valor de  $y_{n+1}^*$  de cuarto orden. Esta notación oculta el hecho de que  $\Delta_0$  es en realidad un vector de precisiones, uno para cada ecuación en el conjunto de EDO's (ecuaciones diferenciales ordinarias). En general, nuestro requerimiento de precisión será que todas las ecuaciones estén con sus respectivos errores permitidos, es decir, reescalaremos el tamaño de paso de acuerdo a las necesidades de la ecuación más complicada.

Algunas aplicaciones pueden ser inusualmente sensibles a una acumulación global de errores, de principio a fin de la integración, y en el peor de los casos donde todos los errores se sumen con el mismo signo. El objetivo de esta tesis es verificar qué tanto afecta la acumulación de errores a los resultados finales de nuestras integraciones.

### 3.6 MÉTODO DE BULIRSCH-STOER

Esta técnica es para ecuaciones diferenciales que contienen funciones suaves y que no contienen puntos singulares dentro del intervalo de integración. El método de Bulirsch-Stoer parece ser una mejor forma para obtener soluciones de alta precisión para EDO's con un mínimo esfuerzo de cálculo.

En esta tesis queremos comparar el método de "Runge-Kutta de paso variable" con el método de "Bulirsch-Stoer" y verificar cuál de estos métodos es mejor para ciertos problemas de la mecánica celeste, o si alguno de ellos es mejor que el otro en general.

Las ideas fundamentales involucradas en el método de Bulirsch-Stoer son las siguientes: a primera es la extrapolación de Richardson que consiste en extender un intervalo largo  $h$  por diferentes secuencias de subpasos más y más finos. Sus resultados están extrapolados para una respuesta que se supone corresponde a subpasos infinitamente finos. El método de Bulirsch-Stoer, considera el resultado final de un cálculo numérico como una función analítica de un parámetro ajustable, como un tamaño de paso  $h$ . Esta función analítica puede ser sondeada ejecutando el cálculo con varios valores de  $h$ , sin embargo a pesar de que lo ideal sería tener cada vez valores de  $h$  más pequeños, podría ser que éstos no fueran

necesariamente pequeños, para producir la precisión que deseamos.

Cuando sabemos suficiente sobre la función, le adaptamos una forma analítica y entonces se evalúa en el punto  $h = 0$ .

La siguiente idea tiene que ver con el tamaño de  $h$ , que puede ser tan grande que el orden del método podría parecer que pierde sentido, y aún así el método puede funcionar eficazmente.

Un paso simple del Bulirsch-Stoer nos lleva de  $t$  a  $t+h$ , donde se supone  $h$  como una distancia muy pequeña, sin que esta distancia sea cero. Este paso simple es un gran salto que consiste en muchos (de docenas a cientos) de subpasos los cuales están extrapolados a un tamaño ideal de paso "cero". La secuencia de intentos separados para cruzar el intervalo  $h$ , está hecha con un incremento del número de subpasos,  $n$ . Bulirsch-Stoer propuso originalmente la secuencia:

$$n = 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, \dots$$

y más recientemente se sugirió la secuencia

$$n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

la cual usualmente (basado en la experiencia) es más eficiente. Pero en nuestro caso utilizamos la secuencia:

$$n = 1, 2, 3, \dots, 12.$$

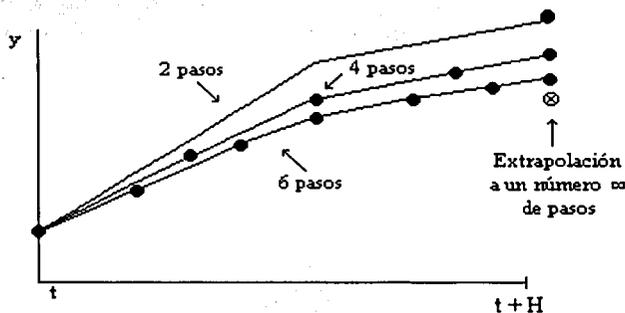


Fig. 3.6.1 La extrapolación de Richardson como se utiliza en el método de Bulirsch-Stoer. Un intervalo grande  $h$  (ó  $H$ ) se extiende por diferentes secuencias de subpasos más y más finos. Sus resultados se extrapolan a un resultado que se supone corresponde a subpasos infinitamente finos.

Después que cada  $n$  sucesiva es probada, se intenta una extrapolación. Esta extrapolación nos regresa ambos valores extrapolados y un error estimado. Si el error no es satisfactorio, el número de subpasos  $n$ , será mayor. Pero si son satisfactorios, continuamos con el siguiente paso y comenzamos con  $n = 2$ . Por supuesto, debe haber un límite superior (el parámetro "eps"), en ocasiones debemos reducir  $h$ , que es mejor que sólo subdividirlo más finamente.

A continuación se hará una descripción de este método para explicar cómo funciona en el caso de esta tesis. El método de Bulirsch-Stoer aparece en la segunda edición del libro Numerical Recipes (Press et al 1992).

Tenemos un problema de valor inicial, esto es, conocemos la posición y velocidad en algún valor inicial de la variable independiente  $t$  (tiempo). El objetivo es encontrar los valores de las  $y_i$  en tiempos posteriores; en otras palabras queremos una lista de valores de las  $y_i$ , para el intervalo de tiempo entre  $t = 0$  y el punto final  $t_f$ . El dato de entrada es el valor inicial para el conjunto de las  $y_i$ , en  $t = 0$  y el dato de salida es una lista de valores  $y_i(t_n)$  con  $0 < t_i \leq t_f$ .

El método de Bulirsch-Stoer consiste en avanzar las variables dependientes sobre un intervalo de tiempo  $h$ , el cual no es pequeño, pero es lo bastante grande para subdividirlo en decenas o incluso centenas de subpasos de longitud  $h$  (notemos que en este caso,  $h$  es el tamaño del intervalo y  $h$  son los subintervalos). La información obtenida por la evaluación de las funciones  $y_i$ , en todos estos subpasos intermedios es entonces usada para ajustar una función analítica que imite el comportamiento de las  $y_i$  en el intervalo  $h$ . Es apropiado hacerlo a través de una extrapolación polinomial en potencias pares de  $h$ .

El programa consiste de tres rutinas anidadas, como se mencionó en la sección 3.4 de éste capítulo, llamadas: rutina algoritmo o simplemente algoritmo, rutina escalonadora y rutina conductora.

Estas tres partes constituyen el núcleo del integrador y a continuación se describirá brevemente para el método de Bulirsch-Stoer:

- 1) La rutina algoritmo: comienza con las variables  $y_i$  en  $t$ , y regresa nuevos valores de las variables dependientes al tiempo  $t + h$ , usando la información proporcionada por las segundas derivadas evaluadas en  $t$ . Pero esta rutina es incapaz de evaluar si la calidad de la solución es buena o no.

Para este algoritmo se escoge la subrutina llamada STOERM del Numerical Recipes, la cual está diseñada para sistemas de ecuaciones de segundo orden, en el cual la segunda derivada no depende de la primera derivada y no aparecen derivadas del lado derecho de la ecuación, es decir, está diseñada para campos conservativos tales como el campo gravitacional. Con la subrutina STOERM, se puede mejorar en eficiencia sobre las rutinas algoritmo diseñadas para sistemas más generales.

En el caso en que se utiliza Runge-Kutta de Paso Variable, el sistema de ecuaciones de segundo orden se reescribe como un sistema de ecuaciones de primer orden.

- 2) El escalonador: la rutina escalonadora es la que llama a la rutina algoritmo. Puede rechazar el resultado, asignar un tamaño de paso más pequeño y llamar a la rutina algoritmo de nuevo, hasta que sea compatible con un criterio de precisión predefinido. La tarea fundamental del escalonador es tomar el tamaño de paso más grande consistente con un funcionamiento específico.

Para esta tarea se escoge la subrutina BSSTEP del Numerical Recipes. Esta es la parte del programa donde las fórmulas básicas del método de Bulirsch-Stoer están implementadas. El BSSTEP trabaja de la siguiente forma: incrementa el valor del tiempo por una cantidad  $h$  y evalúa las  $y_i$  en  $t+h$ , entonces subdivide este intervalo  $h$  en dos subintervalos con la mitad de la longitud, evalúa las  $y_i$  en los extremos de estos dos subintervalos, uno de ellos dando un nuevo valor de las funciones en  $t+h$ . Entonces subdivide de nuevo en más intervalos y evalúa de nuevo (cada evaluación es hecha usando STOERM). Esta secuencia del número de subdivisiones,  $n$ , está predeterminada. En este caso particular, la secuencia es  $n = 1, 2, 3, \dots, 12$ , como se mencionó anteriormente. Después de tratar con cada  $n$  sucesiva, se intenta una extrapolación polinomial (para  $h/n = 0$  ó  $n \rightarrow \infty$ ). Esta extrapolación regresa valores extrapolados de la función y estima el error. Si los errores no son satisfactorios, sigue con un valor más grande de  $n$ . Si son satisfactorios continúa con el siguiente paso más grande  $h$  y comienza de nuevo con la  $n$  más pequeña de subdivisiones para el intervalo. Si el intervalo  $h$  ha sido subdividido en 12 subintervalos y la extrapolación no da resultados satisfactorios, entonces el BSSTEP, reduce el tamaño de  $h$  antes de continuar incrementando el número de subintervalos.

Esto significa que al principio de la secuencia no se sabe cuántas subdivisiones hará el programa, para cruzar el intervalo  $h$ . Esto implica que en este tipo de escalonadores, el paso  $t$  (tiempo) es variable. En los lugares donde la función no varía mucho, los intervalos de tiempo  $h$ , son largos y un pequeño número de subdivisiones da la convergencia que deseamos. En los lugares donde la función es altamente variable, el intervalo de tiempo  $h$ , termina siendo pequeño y la secuencia de subdivisiones usualmente aumenta en  $n$ .

- 3) El conductor: arriba del escalonador está la rutina conductora, la cual comienza y detiene la integración, almacena los resultados intermedios y en general es la interfase con el usuario.

Para este propósito se escogió la subrutina ODEINT del Numerical Recipes. La salida de la subrutina ODEINT es la lista real de valores entre  $t = 0$  y  $t_f$  para las variables involucradas. Cualquier cantidad relevante para el problema se puede calcular de esta lista. Como en el caso de esta tesis, la energía para el problema de dos cuerpos y la constante de Jacobi para el problema restringido circular plano de tres cuerpos. Así el intervalo de tiempo no es fijo, ODEINT requiere un tamaño de paso para  $t$  mínimo, tal que si el intervalo de tiempo es más grande que este mínimo, los valores de las variables son almacenados. Esto evita tener muchos valores salvados en lugares donde la función cambia rápidamente.



# CAPÍTULO IV

## RESULTADOS

Este capítulo tiene como objetivo analizar los resultados obtenidos en las integraciones orbitales para el problema de campo central, el problema de dos cuerpos y el problema plano circular restringido de tres cuerpos. Dichos resultados se presentarán en el mismo orden en que han sido nombrados, comparando la precisión de cada uno de los dos métodos utilizados: "Runge-Kutta de paso variable (R-K)" y "Bulirsch-Stoer (B-S)".

Las cantidades que sirven para comparar ambos métodos, deben ser cantidades que se conserven en cada problema. En los capítulos I y II se encuentran estas cantidades: energía y momento angular para los problemas de campo central y dos cuerpos, y la constante de Jacobi para el problema plano circular restringido de tres cuerpos. También se presentan las gráficas donde se compara la variación de los elementos orbitales (ver apéndice B), es decir el semieje mayor y la excentricidad del cuerpo que se esté analizando según sea el caso.

Como se mencionó en el capítulo III, el parámetro que proporciona el usuario es la precisión del método, " $\epsilon$ ". Este parámetro es una cantidad que se establece como un máximo para comparar la precisión de los resultados obtenidos al evaluar dos pasos consecutivos ( $h$ ) realizados por el método. Se calcula la diferencia entre los resultados evaluados en  $h + t_i$  y  $h + t_{i-1}$ , y se compara con el  $\epsilon$  establecido. Si esta diferencia es menor o igual que el  $\epsilon$ , el resultado se toma como satisfactorio y se almacena; si es mayor que el  $\epsilon$ , se desecha y se repite la evaluación de un tamaño de paso ( $h$ ) distinto.

Cuando hablemos de un cierto número de órbitas, nos referiremos al número de vueltas que completa el cuerpo secundario (o bien la partícula dependiendo del problema) alrededor del cuerpo primario.

Existe otro parámetro de comparación que tomaremos en cuenta en esta tesis: el tiempo de integración de cada método. Este parámetro también nos interesa debido a que en la mayoría de los problemas que se quieren resolver numéricamente, en particular en astronomía, involucran muy largos periodos de integración. No sólo es importante la

precisión de un método numérico, si no también el tiempo de cálculo (costo de CPU) que lleva realizarlo.

Es necesario aclarar que todos los cálculos se hicieron en la misma computadora (Sunblade 1000), ya que como se menciona en el apéndice A, los resultados obtenidos en distintas computadoras no necesariamente son exactamente iguales, debido a las características particulares que cada una tiene.

La trayectoria de la partícula tanto en el problema de campo central y el problema plano circular restringido de tres cuerpos como la trayectoria del cuerpo secundario en el problema de dos cuerpos, fue una elipse con el cuerpo primario en el centro de la misma (ver página 98 del apéndice B), vista desde el sistema rotante.

#### **4.1 RESULTADOS PARA EL PROBLEMA DE CAMPO CENTRAL**

Para analizar los resultados que se obtuvieron en este caso, se consideran las siguientes cantidades: el semieje mayor y la excentricidad que son constantes y las cantidades que se conservan, la energía y el momento angular.

Para este problema se realizó una integración por un periodo de cuatro millones de órbitas, sin embargo el método R-K no logró terminar la integración después de un tiempo de 21 horas y 2 minutos. Este problema se presentó debido a que en el código construido para este objetivo existe una cantidad llamada MAXSTP, la cual es el número natural en doble precisión más grande permitido, que indica el número máximo de pasos que debe intentar el integrador para avanzar de un punto a otro en la función. Esto quiere decir que en alguna región de la función, al método R-K no le alcanzó este máximo de intentos, por lo que no pudo continuar con la integración.

Debido a este problema no conocemos los resultados de dicha integración, ni el tiempo que hubiera tardado en realizarla.

El método de B-S no presentó este problema y terminó dicha integración en 15 horas 49 minutos y 28.22 segundos. Sin embargo al no tener los resultados del R-K para compararlos con B-S, no se presentan las gráficas.

La trayectoria de la partícula tanto en este problema como en el problema de dos cuerpos y el problema plano circular restringido de tres cuerpos, fue una elipse alrededor

del cuerpo primario, vista desde el sistema rotante.

La tabla I muestra las condiciones iniciales de este problema y la tabla II muestra los resultados para las integraciones hechas con este problema.

**TABLA I**  
**CONDICIONES INICIALES: PROBLEMA DE CAMPO CENTRAL**

Parámetro	Valor
$m$	0
$m_1$	$5685 \times 10^{26} g$
$a_0$	$185540 \times 10^5 cm$
$e_0$	0.01
$\lambda_0$	$0^\circ$
$\varpi_0$	$6.5^\circ$

Donde  $m$  es la masa de la partícula,  $m_1$  es la masa del cuerpo primario,  $a_0$  es el semieje mayor inicial de la partícula,  $e_0$  es la excentricidad inicial de la partícula,  $\varpi$  es el argumento del periápside y  $\lambda = 0$  indica que el periápside (ángulo para el cual la distancia entre  $m_1$  y  $m_2$  es mínima) se encuentra en la parte positiva del eje  $X$ .

**TABLA II**  
**DATOS NUMÉRICOS DE LAS INTEGRACIONES**  
**PROBLEMA DE CAMPO CENTRAL**

Corrida No.	$\epsilon$	Método	No. órbitas	$t_{CPU}$ (hr)
1	$5 \times 10^{-15}$	R-K	$5 \times 10^5$	13:59:48.11
2	$5 \times 10^{-15}$	B-S	$5 \times 10^5$	02:45:12.5

Las gráficas que corresponden a las corridas 1 y 2 se muestran en las figuras 4.1.1(a) y 4.1.1(b).

Se superpusieron los resultados de ambos métodos para cada una de las cuatro cantidades que se analizan. Las figuras que representan esta superposición son: Fig. 4.1.1(a) (cambio fraccional en el semieje mayor y la excentricidad) y Fig. 4.1.1(b) (cambio fraccional en la energía y el momento angular).

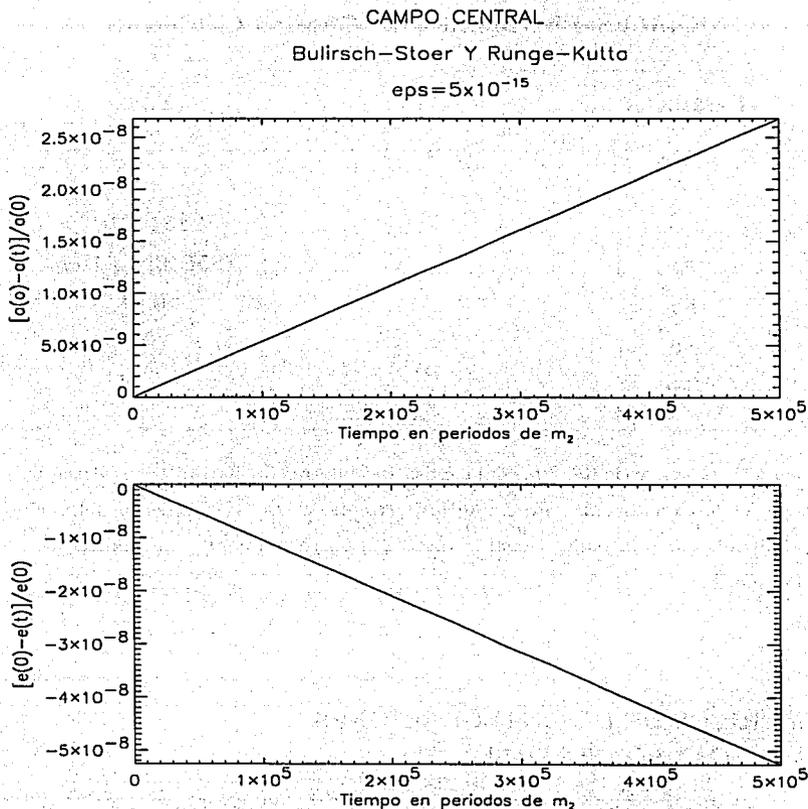


Fig. 4.1.1(a) Cambio fraccional en el semieje mayor normalizado y cambio fraccional en la excentricidad para el problema de campo central, para  $5 \times 10^5$  órbitas con  $\epsilon = 5 \times 10^{-15}$ . La línea corresponde a la superposición de ambos métodos.

En las gráficas de esta figura no se aprecian las diferencias entre ambos métodos, al menos en una parte en  $10^8$ .

CAMPO CENTRAL  
 Bulirsch-Stoer Y Runge-Kutta  
 $\epsilon = 5 \times 10^{-15}$

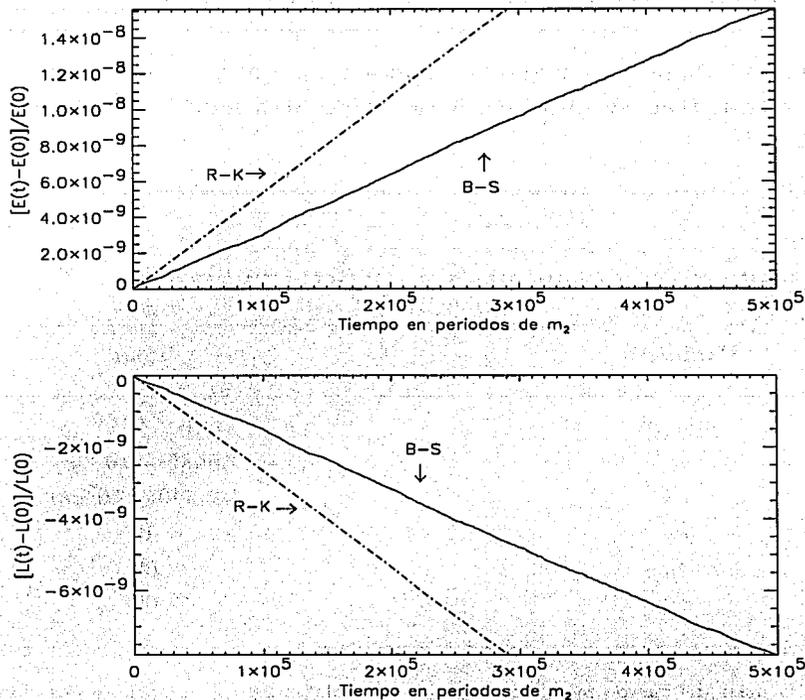


Fig. 4.1.1(b) Cambio fraccional en la energía y el momento angular para el problema de campo central, para  $5 \times 10^5$  órbitas con  $\epsilon = 5 \times 10^{-15}$ . La línea continua corresponde al método B-S, mientras que la línea descontinua al R-K.

En esta figura se aprecia notablemente cómo R-K (a pesar de que la diferencia entre los dos métodos es muy pequeña), la conservación de ambas cantidades decae más rápido que con B-S.

## 4.2 RESULTADOS PARA EL PROBLEMA DE DOS CUERPOS

Para el problema de dos cuerpos las condiciones iniciales se muestran en la tabla III y los resultados en la tabla IV. Ambos métodos terminaron exitosamente la integración por  $4 \times 10^5$  órbitas.

TABLA III  
CONDICIONES INICIALES: PROBLEMA DE DOS CUERPOS

Parámetro	Valor
$m_2/m_1$	$1 \times 10^{-6}$
$m_1$	$5685 \times 10^{26}g$
$a_0$	$185540 \times 10^5 cm$
$e_0$	0
$\lambda_0$	$0^\circ$
$\varpi_0$	$0^\circ$

Donde  $m_1$  es la masa del cuerpo primario,  $m_2$  es la masa del cuerpo secundario,  $a_0$  es el semieje mayor inicial del cuerpo secundario, en este caso el radio de la órbita y corresponde a la distancia Sol-Júpiter,  $e_0$  es la excentricidad inicial del cuerpo secundario,  $\varpi$  es el argumento del periápside y  $\lambda = 0$  indica que el periápside se encuentra en la parte positiva del eje  $X$ .

Por ser un problema circular de dos cuerpos, tanto la excentricidad como el radio de la órbita del cuerpo secundario no deben variar con el tiempo. La tabla IV muestra los resultados de las integraciones realizadas.

TABLA IV  
 DATOS NUMÉRICOS DE LAS INTEGRACIONES  
 PROBLEMA DE DOS CUERPOS

Corrida No.	$\epsilon$	Método	No. órbitas	$t_{CPU}$ (hr)
3	$1 \times 10^{-14}$	R-K	$4 \times 10^5$	00:57:37.11
4	$1 \times 10^{-14}$	B-S	$4 \times 10^5$	00:09:43.06

Las figuras 4.2.1(a) y 4.2.1(b) muestran los resultados de la corrida 3, obtenidos para el método de R-K. Todas las cantidades que se analizan corresponden al cuerpo secundario en el sistema cuyo origen está en el cuerpo primario y con ejes no-rotantes.

Como se observa en la primera gráfica de la figura 4.2.1(a), el cambio en el semieje mayor (radio) es monótonamente decreciente, pero la observación al respecto es que al parecer R-K genera errores del mismo signo durante su desarrollo (en los cálculos) por lo que estos errores se suman (ya sean positivos o negativos).

La segunda gráfica de la figura 4.2.1(a) corresponde a la excentricidad de la órbita, y como es de esperarse para una órbita circular, su valor siempre es igual a cero.

La tercera gráfica de la figura 4.2.1(a) muestra en el cambio fraccional de la energía, la cual se conserva hasta la décima cifra, resultado que se considera bastante bueno. Las líneas rectas indican que durante muchas órbitas el valor de la energía no cambia en la onceava cifra, parece ser que el redondeo ocurre hasta la decimotercera cifra.

La cuarta gráfica corresponde al cambio fraccional en el momento angular, la conservación de éste, a pesar de disminuir en un factor de diez después de aproximadamente mil órbitas, es igualmente bueno, como en el caso de la energía, el momento angular no cambia en su decimoprimer cifra durante un gran número de órbitas. Podemos considerar que para este caso particular la precisión del método R-K es muy buena.

PROBLEMA DE DOS CUERPOS

Runge-Kutta

$\epsilon = 1 \times 10^{-14}$

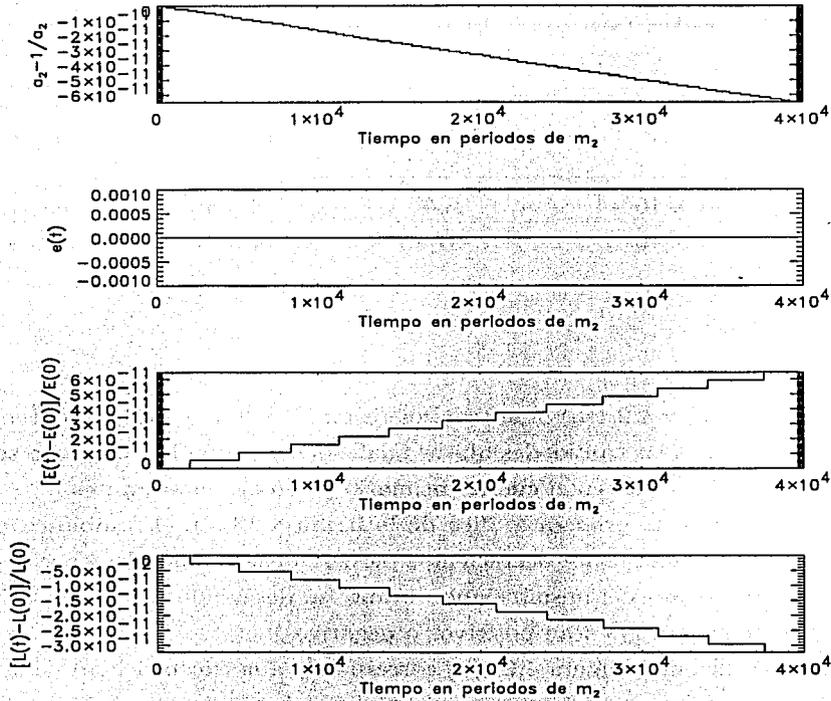


Fig. 4.2.1(a) Semieje mayor (radio), excentricidad, cambio fraccional en la energía y momento angular del cuerpo secundario, para el problema de dos cuerpos. Se usó el método R-K, para 40000 órbitas con  $\epsilon = 10^{-14}$ .

La Fig. 4.2.1(b) muestra un resultado que parece bastante interesante. En la primera gráfica aparece el cambio fraccional de la posición en  $x$  del cuerpo secundario en el sistema rotante. Esta posición no debería cambiar con el tiempo, ya que es una distancia fija al cuerpo primario (unidad de distancia del sistema, distancia Sol-Júpiter).

Sin embargo parece ser que R-K también suma los errores acumulados en esta cantidad y, aunque la variación es muy pequeña, se puede observar que tiende a disminuir monótonamente, como si se acercara al cuerpo primario, lo cual se podría explicar si los errores acumulados son del mismo signo. Este resultado podría ser un problema en integraciones de millones de órbitas.

Runge-Kutta

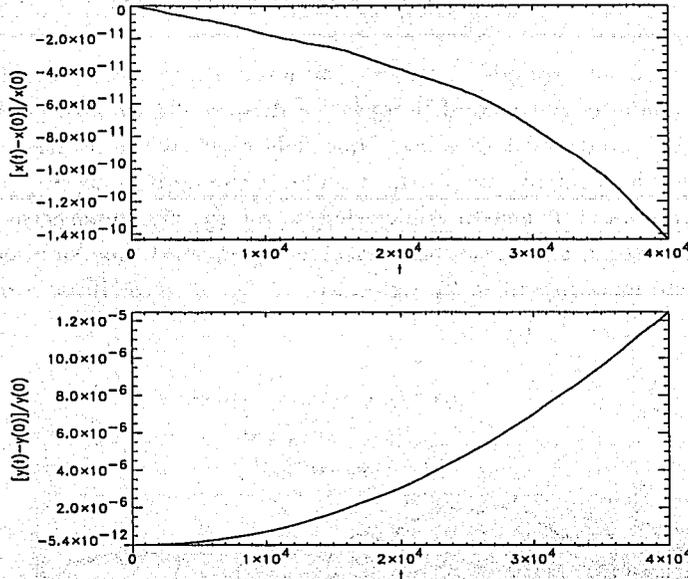
 $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$ 

Fig. 4.2.1(b) Cambio fraccional de la posición del cuerpo secundario en el sistema rotante para el problema de dos cuerpos usando el método Runge-Kutta, con 40000 órbitas y  $\epsilon = 10^{-14}$ .

En la segunda gráfica de esta figura, se muestra el cambio fraccional de la posición en  $y$ . Se observa el mismo comportamiento que en la gráfica anterior, sólo que en este caso el error crece monótonamente y además lo hace mucho más rápido que en  $x$ . Teóricamente la posición sobre el eje  $Y$  debería ser siempre igual a cero.

Las figuras 4.2.2(a) y 4.2.2(b) muestran los resultados obtenidos por el método B-S para la corrida 4 con las mismas condiciones iniciales pero utilizando B-S.

La primera gráfica de la Fig. 4.2.2(a) muestra el comportamiento del semieje mayor (radio) en el tiempo, de la misma manera que con R-K. Sin embargo en esta gráfica se puede apreciar que B-S sí toma en cuenta las pequeñas variaciones que tiene el semieje mayor, a diferencia de R-K parece que los errores que acumula son de distinto signo, por lo que se compensan.

Al analizar los datos obtenidos nos dimos cuenta que B-S redondea los resultados de forma distinta que R-K, observamos que su redondeo es en la decimoprimer cifra.

La gráfica de la excentricidad muestra un valor constante e igual a cero como se espera para una órbita circular.

La tercera gráfica corresponde al cambio fraccional de la energía, en este caso muestra que R-K conserva mejor esta cantidad en un factor de diez al término de la integración por 40000 órbitas, por lo cual podríamos decir que R-K es ligeramente más preciso que B-S para integraciones relativamente cortas. Lo mismo ocurre en la conservación del momento angular, que se presenta en la cuarta gráfica de esta figura. Sin embargo se puede apreciar claramente que B-S toma en cuenta las variaciones pequeñas, que se pueden deber a la forma en la que este método realiza los redondeos en las últimas cifras, como se mencionó anteriormente.

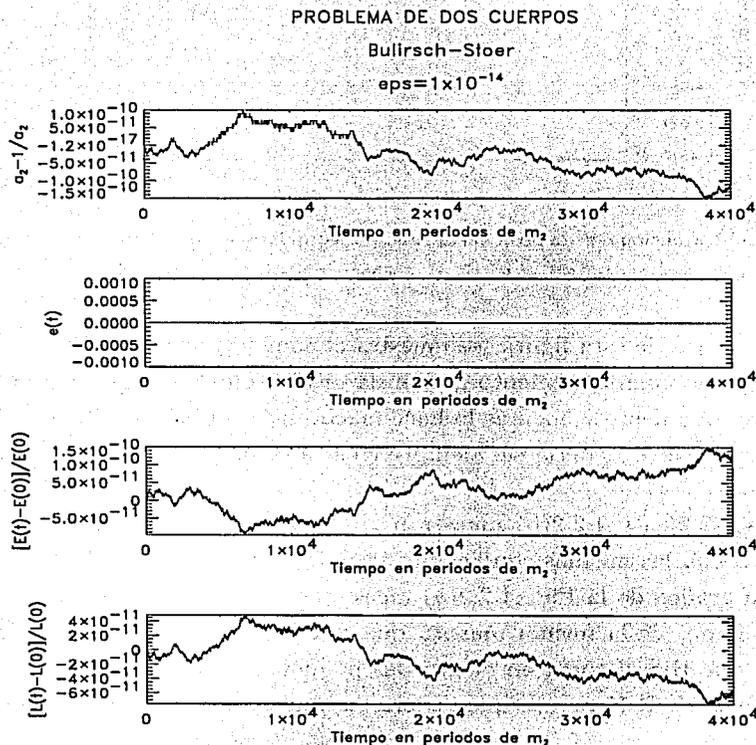


Fig. 4.2.2(a) Semieje mayor (radio), excentricidad, cambio fraccional en la energía y momento angular del cuerpo secundario para el problema de dos cuerpos. Se usó el método Bulirsch-Stoer , con 40000 órbitas y  $\epsilon = 10^{-14}$ .

La Fig. 4.2.2(b) corresponde a los cambios fraccionales de la posición del cuerpo secundario en el sistema rotante. Muestra un comportamiento muy distinto que para R-K (Fig. 4.2.1b).

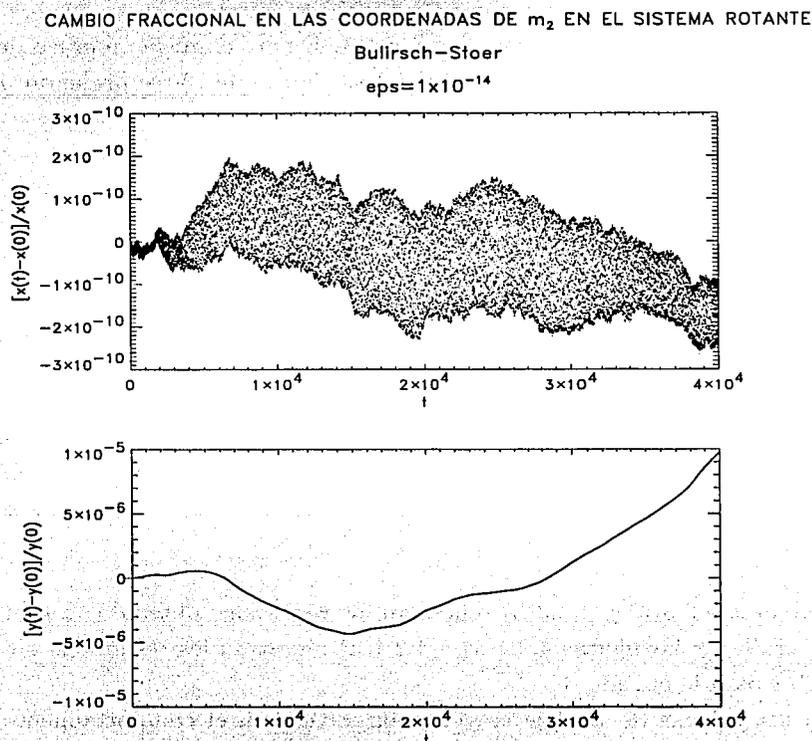


Fig. 4.2.2(b) Cambio fraccional en la posición del cuerpo secundario en el sistema rotante para el problema de dos cuerpos. Se usó el método Bulirsch-Stoer, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 10^{-14}$ .

Como se ve en la primera gráfica de la figura, el método B-S parece compensar los errores en sus cálculos. A pesar de que las variaciones alrededor de la posición en  $x$  del cuerpo secundario son muy pequeñas, son notoriamente más marcadas que en la misma gráfica para R-K. La idea de compensar los errores se refiere a que son de distinto signo, por lo cual la gráfica aparece más ruidosa. En esta gráfica B-S no presenta un aumento o disminución monótonos. El comportamiento de la gráfica es el movimiento del cuerpo secundario en el eje  $X$  rotante, en torno a su posición inicial.

En el caso de la segunda gráfica de esta figura, el cambio fraccional de la posición en  $y$  el valor de la variación es mucho más grande que en  $x$ . La gráfica sugiere que para integraciones mucho más largas este movimiento en  $y$  se hace cada vez mayor, por lo que podría dejar su posición original  $y = 0$ .

Finalmente se realizaron dos integraciones más para el mismo número de órbitas y un  $\epsilon = 10^{-13}$ , con las mismas condiciones iniciales. En la tabla V se presentan los resultados obtenidos.

**TABLA IV**  
**DATOS NUMÉRICOS DE LAS INTEGRACIONES**  
**PROBLEMA DE DOS CUERPOS**

Corrida No.	$\epsilon$	Método	No. órbitas	$t_{CPU}$ (hr)
5	$1 \times 10^{-13}$	R-K	$4 \times 10^4$	00:39:06.20
6	$1 \times 10^{-13}$	B-S	$4 \times 10^4$	00:03:27.33

Las figuras 4.2.3(a) y 4.2.3(b) muestran los resultados obtenidos con el método R-K para la corrida 5 y las figuras 4.2.4(a) y 4.2.4(b) muestran los resultados obtenidos por el método B-S para la corrida 6.

Para las gráficas de semieje mayor y excentricidad, el comportamiento es el mismo que en la integración anterior.

Estos resultados muestran que B-S al término de las 40000 órbitas conserva mejor que R-K tanto la energía como el momento angular, y esto se debe a que el  $\epsilon$  que se establece es muy grande por lo cual no es funcional si se escoge el método R-K. Sin embargo confirman lo analizado en la integración anterior, para el caso del cambio fraccional en la posición del cuerpo secundario en el sistema rotante.

# PROBLEMA DE DOS CUERPOS

Runge-Kutta

$\epsilon = 1 \times 10^{-13}$

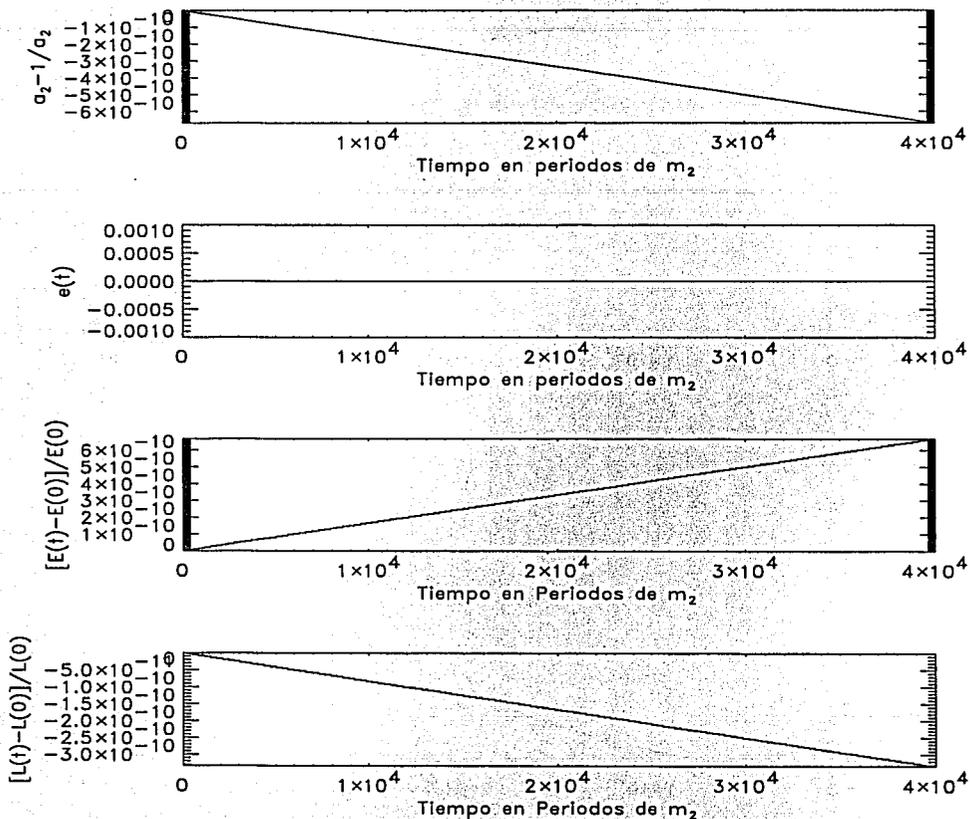


Fig. 4.2.3(a) Semieje mayor, excentricidad, cambio fraccional en la energía y el momento angular. para el problema de dos cuerpos. Se usó el método R-K, con  $4 \times 10^4$  órbitas y  $\epsilon = 10^{-13}$ . Tanto L como E pierden aproximadamente una cifra, ya que la tolerancia aumentó un orden de magnitud.

CAMBIO FRACCIONAL EN LAS COORDENADAS DE  $m_2$  EN EL SISTEMA ROTANTE

Runge-Kutta

$\epsilon = 1 \times 10^{-13}$

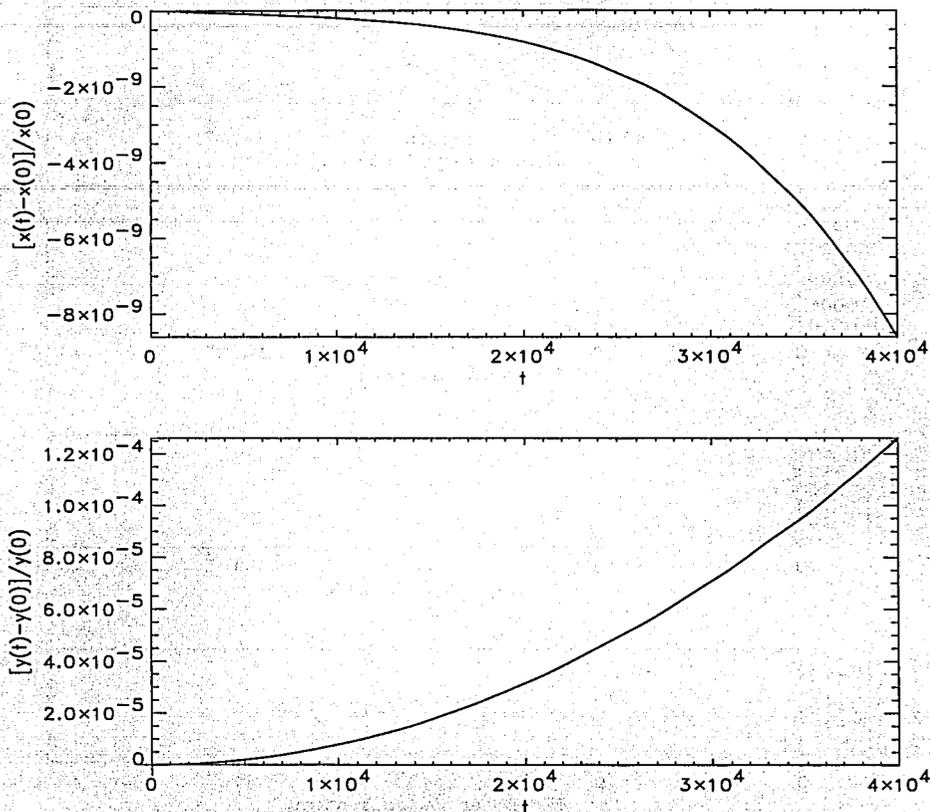


Fig. 4.2.3(b) Cambio fraccional en la posición del cuerpo secundario en el sistema rotante para el problema de dos cuerpos. Se usó el método Runge-Kutta , con  $4 \times 10^4$  órbitas y  $\epsilon = 10^{-13}$ . Notar la diferencia en los límites de los ejes verticales.

PROBLEMA DE DOS CUERPOS

Bulirsch-Stoer

$$\epsilon = 1 \times 10^{-13}$$

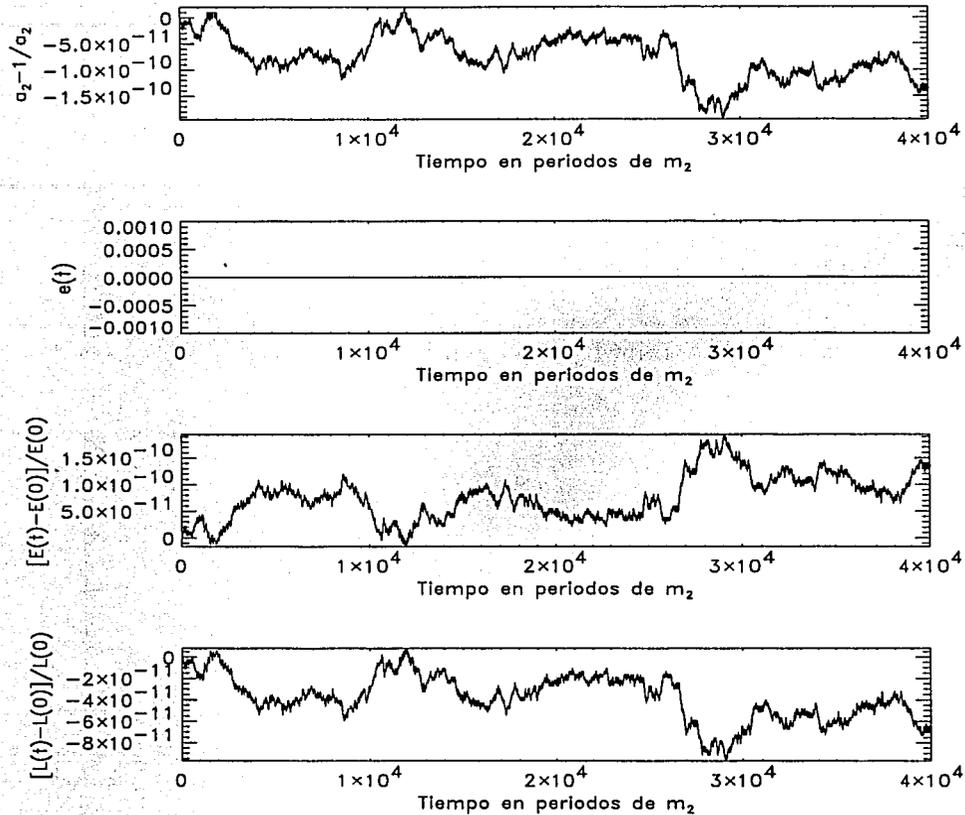


Fig. 4.2.4(a) Semieje mayor, excentricidad cambio fraccional en la energía y el momento angular para el problema de dos cuerpos. Se usó el método Bulirsch-Stoer, con  $4 \times 10^4$  órbitas y  $\epsilon = 10^{-13}$ .

A pesar de ser una integración relativamente corta, en este caso R-K sí se ve afectado por el  $\epsilon$  tan grande que se pidió. Por lo que si se quiere utilizar R-K en integraciones cortas se debe usar un  $\epsilon$  pequeño. Mientras que, con B-S la conservación es bastante parecida a la de la corrida 4 (ver tabla IV).

Bulirsch-Stoer

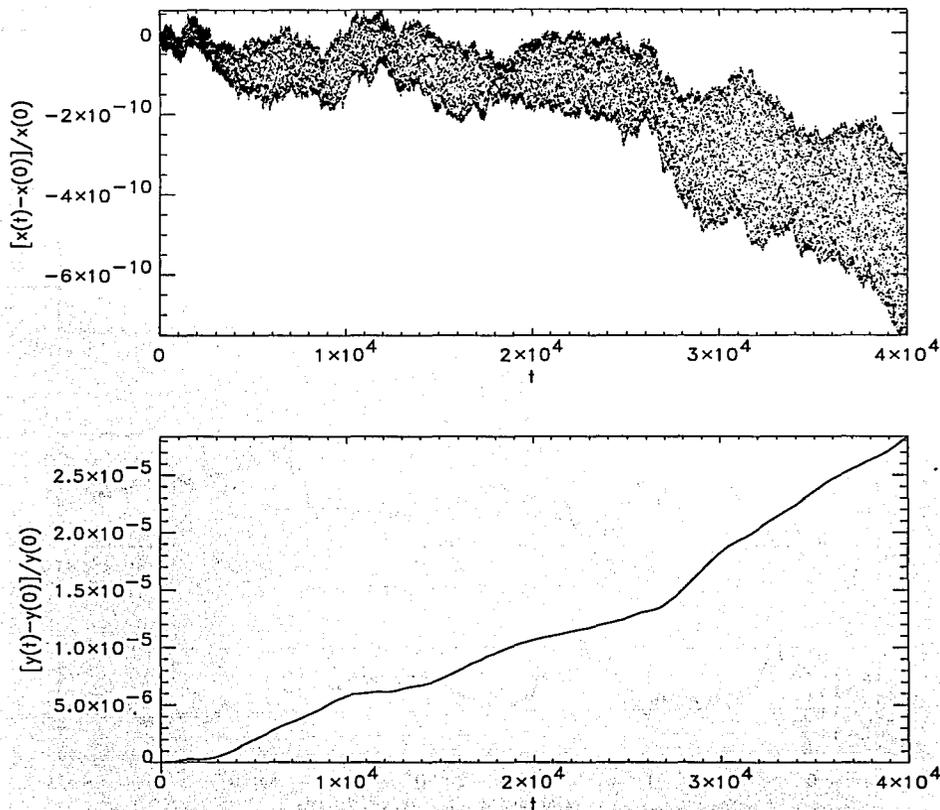
 $\epsilon = 1 \times 10^{-13}$ 

Fig. 4.2.4(b) Cambio fraccional en la posición del cuerpo secundario en el sistema rotante para el problema de dos cuerpos. Se usó el método Bulirsch-Stoer, con  $4 \times 10^4$  órbitas y  $\epsilon = 10^{-13}$ . Se observa una disminución en  $x(t)$  como si  $m_2$  se acercara al cuerpo primario. Mientras en  $y(t)$  el valor va aumentando, alejándose del eje  $X$ .

### 4.3 RESULTADOS PARA EL PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS (PPCRTC)

Para comparar los métodos de R-K y B-S en este problema, se presentan tres casos con condiciones iniciales distintas para la partícula pero para un cociente de masas ( $m_2/m_1$ ) fijo. Para cada caso se utilizan distintos  $\epsilon$ . Los elementos osculantes que se analizan son para la partícula (o tercer cuerpo, cuya masa se considera despreciable en comparación de la de los otros dos cuerpos, ver capítulo II), calculados en el sistema cuyo origen está en  $m_1$ , pero con ejes no-rotantes. Al no tener solución analítica, este problema es más interesante que los dos anteriores. Las condiciones iniciales para esta integración se presentan en la tabla VI.

TABLA VI  
CONDICIONES INICIALES:  
PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS (PPCRTC)

Parámetro	Valor
$m$	0
$m_1$	$5685 \times 10^{26} g$
$m_2/m_1$	$1 \times 10^{-6}$
$a_0$	0
$a_2$	$185540 \times 10^5 cm$
$e_0$	0
$e_2$	0
$\lambda_0$	$0^\circ$
$\varpi_0$	$0^\circ$

Donde  $m$  es la masa de la partícula,  $m_1$  es la masa del cuerpo primario,  $m_2$  es la masa del cuerpo secundario,  $a_0$  es el semieje mayor inicial de la partícula,  $a_2$  es el semieje mayor inicial del cuerpo secundario,  $\varpi$  es el argumento del periápside y  $\lambda = 0$  indica que el periápside se encuentra en la parte positiva del eje X.

En la tabla VII se presentan los resultado obtenidos para esta integración.

**TABLA VII**  
**DATOS NUMÉRICOS DE LAS INTEGRACIONES**  
**PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS (PPCRTC)**

Corrida No.	$\epsilon$	Método	No. órbitas	$t_{CPU}$ (hr)
7	$5 \times 10^{-16}$	R-K	$4 \times 10^4$	03:34:28.73
8	$5 \times 10^{-16}$	B-S	$4 \times 10^4$	00:25:24.26
9	$5 \times 10^{-14}$	R-K	$4 \times 10^4$	00:57:37.11
10	$5 \times 10^{-14}$	B-S	$4 \times 10^4$	00:09:43.06
11	$5 \times 10^{-13}$	R-K	$4 \times 10^4$	00:39:06.20
12	$5 \times 10^{-13}$	B-S	$4 \times 10^4$	00:03:27.33

Las siguientes tres figuras corresponden a las corridas 7 y 8 respectivamente. Las cantidades que se analizan son el cambio en el semieje mayor y la excentricidad de la órbita de la partícula y la única cantidad que se conserva en este problema es la constante de Jacobi (ver capítulo II).

La Fig. 4.3.1(a) muestra los resultados obtenidos para la corrida 7 y la Fig. 4.3.1(b) muestra los resultados para la corrida 8, con un  $\epsilon = 5 \times 10^{-16}$  durante 40000 órbitas.

La primera gráfica de estas figuras corresponde al semieje mayor normalizado de la partícula y si nos fijamos bien, la gráfica para B-S presenta unos pequeñas variaciones de corto periodo que la misma gráfica para R-K no presenta. Para poder apreciar estos detalles claramente, se hace un acercamiento de esta gráfica para ambos métodos que se presenta en las figuras 4.3.2(a) para R-K y 4.3.2(b) para B-S. Lo cual nos indica que B-S sí toma en cuenta las variaciones de corto periodo y R-K no.

La segunda gráfica de las figuras 4.3.1(a) y 4.3.1(b) corresponde a la excentricidad de la partícula y para ambos métodos esta gráfica es idéntica, como se puede apreciar en la segunda gráfica de las figuras 4.3.2(a) y 4.3.2(b) que corresponden a un acercamiento para la excentricidad.

PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR PLANO DE TRES CUERPOS

Runge-Kutta

$\epsilon = 5 \times 10^{-16}$

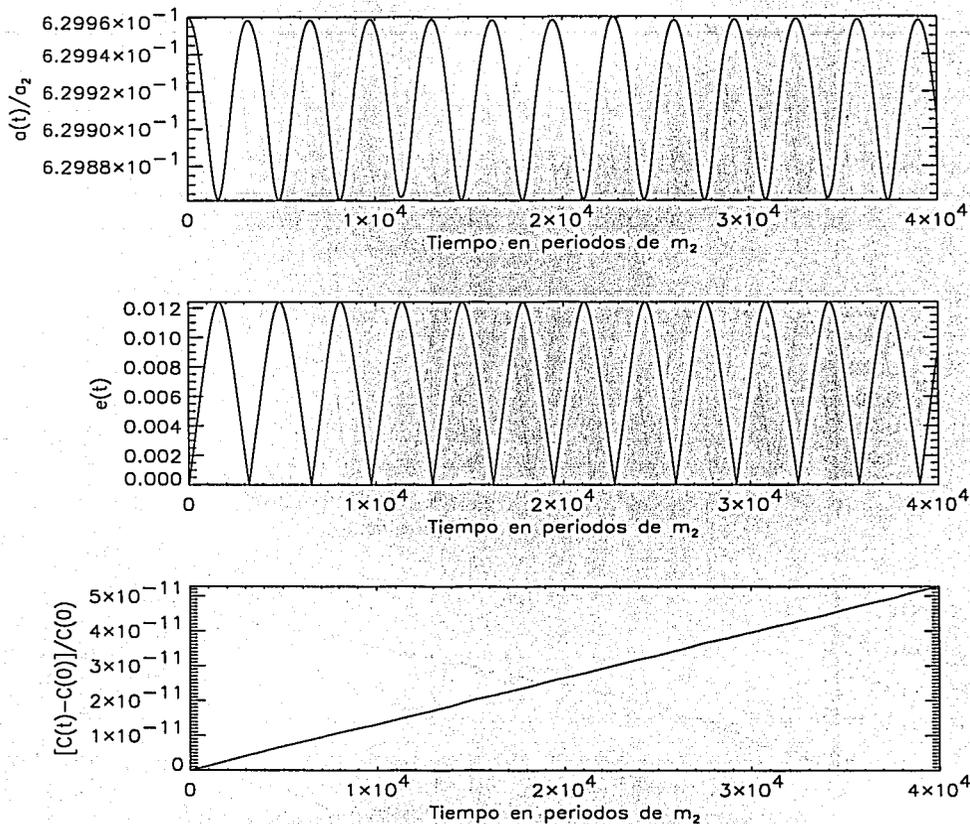


Fig. 4.3.1(a) Cambio en el semieje mayor (normalizado) de la partícula, excentricidad y cambio fraccional en la constante de Jacobi para el PPCRTC. Se usó el método Runge-Kutta, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 5 \times 10^{-16}$ .

Bulirsch-Stoer

$\epsilon = 5 \times 10^{-16}$

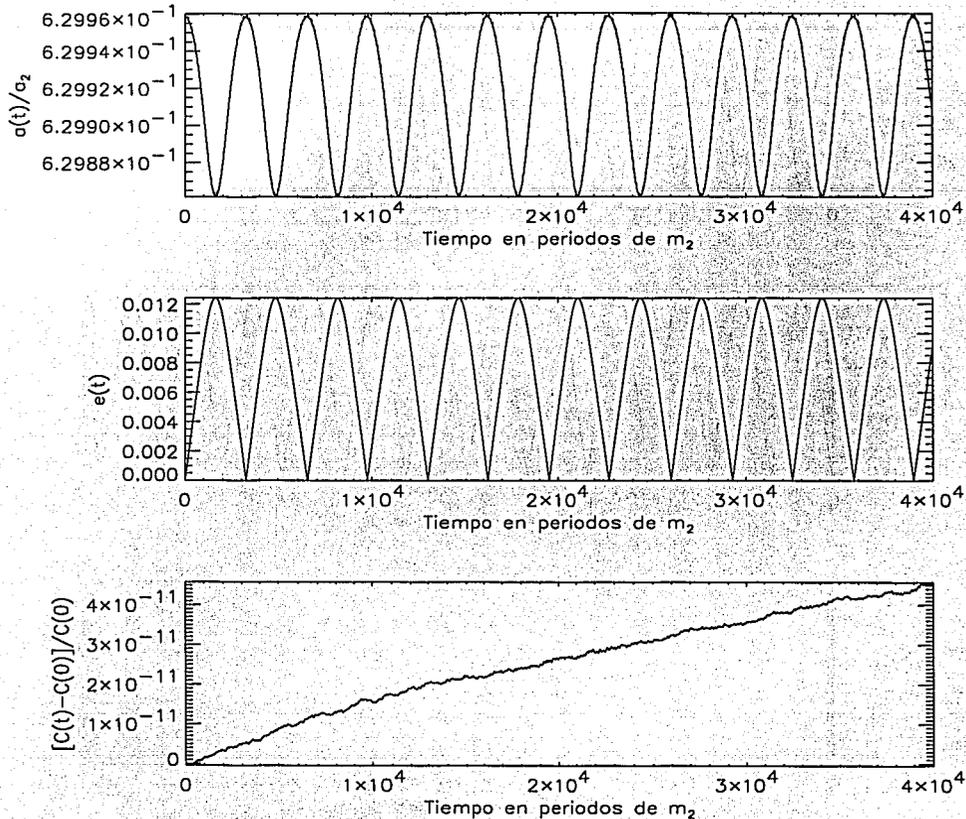


Fig. 4.3.1(b): Cambio en el semieje mayor (normalizado) de la partícula, excentricidad y cambio fraccional en la constante de Jacobi para el PPCRTC. Se usó el método Bulirsch-Stoer, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 5 \times 10^{-16}$ .

La tercera gráfica de las 4.3.1(a) y 4.3.1(b) corresponde al cambio fraccional en la constante de Jacobi. En ella se puede observar que B-S tiene estructura fina. La conservación de la constante de Jacobi para ambos métodos es prácticamente la misma, esto indica que para integraciones cortas y un  $\epsilon$  pequeño, R-K es tan eficiente como B-S, excepto por el tiempo de CPU.

En las siguientes figuras note la diferencia entre las escalas para las gráficas del semieje mayor.

PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR PLANO DE TRES CUERPOS

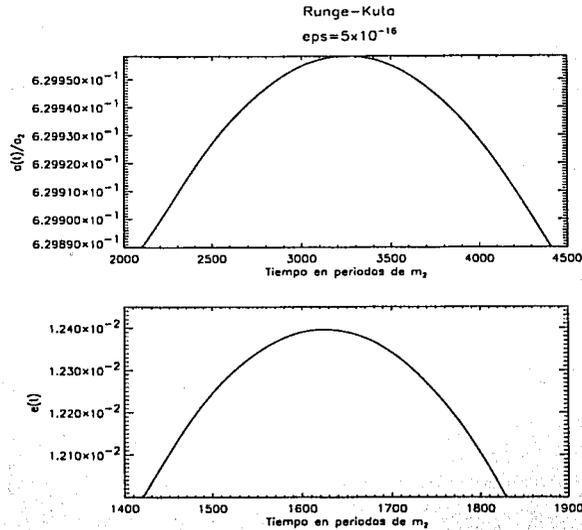


Fig. 4.3.2(a) Acercamientos en el cambio en el semieje mayor (normalizado) de la partícula y la excentricidad para el PPCRTC. Se usó el método Runge-Kutta, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 5 \times 10^{-16}$ .

PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR PLANO DE TRES CUERPOS

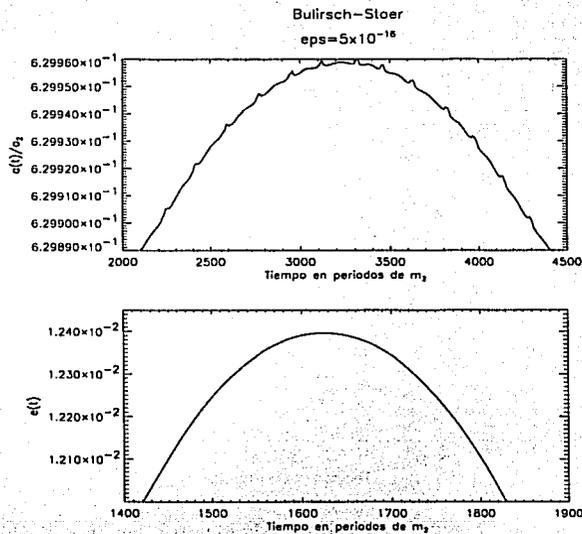


Fig. 4.3.2(b) Acercamientos en el cambio en el semieje mayor (normalizado) de la partícula y la excentricidad para el PPCRTC. Se usó el método Bulirsch-Stoer, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 5 \times 10^{-16}$ .

Uno podría preguntarse cuál de las dos gráficas para el semieje mayor es la correcta. Sin tener un argumento concreto, podríamos creer que la gráfica para B-S es la correcta ya que este método ha demostrado ser más preciso en sus integraciones que R-K.

La siguiente integración se hizo con las mismas condiciones iniciales mostradas en la tabla VI, pero para un  $\epsilon = 10^{-14}$ .

Las figuras 4.3.3(a) y 4.3.3(b) muestran los resultados obtenidos para las corridas 9 y 10 respectivamente.

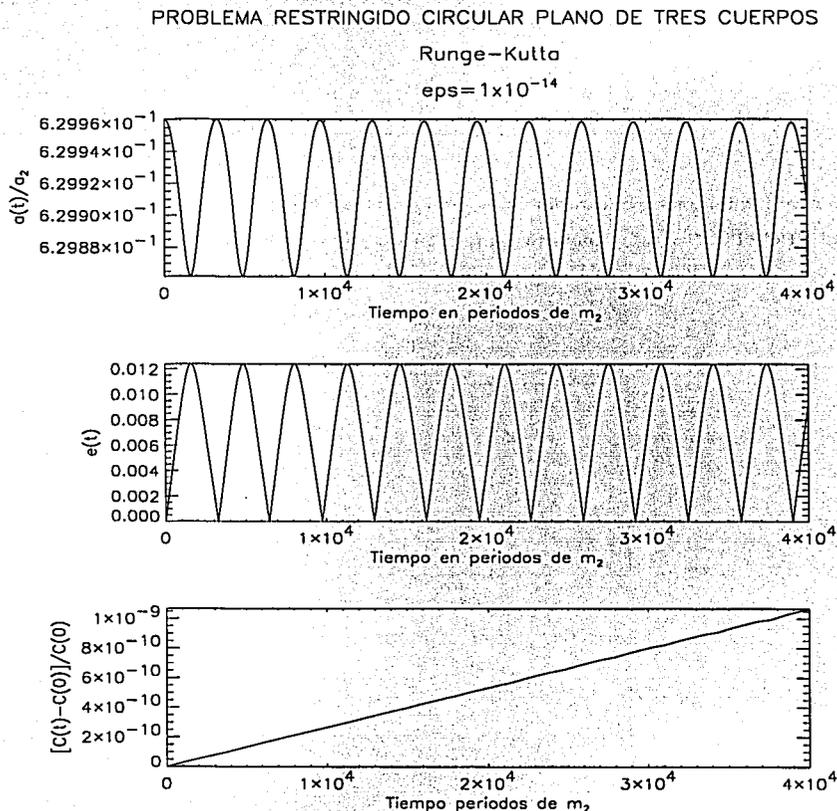


Fig. 4.3.3(a) Cambio en el semieje mayor (normalizado) de la partícula, excentricidad y cambio fraccional en la constante de Jacobi para el PPCRTC. Se usó el método Runge-Kutta, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 10^{-14}$ .

PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR DE TRES CUERPOS

Bulirsch-Stoer

$\epsilon = 1 \times 10^{-14}$

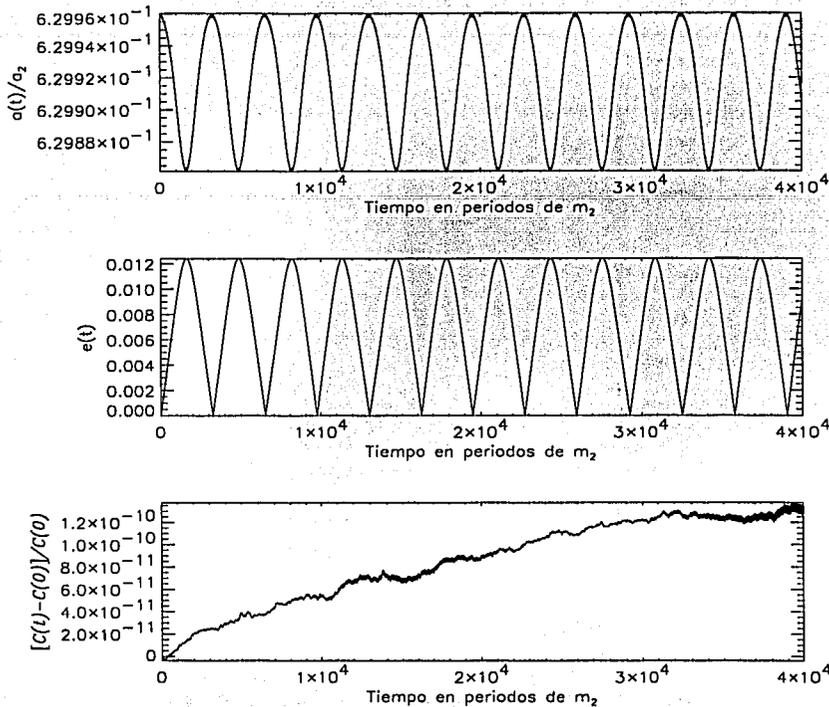


Fig. 4.3.3(b) Cambio en el semieje mayor (normalizado) de la partícula, excentricidad y cambio fraccional en la constante de Jacobi para el PPCRTC. Se usó el método Bulirsch-Stoer, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 10^{-14}$ .

Si observamos con atención la primera gráfica de las figuras 4.3.3(a) y 4.3.3(b) (semieje mayor), notaremos que para B-S se puede apreciar estructura fina, mientras que con R-K no. La segunda gráfica de las figuras 4.3.3(a) y 4.3.3(b) corresponde a la excentricidad y al semieje mayor de la partícula y en ambos métodos el resultado es el mismo, incluso en los acercamientos de las figuras 4.3.4(a) y 4.3.4(b). La tercera gráfica de las figuras 4.3.3(a) y 4.3.3(b) corresponde al cambio fraccional en la constante de Jacobi. Una vez más a primera vista se aprecia que B-S tiene estructura fina y como se puede ver también, para un valor de  $\epsilon$  más grande B-S es más preciso que R-K en un factor de diez al final de la integración incluso siendo una integración corta.

PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR PLANO DE TRES CUERPOS

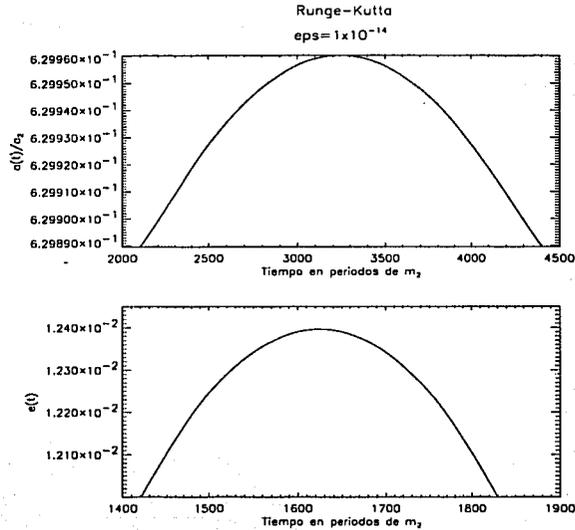


Fig. 4.3.4(a) Acercamientos en el ambio en el semieje mayor (normalizado) de la partícula y la excentricidad para el PPCRTC. Se usó el método Runge-Kutta, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$ .

PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR PLANO DE TRES CUERPOS

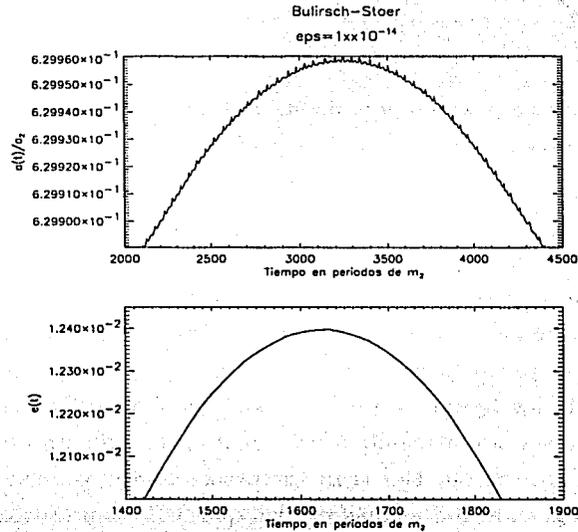


Fig. 4.3.4(b) Acercamientos en el ambio en el semieje mayor (normalizado) de la partícula y la excentricidad para el PPCRTC. Se usó el método Bulirsch-Stoer, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$ .

Otra vez B-S muestra variaciones en el semieje mayor pero tiene más picos que con  $\epsilon = 5 \times 10^{-16}$

La siguiente integración se realizó con las mismas condiciones iniciales pero para  $\epsilon = 10^{-13}$ . Las figuras 4.3.5(a) y 4.3.5(b) muestran los resultados obtenidos para las corridas 11 y 12 respectivamente. Todas las cantidades que se analizan corresponden a los elementos orbitales de la partícula, en un sistema cuyo origen está en  $m_1$ .

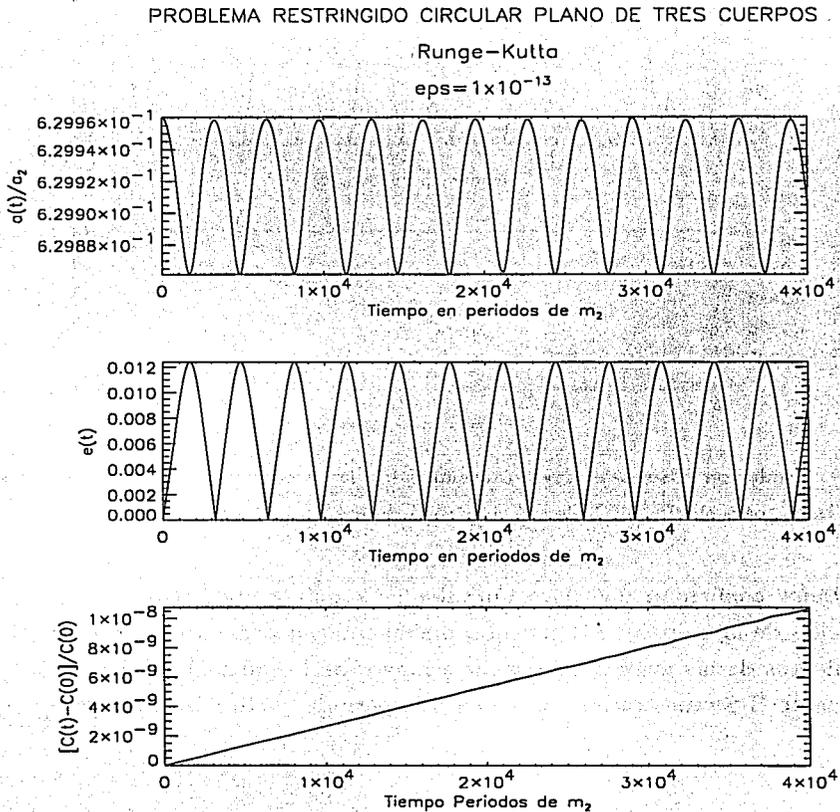


Fig. 4.3.5(a) Cambio en el semieje mayor (normalizado), la excentricidad y el cambio fraccional en la constante de Jacobi para el PPCRTC. Se usó el método Runge-Kutta, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 10^{-13}$ .

PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR PLANO DE TRES CUERPOS

Bulirsch-Stoer

$\epsilon = 1 \times 10^{-13}$

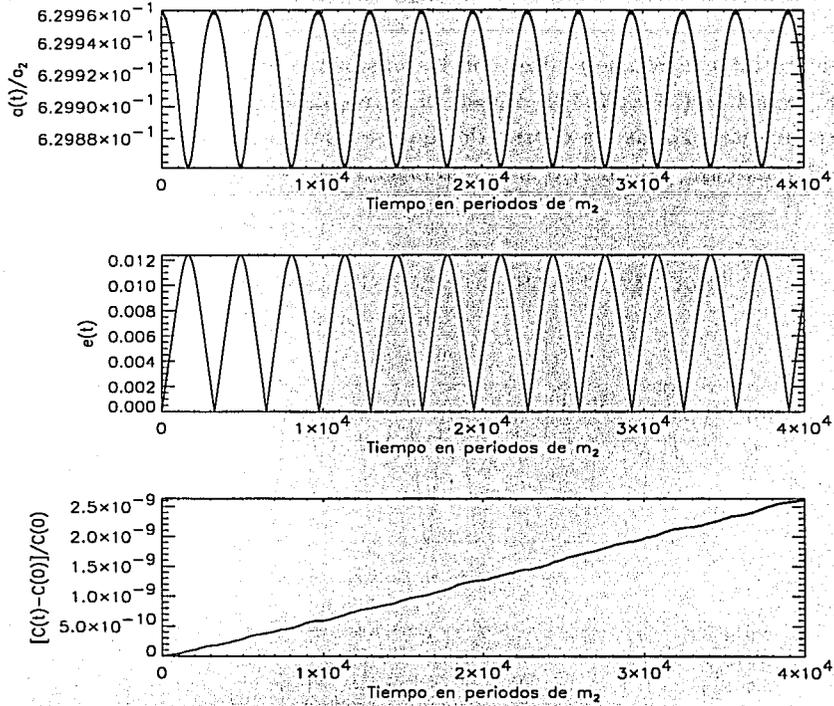


Fig. 4.3.5(b) Cambio en el semieje mayor (normalizado), la excentricidad y el cambio fraccional en la constante de Jacobi para el PPCRTC. Se usó el método Bulirsch-Stoer, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 10^{-13}$ .

Estos resultados confirman que para un valor de  $\epsilon$  más grande R-K pierde precisión en la conservación de la constante de Jacobi, además de no presentar estructura fina. Para los acercamientos de las gráficas del semieje mayor de la partícula (Figs. 4.3.6a y b), de nuevo solamente B-S muestra las variaciones de periodo corto y más numerosas que en la anterior.

PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR PLANO DE TRES CUERPOS

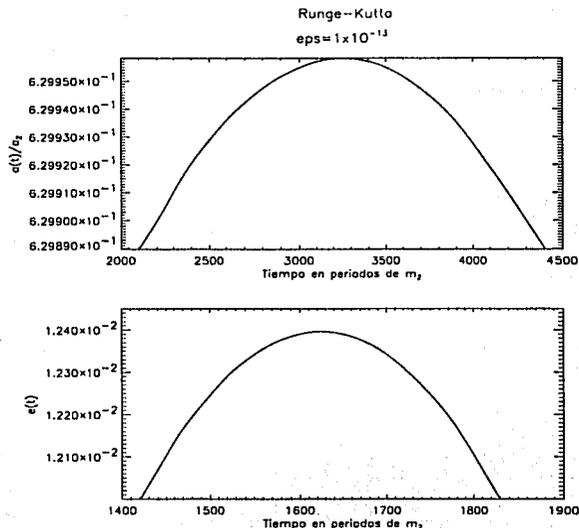


Fig. 4.3.6(a) Acercamientos del semieje mayor (normalizado) de la partícula y la excentricidad para el PPCRTC. Se usó el método Runge-Kutta, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 10^{-13}$ .

PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR PLANO DE TRES CUERPOS

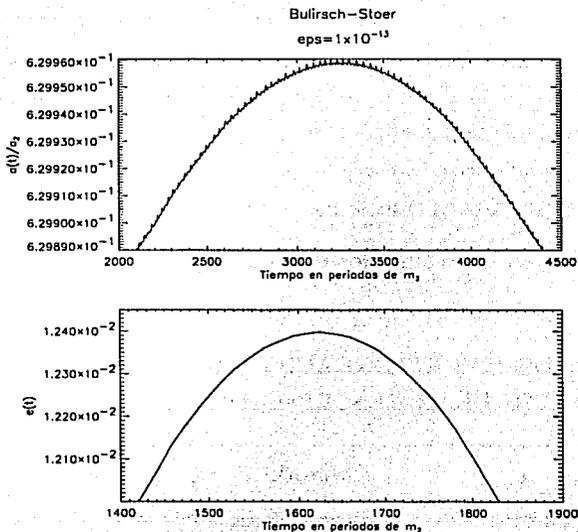


Fig. 4.3.6(b) Acercamientos del semieje mayor (normalizado) de la partícula y la excentricidad para el PPCRTC. Se usó el método Bulirsch-Stoer, para 40000 órbitas y  $\epsilon = 10^{-13}$ .

La siguiente integración se hizo por cien mil órbitas y  $\epsilon = 10^{-14}$ . Las condiciones iniciales se muestran en la tabla VIII.

**TABLA VIII**  
**CONDICIONES INICIALES:**  
**PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS (PPCRTC)**

Parámetro	Valor
$m$	0
$m_1$	$5685 \times 10^{26} g$
$m_2/m_1$	$1 \times 10^{-6}$
$a_0$	0.63005724618926 cm
$a_2$	$185540 \times 10^5 cm$
$e_0$	0
$e_2$	0
$\lambda_0$	0°
$\varpi_0$	0°

Donde  $m$  es la masa de la partícula,  $m_1$  es la masa del cuerpo primario,  $m_2$  es la masa del cuerpo secundario,  $a_0$  es el semieje mayor inicial de la partícula y el valor fue encontrado empíricamente (Espresate J., 1997),  $a_2$  es el semieje mayor inicial de la del cuerpo secundario,  $e_0$  es la excentricidad inicial de la partícula,  $e_2$  es la excentricidad inicial del cuerpo secundario,  $\varpi$  es el argumento del periápside y  $\lambda = 0$  indica que el periápside se encuentra en la parte positiva del eje  $X$ .

En la tabla IX se presentan los resultados obtenidos para esta integración.

**TABLA IX**  
**DATOS NUMÉRICOS DE LAS INTEGRACIONES**  
**PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS (PPCRTC)**

Corrida No.	$\epsilon$	Método	No. órbitas	$t_{CPU}$ (hr)
13	$1 \times 10^{-14}$	R-K	$1 \times 10^5$	02:38:51.97
14	$1 \times 10^{-14}$	B-S	$1 \times 10^5$	00:23:16.03

Los resultados de las corridas 13 y 14 se muestran en las Figs. 4.3.7a y b respectivamente. La primera gráfica de estas figuras corresponde al semieje mayor normalizado, a simple vista ambas gráficas son iguales (para R-K y B-S), pero si hacemos un acercamiento (Figs. 4.3.8a y b) podemos apreciar nuevamente que B-S muestra variaciones de corto periodo mientras que R-K no lo hace.

La segunda gráfica corresponde a la excentricidad de la órbita de la partícula y para ambos métodos son exactamente iguales incluso en el acercamiento (Figs. 4.3.8a y b).

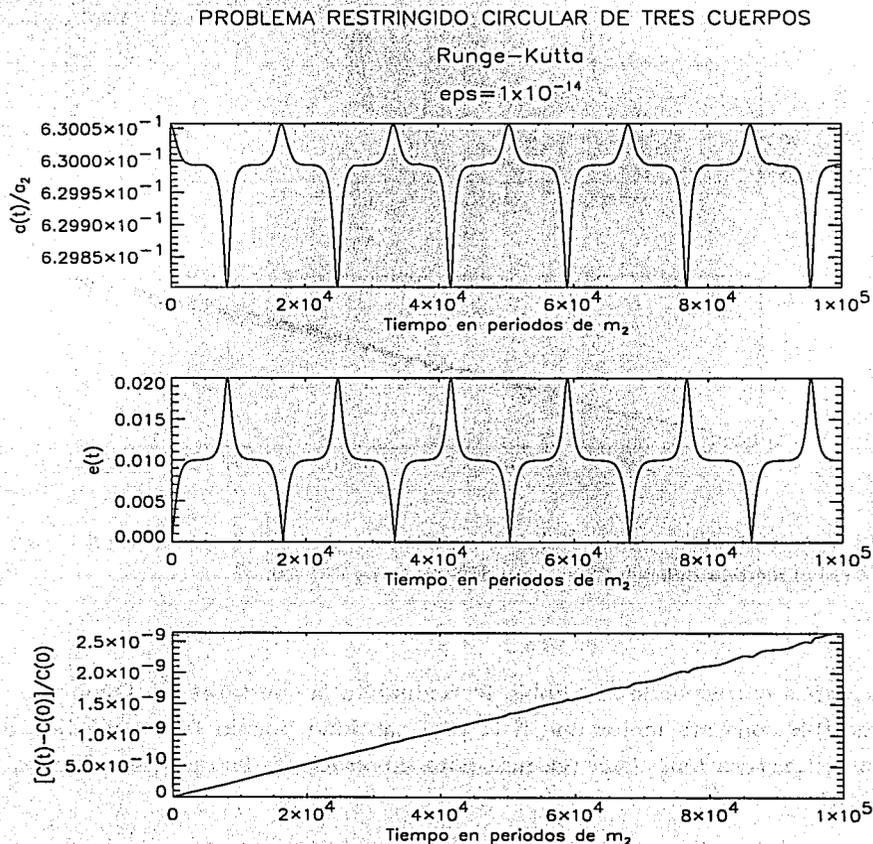


Fig. 4.3.7(a) Semieje mayor (normalizado) de la partícula, excentricidad y constante de Jacobi para el PPCRTC. Se usó el método Runge-Kutta, para  $10^5$  órbitas y  $\epsilon = 10^{-14}$ .

PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR DE TRES CUERPOS

Bulirsch-Stoer

$\epsilon = 5 \times 10^{-14}$

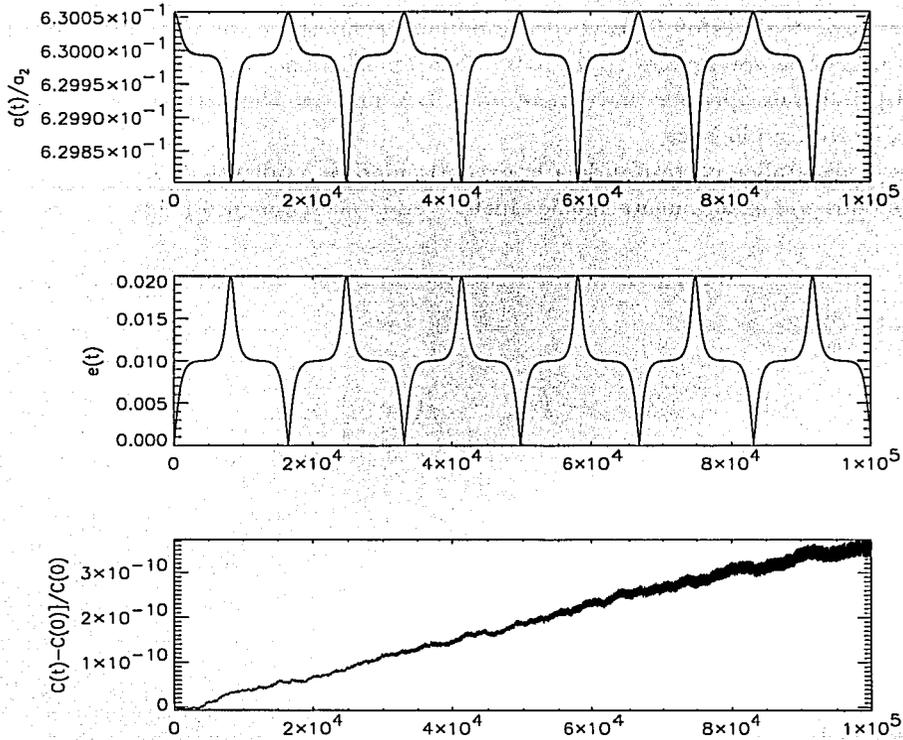


Fig. 4.3.7(b) Semieje mayor (normalizado) de la partícula, excentricidad y constante de Jacobi para el PPCRTC. Se usó el método Bulirsch-Stoer, para  $10^5$  órbitas y  $\epsilon = 10^{-14}$ .

La tercera gráfica corresponde al cambio fraccional en la constante de Jacobi y se puede apreciar que B-S conserva mejor que R-K esta cantidad por un factor de diez, además de presentar estructura fina. Una vez más para integraciones largas y el mismo  $\epsilon$ , B-S es mejor que R-K.

PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR DE TRES CUERPOS

Runge-Kutta

$\epsilon = 1 \times 10^{-14}$

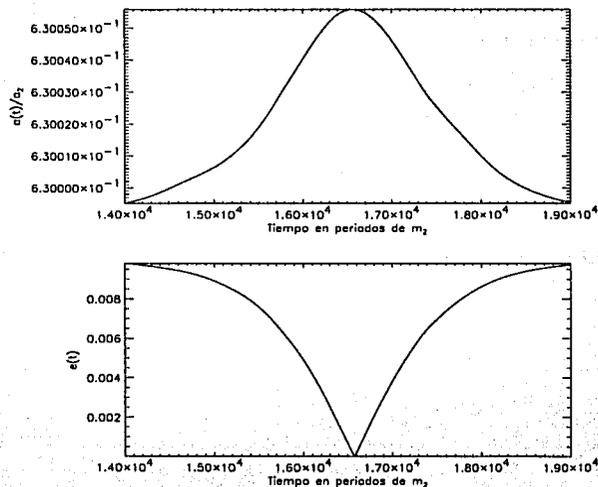


Fig. 4.3.8(a) Acercamientos el el semieje mayor (normalizado) de la partícula y la excentricidad para el PPCRTC. Se usó el método Runge-Kutta, para  $10^5$  órbitas y  $\epsilon = 10^{-14}$ .

PROBLEMA RESTRINGIDO CIRCULAR PLANO DE TRES CUERPOS

Bulirsch-Stoer

$\epsilon = 1 \times 10^{-14}$

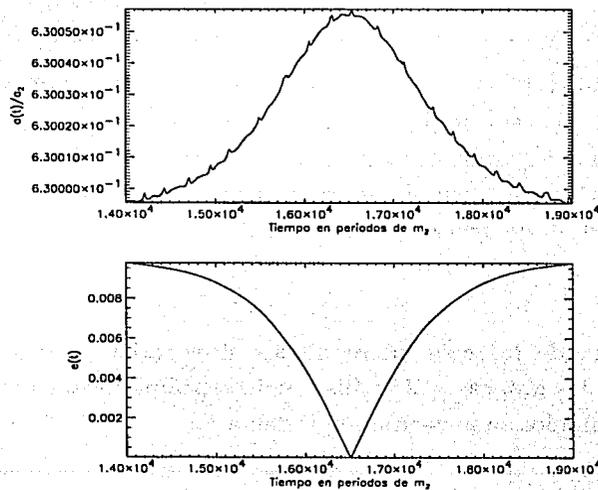


Fig. 4.3.8(b) Acercamientos el el semieje mayor (normalizado) de la partícula y la excentricidad para el PPCRTC. Se usó el método Bulirsch-Stoer, para  $10^5$  órbitas y  $\epsilon = 10^{-14}$ .

Finalmente se presentan los resultados de la última integración para 4000 órbitas y distintos valores de  $\epsilon$ , con el propósito de reafirmar que B-S toma en cuenta variaciones de periodo corto mientras que R-K no lo hace. Las condiciones iniciales se muestran en la tabla X.

TABLA X  
CONDICIONES INICIALES:  
PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS (PPCRTC)

Parámetro	Valor
$m$	0
$m_1$	$5685 \times 10^{26} g$
$m_2/m_1$	$1 \times 10^{-6}$
$a_0$	$0.63005724618926 cm$
$a_2$	$185540 \times 10^5 cm$
$e_0$	0
$e_2$	0
$\lambda_0$	$0^\circ$
$\varpi_0$	$0^\circ$

Donde  $m$  es la masa de la partícula,  $m_1$  es la masa del cuerpo primario,  $m_2$  es la masa del cuerpo secundario,  $a_0$  es el semieje mayor inicial de la partícula esta vez corrido en  $1/15 \times 10^3$ ,  $a_2$  es el semieje mayor inicial de la del cuerpo secundario,  $e_0$  es la excentricidad inicial de la partícula,  $e_2$  es la excentricidad inicial del cuerpo secundario,  $\varpi$  es el argumento del periápside y  $\lambda = 0$  indica que el periápside se encuentra en la parte positiva del eje  $X$ .

Estos resultados han sido los más interesantes e ilustrativos por las diferencias y los detalles obtenidos en las gráficas. El análisis se hace simultáneamente para los distintos valores de  $\epsilon$  y los resultados se presentan en la tabla XI.

**TABLA XI**  
**DATOS NUMÉRICOS DE LAS INTEGRACIONES**  
**PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS (PPCRTC)**

Corrida No.	$\epsilon$	Método	No. órbitas	$t_{CPU}$ (hr)
15	$5 \times 10^{-14}$	R-K	$4 \times 10^3$	00:04:44.92
16	$5 \times 10^{-14}$	B-S	$4 \times 10^3$	00:00:40.16
17	$5 \times 10^{-11}$	R-K	$4 \times 10^3$	00:01:13.08
18	$5 \times 10^{-11}$	B-S	$4 \times 10^3$	00:00:45.17
19	$5 \times 10^{-10}$	R-K	$4 \times 10^3$	00:00:58.72
20	$5 \times 10^{-10}$	B-S	$4 \times 10^3$	00:00:45.15

Las gráficas de las figuras 4.3.9(a) y (b) muestran los resultados para R-K y B-S con los mismos valores de  $\epsilon$  respectivamente y corresponden al cambio en el semieje mayor (normalizado) para la partícula.

Si comparamos ambas figuras podemos apreciar la notable diferencia entre los métodos. B-S es mucho más sensible ante variaciones de frecuencia alta y/o periodo corto (Fig. 4.3.9b) en comparación con R-K (Fig. 4.3.9a). Pareciera que R-K hace un promedio de los máximos y mínimos (periodo corto) mientras que B-S parece no hacer lo mismo.

Con ambos métodos, para un  $\epsilon = 5 \times 10^{-10}$  el comportamiento periodico del semieje mayor se deteriora considerablemente, ya que es un  $\epsilon$  muy grande en comparación con los otros dos que se escogieron.

PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS  
COMPARACION PARA DISTINTOS EPS CON RUNGE-KUTTA

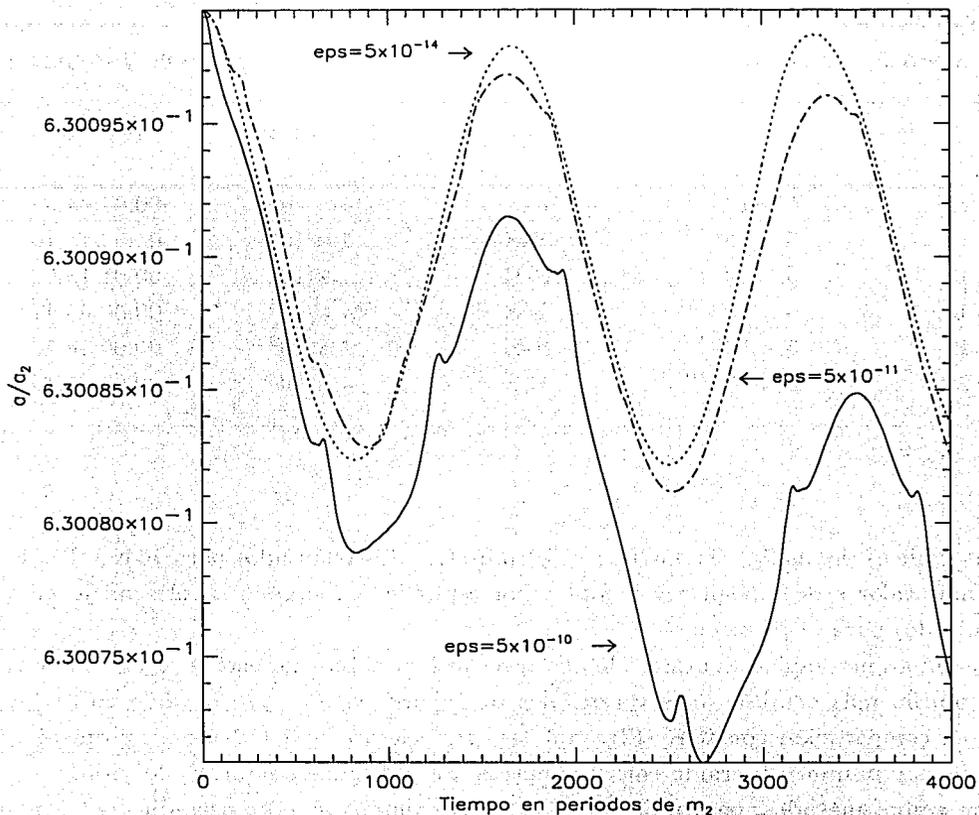


Fig. 4.3.9(a) Semieje mayor (normalizado) de la partícula para el PPCRTC. Se usó el método Runge-kutta, para 4000 órbitas con distintos valores de  $\epsilon$ . Cada línea corresponde a una integración con el  $\epsilon$  indicado en la figura.

PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS  
COMPARACION PARA DISTINTOS EPS CON BULIRSCH-STOER

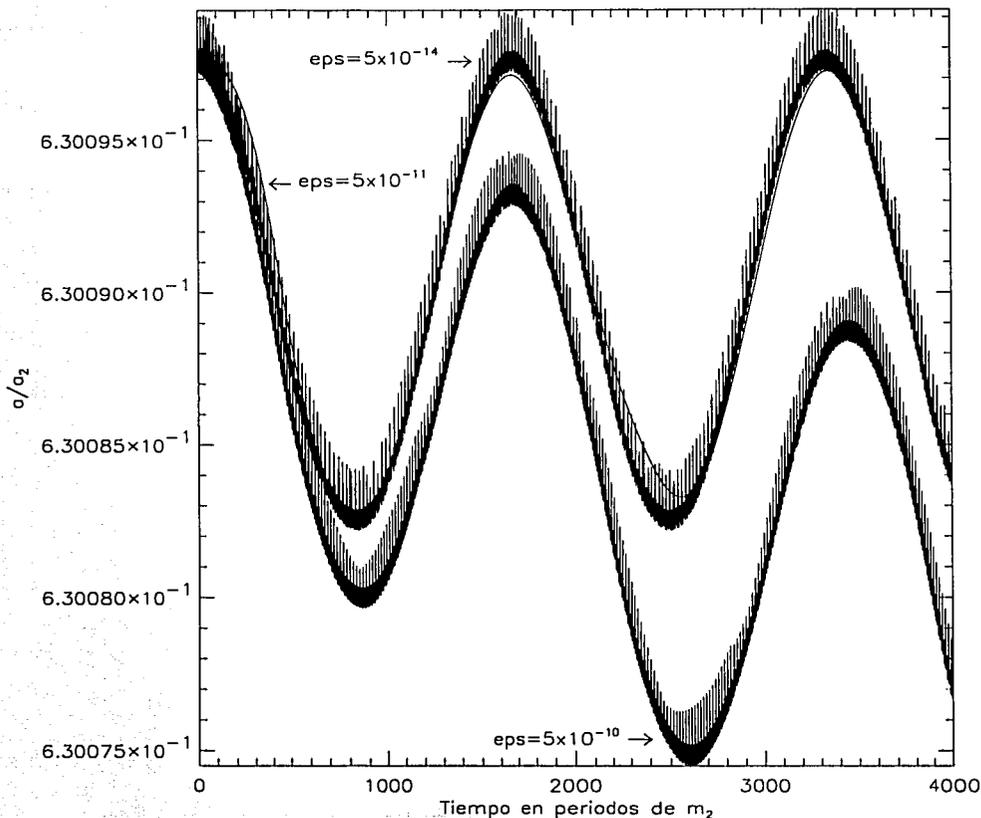


Fig. 4.3.9(b) Semieje mayor (normalizado) de la partícula para el PPCRTC. Se usó el método Bulirsch-Stoer, para 4000 órbitas con distintos valores de  $\epsilon$ .

La línea sólida corresponde a un  $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$  y no presenta variaciones de periodo corto en ciertas regiones (ver figura 4.3.10b). Las figuras 4.3.10a y b corresponden a dos valores distintos de  $\epsilon$  indicados en las gráficas. En la Fig. 4.3.9(b) no se aprecia muy bien la diferencia entre  $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$  y  $\epsilon = 5 \times 10^{-14}$ . Por otro lado es claro que con  $\epsilon = 5 \times 10^{-10}$  los máximos de las variaciones de periodo largo van disminuyendo.

La gráfica de la figura 5.3.10(a) corresponde a la superposición de ambos métodos para un  $\epsilon = 5 \times 10^{-14}$ , en esta gráfica se hizo un corte para B-S con el fin de apreciar

la diferencia entre este método y R-K, donde la gráfica dibujada por una línea sólida es evidentemente R-K, el cual no toma en cuenta las variaciones de corto periodo y/o alta frecuencia. La gráfica superpuesta corresponde a B-S y muestra variaciones de periodo corto durante toda la integración, pero la hemos cortado para mostrar que tienen el mismo comportamiento de oscilación de largo periodo.

PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS  
 COMPARACION DE RUNGE-KUTTA CON BULIRSCH-STOER  
 PARA UN  $\epsilon = 5 \times 10^{-14}$

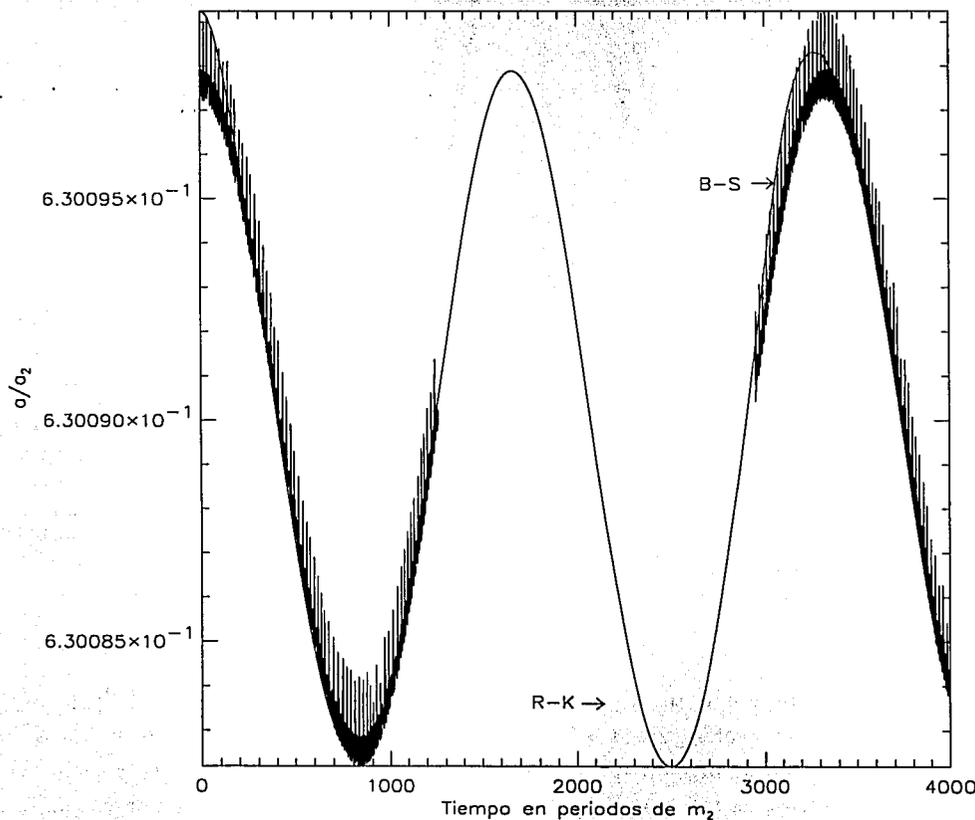


Fig. 4.3.10(a) Semieje mayor (normalizado) de la partícula para un  $\epsilon = 5 \times 10^{-14}$  para el PPCRTC utilizando ambos métodos, para 4000 órbitas.

La gráfica de la siguiente figura (4.3.10b) corresponde a la superposición de ambos métodos para un  $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$ . El método de B-S presenta un comportamiento extraño para este  $\epsilon$ . Como se puede ver al principio de la integración en la línea sólida, sí toma en cuenta las variaciones de corto periodo pero al transcurrir la integración deja de tomarlas en cuenta. Como podemos ver en la línea punteada, R-K pierde precisión antes que B-S.

PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS  
 COMPARACION DE RUNGE-KUTTA CON BULIRSCH-STOER  
 PARA UN  $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$

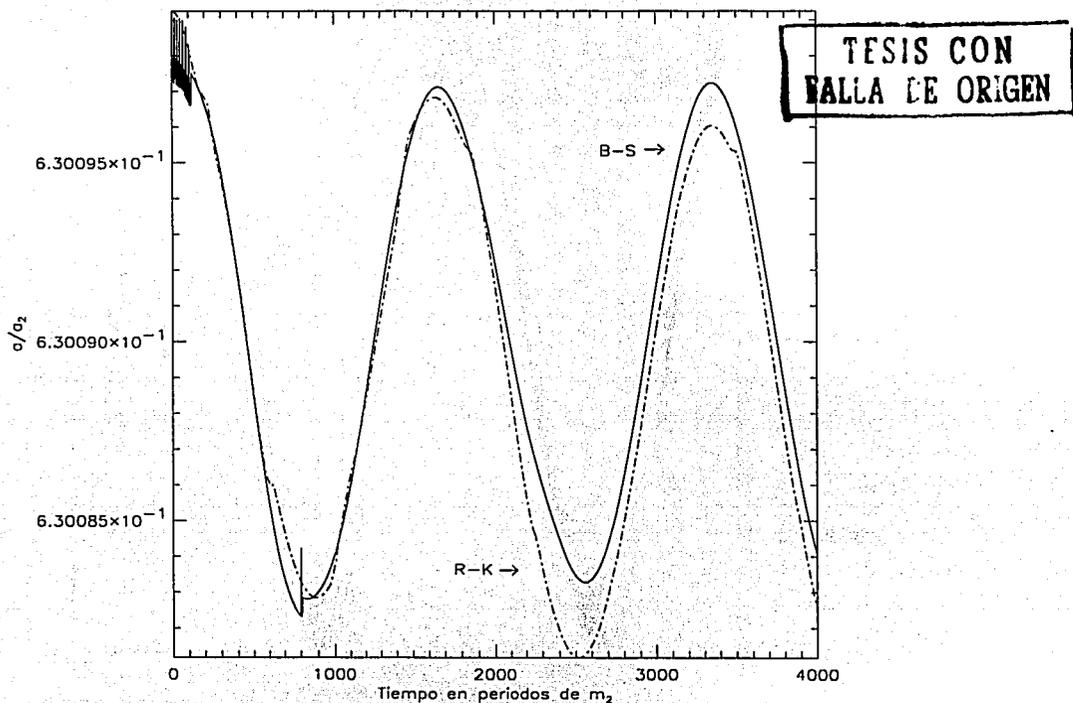


Fig. 4.3.10(b) Semieje mayor (normalizado) de la partícula para un  $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$  para el PPCRTC utilizando ambos métodos, para 4000 órbitas.

En este caso B-S no muestra las variaciones de periodo corto, excepto al principio de la integración. Después de repetir la integración en distintas computadoras, pareciera

que se debe a la diferencia en los procesadores, la Fig. 4.3.10(c) muestra el resultado obtenido por otra computadora (PC armada pentium IV) y como se puede apreciar es diferente a la gráfica de nuestra integración. Aparecen las variaciones de corto periodo más frecuentemente que en la anterior.

PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS  
 RESULTADO PARA UNA COMPUTADORA DISTINTA CON BULIRSCH-STOER  
 PARA UN  $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$

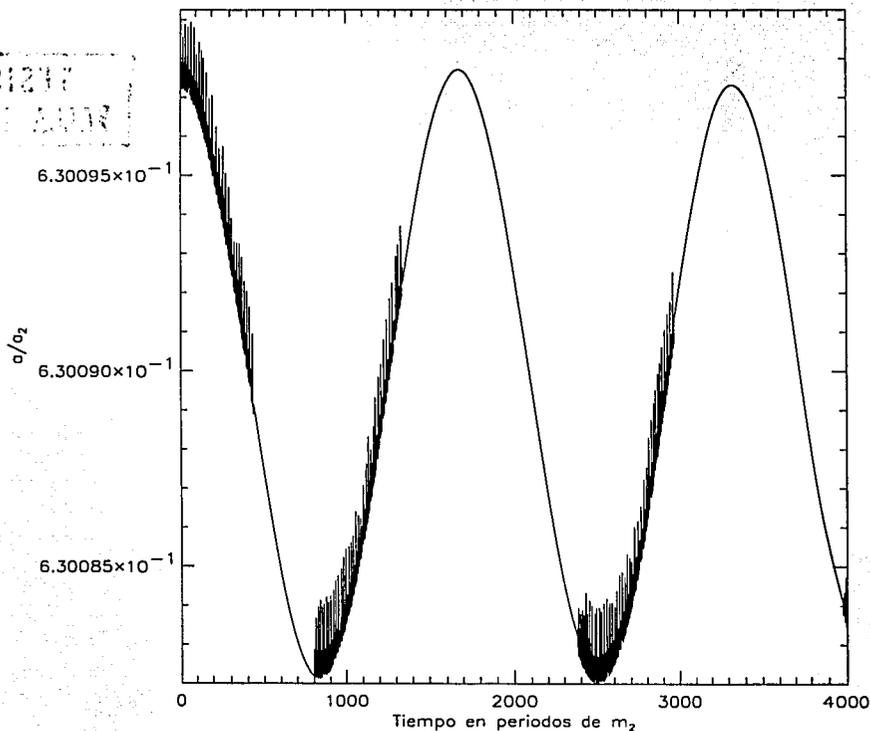


Fig. 4.3.10(c). Semieje mayor (normalizado) de la partícula para un  $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$  para el PPCRTC. Se usó el método Bulirsch-Stoer con un procesador diferente, para 4000 órbitas.

La gráfica de la Fig. 4.3.10(d) corresponde a la superposición de ambos métodos para un  $\epsilon = 5 \times 10^{-10}$ . Para este  $\epsilon$  ambos métodos son poco precisos, el comportamiento del

semieje mayor de la partícula disminuye con el tiempo rápidamente y no es periódica, sin embargo B-S es capaz de detectar las variaciones de periodo corto.

PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS  
 COMPARACION DE RUNGE-KUTTA CON BULIRSCH-STOER  
 PARA UN  $\epsilon = 5 \times 10^{-10}$

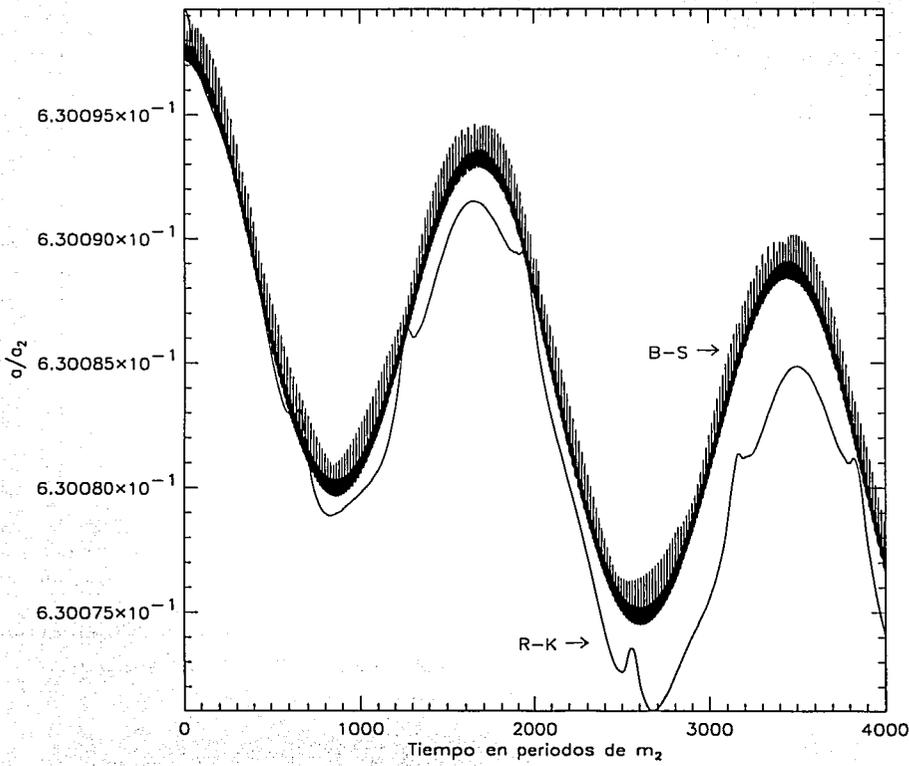


Fig. 4.3.10(d) Semieje mayor (normalizado) de la partícula para un  $\epsilon = 5 \times 10^{-10}$  para el PPCRTC. Se utilizaron ambos métodos, para 4000 órbitas.

La gráfica de la Fig. 4.3.11(a) corresponde a la superposición de las excentricidades para distintos valores de  $\epsilon$  con el método R-K.

PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS  
 COMPARACION DE RUNGE-KUTTA PARA DISTINTOS EPS

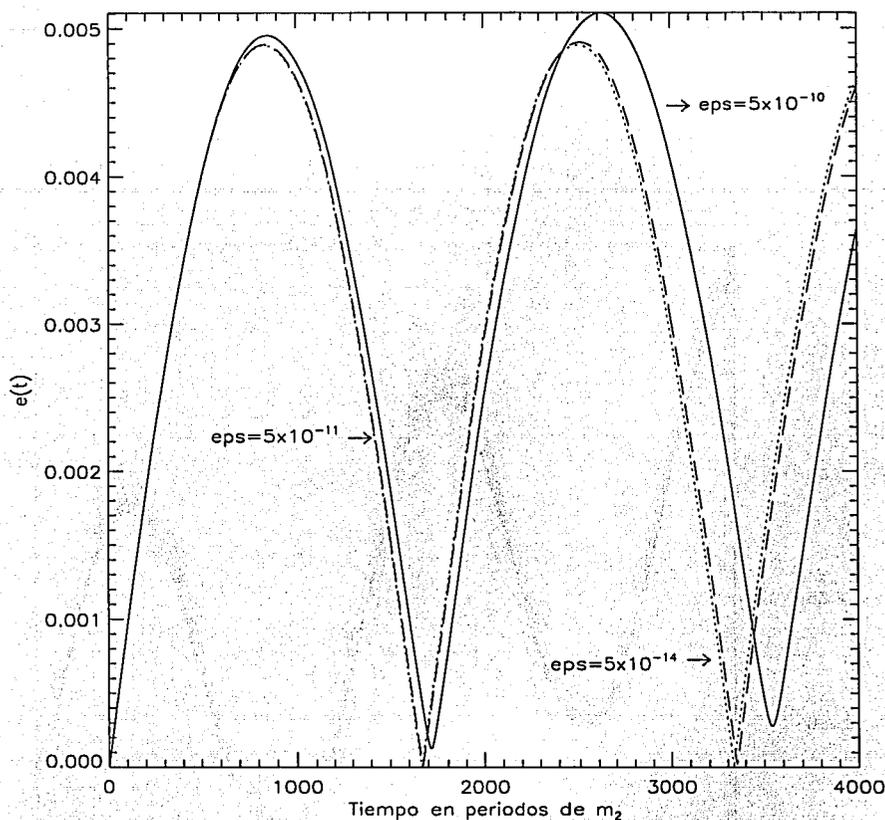


Fig. 4.3.11(a) Excentricidad de la órbita de la partícula para un distintos  $\epsilon$  para el PPCRTC utilizando Runge-Kutta, para 4000 órbitas. Note los cambios de amplitud y periodicidad cuando cambia el valor de  $\epsilon$ .

Para  $\epsilon = 5 \times 10^{-10}$  el deterioro en el comportamiento periódico es muy rápido. En esta gráfica podemos distinguir los resultados para distintos valores de  $\epsilon$ .

La gráfica de la Fig. 4.3.11(b) corresponde a un acercamiento de las superposición de las excentricidades para distintos valores de  $\epsilon$  con R-K. En esta gráfica se puede observar que a una escala muy pequeña, la excentricidad presenta un comportamiento periódico que se refleja en pequeños "rizos". También podemos ver la diferencia para los distintos valores de  $\epsilon$ .

COMPARACION DE LAS EXCENTRICIDADES PARA DISTINTOS EPS  
CON RUNGE-KUTTA

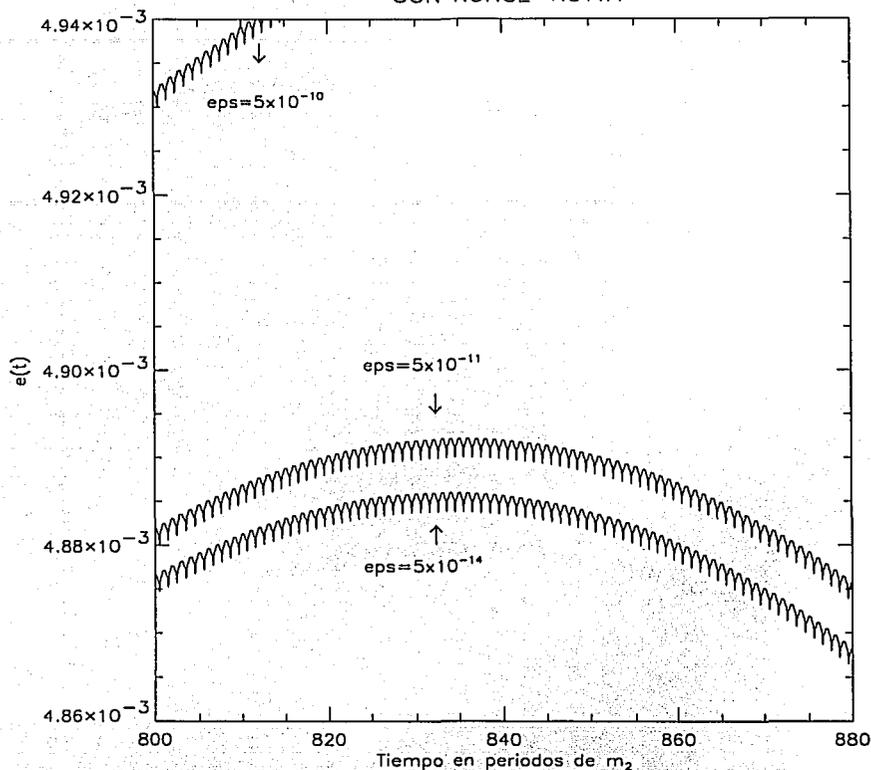


Fig. 4.3.11(b). Acercamiento para la excentricidad de la órbita de la partícula para el PPCRTC y distintos valores de  $\epsilon$  utilizando el método de Runge-Kutta.

En esta gráfica se puede observar que a una escala muy pequeña, la excentricidad presenta un comportamiento periódico que se refleja en pequeños ‘rizos’, que son variaciones de corto periodo. También se puede apreciar la diferencia para los distintos valores de  $\epsilon$ .

Debido a que el comportamiento de la excentricidad para  $\epsilon = 5 \times 10^{-10}$  no se puede ver completo, se hace un aumento en la escala del eje para  $e(t)$  que se ve en la Fig. 4.3.11(c).

COMPARACION DE LAS EXCENTRICIDADES PARA DISTINTOS EPS  
CON RUNGE-KUTTA

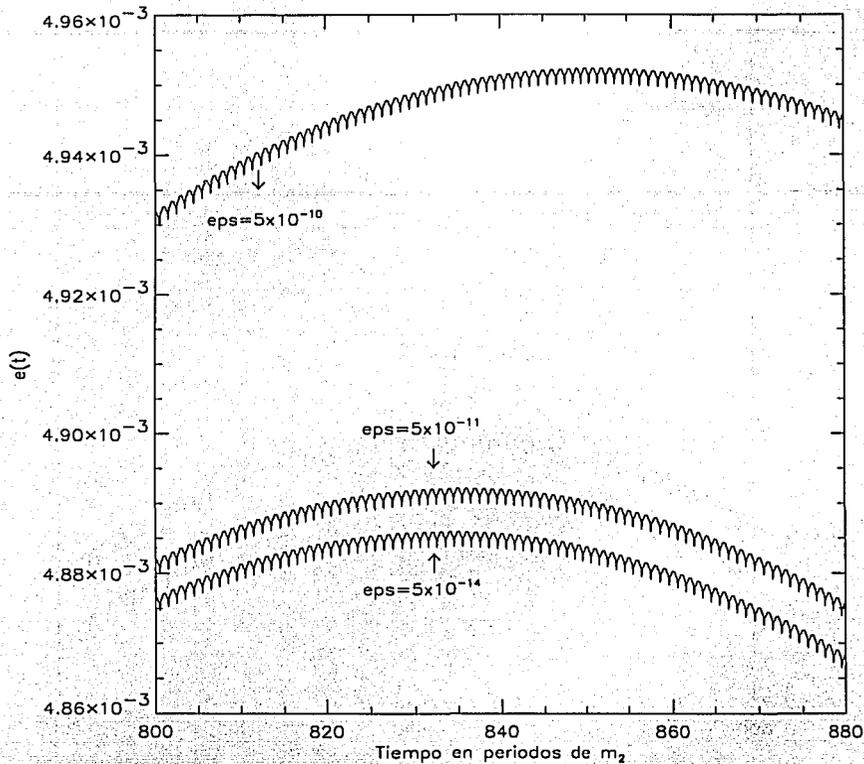


Fig. 4.3.11(c) Acercamiento para la excentricidad de la órbita de la partícula para distintos valores de  $\epsilon$  para el PPCRTC, utilizando el método Runge-Kutta.

La Fig. 4.3.12(a) corresponde a la superposición de las excentricidades para distintos valores de  $\epsilon$  con B-S. Para un  $\epsilon = 5 \times 10^{-10}$  el deterioro en el comportamiento periódico no es tan rápido como en R-K, lo cual nos dice que una vez más B-S puede ser más preciso. Además en la misma figura se puede también apreciar como los  $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$  y  $\epsilon = 5 \times 10^{-14}$  son casi indistinguibles en comparación con R-K, donde un  $\epsilon = 5 \times 10^{-14}$  es menos preciso.

PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS  
 COMPARACION DE LA EXCENTRICIDAD  
 CON BULIRSCH-STOER PARA DISTINTOS EPS

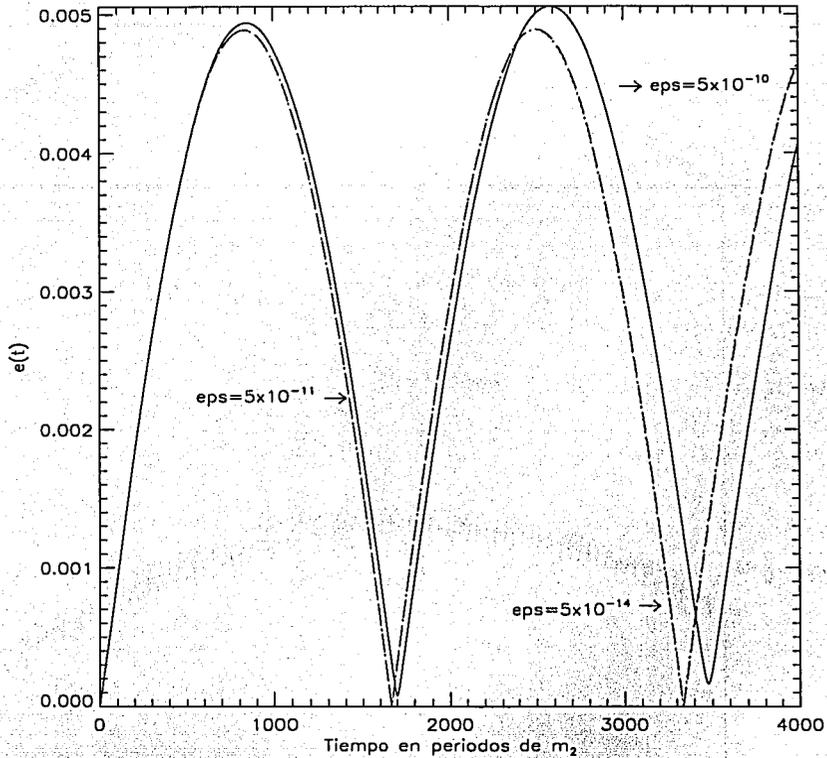


Fig. 4.3.12(a) PPCRTC. Bulirsch-Stoer, excentricidad de la órbita de la partícula para distintos  $\epsilon$ .

La Fig. 4.3.12(b) corresponde a un acercamiento en la superposición de las excentricidades para distintos valores de  $\epsilon$  con B-S. En esta gráfica también se observan los “rizos” que aparecen en la Fig.4.3.11(b). Sin embargo es notorio que usando la misma escala, la gráfica para la excentricidad con  $\epsilon = 5 \times 10^{-10}$  en el método R-K no se aprecia completa. Esto también nos indica que B-S es más preciso. Además la separación entre los resultados para  $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$  y  $\epsilon = 5 \times 10^{-14}$  es mucho mayor para R-K que para B-S ya que con este último prácticamente se superponen, lo que indica de nuevo que para  $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$  el método B-S es más preciso.

COMPARACION DE LAS EXCENTRICIDADES PARA DISTINTOS EPS  
CON BULIRSCH-STOER

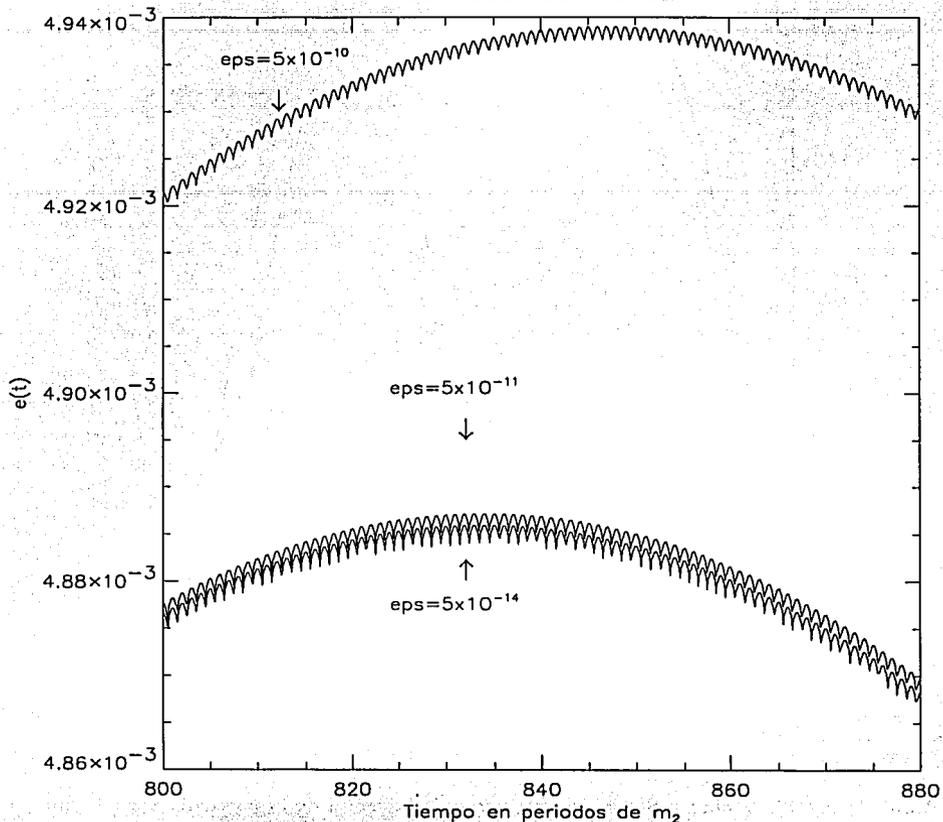


Fig. 4.3.12(b) Acercamiento para la excentricidad de la órbita de la partícula para distintos valores de  $\epsilon$  para el PPCRTC, utilizando el método Bulirsch-Stoer.

Las gráficas de las figuras 4.3.13(a) y 4.3.13(b) muestran los resultados para R-K y B-S respectivamente y corresponden al cambio fraccional de la constante de Jacobi en el tiempo.

PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS

COMPARACION DE LA CONSTANTE DE JACOBI

CON RUNGE-KUTTA PARA DISTINTOS EPS

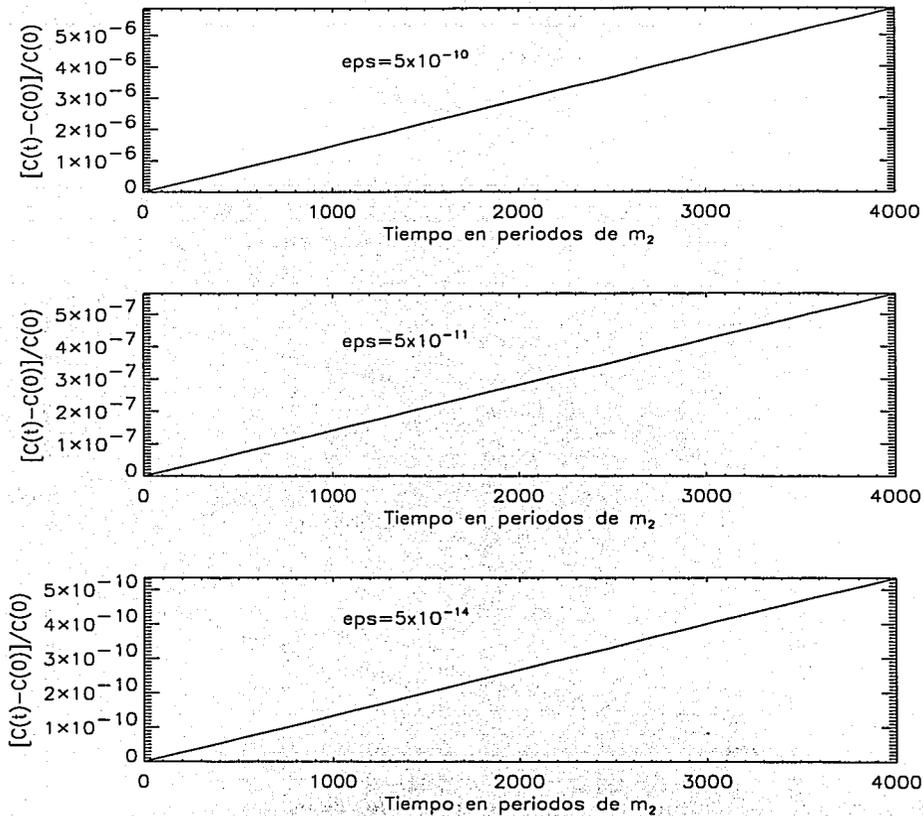


Fig. 4.3.13(a) Cambio fraccional de la constante de Jacobi para distintos valores de  $\epsilon$  para el PPCRTC, utilizando el método Runge-Kutta. Note la escala en los ejes verticales.

PROBLEMA PLANO CIRCULAR RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS  
 COMPARACION DE LA CONSTANTE DE JACOBI  
 CON BULIRSCH-STOER PARA DISTINTOS EPS

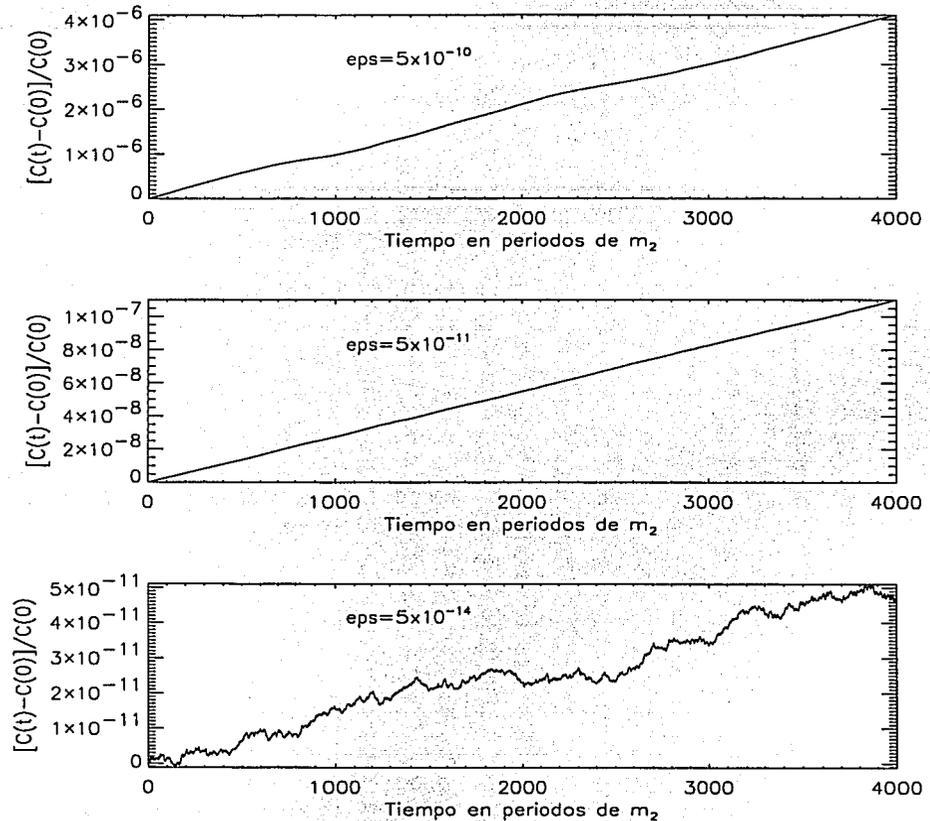


Fig. 4.3.13(b) Cambio fraccional de la constante de Jacobi para distintos valores de  $\epsilon$  para el PPCRTC, utilizando el método Bulirsch-Stoer.

Como se ve en las figuras 4.3.13a y b, para  $\epsilon = 5 \times 10^{-10}$  la constante de Jacobi se conserva prácticamente igual para R-K que para B-S. Para  $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$  B-S conserva mejor la constante de Jacobi y mantiene un valor de  $10^{-8}$  durante más órbitas que R-K. En cambio para un  $\epsilon = 5 \times 10^{-14}$  B-S conserva mejor la constante de Jacobi que R-K en un factor de diez durante toda la integración, además de presentar estructura fina. Con esto podemos reafirmar que para integraciones cortas y  $\epsilon$  grande, ambos métodos son igualmente precisos.

Como hemos podido constatar a lo largo del análisis de cada integración, el tiempo de cálculo para el método R-K es mucho mayor que el que utiliza el método B-S, y aumenta enormemente al aumentar el número de órbitas que se quieren integrar, lo cual demuestra también que B-S es más eficiente que R-K en este aspecto.

Debemos recordar que la implementación de R-K involucra la evaluación de primeras y segundas derivadas, mientras que B-S sólo involucra la evaluación de las segundas derivadas por el uso de la rutina STOERM (ver capítulo III).



# CONCLUSIONES

A continuación se enumeran las conclusiones obtenidas del análisis de los resultados de esta tesis:

1. Para integraciones largas la precisión del B-S (Bulirsch-Stoer) es mayor que para R-K (Runge-Kutta). Para integraciones del orden de millones de órbitas R-K no es capaz de terminar los cálculos, al menos en doble precisión (ver la discusión en la introducción del capítulo 4); en este tipo de integraciones el MXSTP para R-K no es suficiente.

2. Para integraciones cortas la precisión de ambos métodos con  $\epsilon$  pequeño es casi la misma, por lo cual se puede utilizar cualquiera de los dos. Sin embargo en algunos casos donde el número de órbitas es del orden de miles, B-S es más preciso al conservar las constantes de cada problema que R-K en un factor de diez ya que la subdivisión de los intervalos es más eficiente con B-S, lo cual disminuye el número de intentos de subdivisión (el cual tiene un valor límite dentro del programa).

3. Si se decide utilizar R-K es necesario usar un  $\epsilon$  pequeño para obtener mayor precisión.

4. B-S sí toma en cuenta las variaciones de periodo corto que nos sirven para predicciones a corto plazo, en cambio R-K pareciera hacer un promedio de estas variaciones, por lo que no las toma en cuenta y no sería útil en predicciones de corto plazo.

5. Como se pudo observar en las gráficas del cambio fraccional de las posiciones para el Problema de Dos Cuerpos, R-K acumula errores del mismo signo lo que hace que el comportamiento del segundo cuerpo muestre un error que aumenta monótonamente. En cambio B-S acumula errores de distinto signo, por lo que los va cancelando aunque a largo plazo el error siempre crece.

6. El tiempo de cómputo que utiliza R-K para hacer las integraciones es muchísimo mayor que para B-S en integraciones largas y no tan largas, lo cual presenta un problema si se quiere ahorrar tiempo. El hecho de que para R-K se reescriba el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden como un sistema de ecuaciones de primer orden, implica un mayor número de evaluaciones para cada paso, lo cual explica que R-K utilice más tiempo para hacer los cálculos.

7. Otra explicación para la diferencia entre el tiempo de cálculo que utiliza B-S y el que utiliza R-K, es que este último siempre subdivide un intervalo en un número idéntico de subintervalos para cada paso  $h$ , mientras que B-S lo hace dependiendo de qué tan buena sea la aproximación a la función original y puede hacer desde dos hasta doce subintervalos, lo cual ahorra tiempo.

Como trabajo futuro se pretende cambiar la subrutina STOERM en B-S por otra en la que el sistema de ecuaciones de segundo orden, se reescriba como un sistema de ecuaciones de primer orden, con lo cual se quiere verificar si este cambio afecta tanto la precisión como el tiempo de cálculo para el método de B-S.

# APÉNDICE A

## A.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Existen métodos para resolver ecuaciones diferenciales mediante la aplicación de técnicas analíticas como la integración o los desarrollos en serie. En general lo importante es hallar una expresión exacta para la solución. Sin embargo en la ciencia existen muchos problemas, en especial los no lineales, para los cuales estos métodos no son válidos o son muy complicados. Una alternativa a este problema son los métodos numéricos para obtener una aproximación a la solución exacta de una ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de  $n$ -ésimo orden se denominan así porque la derivada más alta es de orden  $n$  y ordinarias porque son aquellas en las que la función desconocida depende de una sola variable independiente y en la ecuación diferencial sólo aparecen las derivadas totales (las derivadas parciales no están presentes). Los problemas que involucran este tipo de ecuaciones, siempre pueden reducirse al estudio de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por ejemplo, una ecuación de segundo orden en  $y$  con variable independiente  $t$  tiene la siguiente forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + q(t)\frac{dy}{dt} = r(t) , \quad (\text{A.1.1})$$

donde  $r$  y  $q$  son funciones arbitrarias.

La ecuación (A.1.1) puede escribirse como un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

$$\frac{dy}{dt} = z(t) , \quad (\text{A.1.2})$$

$$\frac{dz}{dt} = r(t) - q(t)z(t) , \quad (\text{A.1.3})$$

donde  $z$  es una nueva función. Ocasionalmente es útil incorporar en la definición de la nueva variable, otros factores en la ecuación, o algunas potencias de la variable independiente, con el propósito de atenuar algún comportamiento singular que podría resultar en desbordamientos o en un incremento en el redondeo del error.

El problema genérico en las ecuaciones diferenciales ordinarias se reduce así al estudio de un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden, para las funciones  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  teniendo la forma general:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (A.1.4)$$

donde las  $f_i$  son funciones conocidas que se calculan numéricamente para cada  $t_n$  (intervalo de tiempo), y  $y_n$  es el valor de  $y$  al enésimo paso.

Un problema que involucra ecuaciones diferenciales ordinarias, no está completamente especificado por estas ecuaciones. Para determinar la forma de atacar el problema numéricamente, es necesario conocer las condiciones iniciales del problema.

En un problema de valor inicial todas las  $y_i$  están dadas en algún valor inicial  $t_0$  (de salida o arranque), y se desea encontrar las  $y_i$  en un punto final  $t_n$ , o un lista de puntos. En realidad se obtiene una tabla de valores aproximados a la función original. Esta tesis considerará este tipo de problemas.

## A.2 MÉTODO DE EULER O DE LA RECTA TANGENTE

El primero en tratar de resolver una ecuación diferencial numéricamente fue Euler en 1768, por lo que empezaremos con una breve descripción de su método, lo cual nos permitirá entender mejor los métodos de Runge-Kutta y de Bulirsch-Stoer.

Primero denotaremos a la solución exacta del problema con valor inicial como  $\phi$ , entonces el valor de la solución exacta en  $t = t_n$  es  $\phi(t_n)$ . Los símbolos  $y_n$  y  $y_n' = f(t_n, y_n)$  denotarán los valores aproximados de la solución exacta y su derivada en el punto  $t_n$ , para un procedimiento numérico dado.

Por la condición inicial se sabe que  $\phi(t_0) = y_0$ , aunque en general  $\phi(t_n) \neq y_n$  para  $n \geq 1$ , ya que sólo son aproximaciones. Por la misma razón  $\phi'(t_0) = f(t_0, y_0) = y_0'$ , pero en general  $\phi'(t_n) = f(t_n, \phi(t_n))$  no es igual a  $y_n' = f(t_n, y_n)$  para  $n \geq 1$ .

Durante todo el proceso se utiliza un espaciamento, o tamaño de paso uniforme sobre el eje  $t$  (variable independiente), al que llamamos  $h$ . Por lo tanto:

$$t_1 = t_0 + h, \quad t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h, \dots$$

y en general

$$t_n = t_0 + nh \quad . \quad (A.2.1)$$

Como se conocen  $t_0$  y  $y_0$ , también se conoce la pendiente de la recta tangente a la solución en  $t_0$ , y por consecuencia se puede obtener un valor aproximado  $y_1$  de  $\phi(t_1)$  al desplazarse a lo largo de la recta tangente desde  $t_0$  hasta  $t_1$ , (figuras A.2.1a y b).

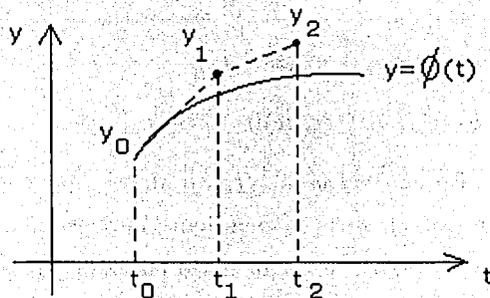


Fig. A.2.1a Aproximación de Euler o de la recta tangente.

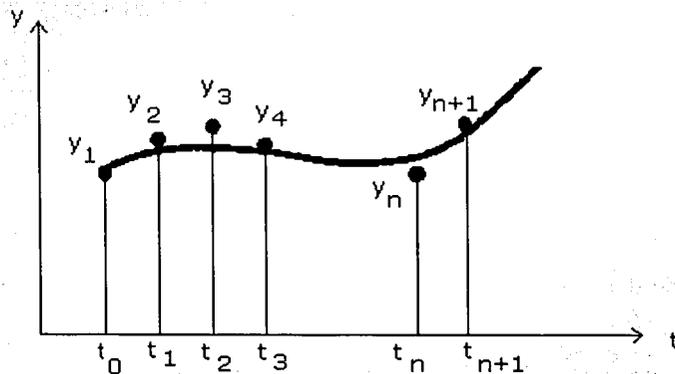


Fig. A.2.1b Aproximación numérica a la solución de  $y = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$

Por lo tanto podemos escribir a  $y_1$  de la siguiente forma:

$$y_1 = y_0 + \phi'(t_0)(t_1 - t_0) , \quad (\text{A.2.2})$$

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0) , \quad (\text{A.2.3})$$

donde  $t_1 - t_0 = h$ , el tamaño del paso. Una vez que se determina  $y_1$ , es posible calcular  $y_1' = f(t_1, y_1)$  y aplicar este valor como la pendiente de una aproximación al moverse de  $t_1$  a  $t_2$ . De este modo

$$y_2 = y_1 + y_1'(t_2 - t_1) , \quad (\text{A.2.4})$$

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1) , \quad (\text{A.2.5})$$

donde de nuevo  $t_2 - t_1 = h$ . En general  $y_i \neq \phi(t_i)$ , de modo que comunmente  $f(t_1, y_1)$  no es igual a  $f[t_1, \phi(t_1)]$ , donde  $\phi(t_1)$  sería la pendiente de la solución real en  $t_1$ . Si se continúa de esta manera, se usa el valor de  $y$  calculado en cada paso para determinar la pendiente de la aproximación para el paso siguiente. De aquí que la fórmula general para la aproximación de Euler es:

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n) . \quad (\text{A.2.6})$$

Si suponemos que entre los puntos  $t_0, t_1, t_2, \dots$  existe un tamaño de paso  $h$ , entonces  $t_{n+1} = t_n + h$  y la fórmula de Euler se puede escribir como:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) , \quad (\text{A.2.7})$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$  y también podemos escribir  $f(t_n, y_n) = y_n'$ . Esta fórmula propone una solución de  $t_n$  a  $t_{n+1} \equiv t_n + h$  a través de un paso  $h$ , pero usa la información de la derivada sólo al inicio del intervalo. Una forma de deducir la fórmula de Euler, se presenta a continuación:

Si  $y = \phi(t)$  es una solución del problema con valor inicial  $y(t_0) = y_0$  entonces al integrar desde  $t_n$  hasta  $t_{n+1}$ , se obtiene

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, y(t)] dt , \quad (\text{A.2.8})$$

la cual también puede escribirse de la forma

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, y(t)] dt . \quad (\text{A.2.9})$$

Esta integral se representa geoméricamente como el área bajo la curva entre  $t = t_n$  y  $t = t_{n+1}$ . Si se aproxima a la integral al sustituir  $f[t, y(t)]$  en  $t = t_n$ , entonces se aproxima el área real por el área del rectángulo sombreado. Recordemos que  $y = \phi(t)$  (Fig. A.2.2).

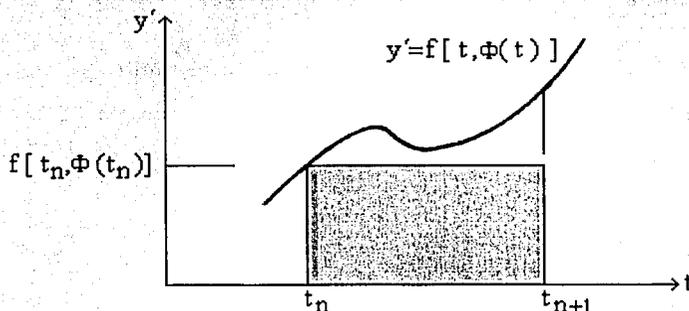


Fig. A.2.2 Deducción Integral del Método de Euler. Sean  $y_n = \phi_n$  y  $\phi(t_n)' = f[t_n, \phi(t_n)]$ . Si se aproxima a la integral al sustituir  $f[t, \phi(t)]$  por su valor  $f[t_n, \phi(t_n)]$ , en  $t = t_n$ , entonces se aproxima el área real por el área del rectángulo sombreado.

De esta manera se obtiene la siguiente aproximación:

$$\phi(t_{n+1}) \cong \phi(t_n) + f[t_n, \phi(t_n)](t_{n+1} - t_n) , \quad (\text{A.2.10})$$

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + hf[t_n, \phi(t_n)] . \quad (\text{A.2.11})$$

Por último para obtener una aproximación de  $y_{n+1}$ , se efectúa una segunda aproximación al sustituir  $\phi(t_n)$  por su valor aproximado  $y_n$  de  $\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + hf[t_n, \phi(t_n)]$ , y esto nos da la fórmula de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) . \quad (\text{A.2.12})$$

### A.3 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Un método relativamente sencillo y suficientemente exacto para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con problema de valor inicial, es el método de Runge-Kutta.

La fórmula de Runge-Kutta comprende un promedio de los valores de  $f(t, y)$  tomados en diferentes puntos del intervalo  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$  y se expresa por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}) + O(h^5) . \quad (A.3.1)$$

En donde  $h$  es el tamaño del paso,  $f$  es la derivada en el punto  $(t_n, y_n)$ ,  $O(h^5)$  es el término del error y las  $k_n$  son:

$$k_{n1} = f(t_n, y_n) , \quad (A.3.2)$$

$$k_{n2} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right) , \quad (A.3.3)$$

$$k_{n3} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right) , \quad (A.3.4)$$

$$k_{n4} = f(t_n + h, y_n + hk_{n3}) . \quad (A.3.5)$$

La suma de las  $k_n$  divididas entre 6, puede interpretarse como una pendiente promedio, porque  $k_{n1}$  es la pendiente en el extremo izquierdo del intervalo,  $k_{n2}$  es la pendiente en el punto medio, o aplicando la fórmula de Euler de  $t_n$  a  $t_n + \frac{h}{2}$ ;  $k_{n3}$  es una segunda aproximación para la pendiente en el punto medio y, por último  $k_{n4}$  es la pendiente en  $t_n + h$ , si se aplica la fórmula de Euler y la pendiente  $k_{n3}$ , para ir de  $t_n$  a  $t_n + h$ .

Uno de los métodos más utilizados para hacer integraciones numéricas en el campo científico, es el método de cuarto orden de Runge-Kutta. Este método requiere de cuatro evaluaciones de la derivada para el intervalo de tamaño  $h$ .

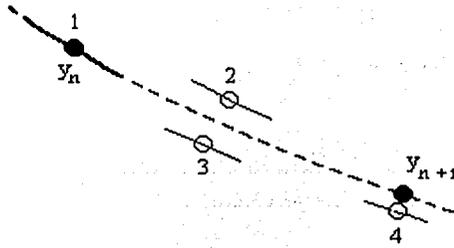


Fig. A.3.1 Método de Runge-Kutta de cuarto orden. En cada paso la derivada es evaluada cuatro veces: una vez en el punto inicial, dos veces en los puntos medios de prueba y una vez en el punto final de prueba. De estas derivadas se calcula el valor final de la función (que se muestra como el punto lleno, en  $y_{n+1}$ ).

En cada paso la derivada se evalúa cuatro veces: la primera vez en el punto inicial  $y_0$ , la segunda y tercera vez en los puntos medios de prueba entre  $y_n$  y  $y_{n+1}$  y la cuarta vez en el punto final de prueba del intervalo. De estas derivadas se calcula el punto final de la función  $y_{n+1}$  (punto relleno).

La rutina básica del Runge-Kutta consiste en dar los valores de entrada de las variables independientes y obtener nuevos valores, los cuales están escalonados por un tamaño de paso  $h$ . La rutina requiere que se suministren los valores iniciales de la función y el lado derecho de las ecuaciones (A.1.4) para calcular las  $f_i$  y los valores de las derivadas en el punto inicial.

Este método trata a cada intervalo, en una secuencia de pasos de manera idéntica, es decir, cada paso lo divide siempre en el mismo número de subpasos. El comportamiento previo de una solución no se usa en su propagación. Cualquier punto a lo largo de la trayectoria de una ecuación diferencial ordinaria, puede servir como punto inicial.

Cuando se desea tabular una función en intervalos igualmente espaciados y sin una gran precisión, y además producir la gráfica de la función, todo lo que se necesita es un programa conductor que vaya de un punto inicial  $t_0$  a un punto final  $t_n$  en un número

específico de pasos y los almacene. Para checar la precisión se duplica el número de pasos, se repite la integración y se comparan los resultados. Pero esta aproximación no minimiza el tiempo de cálculo y puede presentar problemas que requieran de un tamaño de paso variable.

Si al método de Runge-Kutta de cuarto orden se le agrega un algoritmo que adapte el tamaño del paso  $h$ , se conseguirá mayor precisión.

#### A.4 ERRORES EN LOS PROCEDIMIENTOS NUMÉRICOS

La aplicación de un procedimiento numérico para resolver un problema con valor inicial

$$y' = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0 \quad , \quad (A.4.1)$$

origina varias preguntas antes de poder aceptar como satisfactoria la solución numérica aproximada. Una de estas preguntas es referente a la convergencia, es decir, a medida que el tamaño de paso  $h$  tiende a cero, los valores de la solución numérica  $y_1, y_2, y_3, \dots$  tienden a los valores correspondientes de la solución exacta? Si la respuesta es afirmativa, qué tan rápido la solución numérica tiende a la solución exacta o analítica? Qué tan pequeño debe ser el tamaño del paso  $h$  a fin de garantizar un nivel de exactitud dado? Se desea usar un tamaño de paso  $h$  lo bastante pequeño como para asegurar la exactitud requerida, pero no demasiado pequeño. Un tamaño de paso innecesariamente pequeño retarda los cálculos, los hace más costosos y en algunos casos puede provocar pérdida de exactitud.

Al resolver numéricamente un problema con valor inicial, existen dos fuentes de error fundamentales. En primer lugar, supongamos que la computadora que se utiliza es capaz de efectuar todos los cálculos con completa exactitud, es decir, es posible retener una infinidad de cifras decimales. La diferencia  $E_n$  entre la solución exacta  $y = \phi(t)$  y la solución aproximada  $y' = f(t, y)$  del problema con valor inicial  $y(t_0) = y_0$  se expresa por:

$$E_n = \phi(t_n) - y_n \quad , \quad (A.4.2)$$

y se conoce como "error global por truncamiento". Este error surge por dos causas:

- 1) en cada paso se aplica una fórmula aproximada para determinar  $y_{n+1}$
- 2) los datos de entrada en cada paso no concuerdan con la solución exacta, ya que en general  $\phi(t_n)$  no es igual a  $y_n$ .

Si se supone que los datos de entrada son correctos, entonces el único error al avanzar un paso se debe al uso de una fórmula aproximada; este error se denomina "error local por truncamiento,  $E_n$ ".

En segundo lugar, debido a las limitaciones de todas las computadoras, en la práctica es imposible calcular de manera exacta  $y_{n+1}$  a partir de la fórmula dada, para ecuaciones que no tienen solución analítica. Por tanto, se tiene un error por redondeo debido a falta de exactitud del cálculo. Por ejemplo, si se utiliza una computadora que sólo puede calcular ocho dígitos y  $y_0$  tiene diez dígitos, entonces será necesario redondear los últimos dos dígitos, con lo que se introduce un error en el cálculo de  $y_1$ .

De manera alternativa, si  $f(t, y)$  comprende funciones como la logarítmica la exponencial, o las trigonométricas, al efectuar estas operaciones se obtiene un error por redondeo. El "Error global por redondeo,  $R_n$ ", se define como:

$$R_n = y_n - Y_n , \quad (A.4.3)$$

donde  $Y_n$  es el error realmente calculado mediante el proceso numérico dado. El valor absoluto del error total al calcular  $\phi(t_n)$  queda dado por:

$$|\phi(t_n) - Y_n| \leq |E_n| + |R_n| . \quad (A.4.4)$$

Por lo tanto, el error total está acotado por la suma de los valores absolutos de los errores por truncamiento y por redondeo. El error por redondeo es de naturaleza más aleatoria; depende del tipo de computadora que se use, del orden en que se efectúen los cálculos, del método de redondeo, etc.

Más importante que el error local por truncamiento es el error global por truncamiento  $E_n$ . Una estimación del error local por truncamiento proporciona cierta comprensión del

procedimiento numérico y un medio para comparar la exactitud de diferentes procedimientos numéricos. El error global por truncamiento puede reducirse haciendo más pequeño el tamaño del paso  $h$ . Pero si se hace  $h$  demasiado pequeño, es decir, que para ir de  $t_0$  a  $t_f$  se usan demasiados pasos, el error global por redondeo puede volverse más importante que el error global por truncamiento. Es necesario considerar las dos fuentes de error y elegir un  $h$  adecuado, de modo que ninguno de los dos errores sea demasiado grande.

Una manera de estimar si el error por truncamiento es suficientemente pequeño es, después de completar los cálculos con un  $h$  dado, repetir los cálculos utilizando un tamaño de paso  $h/2$ . Si los cambios son mayores que lo aceptable, es necesario usar un tamaño de paso más pequeño, un procedimiento numérico más exacto o quizá las dos cosas.

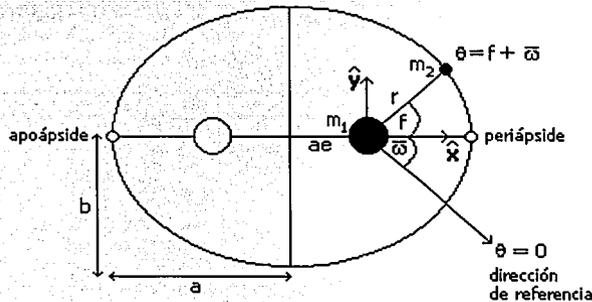
Otra manera es que una vez que se han completado los cálculos usando aritmética de precisión simple, puede estimarse el efecto del error por redondeo al repetir los cálculos con una aritmética de precisión doble. Si los cambios son mayores que lo aceptable, es necesario conservar más dígitos en los cálculos o aplicar un método más exacto.

# APÉNDICE B

## B.1 ELEMENTOS OSCULANTES

Los resultados que generan los dos códigos numéricos utilizados en esta tesis (R-K y B-S), son las posiciones y velocidades cartesianas de la partícula para el PPCRTC. Como las variables que se grafican, se comparan y se analizan son los elementos orbitales osculantes de las órbitas, este apéndice tiene como objetivo presentar las transformaciones de coordenadas cartesianas a elementos osculantes. Las coordenadas cartesianas están medidas desde un sistema con origen en  $m_1$  y ejes fijos  $X, Y, Z$ . Los elementos osculantes de la partícula se calculan instantáneamente ignorando la presencia de  $m_2$  y se presentan a continuación:

- 1) Semieje mayor  $a$
- 2) Excentricidad  $e$
- 3) Argumento del periápside  $\varpi$
- 4) Verdadera anomalía  $f$



**Fig.B.1.** En esta figura se muestra la órbita instantánea de la partícula que se encuentra en el plano orbital. El ángulo  $f$  es la verdadera anomalía y el ángulo  $\varpi$  es el argumento del periápside. El círculo vacío representa el otro foco de la elipse y la cantidad  $ae$  es la distancia focal.

La notación cartesiana no primada corresponde al sistema no rotante con origen en  $m_1$ . En coordenadas cartesianas, la distancia de  $m_1$  a la partícula, el cuadrado de la rapidez y la energía mecánica de la partícula están dadas por las ecuaciones B.1, B.2 y B.3 respectivamente:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (B.1)$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \quad (B.2)$$

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{m_1}{r} = -\frac{m_1}{2a}. \quad (B.3)$$

Como podemos ver, la energía sólo depende del semieje mayor (ver capítulo I, ec. 1.3.10). De esta ecuación podemos despejar el semieje mayor,  $a$ :

$$a = -\frac{m_1}{2E}. \quad (B.4)$$

La magnitud del momento angular,  $\vec{h}$ , (constante de movimiento en el problema de dos cuerpos y en el problema de campo central), en términos de los elementos orbitales está dada por (ver capítulo I, pág. 8):

$$h = \sqrt{am_1(1 - e^2)}, \quad (B.5)$$

de donde despejamos la excentricidad,  $e$

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{am_1}}, \quad (B.6)$$

El vector  $\vec{h}$  sobre el plano orbital sólo tiene componente  $z$  (ver capítulo I, ec. 1.2.6):

$$\vec{h} = (x\dot{y} - y\dot{x})\hat{z}. \quad (B.7)$$

Para calcular  $f$  usamos la ecuación polar de la elipse, ya que ésta es válida en un sistema con origen en  $m_1$ , :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (B.8)$$

Diferenciando (B.8) respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{r} = \frac{he \sin f}{a(1 - e^2)}, \quad (B.9)$$

en ésta última usamos el hecho de que  $h = r^2 \dot{f}$  (donde  $f = \theta - \varpi$  y en esta ecuación  $\varpi = 0$ , por lo tanto  $\dot{f} = \dot{\theta}$ ) y despejando  $\cos f$  y  $\sin f$  de (B.8) y (B.9) respectivamente,

$$\cos f = \frac{1}{e} \left[ \frac{a(1 - e^2)}{r} - 1 \right] \quad (B.10)$$

y

$$\sin f = \frac{a(1 - e^2)}{he} \dot{r}, \quad (B.11)$$

Usando estas dos últimas ecuaciones podemos obtener  $f$  con la siguiente expresión:

$$f = \tan^{-1} \left( \frac{\sin f}{\cos f} \right). \quad (B.12)$$

Ahora podemos calcular  $\varpi + f$ , haciendo  $\theta = \varpi + f$ , obtenemos:

$$\varpi = \tan^{-1} \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) - f, \quad (B.13)$$

Con estas ecuaciones, a partir de las posiciones y velocidades en coordenadas cartesianas obtenidas por los códigos numéricos, podemos calcular los elementos osculantes para la partícula.



# BIBLIOGRAFÍA

- Boyce, W.E., DiPrima, R.C., 1994. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, Cuarta Edición, pp. 429-467, Editorial Limusa.
- Brice, C., Luther, H.A. and Wilkes, J.O., 1996. *Applied Numerical Methods*, pp. 341-343, John Wiley & Sons INC.
- Burden, R.L., and Faires, D.J., 1990. *Análisis Numérico*, Cap. 4-5, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Danby, M. A. J. 1992. *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Willman-Bell, Segunda edición Richmond, VA.
- Espreste, J. 1997. *Torca Lineal Sobre un Anillo Centrado en una Resonancia de Primer Orden*. Tesis Doctoral, UNAM.
- Moulton, F.R., 1953. *Celestial Mechanics*, Octava reimpresión, pp. 277-300, The MacMillan Company, New York.
- Murray, C.D., and Dermott, S.F., 1999. *Solar System Dynamics*, pp. 22-48, Cambridge University Press.
- Press, W.H., Wattering, W.T., Teukolsky, S.A., and Flannery, B.P., 1996. *Numerical Recipes*, pp. 210-220, Cambridge University Press.
- Roy, A.E., Third Edition, Student Text, 1988. *Orbital Motion*, pp. 120-140, J.W. Arrowsmith Ltd, Bristol, Great Britain.