20321
20

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

"ACATLÁN"

"LA PROBABILIDAD EN LA PROGRAMACION MATEMATICA"

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ALAN EVARISTO HERNANDEZ ESTRADA

ASESOR: FIS. MAT. JORGE LUIS SUAREZ MADARIAGA

MEXICO, D.F. OCTUBRE 2003

A

οτε ημην νηπι9, ελαλουν ω9 νηπιο9 , εφρονουν ω9 νηπιο9, ελογιζομην ω9 νηπιο9; οτε γεφονα αβρ, κατηργηκα τα του νηπιο9. βλεπομεν γαρ αρτι δι εσοπτρου εν αινιγματι, τοτε δε προσωπον προ9 προσωπον αρτι γινωσκω εκ μερου9, τοτε δε επιγνωσομαι καθω9 και επεγνωσθην. νυνι δε μενει πιστι9, ελπι9, αγαπη, τα τρια ταυτα μειζων δε τουτων η αγαπη.

"Cuando (yo) era niño pequeño, hablaba como niño, pensaba como niño, razonaba como niño; ahora que me he hecho hombre, he abolido las cosas del niño. Porque veo (aún) ahora mediante espejo en enigma, pero entonces cara a cara; ahora conozco en parte, pero entonces conoceré perfectamente conforme también fui conocido perfectamente. Pero ahora permanecen la fe, la esperanza y el amor; pero el mayor de ellos es el amor."

1ª Corintios 13: 9-13

AGRADECIMIENTOS

*A mi **Dios**, ya que siempre me ha escuchado cuando lo he llamado, me ha ayudado cundo lo he necesitado y siempre ha estado cerca de mi cuando lo he buscado, además de que me ha dado grandes y abundantes bendiciones todos los dias, sin importarle que muchas veces he metido la pata y reconociendo que todo lo que soy se lo debo a Él.*

No escogi un orden especial para los agradecimientos de mi familia, los escogi aleatoriamente. (para que ninguno se sienta)

*A mi **hermano (Flavio)**, quién con su amor y comprensión me ha ayudado tanto... que nunca terminaria de pagarle las cosas que me ha dado y tampoco podria enumerar los momentos bellos que hemos compartido desde nuestra infancia y recordando que para nuestros padres seguimos siendo unos niñitos.*

*A mi **Pa**. Desde que comencé mis estudios (en preescolar) recuerdo que ya soñabas con este momento y siempre te has esforzado para darnos lo mejor, para que podamos seguir adelante, gracias por tu amor, tus desvelos y mal pasadas en el trabajo, ya que me inculcaste el deseo de estudiar y es por eso que puedo terminar un ciclo en mi vida y porque me sigues apoyando en el nuevo ciclo que he comenzado.*

*A mi **Mami**. Pues a ti te provoque preocupación desde que estaba en tu vientre y se que aún sigo haciendo que te preocupes. Gracias por tu compañía y tu amor que siempre me has mostrado, gracias por tus oraciones durante mis exámenes (han sido de gran bendición) y por todas las cosas que sacrificaste por amor a mi hermano y a mi. Yo sé que este también es uno de tus sueños y quiero que sepas este trabajo también es tuyo.*

A la memoria de dos grandes mujeres que influyeron de manera positiva a mi vida: mi abuelita ANA y mi mamá CONCHITA a quienes les hubiera dado mucho gusto leer estas lineas. (yo se que ellas están en los brazos más cálidos en los que podrian estar)

*A dos hombres importantes para mi vida: mi papá **Flavio** (grande) de quien siempre he recibido su apoyo y su amor en todo momento y mi abuelito **Raúl** que me inculcó un camino y una gran herencia que espero seguir compartiendo.*

A mis tios Raúl, René, Tomy, Juan, José, Alejandro, Andrés y mis tias Ruth, Oralia, Yola, Laura, Lupita, Mayra, Lety y Amelia que siempre han sabido darme consejos de los cuales he aprendido muchas cosas.

A mis tios Fausto, Flavio(mi tercer papá), Daniel, Jesús, Enrique y mis tias Fili, Sandra, Fátima, Faby, Verónica y Silvia porque a pesar de la distancia siempre están conmigo y se que puedo confiar en ustedes.

A mis primos Pepe, Chuchin, César, Cocoy, Alex, Fausto, Fabián, Iván, Raúl, Omar, Vico, Flavio, René, Lalo, Miguel, Josué y Jesús porque en mis ratos de diversión puedo contar con ustedes y los que me faltaron se darán por aludidos, porque si escribo los nombres de todos tal vez me alcanzaria para escribir un libro.

A mis primas Sandra, Ana, Wendy, Carol, Paty, Brenda, Cinthia, Ivonne, Jazmin, Fili, Jenny, Alma, Mérida, Belem, Ilusión..... ya que también puedo contar con ustedes y me han ayudado a sonreir en los momentos en los que mas ocupado he estado.

A la Señora Geo, Alma y Mary quienes me brindaron una familia que siempre me apoyó para lograr esta meta, asi como a toda su familia a la cual quiero mucho.

A mi familia restante (es mucha) quiero decirles que este trabajo también es parte de ustedes.

A mis compadres: Fili y Mike ya que somos como aquellos tres(aunque somos cuatro) de Babilonia que prefirieron ser quemados a ceder.

A mis grandes amigos y gran banda: Marcos, Saúl y Daniel ya que compartimos un sueño importante que nos une y nos convierte casi en hermanos.

A mis amigotes Isaac, Cheo, Gerardo, David, Erik, Christian, Erik, Monti, Roy, César, Oscar, Uziel, Ray y todos aquellos con los que comparto una esperanza.....

A mis amigotas Brenda X., Brenda H, Sarai, Noelia, Idalia, Raquel, Linda, Laura, Mayra, Magali, Edith, Elsa, Sarai U, Ale, Keila, Yoli, Keren.......... y las que me faltarón, quiero que sepan que las quiero mucho.

A mis grandes e inseparables amigos Alain, Carole, Margot Cristian, Bere, Horacio, Isac, Oswaldo y Mike (la familia exponencial) ya que compartimos muchas alegrias y preocupaciones(por los exámenes) asi como los momentos de ficha y de convivencia.

A mis no mas ni menos importantes amigos Lupita T, Alfredo, Mahil, Julio, Dario, Carlos, Ricardo, Ricardo P, Iris, Jaz y su amigo, Pamela, Judith, Diana, Gloria, Iliana, Linda, Yadis, Tony, Tere, Marinné, Kika, Nancy, Adriana, Conde, Robert, René, Victor, Paquito, Mayrita...................gracias por su apoyo.

A mi amiguita mas cercana Yssel (creo que ahora si lo escribi bien), ya que tu me das tu amistad como un bonito regalo y porque se que puedo confiar en ti, gracias por estar en los momentos en los que necesitaba comprensión, en las buenas y malas.

A quienes me regalaron su amistad desde el principio Israel, Gaby, Aarón, Angie, Jacobo, Emanuel, Ivette, Denise, Paty, Bruno, Lupita, Gerardo, Julius, Demian....... en fin gracias a todos ustedes porque siempre creyeron en mi.

A todos mis maestros y en especial a quienes se convirtieron en mis amigos Pepe, Madariaga, Valadez, Iván, Tavera, Pablo, Arriaga, Lavin, Pérez Ortiz, Ramón, Andrés...... ya que ellos me dieron mi formación como universitario, gracias.

En especial a todo el grupo de cálculo II al cual tuve el placer de darles clase, espero que muy pronto pueda leer sus trabajos de titulación.

A mis nuevos amigos Luis, Gerardo, Nelson, Juan Pablo, José Luis, Dalia, Mayra y Sofia con quienes se que puedo contar para lo que sea y en especial a Yesenia ya que me ha dado su ayuda en todo momento... a los que me faltaron..... que Dios los bendiga.

Indice

Introducción

Una de las formas de resolver problemas de maximización o minimización de funciones, las cuales se encuentran restringidas por algunas otras funciones, es por medio de la programación lineal o la no-lineal, las cuales están diseñadas para la solución de programas determinísticos. Pero ¿Qué es lo que pasa cuando los coeficientes de las restricciones son variables aleatorias?, ¿Acaso los métodos mencionados antes pueden dar solución a éste tipo de programas?. La respuesta es que no, al menos de una forma directa, ya que es necesario transformar la parte estocástica del programa a resolver a un equivalente determinístico, para lo que se utiliza la teoría de la probabilidad y ahora sí, se puede resolver por medio de los métodos para la solución de los programas que no son estocásticos. Otro de los métodos consiste en esperar a que ocurran algunos de los valores de las variables aleatorias para poder anticipar los valores desconocidos y así darle respuesta al problema deseado.

Los métodos que se exponen en éste trabajo no son todos lo que existen, ya que se sigue haciendo investigación para mejorar los métodos y hacerlos menos complicados, pero son muy representativos de la programación estocástica.

En el capitulo uno se revisaran los conceptos básicos de la teoría probabilística para poder sustentar los procedimientos que se realizarán en el tercer capitulo, además se verificarán como se distribuyen sumas de variables aleatorias las cuales serán de utilidad en el tercer capitulo.

En el segundo capitulo se pondrá interés en conocer lo que es un problema de programación lineal (PPL) y uno no-lineal, además de conocer algunos métodos para resolverlos.

En el último capitulo se resolverán problemas de programación matemática, aplicando los conceptos vistos en los capitulos anteriores como: Programación lineal y no-lineal, maximización por el método de los multiplicadores de Lagrange y la teoría de la distribución.

1. Conceptos Básicos

1.1 Variables Aleatorias.

Una variable aleatoria puede ser definida informalmente como un valor real de una observación, ó una función de observaciones realizadas, para interpretar un experimento en el cual, el valor (en general) puede cambiar de interpretación a interpretación ó por el experimento.

Una definición un poco más formal dice que, una variable aleatoria es un número real valuado en una función con dominio Ω ($X: \Omega \rightarrow \Re$), donde ($\Omega$, $\mathcal{A}$, P) es un espacio de probabilidad.

Definición 1. Variable Aleatoria: Para un espacio de probabilidad (Ω , $\mathcal{A}$ P), una "variable aleatoria", denotada por X ó X(.), es una función con dominio Ω y la recta real como contradominio. La función X(.) debe ser tal que al conjunto A_r, definido de la siguiente forma $A_r = \{w: X(w) \leq r\}$ pertenece a $\mathcal{A}$ para cualquier número real r.

Si pensamos en un experimento aleatorio, Ω es el total de resultados del experimento aleatorio, y la función, ó variable aleatoria, X(.) con dominio Ω convierte cada resultado del experimento en su correspondiente número real. Esto es la parte importante de nuestra definición. El hecho de que requerimos una colección de w's para las cuales $X(w) \leq r$ para ser un evento (i.e. un elemento de $\mathcal{A}$) para cada número r no es una restricción muy fuerte para nuestro propósito debido a que nuestra intención es usar la noción de variable aleatoria para describir eventos.

Ejemplo 1:
Consideremos el experimento de lanzar una moneda. Sea X la variable aleatoria que denota el número de caras. $\Omega = \{cara, cruz\}$, y $X(w) = 1$ si w = cara, y $X(w) = 0$ si w = cruz; esto es, la variable aleatoria X asocia un número real a cada resultado del experimento. Nosotros llamamos a X variable aleatoria y matemáticamente podemos demostrar que satisface la definición 1: Podemos demostrar que $\{w: X(w) \leq r\}$ pertenece a $\mathcal{A}$ para cada número real r. $\mathcal{A}$ está compuesto de cuatro eventos: $\emptyset$, {cara}, {cruz}, Ω. Ahora, si $r \leq 0$, entonces $\{w: X(w) \leq r\} = \emptyset$, y si $0 \leq r < 1$, $\{w: X(w) \leq r\} = \{cara\}$, y si $r \geq 1$, $\{w: X(w) \leq r\} = \Omega$. Adamás, para cada r el conjunto $\{w: X(w) \leq r\}$ pertenece a $\mathcal{A}$. Entonces X es una variable aleatoria.

Definición 2. Función de distribución acumulativa. La función acumulativa de distribución de una variable aleatoria X, denotada como $F_X(.)$, se define como una función real y contradominio en el intervalo [0, 1], y satisface $F(x) = P[\{w: X(w) \leq x\}]$ para cualquier número real x.

Para cada variable aleatoria se puede construir una función de distribución acumulativa, si ésta es conocida, podemos usarla para encontrar probabilidades de eventos definidos por su variable aleatoria correspondiente. (se puede ver que en ésta definición usamos el hecho de que $\{w: X(w) \leq x\}$ pertenece a $\mathcal{A}$ para todo número real r, lo cual aparece en nuestra definición de variable aleatoria) Nótese que para diferentes variables aleatorias podemos tener *la misma función de distribución acumulativa.*
Como una convención, en adelante, a la función de distribución acumulativa, la llamaremos sólo función de distribución.

Ejemplo 2:

Consideremos, de nuevo, el experimento de lanzar una moneda que no está cargada (legal). Sea X la variable aleatoria que denota el número de caras que salen. Entonces:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

ó $F_x(x) = 1/2\ I_{[0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}$ en notación de funciones indicadoras. (ver el apéndice I)

Teorema 1. Sea X una variable aleatoria, y sea F la función de distribución de X. Entonces

(i) F es no-decreciente sobre $\Re$;
(ii) F es contínua por la derecha;
(iii) $F(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$ y $F(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$.

Demostración:

(i) Sean a y b números reales tales que a < b. Entonces

$$F(b) - F(a) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = P(a < X \leq b) \geq 0.$$

Por lo que F es no-decreciente en $\Re$.

(ii) En vista de lo que se ha establecido, basta con demostrar que

$$F\left(a + \frac{1}{n}\right) \to F(a) \text{ cuando } n \to \infty$$

Para todo número real a. Ahora

$$F\left(a+\frac{1}{n}\right)-F(a)=P\left(a<X\leq a+\frac{1}{n}\right)=P\,(A_n),$$

donde

$$A_n=\left\{a<X\leq a+\frac{1}{n}\right\}\quad(\in \mathcal{F})\quad(n=1,2,\ldots).$$

como

$$A_1\supseteq A_2\supseteq\ldots \text{ y } \quad \bigcap_1^{\infty} A_n=\varnothing,$$

Y se sigue que

$$P(A_n)\rightarrow P(\varnothing)=0 \qquad \text{cuando } n\rightarrow\infty.$$

Con esto se concluye la demostración para (ii).

(iii) Necesitamos verificar que $F(-n)\rightarrow 0$ y $F(n)\rightarrow 1$ cuando $n\rightarrow\infty$. Sea

$$B_n=\{X\leq n\}\quad(n=0,\ \pm1,\pm2,\ldots).$$

Entonces $B_{-1}\supseteq B_{-2}\supseteq\ldots$ y $\bigcap_1^{\infty} B_{-n}=\varnothing$, y como

$$F(-n)=P(B_{-n})\rightarrow P(\varnothing)=0 \text{ cuando } n\rightarrow\infty.$$

Además

$$B_1\subseteq B_2\subseteq\ldots \qquad \text{y } \bigcup_1^{\infty} B_n=\Omega \qquad \text{y}$$

$$F(n)=P(B_n)\rightarrow P(\Omega)=1 \text{ cuando } n\rightarrow\infty.$$

lo cual completa la demostración. □

Para el ejemplo 2,se pueden verificar fácilmente las condiciones del teorema anterior.

1.2 Función de Densidad.

La función de distribución acumulativa describe la distribución de los valores de la variable aleatoria. Para dos clases distintas de variables aleatorias, la distribución de los valores puede ser descrita con mayor facilidad usando la "función de densidad".

Definición 3. Variables aleatorias discretas. Una variable aleatoria X se define como discreta si el rango de X es contable. Si una variable aleatoria es discreta, entonces su función de distribución correspondiente $F_X(.)$ se definirá como función de distribución discreta.

Definición 4. Función de densidad de probabilidad una variable aleatoria discreta. Si X es una variable aleatoria discreta con valores distintos $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$, entonces la función, denotada por $f_X(.)$ y definida como:

$$f_X(x) = \begin{cases} P[X = x_j], & x = x_j, \ j = 1,2,\ldots,n,\ldots \\ 0, & \text{si} \quad x \neq x_j \end{cases}$$

es definida como la función de densidad discreta de X.

Los valores de una variable aleatoria discreta son llamados puntos masa; y $f_X(x_j)$ denota la masa asociada al punto masa x_j. Podemos usar la siguiente notación de funciones indicadoras:

$$f_X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P[X = x_n] I_{(x_n)}(x)$$

de donde $I_{(x_n)}(x) = 1$ si $x = x_n$ e $I_{(x_n)}(x) = 0$ si $x \neq x_n$

Teorema 2. Sea X una variable aleatoria discreta. F(x) puede obtenerse a partir de f(x) y viceversa.

Demostración:

Denotemos los puntos masa de X por $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ Supongamos que $f_X(\cdot)$ está dada y entonces $F(x) = \sum_{\{j: x_j \leq x\}} f(x_j)$, entonces $f(x_j) = F(x_j) - \lim_{0<h\to 0} F(x_j - h)$; donde $f(x_j)$ puede encontrarse para cada punto masa x_j; de cualquier forma, $f(x_j) = 0$, para $x \neq x_j$, $j = 1,2,\cdots$ y $f(x)$ está determinada para todos los números reales.

□

Ejemplo 3:

Consideremos el experimento de lanzar dos dados. Sea X la variable aleatoria que denota la suma de los valores de los dos dados, por lo que los puntos masa son: 2,3, . . . , 12. $f_X(\cdot)$ tiene la siguiente forma

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Acorde con el teorema anterior, como tenemos $f_X(\cdot)$, entonces podemos encontrar $F(\cdot)$, para cualquier valor de X; por ejemplo, si x = 3.5

$$F(X \leq 3.5) = F(3.5) = \sum_{\{j: x_j \leq 3.5\}} f(x_j) = f(2) + f(3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$$

y si $F(\cdot)$ está dada, podemos encontrar $f_X(\cdot)$ para cualquier x. Por ejemplo para $x = 5$

$$f(5) = F(5) - \lim_{0<h\to 0} F(5-h) = \frac{10}{36} - \frac{6}{36} = \frac{4}{36}$$

Definición 5. Función de densidad discreta. Una función f(.) con la recta real como dominio y el intervalo [0, 1] como contradominio, es definida como "función de densidad discreta" y para algún conjunto contable $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots,$

(i) $f(x_j) > 0$ para j = 1, 2,. . .
(ii) $f(x) = x \neq x_j$; j = 1, 2, . . .
(iii) $\sum f(x_j) = 1$, donde la suma es sobre los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Definición 6. Variables aleatorias continuas. Una variable aleatoria X se llama "continua" si existe una función $f_X(\cdot)$ tal que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ para todo número real x.

Definición 7. Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua. Si X es una variable aleatoria continua, la función $f_X(\cdot)$ en $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ se conoce como la "función de densidad de probabilidad" de X.

Teorema 3. Sea X una variable aleatoria continua. Entonces $F(\cdot)$ se puede obtener a partir de $f_X(\cdot)$ y viceversa.

Demostración:

Si X es variable aleatoria continua y $f_X(\cdot)$ está dada, entonces $F(\cdot)$ se obtiene por integración , esto es $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$. Por otra parte, si $F(\cdot)$ está dada, entonces $f_X(\cdot)$ se obtiene por medio de diferenciación: $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$ en los puntos en los que $F(\cdot)$ es diferenciable.

$\square$

Como una convención ,en lo subsecuente nos referiremos a la función de densidad de una variable aleatoria sin importarnos si es variable aleatoria discreta ó continua.

Ejemplo 4:

Sea X la variable aleatoria que denota el tiempo que una persona tarda en contestar una encuesta. Podemos modelar el experimento anterior asumiendo que la distribución de éste es: $F(x)=\left(1-e^{-\lambda x}\right)I_{[0,\infty)}(x)$, donde λ es un número positivo. Por el teorema anterior se puede ver claramente que la función de densidad del fenómeno está dada por $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}I_{[0,\infty)}(x)$. Si asumimos que el tiempo que tarda una persona en contestar la encuesta se mide en minutos, $P[5<x\leq 10]=\int_{5}^{10}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-5\lambda}-e^{-10\lambda}\approx .23$ *para* $\lambda=\frac{1}{5}$.

Definición 8. Función de densidad de probabilidad. Una función $F(\cdot)$ con dominio en la recta *real* y *contradominio* en el *intervalo* $[0,\infty)$ *se dice que es función de densidad de* probabilidad si y sólo si:

(i) $f(x)\geq 0$ para todo x

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

Ahora tomaremos en cuenta sólo algunos de los resultados de las funciones de probabilidad multivariadas, ya que serán de gran utilidad un poco más adelante en el desarrollo del trabajo. Sólo trabajaremos en el caso bivariado, aunque éstos conceptos se pueden generalizar a más de dos variables aleatorias.

Definición 9. Función de distribución conjunta. Sean X_1, X_2 variables aleatorias definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega\ ,\mathcal{A},\ P)$. La "función de distribución conjunta" de X_1, X_2 denotada por $F_{X_1,X_2}(\cdot,\cdot)$, se define como $P[X_1 < x_1, X_2 < x_2]$ para todo x_1, x_2. Y cumple con las siguientes propiedades:

(i) $F(-\infty, y) = \lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$ para todo y, $F(-\infty, x) = \lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$, para todo x, y $F(-\infty,\infty) = \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x,y) = 1$.

(ii)si
$x_1 < x_2, y_1 < y_2 \Rightarrow P[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] = F(x_2, y_2) - F(x_2 y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$

(iii) $F(x,y)$ es continua por la derecha, esto es $\lim_{h \to 0} F(x+h, y) = \lim_{h \to 0} F(x, y+h) = F(x,y)$.

Definición 10. Función de densidad conjunta. Si $X = (X_1, X_2)$, es un vector aleatorio, entonces la "*función de densidad conjunta* " de X, denotada como $f_{X_1,X_2}(\cdot,\cdot)$ se define como:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2]$$

para (x_1, x_2) un valor de (X_1, X_2) y cero en otro caso, y además:

$$\sum f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1$$

donde la suma toma los valores posibles de (X_1, X_2), si X es vector aleatorio discreto y

Si existe una función $f_{X_1,X_2}(\cdot,\cdot)$, tal que $f_{X_1,X_2}(\cdot,\cdot) \geq 0$ y

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,X_2}(u_1,u_2)du_1du_2$$

para todo (x_1, x_2). $f_{X_1,X_2}(\cdot,\cdot)$ se define como función de densidad conjunta de una variable aleatoria continua.

Teorema 4. Sean X y Y son variables aleatorias conjuntas , entonces si conocemos $F_{X,Y}(\cdot,\cdot)$ podemos conocer $f_{X_1,X_2}(\cdot,\cdot)$ y viceversa.

Demostración:

Similar a la hecha para una sola variable.

Definición 11. Función marginal de densidad. Sean X y Y variables aleatorias conjuntas, entonces $f_X(\cdot), f_Y(\cdot)$ se llaman "funciones marginales de densidad, y se obtienen como sigue:

$$f_X(x_k) = \sum_j f_{X,Y}(x_k, y_j) \quad \text{y} \quad f_Y(y_k) = \sum_j f_{X,Y}(x_j, y_k)$$

para X y Y variables aleatorias discretas, y cuando son continuas, las distribuciones marginales se obtienen como:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \quad \text{y} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx\,.$$

Definición12. Independencia. Sea X un vector aleatorio bi-dimensional con función de densidad conjunta $f_{X_1,X_2}(\cdot,\cdot)$. X_1 y X_2 son independientes si y sólo si:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \prod_{i=1}^{2} f_{X_i}(x_i).$$

1.3 Esperanza Matemática

Definición 13. Esperanza. Sea X una variable aleatoria, la "esperanza" de X, denotada como $E[X]$ ó μ_x, se define como:

$$E[X] = \sum x_j f(x_j)$$

si X es discreta con los puntos masa $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ó

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

si X es continua.

Ejemplo 5:

Consideremos el experimento de lanzar dos dados. Sea X la variable aleatoria que denota la suma de los dos, entonces el valor esperado de x es:

$$E(X) = \sum_{i=2}^{12} i f(i) = 7$$

Ejemplo 6:

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x)$, entonces el valor esperado de X es:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Definición 14. Varianza. Sea X una variable aleatoria con $E(X)$ conocida. La "varianza" de X, denotada por σ_x^2 ó $\operatorname{var}[x]$, se define como sigue:

$$\operatorname{var}[x] = \sum_j (x_j - \mu_x)^2 f(x_j)$$

si X es variable aleatoria discreta, y

$$\operatorname{var}[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

si X es variable aleatoria continua.

Definición 15. Desviación estándar. Si X es variable aleatoria, la "desviación estándar" de X, denotada por σ_x, se define como $+\sqrt{\operatorname{var}[x]}$.

Ejemplo 7:

Sea X el mismo experimento del ejemplo 5 y calculemos la varianza de X.

$$\operatorname{var}[X] = \sum_j (x_j - \mu_x)^2 f(x_j) = (2-7)^2 \frac{1}{36} + (3-7)^2 \frac{2}{36} + (4-7)^2 \frac{3}{36} + (5-7)^2 \frac{4}{36} + (6-7)^2 \frac{5}{36}$$
$$+ (7-7)^2 \frac{6}{36} + (8-7)^2 \frac{5}{36} + (9-7)^2 \frac{4}{36} + (10-7)^2 \frac{3}{36} + (11-7)^2 \frac{2}{36} + (12-7)^2 \frac{1}{36} = \frac{210}{36}$$

y la desviación estándar es:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{210}{36}} = 2.4152$$

Ejemplo 8:

Sea X la variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x)$; entonces la varianza de X es:

$$\mathrm{var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)dx = \int_0^{\infty}\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

y su desviación estándar es:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

Definición 16. Esperanza de una función de una variable aleatoria. Sea X una variable aleatoria y $g(\cdot)$ una función con dominio en la recta real. La esperanza de la función $g(\cdot)$ de la variable aleatoria X, denotada como $E[g(X)]$ se define como:

$$E[g(X)] = \sum_j g(x_j)f(x_j)$$

si X es variable aleatoria discreta, y

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

si X es variable aleatoria continua.

Teorema 5. Propiedades del valor esperado.

(i) $E(c) = c$, para un valor constante c
(ii) $E[cg(X)] = cE[g(X)]$, para una constante c
(iii) $E[c_1g_1(X) + c_2g_2(X)] = c_1E(g_1(X)) + c_2E[g_2(X)]$ para las constantes $c_1, c_2 \in \Re$
(iv) $E[g_1(X)] \le E[g_2(X)]$ si $g_1(X) \le g_2(X)$ para todo x

Demostración:

Supongamos que X es continua.

(i) sea $g(x) = c$, entonces

$$E[g(X)] = E[c] = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c.$$

(ii) $E[cg(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} cg(x)f(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = cE[g(X)]$.

(iii)

$E[c_1g_1(X)+c_2g_2(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} c_1g_1(x)f(x)dx + c_2g_2(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} c_1g_1(x)f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} c_2g_2(x)f(x)dx =$
$c_1E[g_1(X)] + c_2E[g_2(X)]$

(iv) $0 \le E[g_2(X) - g_1(X)] = E[g_2(X)] - E[g_1(X)]$

□

1.4 Función Generadora de Momentos

Los "momentos" de una variable aleatoria ó de una distribución son las esperanzas de las potencias de la variable aleatoria de la cual tenemos su distribución.

Definición 17. Momentos. Si X es variable aleatoria, el r-ésimo momento de X, denotado como μ'_r, se define como:

$$\mu'_r = E(X^r)$$

si la esperanza existe.

Definición 18. Momentos centrales. Si X es variable aleatoria, el r-ésimo momento central de X con respecto a a se define como $E[(X-a)^r]$. Si $a = \mu_X$, tenemos el r.ésimo momento central de X con respecto de su media, denotado por μ_r

$$\mu_r = E[(X-\mu_X)^r]$$

Definición 19. Función generadora de momentos. Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(\cdot)$. El valor esperado de e^{tx} se define como la "función generadora de momentos" de X, si es que el valor esperado de ésta existe para cada t en el intervalo $-h < t < h; h > 0$. Se denota por $m_X(t)$ ó $m(t)$ Entonces:

$$m(t) = E[e^{tX}] = \sum_x e^{tx} f(x), \text{ si X es discreta, y}$$

$$m(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx, \text{ si X es continua.}$$

Si la función generadora de momentos existe y si $m(t)$ es continuamente diferenciable en una vecindad del origen, entonces podemos diferenciar a la función r-veces con respecto de t y tenemos:

$$\frac{d^r}{dt^r}m(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x^r e^{tx}f(x)dx,$$

y si $t\to 0$, entonces

$$\frac{d^r}{dt^r}m(0)=E\left[X^r\right]$$

Ejemplo 9:

Encontrar la función generadora de momentos para la distribución Normal $\left(\mu,\sigma^2\right)$.Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right],\sigma>0.$$

Consideremos la función generadora de momentos siguiente:

$$m_{X-\mu}(t)=E\left[e^{t(X-\mu)}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[t(x-\mu)\exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu)^2-2\sigma^2t(x-\mu)\right]\right\}dx$$

Si completamos el cuadrado en el interior del paréntesis rectangular, se tiene:

$$(x-\mu)^2-2\sigma^2t(x-\mu)=(x-\mu)^2-2\sigma^2t(x-\mu)+\sigma^4t^2-\sigma^4t^2=\left(x-\mu-\sigma^2t\right)^2-\sigma^4t^2$$

Entonces:

$$m_{X-\mu}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\sigma^2t^2/2\right)\exp\left\{-\left[x-\left(\mu+\sigma^2t\right)\right]^2/2\sigma^2\right\}dx$$

$$=\exp\left(\sigma^2t^2/2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left[x-\left(\mu+\sigma^2t\right)\right]^2/2\sigma^2\right\}dx=\exp\left(\sigma^2t^2/2\right)$$

como:

$$m_{X-\mu}(t) = E\left[e^{t(X-\mu)}\right] = \exp(-\mu t)E[\exp(tX)] = \exp(-\mu t)m_X(t)$$

tenemos que:

$$\exp(-\mu t)m_X(t) = \exp\left(\sigma^2 t^2/2\right)$$

lo que significa que:

$$m_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

1.5 Ejemplos de Teoría de la Distribución.

Para los requerimientos de éste trabajo, basta con sólo ver una de las técnicas para encontrar la distribución de una función de variables aleatorias. La técnica que se verá en esta sección es la de la función generadora de momentos, la cual recibe ese nombre porque está basada en dicha función y será de gran utilidad en el capítulo tres.

Ejemplo 10:

Supongamos que X tiene distribución Normal con media 0 y varianza 1 (estándar). Sea $Y = X^2$, y queremos encontrar la distribución de Y.

$$\begin{aligned} m_Y(t) = E\left[e^{tY}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(1-2t)^{1/2}}{(1-2t)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)}dx \\ &= (1-2t)^{1/2}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t}\right)^{1/2} \qquad \text{para } t<1/2 \end{aligned}$$

Podemos ver que éste resultado corresponde a una función de distribución Gamma con parámetros $r = \frac{1}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$ ó lo que es lo mismo, una ji-cuadrada con un grado de libertad.

Teorema 6. Distribución de sumas de variables aleatorias independientes.

Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes y la función generadora de momentos asociada a cada variable aleatoria. Sea $Y = \sum_{i=1}^{2} X_i$, entonces:

$$m_Y(t) = E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{2} X_i t\right)\right] = \prod_{i=1}^{2} m_{X_i}(t)$$

Demostración:

$$m_Y(t) = E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{2} X_i t\right)\right] = E\left[\prod_{i=1}^{2} \exp(x_i t)\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{2} E[\exp(x_i t)] = \prod_{i=1}^{2} m_{x_i}(t)$$

$\square$

Ejemplo 11:

Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes y:

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2);$$

entonces

$$a_i X_i \sim N(a_i \mu_i, a_i^2 \sigma_i^2)$$

y

$$m_{a_i X_i}(t) = \exp\left(a_i \mu_i t + \frac{1}{2} a_i^2 \sigma_i^2 t^2\right)$$

además

$$m_{\sum_{i=1}^{2} a_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^{2} m_{a_i X_i}(t) = \exp\left[\left(\sum_{i=1}^{2} a_i \mu_i t\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i^2 \sigma_i^2\right) t^2\right]$$

por lo que podemos ver que ésta es la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal

$$\sum_{i=1}^{2} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{2} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{1} a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

2. Programación Lineal y no-Lineal

2.1 Definiciones

Definición 2.1 PPL. Un problema de programación lineal (PPL) es una estructura de la siguiente forma: (s.a. es sujeto a , Min y Max significan minimizar y maximizar respectivamente)

$$\begin{cases} \text{Min} \quad c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \text{ (la función objetivo)} \\ \text{s.a.} \quad a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{1n+1}x_{n+1} = b_1 \\ \quad \ldots \\ \quad a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{mn+1}x_{n+m} = b_m \\ \quad x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

Éste problema es equivalente a maximizar:

$$-c_1x_1 - \ldots - c_nx_n$$

Sujeto a las mismas restricciones.

Desde un punto de vista práctico, podemos distinguir los siguientes casos:

(1) $a_{1n+1} = \ldots = a_{mn+1} = 1$.

Este caso se obtiene cuando las restricciones son formuladas como : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ ($i = 1, \ldots, m$), y las "variables de holgura" $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ son introducidas para transformar las restricciones de desigualdad en restricciones de igualdad.

(2) $a_{1n+1} = \ldots = a_{mn+1} = -1$.

Cuando las restricciones son de la forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ ($i = 1, \ldots, m$), entonces se introducen las mismas variables de holgura del caso 1.

(3) $a_{1n+1} = \ldots = a_{mn+1} = 0$.

Las restricciones aparecen en forma de igualdad en las variables $x_1, \ldots, x_n$.
Cuando no todas las restricciones son de la misma categoría, entonces se realiza una combinación de los tres casos.

Definición 2.2. Consideremos el caso 1, donde, además, $b_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, la forma estándar.
Podemos escribir éste problema en forma de "tabla restringida" como sigue:

	x_1	$\ldots$	x_{j_0}	$\ldots$	x_n	
x_{n+1}	a_{11}	$\ldots$	a_{1j_0}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$.$
x_{n+i_0}	$a_{i_0 1}$	$\ldots$	$a_{i_0 j_0}$	$\ldots$	$a_{i_0 n}$	b_{i_0}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$.$
x_{n+m}	a_{m1}	$\ldots$	a_{mj_0}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
	$-c_1$	$\ldots$	$-c_{j_0}$	$\ldots$	$-c_n$	0

En ésta tabla las variables que están etiquetadas en la parte superior, se denominan "variables no-básicas" y las que se localizan en la parte izquierda se denominan "variables básicas". La última columna contiene los valores de las variables básicas, i. e. $x_{n+i} = b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Los valores de las variables no-básicas son cero.

En cada tabla las variables básicas son siempre tales que, poniendo las otras igual a *cero*, el sistema de restricciones puede ser resuelto para éste. Decimos que el conjunto de variables básicas forma una "base" (ésta base no es en el mismo sentido que la que se usa en álgebra lineal). Existen muchas variables básicas en las restricciones, y el conjunto de los valores de todas las variables se llama "solución básica".

Ejemplo 2.1:

Como un ejemplo en el cual no hay variables no-negativas en las restricciones, pero éstas variables no forman una base, es el siguiente con $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, donde se satisfacen las restricciones

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

Como sea, si ponemos x_3 y x_4 igual a cero, obtenemos un sistema con una matriz singular de coeficientes

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $c_1 \geq 0, \ldots, c_n \geq 0$, entonces la tabla anterior es óptima. El valor más pequeño posible de $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ es cero, lo que significaría que $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Si eso no sucede entonces procedemos a realizar la transformación de la tabla por medio de una secuencia de operaciones, hasta que todos los elementos de la última fila sean no-positivos y los de la última columna sean no-negativos, aparte del valor de la esquina superior derecha que puede ser positivo, negativo ó cero. El último valor es eventualmente, el mejor valor de la función objetivo que puede ser obtenido, tomando todas las restricciones en cuenta.

2.2 Algorítmo SIMPLEX

El algoritmo conocido como el Simplex funciona de la siguiente forma:

Sea $-c_{j0}$ positivo. Considerar para todos los a_{ij} positivos los cocientes b_i / a_{ij}, y tomar el más pequeño. Si esto pasa para i_0, entonces a $a_{i_0 j_0}$ lo llamaremos "pivote" (marcado por un asterisco), y colocar la tabla original en la forma siguiente:

$$
\begin{array}{lccccc}
 & x_1 & \cdots & x_{j_0} & \cdots & x_n \\
x_{n+1} & & \cdots & -a_{1j_0}/p & \cdots & \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
x_{n+i_0} & & \cdots & 1/p & \cdots & a_{i_0 n}/p \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
x_{n+m} & & \cdots & -a_{mj_0}/p & \cdots & \\
 & & \cdots & c_{j_0}/p & \cdots &
\end{array}
$$

donde $p = a_{ij}$

los lugares que quedaron en blanco se llenan de la manera siguiente: a_{ij} es reemplazado por $a_{ij} - a_{i_0 j} a_{ij_0}$, y similarmente c_j por $c_j - c_{i_0 j} c_{j_0} / p$

Veamos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.2:

$$
\begin{cases}
\text{Min} \quad 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 \\
\text{s.a.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\
\quad -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 2 \\
\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{cases}
$$

La primera tabla es

	x_1	x_2	x_3	
x_4	1	2	1	1
x_5	-4	-2	3*	2
	-2	-7	2	0

La tabla siguiente queda de la forma siguiente:

	x_1	x_2	X_5	
x_4	7/3 *	8/3	-1/3	1/3
X_3	-4/3	-2/3	1/3	2/3
	2/3	-17/3	-2/3	-4/3

Como todavía hay valores positivos en el último renglón, repetimos el procedimiento anterior y obtenemos:

	X_4	x_2	X_5	
X_1	3/7	8/7	-1/7	1/7
X_3	4/7	6/7	1/7	6/7
	-2/7	-45/7	-4/7	-10/7

Lo que la tabla nos dice, es que el valor más pequeño que puede tomar la función objetivo es $-10/7$, y los valores de las variables es $x_1 = 1/7$, $x_3 = 6/7$ y $x_2 = x_4 = x_5 = 0$.

Si deseamos maximizar la función objetivo, debemos usar el mismo procedimiento, excepto que ahora debemos obtener valores no-negativos en el último renglón. Esto es:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Max} \quad 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 \\ \text{s.a.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1 \\ \qquad -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 2 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{array}\right.$$

Procedemos como sigue (x_4 y x_5 ahora son variables de holgura):

	x_1	x_2	x_3	
x_4	1	2*	1	1
x_5	-4	-2	3	2
	-2	-7	2	0

Y al final obtenemos la tabla

	x_1	X_4	x_3	
X_2	½	½	½	½
x_5	-3	1	4	3
	3/2	7/2	11/2	7/2

El valor más grande posible que puede tomar la función objetivo es 7/2, que se obtiene cuando $x_1 = x_3 = 0$ y $x_2 = ½$.

Una característica de todas las tablas es usada en muchas circunstancias con los valores de cada variable. Si colocamos dichos números arriba de cada variable (con el valor que tienen en la función objetivo), la tabla queda como sigue:

		(2)	(0)	(-2)	
		x_1	X_4	x_3	
(7)	X_2	½	½	½	½
(0)	x_5	-3	1	4	3
		3/2	7/2	11/2	7/2

Multiplicando cada valor de la columna de la izquierda con los valores correspondientes del renglón en la columna de la tabla sumándo y restando el valor correspondiente de la columna en la parte superior:

$$7(1/2) + 0(-3) - 2 = 3/2, \; 7(1/2) + 0(1) - 0 = 7/2$$

$$7(1/2) + 0(4) - (-2) = 11/2, \; 7(1/2) + 0(3) = 7/2$$

Ésta relación funciona para todas las tablas. Podemos decir que verificamos la regla. Algunas veces es conveniente verificar los cálculos rápidamente, para ver si es que se cometió algún error aritmético y de ser asi corregirlo.

Regresemos al caso (2). En este caso podemos asumir que cada c_j ($j = 1, \ldots, n$) son no-negativas, esto es que los valores de la primera tabla, en la parte superior son ahora no-positivos, y como queremos llegar a la tabla final para resolverlo (si queremos minimizar), podemos llamarla como una tabla "dual-factible". Si todos los b_i son no-negativos, entonces habremos terminado. En otro caso, aplicaremos el "Método Dual Simplex".

2.3 Algorítmo DUAL-SIMPLEX

El algoritmo funciona de la forma siguiente.

Sea b_{i0} uno de los valores negativos. Consideramos, para todo $a_{i_0 j} < 0, \left|c_j / a_{i_0 j}\right|$, y tomar el más pequeño. Si esto sucede para j_0 , entonces $a_{i_0 j_0}$ será el pivote, y podemos transformar la tabla, usando las mismas reglas del caso.

Ejemplo 2.3:

$$\begin{cases} \text{Max} \quad x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ \quad 2x_1 - 2x_2 \geq 7 \\ \quad x_1 + 3x_2 \geq -2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Introducimos variables de holgura, pero ahora con signo negativo, y multiplicamos cada ecuación por -1 por ambos lados. La tabla es la siguiente:

	X_1	X_2	
X_3	-1	2	-2
X_4	-2 *	2	-7
X_5	-1	-3	2
	-1	-2	0

Y la tabla óptima es :

	X_4	X_2	
X_3	-1/2	3	3/2
X_1	1	-1	7/2
X_5	-1/2	-4	11/2
	-1/2	-3	7/2

Podemos obtener el caso 1 del caso 2, y el caso 2 del caso 1, multiplicando ambos lados por -1. Podemos usar éste procedimiento para convertir el programa en la forma estándar

Si el programa no está en la forma estándar y no se puede transformar a ésta, tendremos que proceder como sigue:

Primero, multiplicamos ambos lados por -1, en donde b_i sea negativo. Lo que hace que los coeficientes de x_{n+i} (i = 1, . . . , m) sean 1, 0 ó -1.

En los otros dos casos adicionamos variables "artificiales" a_i en el lado izquierdo del programa y adicionar Ma_i a la función objetivo para minimizar (ó restar Ma_i a la función objetivo para maximizar); M es considerado como un valor grande comparado con los cálculos que se hacen en el programa. El siguiente ejemplo muestra el procedimiento:

Ejemplo2.4:

$$\begin{cases} \text{Min} \quad x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \quad 3x_1 - x_2 - x_4 = 2 \\ \quad x_1 - 3x_2 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

La tabla queda como:

	x_1	x_2	x_4	
x_3	1	2	0	4
a_1	3 *	-1	-1	1
a_2	1	3	0	4
	-1	1	0	0
(M)	4	2	-1	5

El último renglón viene de usar las variables artificiales, y en la entrada del renglón se multiplica por M. La suma de los últimos renglones, es el renglón que tiene la función objetivo $x_1 - x_2 + M(a_1 + a_2)$. Las tablas sucesivas son como sigue:

	a_1	x_2	x_4	
x_3		7/3	1/3	11/3
x_1		-1/3	-1/3	1/3
a_2		10/3 •	1/3	11/3
		2/3	-1/3	1/3
(M)		10/3	1/3	11/3

La columna a_1 no es de interés y se omite y la tabla final es la siguiente:

	X_4	
X_3	1/10	11/10
X_1	-3/10	7/10
X_2	1/10	11/10
	-4/5	-2/5

En éste caso no es posible igualar a cero las variables artificiales, esto es una indicación de que las restricciones originales eran contradictorias. Esto es posible, aunque, una variable artificial puede quedar al final de la base, con valor de cero.

2.4 Programación no-lineal (Método de los multiplicadores de Lagrange).

La formulación general de un problema con restricciones de desigualdad es:

$$
(\mathrm{P}) \begin{cases} \text{Opt} & f(x_1,\dots,x_n) \\ & \text{s.a.} \\ & g_1(x_1,\dots,x_n) \le 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1,\dots,x_n) \le 0 \\ & h_1(x_1,\dots,x_n) \ge 0 \\ & \vdots \\ & h_k(x_1,\dots,x_n) \ge 0 \end{cases}
$$

donde las funciones $f, g_i, i = 1,\dots,m$ y $h_j, j = 1,\dots,k$, están definidas de $\Re^n \to \Re$. El análisis del problema general (P) se puede reducir al estudio de

$$
(\text{P}')\quad\begin{cases}
\text{Min } f(x_1,\ldots,x_n) \\
s.a \\
l_1(x_1,\ldots,x_n) \le 0 \\
\vdots \\
l_{m+k}(x_1,\ldots,x_n) \le 0
\end{cases}
$$

con $f:\Re^n \to \Re$ y $l_i:\Re^n \to \Re, i=1,\ldots,m+k$, ya que el problema de $\max f(x_1,\ldots,x_n)$ es equivalente a $\min[-f(x_1,\ldots,x_n)]$ y las restricciones $h_j(x_1,\ldots,x_n) \ge 0, j=1,\ldots,k$ se pueden expresar como $[-h_j(x_1,\ldots,x_k)] \le 0$.

Definición 2.3. Dada una solución factible $\bar{x}^*$ del problema (*P*), se dice que $\bar{x}^*$ satura la restricción i-ésima $g_i(\bar{x}) \le 0$ si $g_i(\bar{x}) = 0$. Análogamente se dirá que $\bar{x}^*$ no satura la restricción i-ésima si $g_i(\bar{x}) < 0$.

Teorema 2.1 Condiciones de Kuhn-Tucker.

Sea el programa

$$
(1)\quad\begin{cases}
\text{Min } f(x_1,\ldots,x_n) \\
\text{s.a.} \\
g_1(x_1,\ldots,x_n) \le 0 \\
\vdots \\
g_m(x_1,\ldots,x_n) \le 0
\end{cases}
$$

y sea $\bar{x}^*$ un punto factible tal que $I = \{i / g_i(\bar{x}^*) = 0\}$, es decir, satura las restricciones $g_i(x) \le 0$ para $i \in I$. Supongamos además que en $\bar{x}^*$ las funciones f y g_i, con $i \in I$ son diferenciables y g_i con $i \notin I$ son continuas y que $\nabla g_i(\bar{x}^*)$ para $i \in I$ son linealmente independientes. Entonces, si $\bar{x}^*$ es un óptimo local del problema (1) y existen λ_i escalares tales que

$$
\begin{aligned}
&\nabla f(\bar{x}^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}^*) = \bar{0} \\
&\lambda_i \ge 0, i \in I \\
&g_j(\bar{x}^*) \le 0, j = 1,\ldots,m
\end{aligned}
$$

Si además suponemos que g_i para $i \notin I$ son diferenciables en $\bar{x}^*$, las condiciones de Kuhn-Tucker se pueden escribir de forma equivalente como sigue

$$\nabla f(\bar{x}^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}^*) = \bar{0}$$
$$\lambda_j g_j(\bar{x}^*) = 0, j = 1,\ldots,m$$
$$\lambda_j \geq 0, j = 1,\ldots,m$$
$$g_j(\bar{x}^*) \leq 0, j = 1,\ldots,m$$

Si el programa se plantea en los términos

$$\begin{cases} \text{Max } f(x_1,\ldots,x_n) \\ \text{s.a.} \\ g_1(x_1,\ldots,x_n) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) \leq 0 \end{cases}$$

Las condiciones de Kuhn –Tucker se verificarán si existen escalares $\lambda_j \leq 0$ con $j = 1,\ldots,m$ tales que

$$\nabla f(\bar{x}^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}^*) = \bar{0}$$
$$\lambda_j g_j(\bar{x}^*) = 0, j = 1,\ldots,m$$
$$\lambda_j \geq 0, j = 1,\ldots,m$$
$$g_j(\bar{x}^*) \leq 0, j = 1,\ldots,m$$

Los programas de minimización y maximización se pueden formular con las restricciones en la forma $g_i(\bar{x}) \geq 0, j = 1,\ldots,m$. Esta modificación en la formulación del programa afecta al signo de los escalares $\lambda_j, j = 1,\ldots,m$. En concreto, para las cuatro posibles formulaciones, los cambios de signo de los escalares $\bar{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ se ilustran en el cuadro siguiente:

	min	Max
$\bar{g}(\bar{x}) \leq \bar{0}$	$\bar{\lambda} \geq \bar{0}$	$\bar{\lambda} \leq \bar{0}$
$\bar{g}(\bar{x}) \geq \bar{0}$	$\bar{\lambda} \leq \bar{0}$	$\bar{\lambda} \geq \bar{0}$

Donde $\bar{g} = (g_1,\ldots,g_m)$

A los escalares $\lambda_j, j = 1,\ldots,m$ se les denominan multiplicadores de Lagrange. Es de destacar que todos los multiplicadores asociados a restricciones no saturadas son nulos, mientras que los correspondientes a saturadas pueden ser nulos o no nulos.

Teorema 2.2 Condiciones de segundo orden de un mínimo local

Sea el programa

$$(1)\quad \begin{cases} \text{Min } f(x_1,\dots,x_n) \\ \text{s.a.} \\ g_1(x_1,\dots,x_n)\le 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\dots,x_n)\le 0 \end{cases}$$

donde $f, g_1,\dots,g_m$ son funciones C^2 (es decir, tienen segundas derivadas continuas) y sea $\bar{x}^*$ una solución factible en la que se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker, esto es, existen escalares $\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^* \in \Re$, tales que

$$\begin{aligned} &\nabla f(\bar{x}^*)+\sum_{i\in I}\lambda_i^*\nabla g_i(\bar{x}^*)=\bar{0} \\ &\lambda^*{}_j\, g_j(\bar{x}^*)=0,\ j=1,\dots,m \\ &\lambda_j\ge 0,\ j=1,\dots,m \\ &g_j(\bar{x}^*)\le 0,\ j=1,\dots,m \end{aligned}$$

Sea la matriz

$$H_x L(\bar{\lambda}^*,\bar{x}^*)=Hf(\bar{x}^*)+\sum_{j\in J}\lambda_j^*\,Hg_j(\bar{x}^*)$$

Donde $J=\{j\,/\,j=1,\dots,m, g_j(\bar{x}^*)=0,\lambda_j^*>0\}$ y el conjunto $M(\bar{x}^*)$ dado por

$$M(\bar{x}^*)=\{p\in\Re^n\,/\,\nabla g_j(\bar{x}^*)\bar{p}=0, \text{para todo } \mathrm{j}\in \mathrm{J}, \bar{\mathrm{p}}\neq\bar{0}\}$$

Si $M(\bar{x}^*)\neq\phi$ y para todo $\bar{p}\in M(\bar{x}^*)$ se verifica $p^T H_x L(\bar{\lambda}^*,\bar{x}^*)\bar{p}>0$, entonces, $\bar{x}^*$ es un mínimo local estricto del programa.

Teorema 2.3 Condiciones de segundo orden de un máximo local

Sea el programa

$$
(1')\quad \begin{cases} \text{Max } f(x_1,\ldots,x_n) \\ \text{s.a.} \\ g_1(x_1,\ldots,x_n) \le 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) \le 0 \end{cases}
$$

donde $f, g_1,\ldots,g_m$ son funciones C^2 y sea $\bar{x}^*$ una solución factible en la que se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker, esto es, existen escalares $\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^* \in \Re$, tales que

$$
\begin{aligned}
&\nabla f(\bar{x}^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i^* \nabla g_i(\bar{x}^*) = \bar{0} \\
&\lambda^*_j\, g_j(\bar{x}^*) = 0,\ j = 1,\ldots,m \\
&\lambda_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,m \\
&g_j(\bar{x}^*) \le 0,\ j = 1,\ldots,m
\end{aligned}
$$

si la matriz $H_x L(\bar{\lambda}^*, \bar{x}^*)$ es negativa definida para todo $\bar{p} \in M(\bar{x}^*)$ donde

$$
M(\bar{x}^*) = \{ p \in \Re^n / \nabla g_j(\bar{x}^*)\bar{p} = 0, \text{para todo } j \in J, \bar{p} \neq \bar{0} \} \neq \phi
$$

siendo

$$
J = \{ j / j = 1,\ldots,m, g_j(\bar{x}^*) = 0, \lambda_j^* < 0 \}
$$

se verifica que, $\bar{x}^*$ es un máximo local estricto del programa.

Ejemplo 2.5:

Analizar si se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker en los puntos que se indican en el siguiente programa.

$$
\begin{cases} \text{Min } (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.a.} \\ \quad x_1^2 + x_2^2 \le 5 \\ \quad x_1 + x_2 \le 3 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
\qquad
\begin{aligned} &\bar{x}^* = (2,1) \\ &\bar{x}^0 = \left(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right) \end{aligned}
$$

las condiciones de kuhn-Tucker son

$$\begin{pmatrix}2(x_1-3)\\2(x_2-2)\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\geq 0$$

$$\begin{aligned}&\lambda_1\left(x_1^2+x_2^2-5\right)=0, x_1^2+x_2^2-5\leq 0\\&\lambda_2(x_1+x_2-3)=0, x_1+x_2-3\leq 0\\&\lambda_3(-x_1)=0, -x_1\leq 0\\&\lambda_4(-x_2)=0, -x_2\leq 0\end{aligned}$$

En el punto $\bar{x}^*=(2,1)$ se verifican todas las restricciones y se saturan la primera y la segunda, por lo que $\lambda_3=\lambda_4=0$. Sustituyendo en la ecuación vectorial $x_1=2, x_2=1, \lambda_3=\lambda_4=0$ resulta ser el sistema

$$\begin{aligned}-2+4\lambda_1+\lambda_2=0\\-2+2\lambda_1+\lambda_2=0\end{aligned}$$

cuya solución es $\lambda_1=0, \lambda_2=2$.
Así pues, en $\bar{x}^*=(2,1)$ se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker con multiplicadores $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_4=0, \lambda_2=2$.

El punto $\bar{x}^0=\left(\frac{9}{5},\frac{6}{5}\right)$ es una solución factible del programa que satura únicamente la segunda restricción. Así pues, sustituyendo en la ecuación vectorial $x_1=\frac{9}{5}, x_2=\frac{6}{5}, \lambda_1=\lambda_3=\lambda_4=0$ se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}-\frac{12}{5}+\lambda_2=0\\-\frac{8}{5}+\lambda_2=0\end{aligned}$$

que carece de solución. Por tanto, en $\bar{x}^0=\left(\frac{9}{5},\frac{6}{5}\right)$ no se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker.

A partir de lo anterior sólo es posible afirmar que $\bar{x}^0$ no es la solución óptima del programa

Teorema 2.4 Condiciones suficientes de óptimo local

Sea el programa

$$(1')\quad \begin{cases} \text{Opt } f(x_1,\dots,x_n) \\ \text{s.a.} \\ g_1(x_1,\dots,x_n) \le 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\dots,x_n) \le 0 \end{cases}$$

con $f, g_1,\dots,g_m$ funciones diferenciables en un subconjunto abierto $D \subset \Re^n$, con

$$B = \{\bar{x} \in \Re^n / g_j(\bar{x}) \le 0,\ j = 1,\dots,m\} \subset D$$

siendo B un conjunto convexo. Entonces

(i) Si $\bar{x}^*$ es una solución factible en la que se cumplen las condiciones de kuhn-Tucker para mínimo y f es una función convexa en B, se verifica que $\bar{x}^*$ es un mínimo global del programa.

(ii) Si $\bar{x}^*$ es una solución factible en la que se cumplen las condiciones de kuhn-Tucker para máximo y f es una función cóncava en B, se verifica que $\bar{x}^*$ es un máximo global del programa.

Demostración:

Por ser f una función convexa y diferenciable en el conjunto convexo B, se verifica que para todo $\bar{x} \in B$

$$f(\bar{x}) \ge f(\bar{x}^*) + \nabla f(\bar{x}^*)(\bar{x} - \bar{x}^*)$$

Sea $I = \{i / i = 1,\dots,m,\ g_i(\bar{x}^*) = 0\}$ y, por las condiciones de kuhn-Tucker

$$\nabla f(\bar{x}^*) = -\sum_{i \in I} \lambda_i^* \nabla g_i(\bar{x}^*) \text{ con } \lambda_i^* \ge 0, i \in I$$

de donde

$$f(\bar{x}) \ge f(\bar{x}^*) - \sum_{i \in I} \lambda_i^* \nabla g_i(\bar{x}^*)(\bar{x} - \bar{x}^*) \qquad (1)$$

por la convexidad del conjunto B, dados $\bar{x}, \bar{x}^* \in B$ se verifica que $\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{x}^* \in B$ para todo $\lambda \in [0,1]$, por lo tanto para todo $i \in I$

$$g_i(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{x}^*) = g_i(\lambda\bar{x}^* + \lambda(\bar{x} - \bar{x}^*)) \leq g_i(\bar{x}^*) = 0$$

Por ser $g_i, i \in I$ funciones diferenciables en $\bar{x}^*$, existen todas sus derivadas direccionales en $\bar{x}^*$ y, en particular para el vector $\bar{v} = (\bar{x} - \bar{x}^*)$ tenemos

$$g_i'(\bar{x}^*;\bar{v}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{g_i(\bar{x}^* + \lambda(\bar{x} - \bar{x}^*)) - g_i(\bar{x}^*)}{\lambda} = \nabla g_i(\bar{x}^*)(\bar{x} - \bar{x}^*) \leq 0$$

ya que $g_i(\bar{x}^* - \lambda(\bar{x} - \bar{x}^*)) \leq g_i(\bar{x}^*)$

Asi pues de (1) y teniendo en cuenta que $\lambda_i^* \geq 0$ para $i \in I$ se obtiene que para todo $\bar{x} \in B$

$$f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}^*)$$

por lo que $\bar{x}^*$ es mínimo global.

Con éste resultado se asegura por tanto que en programas convexos de minimización las condiciones de Kuhn-Tucker no sólo son necesarias, sino también suficientes y caracterizan soluciones globales.

Si la función objetivo es estrictamente convexa en B, entonces si $\bar{x}^*$ es la solución en la que se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker, es el mínimo global estricto .Para el caso de maximización, la demostración se hace de manera análoga.

Ejemplo 2.6:

Encontrar la solución óptima del programa

$$\begin{cases} \quad \text{Min } x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \\ \quad x_1 x_2 \geq 1 \\ \quad x_1 - x_2 \leq 2 \\ \quad x_1 \geq 0 \end{cases}$$

¿Existe el máximo global para $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ en el conjunto definido por las restricciones del programa?

Primero transformaremos el programa para que quede de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \text{Min } x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \\ 1 - x_1 x_2 \le 0 \\ x_1 - x_2 - 2 \le 0 \\ -x_1 \le 0 \end{cases}$$

la función objetivo $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ es convexa (y también cóncava) y el conjunto de soluciones factibles

$$\begin{aligned} B &= \{(x_1, x_2) \in \Re^2 / 1 - x_1 x_2 \le 0, x_1 - x_2 - 2 \le 0, -x_1 \le 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \Re^2 / 1 - x_1 x_2 \le 0, x_1 \ge 0\} \cap \{(x_1, x_2) \in \Re^2 / x_1 - x_2 - 2 \le 0\} \end{aligned}$$

es convexo por ser intersección de conjuntos convexos.

Las condiciones de Kuhn-Tucker para este programa son

$$\begin{aligned} &1 - \lambda_1 x_2 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ &2 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0 \\ &\lambda_1 (1 - x_1 x_2) = 0 \\ &\lambda_2 (x_1 - x_2 - 2) = 0 \\ &\lambda_3 x_1 = 0 \\ &\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0 \\ &1 - x_1 x_2 \le 0 \\ &x_1 - x_2 - 2 \le 0 \\ &-x_1 \le 0 \end{aligned}$$

Analicemos las distintas posibilidades:

I. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
II. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
III. $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$

No hay soluciones que verifiquen estas condiciones

IV. Si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

entonces

$$1-\lambda_1 x_2 = 0$$
$$2-\lambda_1 x_1 = 0$$
$$x_1 x_2 = 1$$

de donde

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1}$$
$$x_1 x_2 = 1$$

y resultan los puntos $\left(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ y $\left(-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$, aunque sólo el primero es solución factible. El valor de λ_1 asociado al punto $\left(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ es $\lambda_1{}^* = \sqrt{2} > 0$.

Así pues, en $\bar{x}^* = \left(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ con multiplicadores $\lambda_1{}^* = \sqrt{2}, \lambda_2{}^* = \lambda_3{}^* = 0$ se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker.

Para los casos

V. $\lambda_1 = 0$
VI. $\lambda_2 = 0$

no existen soluciones factibles para las que se verifiquen las condiciones de Kuhn-Tucker.

VII. si $\lambda_3 = 0$, entonces se tiene el sistema

$$1-\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0$$
$$2-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0$$
$$1 - x_1 x_2 = 0$$
$$x_1 - x_2 - 2 = 0$$

Sustituyendo $x_1 = x_2 + 2$ en la tercera ecuación resulta $1-(x_2+2)x_2 = 0$ de donde, $x_2 = -1 \pm \sqrt{2}$ y se obtienen los puntos

$$\bar{x}^1 = \left(1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right) \text{ y } \bar{x}^2 = \left(1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\right)$$

En $\bar{x}^1$ no se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker pues

$$\lambda_1{}^* = \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ y } \lambda_2{}^* = \frac{\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}} < 0$$

y, $\bar{x}^2$ no es solución factible.

En resumen, puesto que no existe ninguna solución factible que sature las tres restricciones (VIII), hemos obtenido el único punto

$$\bar{x}^*=\left(\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right) \text{ con } \lambda_1^*=\sqrt{2},\lambda_2^*=\lambda_3^*=0$$

En el que se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker que en virtud del Teorema 2.4 será mínimo global.

Aunque la función objetivo es también cóncava, y el conjunto factible convexo, el programa

$$\begin{cases} \quad \text{Max } x_1+2x_2 \\ \text{s.a.} \\ \quad 1-x_1x_2\le 0 \\ \quad x_1-x_2-2\le 0 \\ \quad -x_1\le 0 \end{cases}$$

no tiene máximo global ni local ya que no existe ninguna solución factible en la que se verifiquen las correspondientes condiciones de Kuhn-Tucker. En efecto, para el programa de maximización, las condiciones de Kuhn-Tucker coinciden con las del programa de minimización salvo a las referentes a la positividad de los multiplicadores, que se convierten en

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\le 0$$

Teniendo en cuenta, si repasamos la resolución del problema de minimización, es claro que, no existen soluciones factibles que cumplan las condiciones necesarias para ser máximo local.

Por lo que el mínimo global se encuentra en el punto

$$\bar{x}^*=\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

3. Programación Estocástica

3.1 Definición.

La programación estocástica resuelve el problema

$$\begin{cases} \text{Opt } f(X) \\ \text{s.a.} \\ g_i(X) \geq 0, i = 1,..m \\ X \in E^n \end{cases} \qquad (3.1)$$

Cuando algunos de los parámetros de las funciones $f(X)$ y $g_i(X), i = 1,...,m$ son variables aleatorias. El caso que tomaremos en éste trabajo es cuando adopta la forma lineal

$$\begin{cases} \text{Max } Z = cX' \\ \text{s.a.} \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

y las componentes de A,b,c son total o parcialmente variables aleatorias. Se pueden distinguir dos tipos de programación estocástica: el "pasivo" y el "activo". En el tipo pasivo se espera a que ocurra el valor de la(s) variable(s); entonces se pueden derivar soluciones aproximadas o exactas. En el segundo tipo, se toman las decisiones sobre la variable X antes de que ocurran todos los eventos aleatorios; esto se puede hacer considerando un conjunto de posibles realizaciones, tomando valores esperados y penalizando la función objetivo, de manera que se eviten desviaciones no tolerables de los valores esperados.

La programación estocástica ha tenido algunas aplicaciones de tipo empírico. Sobresalen en agricultura, secuenciación de aviones, industria química, teoría de control, gestoría ejecutiva, mercadotecnia, redes, nutrición, transportes y almacenamiento.

3.2 Programación estocástica de doble etapa.

Considere el programa lineal

$$\begin{cases} \text{Max } Z = cX \\ \text{s.a.} \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

donde los vectores c,b y la matriz A tienen componentes aleatorios. La función objetivo se convierte en variable aleatoria y por lo tanto, tiene sentido hablar de su valor esperado

$$E(Z) = E(cX) = E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(c_i) X_i.$$

En estas estructuras aleatorias se presenta el siguiente problema de factibilidad, muy difícil de resolver: si alguna componente a_{ij} de A o b_i de B es una variable aleatoria, la restricción correspondiente debe reinterpretarse en el sentido de que una solución de X es factible, sólo si satisface la restricción para todos los valores posibles de las variables aleatorias en cuestión; hasta el momento no existe un procedimiento práctico que pueda resolver este caso general.

Sin embargo, algunos procedimientos permiten resolver casos particulares, donde se conocen parcial o totalmente los valores asociados a variables aleatorias y sus correspondientes probabilidades.

Sea la siguiente matriz

$$M = \left[\begin{array}{c|c} c & 0 \\ \hline A & b \end{array}\right]$$

o, explícitamente:

$$M = \left[\begin{array}{cccc|c} c_1 & c_2 & \dots & c_n & 0 \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nm} & b_m \end{array}\right]$$

Sea $M^k, k = 1,..r$ aquella matriz particular de M donde las variables toman ciertos valores preestablecidos, es decir,

$$M^k = \left[\begin{array}{c|c} c^k & 0 \\ \hline A^k & b^k \end{array}\right]$$

Sea p_k la probabilidad de que M se convierta en M^k con $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. El problema estocástico consiste en encontrar el vector X tal que

$$\begin{cases} \text{Max } E(Z) = \sum_{k=1}^{r} p_k c^k X \\ \text{s.a.} \\ \quad A^k X \leq b^k \\ \quad X \geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

El problema anterior puede resultar computacionalmente muy difícil de resolver, para valores muy grandes de r.

El método de solución llamado de "doble etapa" supone que no es necesario obtener todo el vector X antes de observar el valor que adoptan las variables aleatorias de M.
Para cada valor $j, j = 1,\ldots,n$, sea $M_j^k, k = 1,\ldots,r$ la matriz que se obtiene de M^k al reemplazar por * las componentes X_j del vector de decisiones X que no se conocerán anticipadamente; * indica un elemento desconocido. Esto es, si M se convierte en M^k, M_j^k incluye la parte de M^k que se conoce cundo se obtiene una realización final en X_j. El valor que se asigna a X_j depende de cuál de las matrices $M_j^k, k = 1,\ldots,r; j = 1,..n$ se está observando. Sea X_{jk} el valor que se asigna a X_j cuando se observa M_j^k. La variable X_{jk} se convierte en el nuevo parámetro de decisión del problema (3.3). Sea X^k el siguiente vector

$$X^k = \begin{bmatrix} X_{1k} \\ X_{2k} \\ \vdots \\ X_{nk} \end{bmatrix} \quad , k = 1,..r$$

Existe la posibilidad de que algunas variables X_{jk} se repitan. Si sucede que $X_{jk_1} = X_{jk_2}$ cuando $M_j^{k_1} = M_j^{k_2}$, entonces se reemplazan las variables repetidas por una sola variable. Esto asegura que el procedimiento de solución podrá diferenciar la información que se conocerá de la que no se conocerá
El problema (3.3) se reformula como aquel que encuentra los vectores $X^1, X^2,\ldots,X^r$, tales que

$$\begin{cases} \text{Max } E(Z) = \sum_{k=1}^{r} p_k c^k X \\ \quad \text{s.a.} \\ \qquad A^k X \leq b^k \\ \qquad X \leq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

El problema lineal (3.4) se resuelve por el método simplex o su equivalente.

Ejemplo 3.1:

Suponga una matriz M dada por

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} c_1 & c_2 & 0 \\ \hline a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} c_1 & c_2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ a_{31} & a_{32} & 18 \end{array}\right]$$

donde los elementos c_1, c_2, a_{31}, a_{32} son variables aleatorias. Suponga que los posibles valores de c_1 y a_{31} son respectivamente $(3,3)$ y $(4,2)$, y que para c_2 y a_{32} pueden ser $(5,2)$ y $(4,3)$, respectivamente. Por lo tanto, la matriz M puede adoptar las siguientes estructuras:

$$M^1 = \left[\begin{array}{cc|c} \bar{3} & \bar{5} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ \bar{3} & \bar{2} & 18 \end{array}\right] \qquad M^2 = \left[\begin{array}{cc|c} \bar{4} & \bar{5} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ \bar{2} & \bar{2} & 18 \end{array}\right]$$

$$M^3 = \left[\begin{array}{cc|c} \bar{3} & \bar{4} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ \bar{3} & \bar{3} & 18 \end{array}\right] \qquad M^4 = \left[\begin{array}{cc|c} \bar{4} & \bar{4} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ \bar{2} & \bar{3} & 18 \end{array}\right]$$

Los valores de las variables aleatorias se distinguen con un gorro. ($\bar{\bullet}$)

Si conocemos la probabilidad p_k de que M se convierta en $M^k, k = 1,2,3,4$ y que ésta es igual a $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0.25$. Si además conocemos los valores que adoptan c_1 y a_{31} se conocen antes de hacer una decisión final en la variable X_1. Por lo tanto

$$M_1^1 = M_1^3 \left[\begin{array}{cc|c} \bar{3} & * & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \bar{6} \\ \bar{3} & * & 18 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad M_1^2 = M_1^4 = \left[\begin{array}{cc|c} \bar{4} & * & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ \bar{2} & * & 18 \end{array}\right]$$

En forma similar, suponga que c_2 y a_{32} se conocen antes de seleccionar el valor final de X_2, por lo que

$$M_2^1 = M_2^2 \left[\begin{array}{cc|c} * & \bar{5} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \bar{6} \\ * & \bar{2} & 18 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad M_2^3 = M_2^4 = \left[\begin{array}{cc|c} * & \bar{4} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ * & \bar{2} & 18 \end{array}\right]$$

Sea $\overline{X}_1$ el valor que se asigna a la variable aleatoria X_1 cuando se observan las matrices M_1^1 o M_1^3, es decir, cuando se conoce que las variables aleatorias c_1 y a_{31} adoptan, respectivamente, los valores $(3,3)$. Sea X_1* el valor que asigna a la variable X_1 cuando se observan las matrices M_1^2 o M_1^4, es decir, cuando se conoce que las variables aleatorias c_1 y a_{31} adoptan los valores $(4,2)$. En forma análoga, X_2* es el valor que se asigna a la variable X_2 cuando se observan las matrices M_2^1 o M_2^2, mientras que X_2* es el valor de X_2 cuando se observan $M_2^3 = M_2^4$. Por lo tanto

$$X^1 = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{bmatrix}, X^2 = \begin{bmatrix} X_1* \\ \overline{X}_2 \end{bmatrix}, X^3 = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ X_2* \end{bmatrix}, X^4 = \begin{bmatrix} X_1* \\ X_2* \end{bmatrix}$$

El programa estocástico puede representarse por su equivalente lineal, consistente en encontrar los vectores X^1, X^2, X^3, X^4, que
[1]

[1] "Inequalites for stocasticlinear programming problems" Management science, vol. 6 pp. 494-514, 1964

$$
\text{Max}
\begin{cases}
E(Z) = \frac{1}{4}\left[\left(3\overline{X}_1 + 5\overline{X}_2\right) + \left(4X_1{}^* + 5\overline{X}_2\right) + \left(3\overline{X}_1 + 4X_2{}^*\right) + \left(4X_1{}^* + 4X_2{}^*\right)\right] \\
= \frac{3}{2}\overline{X}_1 + 2X_1{}^* + \frac{5}{2}\overline{X}_2 + 2X_2{}^* \\
\text{s.a. a) } \overline{X}_1 \le 4 \\
\text{b) } \overline{X}_2 \le 6 \\
\text{c) } 3\overline{X}_1 + 2\overline{X}_2 \le 18 \\
\text{d) } X_1{}^* \le 4 \\
\text{e) } \overline{X}_2 \le 6 \\
\text{f) } 2X_1{}^* + 2\overline{X}_2 \le 18 \\
\text{g) } \overline{X}_1 \le 4 \\
\text{h) } X_2{}^* \le 6 \\
\text{i) } 3\overline{X}_1 + 2X_2{}^* \le 18 \\
\text{j) } X_1{}^* \le 4 \\
\text{k) } X_2{}^* \le 6 \\
\text{l) } 2X_1{}^* + 3X_2{}^* \le 18 \\
\text{m) } \overline{X}_1, \overline{X}_2, X_1{}^*, X_2{}^* \ge 0.
\end{cases}
$$

Las restricciones e), g), j) y k) son redundantes y pueden eliminarse. El problema lineal se resuelve por alguno de los métodos vistos en el capítulo anterior. Se pueden observar las dificultades computacionales (número de variables y restricciones) y combinatorias que se tienen al tratar de formular el equivalente lineal de un programa estocástico.

El procedimiento anterior se conoce en la literatura de la programación estocástica como "modelo de doble etapa" y fue diseñado por Mandansky. A continuación se resume su técnica.

Sea el programa

$$
\begin{cases}
\text{Max } \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \\
\text{s.a.} \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i, i = 1,2,\ldots,m \\
X_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,n
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

donde las c_j son variables aleatorias. El algoritmo de doble etapa supone las siguientes hipótesis:

1. El valor de cada variable aleatoria es independiente de los niveles de todas las variables de decisión $X_j, j = 1,..n$.
2. Los niveles de $X_j, j = 1,..k; k \leq n$ deben fijarse antes de que se conozcan los valores exactos de las variables aleatorias. Note que sólo ocurre para un subconjunto k de las n variables de decisión. Esta suposición constituye la "primera etapa".
3. Las restricciones $i = 1,2,..,g; g \leq m$ contienen únicamente las variables de la primera etapa, es decir, $X_j, j = 1,...,k$ y los valores asociados de a_{ij} y b_i se conocen con exactitud.
4. Siempre existen valores factibles para las llamadas variables de la "segunda etapa", $X_j, j = k+1,...,n$; éstos se establecen después de conocerse todos los valores de las variables aleatorias.
5. Existe un número finito Q de posibles valores de la variable aleatoria c_j $(j = k+1,...,n)$ y de los coeficientes determinísticos a_{ij}, b_i, donde $i = g+1,...,m; j = 1,...,n$. Denote a estos conjuntos por $(c_{qj}, a_{qij}, b_{qi})$ y por $p_q, q = 1,2,...,Q$ la probabilidad de ocurrencia del conjunto.

Entonces (3.5) se resuelve por su equivalente determinístico:

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Max } \sum_{j=1}^{k} E[c_j]X_j + \sum_{q=1}^{Q} p_q\left[\sum_{j=k+1}^{n} c_{qj}X_{qj}\right] \\
\text{s.a.} \\
\sum_{j=1}^{k} a_{ij}X_j = b_i, i = 1,...,g \quad \text{(la primera etapa)} \\
\\
\sum_{j=1}^{k} a_{qij}X_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_{qij}X_{qj} \qquad \text{(reglas de la segunda etapa)} \\
\qquad\qquad i = g+1,...,m; q = 1,2,...,Q \\
\qquad\qquad\qquad X_j \geq 0 \\
\qquad\qquad\qquad X_{qj} \geq 0
\end{array}\right. \tag{3.6}$$

Para el caso general, en que en (3.5) tanto c_j como a_{ij} y b_i son variables aleatorias, los pasos de solución del método de doble etapa son:

Paso 1. Suponga que existen Q posibles valores de las variables aleatorias c_j, a_{ij}, b_i. Sean esos valores las ternas $(c_{qj}, a_{qij}, b_{qi})$ y sea p_q la probabilidad de ocurrencia de esos valores.

Paso 2. Rescribir el programa (3.6) como si se conociera el valor exacto de todas las variables aleatorias antes de decidir los niveles de las variables de decisión X_j. Esto es:

$$\begin{cases} \text{Max } \sum_{q=1}^{Q} p_q \sum_{j=1}^{n} c_{qj} X_{qj} & (3.7) \\ \text{s.a.} & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{qij} X_{qj} = b_{qi}, i = 1,2,\ldots,m; q = 1,2,\ldots,Q & (3.8) \\ X_{qj} \geq 0 & \end{cases}$$

donde $X_{qj}, j = 1,2,\ldots,n$ son niveles asociados con los valores $(c_{qj}, a_{qij}, b_{qi})$.

Paso 3. Se reconoce el hecho de que en realidad no se conocen todos los elementos aleatorios antes de decidir los niveles de las variables X_j. por lo tanto se debe revisar la formulación del paso 2, insertando restricciones apropiadas que indiquen que ciertas variables deben ser idénticas para los conjuntos apropiados de decisiones. Por ejemplo, si el nivel de X_1 debe determinarse antes de conocer los valores aleatorios, se añade a las restricciones de (3.8) la restricción $X_{11} = X_{21} = \ldots = X_{q1}$.

Paso 4. Este paso sirve para conectar los pasos 3 y 4 y simplificar las expresiones. Por ejemplo, en el paso 2 se pone X_{11} cuando aparezca cualquier $X_{q1}, q = 1,2,\ldots Q$.

Ejemplo 3.1:

Considere una empresa que debe determinar el nivel de producción X_t para $t = 1,2,3,4$. Sea D_t la demanda del periodo t. La demanda insatisfecha en un periodo se *pierde*. Sea I_t el inventario al finalizar el periodo t con $I_0 = I_3 = 0$. Sea c_t la unidad de ganancia en la venta del producto e igual a la diferencia del precio de venta r, menos el costo de producción, e_t. Sea h_t el costo unitario de almacenamiento en el periodo t.

El modelo de producción es

$$\begin{cases} \text{Max } \sum_{t=1}^{3} c_t X_t - \sum_{t=1}^{2} h_t I_t - (h_3 + r) I_3 \\ \text{s.a.} \\ X_1 - I_1 \qquad\qquad\qquad + S_1 = D_1 \\ I_1 + X_2 - I_2 \qquad\qquad + S_2 = D_2 \\ \qquad I_2 + X_3 - I_3 + S_3 = D_3 \\ X_t, I_t, S_t \geq 0, t = 1,2,3 \end{cases}$$

donde S_t es la venta perdida en el periodo $t, t = 1,2,3$. se analizan a continuación cuatro casos.

En el primer caso, D_t es una variable aleatoria e independiente del nivel de producción X_t para toda t. Se conocen los posibles valores que tomarán las variables aleatorias $D_1, D_2, \ldots, D_n$ antes de fijar el valor de la variable de decisión. La variable aleatoria D puede tomar dos valores, cada uno con cierta probabilidad; D_2 puede tener cuatro valores, dependiendo del valor de D_1, y D_3 puede tener ocho valores, dependiendo del valor de D_2. Por lo tanto, la terna de valores $(D_{q1}, D_{q2}, D_{q3}), q = 1, \ldots 8$ pueden resumirse simbólicamente en la siguiente tabla.

D_1	D_2	D_3	p_q
$D_{11} = D_{21} = D_{31} = D_{41}$	$D_{12} = D_{22}$	D_{13}	p_1
		D_{23}	p_2
	$D_{32} = D_{42}$	D_{33}	p_3
		D_{43}	p_4
$D_{51} = D_{61} = D_{71} = D_{81}$	$D_{52} = D_{62}$	D_{53}	p_5
		D_{63}	p_6
	$D_{72} = D_{82}$	D_{73}	p_7
		D_{83}	p_8

Si los valores de todas las variables aleatorias se conocen antes de decidir los niveles de producción de X_t, el paso 1 de la metodología produce el siguiente programa lineal determinístico equivalente:

$$
\begin{cases}
\text{Max } \displaystyle\sum_{q=1}^{8} p_q \left[\sum_{t=1}^{3} c_t X_{qt} - \sum_{t=1}^{2} h_t I_{qt} - (h_3 + r) I_{q3} \right] \\
\text{s.a.} \\
X_{q1} - I_{q1} + S_{q1} = D_{q1} \\
I_{q1} + X_{q2} - I_{q2} + S_{q2} = D_{q2} \\
I_{q2} + X_{q3} - I_{q3} + S_{q3} = D_{q3}
\end{cases}
$$

que se resuelve por cualquiera de los métodos del capítulo anterior de programación lineal.

El segundo caso supone que se conoce el valor de la demanda D_t y de las demandas anteriores $D_{t-1}, D_{t-2}, \ldots, D_1$ antes de fijar el nivel de X_t. No se conoce el valor de las demandas futuras $D_{t+1}, \ldots, D_n$. Entonces, en concordancia con el paso 2 de la metodología, se establecen las restricciones que se muestran a continuación:

(X_{q1}, I_{q1}, S_{q1})	(X_{q2}, I_{q2}, S_{q2})
$X_{11} = X_{21} = X_{31} = X_{41}$ $I_{11} = I_{21} = I_{31} = I_{41}$ $S_{11} = S_{21} = S_{31} = S_{41}$	$X_{12} = X_{22}$ $I_{12} = I_{22}$ $S_{12} = S_{22}$ $X_{32} = X_{42}$ $I_{32} = I_{42}$ $S_{32} = S_{42}$
$X_{51} = X_{61} = X_{71} = X_{81}$ $I_{51} = I_{61} = I_{71} = I_{81}$ $S_{51} = S_{61} = S_{71} = S_{81}$	$X_{52} = X_{62}$ $I_{52} = I_{62}$ $S_{52} = S_{62}$ $X_{72} = X_{82}$ $I_{72} = I_{82}$ $S_{72} = S_{82}$

Por ejemplo, si se conoce que $D_1 = D_{11} = \ldots = D_{41}$, entonces los niveles de X_1, I_1 y S_1 serán los mismos para $q = 1,2,3,4$. En forma similar, si se conoce que $D_2 = D_{32} = D_{42}$, entonces X_2, I_2 y S_2 serán los mismos para $q = 3,4$.

En la aplicación del paso 3, las restricciones de tipo

$$I_{q\,t-1} + X_{qt} - I_{qt} + S_{qt} = D_{qt} \quad \text{para toda } q, t$$

son idénticas para $q = 1,2,3,4$, por lo que sólo se utiliza una de ellas.

El tercer caso supone que se conoce el valor de $D_1, \ldots, D_{t-1}$ antes de fijar el valor de X_t. El paso 2 del método indica añadir la restricción adicional que se muestra a continuación:

<table>
<tr><th>X_{q1}</th><th>(I_{q1},S_{q1},X_{q2})</th><th>(I_{q2},S_{q2},X_{q3})</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$X_{11}=\dots=X_{81}$</td><td rowspan="2">$I_{11}=\dots=I_{41}$
$S_{11}=\dots=S_{41}$
$X_{12}=\dots=X_{42}$</td><td>$I_{12}=I_{22}$
$S_{12}=S_{22}$
$X_{13}=X_{23}$</td></tr>
<tr><td>$I_{32}=I_{42}$
$S_{32}=S_{42}$
$X_{33}=X_{43}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$I_{51}=\dots=I_{81}$
$S_{51}=\dots=S_{81}$
$X_{52}=\dots=X_{82}$</td><td>$I_{52}=I_{62}$
$S_{52}=S_{62}$
$X_{53}=X_{63}$</td></tr>
<tr><td>$I_{72}=I_{82}$
$S_{72}=S_{82}$
$X_{73}=X_{83}$</td></tr>
</table>

Se nota que todas las X_{q1} deben ser idénticas, dado que el nivel X_1 se fijó antes del conocimiento exacto de D_1. Las restricciones de igualdad en I_{q1},S_{q1} y X_{q2} ocurren para los mismos valores de q, porque los niveles de estas variables se establecen al conocer el valor exacto de D_1. El grupo de restricciones de la forma

$$I_{q,t-1}+X_{qt}-I_{qt}+S_{qt}=D_{qt} \qquad \text{para toda } q,t$$

se reduce considerablemente.

El cuarto y último caso consiste en fijar los niveles de todas las X_t antes de conocer los valores de las variables aleatorias D_t. En este caso el modelo contiene únicamente las variables $X_{11},X_{12},X_{13},I_{q1},S_{q1},q=1,5;I_{q2},S_{q2},q=1,3;I_{q3},S_{q3},q=1,2,\dots,8$.

Al ir del primero (información perfecta) al último caso (información imperfecta), se incrementa el número de restricciones de igualdad, que reducen en consecuencia los posibles valores de X_t.

3.3. Programación estocástica restringida.

A.Charnes y W. Cooper desarollaron este enfoque para resolver problemas de programación estocástica. La filosofía de la "programación estocástica restringida" está basada en la premisa de que es altamente deseable, pero no absolutamente necesario que se respeten las restricciones de programa. Explicitamente, esta técnica reemplaza las restricciones lineales

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.9}$$

por

$$p\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i\right] \geq \alpha_i, \quad i = 1,2,\ldots m \tag{3.10}$$

donde $P\{\cdot\}$ significa probabilidad y α_i son constantes establecidas por el decisor. Una solución $X_j \geq 0, j = 1,\ldots,n$ es factible si satisface 3.10. Esta expresión indica que las restricciones 3.9 pueden violarse con una probabilidad de $1-\alpha_i$, donde éste es el riesgo de falla aceptado por el decisor.

Se supone que todos los valores de X_j deben determinarse antes de conocer los valores de las variables aleatorias. El objetivo consiste en convertir las restricciones probabilísticas 3.10, en equivalentes determinísticos. Se tiene que

$$p\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i\right\} = p\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - E(b_i)}{\sigma_{b_i}} \leq \frac{b_i - E(b_i)}{\sigma_{b_i}}\right\} \tag{3.11}$$

donde $E(b_i)$ y σ_{b_i} son respectivamente el valor esperado y la desviación estándar de la variable aleatoria $b_i, i = 1,\ldots,m$. Como se ha supuesto que b_i tiene una distribución normal, $[b_i - E(b_i)]/\sigma_{b_i}$ es una nueva variable aleatoria con distribución normal con media cero y desviación estándar uno.

Demostración:

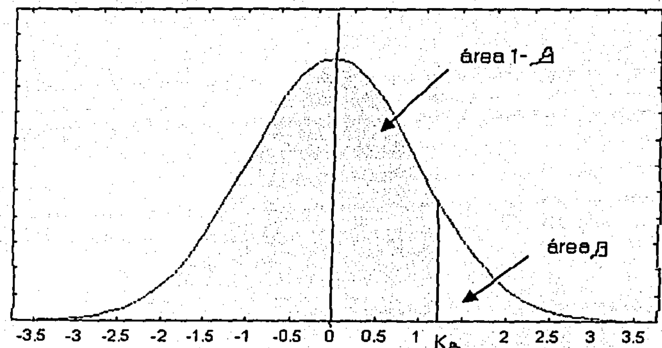
Sea $z_i = [b_i - E(b_i)]/\sigma_{b_i}$ y queremos saber la distribución de esta nueva variable aleatoria, para lo cual usaremos la técnica de la función generadora de momentos vista en el capitulo 1.

$$E\left[e^{zt}\right] = E\left[e^{[b-E(b)]t/\sigma_b}\right] = E\left[e^{bt/\sigma_b}\right] e^{-\frac{\mu_b t}{\sigma_b}} = e^{\frac{\mu_b t}{\sigma_b}} e^{\frac{\sigma_b^2 t}{2\sigma_2^2}} e^{-\frac{\mu_b t}{\sigma_b}} = e^{\frac{t}{2}}$$

De la curva de la distribución normal se desprende que si z es una variable aleatoria con distribución normal estándar, entonces

$$p\{z \geq K_\beta\} = \beta$$

donde K_β es una constante y β es un número real entre 0 y 1, como se ilustra en la figura siguiente.



Normal con media cero y varianza uno

Las tablas del apéndice A proporcionan el valor de K_β para varios valores de β. Por ejemplo:

$$K_{0.8508} = 1.04, K_{0.9292} = 1.47, K_{0.9985} = 2.96.$$

por lo que se infiere que

$$p\left\{K_{\alpha_i} \leq \frac{b_i - E(b_i)}{\sigma_{b_i}}\right\} = \alpha_i \qquad (3.12)$$

La probabilidad 6.18 aumenta si el número K_{α_i} se reemplaza por uno menor y disminuye si se substituye por uno mayor. Por lo tanto

$$p\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}X_j - E(b_i)}{\sigma_{b_i}} \leq \frac{b_i - E(b_i)}{\sigma_{b_i}}\right\} \geq \alpha_i$$

si y sólo si

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}X_j - E(b_i)}{\sigma_{b_i}} \leq K_{\alpha_i} \qquad (3.13)$$

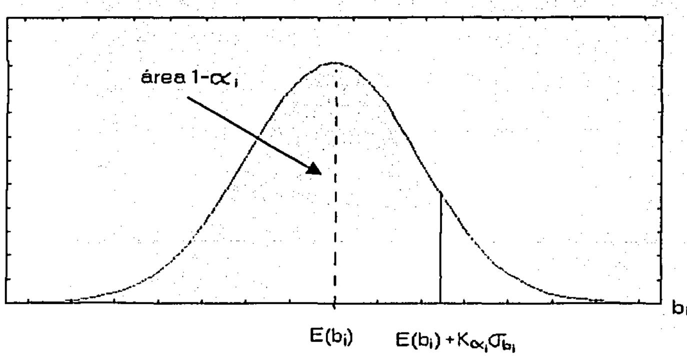
Lo anterior induce a concluir que

$$p\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \leq b_i\right\} > \alpha_i$$

si y sólo si

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \leq E(b_i) + K_{\alpha_i}\sigma_{b_i}, i = 1,\dots,m \qquad (3.14)$$

por lo que si 3.14 substituye a 3.10 se logra el equivalente determinístico, como se ilustra en la figura siguiente.



El problema determinístico equivalente consiste entonces en

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Opt } E(Z)=\sum_{j=1}^{n}E(c_j)X_j \\ \text{s.a.} \\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j \le E(b_i)+K_{u_i}\sigma_{b_i}, i=1,2,\ldots,m \\ X_j \ge 0, j=1,2,\ldots,n. \end{array}\right. \qquad (3.15)$$

En el caso más general, cuando b_i tiene una distribución de probabilidad cualquiera, el problema estocástico

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Opt } \sum_{i=1}^{n}c_iX_i \\ \text{s.a.} \\ p\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j \le b_i\right\} \ge \alpha_i, i=1,\ldots,m \end{array}\right.$$

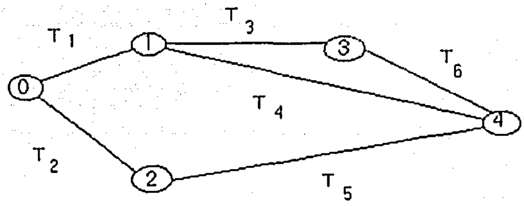
se resuelve por su equivalente determinístico

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Opt } \sum_{j=1}^{n}c_iX_i \\ \text{s.a.} \\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j \ge F^{-1}(\alpha_i), i=1,\ldots,m \end{array}\right. \qquad (3.16)$$

donde $F^{-1}(\alpha_i)$, de poder obtenerse, es la función inversa de la distribución de probabilidad de $b_i, i=1,\ldots,m$.

Ejemplo 3.2:

Supongamos una red de actividad, con los datos que se muestran a continuación:



El tiempo pesimista es $d+t$, mientras que el tiempo de terminación acelerada es $d-t$. El tiempo de ejecución de cada actividad $i, t_i, i=1,\dots,5$ es una variable aleatoria con distribución conocida $F_i(Z)$.

Variable aleatoria	d	t	$d-t$	$d+t$	$F_i(Z)$
T_1	19	10	9	29	$0.5[(Z-19)/10]^{1/3}$
T_2	13	5	8	18	$0.5[(Z-13)/5]^{1/3}$
T_3	2	1	1	3	$0.5[(Z-2)/1]^{1/3}$
T_4	25	6	19	31	$0.5[(Z-25)/6]^{1/3}$
T_5	37	16	21	53	$0.5[(Z-37)/16]^{1/3}$
T_6	17	10	7	27	$0.5[(Z-17)/10]^{1/3}$

Si se define por X_i el tiempo en el cual se termina el evento asociado al nodo i, se requiere entonces resolver el siguiente problema estocástico:

$$
\begin{cases}
\text{Min } X_4 \\
\text{s.a.} \\
p[X_1 \ge T_1] \ge 0.8 \\
p[X_2 \ge T_2] \ge 0.9 \\
p[-X_1 + X_3 \ge T_3] \ge 0.7 \\
p[-X_1 + X_4 \ge T_4] \ge 0.9 \\
p[-X_2 + X_4 \ge T_5] \ge 0.8 \\
p[-X_3 + X_4 \ge T_6] \ge 0.7 \\
X_i \ge 0, i = 1,\dots,4
\end{cases}
$$

para resolver este problema estocástico se utiliza el equivalente determinístico 3.16, basado en el cálculo de la función inversa $F_i^{-1}(\alpha_i)$, como se muestra a continuación:

Variable aleatoria	d	t	$F^{-1}(Z)$	α_i	$F_i^{-1}(\alpha_i)$
T_1	19	10	$19+10(2Y-1)^3$	0.8	21.1
T_2	13	5	$13+5(2Y-1)^3$	0.9	15.6
T_3	2	1	$2+(2Y-1)^3$	0.7	2.1
T_4	25	6	$25+6(2Y-1)^3$	0.9	28.1
T_5	37	16	$37+16(2Y-1)^3$	0.8	40.5
T_6	17	10	$17+10(2Y-1)^3$	0.7	17.6

El equivalente determinístico es

$$
\begin{cases}
\text{Min } X_4 \\
s.a. \\
X_1 \geq 21.1 \\
X_2 \geq 15.6 \\
-X_1 + X_3 \geq 2.1 \\
-X_1 + X_4 \geq 28.1 \\
-X_2 + X_4 \geq 40.5 \\
-X_3 + X_4 \geq 17.5 \\
X_i \geq 0, i = 1,2,3,4
\end{cases}
$$

que se resuelve como un problema de programación lineal (visto en el capitulo 1).

En lo siguiente y para los fines de este trabajo, sólo se trabajará con el caso en el que la distribución de las variables aleatorias son normales, esto se debe a que trabajar con otro tipo de distribución se puede volver una tarea complicada ya que no son tan fáciles de manejar y la transformación puede ser un trabajo complicado.

3.4 Caso 1. Coeficientes a_{ij} con distribución Normal.

En este caso, cada a_{ij} está normalmente distribuida con media $E\{a_{ij}\}$ y varianza $\mathrm{var}\{a_{ij}\}$. Además, la covarianza de a_{ij} y $a_{i'j'}$ está dada como

$$\mathrm{cov}\{a_{ij}, a_{i'j'}\} = E\{(a_{ij} - E[a_{ij}])(a_{i'j'} - E[a_{i'j'}])\}.$$

Considere la i-ésima restricción

$$p\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i\right\} \geq 1 - \alpha_i$$

y definimos

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \qquad (3.15)$$

Entonces h_i está distribuida normalmente con

$$E\{h_i\} = \sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\} X_j \quad \text{y} \quad \mathrm{var}\{h_i\} = \overline{X}^T D_i \overline{X} \qquad (3.16)$$

donde

$$\overline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$$

$$D_i = \text{i-ésima matriz de covarianza} = \begin{pmatrix} \mathrm{var}\{a_{i1}\} & \cdots & \mathrm{cov}\{a_{i1}, a_{in}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}\{a_{in}, a_{i1}\} & \cdots & \mathrm{var}\{a_{in}\} \end{pmatrix} \qquad (3.17)$$

ahora,

$$p\{h_i \leq b_i\} = p\left\{\frac{h_i - \mu_i}{\sigma_{h_i}} \leq \frac{b_i - \mu_i}{\sigma_{h_i}}\right\} \geq 1 - \alpha_i$$

donde $(h_i - \mu_i)/\sigma_{h_i}$ es normal estándar. Lo que significa que

$$\Phi(K_{\alpha_i}) = 1 - \alpha_i \tag{3.18}$$

Entonces la desigualdad $p\{h_i \leq b_i\} \geq 1 - \alpha_i$ se verifica si y sólo si

$$\frac{b_i - \mu_i}{\sigma_{h_i}} \geq K_{\alpha_i} \tag{3.19}$$

lo que proporciona la restricción no lineal siguiente

$$\sum_{j=1}^{n} E[a_{ij}]X_j + K_{\alpha_i}\sqrt{\overline{X}^T D_i \overline{X}} \leq b_i \tag{3.20}$$

la cual es equivalente a la restricción estocástica original.

Para el caso especial en el que las distribuciones normales son independientes, se tiene que

$$\operatorname{cov}\{a_{ij}, a_{i'j'}\} = 0$$

esto se puede demostrar fácilmente de la definición de covarianza.

Y la última restricción se reduce a

$$\sum_{j=1}^{n} E[a_{ij}]X_j + K_{\alpha_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}[a_{ij}]X_j^2} \leq b_i$$

Esta restricción puede transformarse utilizando la transformación siguiente

$$Y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}[a_{ij}]X_j^2}, \qquad \text{para toda } i \tag{3.21}$$

Por lo que, la restricción original es equivalente a

$$\sum_{j=1}^{n} E[a_{ij}]X_j + K_{\alpha_i}Y_i \leq b_i$$

$$\text{y} \tag{3.22}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}[a_{ij}]X_j^2 - Y_i^2 = 0$$

donde $Y_i \geq 0$.

Ejemplo 3.3:

Un inversionista quiere arriesgar su capital en n acciones diferentes. Su selección es tal que asegure una probabilidad de 0.05 o menos, de perder en la inversión. Se tienen disponibles las estimaciones de los precios de las acciones en ese momento. Estas estimaciones son variables aleatorias, distribuidas normalmente con media μ_i y varianza σ_i^2. Si X_i es la fracción del capital disponible para invertir en la acción $i, i = 1,\ldots,n$, entonces el problema consiste en maximizar el rendimiento total de la inversión

$$\begin{cases} \text{Max } E[Y] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu_i}{c_i}\right)X_i \\ \text{s.a.} \\ P\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu_i}{c_i}\right)X_i\right] \geq 1.0\right\} \geq 0.95 \end{cases}$$

Donde c_i es el costo inicial de la acción i. El equivalente determinístico se logra utilizando la fórmula de inversión 3.15, obteniéndose la restricción

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mu_i}{c_i}\right]X_i - t\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{c_i}\right)^2\sigma_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \geq 1.0$$

El valor de t se obtiene de las tablas de la distribución normal, $K = F(t)$, cuando $K = 0.95$; el valor generado por las tablas es $t = 1.645$. El problema determinístico se convierte en uno no lineal que se puede resolver por los métodos de programación no lineal del capítulo anterior y queda la siguiente manera:

$$\begin{cases} \text{Max } E[Y] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu_i}{c_i}\right)X_i \\ \text{s.a.} \\ \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mu_i}{c_i}\right]X_i - t\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{c_i}\right)^2\sigma_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \geq 1.0 \end{cases}$$

3.5 Caso 2. Coeficientes b_i con distribución Normal.

En este caso únicamente b_i es normal con media μ_i y varianza σ_i^2. El análisis de este caso es muy similar al caso 1. Considere la restricción estocástica

$$p\left\{b_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j\right\} \geq \alpha_i \tag{3.23}$$

como en el caso 1,

$$p\left\{\frac{b_i-\mu_i}{\sigma_i} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j - \mu_i}{\sigma_i}\right\} \geq \alpha_i \tag{3.24}$$

esto puede suceder únicamente si

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j - \mu_i}{\sigma_i} \leq K_{\alpha_i} \tag{3.25}$$

por consiguiente, la restricción estocástica es equivalente a la restricción lineal determinística

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \leq \mu_i + K_{\alpha_i}\sigma_i \tag{3.26}$$

por lo que, en el caso 2 el modelo de restricciones aleatorias puede convertirse en un problema equivalente.

Ejemplo 3.4:

Considere el problema con restricciones aleatorias

$$\begin{cases} \text{Max} \quad Z = 5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \\ \text{s.a.} \\ p\{a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \leq 8\} \geq 0.95 \\ p\{5X_1 + X_2 + 6X_3 \leq b_2\} \geq 0.10 \\ X_j \geq 0 \end{cases}$$

Con las variables aleatorias a_{ij} con distribución normal con las siguientes medias y varianzas:

$$\begin{array}{lll} E[a_{11}] = 1 & E[a_{12}] = 3 & E[a_{13}] = 9 \\ \mathrm{var}[a_{11}] = 25 & \mathrm{var}[a_{12}] = 16 & \mathrm{var}[a_{13}] = 4 \end{array}$$

El parámetro b_2 está distribuido normalmente con media 7 y varianza 9.

De las tablas de la distribución normal obtenemos

$$K_{\alpha_1} = K_{0.05} \cong 1.645. \qquad K_{\alpha_2} = K_{0.10} \cong 1.285.$$

Para la primera restricción, la restricción deterministica equivalente está dada como

$$X_1 + 3X_2 + 9X_3 + 1.645\sqrt{25X_1^2 + 16X_2^2 + 4X_3^2} \le 8$$

y para la segunda restricción

$$5X_1 + X_2 + 6X_3 \le 7 + 1.285(3) = 10.855$$

por lo que el problema completo queda de la forma siguiente:

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Max } Z = 5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \\ \text{s.a.} \\ X_1 + 3X_2 + 9X_3 + 1.645\sqrt{25X_1^2 + 16X_2^2 + 4X_3^2} \le 8 \\ 5X_1 + X_2 + 6X_3 \le 10.855 \\ X_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{array}\right.$$

el cual, se resuelve por los métodos del capitulo pasado.

3.6 Caso 3. Todos los coeficientes a_{ij} y b_i con distribución Normal.

En este caso, todas las a_{ij} y b_i son variables aleatorias Normales independientes(para simplificar los cálculos). Ahora consideremos la restricción

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i$$

la cual se puede escribir como

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - b_i \leq 0 \tag{3.27}$$

de donde se puede ver que Y_i tiene distribución Normal con media μ_{Y_i} y varianza $\sigma_{Y_i}^2$.

Demostración:

Sea $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$ entonces $Y = w_i - b_i$ pero sabemos que w_i tiene distribución Normal con $\mu_{w_i} = \sum_{j=1}^{n} \mu_{a_{ij}} X_j$ y $\sigma_{w_i}^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{a_{ij}}^2 X_j^2$ (por el ejemplo 11 del capítulo 1).

Entonces

$$\begin{aligned}
\exp(tY_i) &= \exp[(w_i - b_i)t] = \exp(w_i t)\exp[(-t)b_i] = \\
&= \exp\left(\mu_{w_i} t + \frac{1}{2}\sigma_{w_i}^2 t^2\right)\exp\left(-\mu_{b_i} + \frac{1}{2}\sigma_{b_i}^2 t^2\right) = \\
&= \exp\left[(\mu_{w_i} - \mu_{b_i})t + \frac{1}{2}(\sigma_{w_i}^2 + \sigma_{b_i}^2)t^2\right]
\end{aligned}$$

por lo que Y_i se distribuye como una variable aleatoria Normal con $\mu_{Y_i} = \mu_{w_i} - \mu_{b_i}$ y $\sigma_{Y_i}^2 = \sigma_{w_i}^2 + \sigma_{b_i}^2$

$\square$

Esto muestra que la restricción aleatoria se reduce en este caso a la misma situación del caso 1, y se trata de forma similar.

Nuestro interés ahora se basa en encontrar el equivalente determinístico para la restricción

$$p\{Y_i \leq 0\} \tag{3.28}$$

ahora,

$$p\{Y_i \leq 0\} = p\left\{\frac{Y_i - \mu_{Y_i}}{\sigma_{Y_i}} \leq \frac{-\mu_{Y_i}}{\sigma_{Y_i}}\right\} \geq 1 - \alpha_i \tag{3.29}$$

de donde $(Y_i - \mu_{Y_i} / \sigma_{Y_i})$ tiene distribución Normal estándar.

Sea K_{α_i} el valor Normal estándar tal que

$$\Phi(K_{\alpha_i}) = 1 - \alpha_i$$

Entonces la desigualdad $p\{Y_i \leq 0\} \geq 1 - \alpha_i$ se verifica si y sólo si

$$\frac{-\mu_{Y_i}}{\sigma_{Y_i}} \geq K_{\alpha_i} \tag{3.30}$$

lo que proporciona la siguiente restricción determinística equivalente

$$\mu_{Y_i} + K_{\alpha_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma_{a_{ij}}^2 + \sigma_{b_i}^2\right)X_j} \leq 0 \tag{3.31}$$

Con lo que queda el programa deterministico completo.

APÉNDICE I

Funciones Indicadoras

Definición . Una función "indicadora" de un conjunto A es una función que toma el valor de 1 en todos los puntos de A y el valor de 0 en todos los puntos de A', y se denota mediante $I_{\{A\}}$: Por tanto $I_{\{A\}}(x)=1$ si $x \in A$ e $I_{\{A\}}(x)=0$ en los demás casos.

Dos de las propiedades básicas para el uso de las funciones indicadoras son las siguientes.

1. El producto de funciones indicadoras puede reemplazarse por una sola función indicadora; para ser mas específicos, para los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tenemos:

$$I_{\{A_1\}} I_{\{A_2\}} \cdots I_{\{A_n\}} = I_{\{A_1 A_2 \cdots A_n\}}. \qquad (1)$$

Por lo que el producto de las funciones indicadoras de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es igual a la función indicadora de la intersección de los mismos conjuntos. Estrictamente hablando, este método es una forma abreviada de escribir la siguiente familia de ecuaciones: para cada observación x.

$$I_{\{A_1\}}(x) I_{\{A_2\}}(x) \cdots I_{\{A_n\}}(x) = I_{\{A_1 A_2 \cdots A_n\}}(x). \qquad (2)$$

2. La suma de funciones indicadoras en algunas circunstancias se puede expresar como una sola función indicadora . Si los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes, entonces:

$$I_{\{A_1\}} + I_{\{A_2\}} + \cdots + I_{\{A_n\}} = I_{\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\}}.$$

Un resultado importante se obtiene cuando $n=2$ y $A_2 = A_1^c$. Entonces $A_1 \cup A_2 = A$, donde A es el total, lo que implica que $I_{\{A_1 \cup A_2\}}$ es idénticamente igual a uno. Por lo que para un evento A

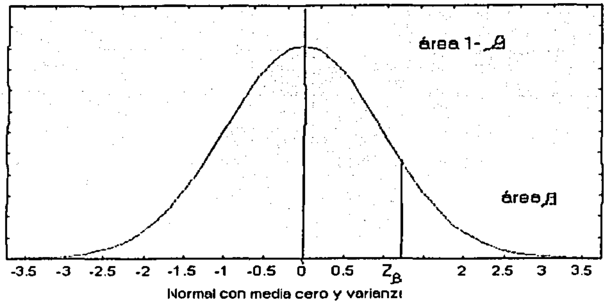
$$I_{\{A\}} + I_{\{A^c\}} = 1, \text{ entonces } I_{\{A^c\}} = 1 - I_{\{A\}}.$$

Por ejemplo, sean A y B dos conjuntos, entonces:

$$\begin{aligned}
I_{\{A \cup B\}} &= 1 - I_{\{A^c B^c\}} \\
&= 1 - I_{\{A^c\}} I_{\{B^c\}} \\
&= 1 - \left(1 - I_{\{A\}}\right)\left(1 - I_{\{B\}}\right) \\
&= I_{\{A\}} + I_{\{B\}} - I_{\{AB\}}.
\end{aligned}$$

APÉNDICE II

Tabla de la distribución Normal estándar acumulativa.



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,5	0,00023267	0,0002241	0,00021582	0,00020782	0,00020010	0,00019266	0,00018547	0,00017853	0,00017184	0,00016538
-3,4	0,00033698	0,00032487	0,00031316	0,00030184	0,00029091	0,00028034	0,00027013	0,00026028	0,00025075	0,00024156
-3,3	0,00048348	0,00046654	0,00045014	0,00043429	0,00041895	0,00040411	0,00038977	0,00037589	0,00036248	0,00034952
-3,2	0,0006872	0,00066374	0,00064102	0,00061901	0,00059771	0,00057709	0,00055712	0,0005378	0,0005191	0,000501
-3,1	0,00096767	0,0009355	0,00090432	0,0008741	0,00084481	0,00081642	0,00078891	0,00076226	0,00073644	0,00071143
-3.0	0,00134997	0,00130631	0,00126394	0,00122284	0,00118296	0,00114428	0,00110675	0,00107036	0,00103507	0,00100085
-2,9	0,00186588	0,00180721	0,00175022	0,00169488	0,00164113	0,00158894	0,00153826	0,00148907	0,00144131	0,00139496
-2,8	0,00255519	0,00247714	0,00240124	0,00232746	0,00225574	0,00218603	0,00211827	0,00205242	0,00198844	0,00192628
-2,7	0,00346702	0,00336421	0,00326415	0,00316677	0,00307201	0,00297982	0,00289012	0,00280287	0,002718	0,00263546
-2,6	0,00466122	0,00452715	0,00439653	0,00426928	0,00414534	0,00402463	0,00390708	0,00379261	0,00368115	0,00357265
-2,5	0,00620968	0,00603657	0,00586776	0,00570315	0,00554265	0,00538617	0,00523363	0,00508495	0,00494005	0,00479883
-2,4	0,00819753	0,00797626	0,00776025	0,00754941	0,00734363	0,00714281	0,00694686	0,00675566	0,00656913	0,00638717
-2,3	0,01072408	0,01044405	0,01017041	0,00990305	0,00964185	0,00938669	0,00913745	0,00889403	0,00865631	0,00842418
-2,2	0,0139034	0,01355253	0,01320934	0,01287368	0,01254542	0,01222443	0,01191059	0,01160376	0,01130381	0,01101063
2,1	0,01786436	0,01742912	0,01700296	0,01658575	0,01617733	0,01577755	0,01538628	0,01500337	0,01462868	0,01426207
-2 0	0,02275006	0,02221552	0,02169162	0,0211782	0,02067509	0,02018215	0,0196992	0,01922611	0,0187627	0,01830884
-1 9	0,02871649	0,02806654	0,02742888	0,02680335	0,02618978	0,02558799	0,02499783	0,02441912	0,02385169	0,0232954
-1,8	0,03593027	0,03514784	0,03437945	0,03362491	0,03288406	0,03215671	0,0314427	0,03074184	0,03005397	0,02937891
-1,7	0,04456543	0,0436329	0,04271618	0,0418151	0,04092947	0,04005911	0,03920386	0,03836352	0,03753793	0,0367269
-1,6	0,05479929	0,05369892	0,05261613	0,05155074	0,05050257	0,04947145	0,04845721	0,04745966	0,04647863	0,04551395
-1,5	0,06680723	0,06552174	0,06425551	0,06300838	0,06178019	0,06057077	0,05937995	0,05820756	0,05705344	0,0559174
-1,4	0,08075671	0,07926989	0,07780389	0,07635856	0,07493374	0,0735293	0,07214508	0,07078091	0,06943666	0,06811215
-1,3	0,09680055	0,09509798	0,09341757	0,0917592	0,09012273	0,08850805	0,08691502	0,08534351	0,08379338	0,08226449
-1,2	0,11506973	0,11313951	0,1112325	0,10934862	0,10748776	0,10564984	0,10383475	0,10204238	0,10027263	0,09852539
-1,1	0,1356661	0,13349956	0,13135693	0,12923816	0,12714320	0,12507199	0,12302446	0,12100054	0,11900017	0,11702326
-1 0	0,15865526	0,15624765	0,15386424	0,15150502	0,14916997	0,14685908	0,14457233	0,14230969	0,14007112	0,13785661
-0,9	0,18406009	0,18141123	0,17878635	0,17618552	0,17360876	0,17105611	0,1685276	0,16602324	0,16354306	0,16108706
-0,8	0,21185533	0,20897003	0,20610799	0,20326933	0,20045414	0,19766249	0,19489447	0,19215016	0,18942961	0,18673291