

01174  
1



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERÍA

## Análisis de Datos de Presión y Producción de Pozos Parcialmente Penetrantes en Sistemas Fracturados Vugulares bajo la Influencia de Acuífero y Casquete de Gas

### T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA (PETROLERA)

PRESENTA:  
GORGONIO FUENTES CRUZ

ASESOR:  
DR. RODOLFO G. CAMACHO VELÁZQUEZ

2 0 0 3



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## AGRADECIMIENTOS

A Dios, por darme la oportunidad de enfrentar retos y encontrar a las personas adecuadas para superarlos.

A mi madre, Sra. Violeta Cruz Angulo, por su amor infinito y abnegado que siempre me fortalece.

A mi padre, Sr. Candelario Fuentes Sánchez (q.e.p.d.), por su imagen sesuda que a pesar de su ausencia, perdura en mí.

A mis hermanos, Reyna, Sergio, Manuel y Roberto, por darme el mejor ejemplo de trabajo en equipo.

A mis tíos, Onésimo y María, por estar siempre conmigo en las etapas buenas y malas.

Al M en I. Hiram Villalobos López, por brindarme la oportunidad de incursionar en el ámbito petrolero e impulsarme como profesionista.

A mis compañeros de trabajo, Gerardo, José Inés y Vinicio, por su amistad incondicional.

A mi novia Silvia, por brindarme su amistad, apoyo y amor.

A mis amigos y equipo, Rafael, Luis, Ulises y Víctor, por su invaluable amistad y compañerismo.

Al M en I. Mario A. Vásquez Cruz, por darme la oportunidad real para estudiar el posgrado y por sus observaciones en la realización de este trabajo.

Al mi maestro, el Dr. Rodolfo G. Camacho Velázquez, por su guía durante mi estancia en el posgrado, así como por sus opiniones oportunas para realizar esta tesis.

Al Dr. Heber Cinco Ley, Dr. Fernando Samaniego Verduzco y al Dr. Fernando J. Rodríguez de la Garza, por la revisión realizada a esta tesis.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por ser una gran institución.

Al Instituto Mexicano del Petróleo, por brindarme el apoyo para realizar mis estudios de posgrado.

Autorizo a la Dirección General de Estudios y a la UNAM a difundir en formato electrónico y en papel el contenido de mi trabajo académico.

NOMBRE: Gorgonio Fuentes

Cruz

FECHA: 23/oct/2003

FIRMA: [Firma manuscrita]

# CONTENIDO

<b>RESUMEN</b>	i
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	ii
<b>CAPÍTULO 1 : Introducción</b>	1
<b>CAPÍTULO 2: Antecedentes</b>	4
2.1 Penetración parcial en yacimientos homogéneos	4
2.2 Yacimientos naturalmente fracturados	6
<b>CAPÍTULO 3: Modelo Matemático</b>	9
<b>CAPÍTULO 4: Resultados</b>	15
4.1 Modelo 1: Cima y base a presión especificada y frontera externa infinita	16
4.2 Modelo 2: Cima y base a presión especificada y frontera externa finita a presión $p_{eD}(t_D)$	20
4.2.1 Solución en el espacio del Laplace	20
4.2.2 Inversión analítica a cualquier tiempo	21
4.2.3 Inversión analítica a tiempos cortos	23
4.2.4 Inversión analítica a tiempos largos	27
4.2.5 Respuesta de presión a tiempos largos. Estado estacionario	29
4.3 Modelo 3: Cima y base a presión especificada y frontera externa finita con gasto $q_{eD}(t_D)$	31
4.3.1 Solución en el espacio de Laplace	31
4.3.2 Inversión analítica a cualquier tiempo	32
4.3.3 Inversión analítica a tiempos largos	33
4.4 Modelo 4: Cima y base a gasto especificado y frontera externa infinita	35
4.4.1 Solución en el espacio de Laplace	35
4.4.2 Inversión analítica a tiempos cortos	36
4.4.3 Inversión analítica a tiempos largos	37

4.5 Modelo 5: Cima y base a gasto especificado y frontera externa a presión $p_{eD}(t_D)$	37
4.5.1 Solución en el espacio de Laplace	38
4.5.2 Inversión analítica a tiempos largos	38
4.6 Modelo 6: Cima, base y frontera externa a gasto especificado	39
4.6.1 Solución en el espacio de Laplace	40
4.6.2 Inversión analítica a tiempos largos	40
4.7 Modelo 7: Fronteras mixtas en la cima y en la base, frontera externa infinita.	41
4.8 Comportamiento de curvas de declinación	43
<b>CAPÍTULO 5: Análisis de Resultados</b>	45
5.1 Modelo 1	45
5.2 Modelo 2	48
5.3 Modelo 3	59
5.4 Modelo 4	63
5.5 Modelo 5	67
5.6 Modelo 6	70
5.7 Modelo 7	71
5.8 Curvas de declinación	74
<b>CAPÍTULO 6: Conclusiones</b>	81
<b>NOMENCLATURA</b>	83
<b>REFERENCIAS</b>	85
<b>APÉNDICE A: Inversión Analítica del Modelo 2, Yacimiento Homogéneo</b>	88
<b>APÉNDICE B: Inversión Analítica del Modelo 2, Yacimiento Fracturado Vugular</b>	92
<b>APÉNDICE C: Modelo 4, desarrollos matemáticos</b>	96

## RESUMEN

La mayor parte de las investigaciones relacionadas con el análisis de Pruebas de Variación de Presión y de las Curvas de Declinación, considera que el pozo se encuentra terminado a lo largo del espesor total de la formación productora. Sin embargo en la práctica, en diversos yacimientos los pozos son acondicionados con terminaciones parciales, es decir, solo una porción del horizonte productor es perforado. Esto puede deberse a varias razones, pero la más común es evitar o retardar la producción de fluidos indeseables, como gas y agua. A los pozos que presentan este esquema de terminación se les denomina como pozos parcialmente penetrantes.

Por otro lado, es un hecho que el mayor porcentaje de la producción de hidrocarburos a nivel mundial, proviene de Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF). A menudo, el comportamiento de estos sistemas se representa con modelos de doble porosidad. Sin embargo, cuando un caso en particular exhibe además de fracturas naturales presencia de vugulos, los modelos tradicionales no son suficientes para captar algunas características asociadas a la presencia de la porosidad vugular.

Con base en lo anterior, en este trabajo se analiza el comportamiento de presión y producción para el caso de pozos parcialmente penetrantes terminados en YNF vugulares. De esta forma, se proponen nuevos modelos generalizados, los cuales contribuyen a identificar y evaluar en forma más realista el comportamiento de presión a nivel de pozo en este escenario, con presencia de un acuífero y/o casquete de gas, considerando además sistemas infinitos y cerrados.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1:	Pozo parcialmente penetrante bajo la influencia de un acuífero y un casquete de gas.	10
Figura 2:	Comparación entre el Modelo de Warren y Root y el Modelo 1 de Triple Porosidad	46
Figura 3:	Comparación entre la respuesta para Yacimiento Homogéneo y el Modelo 1 de Triple Porosidad.	47
Figura 4:	Efecto de $h_{pD}$ , Modelo 2	49
Figura 5:	Efecto de $h_{1D}$ , Modelo 2	50
Figura 6:	Efecto de $\omega_v$ , Modelo 2	51
Figura 7:	Efecto de $\omega_v$ , Modelo 2	51
Figura 8:	Efecto de $\lambda_{vf}$ , Modelo 2	52
Figura 9:	Efecto de $\lambda_{vf}$ , Modelo 2	52
Figura 10:	Función derivada generada con la ecuación (62) y con Stehfest	53
Figura 11:	Efecto de $\lambda_{mv}$ , Modelo 2	54
Figura 12:	Efecto de $\lambda_{mv}$ , Modelo 2	55
Figura 13:	Efecto de $h_D$ para diferentes valores de anisotropía, Modelo 2	55
Figura 14:	$h_{pD}p_D$ y línea fuente vs $t_D$ , Modelo 2	56
Figura 15:	Aproximación a tiempos largos usando $g(u)=1$ , Modelo 2	57
Figura 16:	Aproximación a tiempos largos usando las ecuaciones (91) y (97)	58
Figura 17:	Aproximación a tiempos largos usando las ecuaciones (91) y (97)	58
Figura 18:	Comparación entre el Modelo 2 y 3	59

Figura 19: Comparación entre el Modelo 2 y 3	60
Figura 20: Efecto de $h_D$ en el Modelo 3	61
Figura 21: Comparación entre el Modelo 2 y 3 en gráfica semilogarítmica	61
Figura 22: Aproximación a tiempos largos con $g(u)=1$	62
Figura 23: Aproximación a tiempos largos usando las ecuaciones (120) y (125)	63
Figura 24: Comparación entre el Modelo de triple porosidad y el Modelo de Bui <i>et al.</i>	64
Figura 25: $h_{ppD}$ y línea fuente vs $t_D$ , Modelo 4	65
Figura 26: Yacimiento Homogéneo, Modelo 4	65
Figura 27: Efecto de $\lambda_{mf}$ , Modelo 4	66
Figura 28: Aproximación a tiempos largos, Modelo 4	67
Figura 29: Respuesta del Modelo 5 y aproximación a tiempos largos.	68
Figura 30: Yacimiento Homogéneo y aproximación a tiempos largos, Modelo 5.	69
Figura 31: Aproximación a tiempos largos con la Ec. (142), Modelo 5.	69
Figura 32: Aproximación a tiempos largos con la Ec. (146), Modelo 6	70
Figura 33: Aproximación a tiempos largos con la Ec. (146), Modelo 6.	71
Figura 34: Comparación entre el Modelo 7 y 1	72
Figura 35: Efecto de $h_{1D}$ , Modelo 7	73
Figura 36: Efecto de $h_D$ , Modelo 1 y 7	73
Figura 37: Efecto de $\omega_v$ , Modelo 2	76



Figura 38: Efecto de $\omega_v$ , Modelo 2	76
Figura 39: Efecto de $\lambda_{vf}$ , Modelo 2	77
Figura 40: Efecto de $\lambda_{vf}$ , Modelo 2	77
Figura 41: Efecto de $h_{pD}$ , Modelo 2	78
Figura 42: $q_D/h_{pD}$ vs $t_D$ , Modelo 2	79
Figura 43: Efecto de $h_D$ , Modelo 3	80

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

En muchos yacimientos de hidrocarburos los pozos productores son acondicionados con terminaciones parciales y se clasifican como parcialmente penetrantes, es decir, solamente producen de una porción de la zona productora. Esto se efectúa por diversas razones, pero la más común es evitar o retardar la invasión de fluidos no deseados como gas y agua al pozo. En particular, para la interpretación de pruebas de pozos, la penetración parcial origina un comportamiento de presión característico, que si no es evaluado adecuadamente, puede conducir a errores en la interpretación de datos de pruebas de pozos.

Por otro lado, muchos yacimientos naturalmente fracturados a nivel mundial, se representan mediante modelos de doble porosidad. Sin embargo, cuando la presencia de vóculos en la formación es importante, los modelos de doble porosidad clásicos no son suficientes para captar algunas características que surgen como consecuencia de la presencia de dichas heterogeneidades. Además, se ha mostrado que la presencia de vóculos tiene una influencia definitiva en el comportamiento de presión y en las curvas de declinación (Camacho, *et al.*, 2002). Por esta razón, existe la necesidad de modelar este tipo de sistemas tomando en cuenta la presencia de vóculos.

Los sistemas fracturados vóculares se presentan frecuentemente en yacimientos carbonatados. Estos sistemas porosos son complejos debido a que los carbonatos son particularmente sensibles a la diagénesis, incluyendo disolución, dolomitización y los procesos de fracturamiento. Los vóculos son el resultado de disolución de carbonatos y/o sulfatos.

Comúnmente en yacimientos naturalmente fracturados vugulares se encuentran tres tipos de porosidad: la de matriz, fracturas y vúgulos. La porosidad vugular se define como el espacio poroso que es más grande que las partículas de roca que lo rodean.

Diversos trabajos han reconocido la importancia de la porosidad vugular en las características petrofísicas y productivas de este tipo de yacimientos (Lucía,1983, Camacho *et al.*,2002). La influencia de la porosidad vugular sobre el comportamiento del sistema ha motivado su estudio en lo que respecta a la respuesta de presión y datos de declinación (Camacho *et al.*,2002), ya que, si bien el número de parámetros a controlar aumenta (lo cual hace más compleja la caracterización del sistema), el modelo de doble porosidad no es suficiente para ajustar y caracterizar a este tipo de yacimientos.

Los vúgulos pueden estar conectados o desconectados; su efecto sobre la permeabilidad está relacionado con su conectividad, lo cual puede originar alta permeabilidad en zonas vugulares. La presencia de alta porosidad y alta permeabilidad en zonas vugulares puede reducir la efectividad del desplazamiento con agua, dejando una gran cantidad de aceite en la matriz rocosa.

Con base en lo anterior, es importante estudiar a los sistemas fracturados vugulares tomando en cuenta la penetración parcial de los pozos bajo diferentes condiciones de frontera de interés. Así, el objetivo del presente trabajo es determinar la influencia de los vúgulos y/o fracturas en los datos de presión y producción recabados en pozos parcialmente penetrantes, considerando la presencia de fronteras debidas a la acción del acuífero y/o del casquete de gas, así como de fronteras cerradas al flujo.

Así, los alcances de esta tesis son presentar las características especiales de las formas de las curvas de decremento de presión y de las curvas de declinación de pozos parcialmente penetrantes en yacimientos fracturados

vulgares, con el objeto de que puedan ser usadas para identificar sistemas con presencia de acuífero y/o casquete de gas, así como sistemas cerrados.

Finalmente, es importante mencionar que la contribución académica de este trabajo es aportar nuevas ideas para el análisis del comportamiento de pozos parcialmente penetrantes en sistemas fracturados vulgares; aplicando estos desarrollos teóricos al análisis de datos de presión y producción recabados en varios yacimientos de México, susceptibles de representarse con el modelo propuesto.

# C A P Í T U L O 2

## ANTECEDENTES

Existen muchos trabajos en la literatura que abordan el tema de la penetración parcial, pero casi todos están dirigidos a yacimientos homogéneos; solo un artículo de la literatura petrolera aborda el tema de penetración parcial (Bui *et al.*, 2000) considerando el modelo de doble porosidad. Además, hasta donde se sabe, en ningún trabajo se ha estudiado el efecto de la penetración parcial en sistemas naturalmente fracturados vugulares.

### 2.1 Penetración parcial en yacimientos homogéneos

En uno de los primeros trabajos sobre penetración parcial, Nisle (1958) usó la solución de punto fuente en la ecuación de difusión para resolver el problema de penetración parcial con flujo uniforme, y yacimiento isótropo. Nisle construyó curvas sintéticas de incremento de presión para varias fracciones de penetración, y encontró que las curvas teóricas mostraron dos porciones de línea recta semilogarítmicas: una a tiempos cortos con una pendiente inversamente proporcional a la capacidad de flujo del intervalo abierto, y otra a tiempos largos cuya pendiente es inversamente proporcional a capacidad de flujo total de la formación. El autor mostró que teóricamente es posible calcular la fracción de penetración a partir de la razón entre la pendiente a tiempos largos y la pendiente a tiempos cortos de la curva de incremento. Asimismo, el espesor efectivo de la formación puede obtenerse a partir de la fracción de penetración calculada y el espesor del intervalo productor conocido.

Por otro lado, Bilhartz y Ramey (1977) concluyeron que el efecto del almacenamiento usualmente enmascara la existencia de la penetración parcial, lo cual implica que no puede obtenerse información del grado de anisotropía ni

de penetración parcial si los efectos de almacenamiento son dominantes. Estos autores consideran radio finito del pozo, almacenamiento y daño, además de una conductividad infinita en el pozo y un yacimiento cerrado en la cima, base y frontera externa.

Buhidma y Raghavan (1980) mostraron que si existe una frontera a presión constante en la cima o en la base del yacimiento, entonces la línea recta semilogarítmica, la cual indica flujo pseudoradial, no existe. Esta conclusión implica que, para esta situación, la capacidad de flujo de la formación y el factor de daño no pueden determinarse por medio de los análisis convencionales. Además, la permeabilidad vertical no puede determinarse por métodos basados en la existencia del periodo de flujo pseudoradial si el acuífero es dominante. Concluyen además que cuando la longitud adimensional del pozo es mayor o igual a 100, la capacidad de flujo del intervalo abierto puede determinarse del periodo transitorio a tiempos cortos. También establecen que la permeabilidad vertical puede determinarse de una prueba de decremento cuando el final del periodo transitorio a tiempos cortos haya sido identificado. Los autores suponen conductividad infinita en el pozo, un yacimiento rectangular con cima y frontera externa cerradas, mientras la base la consideran a presión constante.

Por su parte, Yildiz (1990) presentó una forma relativamente fácil de calcular el comportamiento transitorio de presión en pozos parcialmente penetrantes en yacimientos homogéneos, cuando la cima y la base están cerradas al flujo y la frontera externa es infinita. Yildiz concluye que lo que parece una línea recta a tiempos cortos, es el resultado de un punto de inflexión. También concluye que la permeabilidad horizontal puede calcularse de la pendiente de la línea recta a tiempos largos y que el factor de daño total puede calcularse usando la técnica de análisis convencional.

## 2.2 Yacimientos naturalmente fracturados

En el caso de yacimientos naturalmente fracturados, Warren y Root (1963) consideraron un modelo formado por dos medios uniformemente distribuidos: matriz y fractura. La matriz se consideró como de alta capacidad de almacenamiento y baja permeabilidad, mientras que las fracturas fueron consideradas con baja capacidad de almacenamiento y alta permeabilidad. Los autores también supusieron que no hay difusión radial dentro de la matriz, y que el fluido se desplaza hacia los pozos a través del sistema de fracturas. En este modelo se considera que el flujo de fluidos de la matriz al sistema de fracturas es proporcional a la diferencia de presión entre los dos medios. Los autores concluyeron que son suficiente dos parámetros para describir el comportamiento de un medio con doble porosidad.

Abdassah y Ershaghi (1986) propusieron un modelo para sistemas de triple porosidad y una permeabilidad para representar yacimientos naturalmente fracturados. Estos autores consideraron un modelo de flujo interporoso transitorio entre el sistema de fracturas con dos tipos de bloques de matriz, considerando además flujo primario únicamente a través del sistema de fracturas.

En un trabajo más reciente, Bui *et al.* (2000) presentaron un artículo de análisis de pruebas transitorias de presión para pozos parcialmente penetrantes en yacimientos naturalmente fracturados. Dicho trabajo consideró que la cima y la base de la formación están cerradas al flujo y que el yacimiento es infinito, además propone la hipótesis de que los bloques de matriz se representan por un sistema de paralelepípedos uniformes rectangulares, pero esta hipótesis puede relajarse, ya que los autores utilizaron el modelo de Warren y Root (1963), el cual es válido independientemente de la forma de los bloques de matriz. En cuanto a la forma de resolver el problema, los autores no aportan ideas nuevas, ya que la metodología para construir la solución al problema planteado, si bien creativa, ya había sido expuesta por Houze *et al.* (1984),

quienes a su vez, apuntan que Gringarten (1974) ya la había propuesto. De hecho, la Figura 2 del artículo de Bui *et al.* (2000), es la misma que mostró Houze *et al.* (1984). Pero la forma de resolver el problema no es lo importante, lo medular es llegar a un resultado nuevo y que aporte conocimientos; así, en este trabajo se logró aportar ideas nuevas al resolver un modelo que no había sido reportado en la literatura y que es de interés práctico.

Bui *et al.* muestran que el tiempo en el cual se presenta el mínimo relativo en la función derivada, es el mismo independientemente del valor de la fracción de penetración, sería interesante (y se hará como parte de este trabajo) analizar si este comportamiento se observa para yacimientos naturalmente fracturados vugulares; el artículo de los autores no muestra los valores de la fracción de penetración tomados para generar estos resultados en la Figura 5 de dicho artículo. El trabajo presentado por Bui *et al.*, se puede mejorar, ya que es fácil incorporar a su modelo los parámetros vugulares, y de esta forma realizar un análisis para el caso de Yacimientos Fracturados Vugulares que incluya pozos con penetración parcial, ya que para el caso de flujo primario a través del sistema de fracturas, la ecuación diferencial en el espacio de Laplace es semejante a la ecuación usada por Bui *et al.*, la diferencia reside en la función  $f(u)$ , la cual debe sustituirse por la función  $g(u)$  mostrada en esta tesis.

Camacho *et al.* (2002) propusieron un modelo para representar yacimientos naturalmente fracturados con presencia de vugulos. El modelo presentado por los autores es de triple porosidad y doble permeabilidad, considerando flujo interporoso pseudoestacionario. Los autores mostraron que la presencia de vugulos puede tener una influencia definitiva sobre el comportamiento de las curvas de declinación y en la producción acumulada. Los autores indican que son necesarios cinco parámetros para describir el comportamiento de este tipo de sistemas: tres parámetros que controlan la transferencia de fluidos entre los distintos medios y dos parámetros relativos a la capacidad de almacenamiento, uno para las fracturas y otro para los vugulos.



En lo que respecta a curvas de declinación, Ehlig-Economides y Ramey (1979) presentaron un trabajo relacionado con el análisis de curvas de declinación transitoria para pozos que producen a presión constante. Dichos autores concluyeron que para cada método de pruebas de presión, parece existir un método análogo de presión constante. También sugirieron la investigación para mejorar las mediciones de gasto ya que la teoría de pruebas a presión constante debería ser tan entendida como la teoría de pruebas transitorias de presión (a gasto constante).

Finalmente, Da Prat *et al.* (1980) realizaron un estudio de curvas de declinación usando curvas tipo para sistemas de doble porosidad. Los autores concluyeron que la declinación inicial de la producción frecuentemente no es representativa del estado final de declinación, ya que en el caso de yacimientos de doble porosidad, la producción muestra una declinación rápida al inicio, después llega a ser casi constante durante un periodo largo de tiempo y posteriormente toma lugar una declinación final. Así, los ajustes de curvas tipo basadas solo en la declinación inicial, pueden conducir a valores erróneos del radio de drene adimensional si el sistema se considera homogéneo.

# C A P Í T U L O 3

## M O D E L O M A T E M Á T I C O

Consideremos un pozo vertical parcialmente penetrante (Figura 1), el cual produce a gasto variable  $q(t)$  en un yacimiento naturalmente fracturado vugular, sometido a empuje hidráulico y de un casquete de gas. El intervalo perforado tiene un espesor  $h_p = h_2 - h_1$ .

Supongamos además que el yacimiento es horizontal, anisótropo, con simetría radial y un espesor total  $h$ . Además, la viscosidad del fluido permanece constante e independiente de la presión.

Así mismo, consideremos que el flujo a través del yacimiento y cerca del pozo es laminar, y que el flujo interporoso ocurre bajo condiciones pseudoestacionarias.

En lo que respecta a la extensión radial del yacimiento, consideraremos los casos infinito y finito. Para este último, la geometría del área de drene se considera circular.

Finalmente, supongamos que existe una distribución de presión inicial constante y uniforme a través del yacimiento al inicio de la producción, que los efectos de almacenamiento, daño y gravitacionales son despreciables, los gradientes de presión son pequeños, y que el flujo es isotérmico.

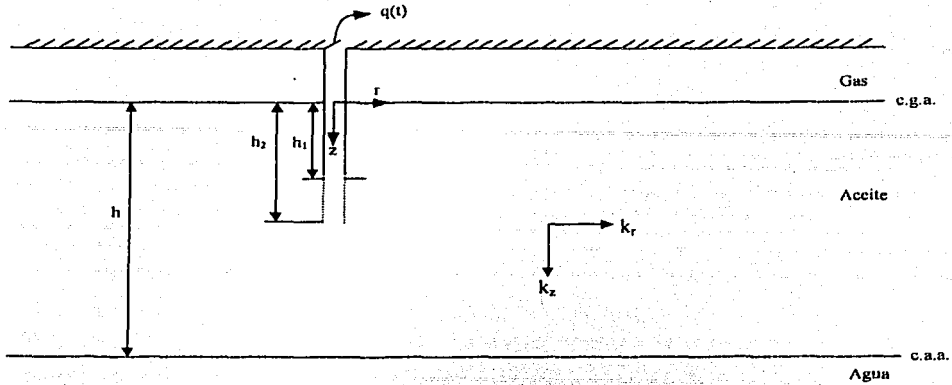


Fig. 1: Pozo parcialmente penetrante bajo la influencia de un acuífero y un casquete de gas.

De acuerdo a lo anterior, la ecuación diferencial para el sistema de fracturas, en términos de variables adimensionales, para el modelo de triple porosidad-doble permeabilidad (Camacho *et al.*, 2002) es la siguiente:

$$\kappa_r \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) + \kappa_z \frac{1}{h_D^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial z_D^2} + \lambda_{mf} (p_{Dm} - p_{Df}) + \lambda_{vf} (p_{Dv} - p_{Df}) = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} \quad (1)$$

Mientras que la ecuación para los bloques de matriz está dada como:

$$-\lambda_{mv} (p_{Dm} - p_{Dv}) - \lambda_{mf} (p_{Dm} - p_{Df}) = (1 - \omega_f - \omega_v) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \quad (2)$$

y para los vóculos:

$$(1 - \kappa_r) \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right) + (1 - \kappa_z) \frac{1}{h_D^2} \frac{\partial^2 p_{Dv}}{\partial z_D^2} + \lambda_{mv} (p_{Dm} - p_{Dv}) - \lambda_{vf} (p_{Dv} - p_{Df}) = \omega_v \frac{\partial p_{Dv}}{\partial t_D} \quad (3)$$

donde:

$$p_{ij} = 2\pi(k_f + k_v)_r h(p_i - p_j) / [q\mu B] \quad (j = \text{fracturas o v\u00edgulos}) \quad (4)$$

$$t_D = (k_f + k_v)_r t / [(\phi_f c_f + \phi_m c_m + \phi_v c_v) \mu r_w^2] \quad (5)$$

$$\kappa_i = k_{fi} / [k_f + k_v]_r \quad (i = r \text{ o } z) \quad (6)$$

$$\lambda_{mf} = \sigma_{mf} k_m r_w^2 / [k_f + k_v]_r \quad (7)$$

$$\lambda_{mv} = \sigma_{mv} k_m r_w^2 / [k_f + k_v]_r \quad (8)$$

$$\lambda_{vf} = \sigma_{vf} k_v r_w^2 / [k_f + k_v]_r, \quad k_{vf} = k_v \text{ si } p_v > p_f, k_{vf} = k_f \text{ en otro caso} \quad (9)$$

$$\omega_f = \phi_f c_f / [\phi_f c_f + \phi_m c_m + \phi_v c_v] \quad (10)$$

$$\omega_v = \phi_v c_v / [\phi_f c_f + \phi_m c_m + \phi_v c_v] \quad (11)$$

$$r_D = r / r_w \quad (12)$$

$$z_D = z / h \quad (13)$$

$$h_D = \frac{h}{r_w} \sqrt{\frac{(k_f + k_v)_r}{(k_f + k_v)_z}} \quad (14)$$

Nuestro objetivo es resolver las ecuaciones (1), (2) y (3) bajo condiciones de flujo primario \u00fanicamente a trav\u00e9s de las fracturas, considerando frontera externa infinita, a presi\u00f3n constante y frontera externa cerrada. As\u00ed, planteamos el Modelo 1, el cual tiene las siguientes condiciones de frontera:

$$p_{Dj}(r_D, 0, t_D) = p_{12D}(t_D) \quad (15)$$

$$p_{Dj}(r_D, 1, t_D) = p_{22D}(t_D) \quad (16)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Dj}(r_D, z_D, t_D) = 0 \quad (17)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left( r_D \frac{\partial p_{Dj}}{\partial r_D} \right) = E(z_D) q_{Dj}(t_D) \quad (18)$$

donde:

$$E(z_D) = H(z_D - h_{1D}) - H(z_D - h_{2D}) \quad (19)$$

Como se está considerando una distribución de presión uniforme e igual a la presión inicial a través del yacimiento antes de la prueba, la condición inicial es:

$$p_{Dj}(r_D, z_D, 0) = 0 \quad \text{en} \quad t_D = 0 \quad (20)$$

Las ecuaciones (15) y (16) se refieren a las condiciones en la cima y en la base del yacimiento; si  $p_{1z}$  y  $p_{2z}$  son iguales a cero, entonces consideramos el caso de frontera a presión constante igual a la presión inicial del yacimiento. Es común encontrar en la literatura que una capa de gas o un acuífero proporcionan soporte de presión, es decir, la influencia de una capa de gas o un acuífero es similar a una frontera a presión constante. Existen situaciones reales en las cuales un acuífero o una capa de gas pueden mantener una presión aproximadamente constante en las fronteras; por ejemplo, cuando se tiene inyección de gas en una capa de gas para el mantenimiento de la presión, o cuando tenemos un acuífero asociado y conectado hidrodinámicamente a un cuerpo de agua grande, tal como un océano o el fondo de un lago.

La ecuación (17) indica que el yacimiento es infinito y estamos considerando que la presión es constante e igual a la presión inicial en la zona no perturbada del yacimiento.

Las ecuaciones (18) y (19) indican que existe flujo uniforme a través del intervalo disparado  $h_p$ ; dicho flujo puede ser dependiente del tiempo. Además, las ecuaciones (18) y (19) indican que no existe flujo al pozo fuera del intervalo disparado.

El Modelo 2, considerará las condiciones de frontera (15), (16) y (18), pero la condición (17) será sustituida por la siguiente expresión:

$$p_{1D}(r_{eD}, z_D, t_D) = p_{eD}(t_D) \quad (21)$$

Es decir, el Modelo 2 supone cima y base a presión especificada, y yacimiento finito con presión externa, en general, dependiente del tiempo. Si  $p_{eD}$  es igual a cero, estaremos en el caso de presión externa constante e igual a la presión inicial.

El Modelo 3, también considerará las condiciones de frontera (15), (16) y (18), pero la condición de frontera externa estará definida de la siguiente forma:

$$\left( r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=r_{eD}} = q_{eD}(t_D) \quad (22)$$

Es decir, tendremos flujo dependiente del tiempo en  $r_D=r_{eD}$ . Si  $q_{eD}$  es igual a cero, estaremos en el caso de un yacimiento cerrado en su frontera externa.

Otro tipo de problemas que también podemos resolver es cuando en la cima y en la base del yacimiento especificamos el gasto. En este caso las condiciones de frontera en  $z_D = 0$  y  $z_D = 1$  son:

$$\frac{p_{1D}}{\partial z_D}(r_D, 0, t_D) = q_{1zD}(t_D) \quad (23)$$

$$\frac{p_{1D}}{\partial z_D}(r_D, 1, t_D) = q_{2zD}(t_D) \quad (24)$$

Los casos en los cuales  $q_{1zD} = q_{2zD} = 0$ , quieren decir que la cima y la base están cerradas al flujo.

Para los casos en que consideramos cima y base a gasto especificado (Modelos 4, 5 y 6, descritos a continuación), la condición de frontera interna

sigue siendo de la misma forma que la ecuación (18). Lo que vamos a variar en este caso es la condición de frontera externa. Así, el Modelo 4 considerará frontera externa de extensión infinita, lo cual se expresa mediante la ecuación (17). El Modelo 5 será para un yacimiento finito con presión especificada en la frontera externa, expresada con la ecuación (21). Por su parte, el Modelo 6 se referirá a un yacimiento finito con frontera externa a gasto especificado, lo cual se indica con la ecuación (22).

Finalmente, otro modelo de interés, al que llamaremos Modelo 7, supone que en la cima se especifica la presión (Ecuación 15) y en la base el gasto (Ecuación 24), es decir, consideraremos fronteras mixtas en la cima y en la base del yacimiento. Debido a que estamos suponiendo que los efectos gravitacionales son despreciables, si el eje coordenado se coloca en la base del yacimiento (con la dirección positiva del eje  $z$  hacia arriba), el Modelo 7 también representa el caso en el cual en la cima se especifica un valor de gasto (Ecuación 23) y en la base una cierta presión (Ecuación 16). Así, con este último esquema podemos modelar, como caso particular, la situación en la cual se tiene un acuífero activo y la cima del yacimiento cerrada. En lo que respecta a la condición de frontera interna y externa, el Modelo 7 supone gasto de producción variable y yacimiento infinito, respectivamente.

Los resultados obtenidos con cada uno de los modelos anteriores serán discutidos en el siguiente capítulo.

# C A P Í T U L O 4

## R E S U L T A D O S

En este capítulo se presentan los modelos principales obtenidos al resolver las ecuaciones diferenciales que describen el problema, para diferentes condiciones de frontera.

Considerando flujo primario únicamente a través del sistema de fracturas, es decir,  $\kappa_r = \kappa_z = 1$  en las ecuaciones (1)–(3) y aplicando la Transformada de Laplace a estas ecuaciones tenemos:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial \bar{p}_{1D}}{\partial r_D} \right) + \frac{1}{h_D^2} \frac{\partial^2 \bar{p}_{1D}}{\partial z_D^2} - ug(u) \bar{p}_{1D} = 0 \quad (25)$$

donde:

$$g(u) = \frac{au^2 + bu + c}{du^2 + eu + c} \quad (26)$$

$$a = \omega_f d \quad (27)$$

$$b = \omega_v(1 - \omega_f - \omega_v)(\lambda_{vf} + \lambda_{mf}) + \omega_f e \quad (28)$$

$$c = \lambda_{mv}(\lambda_{vf} + \lambda_{mf}) + \lambda_{mf}\lambda_{vf} \quad (29)$$

$$d = \omega_v(1 - \omega_f - \omega_v) \quad (30)$$

$$e = (1 - \omega_f - \omega_v)(\lambda_{mv} + \lambda_{vf}) + \omega_v(\lambda_{mv} + \lambda_{mf}) \quad (31)$$

$$f(u) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-ut} dt \quad (32)$$



#### 4.1 Modelo 1: cima y base a presión especificada y frontera externa infinita

En esta sección se muestra el procedimiento para obtener la solución del Modelo 1 en el espacio de Laplace. Además, presentamos la solución para el caso particular en el que se considera cima y base a presión constante y gasto constante.

Las condiciones de frontera en el espacio de Laplace para el Modelo 1 están dadas por las siguientes expresiones:

$$p_{1f}(r_D, 0) = \bar{p}_{1z}(u) \quad (33)$$

$$p_{1f}(r_D, 1) = \bar{p}_{2z}(u) \quad (34)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{1f}(r_D, z_D) = 0 \quad (35)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left( r_D \frac{\partial p_{1f}}{\partial r_D} \right) = E(z_D) \hat{q}_D(u) \quad (36)$$

El objetivo es resolver la ecuación (25), sujeta a las condiciones de frontera (33)–(36).

La Transformada Seno de Fourier está definida de la siguiente manera (Sneddon, 1951):

$$T_s(\bar{f}) = \bar{f}_s = \int_0^a \bar{f}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (37)$$

En este caso,  $x=z_D$ , y como  $z_D$  varía entre cero y uno, la integración se debe realizar entre estos dos límites, por lo cual  $a=1$ , así:

$$\bar{f}_s = \int_0^1 \bar{f}(z_D) \operatorname{sen}(n\pi z_D) dz_D \quad (38)$$

Aplicando la Transformada Seno de Fourier a (25) tenemos:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}(r_D)}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \bar{p}_{Df}(r_D)}{dr_D} + \frac{n\pi}{h_D^2} [(-1)^{n+1} \bar{p}_{Df}(r_D, 1) - \bar{p}_{Df}(r_D, 0)] - \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2} \bar{p}_{Df}(r_D) - ug(u) \bar{p}_{Df}(r_D) = 0 \quad (39)$$

Sustituyendo (33) y (34) en (39) y reagrupando:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}(r_D)}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \bar{p}_{Df}(r_D)}{dr_D} - \left[ ug(u) + \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2} \right] \bar{p}_{Df}(r_D) = -\frac{n\pi}{h_D^2} [(-1)^{n+1} \bar{p}_{2z} - \bar{p}_{1z}] \quad (40)$$

definamos:

$$I_{pn} = -\frac{n\pi}{h_D^2} [(-1)^{n+1} \bar{p}_{2z} - \bar{p}_{1z}] \quad (41)$$

$$\beta_n^2 = ug(u) + \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2} \quad (42)$$

de lo cual:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}(r_D)}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \bar{p}_{Df}(r_D)}{dr_D} - \beta_n^2 \bar{p}_{Df}(r_D) = I_{pn} \quad (43)$$

Se puede demostrar que la solución general de la ecuación (43) es:

$$\bar{p}_{Df}(r_D) = C_1 I_0(\beta_n r_D) + C_2 K_0(\beta_n r_D) - \frac{I_{pn}}{\beta_n^2} \quad (44)$$

las constantes  $C_1$  y  $C_2$  pueden determinarse con las condiciones (35) y (36), con las cuales obtenemos las siguientes expresiones:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left( r_D \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial r_D} \right) = \frac{-\bar{q}_D}{n\pi} [\cos(n\pi h_{2D}) - \cos(n\pi h_{1D})] = \frac{\bar{q}_D}{n\pi} \Gamma_{cn} \quad (45)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_{Df} = 0 \quad (46)$$

donde se ha definido:

$$\Gamma_{cn} = [\cos(n\pi h_{2D}) - \cos(n\pi h_{1D})] \quad (47)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (45) y (46), la solución para la ecuación (44) es:

$$\bar{p}_{Df} = \frac{\bar{q}_D}{n\pi} \Gamma_{cn} K_0(\beta_n r_D) - \frac{I_{pn}}{\beta_n^2} \quad (48)$$

La Transformada Seno Inversa de Fourier (Sneddon, 1951) está dada por:

$$\bar{p}_{Df}(r_D, z_D) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_{Df} \operatorname{sen}(n\pi z_D) \quad (49)$$

Sustituyendo (48) en (49):

$$\bar{p}_{Df} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \bar{q}_D \Gamma_{cn} K_0(\beta_n r_D) - \frac{n I_{pn}}{\beta_n^2} \right\} \operatorname{sen}(n\pi z_D) \quad (50)$$

La ecuación (50) depende de  $z_D$ , debido a la condición (18) de flujo uniforme. Para tener una presión uniforme a través del intervalo disparado, deberíamos imponer una condición de frontera interna de conductividad infinita, pero esta situación física se puede aproximar integrando la solución de flujo uniforme a través del intervalo disparado (Yildiz, 1990), es decir, obtendremos una presión promedio en el intervalo disparado.

Definamos la presión promedio de la siguiente forma:

$$\overline{p_{1D}}(r_D) = \frac{1}{h_{pD}} \int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \overline{p_{1D}}(r_D, z_D) dz_D \quad (51)$$

Es importante mencionar que para simplificar la notación,  $\overline{p_{1D}}(r_D)$  es la presión promedio y  $\overline{p_{1D}}(r_D, z_D)$  es la presión que depende de  $z_D$ .

De lo cual:

$$\overline{p_{1D}}(r_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_{pD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \overline{q_D} \Gamma_{cn} K_0(\beta_n r_D) - \frac{n d_{pm}}{\beta_n^2} \right\} \Gamma_{cn} \quad (52)$$

Como caso particular, consideremos  $\overline{p_{1zD}} = \overline{p_{2zD}} = 0$  (cima y base a presión constante), así:

$$\overline{p_{1D}}(r_D) = \frac{-2 \overline{q_D}}{\pi^2 h_{pD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Gamma_{cn}^2 K_0(\beta_n r_D) \quad (53)$$

La condición de frontera interna para gasto constante en pozos parcialmente penetrantes está dada por:

$$\overline{q_D} = \frac{-1}{h_{pD} u} \quad (54)$$

Sustituyendo la ecuación (54) en la ecuación (53):

$$\overline{p_{1D}}(r_D) = \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2 u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Gamma_{cn}^2 K_0(\beta_n r_D) \quad (55)$$

Finalmente, en el radio del pozo,  $r_D=1$ :

$$\bar{p}_{wD}(r_D) = \frac{2}{\pi^2 h_{pl}^2 u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Gamma_{cn}^2 K_0(\beta_n) \quad (56)$$

## 4.2 Modelo 2: cima y base a presión especificada y frontera externa finita a presión $p_{eD}(t_D)$

En esta sección se muestran los resultados del Modelo 2 en el espacio de Laplace y en el plano real; también se muestran las aproximaciones a tiempos cortos y largos. El procedimiento para obtener dichas soluciones en el espacio de Laplace es análogo al mostrado en la sección anterior. En esta sección también se muestra la forma particular que adquiere el Modelo 2 cuando suponemos cima, base y frontera externa a presión constante y gasto constante.

### 4.2.1 Solución en el espacio de Laplace

En este caso, el objetivo es resolver la ecuación (25), sujeta a las condiciones de frontera (33), (34), (36) y la Transformada de Laplace de la condición (21). Mediante un procedimiento similar al realizado para llegar a la ecuación (52), cuando especificamos la presión en la frontera externa obtenemos la siguiente expresión:

$$\bar{p}_{1D}(r_D) = \frac{-2}{\pi h_{pl}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}}{n} \left\{ q_D \frac{\Gamma_{cn} [I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D) - K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D)]}{I_0(\beta_n r_{eD})} + p_{eD} \left[ \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \frac{I_0(\beta_n r_D)}{I_0(\beta_n r_{eD})} + \frac{I_{cn}}{\beta_n^2} \left[ \frac{I_0(\beta_n r_D)}{I_0(\beta_n r_{eD})} - 1 \right] \right] \right\} \quad (57)$$

En el caso particular de  $\bar{p}_{1zD} = \bar{p}_{2zD} = \bar{p}_{eD} = 0$  tenemos:

$$\bar{p}_{1D}(r_D) = \frac{2\bar{q}_D}{\pi^2 h_{pl}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Gamma_{cn}^2 \frac{[K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D) - I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D)]}{I_0(\beta_n r_{eD})} \quad (58)$$

Para el caso de gasto constante, la ecuación (58) queda de la siguiente forma:

$$P_{\text{inj}}(r_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_{pD}^2 u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Gamma_{cn}^2 \frac{[K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D) - I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D)]}{I_0(\beta_n r_{eD})} \quad (59)$$

En el radio del pozo:

$$P_{\text{inj}} = \frac{-2}{\pi^2 h_{pD}^2 u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Gamma_{cn}^2 \frac{[K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n) - I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n)]}{I_0(\beta_n r_{eD})} \quad (60)$$

#### 4.2.2 Inversión analítica a cualquier tiempo

Muchas veces se busca invertir una solución en el espacio de Laplace en forma analítica, debido a que mucha información tanto cualitativa como cuantitativa es más clara de visualizarse en este tipo de inversiones. Algunas curvas presentadas en el siguiente capítulo fueron invertidas numéricamente al plano real usando el algoritmo de Stehfest (1970), debido a la complejidad de las soluciones obtenidas en el espacio de Laplace. Esta complejidad se debe básicamente al manejo de la triple porosidad y al manejo de dos variables espaciales  $r_D$  y  $z_D$ , ya que, aparte de la aparición de las funciones Bessel y de la sumatoria en  $n$ , los argumentos de estas funciones en la ecuación (60), por ejemplo, son funciones que dependen de  $u$  en una forma que no es sencilla y dependen de todos los parámetros del yacimiento y de los parámetros geométricos  $h_D$  y  $r_{eD}$ .

A pesar de la complejidad del problema, es posible invertir en forma analítica la ecuación (58), la cual supone que en la cima, en la base y en la frontera externa la presión es constante e igual a la inicial. Esta inversión al tiempo real puede realizarse aplicando algunas técnicas usadas en Variable Compleja, en particular, el Teorema del Residuo de Cauchy (LePage, 1961).

Para la inversión analítica de este caso particular del Modelo 2, suponiendo además gasto constante, tenemos, de la ecuación (59):

$$p_{1j}(r_D, t_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{c^*-i\infty}^{c^*+i\infty} e^{u_D} \frac{[K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D) - I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D)]}{u I_0(\beta_n r_{eD})} du \quad (61)$$

Donde  $c^*$  es un número real mayor que la parte real de cualquiera de las singularidades de la función a invertir, en este caso  $\overline{p_{1j}}(r_D)$  dado por la ecuación (59). Se debe realizar un análisis cuidadoso de la ecuación (59) para determinar su comportamiento y detectar sus polos antes de realizar la integración.

Se puede demostrar que la solución de (61) queda expresada de la siguiente forma (Apéndice B):

$$p_{1j}(r_D, t_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \left\{ A_{0n}(r_D) - \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{m=1}^{\infty} H_{0m}(r_D) \left[ \frac{e^{\xi_{m,n1} t_D}}{\xi_{m,n1}} f(\xi_{m,n1}) + \frac{e^{\xi_{m,n2} t_D}}{\xi_{m,n2}} f(\xi_{m,n2}) + \frac{e^{\xi_{m,n3} t_D}}{\xi_{m,n3}} f(\xi_{m,n3}) \right] \right\} \quad (62)$$

donde:

$$\Gamma_{cn}^2 = [\cos(n\pi h_{2D}) - \cos(n\pi h_{1D})]^2 \quad (63)$$

$$A_{0n}(r_D) = \frac{K_0(a_n r_{eD}) I_0(a_n r_D) - I_0(a_n r_{eD}) K_0(a_n r_D)}{I_0(a_n r_{eD})} \quad (64)$$

$$H_{0m}(r_D) = \frac{J_0(\alpha_{0m} r_D / r_{eD})}{J_1^2(\alpha_{0m})} \quad (65)$$

$$f(\xi) = g(\xi) + \xi \frac{2a\xi + b - (2d\xi + e)g(\xi)}{d\xi^2 + e\xi + c} \quad (66)$$

$\xi_{m,ni}$  ( $i=1,2,3$ ) son las raíces del polinomio cúbico:

$$A_0 \xi^3 + B_0 \xi^2 + C_0 \xi + D_0 = 0 \quad (67)$$

$$A_0 = a \quad (68)$$

$$B_0 = b + d\gamma_{0m,n}^2 \quad (69)$$

$$C_0 = c + e\gamma_{0m,n}^2 \quad (70)$$

$$D_0 = c\gamma_{0m,n}^2 \quad (71)$$

$$\gamma_{0m,n}^2 = \left( \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} \right)^2 + a_n^2 \quad (72)$$

$$a_n = \frac{n\pi}{h_D} \quad (73)$$

$\alpha_{0m}$  ( $m=1,2,3\dots$ ) son las raíces positivas de:

$$J_0(\zeta) = 0 \quad (74)$$

Del análisis de sensibilidad realizado con el programa de cómputo que calcula los resultados con la ecuación (62), hemos observado que las raíces del polinomio cúbico son diferentes y negativas, lo cual es físicamente necesario para que los términos dependientes del tiempo de (59) no diverjan conforme el tiempo aumente.

De las ecuaciones (62)-(74), es evidente que la respuesta de presión es una función que depende de los parámetros del yacimiento y parámetros geométricos en una forma compleja. El número de parámetros aumenta con respecto al caso de penetración total, ya que tenemos que considerar a  $h_{1D}$ ,  $h_D$  y  $h_{pD}$ .

#### 4.2.3 Inversión analítica a tiempos cortos

Para tiempos cortos, la variable de Laplace  $u$  es grande, lo cual implica que la función  $g(u)$ , dada en la ecuación (26), se puede aproximar por:



$$g(u) = \omega_f \quad (75)$$

de lo cual:

$$\beta_n = \sqrt{\omega_f u + \frac{\pi^2 n^2}{h_D^2}} \approx \sqrt{\omega_f u} \quad (76)$$

Además, podemos usar la expresión para un yacimiento de frontera externa infinita, aún cuando estemos aproximando el modelo 2 (en el cual la frontera externa es finita), ya que a tiempos cortos, los efectos de las fronteras externas son nulos.

Así, de las ecuaciones (56) y (76):

$$p_{\omega_f D} = \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2 u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} K_0(\sqrt{\omega_f u}) = \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \frac{K_0(\sqrt{\omega_f u})}{u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \quad (77)$$

Se puede verificar que:

$$\frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} = 1 \quad (78)$$

Sustituyendo (78) en (77) tenemos:

$$p_{\omega_f D} = \frac{1}{h_{pD}} \frac{K_0(\sqrt{\omega_f u})}{u} \quad (79)$$

La transformada inversa de Laplace del término dependiente de  $u$  es (Raghavan, 1993):

$$L^{-1}\left(\frac{K_0(\sqrt{au})}{u}\right) = -\frac{1}{2} Ei\left(-\frac{a}{4t}\right) \quad (80)$$

de lo cual:

$$p_{wDf}(t_D) = -\frac{1}{2h_{pD}} Ei\left(-\frac{\omega_f}{4t_D}\right) \quad (81)$$

Para argumentos pequeños tenemos (Abramowitz, 1965):

$$-Ei(-x) \approx -\ln(x) - \gamma, \quad \gamma = 0.577215 \quad (82)$$

Usando (82) en (81):

$$p_{wDf}(t_D) = \frac{1}{2h_{pD}} \left[ \ln\left(\frac{4t_D}{\omega_f}\right) - \gamma \right] = \frac{1}{2h_{pD}} \left[ \ln\left(\frac{t_D}{\omega_f}\right) + 0.80907 \right] \quad (83)$$

La ecuación (83) indica que el comportamiento a tiempos cortos de un pozo parcialmente penetrante es el mismo que el de un pozo totalmente penetrante en una formación de espesor adimensional  $h_{pD}$  (intervalo abierto). Esta característica ya había sido mostrada por varios autores (Nisle, 1958, Brons y Marting, 1961, Gringarten y Ramey, 1975, Bilhartz y Ramey, 1977) para yacimientos homogéneos; en este caso mostramos que esta característica también es válida para yacimientos fracturados vugulares, solo que, como mostraremos en el siguiente capítulo, la respuesta de presión se desvía de la línea recta a tiempos muy cortos, debido a la transferencia de fluidos en algunos de los medios, lo cual depende de los valores de los coeficientes de flujo interporoso.

Si queremos hacer otra aproximación a tiempos aún más cortos y que represente adecuadamente el problema físico, tenemos que ser más rigurosos y no suponer que el radio del pozo es infinitesimalmente pequeño. Si resolvemos el Modelo 1, pero suponiendo radio del pozo finito, llegamos a la siguiente expresión:

$$\overline{p_{wfD}} = \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2 u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Gamma_{cn}^2 \frac{K_0(\beta_n)}{\beta_n K_1(\beta_n)} \quad (84)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (75), (76) y (78) obtenemos:

$$\overline{p_{wfD}} = \frac{1}{h_{pD} u} \frac{K_0(\sqrt{\omega_f u})}{\sqrt{\omega_f u} K_1(\sqrt{\omega_f u})} \quad (85)$$

Usando la aproximación  $K_0(x)/K_1(x) \approx 1$  para argumentos grandes (Abramowitz, 1965):

$$\overline{p_{wfD}} = \frac{1}{h_{pD} \sqrt{\omega_f u}^{3/2}} \quad (86)$$

Invirtiendo esta expresión:

$$p_{wfD} = \frac{1}{h_{pD}} \sqrt{\frac{t_D}{\pi \omega_f}} \quad (87)$$

Tal como en la ecuación (83), a tiempos muy cortos, la respuesta de presión dada por la ecuación (87) es la misma que la de un pozo totalmente penetrante en una formación de espesor adimensional  $h_{pD}$ . La parte afectada por la raíz cuadrada en la ecuación (87) es la misma ecuación correspondiente a la del modelo de Warren y Root (1963), dada por Da Prat (1980). Cuando  $\omega_f = 1$ , tenemos el caso de un yacimiento homogéneo, dado por Van Everdingen y Hurst (1949). Camacho *et al.* (2002) muestran que esta expresión, para el caso de penetración total, es válida solo a tiempos muy pequeños. En el caso de penetración parcial sucede lo mismo, por lo cual, esta expresión no tiene aplicación práctica. Sin embargo, desde el punto de vista teórico, la ecuación (87), al igual que la ecuación (83), indican que para tiempos pequeños, no hay dependencia de ninguno de los parámetros de flujo interporoso y que el sistema de fracturas no se ve afectado por la presencia de la porosidad

primaria ni por la presencia de los vúgulos, debido a que estamos considerando (Ecuación 6)  $\kappa_r = \kappa_z = 1$ . Si  $\kappa_r$  y  $\kappa_z$  fueran iguales a cero (flujo primario únicamente a través de vúgulos interconectados), entonces la respuesta a tiempos cortos no dependería de las fracturas, solo de los vúgulos.

#### 4.2.4 Inversión analítica a tiempos largos

Al observar la ecuación (62), notamos que  $A_{0n}$  no depende del tiempo, mientras que los términos de la sumatoria en  $m$  sí tienen dependencia temporal, es decir, aparece un término estacionario y uno transitorio. Los términos involucrados en la segunda sumatoria de (62) decrecen con el tiempo, ya que, como se indicó previamente, las raíces del polinomio cúbico son negativas, de lo cual podemos decir que para tiempos largos la solución es:

$$p_{Df}(r_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} A_{mn}(r_D) \quad (88)$$

La ecuación (88) s tiene sentido físico porque ya no depende de parámetros relacionados a matriz, fracturas o vúgulos en forma independiente. Solo depende de parámetros geométricos y de parámetros involucrados en las variables adimensionales. La explicación física a esta característica de la solución es que en el estado estacionario los tres medios del yacimiento: fractura, matriz y vúgulos, actúan en forma conjunta, como un yacimiento pseudohomogneo. Además, la ecuación (88) indica que, aunque no existe un periodo de flujo pseudoradial (debido a la presencia del acfero y del casquete de gas), podemos estimar un pseudodao por penetración parcial, bajo las condiciones del yacimientos descritas.

Podemos realizar otro análisis del Modelo 2 a tiempos largos de tal forma que el comienzo de estas aproximaciones sea previo al estado estacionario, tomando en cuenta que en este caso la variable de Laplace  $u$  es pequeña. Si observamos la ecuación (26), notamos que podemos ignorar los términos

cuadráticos y lineales, por lo cual  $g(u) = 1$ . Así, a partir de las ecuaciones (42) y (73):

$$\beta_n = \sqrt{u + a_n^2} \quad (89)$$

La ecuación (89), es la misma ecuación que se obtendría si el yacimiento fuera homogéneo, en este caso, se puede demostrar que la solución está dada por (Apéndice A):

$$p_{Df}(r_D, t_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \left\{ A_{0n}(r_D) + \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{m=1}^{\infty} H_{0m}(r_D) \frac{e^{-\gamma_{0m,n}^2 t_D}}{\gamma_{0m,n}^2} \right\} \quad (90)$$

Donde los términos que aparecen en esta ecuación ya fueron definidos previamente. De la ecuación (90), observamos que la solución tiene una forma relativamente sencilla comparada con la ecuación (62). En el siguiente Capítulo mostraremos que hay que tomar con reserva esta aproximación para ciertos valores de los parámetros del yacimiento naturalmente fracturado vugular. Sin embargo, es conveniente tener como referencia la solución para yacimientos homogéneos.

Una mejor aproximación a tiempos largos es ignorar solo los términos cuadráticos en la ecuación (26). En este caso, la aproximación está dada por:

$$p_{Df}(r_D, t_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \left\{ A_{0n}(r_D) - \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{m=1}^{\infty} H_{0m}(r_D) \left[ \frac{e^{\zeta_{m,n1} t_D}}{\zeta_{m,n1} f_2(\zeta_{m,n1})} + \frac{e^{\zeta_{m,n2} t_D}}{\zeta_{m,n2} f_2(\zeta_{m,n2})} \right] \right\} \quad (91)$$

donde:

$$\zeta_{m,n1} = -\frac{B_{0m,n}}{2} + \sqrt{\left(\frac{B_{0m,n}}{2}\right)^2 - C_{0m,n}} \quad (92)$$

$$\zeta_{m,n2} = -\frac{B_{0m,n}}{2} - \sqrt{\left(\frac{B_{0m,n}}{2}\right)^2 - C_{0m,n}} \quad (93)$$

$$B_{0m,n} = \frac{c + e\gamma_{0m,n}^2}{b} \quad (94)$$

$$C_{0m,n} = \frac{c}{b} \gamma_{0m,n}^3 \quad (95)$$

$$f_2(\zeta) = g(\zeta) + \zeta \frac{b - eg(\zeta)}{e\zeta + c} \quad (96)$$

Los términos restantes ya fueron definidos previamente, con la aclaración de que en la ecuación (96)  $g(\zeta)$  no contiene los términos cuadráticos de la ecuación (26). Como se observa, la ecuación (91) es menos compleja que la ecuación (62). Del análisis de sensibilidad realizado con un programa de cómputo, observamos que para cualquier valor de  $m$ , el término que depende de  $\zeta_{m,n2}$  (dentro de la sumatoria en  $m$  de la ecuación 91) es despreciable comparado con el término que depende de  $\zeta_{m,n1}$ , por lo cual otra aproximación está dada por:

$$p_{Df}(r_D, t_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_p^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \left\{ A_{0n}(r_D) - \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{m=1}^{\infty} H_{0m}(r_D) \frac{e^{\zeta_{m,n1} t_D}}{\zeta_{m,n1} f_2(\zeta_{m,n1})} \right\} \quad (97)$$

En el siguiente capítulo mostraremos los resultados generados con cada una de estas aproximaciones.

#### 4.2.5 Respuesta de presión a tiempos largos. Estado estacionario

Para verificar la ecuación (88), resolvamos las ecuaciones (1), (2) y (3) suponiendo que la variación de la presión (de los tres medios) con respecto al tiempo es igual a cero, lo cual es característico del estado estacionario:

$$\frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} = \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \frac{\partial p_{Dv}}{\partial t_D} = 0 \quad (98)$$

Así, la ecuación diferencial para el sistema de fracturas está dada por:

$$\kappa_r \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) + \kappa_z \frac{1}{h_D^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial z_D^2} + \lambda_{mf} (p_{Dm} - p_{Df}) + \lambda_{zf} (p_{Dv} - p_{Df}) = 0 \quad (99)$$

Mientras que la ecuación para los bloques de matriz está dada como:

$$-\lambda_{mv} (p_{Dm} - p_{Dv}) - \lambda_{mf} (p_{Dm} - p_{Df}) = 0 \quad (100)$$

y para los vóculos:

$$(1 - \kappa_r) \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right) + (1 - \kappa_z) \frac{1}{h_D^2} \frac{\partial^2 p_{Dv}}{\partial z_D^2} + \lambda_{mv} (p_{Dm} - p_{Dv}) - \lambda_{zf} (p_{Dv} - p_{Df}) = 0 \quad (101)$$

Combinando las ecuaciones (99), (100) y (101), para el caso de flujo primario únicamente a través del sistema de fracturas, ( $\kappa_r = \kappa_z = 1$ ):

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial \bar{p}_{Df}}{\partial r_D} \right) + \frac{1}{h_D^2} \frac{\partial^2 \bar{p}_{Df}}{\partial z_D^2} = 0 \quad (102)$$

Aplicando la Transformada Seno de Fourier (Sneddon, 1995) a la ecuación (102), resolviendo la ecuación diferencial tipo Bessel resultante y considerando las condiciones de frontera (15), (16) y (21) iguales a cero y la condición (54), tenemos:

$$p_{Df}(r_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_D^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} A_{mn}(r_D) \quad (103)$$

Lo cual corresponde a la parte estacionaria de (62), es decir, obtuvimos como resultado la ecuación (88) es una forma diferente.

### 4.3 Modelo 3: cima y base a presión especificada, frontera externa finita con gasto $q_{eD}(t_D)$

En esta sección se muestran los resultados del Modelo 3 en el espacio de Laplace y en el plano real; así como las aproximaciones a tiempos cortos y largos. El procedimiento para obtener dichas soluciones en el espacio de Laplace es análogo al mostrado en las Secciones 4.1 y 4.2. También se muestra la forma particular que adquiere el Modelo 3 cuando suponemos cima y base a presión constante, frontera externa cerrada y gasto constante.

#### 4.3.1: Solución en el espacio de Laplace

Ahora el objetivo es resolver la ecuación (25), sujeta a las condiciones de frontera (33), (34), (36) y la transformada de Laplace de la condición (22). Mediante un procedimiento similar al realizado para llegar a las ecuaciones (52) y (57), tenemos:

$$\bar{p}_{1D}(r_D) = \frac{-2}{\pi h_{pD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}}{n} \left\{ \bar{q}_D \frac{\Gamma_{cn}}{n\pi} \left[ \frac{K_1(\beta_n r_{eD})}{I_1(\beta_n r_{eD})} I_1(\beta_n r_D) + K_0(\beta_n r_D) \right] + q_{eD} \left[ \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \frac{I_1(\beta_n r_D)}{\beta_n I_1(\beta_n r_{eD})} - \frac{I_{1m}}{\beta_n^2} \right] \right\} \quad (104)$$

De nueva cuenta, consideremos  $\bar{p}_{1zD} = \bar{p}_{2zD} = \bar{q}_{eD} = 0$ , de lo cual:

$$\bar{p}_{Df}(r_D) = \frac{-2\bar{q}_D}{\pi^2 h_{pD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \left[ K_1(\beta_n r_{eD}) \frac{I_1(\beta_n r_D)}{I_1(\beta_n r_{eD})} + K_0(\beta_n r_D) \right] \quad (105)$$

Para el caso de gasto constante, la ecuación (105) queda de la siguiente forma:



$$p_{Df}(r_D) = \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \left[ K_1(\beta_n r_{eD}) \frac{I_1(\beta_n r_D)}{I_1(\beta_n r_{eD})} + K_0(\beta_n r_D) \right] \quad (106)$$

En el radio del pozo:

$$p_{wDf} = \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \left[ K_1(\beta_n r_{eD}) \frac{I_1(\beta_n)}{I_1(\beta_n r_{eD})} + K_0(\beta_n) \right] \quad (107)$$

#### 4.3.2 Inversión analítica a cualquier tiempo

Se puede demostrar que la inversión de (107) está dada por la siguiente expresión:

$$p_{Df}(r_D, t_D) = \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \left\{ A_{1n}(r_D) + \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{m=0}^{\infty} H_{1m}(r_D) \left[ \frac{e^{\xi_{m,n1} t_D}}{\xi_{m,n1} f(\xi_{m,n1})} + \frac{e^{\xi_{m,n2} t_D}}{\xi_{m,n2} f(\xi_{m,n2})} + \frac{e^{\xi_{m,n3} t_D}}{\xi_{m,n3} f(\xi_{m,n3})} \right] \right\} \quad (108)$$

donde:

$$A_{1n}(r_D) = \frac{K_1(a_n r_{eD}) I_0(a_n r_D) + I_1(a_n r_{eD}) K_0(a_n r_D)}{I_0(a_n r_{eD})} \quad (109)$$

$$H_{1m}(r_D) = \frac{J_0(\alpha_{1m} r_D / r_{eD})}{J_0^2(\alpha_{1m})} \quad (110)$$

$\xi_{m,ni}$  ( $i=1,2,3$ ) son las raíces del polinomio cúbico:

$$A_1 \xi^3 + B_1 \xi^2 + C_1 \xi + D_1 = 0 \quad (111)$$

$$A_1 = a \quad (112)$$

$$B_1 = b + d\gamma_{1m,n}^2 \quad (113)$$

$$C_1 = c + e\gamma_{1m,n}^2 \quad (114)$$

$$D_1 = c\gamma_{1m,n}^2 \quad (115)$$

$$\gamma_{1m,n}^2 = \left( \frac{\alpha_{1m}}{r_{elD}} \right)^2 + \alpha_n^2 \quad (116)$$

$\alpha_{1m}$  ( $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) son las raíces de:

$$J_1(\zeta) = 0 \quad (117)$$

Al igual que en la Sección 4.2.2, del análisis de sensibilidad realizado con el programa de cómputo que calcula los resultados con la ecuación (108), las raíces del polinomio cúbico son diferentes y negativas.

La inversión analítica a tiempos cortos de (107) es semejante a la mostrada en la sección 4.2.3, ya que en este caso las fronteras externas todavía no influyen en el sistema.

### 4.3.3 Inversión analítica a tiempos largos

Al igual que la ecuación (62), la ecuación (108) tiene una parte estacionaria y una transitoria. Los términos involucrados en la segunda sumatoria de (108) decrecen con el tiempo, de lo cual podemos decir que para tiempos largos la solución es:

$$p_{Dj}(r_D) = \frac{2}{\pi^2 h_{pl}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} A_{1n}(r_D) \quad (118)$$

Lo cual corresponde al estado estacionario del sistema. También podemos realizar otro análisis a tiempos largos del Modelo 3, de tal forma que el comienzo de estas aproximaciones sea previo al estado estacionario, tomando en cuenta que en este caso la variable de Laplace  $u$  es pequeña.

Consideremos como primera aproximación que  $g(u) = 1$ , de lo cual:

$$P_{Df}(r_D, t_D) = \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \left\{ A_{1n}(r_D) - \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{m=0}^{\infty} H_{1m}(r_D) \frac{e^{-\gamma_{1m,n}^2 t_D}}{\gamma_{1m,n}^2} \right\} \quad (119)$$

Donde los términos que aparecen en esta ecuación ya fueron definidos previamente. La ecuación (119) es la misma ecuación que se obtendría si el yacimiento fuera homogéneo. En el siguiente Capítulo mostraremos que, al igual que la ecuación (90), tenemos que tomar con reserva esta aproximación para ciertos valores de los parámetros del yacimiento naturalmente fracturado vugular.

Si solo ignoramos los términos cuadráticos en la ecuación (26), la aproximación está dada por:

$$P_{Df}(r_D, t_D) = \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \left\{ A_{1n}(r_D) + \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{m=0}^{\infty} H_{1m}(r_D) \left[ \frac{e^{\zeta_{m,n1} t_D}}{\zeta_{m,n1} f_2(\zeta_{m,n1})} + \frac{e^{\zeta_{m,n2} t_D}}{\zeta_{m,n2} f_2(\zeta_{m,n2})} \right] \right\} \quad (120)$$

donde:

$$\zeta_{m,n1} = -\frac{B_{1m,n}}{2} + \sqrt{\left(\frac{B_{1m,n}}{2}\right)^2 - C_{1m,n}} \quad (121)$$

$$\zeta_{m,n2} = -\frac{B_{1m,n}}{2} - \sqrt{\left(\frac{B_{1m,n}}{2}\right)^2 - C_{1m,n}} \quad (122)$$

$$B_{1m,n} = \frac{c + e\gamma_{1m,n}^2}{b} \quad (123)$$

$$C_{1m,n} = \frac{c}{b} \gamma_{1m,n}^2 \quad (124)$$

Los términos restantes ya fueron definidos previamente, de nueva cuenta, recordemos que en este caso debemos ignorar los términos cuadráticos de la función  $g(\zeta)$  en las ecuaciones (96) y (26). Del análisis de sensibilidad realizado con el programa de cómputo, observamos que para cualquier valor de  $m$ , el término que depende de  $\zeta_{m,n2}$  (dentro de la sumatoria en  $m$  de la ecuación 120)

es despreciable comparado con el término que depende de  $\zeta_{m,n1}$ , por lo cual otra aproximación está dada por:

$$p_{Dj}(r_D, t_D) = \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \left\{ A_{in}(r_D) + \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{m=0}^{\infty} H_{1m}(r_D) \frac{e^{\zeta_{m,n1} t_D}}{\zeta_{m,n1} f_2(\zeta_{m,n1})} \right\} \quad (125)$$

En el siguiente capítulo mostraremos los resultados generados con cada una de estas aproximaciones.

#### 4.4 Modelo 4: cima y base a gasto especificado y frontera externa infinita

Como casos adicionales de interés de esta tesis, en los modelos 4, 5 y 6 estamos suponiendo que en la cima y en la base se especifica el gasto, en lugar de la presión. Esto permite disponer de un mayor número de resultados que representen casos de interés y poder validarlos con los reportados en la literatura, ya que la mayoría de ellos suponen cima y base cerradas al flujo, lo cual puede ser generado como un caso particular de nuestros modelos. Los Modelos 4, 5 y 6 se generarán con la misma metodología usada en los tres anteriores, la única diferencia es que ahora utilizaremos la Transformada Coseno de Fourier.

##### 4.4.1 Solución en el espacio de Laplace

En este caso la solución en el espacio de Laplace está dada por (Apéndice C):

$$\bar{p}_{Dj}(r_D) = -h_{pD} q_D K_0(\beta_0 r_D) - \frac{l_{qn}}{\beta_0^2} - \frac{2}{\pi^2 h_{pD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ q_D \Gamma_{qn} K_0(\beta_n r_D) - \frac{n l_{qn}}{\beta_n^2} \right\} \Gamma_{qn} \quad (126)$$

donde:

$$l_{qn} = - \frac{(-1)^n \bar{q}_{2zD} - \bar{q}_{1zD}}{h_D^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (127)$$

$$\Gamma_{qn} = \text{ser}(n\pi h_{2D}) - \text{ser}(n\pi h_{1D}) \quad (128)$$

Si consideramos  $\bar{q}_{1zD} = \bar{q}_{2zD} = 0$  tenemos:

$$\bar{p}_{1D}(r_D) = -h_{pD} \bar{q}_D K_0(\beta_0 r_D) - \frac{2\bar{q}_D}{\pi^2 h_{pD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2}{n^2} K_0(\beta_n r_D) \quad (129)$$

Para el caso de gasto constante:

$$\bar{p}_{1D}(r_D) = \frac{K_0(\beta_0 r_D)}{u} + \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2 u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2}{n^2} K_0(\beta_n r_D) \quad (130)$$

En el radio del pozo:

$$\bar{p}_{wD}(r_D) = \frac{K_0(\beta_0)}{u} + \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2 u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2}{n^2} K_0(\beta_n) \quad (131)$$

#### 4.4.2 Inversión analítica a tiempos cortos

Usando las aproximaciones a tiempos cortos ( $u$  grande) dadas por las ecuaciones (75) y (76) obtenemos:

$$\bar{p}_{wD}(r_D) = \frac{K_0(\sqrt{\omega_f u})}{u} + \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \frac{K_0(\sqrt{\omega_f u})}{u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{sn}^2}{n^2} \quad (132)$$

Se puede verificar que:

$$\frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{sn}^2}{n^2} = 1 - h_{pD} \quad (133)$$

Sustituyendo (133) en (132) tenemos:

$$\bar{p}_{wD}(r_D) = \frac{1}{h_{pD}} \frac{K_0(\sqrt{\omega_f u})}{u} \quad (134)$$

Lo cual corresponde a la ecuación (79). Así, la solución está dada por:

$$p_{wfnf}(t_D) = \frac{1}{2h_{pD}} \left[ \ln \left( \frac{t_D}{\omega_f} \right) + 0.80907 \right] \quad (135)$$

Como se observa, obtuvimos el mismo resultado de la sección 4.2.3. Con un procedimiento similar, podemos llegar a la ecuación (87), la cual es válida a tiempos muy cortos y suponiendo radio de pozo finito.

#### 4.4.3 Inversión analítica a tiempos largos

Si consideramos que para tiempo grandes  $g(u)=1$ , tenemos, de la ecuación (131):

$$\overline{p_{wfnf}} = \frac{K_0(\sqrt{u})}{u} + \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2}{n^2} K_0(a_n) \quad (136)$$

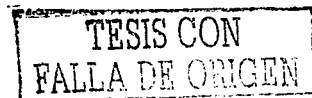
invirtiendo la ecuación (136):

$$\overline{p_{wfnf}} = \frac{1}{2} \ln(t_D + 0.80907) + \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2}{n^2} K_0(a_n) \quad (137)$$

La expresión anterior es el mismo resultado obtenido por Yildiz (1990), ya que estamos considerando  $g(u)=1$ , lo cual corresponde a un yacimiento homogéneo.

#### 4.5 Modelo 5: cima y base a gasto especificado y frontera externa a presión $p_{eD}(t_D)$

En esta Sección se muestra la Solución del Modelo 5 en el espacio de Laplace y las aproximaciones a tiempos largos en el plano real. Además, se presenta la forma



particular que adquiere la Solución de este Modelo cuando suponemos cima y base cerrada, frontera externa a presión constante y gasto constante.

#### 4.5.1 Solución en el Espacio de Laplace

En este caso la solución en el espacio de Laplace está dada por:

$$\bar{p}_{Dy}(r_D) = \bar{p}_{Dy0}(r_D) + \frac{2}{h_{pD}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \bar{q}_D \frac{\Gamma_n^2}{n^2 \pi^2} \left[ \frac{K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D)}{I_0(\beta_n r_{eD})} - K_0(\beta_n r_D) \right] + \bar{p}_{eD} \frac{\Gamma_n \operatorname{se}(n\pi)}{n^2 \pi^2} \frac{I_0(\beta_n r_D)}{I_0(\beta_n r_{eD})} + \frac{\Gamma_n l_{qn}}{n\pi \beta_n^2} \left[ \frac{I_0(\beta_n r_D)}{I_0(\beta_n r_{eD})} - 1 \right] \right\} \quad (138)$$

donde:

$$\bar{p}_{Dy0}(r_D) = h_{pD} \bar{q}_D \left[ \frac{K_0(\beta_0 r_{eD}) I_0(\beta_0 r_D)}{I_0(\beta_0 r_{eD})} - K_0(\beta_0 r_D) \right] + \bar{p}_{eD} \frac{I_0(\beta_0 r_D)}{I_0(\beta_0 r_{eD})} + \frac{l_{q0}}{\beta_0^2} \left[ \frac{I_0(\beta_0 r_D)}{I_0(\beta_0 r_{eD})} - 1 \right] \quad (139)$$

Si consideramos cima y base cerradas al flujo, frontera externa a presión constante, y gasto constante, tenemos:

$$\bar{p}_{Dy}(r_D) = \frac{I_0(\beta_0 r_{eD}) K_0(\beta_0 r_D) - K_0(\beta_0 r_{eD}) I_0(\beta_0 r_D)}{u I_0(\beta_0 r_{eD})} + \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_n^2}{n^2} \left\{ \frac{I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D) - K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D)}{u I_0(\beta_n r_{eD})} \right\} \quad (140)$$

De la ecuación (140) observamos que el término que aparece fuera de la sumatoria corresponde a la respuesta de presión para un pozo totalmente penetrante.

#### 4.5.2 Inversión analítica a tiempos largos.

Si consideramos  $g(u)=1$  para el caso de cima y base cerradas al flujo y frontera externa a presión constante y gasto constante (Ecuación 140), se puede demostrar que a tiempos largos la solución está dada por:

$$P_{Df}(r_{Df}, t_{Df}) = \ln\left(\frac{r_{eD}}{r_D}\right) - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\alpha_{0m} \frac{r_D}{r_{eD}}\right) e^{-\frac{\alpha_{0m}^2 t_{Df}}{r_D^2}}}{J_1^2(\alpha_{0m}) \alpha_{0m}^2} + \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_n^2}{n^2} \left\{ \frac{I_0(\alpha_n r_{eD}) K_0(\alpha_n r_D) - K_0(\alpha_n r_{eD}) I_0(\alpha_n r_D)}{I_0(\alpha_n r_{eD})} \right\} \quad (141)$$

El primer término y la sumatoria en  $m$  de la ecuación anterior, corresponden a la solución dada por Muskat (1934) para un pozo totalmente penetrante en un yacimiento homogéneo.

Podemos hacer otra aproximación a tiempos largos ignorando solo los términos cuadráticos de la función  $g(u)$  dada por la ecuación (26). Usando la técnica de Variable Compleja, se puede demostrar que en este caso la solución está dada por:

$$P_{Df}(r_{Df}, t_{Df}) = \ln\left(\frac{r_{eD}}{r_D}\right) + \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\alpha_{0m} \frac{r_D}{r_{eD}}\right)}{J_1^2(\alpha_{0m})} \left[ \frac{e^{\zeta_{m,01} t_{Df}}}{\zeta_{m,01} f_2(\zeta_{m,01})} + \frac{e^{\zeta_{m,02} t_{Df}}}{\zeta_{m,02} f_2(\zeta_{m,02})} \right] - \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_n^2}{n^2} \left\{ A_{0n}(r_D) - \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\alpha_{0m} \frac{r_D}{r_{eD}}\right)}{J_1^2(\alpha_{0m})} \left[ \frac{e^{\zeta_{m,n1} t_{Df}}}{\zeta_{m,n1} f_2(\zeta_{m,n1})} + \frac{e^{\zeta_{m,n2} t_{Df}}}{\zeta_{m,n2} f_2(\zeta_{m,n2})} \right] \right\} \quad (142)$$

donde  $\alpha_{0m}$  se define con la ecuación (74), y los demás términos se definen con las ecuaciones (92)–(96) y (128).

En el próximo Capítulo mostraremos que la ecuación (142) se aproxima mejor a la respuesta de presión (y de función derivada) comparada con la ecuación (141).

#### 4.6 Modelo 6: Cima, base y frontera externa a gasto especificado.

En esta Sección se muestra la Solución del Modelo 6 en el espacio de Laplace y la aproximación a tiempos largos en el plano real. También se presenta la forma



particular que adquiere la solución de este Modelo cuando suponemos cima, base, frontera externa cerrada y gasto constante.

#### 4.6.1 Solución en el espacio del Laplace

En este caso la solución en el espacio de Laplace esta dada por:

$$\bar{p}_{Df}(r_D) = \bar{p}_{Df0}(r_D) + \frac{2}{h_{pD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{2n}}{n\pi} \left\{ -\bar{q}_D \frac{\Gamma_{2n}}{n\pi} \left[ \frac{K_1(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D)}{I_1(\beta_n r_{eD})} + K_0(\beta_n r_D) \right] + \bar{q}_{eD} \frac{\text{ser}(n\pi)}{n\pi \beta_n r_{eD}} \frac{I_0(\beta_n r_D)}{I_0(\beta_n r_{eD})} - \frac{l_{qn}}{\beta_n^2} \right\} \quad (143)$$

donde :

$$\bar{p}_{Df0}(r_D) = -h_{pD} \bar{q}_D \left[ \frac{K_1(\beta_0 r_{eD}) I_0(\beta_0 r_D)}{I_1(\beta_0 r_{eD})} + K_0(\beta_0 r_D) \right] + \bar{q}_{eD} \frac{1}{\beta_0 r_{eD}} \frac{I_0(\beta_0 r_D)}{I_0(\beta_0 r_{eD})} - \frac{l_{q0}}{\beta_0^2} \quad (144)$$

Si consideramos cima, base y frontera externa cerradas al flujo y gasto constante, tenemos:

$$\bar{p}_{Df}(r_D) = \frac{K_1(\beta_0 r_{eD}) I_0(\beta_0 r_D) + I_1(\beta_0 r_{eD}) K_0(\beta_0 r_D)}{u I_1(\beta_0 r_{eD})} + \frac{2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{2n}^2}{n^2} \left\{ \frac{K_1(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D) + I_1(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D)}{u I_1(\beta_n r_{eD})} \right\} \quad (145)$$

En la ecuación (145) observamos que el término fuera de la sumatoria corresponde a la respuesta de presión para un pozo totalmente penetrante.

#### 4.6.2 Inversión analítica a tiempos largos.

Considerando la aproximación  $g(u)=1$ , el término fuera de la sumatoria de la ecuación (145) corresponde al caso de un pozo totalmente penetrante en un

yacimiento homogéneo. Tomando la solución de la parte correspondiente a un yacimiento homogéneo dada por Muskat (1934) tenemos:

$$p_{Df}(r_D, t_D) = \frac{2}{r_D^2} \left( t_D + \frac{r_D^2}{4} \right) + \ln \frac{r_{eD}}{r_D} - \frac{3}{4} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0 \left( \alpha_m \frac{r_D}{r_{eD}} \right) e^{-\alpha_m^2 \frac{t_D}{r_D^2}}}{\alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} + \frac{2}{\pi^2 r_D^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma_m^2}{r^2} \left\{ \frac{K_1(\alpha_m r_{eD}) I_0(\alpha_m r_D) + I_1(\alpha_m r_{eD}) K_0(\alpha_m r_D)}{I_1(\alpha_m r_D)} \right\} \quad (146)$$

#### 4.7 Modelo 7: Fronteras mixtas en la cima y en la base, frontera externa infinita.

En esta sección se muestra el procedimiento para obtener la solución del Modelo 7 en el espacio de Laplace.

Como se mencionó en el Capítulo 3, en este Modelo se supone que en la cima se especifica la presión (Ecuación 15) y en la base el gasto (Ecuación 24), es decir, consideramos fronteras mixtas en la cima y en la base del yacimiento.

Las condiciones de frontera interna y externa en el espacio de Laplace para el Modelo 7 están dadas por las ecuaciones (35) y (36) respectivamente. Mientras que las condiciones en la cima y la base son:

$$p_{Df}(r_D, 0) = p_{1z}(u) \quad (147)$$

$$\frac{\partial p_{Df}}{\partial z_D}(r_D, 1) = q_{2zD}(u) \quad (148)$$

Así, en este caso nuestro problema implica resolver la ecuación (25) sujeta a las condiciones de frontera (35), (36), (147) y (148). Para resolver este problema utilizaremos la siguiente Transformada de Fourier (Lighthill, 1958), a la cual llamaremos Transformada Seno Modificada de Fourier.

$$T_{SM}(f) = \tilde{f}_{SM} = \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \left[ \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \right] dx \quad (149)$$

Como  $0 < z_D < 1$ , utilizaremos  $a = 1$ , de lo cual:

$$\tilde{f}_{SM} = \int_0^1 f(z_D) \operatorname{sen} \left[ \frac{(2n-1)\pi z_D}{2} \right] dz_D \quad (150)$$

Mediante integración por partes, se puede demostrar que:

$$\int_0^a \frac{d^2 f}{dx^2} \operatorname{sen} \left[ \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \right] dx = (-1)^{n+1} \frac{df(a)}{dx} + \frac{(2n-1)\pi}{2a} f(0) - \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4a^2} \tilde{f}_{SM} \quad (151)$$

Se observa que en el lado derecho de la ecuación anterior aparece la derivada de la función  $f$  evaluada en  $x=a$ , mientras que en  $x=0$ , aparece dicha función. Esta característica es la que permite el manejo de fronteras mixtas en la cima y la base del yacimiento.

Aplicando la Transformada Seno Modificada de Fourier a las ecuaciones (25), (35) y (36); utilizando además las ecuaciones (147) y (148), se puede demostrar que la solución esta dada por:

$$P_{Df}(r_D) = -\frac{4}{\pi h_{pD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cMn}}{(2n-1)} \left\{ \frac{2\Gamma_{cMn}}{(2n-1)\pi} q_{Dn} K_0(\beta_{Mn} r_D) - \frac{I_{pMn}}{\beta_{Mn}^2} \right\} \quad (152)$$

Donde:

$$\Gamma_{cMn} = \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi h_{2D}}{2} \right] - \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi h_{1D}}{2} \right] \quad (153)$$

$$\beta_{Mn}^2 = u g(u) + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4h_D^2} \quad (154)$$

$$I_{pqn} = -(-1)^{n+1} q_{2zD} - \frac{(2n-1)\pi}{2} p_{1zD} \quad (155)$$

$$p_{Df}(r_D) = \frac{1}{h_{pD}} \int_{h_{uD}}^{h_{zD}} p_{Df}(r_D, z_D) dz_D \quad (156)$$

Si  $q_{2zD} = 0, p_{1zD} = 0$ , tenemos:

$$p_{Df}(r_D) = -\frac{8q_D}{\pi^2 h_{pD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cMn}^2}{(2n-1)^2} K_0(\beta_{Mn} r_D) \quad (157)$$

Para el caso de gasto constante en un pozo parcialmente penetrante utilizamos la ecuación (54), de lo cual:

$$p_{Df}(r_D) = \frac{8}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cMn}^2}{(2n-1)^2} K_0(\beta_{Mn} r_D) \quad (158)$$

Como se indicó en el Capítulo 3, debido a que estamos considerando que los efectos gravitacionales son despreciables, si el eje coordenado se coloca en la base del yacimiento (con la dirección positiva del eje z hacia arriba), el Modelo 7 también representa el caso en el cual en la cima se especifica un valor de gasto (Ecuación 23) y en la base una cierta presión (Ecuación 16).

Mediante el uso de la Transformada Seno de Fourier definida por la ecuación (150) se puede generar (siguiendo la metodología expuesta en esta tesis) en forma relativamente fácil los casos en los que se tiene fronteras mixtas en la cima y en la base y frontera externa finita (a presión o gasto especificado).

#### 4.8 Comportamiento de curvas de declinación

En contraste con las soluciones obtenidas en las secciones anteriores para gasto constante, en este caso consideramos que la presión de fondo es constante. La conversión de la solución de presión adimensional (a gasto

constante) a la solución de gasto adimensional (a presión constante) en el espacio de Laplace fue propuesta por van Everdingen y Hurst (1949) mediante la siguiente relación:

$$\bar{p}_{wf} \bar{q}_{wf} = \frac{1}{u^2} \quad (159)$$

donde  $\bar{p}_{wf}$  es la transformada de Laplace de la presión de fondo adimensional a gasto constante y  $\bar{q}_{wf}$  es la transformada de Laplace del gasto adimensional a presión constante, definido en este caso por:

$$q_{wf} = qB\mu / [2\pi(k_f + k_v)_r h(p_i - p_{wf})] \quad (160)$$

La relación (147) es aplicable a una gran variedad de problemas, el único requerimiento es que el sistema de ecuaciones que definen el problema en estudio sea lineal.

# CAPÍTULO 5

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los Modelos presentados en el Capítulo anterior, fueron utilizados para generar diversas respuestas de presión y producción, las cuales serán discutidas a continuación.

### 5.1 Modelo 1

En esta Sección se muestra la respuesta de presión y función derivada para el caso particular del Modelo 1, en el cual se considera cima y base a presión constante y gasto constante.

En la Figura 2, se muestran los resultados del caso particular mencionado en el párrafo anterior (dado por la ecuación 56) para el Modelo de doble (Warren y Root, 1963) y triple porosidad (Camacho, *et al.*, 2002); se observa que se pueden generar los resultados de doble porosidad con el Modelo de triple porosidad, de hecho la línea discontinua (Fig. 2) correspondiente al Modelo de Warren y Root coincide con los rombos y rectángulos, que representan al Modelo de triple porosidad. En esta Figura los valores de los parámetros son los siguientes: Warren y Root:  $\lambda = 1 \times 10^{-5}$ ,  $\omega = 1 \times 10^{-3}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$ . Triple porosidad:  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-5}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 1 \times 10^{-7}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$ .

En dicha Figura se observa que cuando  $\omega_v$  es pequeño y alguno de los valores de  $\lambda_{vf}$  y  $\lambda_{mv}$  es pequeño (pero menores que  $\lambda_{mf}$ ), se logra reproducir la respuesta del Modelo de doble porosidad. Esto se debe a que un valor pequeño de  $\omega_v$  implica que el tamaño de los vórgulos es similar al de los poros (porosidad primaria) de la formación. Del análisis de sensibilidad realizado, se observó

que este comportamiento sucede siempre que  $\lambda_{mf}$  sea mayor que  $\lambda_{vf}$  y  $\lambda_{mv}$  (en algunos casos tiene que ser mayor por un factor de 10). Otra característica observada en la misma Figura es que cuando  $\lambda_{vf}$  y  $\lambda_{mv}$  son mayores que  $\lambda_{mf}$ , el mínimo relativo de la función derivada se desplaza hacia la izquierda, aún cuando el coeficiente de flujo interporoso matriz-fractura sea pequeño. Además, si  $\lambda_{vf}$  es grande y  $\lambda_{mv}$  es pequeña, la respuesta de presión y función derivada es la misma que se obtiene cuando ambas son pequeñas (el mínimo relativo en la función derivada no se desplaza); esta última situación sucede también cuando  $\lambda_{vf}$  es pequeña y  $\lambda_{mv}$  es grande.

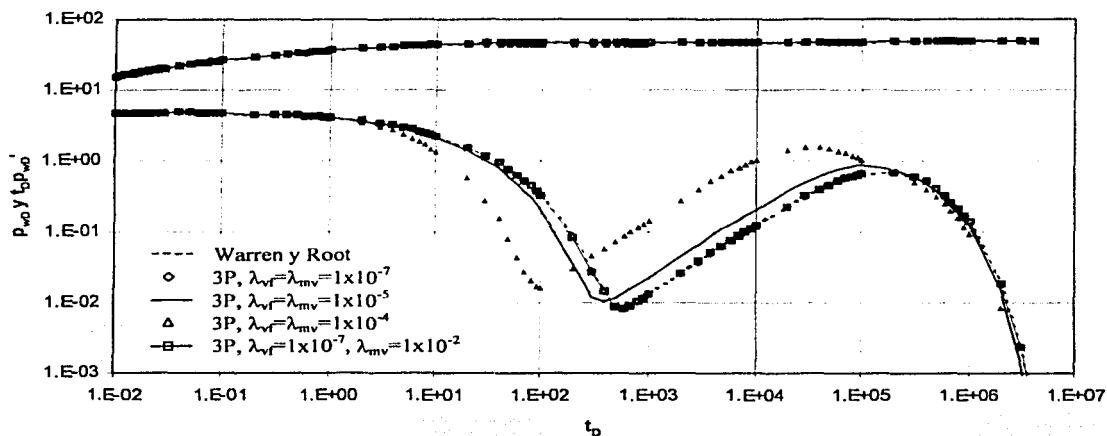


Figura 2: Comparación entre el Modelo de Warren y Root y el Modelo 1 de Triple Porosidad

En la Figura 3 se muestra que con el Modelo propuesto podemos generar también como caso particular la respuesta para yacimientos homogéneos, los parámetros usados en esta Figura para el caso de triple porosidad son los mismos que los usados en la Figura 2, solo que para este conjunto de parámetros  $\omega_f=1$ . Este es un resultado esperado, ya que el yacimiento contiene solo porosidad secundaria homogénea (Warren y Root, 1963). Otro aspecto importante de la Figura 2 es que se obtiene la misma respuesta

independientemente del valor de  $\lambda_{mf}$ , lo cual también es una respuesta esperada. En esta Figura se observa que las líneas de presión y función derivada de línea discontinua correspondientes a la respuesta para yacimientos homogéneos coinciden con los rombos, que representan el Modelo de triple porosidad.

Una característica común que aparece en las Figuras 2 y 3 y que aparecerá en todas las Figuras en las que se muestren los Modelos con fronteras a presión constante, es que tan pronto como el pozo detecta la frontera (a presión constante) la función derivada tiende a cero, esto se debe a que la variación de la presión con respecto al tiempo es cero. Cuando tenemos un yacimiento homogéneo, la función derivada decrece monótonamente a cero cuando se detecta la frontera a presión constante, pero en el caso de yacimientos naturalmente fracturados vulgares, el decremento no es necesariamente monótono, como se mostrará más adelante.

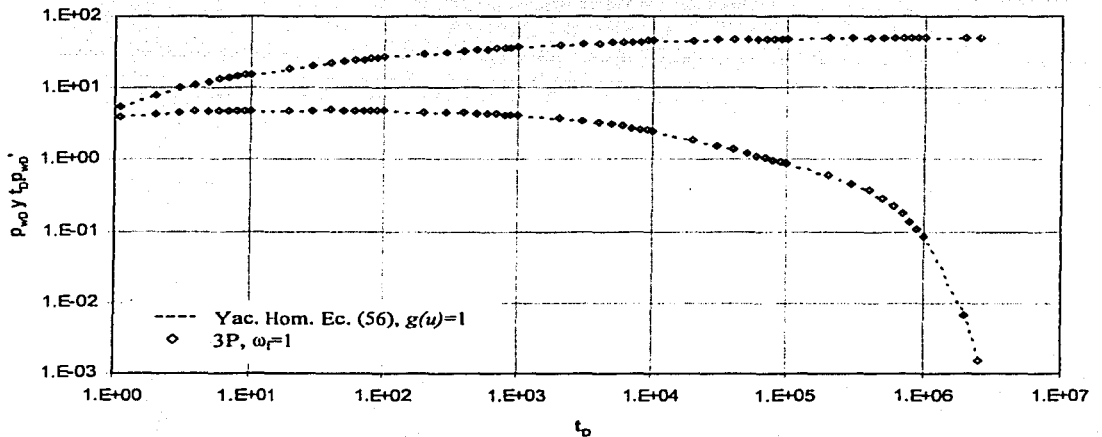


Figura 3: Comparación entre la respuesta para Yac. Homogéneo y el Modelo 1 de Triple Porosidad



A continuación se presentan los resultados correspondientes al Modelo 2. Analizaremos los efectos de la penetración parcial y de los parámetros del yacimiento en el periodo transitorio y dominado por frontera. Aunque el Modelo 2 considera yacimiento finito, no le resta generalidad a las conclusiones hechas sobre la etapa transitoria.

## 5.2 Modelo 2

En esta Sección se analiza el caso particular del Modelo 2, el cual considera la cima, la base y la frontera externa sujetas a presión constante, y además considera gasto de producción constante.

En la Figura 4 mostramos el efecto de la longitud del intervalo abierto en la respuesta de presión. En esta Figura los parámetros son los siguientes:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 5 \times 10^{-1}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$

En la Figura 4 se observa que a menor longitud de intervalo abierto  $h_{pD}$ , mayor es la presión adimensional, esta respuesta es de esperarse, ya que cuando  $h_{pD}$  decrece, se restringe el flujo en el pozo y para mantener el mismo gasto, la diferencia de presión debe incrementarse. Físicamente, en un pozo parcialmente penetrante, las líneas de flujo son forzadas a converger verticalmente hacia el intervalo disparado. Esta deformación en el patrón de flujo resulta en una distancia mayor que recorrer, lo cual origina que la respuesta de presión muestre un cambio adicional en comparación con el cambio de presión para un pozo totalmente penetrante.

Además, observamos que el tiempo al cual la función derivada presenta un mínimo no varía con  $h_{pD}$ , lo cual ya había sido observado para sistemas de doble porosidad (Bui *et al.*, 2000), esta característica se debe a la suposición

de flujo uniforme a través del intervalo disparado durante la producción, dada por la condición de frontera (18).

Otra característica observada en la Figura 4 es que, como se indicó en la Sección anterior, cuanto se detectan las fronteras a presión constante la función derivada no tiende a cero monótonamente (como en el caso de yacimientos homogéneos), esto se debe a la transferencia de fluidos que ocurre en forma tardía debido, en este caso, a los valores pequeños de  $\lambda_{vf}$  y  $\lambda_{mv}$ .

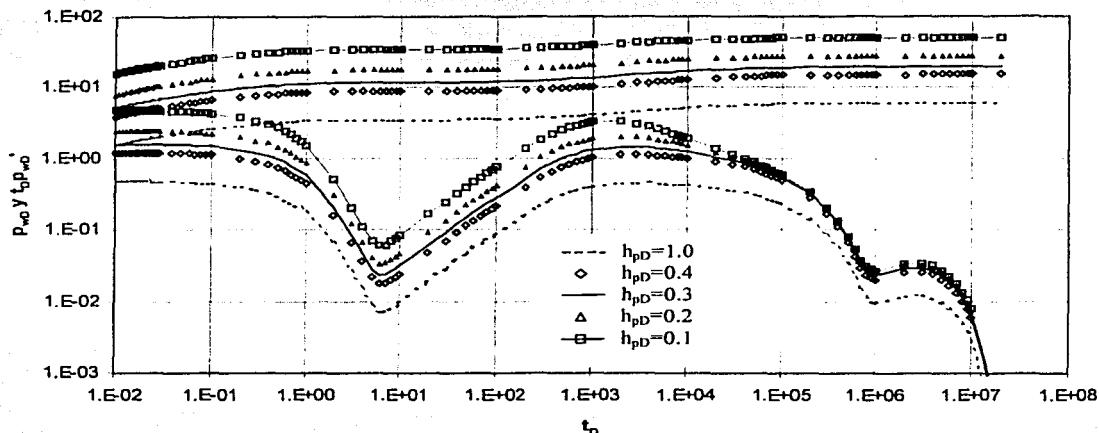


Figura 4: Efecto de  $h_{pD}$ , Modelo 2

En la Figura 5 mostramos el efecto de la posición del intervalo disparado, este efecto se estudió fijando el intervalo disparado  $h_{pD}$ , y variando  $h_{1D}$ . Los parámetros usados en esta Figura son:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 5 \times 10^{-1}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

En dicha Figura, se observa que la respuesta de presión es la misma para  $h_{1D} = 0.2$  y  $h_{1D} = 0.7$ , así como para  $h_{1D} = 0.4$  y  $h_{1D} = 0.5$ , debido a que para estos casos existe simetría ya que no se consideran efectos gravitacionales.

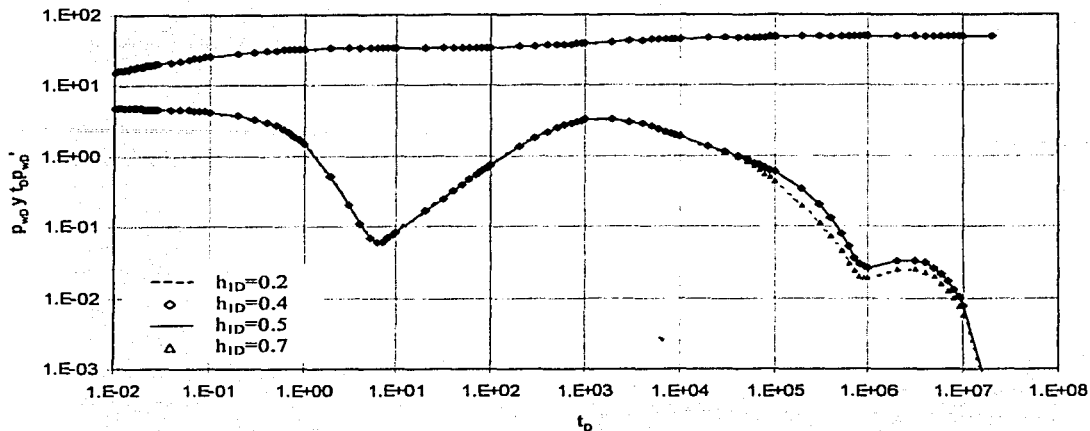


Figura 5: Efecto de  $h_{1D}$ , Modelo 2

En las Figuras 6 y 7 se observa el efecto de  $\omega_v$ . Los parámetros de la Figura 6 son:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$ ; los correspondientes a la Figura 7 son:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-1}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-1}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

En dichas Figuras observamos que el efecto de  $\omega_v$  es desplazar los mínimos relativos. En el caso de doble porosidad, cuando  $\omega$  decrece, el mínimo es más pronunciado y la transición comienza antes. En el caso de triple porosidad, el comportamiento resultante de la capacidad de almacenamiento de los vóculos es más complejo ya que en el primer mínimo de la Figura 6 se tiene el mismo comportamiento que en el caso de doble porosidad, pero en el segundo mínimo sucede lo contrario, es decir, el valle es más pronunciado cuando  $\omega_v$  aumenta. En el primer mínimo de la Figura 7 se observa un comportamiento similar para ciertos valores de este parámetro. Otra característica que observamos es que cuando  $\lambda_{vf}$  y  $\lambda_{mv}$  son pequeños, un incremento en  $\omega_v$  retarda el inicio del estado estacionario.

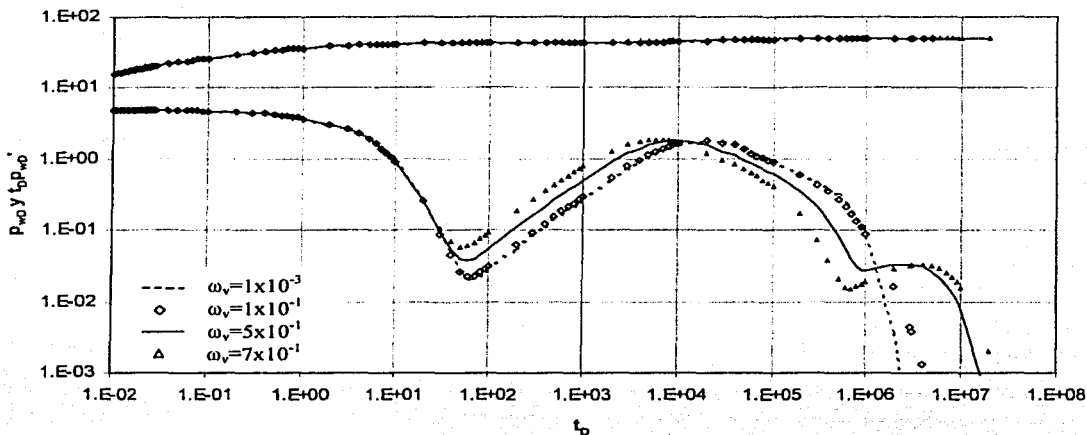


Figura 6: Efecto de  $\omega_v$ , Modelo 2

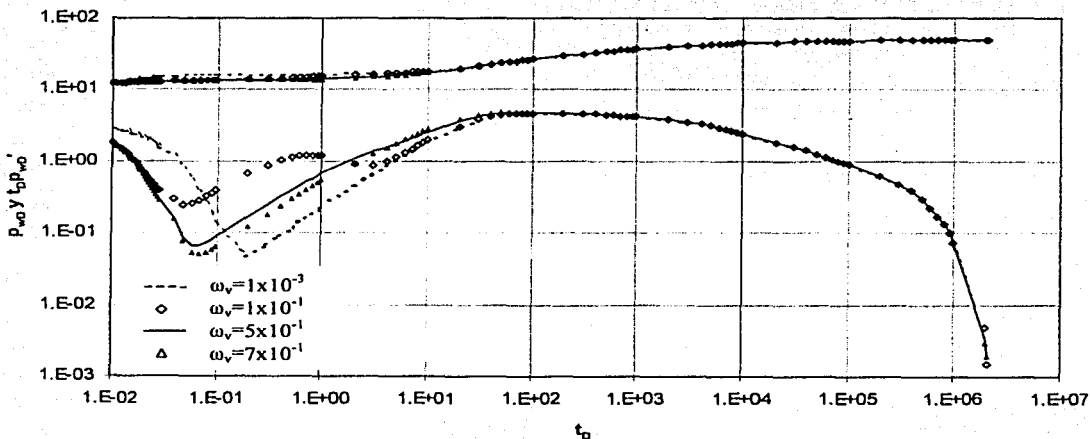


Figura 7: Efecto de  $\omega_v$ , Modelo 2

En las Figuras 8 y 9 mostramos el efecto de  $\lambda_{vf}$ . Los parámetros usados en la Figura 8 son:  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 1 \times 10^{-1}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$ ; mientras que los usados en la Figura 9 son:

$$\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}, \lambda_{mf} = 1 \times 10^{-7}, \omega_f = 1 \times 10^{-3}, \omega_v = 1 \times 10^{-1}, h_D = 2 \times 10^3, r_{eD} = 2 \times 10^3, h_{1D} = 4 \times 10^{-1}, h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$$

En las Figuras 8 y 9 observamos que el efecto de  $\lambda_{vf}$ , es desplazar el mínimo relativo hacia la izquierda, lo cual es un comportamiento esperado.

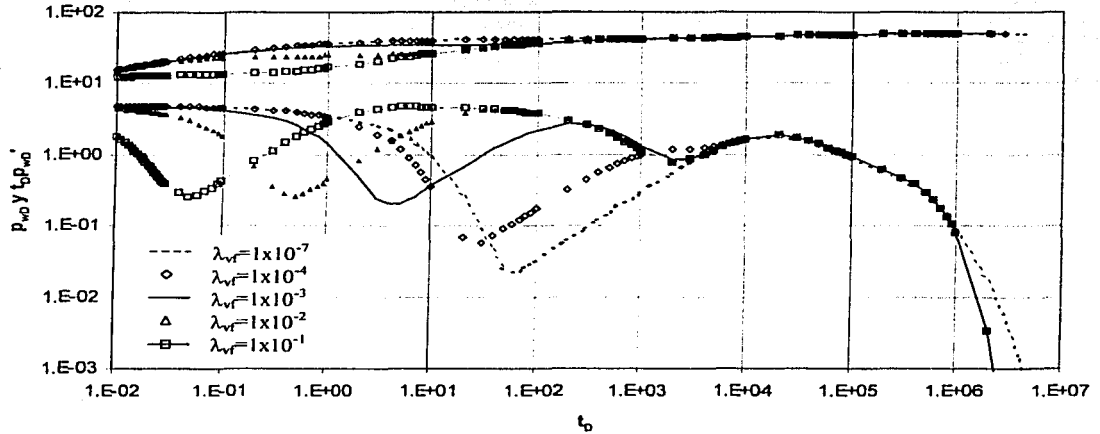


Figura 8: Efecto de  $\lambda_{vf}$ , Modelo 2

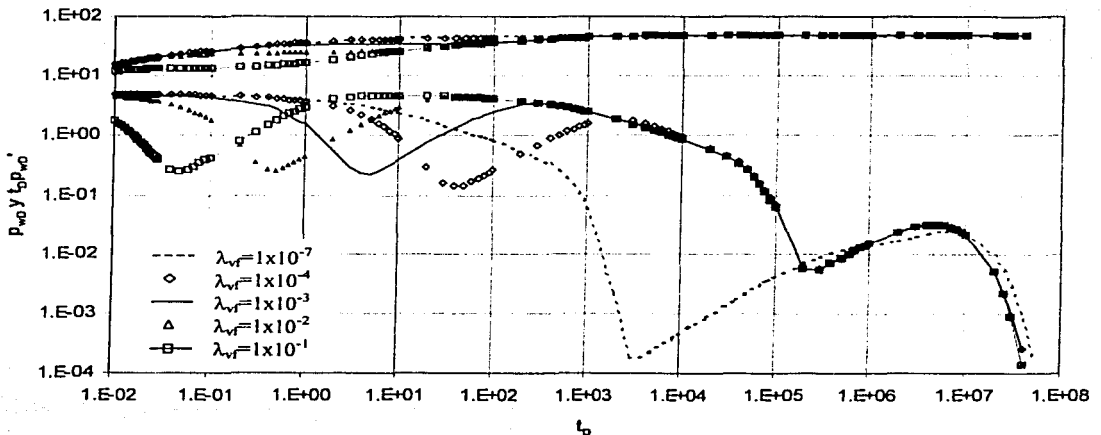


Figura 9: Efecto de  $\lambda_{vf}$ , Modelo 2

También es importante mencionar que hay ocasiones en que, dependiendo de los valores de los parámetros, la función derivada tiene una forma muy pronunciada y el valor que toma en algún mínimo es relativamente pequeño, como es el caso de la línea discontinua de la Figura 9. En esta gráfica esta curva fue generada con la solución analítica dada por la ecuación (62), debido a que la inversión con el algoritmo de Stehfest fue un poco ambigua al momento de reproducir la función derivada cerca del mínimo relativo. Lo anterior se muestra en la Figura 10, donde se observa que aunque se efectúe un análisis variando el valor de  $N$  (del algoritmo de Stehfest) no se logra reproducir de manera fidedigna la forma correcta de la función derivada. Para cuestiones prácticas la curva con cuadros (correspondiente a  $N=14$ ) podría ser tomada para un ajuste, pero el hecho de que el algoritmo numérico no reproduzca de forma natural la curva, ofrece cierta ambigüedad y desconfianza lo cual induce a verificar el resultado por otro medio, en este caso, dicha verificación la realizamos con la solución analítica, que como se indicó previamente, está dada por la ecuación (62).

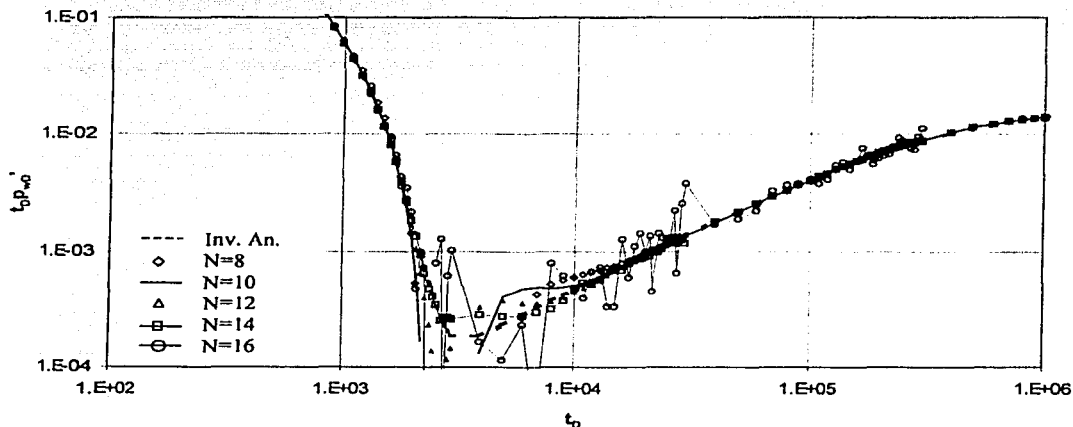


Figura 10: Función derivada generada con la ecuación (62) y con Stehfest

En las Figuras 11 y 12 mostramos el efecto de  $\lambda_{mv}$ . Los valores de los parámetros en la Figura 11 son:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-1}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 1 \times 10^{-1}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$ ; los correspondientes a la Figura 12 son:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-1}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 1 \times 10^{-1}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

Como se observa en estas Figuras, el efecto de  $\lambda_{mv}$  es desplazar el mínimo relativo hacia la izquierda.

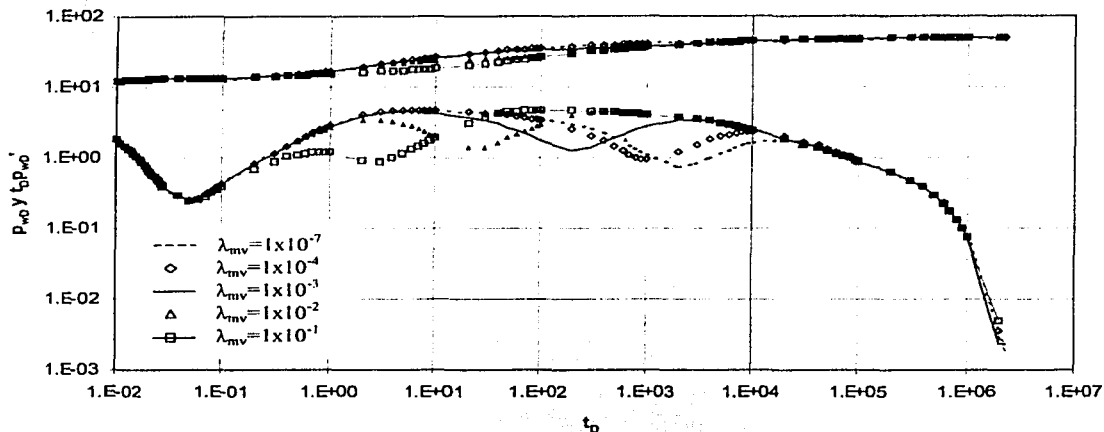


Figura 11: Efecto de  $\lambda_{mv}$ , Modelo 2

En la Figura 13 se muestra el efecto de  $h_D$  con los siguientes parámetros:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-2}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 5 \times 10^{-1}$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$ . Como se observa, para un mismo espesor del yacimiento y radio del pozo, entre mayor sea la razón  $k_f/k_z$  (lo cual implica que  $h_D$  sea más grande), el tiempo en el cual inicia el efecto de las fronteras será mayor, ya que la perturbación de presión tardará más tiempo en alcanzar la cima y la base del yacimiento.

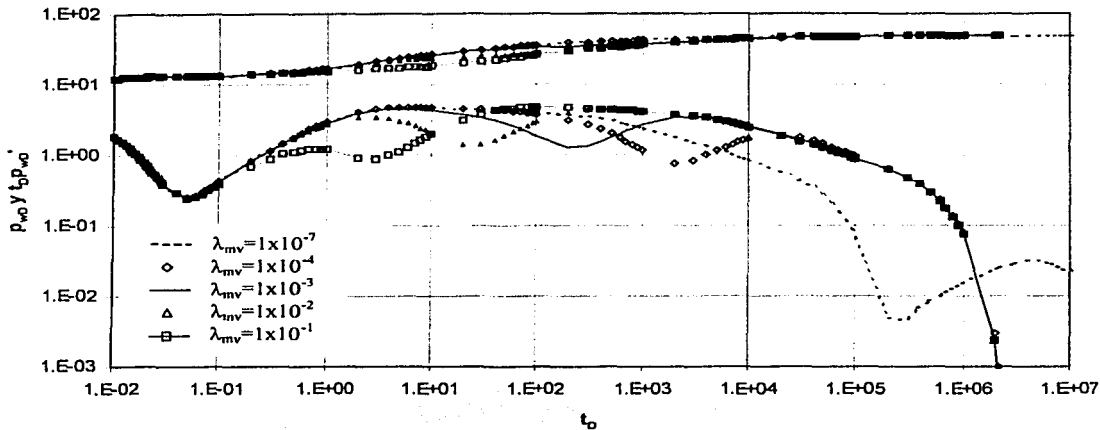


Figura 12: Efecto de  $\lambda_{mv}$ , Modelo 2

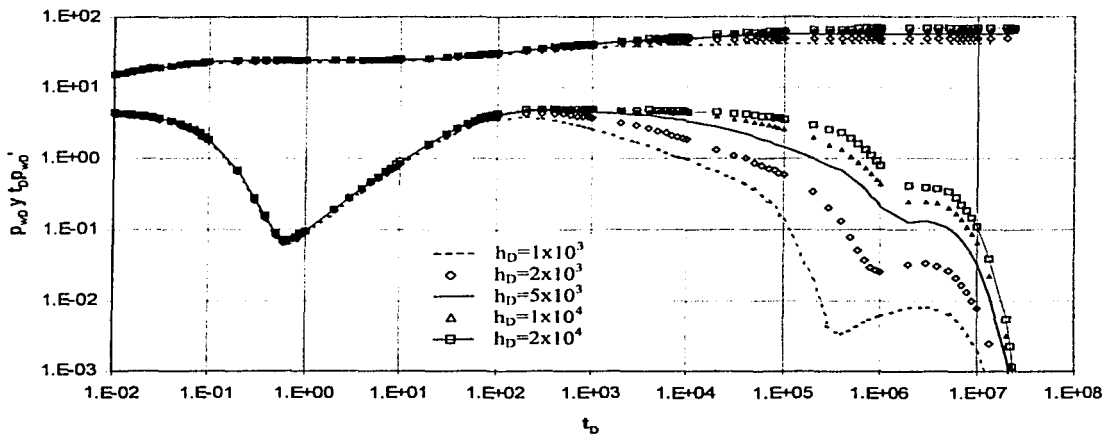


Figura 13: Efecto de  $h_D$  para diferentes valores de anisotropía, Modelo 2



En la Figura 14 mostramos la respuesta de presión de la Figura 4 en coordenadas semilogarítmicas, solo que en el eje de las ordenadas graficamos el producto  $h_{pD}p_D$ ; como se observa, las gráficas colapsan a una sola (a la curva para penetración total) hasta cierto periodo de tiempo. En el periodo de tiempo durante el cual las curvas se unen, podemos utilizar las curvas tipo para penetración total. Las curvas de penetración parcial se apartan de la curva de penetración total conforme el flujo en el pozo se vuelve menos uniforme (Bilhartz y Ramey, 1977). En esta Figura también mostramos la aproximación para tiempos cortos, dada por la ecuación (83), es decir la solución de línea fuente (LF). Como se observa, la respuesta de presión se desvía de la línea recta en un tiempo pequeño, por lo que será difícil detectar esta línea recta, y aún más difícil cuando tengamos la presencia de daño y almacenamiento. Gráficas similares a la Figura 14 fueron presentadas por Buhidma y Raghavan (1980) para yacimientos homogéneos.

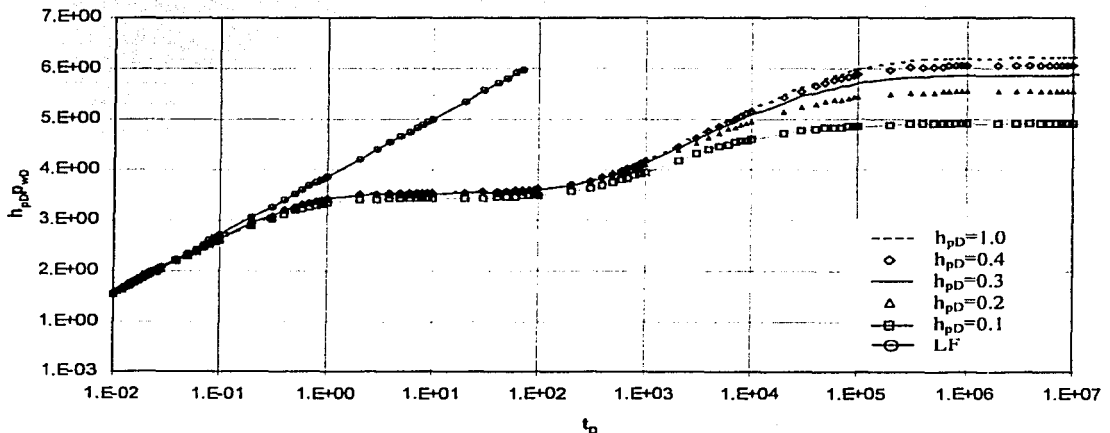


Figura 14:  $h_{pD}p_D$  y línea fuente vs  $t_D$ , Modelo 2

La Figura 15 muestra los datos de la Figura 6 pero con la aproximación para tiempos largos usando la ecuación (90) para yacimientos homogéneos, como se observa, si consideramos  $g(u)=1$  para tiempos largos, no siempre reproduciremos la respuesta de presión (ni la función derivada) previa al estado estacionario en forma correcta, sobre todo en los casos donde el comienzo del estado estacionario es más largo. Después de comenzar el estado estacionario, la ecuación (90) reproduce adecuadamente los resultados, pero para este caso tenemos una expresión más sencilla dada por la ecuación (88).

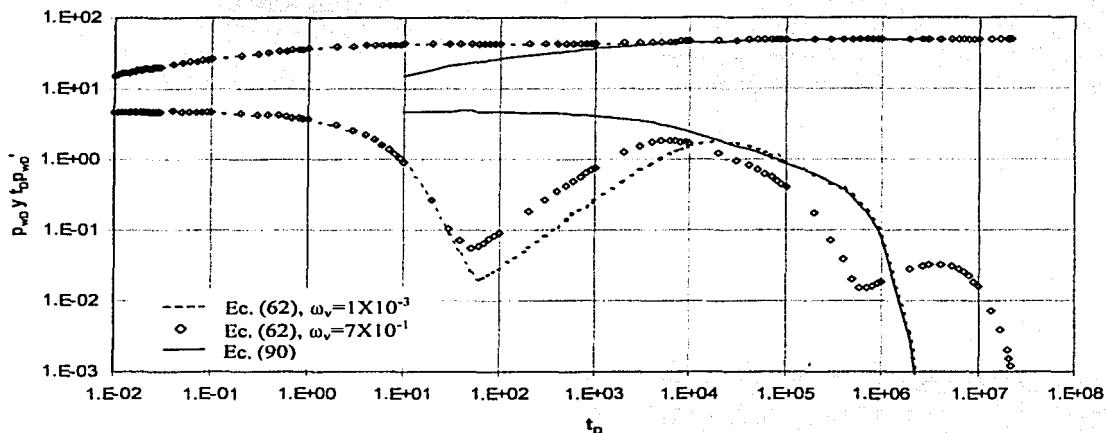


Figura 15: Aproximación a tiempos largos usando  $g(u)=1$ , Modelo 2

En las Figuras 16 y 17 (cuyos parámetros son los mismos de la Figura 6 con  $\omega_v=1 \times 10^{-3}$  y  $\omega_v=7 \times 10^{-1}$ , respectivamente) observamos que las aproximaciones con las ecuaciones (91) y (97) son más apropiadas que la ecuación (90), aún cuando tengamos mínimos relativos en la función derivada a tiempos largos. Notamos que, con la ecuación (97), la aproximación comienza a ajustar en forma correcta en un tiempo mayor que si tomamos la ecuación (91), pero este tiempo es suficiente para ajustar antes de que comience el estado estacionario. Así, una ventaja de las ecuaciones (91) y (97) sobre la ecuación (90) es que

aproximan mejor a la respuesta verdadera a tiempos largos, otra ventaja desde el punto de vista computacional es que ya no necesitamos calcular las raíces cúbicas de (62), las cuales son muy sensibles a la precisión de los números, ya que se manejan valores muy pequeños.

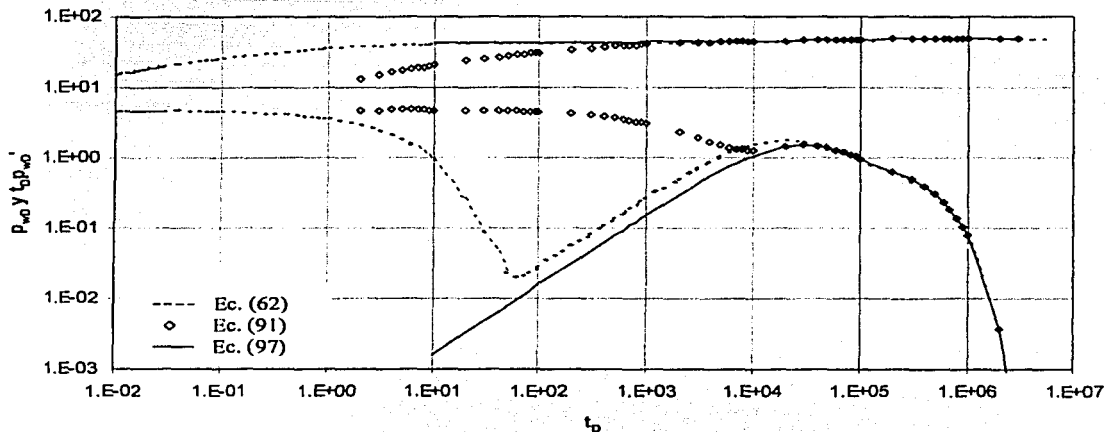


Figura 16: Aproximación a tiempos largos usando las ecuaciones (91) y (97)

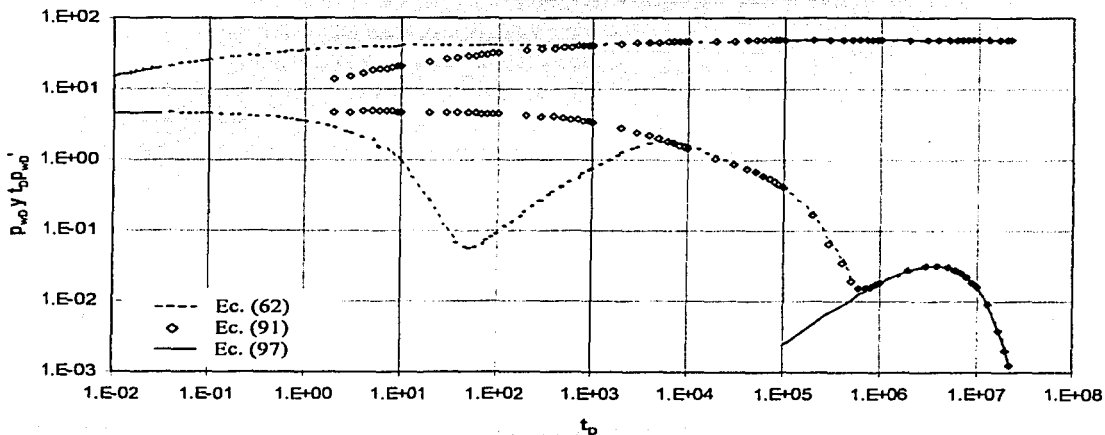


Figura 17: Aproximación a tiempos largos usando las ecuaciones (91) y (97)

### 5.3 Modelo 3

En esta Sección se analiza el caso particular del Modelo 3, el cual considera la cima y la base sujetas a presión constante, la frontera externa se supone cerrada y el gasto de producción constante.

En las Figuras 18 y 19 comparamos la respuesta para los casos particulares de los Modelos 2 y 3 descritos. En la Figura 18 los parámetros son:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 5 \times 10^{-1}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$ ; los parámetros de la Figura 19 son:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 5 \times 10^{-1}$ ,  $h_D = 5 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 5 \times 10^2$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

En el caso mostrado en la Figura 18 las respuestas son prácticamente iguales porque  $h_D$  y  $r_{eD}$  son iguales, lo cual implica que las fronteras (cima, base y frontera externa) actúan casi al mismo tiempo, predominando el efecto de las fronteras a presión constante (cima y base).

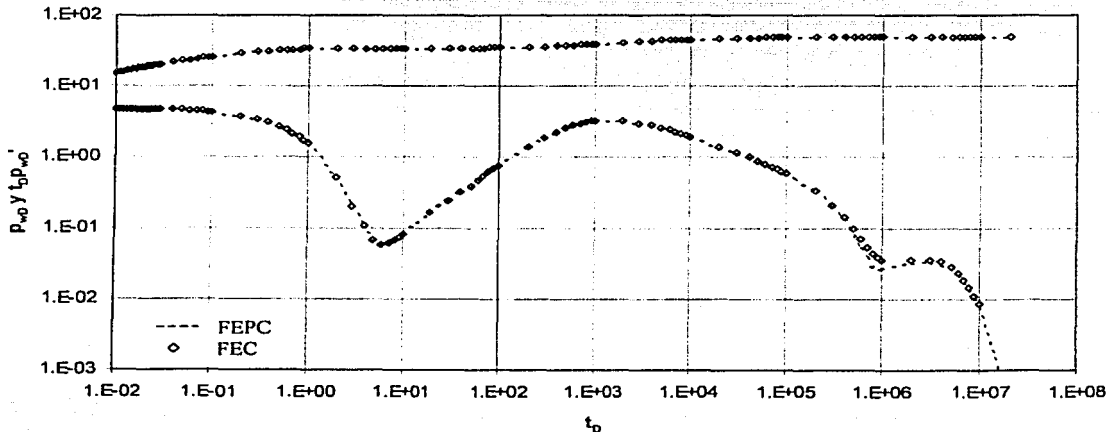


Figura 18: Comparación entre el Modelo 2 y 3

En la Figura 19 las respuestas son diferentes a tiempos grandes (lo cual es evidente ya que la cima, la base y la frontera externa actúan en estos tiempos); esto se debe a que  $r_{eD}$  es menor que  $h_D$  (en este caso  $h_D/r_{eD} = 10$ ), ya que en el Modelo 3 la frontera externa cerrada (FEC) actúa primero que la cima y la base, pero finalmente predominará el efecto de las fronteras a presión constante (cima y base), por lo que también se alcanza el estado estacionario. Este último comportamiento se observa mejor en la Figura 20, cuando variamos  $h_D$  (los parámetros restantes de esta figura son los mismos de la Figura 19).

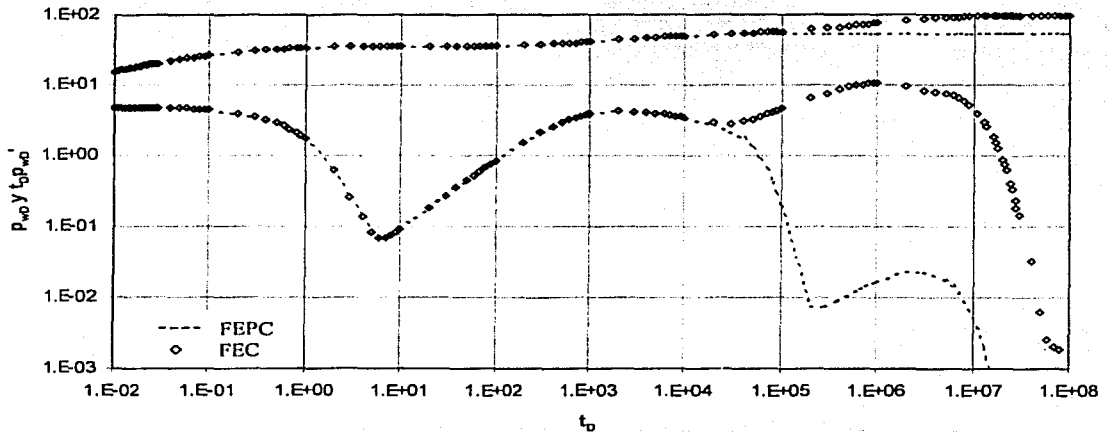


Figura 19: Comparación entre el Modelo 2 y 3

En la Figura 21 se muestra la respuesta de presión mostrada en la Figura 19 pero en coordenadas semilogarítmicas, lo cual es un resultado análogo a lo presentado por Buhidma y Raghavan (1980) para yacimientos homogéneos. Como se observa, la respuesta de presión cuando predomina la frontera externa cerrada tiene un cambio más pronunciado comparado con el caso en el cual la frontera externa está a presión constante (FEPC).

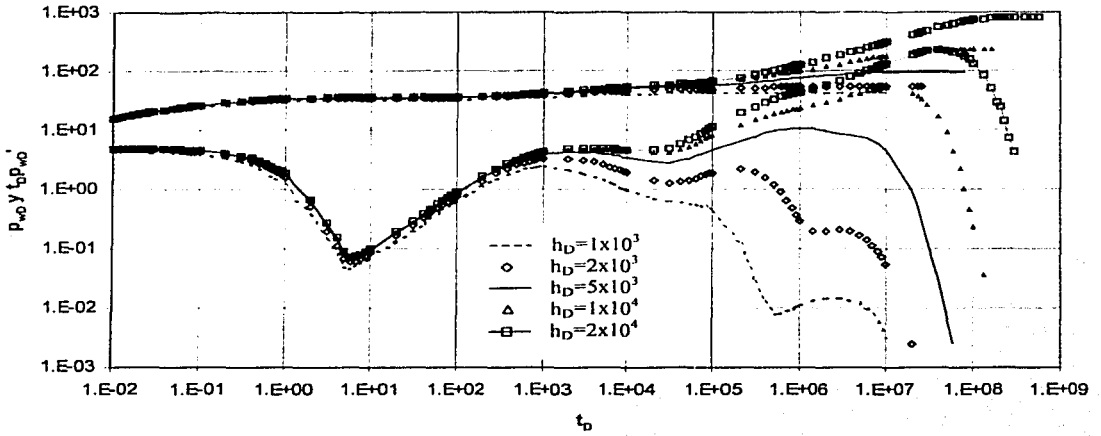


Figura 20: Efecto de  $h_D$  en el Modelo 3

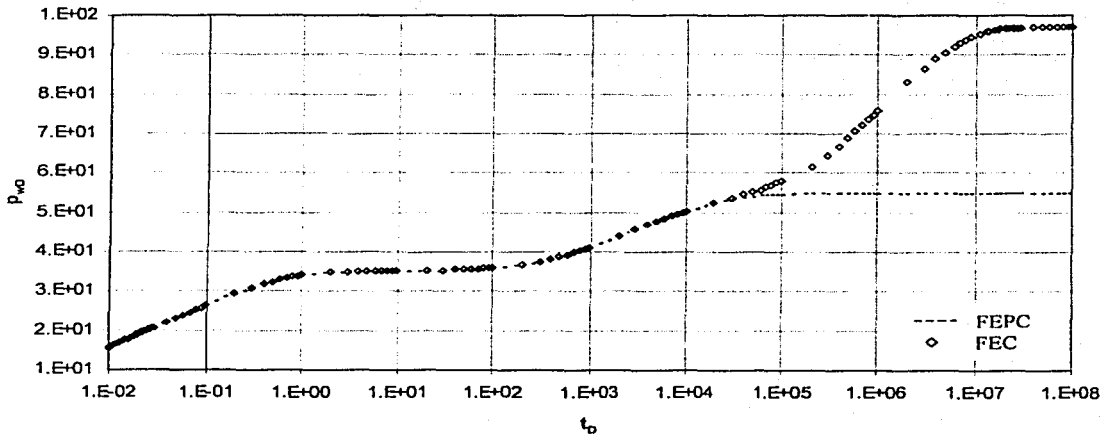


Figura 21: Comparación entre el Modelo 2 y 3 en gráfica semilogarítmica

Ahora analicemos las aproximaciones a tiempos largos para el caso particular del Modelo 3 desarrolladas en la Sección 4.3.3. En la Figura 22 (cuyos parámetros son los mismos de la Figura 20 con  $h_D = 1 \times 10^4$ ) observamos que la aproximación  $g(u) = 1$  tampoco es apropiada ya que no se logra reproducir bien la respuesta de presión previa al estado estacionario. Al igual que en el Modelo 2, cuando se alcanza el estado estacionario, sí se reproduce correctamente la respuesta de presión considerando  $g(u)=1$ , pero para este caso tenemos otra expresión más sencilla dada por la ecuación (118).

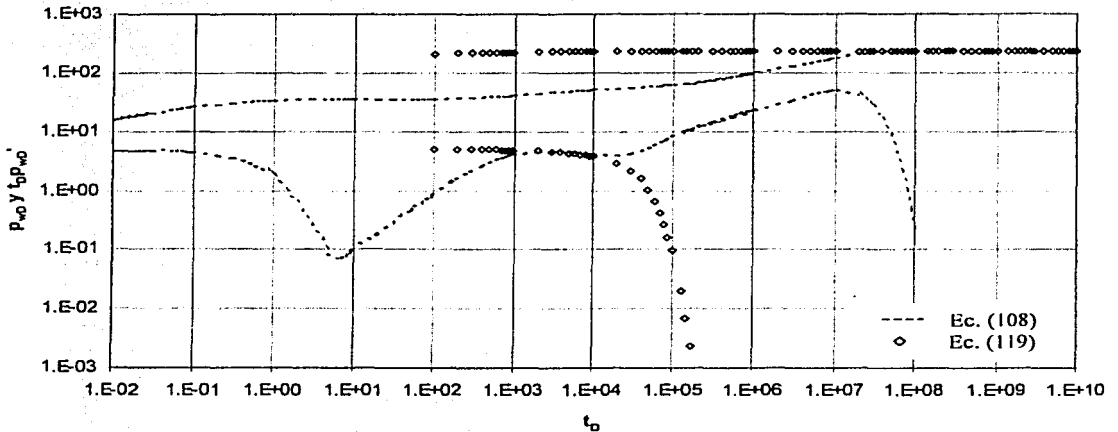


Figura 22: Aproximación a tiempos largos con  $g(u)=1$

En la Figura 23 se muestran las aproximaciones con las ecuaciones (120) y (125) usando los mismos parámetros de la Figura 22. Básicamente tenemos las mismas observaciones que se dedujeron en las Figuras 16 y 17 (correspondientes al Modelo 2).

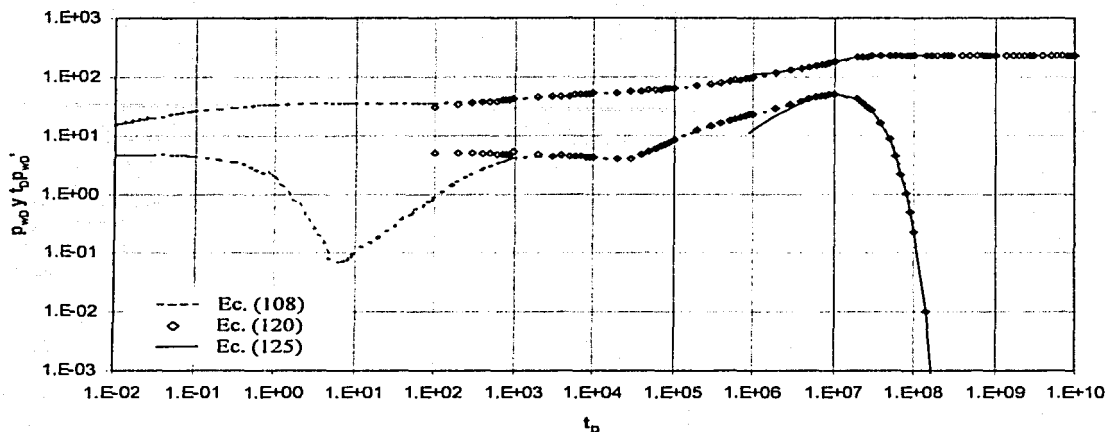


Figura 23: Aproximación a tiempos largos usando las ecuaciones (120) y (125)

#### 5.4 Modelo 4

En diversos artículos se considera que la cima y la base están cerradas al flujo y que el yacimiento tiene extensión radial infinita (Yildiz, 1990, Bui, 2000). En la Figura 24 mostramos que nuestro Modelo reproduce (como caso particular) los resultados reportados por Bui *et al.* (2000). En esta Figura los parámetros son: Warren y Root:  $\lambda = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\omega = 1 \times 10^{-3}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 0.0$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$ ; Triple porosidad:  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 1 \times 10^{-7}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 0.0$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

En la Figura 24 se observa que existe una pequeña diferencia en la respuesta de presión y función derivada a tiempos cortos, esta diferencia se debe a que en nuestro Modelo estamos suponiendo la aproximación de línea fuente, mientras que Bui *et al.* consideran un radio finito en la condición de frontera interna. En esta Figura también se observa que para tiempos intermedios y largos las respuestas son iguales. La idealización de línea fuente no es muy



restrictiva porque en cuestiones prácticas el almacenamiento dura lo suficiente originando que la solución de línea fuente sea usualmente válida (Buhidma y Raghavan, 1980).

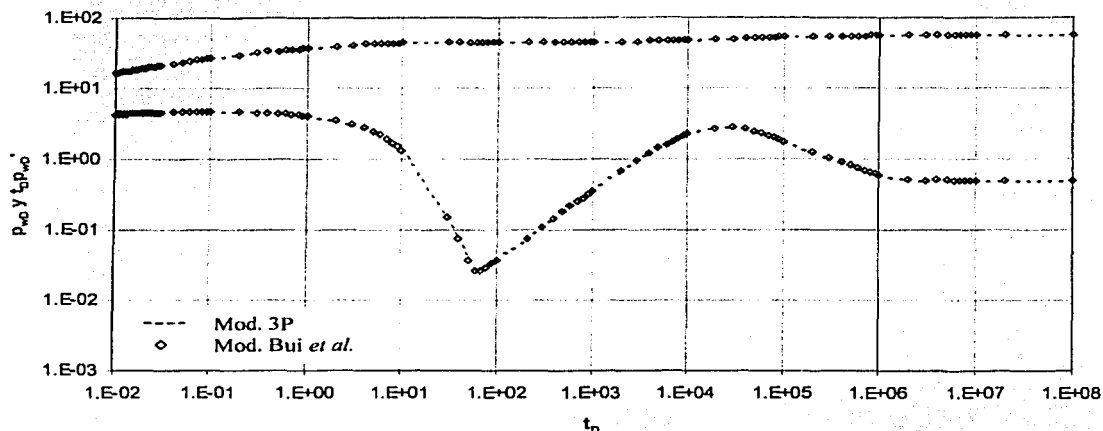


Figura 24: Comparación entre el Modelo de triple porosidad y el Modelo de Bui et al.

En la Figura 25 mostramos la respuesta de presión del Modelo 4 en coordenadas semilogarítmicas con los mismos parámetros de la Figura 4. Tal como en la Figura 14, en el eje de las ordenadas graficamos el producto  $h_{pD} P_D$  y se observa que las gráficas se unen a tiempos cortos e intermedios. En esta Figura también se muestra la aproximación para tiempos cortos. De esta Figura se desprenden comentarios similares a los hechos en la Figura 14.

En la Figura 26 observamos que el Modelo 4 de triple porosidad también reproduce como caso particular la respuesta para yacimientos homogéneos. En esta Figura se observa claramente un periodo en el cual la geometría de flujo es esférica, ya que la función derivada tiene una pendiente igual a  $-0.5$ . En este caso los parámetros son:  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\omega_f = 1.0$ ,  $\omega_v = 1 \times 10^{-7}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^1$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

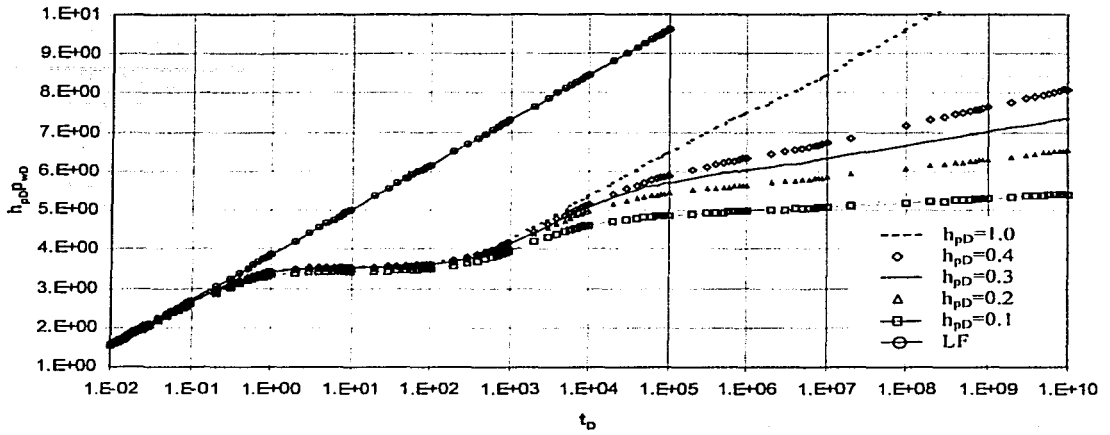


Figura 25:  $h_p D^2$  y línea fuente vs  $t_D$ , Modelo 4

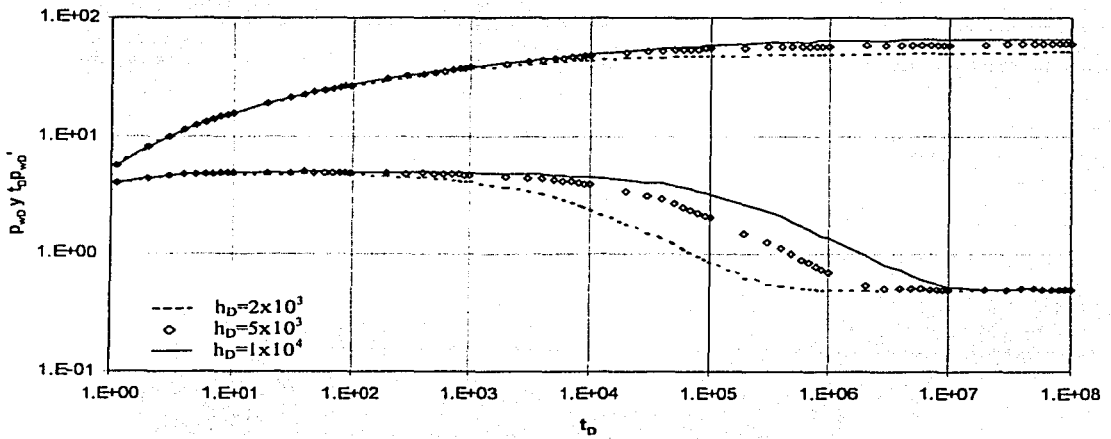


Figura 26: Yacimiento Homogéneo, Modelo 4

En la Figura 27 mostramos la respuesta de presión del Modelo 4 con un conjunto de valores que reproduce el Modelo de Warren y Root, los parámetros usados en esta Figura son:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-8}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-8}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 1 \times 10^{-7}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

Observamos que dependiendo del valor de los coeficientes de flujo interporoso y de las relaciones de almacenamiento, el periodo de flujo esférico puede no presentarse, aún cuando el espesor de la formación sea muy grande comparado con el intervalo disparado. En el caso mostrado en esta Figura por la línea continua, la transferencia matriz-fractura enmascara el periodo de flujo esférico. En el caso de yacimientos naturalmente fracturados vugulares, esta situación puede ser común, debido a que tenemos 3 coeficientes de flujo interporoso, los cuales pueden actuar a diferentes tiempos, haciendo que la transferencia de fluidos de un medio a otro se presente en el periodo en el cual se estaría dando el flujo esférico, lo cual origina que se incremente la probabilidad que no observemos la pendiente  $-0.5$  en la función derivada.

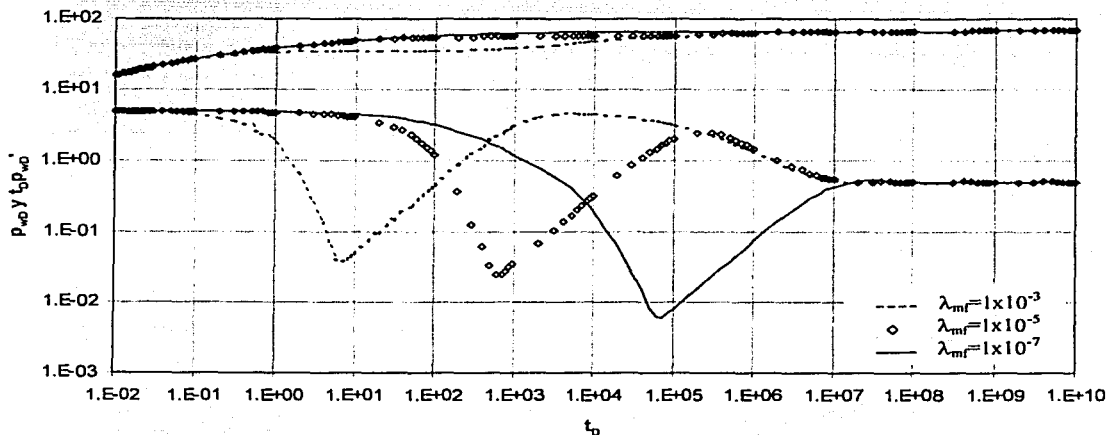


Figura 27: Efecto de  $\lambda_{mf}$ , Modelo 4

En la Figura 28 mostramos la aproximación a tiempos largos dada por la ecuación (137). Como se observa, el tiempo en el cual la aproximación comienza a ajustar correctamente depende de los valores de los parámetros, los cuales influyen en el comienzo el segundo periodo radial. Los parámetros (que no varían) usados en esta gráfica corresponden a los de la Figura 4.

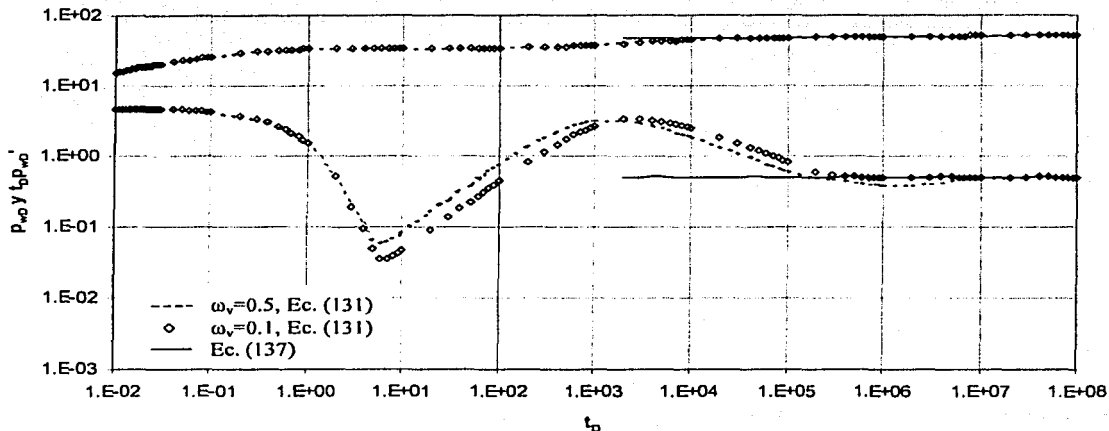


Figura 28: Aproximación a tiempos largos, Modelo 4.

## 5.5 Modelo 5

En el caso particular del Modelo 5 a estudiar, consideramos que la cima y la base están cerradas al flujo y que la frontera externa está presión constante; suponemos además gasto constante.

En la Figura 29 mostramos la respuesta de presión del Modelo 5 tomando los mismos parámetros de la Figura 4 con  $h_{pD}=0.1$ . Se observa que a pesar de que la cima y la base están cerradas al flujo, finalmente se alcanza un periodo de

estado estacionario, esto se debe al mantenimiento de presión que origina la frontera externa a presión constante. En esta Figura también se muestra la aproximación a tiempos largos dada por la ecuación (141). Se observa que en este caso, si suponemos que  $g(u)=1$ , no se reproduce bien la función derivada a tiempos largos.

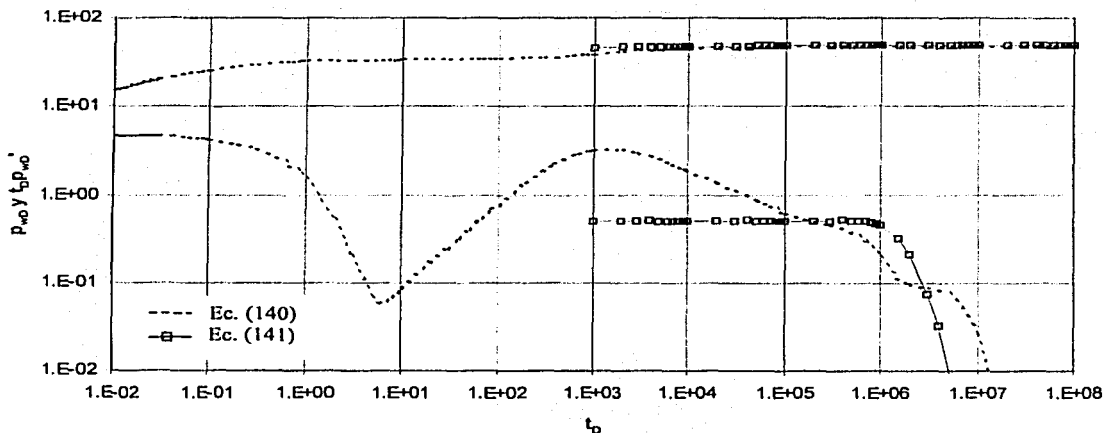


Figura 29: Respuesta del Modelo 5 y aproximación a tiempos largos.

En la Figura 30 mostramos que el Modelo 5 también reproduce como caso particular la respuesta de yacimientos homogéneos. En este caso, la aproximación con  $g(u)=1$  sí reproduce bien la respuesta de la derivada (a tiempos largos), lo cual es obvio, por tratarse de un yacimiento homogéneo. El conjunto de parámetros usados en esta Figura son:  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\omega_f = 1.0$ ,  $\omega_v = 1 \times 10^{-7}$ ,  $h_D = 1 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

En la Figura 31 mostramos que la aproximación a tiempos largos con la ecuación (142) sí reproduce bien la respuesta de presión y la función derivada

desde antes que comience el estado estacionario. Los parámetros usados en esta Figura son los mismos de la Figura 29.

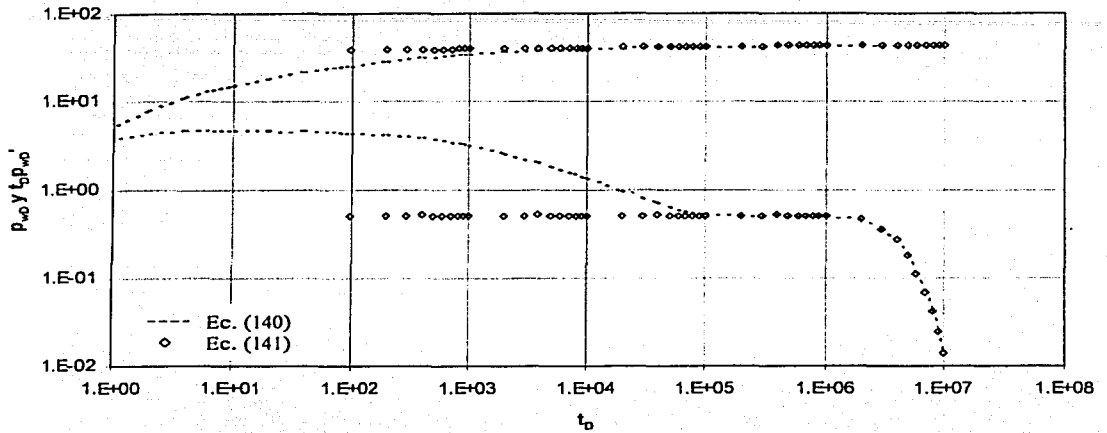


Figura 30: Yacimiento Homogéneo y aproximación a tiempos largos, Modelo 5.

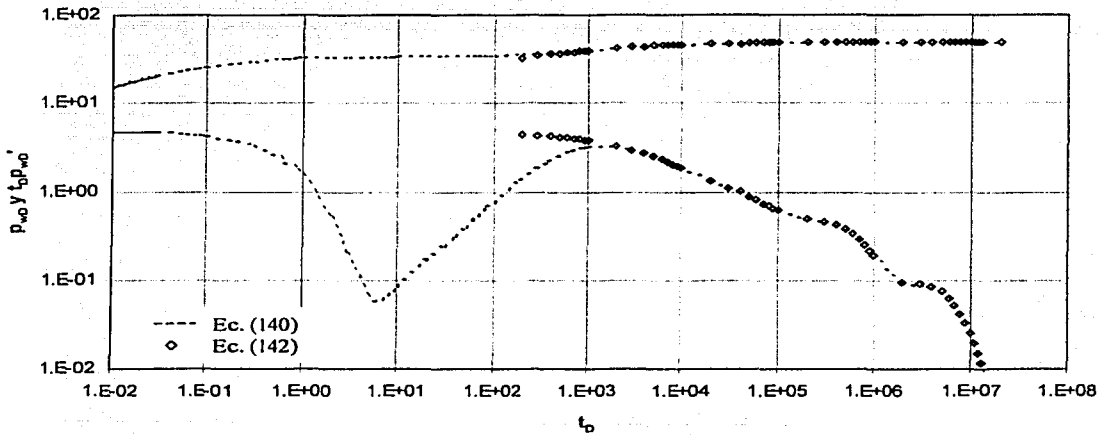


Figura 31: Aproximación a tiempos largos con la Ec. (142), Modelo 5

## 5.6 Modelo 6

El caso particular del Modelo 6 a estudiar, considera que la cima, la base y la frontera externa están cerradas al flujo. En las Figuras 32 y 33 mostramos la respuesta de presión y función derivada que resultan de este Modelo. Los parámetros de la Figura 32 son los mismos de la Figura 4 (con  $h_{pD}=0.1$ ) y los de la Figura 33 son los siguientes:  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 1 \times 10^{-1}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

En las Figuras 32 y 33 se observa que la aproximación dada por la ecuación (146) reproduce adecuadamente la respuesta de presión y función derivada a tiempos largos.

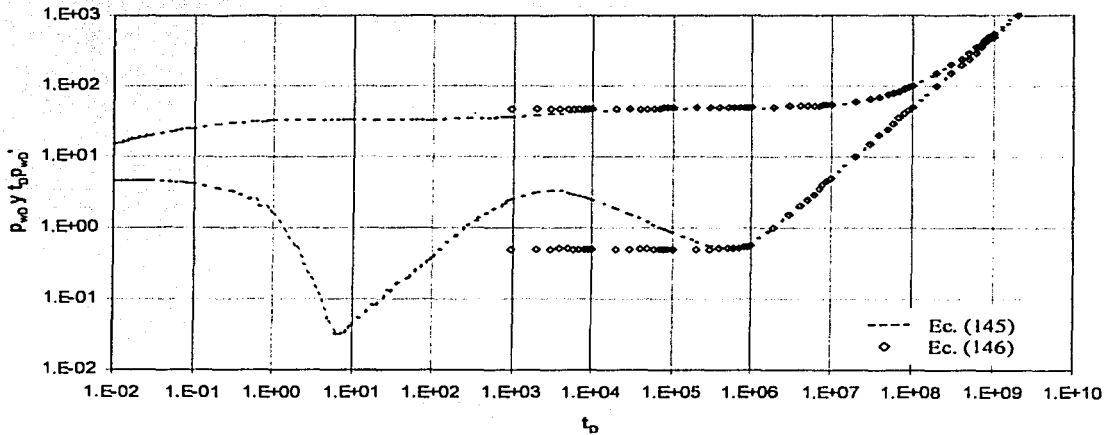


Figura 32: Aproximación a tiempos largos con la Ec. (146), Modelo 6

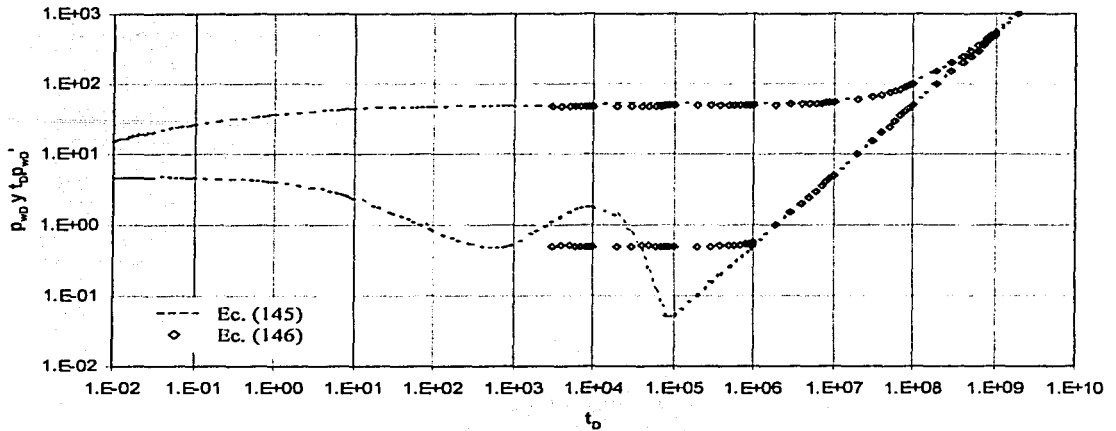


Figura 33: Aproximación a tiempos largos con la Ec. (146), Modelo 6

## 5.7 Modelo 7

En esta Sección se muestra la respuesta de presión y función derivada para el caso particular del Modelo 7, en el cual se considera cima a presión constante, base cerrada, yacimiento infinito y gasto constante.

En la Figura 34, se muestran los resultados del caso particular mencionado en el párrafo anterior (dado por la ecuación 158 con  $r_D=1$ ) comparado con el Modelo 1 (dado por la ecuación 56). En esta Figura los parámetros son los siguientes:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 5 \times 10^{-1}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

En dicha Figura se observa que la función derivada tiende a cero más rápido en el Modelo 1 (en el cual se considera cima y base a presión constante), comparado con el Modelo 7, debido a que en este último, solo actúa una frontera a presión constante, por lo que el mantenimiento de presión es menor comparado con el del Modelo 1.



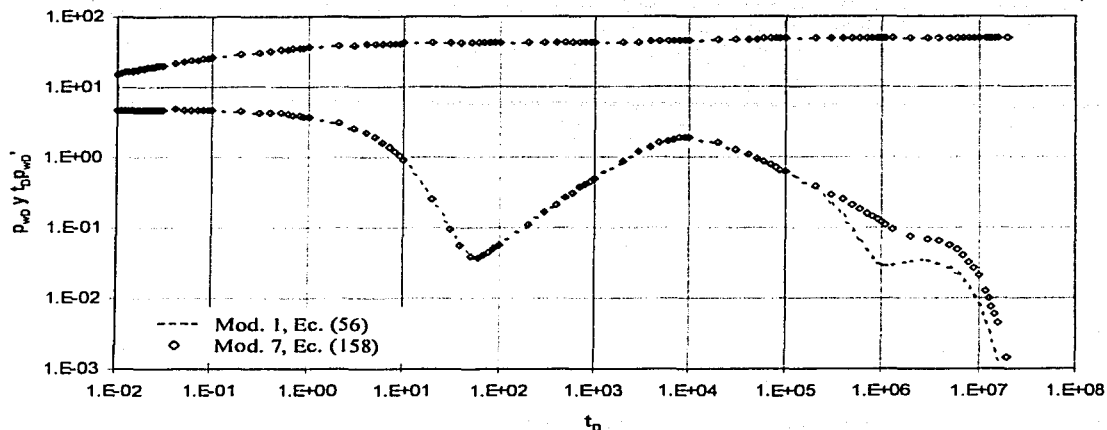


Figura 34: Comparación entre el Modelo 7 y 1

En la Figura 35 mostramos el efecto de la posición del intervalo abierto, este efecto se estudió fijando el intervalo disparado  $h_{pD}$ , y variando  $h_{1D}$ . Los parámetros usados en esta Figura son:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 5 \times 10^{-1}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

En este caso, se observa que la posición del intervalo disparado si influye en la respuesta obtenida; además, no existe la simetría mostrada en la Figura 5 (correspondiente al Modelo 2) debido a que las condiciones de frontera en la cima y en la base no son las mismas.

En la Figura 36 se muestra el efecto de  $h_D$  para los Modelos 1 y 7. Los parámetros utilizados en esta Figura son:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-2}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 5 \times 10^{-1}$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$ . Tal como en la Figura 13, para un mismo espesor del yacimiento y radio del pozo, entre mayor sea la razón  $k_r/k_v$  (lo cual implica que  $h_D$  sea más grande), el tiempo en el cual inicia el efecto de las fronteras es mayor. Además, el tiempo para alcanzar el

estado estacionario es mayor para el caso del Modelo 7 comparado con el del Modelo 1.

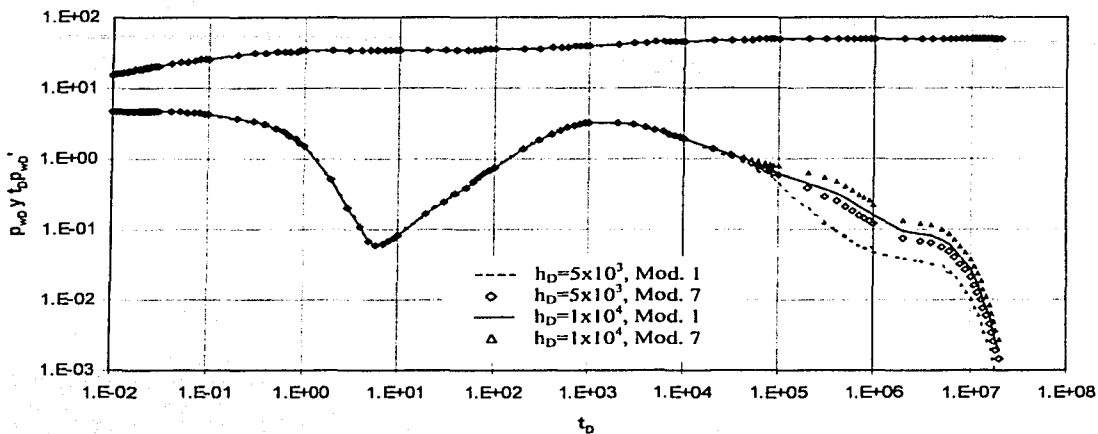


Figura 35: Efecto de  $h_{D}$ , Modelo 7

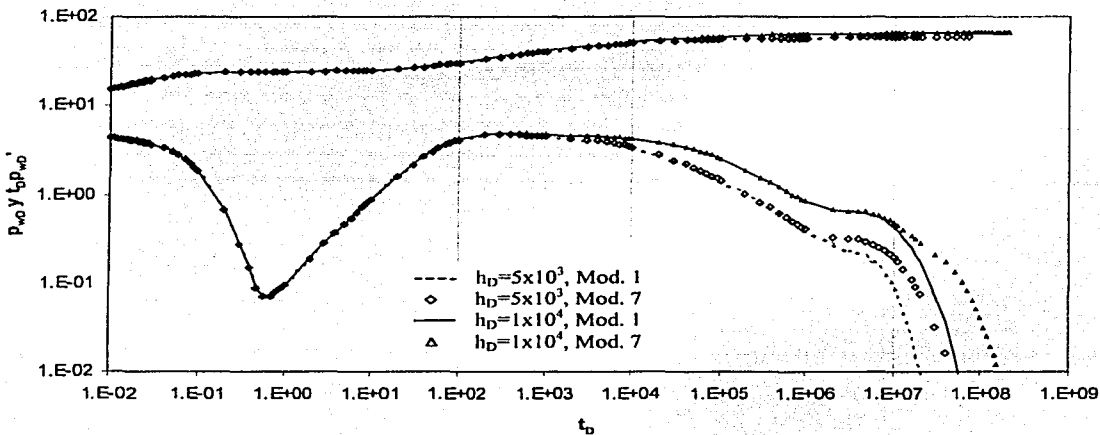


Figura 36: Efecto de  $h_D$ , Modelo 1 y 7

Es importante recordar que con el Modelo 7 también podemos representar el caso en el cual en la cima se especifica un valor de gasto (Ecuación 23) y en la base una cierta presión (Ecuación 16).

Las tendencias de la función derivada mostradas en las Figuras (34)–(36), concuerdan con las tendencias esperadas, debido a que en este caso, el mantenimiento de la presión es menor que la mostrada en las curvas correspondientes al Modelo 1.

Buhidma y Raghavan (1980), presentaron resultados para el caso de fronteras mixtas en la cima y en la base pero lo hicieron para pozos parcialmente penetrantes en yacimientos homogéneos. La metodología que emplearon dichos autores para obtener la respuesta de presión fue mediante la aplicación de Funciones de Green, en este trabajo utilizamos la Transformada Seno Modificada de Fourier (Ecuación 150).

### 5.8 Curvas de declinación

A continuación analizaremos las curvas de declinación para caso particular del Modelo 2 estudiado en páginas anteriores. Para la aproximación a tiempos muy cortos dada por la ecuación (87), en la cual se supone radio del pozo finito, podemos obtener una expresión analítica usando la relación mostrada en el Capítulo anterior:

$$q_D = \frac{1}{u^2 \bar{p}_D} \quad (161)$$

donde  $\bar{p}_D$  es la Transformada de Laplace de la presión adimensional a gasto constante y  $\bar{q}_D$  es la Transformada de Laplace del gasto adimensional a presión constante.

Así, sustituyendo la ecuación (87) en la ecuación (161) e invirtiendo:

$$q_D = h_{pD} \sqrt{\frac{\omega_f}{\pi D}} \quad (162)$$

Lo cual tiene sentido físico ya que al disminuir  $h_{pD}$  también lo hace  $q_D$ , pues se reduce la capacidad de flujo y la presión de fondo se mantiene constante. La ecuación (162) indica que para tiempos pequeños, la respuesta depende solo del sistema de fracturas y no se ve afectada por la presencia de la porosidad primaria ni por la presencia de los vórgulos, esto se debe a que estamos considerando  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ . Si  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  fueran cero, entonces la respuesta a tiempos cortos no dependería de las fracturas, solo de los vórgulos.

En las Figuras 37 y 38 se muestra el efecto de  $\omega_v$ . Los parámetros usados en la Figura 37 son:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$ ; los correspondientes a la Figura 38 son:  $\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-1}$ ,  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-1}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

En la Figura 37 el efecto de  $\omega_v$  es imperceptible porque  $\lambda_{vf}$  y  $\lambda_{mv}$  son muy pequeños, pero si estos son relativamente grandes como en la Figura 38, sí existen cambios en la curva de declinación durante la etapa transitoria. Además, durante el periodo dominado por frontera, la respuesta es la misma y se mantiene en el mismo nivel debido al mantenimiento de la presión.

En las Figuras 39 y 40 se muestra el efecto de  $\lambda_{vf}$ . Los parámetros usados en la Figura 39 son:  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-7}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 1 \times 10^{-1}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$ ; los correspondientes a la Figura 40 son:  $\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-2}$ ,  $\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\omega_f = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_v = 1 \times 10^{-1}$ ,  $h_D = 2 \times 10^3$ ,  $r_{eD} = 2 \times 10^3$ ,  $h_{1D} = 4 \times 10^{-1}$ ,  $h_{pD} = 1 \times 10^{-1}$

En la Figura 39 se muestra que durante la etapa transitoria la declinación es afectada por la facilidad con que se transfieren los fluidos de los vórgulos a las fracturas. En la Figura 40 se observa la misma situación, solo que los efectos transitorios tardan más debido a que  $\lambda_{mv}$  tiene un valor relativamente grande con respecto a valor en la Figura 39.

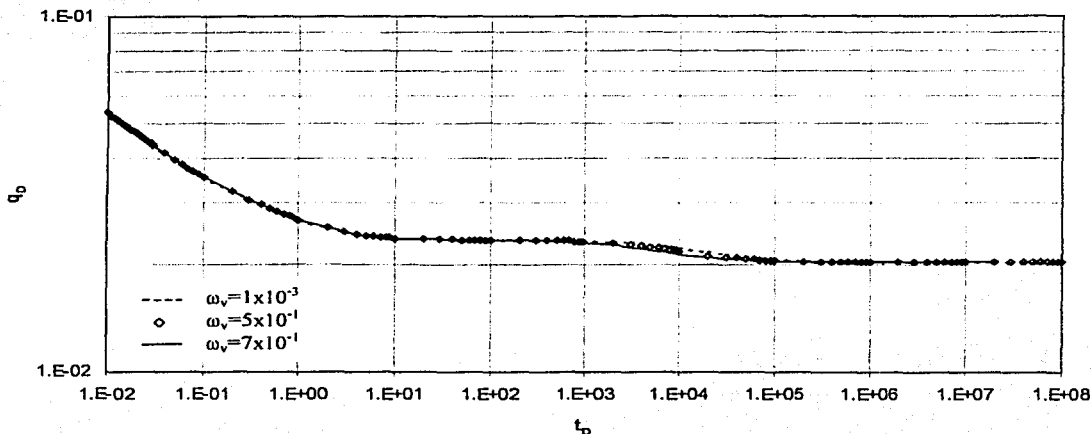


Figura 37: Efecto de  $\omega_v$ , Modelo 2

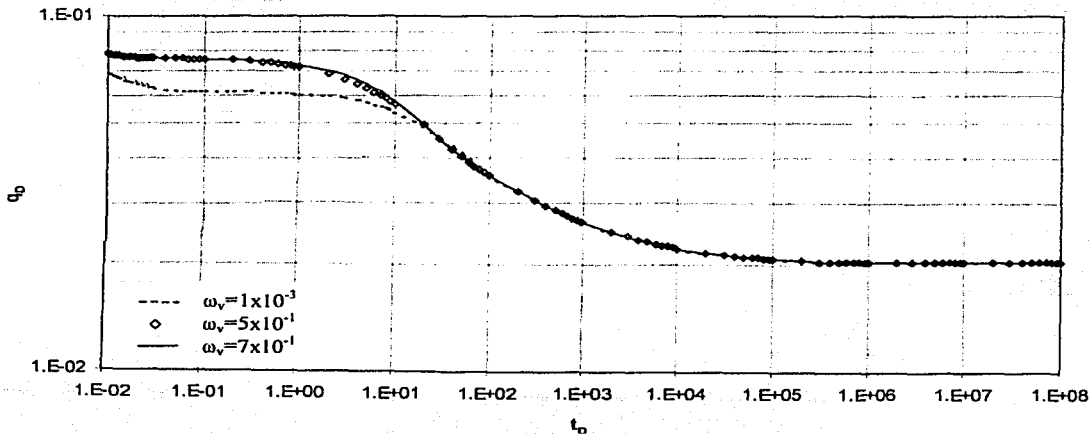


Figura 38: Efecto de  $\omega_v$ , Modelo 2

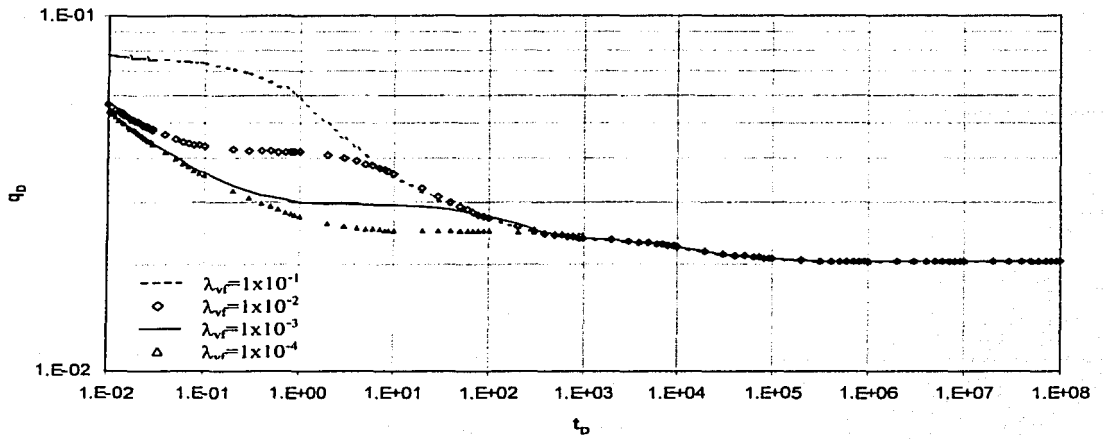


Figura 39: Efecto de  $\lambda_{vf}$ , Modelo 2

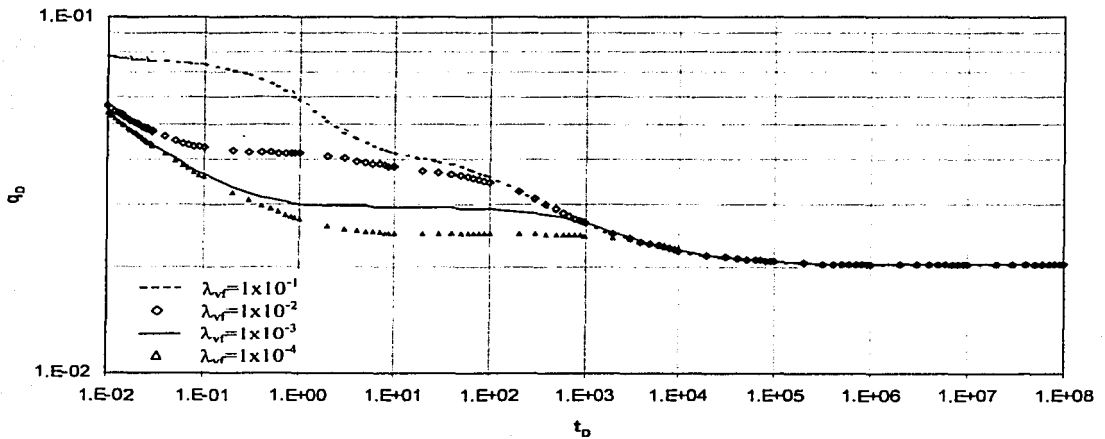


Figura 40: Efecto de  $\lambda_{vf}$ , Modelo 2

En la Figura 41 observamos el efecto de la fracción de penetración  $h_{pD}$  (los parámetros de esta Figura son los mismos de la Figura 4). En esta Figura se observa que el efecto de la relación de penetración es desplazar la curva verticalmente, lo cual, como ya se indicó en páginas anteriores, tiene sentido físico, porque se reduce la capacidad de flujo y la presión de fondo permanece constante, cabe mencionar que el desplazamiento vertical no es constante en la etapa transitoria, aún cuando las curvas parecen paralelas, en el estado estacionario sí es constante, ya que en esta etapa, la respuesta es independiente del tiempo.

En la Figura 42 (cuyos parámetros son los mismos de la Figura 4), se observa que para cierto rango de tiempo, las curvas de declinación (en analogía con la respuesta de presión a gasto constante) colapsan en una sola curva cuando graficamos  $q_D/h_{pD}$  en función de  $t_D$ . Esto quiere decir que durante este periodo, podemos usar las curvas tipo para penetración total.

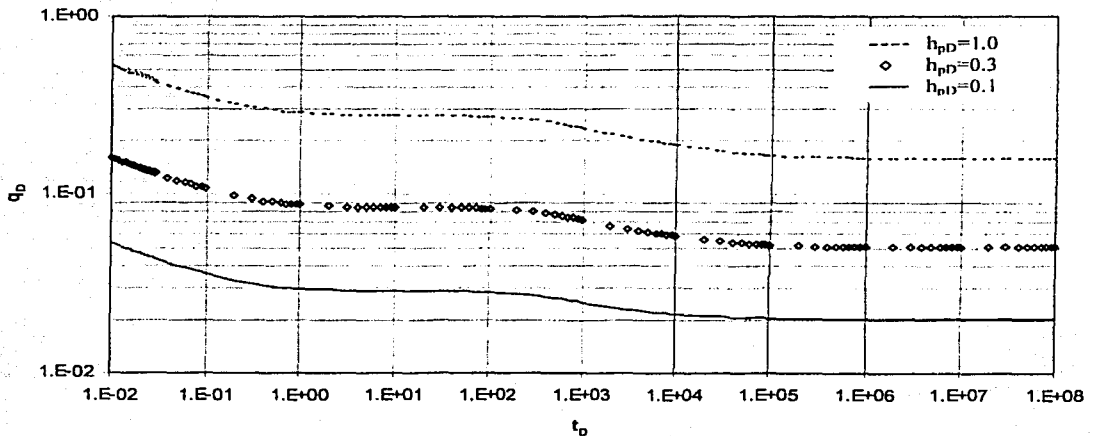


Figura 41: Efecto de  $h_{pD}$ , Modelo 2

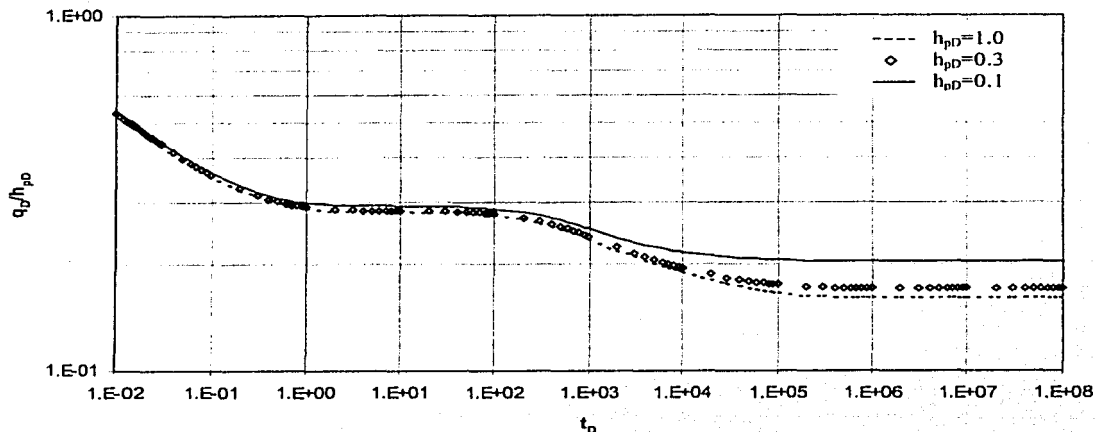


Figura 42:  $q_D/h_{pD}$  vs  $t_D$ , Modelo 2

En la Figura 43 mostramos el efecto de  $h_D$  para el Modelo 3 (con los parámetros de la Figura 4 y  $h_{pD}=0.1$ ); se observa que existe un cambio más pronunciado que el observado en las gráficas anteriores porque hay un periodo dominado por la frontera cerrada, pero finalmente el gasto se estabiliza en un nivel, el cual es menor que los casos anteriores, esta última estabilización se debe a la frontera a presión constante.

Para los casos en que se tienen fronteras (cima, base o frontera externa) a gasto especificado, se pueden generar curvas de declinación con fronteras cuyos gastos son dependientes del tiempo, en la misma forma en que lo hicieron Doublet *et al.* (1994) y Doublet y Blasingame (1995) para pozos totalmente penetrantes en yacimientos homogéneos y de doble porosidad. Este tipo de fronteras pueden adaptarse en forma directa con las expresiones desarrolladas en este trabajo, ya que como se indicó en el Capítulo 3, el gasto en las fronteras (cima, base, o en la frontera externa para el caso de yacimientos finitos) puede ser dependiente del tiempo, de lo cual se desprende

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



que existe una gran variedad de curvas de declinación que pueden ser generadas con los desarrollos presentados en esta tesis.

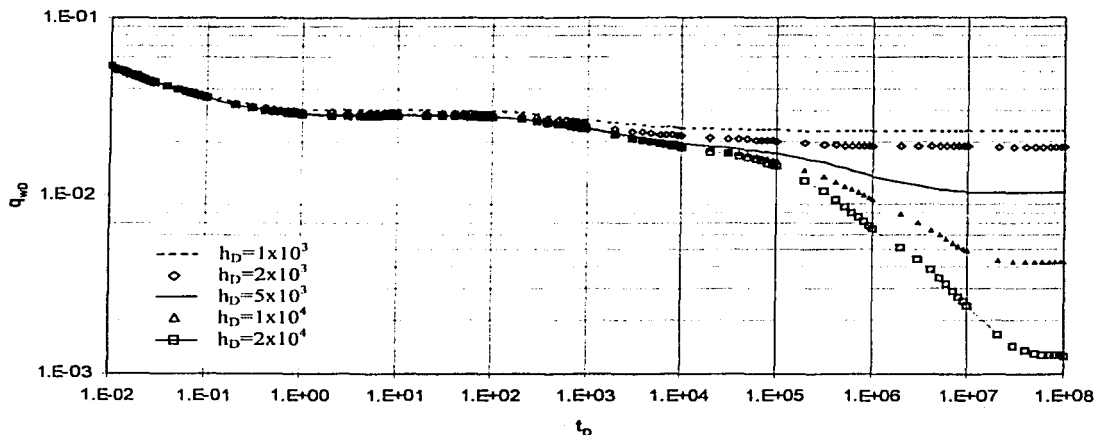


Figura 43: Efecto de  $h_D$ , Modelo 3

En el siguiente Capítulo se presentan las conclusiones del presente trabajo basadas en el análisis de los resultados obtenidos.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSIONES

En base a los resultados obtenidos en el presente trabajo, llegamos a las siguientes conclusiones:

Se formuló un Modelo generalizado para pozos parcialmente penetrantes en yacimientos naturalmente fracturados vugulares, resuelto para diferentes condiciones de frontera. Dicho Modelo contempla como casos particulares las respuestas obtenidas con el de Doble Porosidad clásico, además de las correspondientes al Modelo de Yacimiento Homogéneo.

Con base en lo anterior, se analizaron las características particulares de las respuestas de presión y de declinación de la producción de pozos parcialmente penetrantes en yacimientos fracturados vugulares, para el caso en el que existe flujo primario únicamente a través de la red de fracturas. Además, los resultados obtenidos son análogos al caso en el que existe flujo primario únicamente a través del sistema de vúgulos.

Se presentaron, por primera vez, Modelos matemáticos que aproximan el comportamiento asintótico a tiempos cortos y largos para pozos parcialmente penetrantes en yacimientos fracturados vugulares.

Cuando se tienen frontera(s) a presión constante, la aproximación  $g(u)=1$  (Yacimiento Homogéneo) no siempre reproduce en forma correcta la respuesta de presión (ni la función derivada) previa al estado estacionario, sobre todo en los casos en que la transferencia de fluidos de un medio a otro (matriz-fractura, matriz-vúgulo o vúgulo-fractura) inicie en forma tardía.

Los cambios de las respuestas de presión con respecto al Modelo de Doble Porosidad (Warren y Root, 1963), se presentan principalmente en la etapa

transitoria. Dichos cambios implican, dependiendo de los parámetros, más de un mínimo en la función derivada.

Cuando tenemos penetración parcial existen situaciones en que, dependiendo de la combinación de los parámetros, se observa una recta con pendiente de  $-0.5$  en la función derivada, la cual es característica de flujo esférico. Sin embargo, cuando la transferencia de fluidos de un medio a otro comienza en el periodo en el cual se presenta dicha geometría de flujo, la transferencia enmascara el periodo de línea recta con pendiente de  $-0.5$ .

Cuanto se tiene transferencia de fluidos de un medio a otro a tiempos largos y frontera(s) a presión constante, la función derivada no tiende a cero en forma monótona como en el caso de yacimientos homogéneos.

En general, es difícil observar la primera línea recta semilogarítmica sobre la respuesta de presión, debido a que ésta se desvía del primer flujo radial como consecuencia de la transferencia de fluidos de un medio a otro, éste hecho se acentúa si consideramos que en situaciones prácticas, se tiene la presencia del efecto del almacenamiento de pozo.

Al igual que para yacimientos homogéneos, la segunda línea semilogarítmica tampoco se podrá observar como consecuencia del efecto de la(s) frontera(s) a presión constante.

Cuando la función derivada tiene una forma muy pronunciada (es decir, su ritmo de variación es grande) y el valor que toma en algún mínimo es relativamente pequeño, la respuesta calculada con la con el algoritmo de Stehfest puede ser ambigua. En este caso, se sugiere validar el resultado obtenido utilizando la inversión analítica.

## NOMENCLATURA

- $B_o$  = factor de volumen del aceite, RB/STB
- $c_j$  = compresibilidad inicial (fracturas, matriz o vúgulos) ,  $Lt^2/m$ , ( $psi^{-1}$  )
- Ei= Integral Exponencial
- H= Función Heaviside
- $h$  = espesor de la formación, L, ft
- $h_D$  = espesor de la formación adimensional
- $h_p$  = longitud del intervalo disparado, L,ft
- $h_{pD}$  = longitud adimensional del intervalo disparado
- $h_1$  = posición donde comienza el intervalo disparado, L,ft
- $h_{1D}$  = posición adimensional donde comienza el intervalo disparado
- $I_n$  = función Bessel modificada de primer tipo de orden n
- $J_n$  = función Bessel de primer tipo de orden n
- $k$  = permeabilidad,  $L^2$ , md
- $K_n$  = función Bessel modificada de segundo tipo de orden n
- $p$  = presión, m/Lt<sup>2</sup>, psi
- $p_D$  =presin adimensional
- $p_{wD}$  =presin adimensional en el pozo
- $p_{wf}$  = presión de fondo fluyendo, m/Lt<sup>2</sup>, psi
- $q$  = gasto de producción, L<sup>3</sup>/t, STB/D
- $r$  = distancia radial, L, ft
- $r_D$  =radio adimensional
- $t$  = tiempo, T, horas
- $t_D$  =tiempo adimensional
- $u$  = variable de la Transformada de Laplace
- $z$  = distancia en la dirección vertical, L, ft
- $z_D$  = distancia adimensional en la dirección vertical
- $\gamma$  = constante de Euler, 0.577215...
- $\lambda$  = parámetro de interacción, adimensional
- $\mu$  = viscosidad del aceite, m/Lt, cp
- $\sigma$  = factor de forma de la interacción

$\phi$  = porosidad

$\omega$  = relación de almacenamiento

### **Subíndices**

$D$  = adimensional

$e$  = externo

$f$  = fracturas

$m$  = matriz

$r$  = radial

$t$  = total

$v$  = vórgulos

$w$  = pozo

$z$  = vertical

## REFERENCIAS

Abdassah, D. y Ershaghi, I.: "Triple-Porosity Systems for Representing Naturally Fractured Reservoirs", *SPEFE*, Abril, 1986, 113-27.

Abramowitz, M. y Stegun, I.: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York City, 1965.

Bilhartz, H.L. Jr. y Ramey, H.J. Jr.: "The Combined Effect of Storage, Skin, And Partial Penetration on Well Test Analysis", artículo SPE 6753 presentado en the SPE 52<sup>nd</sup> Annual Fall Technical Conference and Exhibition celebrado en Denver, Colorado, 19-21 Oct., 1977.

Brons, F. y Martin, V.E.:" The Effect of Restricted Fluid Entry on Well Productivity", artículo SPE 1322-G presentado en 34<sup>th</sup> SPE Annual Meeting, 4-7 Oct., 1959, en Dallas, Texas.

Bui, T.D., Mamora, D. D., y Lee, W.J.: "Transient Pressure Analysis for Partially Penetrating Wells in Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 60289 presentado en the SPE Rocky Mountain Regional/Low Permeability Reservoirs Symposium and Exhibition celebrado en Denver, Colorado, 12-15 Marzo, 2000.

Camacho-Velázquez, R., Vásquez-Cruz, M., Castrejón-Aivar, R. y Arana-Ortiz, V.: "Pressure Transient and Decline Curve Behaviors in Naturally Fractured Vuggy Carbonate Reservoirs", artículo SPE 77689 presentado en the SPE Annual Technical Conference and Exhibition celebrado en San Antonio, Texas, E.U.A., 29 Sep.- 02 Oct.,2002.

Doublet, L.E., Pande, P. K., McCollum, T.J. y Blasingame, T.A.: "Decline Curve Analysis Using Type Curves-Analysis of Oil Well Production Data Using Material Balance Time: Application to Field Cases", artículo SPE 28688

presentado en the SPE Petroleum Conference And Exhibition celebrado en Veracruz, México, 10-13 Oct., 1994.

Doublet, L.E., y Blasingame, T.A.: "Decline Curve Analysis Using Type Curves: Water Influx/Waterflood Cases", artículo SPE 30774 presentado en the SPE Annual Technical Conference And Exhibition celebrado en Dallas, Texas, 22-25 Oct., 1995.

Ehlig-Economides, C.A. y Ramey, H. J. Jr.: "Transient Rate Decline Analysis for Wells Produced at Constant Pressure", artículo SPE 8387 presentado en the SPE 54<sup>th</sup> Annual Technical Conference and Exhibition, celebrado en Las Vegas, 23-26 Sep., 1979.

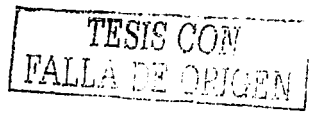
Da Prat G., Cinco-Ley H. y Ramey, H. J. Jr.: "Decline Curve Analysis Using Type Curves for Two-Porosity Systems", artículo SPE 9292 presentado en the SPE 54<sup>th</sup> Technical Conference and Exhibition, celebrado en Dallas, Texas, 23-26 Sep., 1980.

Gringarten, A.C. y Ramey, H. J. Jr.: "An Approximate Infinite Conductivity Solution for a Partially Penetrating Line-Source Well", *SPEJ*, Abril, 1975, 140-8.

Gringarten, A.C., Ramey, H.J. Jr. y Raghavan, R.: "Unsteady-State Pressure Distributions Created by a Well With a Single Infinite-Conductivity Vertical Fracture", *SPEJ*, Agosto, 1974, 413-7.

Houze, O.P., Horne, R. N. y Ramey, H. J. Jr.: "Pressure Transient Response of an Infinite-Conductivity Vertical Fractured Well in a Reservoir with Double-Porosity Behavior", artículo SPE 12778 presentado en the SPE California Regional Meeting celebrado en Long Beach, California, Abril, 1984.

Lepage, W. R.: *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*, Dover Publications, Inc., 1980.



Lighthill, M. J.: *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge at the University Press, 1958.

Lucia, F.J.: "Petrophysical Parameters Estimated From Visual Descriptions of Carbonate Rocks: A Field Classification of Carbonate Pore Space", *JPT*, Marzo, 1983, 629-637.

Muskat, M. "The Flow of Compressible Fluids Through Porous Media and Some Problems in Heat Conduction", *Physics*, Marzo, 1934.

Nisle, R.G., "The Effect of Partial Penetration on Pressure Build-Up in Oil Wells", *Trans., AIME*, Vol. 213, 1958, 85-90.

Raghavan, R.: *Well Test Analysis*, Prentice Hall, 1993.

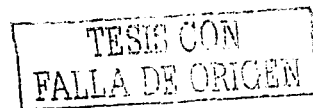
Raghavan, R. y Clark K. K.: "Vertical Permeability From Limited Entry Flow Tests in Thick Formations", *SPEJ*, Feb. 1975, 65-73.

Sneddon, I. N.: *Fourier Transforms*, Dover Publications, Inc., 1995.

Stehfest, H.: "Numerical Inversion of Laplace Transforms", *Communications of the ACM*, Ene. 1970, 13, No. 1, 47-49.

Warren, J.E. y Root, P.J.: "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs", *SPEJ*, Sep., 1963, 245-255.

Yildiz, T. y Bassiouni, Z., "Transient Pressure analysis in Partially-Penetrating Wells", artículo SPE 21551 presentado en the SPE International Technical Meeting celebrado en Calgary, Alberta, Canada, 10-13 Junio, 1990.





# A P É N D I C E A

## INVERSIÓN ANALÍTICA DEL MODELO 2, YACIMIENTO HOMOGÉNEO

En este Apéndice mostraremos los desarrollos básicos realizados para obtener la inversión analítica del caso particular del Modelo 2, el cual considera cima, base y frontera externa a presión constante y gasto constante. Así, en este caso la solución en el espacio del Laplace está dada por la ecuación (59):

$$P_{Df}(r_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_{pD}^2 u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Gamma_{cn}^2 \frac{[K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D) - I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D)]}{I_0(\beta_n r_{eD})} \quad (A1)$$

Los términos involucrados en la ecuación anterior, están definidos en el Capítulo 4. Para un yacimiento homogéneo  $g(u)=1$ , de lo cual:

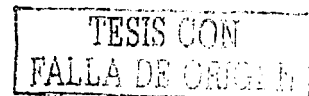
$$\beta_n = \sqrt{u + \alpha_n^2} \quad (A2)$$

La inversión analítica está dada por:

$$P_{Df}(r_D, t_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{c^*-i\infty}^{c^*+i\infty} e^{u t_D} \frac{[K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D) - I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D)]}{u I_0(\beta_n r_{eD})} du \quad (A3)$$

donde  $c^*$  es un número real mayor que la parte real de cualquiera de las singularidades de la función a invertir. El integrando de A3 es una función mono-valuada de  $u$ , con polos en  $u=0$  y en  $J_n(i\beta r_{eD})=0$ . Si  $\alpha_{0m}$  ( $m=1,2,3,\dots$ ) son las raíces positivas de:

$$J_0(\zeta) = 0 \quad (A4)$$



entonces, los valores de  $u$  para los cuales  $J_n(i\beta r_{eD}) = 0$  son:

$$u = - \left[ \left( \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{h_D} \right)^2 \right] = -\gamma_{0m,n}^2 \quad (A5)$$

En  $u = 0$ , el residuo del integrando de (A3) es:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{u\beta} [K_n(\beta_n r_{eD}) I_n(\beta_n r_D) - I_n(\beta_n r_{eD}) K_n(\beta_n r_D)]}{I_n(\beta_n r_{eD})} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{u\beta} [K_n(\alpha_n r_{eD}) I_n(\alpha_n r_D) - I_n(\alpha_n r_{eD}) K_n(\alpha_n r_D)]}{I_n(\alpha_n r_{eD})} \\ &= \frac{[K_n(\alpha_n r_{eD}) I_n(\alpha_n r_D) - I_n(\alpha_n r_{eD}) K_n(\alpha_n r_D)]}{I_n(\alpha_n r_{eD})} \end{aligned} \quad (A6)$$

En  $u = -\gamma_{0m,n}^2$ , el residuo del integrando de (A3) es:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{e^{u\beta} [K_n(\beta_n r_{eD}) I_n(\beta_n r_D) - I_n(\beta_n r_{eD}) K_n(\beta_n r_D)]}{u \frac{d}{du} I_n(\beta_n r_{eD})} \right]_{u=-\gamma_{0m,n}^2} &= \frac{e^{-\gamma_{0m,n}^2 \beta} [K_n(-i\alpha_{0m}) I_n(-i \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D) - I_n(-i\alpha_{0m}) K_n(-i \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D)]}{\left[ u \frac{d}{du} I_n(-i\alpha_{0m}) \right]_{u=-\gamma_{0m,n}^2}} \\ &= \frac{e^{-\gamma_{0m,n}^2 \beta} \left[ K_n(-i\alpha_{0m}) J_n \left( \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D \right) - J_n(\alpha_{0m}) K_n \left( -i \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D \right) \right]}{\left[ u \frac{d}{du} (I_n(-i\alpha_{0m})) \right]_{u=-\gamma_{0m,n}^2}} \end{aligned} \quad (A7)$$

Se puede demostrar que:

$$\frac{d}{du} I_n(-i\alpha_{0m}) = J_n'(\alpha_{0m}) \frac{ir_{eD}}{2\sqrt{u+a_n^2}} = -\frac{r_{eD}^2 J_n'(\alpha_{0m})}{2\alpha_{0m}} \quad (A8)$$

de lo cual:

$$\left[ \frac{e^{u\nu} [K_o(\beta_n r_{eD}) I_o(\beta_n) - I_o(\beta_n r_{eD}) K_o(\beta_n)]}{u \frac{d}{du} I_o(\beta_n r_{eD})} \right]_{u=-\gamma_{0m,n}^2}^{u=-\gamma_{0m,n}^2} = \frac{e^{-\gamma_{0m,n}^2 \nu} \left[ K_n(-i\alpha_{0m}) J_o\left(\frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}}\right) - J_o(\alpha_{0m}) K_o\left(-i\frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}}\right) \right]}{-\gamma_{0m,n}^2 \frac{d}{du} I_o(-i\alpha_{0m})} \Big|_{u=-\gamma_{0m,n}^2}^{u=-\gamma_{0m,n}^2} \quad (\text{A9})$$

$$= \frac{2\alpha_{0m} e^{-\gamma_{0m,n}^2 \nu} \left[ K_o(-i\alpha_{0m}) J_o\left(\frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}}\right) - J_o(\alpha_{0m}) K_o\left(-i\frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}}\right) \right]}{\gamma_{0m,n}^2 r_{eD}^2 J_o'(\alpha_{0m})}$$

También se puede demostrar la siguiente igualdad:

$$K_o(-ix) J_o(y) - J_o(x) K_o(-iy) = \frac{\pi}{2} [J_o(x) Y_o(y) - Y_o(x) J_o(y)] \quad (\text{A10})$$

Sustituyendo (A10) en (A9) tenemos:

$$\left[ \frac{e^{u\nu} [K_o(\beta_n r_{eD}) I_o(\beta_n r_{eD}) - I_o(\beta_n r_{eD}) K_o(\beta_n r_{eD})]}{u \frac{d}{du} I_o(\beta_n r_{eD})} \right]_{u=-\gamma_{0m,n}^2}^{u=-\gamma_{0m,n}^2} = \frac{\pi\alpha_{0m} e^{-\gamma_{0m,n}^2 \nu} \left[ J_o(\alpha_{0m}) Y_o\left(\frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_{eD}\right) - Y_o(\alpha_{0m}) J_o\left(\frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_{eD}\right) \right]}{\gamma_{0m,n}^2 r_{eD}^2 J_o'(\alpha_{0m})} \quad (\text{A11})$$

$$= \frac{\pi\alpha_{0m} e^{-\gamma_{0m,n}^2 \nu} Y_o(\alpha_{0m}) J_o\left(\frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_{eD}\right)}{\gamma_{0m,n}^2 r_{eD}^2 J_o'(\alpha_{0m})} = \frac{\pi\alpha_{0m} e^{-\gamma_{0m,n}^2 \nu} Y_o(\alpha_{0m}) J_o\left(\frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_{eD}\right)}{\gamma_{0m,n}^2 r_{eD}^2 J_1(\alpha_{0m})} = \frac{2}{r_{eD}^2} \frac{e^{-\gamma_{0m,n}^2 \nu} J_o\left(\frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_{eD}\right)}{\gamma_{0m,n}^2 J_1^2(\alpha_{0m})}$$

Así, aplicando el Teorema del Residuo tenemos:

$$P_{wpD}(r_D, t_D) = -\frac{2}{\pi^2 h_{pl}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{h_{cn}^2} \left\{ A_{0m}(r_D) + \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{m=1}^{\infty} H_{0m}(r_D) \frac{e^{-\gamma_{0m,n}^2 \nu}}{\gamma_{0m,n}^2} \right\} \quad (\text{A12})$$

donde:

$$A_{0m}(r_D) = \frac{K_0(a_n r_{el}) I_0(a_n r_D) - I_0(a_n r_{el}) K_0(a_n r_D)}{I_0(a_n r_{el})} \quad (A13)$$

$$H_{0m}(r_D) = \frac{J_0(\alpha_{0m} r_D / r_{el})}{J_1^2(\alpha_{0m})} \quad (A14)$$

## A P É N D I C E B

### INVERSIÓN ANALÍTICA DEL MODELO 2, YACIMIENTO FRACTURADO VUGULAR

En este Apéndice se presentan los desarrollos básicos realizados para obtener la inversión analítica del caso particular del Modelo 2, el cual considera cima, base y frontera externa a presión constante y gasto constante. Así, en este caso la solución en el espacio del Laplace está dada por la ecuación (59):

$$p_{1D}^-(r_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Gamma_{cn}^2 \frac{[K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D) - I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D)]}{I_0(\beta_n r_{eD})} \quad (B1)$$

Para un sistema fracturado vugular:

$$\beta_n = \sqrt{ug(u) + a_n^2} \quad (B2)$$

donde:

$$g(u) = \frac{au^2 + bu + c}{du^2 + eu + c} \quad (B3)$$

$$a = \omega_f d \quad (B4)$$

$$b = \omega_v (1 - \omega_f - \omega_v) (\lambda_{vf} + \lambda_{mf}) + \omega_f e \quad (B5)$$

$$c = \lambda_{mv} (\lambda_{vf} + \lambda_{mf}) + \lambda_{mf} \lambda_{vf} \quad (B6)$$

$$d = \omega_v (1 - \omega_f - \omega_v) \quad (B7)$$

$$e = (1 - \omega_f - \omega_v) (\lambda_{mv} + \lambda_{vf}) + \omega_v (\lambda_{mv} + \lambda_{mf}) \quad (B8)$$

$$a_n = \frac{n\pi}{h_D} \quad (B9)$$

La inversión analítica está dada por:

$$P_{1Df}(r_D, t_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_{pD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{cn}^2}{n^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{c^*-j\infty}^{c^*+j\infty} e^{u t_D} \frac{[K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D) - I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D)]}{u I_0(\beta_n r_{eD})} du \quad (B10)$$

El integrando de (B10) es una función mono-valuada de  $u$ , con polos en  $u=0$  y en  $\zeta_{m,nj}$  ( $j=1,2,3$ ), donde  $\zeta_{m,nj}$  son las raíces del polinomio cúbico:

$$A_0 \zeta^3 + B_0 \zeta^2 + C_0 \zeta + D_0 = 0 \quad (B11)$$

$$A_0 = a \quad (B12)$$

$$B_0 = b + d \gamma_{0m,n}^2 \quad (B13)$$

$$C_0 = c + e \gamma_{0m,n}^2 \quad (B14)$$

$$D_0 = c \gamma_{0m,n}^2 \quad (B15)$$

$$\gamma_{0m,n}^2 = \left( \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} \right)^2 + \alpha_n^2 \quad (B16)$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{h_D} \quad (B17)$$

$\alpha_{0m}$  ( $m=1,2,3\dots$ ) son las raíces positivas de:

$$J_0(\zeta) = 0 \quad (B18)$$

En  $u=0$ , el residuo del integrando de (B10) es:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{u t_D} [K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D) - I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D)]}{I_0(\beta_n r_{eD})} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{u t_D} [K_0(a_n r_{eD}) I_0(a_n r_D) - I_0(a_n r_{eD}) K_0(a_n r_D)]}{I_0(a_n r_{eD})} \\ &= \frac{[K_0(a_n r_{eD}) I_0(a_n r_D) - I_0(a_n r_{eD}) K_0(a_n r_D)]}{I_0(a_n r_{eD})} \end{aligned} \quad (B19)$$

En  $\zeta_{m,nj}$  ( $j=1,2,3$ ), el residuo del integrando de (B10) es:

$$\left[ \frac{e^{u\eta} [K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D) - I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D)]}{u \frac{d}{du} I_0(\beta_n r_{eD})} \right]_{u=\zeta_{m,n}} = \frac{e^{\zeta_{m,n} \eta} [K_0(-i\alpha_{0m}) I_0\left(-i \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D\right) - I_0(-i\alpha_{0m}) K_0\left(-i \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D\right)]}{\left[ u \frac{d}{du} I_0(-i\alpha_{0m}) \right]_{u=\zeta_{m,n}}} \quad (B20)$$

$$= \frac{e^{\zeta_{m,n} \eta} [K_0(-i\alpha_{0m}) J_0\left(\frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D\right) - J_0(\alpha_{0m}) K_0\left(-i \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D\right)]}{\left[ u \frac{d}{du} (I_0(-i\alpha_{0m})) \right]_{u=\zeta_{m,n}, i}}$$

En este caso se puede demostrar que:

$$\frac{d}{du} I_0(-i\alpha_{0m}) = J_0'(\alpha_{0m}) \frac{ir_{eD}}{2\sqrt{ug(u) + a_n^2}} f(u) = \frac{r_{eD}^2}{2\alpha_{0m}} J_1(\alpha_{0m}) f(u) \quad (B21)$$

donde:

$$f(u) = \frac{d}{du} (ug(u)) = u \left\{ \frac{[du^2 + eu + c][2au + b] - [au^2 + bu + c][2du + e]}{[du^2 + eu + c]^2} \right\} + \frac{au^2 + bu + c}{du^2 + eu + c}$$

$$= u \left\{ \frac{2au + b}{du^2 + eu + c} - \frac{au^2 + bu + c}{du^2 + eu + c} \cdot \frac{2du + e}{du^2 + eu + c} \right\} + g(u) \quad (B22)$$

$$= u \left\{ \frac{2au + b - (2du + e)g(u)}{du^2 + eu + c} \right\} + g(u)$$

Sustituyendo (B21) en (B20):

$$\left[ \frac{e^{u\eta} [K_0(\beta_n r_{eD}) I_0(\beta_n r_D) - I_0(\beta_n r_{eD}) K_0(\beta_n r_D)]}{u \frac{d}{du} I_0(\beta_n r_{eD})} \right]_{u=\zeta_{m,n}} = \frac{2\alpha_{0m} e^{\zeta_{m,n} \eta} [K_0(-i\alpha_{0m}) J_0\left(\frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D\right) - J_0(\alpha_{0m}) K_0\left(-i \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D\right)]}{\zeta_{m,n} f_{eD}^2 J_1(\alpha_{0m}) f(\zeta_{m,n})} \quad (B23)$$

Usando la relación (A10) tenemos:

$$\left[ \frac{e^{u_D} [K_u(\beta_n r_{eD}) I_u(\beta_n r_D) - I_u(\beta_n r_{eD}) K_u(\beta_n r_D)]}{u \frac{d}{du} I_u(\beta_n r_{eD})} \right]_{\zeta_{m,j}} = \frac{\pi \alpha_{0m} e^{\zeta_{m,j} r_D} \left[ J_u(\alpha_{0m}) Y_u \left( \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D \right) - Y_u(\alpha_{0m}) J_u \left( \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D \right) \right]}{\zeta_{m,j} r_{eD}^2 J_1(\alpha_{0m}) f(\zeta_{m,j})} \quad (\text{B24})$$

$$= - \frac{\pi \alpha_{0m} e^{\zeta_{m,j} r_D} Y_u(\alpha_{0m}) J_u \left( \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D \right)}{\zeta_{m,j} r_{eD}^2 J_1(\alpha_{0m}) f(\zeta_{m,j})} = - \frac{2}{r_{eD}^2} \frac{e^{\zeta_{m,j} r_D} J_u \left( \frac{\alpha_{0m}}{r_{eD}} r_D \right)}{\zeta_{m,j} J_1^2(\alpha_{0m}) f(\zeta_{m,j})} \quad (j=1, 2, 3)$$

Aplicando nuevamente el Teorema del Residuo tenemos:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{-2}{\pi^2 h_D^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{en}^2}{r_D^2} \left\{ A_{0n}(r_D) - \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{m=1}^{\infty} H_{0m}(r_D) \left[ \frac{e^{\zeta_{m,1} r_D}}{\xi_{m,1} f(\xi_{m,1})} + \frac{e^{\zeta_{m,2} r_D}}{\xi_{m,2} f(\xi_{m,2})} + \frac{e^{\zeta_{m,3} r_D}}{\xi_{m,3} f(\xi_{m,3})} \right] \right\} \quad (\text{B25})$$

donde:

$A_{0n}(r_D)$  y  $H_{0m}(r_D)$  están definidos por las ecuaciones (A13) y (A14).



# A P É N D I C E C

## M O D E L O 4 , D E S A R R O L L O S M A T E M Á T I C O S

En este Apéndice se muestra el procedimiento para obtener la solución del Modelo 4 en el espacio de Laplace, el cual considera cima y base cerradas y yacimiento infinito.

Las condiciones de frontera en el espacio del Laplace para el Modelo 4 están dadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial p_{Df}}{\partial z_D}(r_D, 0) = q_{1D} \quad (C1)$$

$$\frac{\partial p_{Df}}{\partial z_D}(r_D, 1) = q_{2D} \quad (C2)$$

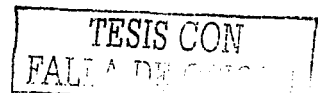
$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Df}(r_D, z_D) = 0 \quad (C3)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left( r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) = E(z_D) q_D \quad (C4)$$

En el Capítulo 4 se mostró que si consideramos flujo primario únicamente a través del sistema de fracturas, es decir,  $\kappa_r = \kappa_z = 1$  en las ecuaciones (1) – (3) y si aplicamos la Transformada de Laplace a estas ecuaciones tenemos:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial \bar{p}_{Df}}{\partial r_D} \right) + \frac{1}{h_D^2} \frac{\partial^2 \bar{p}_{Df}}{\partial z_D^2} - u g(u) \bar{p}_{Df} = 0 \quad (C5)$$

Donde los términos que aparecen en la ecuación anterior están definidos en el Capítulo 4. En este caso, dado que en la cima y en la base del yacimiento especificamos el gasto, esto es, la derivada de la presión, utilizaremos la Transformada Coseno de Fourier, la cual está definida de la siguiente manera (Sneddon, 1951):



$$T_c(f) = \tilde{f}_c = \int_0^a f(z_D) \cos\left(\frac{n\pi z_D}{a}\right) dz_D \quad (C6)$$

$$\text{Si } a = 1, \tilde{f}_c = \int_0^1 \tilde{f}(z_D) \cos(n\pi z_D) dz_D \quad (C7)$$

Mediante integración por partes se puede demostrar la siguiente expresión:

$$\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = (-1)^n f'(a) - f'(0) - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} f_c(n) \quad (C8)$$

Aplicando la Transformada Coseno de Fourier a (C5) y utilizando (C8) tenemos:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}(r_D)}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \bar{p}_{Df}(r_D)}{dr_D} + \frac{1}{h_D^2} \left[ (-1)^n \frac{\partial \bar{p}_{Df}}{\partial z_D}(r_D, 1) - \frac{\partial \bar{p}_{Df}}{\partial z_D}(r_D, 0) \right] - \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2} \bar{p}_{Df}(r_D) - u g(u) \bar{p}_{Df}(r_D) = 0 \quad (C9)$$

Sustituyendo (C1) y (C2) en (C9):

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \bar{p}_{Df}(r_D)}{dr_D} - \left[ u g(u) + \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2} \right] \bar{p}_{Df} = -\frac{1}{h_D^2} \left[ (-1)^n q_{2zD} - q_{1zD} \right] \quad (C10)$$

definamos:

$$l_{qm} = -\frac{1}{h_D^2} \left[ (-1)^n q_{2zD} - q_{1zD} \right] \quad (C11)$$

$$\beta_n^2 = u g(u) + \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2} \quad (C12)$$

Sustituyendo (C12) y (C11) en (C10):

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \bar{p}_{Df}}{dr_D} - \beta_n^2 \bar{p}_{Df} = l_{qm} \quad (C13)$$

Es fácil demostrar que la solución general de (C13) es:

$$\bar{p}_{Df}(r_D) = A I_0(\beta_n r_D) + B K_0(\beta_n r_D) - \frac{l_{qn}}{\beta_n^2} \quad (C14)$$

Aplicando la Transformada Coseno de Fourier a (C3) y (C4):

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \bar{p}_{Df} = 0 \quad (C15)$$

$$\int_0^1 \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left( r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) \cos(n\pi z_D) dz_D = q_D \int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \cos(n\pi z_D) dz_D = \frac{q_D}{n\pi} [\text{sen}(n\pi z_D)]_{h_{1D}}^{h_{2D}} = \frac{q_D}{n\pi} \Gamma_{sn} \quad (C16)$$

donde

$$\Gamma_{sn} = \text{sen}(n\pi h_{2D}) - \text{sen}(n\pi h_{1D}) \quad (C17)$$

Aplicando las condiciones de frontera (C15) y (C16) en (C14):

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \bar{p}_{Df} = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left\{ A I_0(\beta_n r_D) + B K_0(\beta_n r_D) - \frac{l_{qn}}{\beta_n^2} \right\} \Rightarrow A = 0 \quad (C18)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \left( r_D \frac{d p_{Df}}{d r_D} \right) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left\{ A \beta_n r_D I_1(\beta_n r_D) - B \beta_n r_D K_1(\beta_n r_D) \right\} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left\{ A \beta_n r_D \frac{\beta_n r_D}{2} - B \beta_n r_D \frac{1}{\beta_n r_D} \right\} = -B$$

$$\therefore B = -\frac{q_D}{n\pi} \Gamma_{sn} \quad (C19)$$

De lo cual:

$$\bar{p}_{Df}(r_D) = -\frac{q_D}{n\pi} \Gamma_{sn} K_0(\beta_n r_D) - \frac{l_{qn}}{\beta_n^2} \quad (C20)$$

La Transformada Coseno Inversa de Fourier (Sneddon, 1951) está dada por:

$$p_{Df}(r_D, z_D) = \bar{p}_{Df0}(r_D) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_{Dfn} \cos(n\pi z_D) \quad (C21)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{Df0} &= \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ -\frac{q_D}{\pi} \frac{[\text{sen}(n\pi h_{2D}) - \text{sen}(n\pi h_{1D})] K_0(\beta_0 r_D)}{n} - \frac{l_{q0}}{\beta_0^2} \right\} = \\ &= -\frac{q_D}{\pi} [\pi h_{2D} - \pi h_{1D}] K_0(\beta_0 r_D) - \frac{l_{q0}}{\beta_0^2} = -q_D h_p K_0(\beta_0 r_D) - \frac{l_{q0}}{\beta_0^2} \end{aligned} \quad (C22)$$

Para obtener (C22) se utilizó el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{a} = a \quad (C23)$$

Tomando en cuenta (C20), (C21) y (C22):

$$p_{Df}(r_D, z_D) = -\left( h_p \bar{q}_D K_0(\beta_0 r_D) + \frac{l_{q0}}{\beta_0^2} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \Gamma_n \bar{q}_D K_0(\beta_n r_D) + \frac{n \pi l_{qn}}{\beta_n^2} \right\} \cos(n\pi z_D) \quad (C24)$$

donde:

$$\beta_n = \sqrt{ug(u) + \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2}} \Rightarrow \beta_0 = \sqrt{ug(u)} \quad (C25)$$

$$l_{qn} = -\frac{1}{h_D^2} [(-1)^n q_{2zD} - q_{1zD}] \Rightarrow l_{q0} = -\frac{1}{h_D^2} [q_{2zD} - q_{1zD}] \quad (C26)$$

Definamos la presión promedio de la siguiente forma:

$$p_{lf}(r_D) = \frac{1}{h_{pD}} \int_{h_0}^{h_2} p_{lf}(r_D, z_D) dz_D \quad (C27)$$

De lo cual:

$$p_{lf}(r_D) = - \left( h_{pD} q_D K_0(\beta_0 r_D) + \frac{l_{q0}}{\beta_0^2} \right) - \frac{2}{h_{pD} \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[ \Gamma_{sn} q_D K_0(\beta_n r_D) + \frac{n \pi l_{qn}}{\beta_n^2} \right] \Gamma_{sn} \quad (C28)$$

Si consideramos que la cima y la base están cerradas entonces  $q_{1z} = q_{2z} = 0 \Rightarrow l_{qn} = 0$ , de lo cual:

$$p_{lf}(r_D) = -h_{pD} q_D K_0(\beta_0 r_D) - \frac{2}{h_{pD} \pi^2} q_D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{sn}^2}{n^2} K_0(\beta_n r_D) \quad (C29)$$

La condición de gasto constante en la frontera interna para el caso de penetración parcial se expresa como:

$$q_D = -\frac{1}{h_{pD} u} \Rightarrow h_{pD} q_D = -\frac{1}{u} \quad (C30)$$

Sustituyendo (C30) en (C29):

$$p_{lf}(r_D) = \frac{K_0(\beta_0 r_D)}{u} + \frac{2}{h_p^2 \pi^2 u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{sn}^2}{n^2} K_0(\beta_n r_D) \quad (C31)$$

En el radio del pozo:

$$p_{wfd} = \frac{K_0(\beta_0)}{u} + \frac{2}{\pi^2 h_p^2 u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{sn}^2}{n^2} K_0(\beta_n) \quad (C32)$$

La ecuación (C31) también puede obtenerse en forma directa (sin el requerimiento de algún cálculo numérico) de la solución para yacimientos

homogéneos dada por Yildiz (1990), utilizando la metodología expuesta por (Houze *et al.*, 1984). Dicha metodología consiste en multiplicar la respuesta de presión para yacimiento homogéneo (en el espacio de Laplace) por el parámetro de Laplace (en este caso  $u$ ), después sustituir  $u$  por  $ug(u)$ , y finalmente dividir entre  $u$ . La expresión obtenida al aplicar estos pasos es la respuesta de presión para un yacimiento naturalmente fracturado. Sin embargo, para aplicar este proceso debemos contar con la solución de interés para yacimientos homogéneos.