20321
2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

EL RIESGO DE CREDITO EN LA VALUACION DE BONOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ALFONSO ALVAREZ RAMIREZ

ASESOR: ACT. ARTURO ERDELY RUIZ

OCTUBRE 2003

A

El Riesgo de Crédito en la Valuación de Bonos

Alfonso Álvarez Ramírez

7 de octubre de 2003

B

Agradezco:

A Dios por brindarme salud, bienestar y sobre todo una maravillosa madre que siempre me ha sabido dar su apoyo y cariño.

A mi madre y a mi hermana, Gloria y Araceli, por su cariño, por servir de orientación y guía a lo largo de mi vida y por ser parte fundamental en mi desarrollo personal, académico y laboral.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por brindarme la oportunidad de concluir mis estudios y por haberme permitido ser parte de ella.

Al Banco de México y a la gente que labora en él por todo el apoyo y consejos que he recibido y por darme la oportunidad de desarrollarme laboralmente en esta gran institución.

Índice general

E

Introducción

En varios países, tanto desarrollados como en vías de desarrollo, los problemas relacionados con el crédito han detonado o agravado problemas económicos más serios. La misma crisis de México en 1995 tuvo un componente muy importante que se explica por el deterioro de la cartera de crédito de la banca comercial. A partir de estas crisis, la administración de riesgo de crédito ha tomado una mayor importancia dando origen a una infinidad de modelos y técnicas. No obstante el administrar el riesgo de crédito no implica generar un conjunto de métodos y técnicas complejas sino cambiar la manera de pensar de todos aquellos negocios que estan inmersos en este tipo de riesgo.

Actualmente la importancia de la "administración de riesgo de crédito" recae en estimar el requerimiento de capital en caso de incumplimiento para así evitar pérdidas excesivas que puedan llevar a un quebranto de la institución o del mismo sistema finaciero. También se utiliza para conocer las causas que originan el incumplimiento, la depreciación que sufren los activos por la pérdida en la calidad del emisor[1], entre otras.

Desde el énfasis sobre el requerimiento de capital del comité de Basilea en 1988 [4], los organismos reguladores y el mundo académico le han dado una mayor importancia a la administración del riesgo de crédito obteniendo metodologías más robustas y un marco jurídico más adecuado. De esta forma, han surgido varios modelos con diversas características como son: $Z-Score$, un modelo propuesto por Altman [2], el cual relaciona la probabilidad de incumplimiento con algunas razones financieras por medio de un modelo de discriminante; $CreditPortfolioView$, propuesto por McKinsey [13], asocia la probabilidad de incumplimiento de una cartera de créditos a los factores macroeconómicos utilizando un modelo econométrico; $CreditRisk^+$ y $CreditMetrics^{TM}$, propuestos por Credit Suisse [12] y J.P. Morgan [19] respectivamente, ambos encuentran la distribución de pérdida de una cartera de créditos y por medio de dicha distribución encuentran el requerimiento

[1] La "calidad del emisor" se refiere a la posibilidad de impago, es decir, un emisor disminuye su calidad quiere decir que incrementa la posibilida de impago. Véase el modelo de $CreditMetrics^{TM}$ [19] el cual además de medir las pérdidas posibles en un portafolio de bonos además mide las pérdidas generadas por la depreciación en la calidad de los emisores.

de capital,[2]. La diferencia recae en que el primero únicamente encuentra la pérdida asociada a una cartera de créditos y el segundo además de encontrar la pérdida asociada a una cartera de crédito encuentra la depreciación que sufren los créditos debido a la disminución de la calidad crediticia del emisor.

Este trabajo inicia dando una breve introducción a los conceptos matemáticos que serán utilizados a lo largo del mismo, como son: definición de probabilidad, definición de procesos estocásticos y algunos procesos utilizados en la administración de riesgo de crédito. El segundo capítulo da un panorama general de lo que es el riesgo crédito y su administración, es decir, definición y tipo de riesgos, definición de riesgo crédito, regulación y una breve revisión de los modelos de estimación de la probabilidad de incumplimiento y de los modelos de medición de riesgo de crédito más utilizados. En el cuarto capítulo inicia definiendo los mercados financieros, bonos, los mercados donde operan los bonos y se presentan los bonos gubernamentales más comunes en el mercado. En el quinto capítulo se muestran los diferentes métodos para la valuación de bonos libres de riesgos y se muestra una propuesta para la valuación de bonos bajo riesgo de crédito dando una metodología para la estimación de la probabilidad de incumplimiento. Y para el último capítulo se muestra una aplicación tanto de los métodos de valuación libre de riesgos y con el método anteriormente presentado, haciendo conclusiones sobre el mismo y sobre la administración del riesgo de crédito en general.

[2] Para conocer más a cerca de estos modelos vénse Rodolfo [20] o Saunders [30]

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

La probabilidad básicamente se inicia con el juego de dados, el cual se ha practicado desde el imperio romano en todos los estratos sociales[1]. Uno de estos juegos de dados se llamaba "hazard", que proviene de la palabra árabe "al azar" que significa "dado". Fue introducido en Europa con la Tercer Cruzada, pero no fue hasta el siglo XV que se le dió una mayor importancia al publicar el primer libro sobre juegos de azar *"Liber de Ludlo Aleae* escrito por Girolamo Cardano (1501-1576), el cual se publicó casi cien años después de la muerte del autor (1663), posteriormente Galileo publicó su obra "Sopra le Scoperte dei Dadi" en 1718. En ambos trabajos se define la probabilidad con el enfoque clásico que actualemte se conoce[2] y específicamente la contribucion fue la siguiente: establecen la noción de probabilidad de un evento A como la proporción de resultados equiprobables favorables a A respecto al número total de resultados posibles[3].

Sin embargo las mayores contribuciones se dieron en el siglo XVIII, por ejemplo, Abraham de Moivre define la independencia estocástica en su libro *"Doctrine of Chance"*. En 1764, Tomas Bayes publica su libro titulado *"Essay towards solving a problem in the doctrine of chances"* donde define a la probabilidad desde un punto subjetivo.

[1]Véase Amaya [33].

[2]Algunos le atribuyen el enfoque a Laplace debido a su obra "Théoric Analitique des Probabilités".

[3]Difieren en que Cardano discute el juego justo y la regularidad estadística y Galileo utiliza argumentos probabilísticos en el estudio de errores en observaciones astronómicas.

Una de las dificultades de la teoría de la probabilidad ha sido el definir la probabilidad de una manera axiomático. En 1933, un matemático ruso llamado A. Kolmogorov define a la probabilidad desde un punto de vista axiomática dentro de una disciplina llamada *Teoría de la Medida*, dando origen a la "Teoría moderna de la probabilidad".

1.1. Teoría de la Probabilidad

La probabilidad es una medida asociada a fenómenos aleatorios. Un fenómeno aleatorio es aquél donde no es posible conocer, con certeza, el resultado del experimento, por ejemplo: el lanzamiento de una moneda, el lanzamiento de un dado, etc.

Dentro de un experimento puede haber muchos resultados posibles entonces: a la colección de todos los resultados posibles dentro de un experimento se denomina **"Espacio Muestral"**, para denotar al espacio muestral se utilizará la letra Ω. Un **evento** es un subconjunto medible[4] del espacio muestral. Una clase de todos los eventos asociados a un experimento dado se define como **"Espacio de Eventos"**, a este espacio de eventos se denotará como $\mathfrak{F}$.

El espacio de eventos debe de cumplir con las siguientes características:

i) $\Omega \in \mathfrak{F}$

ii) Si $A \in \mathfrak{F}$ entonces $A^c \in \mathfrak{F}$

iii) Si A_i y $A_2 \in \mathfrak{F}$ entonces $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{F}$[5]

Esto quiere decir que dentro del espacio de eventos debe estar contenido el evento seguro, además que se puede definir un evento entonces también se puede definir el complemento de éste, y por último que si dos eventos pertenecen a un espacio de eventos entonces la unión de esos eventos también

[4] Véase la definición 1.9.

[5] Si $\mathfrak{F}$ es un sigma álgebra, además de las propiedades *i)* y *ii)*, debe de cumplir con que si $A_1, A_2, \ldots$ pertenecen a $\mathfrak{F}$ entonces $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$

definen un evento. A todo espacio que cumple con la propiedad *i)* a *iii)* se le llama *álgebra.*

Definición 1.1 *Una medida de probabilidad es una función $P[\cdot]$ que toma como dominio al espacio de eventos $\mathfrak{F}$ y como contradominio el intervalo $[0, 1]$ que satisface los siguientes axiomas*[6]*:*

i) $P[A] \geq 0$ *para* $A \in \mathfrak{F}$

ii) $P[\Omega] = 1$

iii) Si $A_1, A_2, \ldots$ es una secuencia de eventos mutuamente excluyentes en $\mathfrak{F}$, entonces $P[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$

Definición 1.2 *Un espacio de probabilidad es un espacio formado por un espacio muestral Ω, un sigma álgebra $\mathfrak{F}$, y por una medida de probabilidad $P[\cdot]$, denotado por $(\Omega, \mathfrak{F}, P([\cdot])$.*

Definición 1.3 *Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P([\cdot])$, una "variable aleatoria", denotada por X ó $X(\cdot)$, es una función con dominio en Ω y contradominio en los reales $I\!R$, tal que el conjunto A_r definido como $A_r = \{w : X(w) \leq r\}$, pertenece a $\mathfrak{F}$ para cada número real r*[7].

El concepto de aleatorio quiere decir que la variable está asociada a un experimento incierto, es decir, el resultado de la variable no es conocido. El hecho de que se requiera que la colección de $w's$ para los cuales $X(w) \leq r$ para cada valor real es sólo una restricción para definir las variables aleatorias describiendo eventos.

Definición 1.4 *Una función $F(\cdot)$ con dominio en los reales, $I\!R$, y contradominio en el intervalo $[0, 1]$ que satisface las siguientes propiedades:*

[6] Muchos autores definen la propiedad *iii)* de la siguiente forma: Si A_1, $A_2 \in \mathfrak{F}$ y $A_1 \cap A_2 = \phi$ entonces $P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2]$, sólo que en lugar de definir una medida de probabilidad sobre un sigma álgebra se definé sobre un álgebra.

[7] También se define una variable aleatoria como una función definida en un espacio medible ligado a una medida de probabilidad $P[\cdot]$. Véase la definición 1.9

- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.
- $F_X(a) \leq F_X(b)$ *para* $a < b$.
- $\lim_{h^+\to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$.

es llamada como "Función de Distribución".

Pueden existir dos diferentes tipos de distribuciones, dependiendo del dominio en las que esten definidas: continuas y discretas[8]. De esta división se desprenden las siguientes definiciones.

Definición 1.5 *Se dice que una variable aleatoria X es "discreta" si el rango es numerable. Si la variable aleatoria X es discreta entonces la función de distribución acumulada asociada a X se define como "Función de Distribución Discreta".*

Definición 1.6 *Si X es una variable aleatoria que toma valores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ entonces la función definida como:*

$$p_X(x) = \begin{cases} P[X = x_j] & \text{Si } x = x_j, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1.1}$$

es llamada "Función de Densidad Discreta" o "Función Masa de Probabilidad".

Conociendo la función de densidad discreta de la variable aleatoria X es posible conocer la función de distribución por medio de la siguiente relación $F_X(x) = \sum_{\{x_j : x_j \leq x\}} p_X(x_j)$. Por otro lado si se conoce la función de distribución de X entonces se puede conocer la función de densidad por medio de $p_X(x_j) = F_X(x_j) - \lim_{h^+\to 0} F_X(x_j - h)$.

La función de densidad discreta o masa de probabilidad definida sobre el conjunto numerable $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ debe de cumplir con las siguientes características:

[8] También existen distribuciones mixtas.

- $p(x_j) > 0$ para $j = 1, 2, \ldots$
- $p(x) = 0$ para $x \neq x_j$ para $j = 1, 2, \ldots$
- $\sum p(x_j) = 1$ donde la suma es sobre todos los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Definición 1.7 *Se dice que X es una "variable aleatoria absolutamente continua" si es una variable que toma valores en un espacio infinito no numerable.*

Si la variable aleatoria X es una variable aleatoria continua. Una función $f_X(\cdot)$ tal que $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(s)ds$ se le llama función de densidad. Dicha función:

- $f_X(\cdot) \geq 0$ para todo x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)ds = 1$

Definición 1.8 *Se define como un "Proceso Estocástico" a una colección $\{X(t), t \in T\}$ de variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P[\cdot])$.*

Al conjunto T se le llama conjunto índice. No hay ninguna restricción en el conjunto T, pero dos casos son importantes: si $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ o $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, en estos caso se dice que el proceso es discreto; si $T = \{t : -\infty < t < \infty\}$ o $T = \{t : t \geq 0\}$, en estos caso se dice que el proceso es continuo.

Definición 1.9 *Sea Ω un conjunto finito no vacio y sea $\mathfrak{F}$ un sigma álgebra de todos los subconjuntos de Ω. Sea X una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathfrak{F}, P[\cdot])$. La sigma álgebra generada por X se define como la colección de todos los conjuntos de la forma $\{w \in \Omega : X(w) \in A\}$ donde A es un subconjunto de Borel[9] y se denota como $\sigma(X)$. Sea $\mathfrak{G}$ una subsigma álgebra de $\mathfrak{F}$. Se dice que X es $\mathfrak{G}$ − medible si cada conjunto de $\sigma(X)$ también esta contenido en $\mathfrak{G}$.*

[9] El Borel sigma álgebra denotado por $\mathfrak{B}(I\!R)$ es el sigma álgebra más pequeño que contiene todos los intervaloa abiertos en $I\!R$. Los conjuntos en $\mathfrak{B}(I\!R)$ son llamados conjuntos de Borel.

Definición 1.10 *Sea X una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P[\cdot])$, Q la distribución de X, y $\mathfrak{G}$ una sub-sigma-álgebra de $\mathfrak{F}$. La esperanza condicional de X dado $\mathfrak{G}$, denotado por:*

$$E(X|\mathfrak{G})$$

es la función $\int_{\mathbb{R}} x dQ(x|\mathfrak{G})$.

Definición 1.11 *Sea $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espacio medible*[10]*. Una secuencia de $(\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, ...)$ es una filtración en $(\Omega, \mathfrak{F})$ si:*

$$\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq ...$$

Definición 1.12 *Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P[\cdot])$ un espacio de probabilidad y sea $(T, <)$ un conjunto parcialmente ordenado*[11]*. Sea $\{D_t : t \in T\}$ una coleccion de sub-σ-álgebras de $\mathfrak{F}$ tal que $D_s \subset D_t$ para $s < t$, $s, t \in T$. Sea $X := \{X_t : t \in T\}$ una coleccion de variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathfrak{F}, P[\cdot])$, cada una con esperanza finita. Se dice que la clase X es una martingala con respecto a $\{D_t : t \in T\}$ si:*

- *Para todo $t \in T$ tenemos que X_t es D_t-medible*
- *Para $s, t \in T$, $s < t$ tenemos que:*

$$E(X_t|D_s) = X_s$$

casi seguramente

La definición anterior tiene como significado que el valor esperado de una variable aleatoria x es su valor actual. Esta definición, en el área de finanzas, se ocupa para calcular el precio de una opción[12] utilizando el supuesto de que el valor esperado del subyacente es el valor actual.

[10] Un espacio medible es un espacio formado por $(\Omega, \mathfrak{F})$, donde Ω es un conjunto no vacio y sigma-álgebra de subconjuntos de Ω. Véase Bert [16].

[11] Una relación $<$ sobre un conjunto A es un orden parcial si $<$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Al conjunto A se le denomina conjunto parcialmente ordenado y se denota como $(A, <)$.

[12] Véase Hull [21].

1.2. Proceso Wiener

En 1827, el botánico inglés Robert Brown observó que los granos de polen suspendidos en agua seguian un patrón de zigzag. En 1905, Einstein desarrolla por primera vez una teoría sobre el movimiento Browniano, pero no fue sino hasta 1923 donde Wiener desarrollo una teoría satisfactoria para simular el movimiento de una partícula a lo largo del tiempo.

1.2.1. Proceso Wiener sobre Estados Continuos

Definición 1.13 *Una variable aleatoria $W(t)$ ó W_t es definida como un movimiento Browniano si satisface las siguientes propiedades:*

1. $W_0 = 0$

2. W_t *es una función continua en* t

3. W *tiene incrementos independientes, normalmente distribuidos. Esto quiere decir que si*

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$$

y

$$Y_1 = W_{t_1} - W_{t_0} \quad Y_2 = W_{t_2} - W_{t_1} \quad \ldots \quad Y_n = W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

entonces:

- $E(Y_j) = 0 \quad \forall j$
- $var(Y_j) = t_j - t_{j-1}$
- $Y_1, \ldots, Y_n$ *son independientes,*

Sea $0 \leq s < t$ valores conocidos, entonces $E(B_t) = 0, E(B_s) = 0$ y que $Var(B_t) = E(B_t^2) = t, Var(B_s) = E(B_s^2) = s$ y la covarianza de W_s y W_t es igual a s:

$$\begin{aligned} Cov(W_s, W_t) &= E(W_s W_t) - E(W_s)E(W_t) \\ &= E(W_s(W_t + W_s - W_s)) \\ &= E(W_s(W_t - W_s)) + E(W_s^2) \\ &= E(W_s^2) \\ &= s \end{aligned}$$

Sea $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ valores conocidos, entonces $W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n)$ se distribuyen normalmente con matriz de varianzas y covarianzas[13]:

$$C = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \ldots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix}$$

Definición 1.14 *Se dice que $\{\mathfrak{F}\}_{t \geq 0}$ es una filtración de un proceso Wiener si cumple con las siguientes condiciones:*

- *Para cada t, W_t es $\mathfrak{F}(t)$ − medible.*

- *Para cada $t < t_1 < \ldots < t_n$*

$$W(t_1) - W(t), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

  son independientes de $\mathfrak{F}(t)$.

Teorema 1.1 *El proceso Wiener es una Martingala.*

Demostración: Sea $0 \leq s \leq t$. Entonces:

$$\begin{aligned} E[W(t)|\mathfrak{F}(s)] &= E[(W(t) - W(s)) + W(s)|\mathfrak{F}(s)] \\ &= E[(W(t) - W(s))] + W(s) \\ &= W(s) \end{aligned}$$

Por lo que llegamos a la definición de Martingala.

[13] Parzen [27] define un proceso normal como un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ si para cada entero n y un subconjunto $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ de T las n variables aleatorias $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ son conjuntamente normal distribuidas. Chalasani [10] sólo define el proceso Wiener.

Teorema 1.2 *Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces:*

$$Z(t) = \exp\{-\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\}$$

es una martingala.

Demostación: Sea $0 \leq s \leq t$, valores conocidos. Entonces:

$$\begin{aligned}
E[Z_t|\mathfrak{F}(s)] &= E[\exp\{-\theta(W_t - W_s + W_s) - \tfrac{1}{2}\theta^2((t-s)+s)\}|\mathfrak{F}(s)] \\
&= E[Z(s)\exp\{-\theta(W_t - W_s) - \tfrac{1}{2}\theta^2((t-s))\}|\mathfrak{F}(s)] \\
&= Z(s)E[\exp\{-\theta(W_t - W_s) - \tfrac{1}{2}\theta^2((t-s))\}|\mathfrak{F}(s)] \\
&= Z(s)\exp\{\tfrac{1}{2}(-\theta)^2 Var(W_t - W_s) - \tfrac{1}{2}\theta^2((t-s))\} \\
&= Z(s)
\end{aligned}$$

1.2.2. Proceso Wiener sobre Estados Discretos

Definición 1.15 *Sea $\{Y_j\}_{j=1}^n$ una colección de variables aleatorias normales estándar e independientes sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Se define el "Proceso Wiener sobre Espacios Discretos" como:*

- $W(0) = 0$
- $W(k) = \sum_{j=1}^k Y_j$ *para* $k = 1, 2, \ldots, n$.

La definición anterior es semejante a la defineión del proceso Wiener sobre espacios continuos, de hecho:

$$\begin{aligned}
E[W(k)] &= 0 \\
Var[W(k)] &= k
\end{aligned}$$

De la misma forma que el proceso Wiener sobre espacios continuos. Sea $0 < s < k$ entonces:

$$\begin{aligned} Cov[W(k), W(s)] &= E[W(k)W(s)] \\ &= E[(W(k) - W(s))W(s)] + E[W(s)^2] \\ &= s \end{aligned}$$

Si $W(1), W(2), \ldots, W(k)$ son procesos de Wiener sobre estados discretos entoces la distribución conjunta de $W(1), W(2), \ldots, W(k)$ es una normal multivariada con matriz de variazas covarianzas:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix}$$

Definición 1.16 *Se dice que $\{\mathfrak{F}\}$ es una filtración de un proceso Wiener sobre espacios discretos si cumple con las siguientes condiciones:*

- $\{\mathfrak{F}\}_0 = \{\Phi, \Omega\}$

- $\{\mathfrak{F}\}_k = \sigma(Y_1, \ldots, Y_k) = \sigma(W_1, \ldots, W_k)$ *para* $k = 1, \ldots, n$.

Teorema 1.3 $\{W_k\}_{k=0}^{n}$ *es una martingala.*

Esta demostración es idéntica a la demostración del teorema 1.1.

1.3. Cálculo Estocástico

Definición 1.17 *Sea* $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ *una partición de* $[0, T]$ *tal que:*

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$$

Y sea $||\Pi|| = max_{k=0,\ldots,n-1}(t_{k+1} - t_k)$.

Se define como "variación" de una función, y se denota como $V_{[0,T]}(f)$, *como:*

$$V_{[0,T]}(f) = \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$$

Suponiendo que f es diferenciable entonces por el teorema del valor medio[14]*:*

$$f(t_{k+1}) - f(t_k) = f'(t_k^*)(t_{k+1} - t_k)$$

Entonces:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_k^*)|(t_{k+1} - t_k)$$

y

$$\begin{aligned} V_{[0,T]}(f) &= \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_k^*)|(t_{k+1} - t_k) \\ &= \int_0^T |f'(t)|dt^{15} \end{aligned}$$

Definición 1.18 *La "variación cuadrática" de una función f sobre un intervalo $[0,T]$ como:*

$$VC_{[0,T]}(f) = \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1} - f(t_k)|^2$$

Si f es diferenciable:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1} - f(t_k)|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_k^*)|^2 (t_{k+1} - t_k)^2 \\ &\leq ||\Pi|| \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_k*)|^2 (t_{k+1} - t_k) \end{aligned}$$

Ahora:

[14]Véase Pastor [28].

$$
\begin{aligned}
VC_{[0,T]}(f) &\leq \lim_{||\Pi|| \to 0} ||\Pi|| \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_k*)|^2 (t_{k+1} - t_k) \\
&= \lim_{||\Pi|| \to 0} ||\Pi|| \int_0^T |f'(t)|^2 dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

En particular, si $W(t)$ es un proceso Wiener. Entonces sea Q_Π igual a:

$$
Q_\Pi = \sum_{k=0}^{n-1} (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2
$$

Ahora

$$
Q_\Pi - T = \sum_{k=0}^{n-1} [(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 - (t_{k+1} - t_k)]
$$

Considerando $[(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 - (t_{k+1} - t_k)]$, el valor esperado es igual a cero y para $j \neq k$ $[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{k+1} - t_k)]$ y $[(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 - (t_{k+1} - t_k)]$ son independientes entonces:

$$
\begin{aligned}
E[(Q_{\Pi} - T)^2] &= \sum_{k=0}^{n-1} E[((W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 - (t_{k+1} - t_k))^2] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E[(W(t_{k+1}) - W(t_k))^4 \\
&\quad -2(t_{k+1} - t_k)(W(t_{k+1} - W(t_k))^2 \\
&\quad +(t_{k+1} - t_k)^2) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} [3(t_{k+1} - t_k)^2 \\
&\quad -2(t_{k+1} - t_k)^2 + (t_{k+1} - t_k)^2 \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \\
&\leq 2||\Pi|| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \\
&= 2||\Pi||T
\end{aligned}
$$

Cuando $||\Pi||$ tiende a cero entonces $E((Q_{\Pi} - T)^2) \to 0$. Por lo tanto Q_{Π} converge en probabilidad a T.

Por lo tanto se puede concluir que un proceso Wiener no es diferenciable.

1.3.1. Integrales Estocásticas

Definición 1.19 *Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[0, T]$, W_t un proceso Wiener y V_t cualquier proceso que no depende de W_t tal que:*

$$E\left(\int_0^T V_t^2 dt\right) < \infty$$

Entonces se dice que X_t es la integral estocástica de V_t respecto al proceso Wiener como:

$$\begin{aligned} X_t &= \int_0^T V_t dW_t \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} V(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \end{aligned}$$

Propiedades:

- Para cada t, X_t es $\mathfrak{F}(t)$ medible.
- Sea:

$$X_1(t) = \int_0^T V_t dW_t \qquad X_2(t) = \int_0^T U_t dW_t$$

entonces:

$$X_1(t) \pm X_2(t) = \int_0^T (V_t \pm U_t) dW_t$$

y

$$cX_t = \int_0^T cV_t dW_t$$

- X_t es una martingala.
- $E\left(X_t^2\right) = E\left(\int_0^T V_t^2 dt\right)$.

Considérese la siguiente integral estocástica:

$$\int_0^T W_t dW_t$$

y sea Π una partición tal que:

$$0 < \frac{T}{n} < \frac{2T}{n} < \ldots < T$$

Por definición:

$$\int_0^T W_t dW_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} W\left(\frac{iT}{n}\right)\left(W\left(\frac{(i+1)T}{n}\right) - W\left(\frac{iT}{n}\right)\right)$$

Pero:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{\frac{(i+1)T}{n}} - W_{\frac{iT}{n}})^2 &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} W^2_{\frac{(i+1)T}{n}} - \sum_{i=0}^{n-1} W_{\frac{(i+1)T}{n}} W_{\frac{iT}{n}} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} W^2_{\frac{iT}{n}} \\
&= \tfrac{1}{2}W_T^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} W^2_{\frac{kT}{n}} - \sum_{i=0}^{n-1} W_{\frac{(i+1)T}{n}} W_{\frac{iT}{n}} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} W^2_{\frac{iT}{n}} \\
&= \tfrac{1}{2}W_T^2 - \sum_{i=0}^{n-1} W_{\frac{iT}{n}}(W_{\frac{(i+1)T}{n}} - W_{\frac{(i)T}{n}})
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\sum_{i=0}^{n-1} W_{\frac{iT}{n}}(W_{\frac{(i+1)T}{n}} - W_{\frac{(i)T}{n}}) = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{\frac{(i+1)T}{n}} - W_{\frac{iT}{n}})^2$$

Si $n \longrightarrow \infty$:

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}T$$

Si W_t fuera diferenciable entonces $\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}W_t^2$ pero a diferencia del cálculo newtoniano es que la variación cuadrática no es igual a cero lo que hace que aparezca un término más, $\frac{1}{2}T$.

1.3.2. Procesos de difusión y Lema de Itô

Definición 1.20 *Un proceso de "difusión de Itô", denotado por $\{X_t\}_{\{0\leq t\leq\infty\}}$, es un proceso estocástico descrito por la siguiente ecuación diferencial:*

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Donde W_t es un proceso Wiener.

Esto quiere decir que conforme Δ tienda a cero, la distribución de $X(t+\Delta t) - X(t)$ tenderá a una normal con media $\mu_t \Delta t$ y varianza $\sigma_t^2 \Delta t$.

μ_t es llamado "drift process" o tendencia, e intuitivamente significa la tasa de cambio esperada de X_t. Y σ_t es llamado el "speed process" o difusión, e intuitivamente significa la cantidad en el que el proceso puede desviarse de la tasa esperada de cambio.

Definición 1.21 *Un proceso estocástico, X_t, con estados continuos ($t \geq 0$) tal que X_t puede ser escrito:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t \mu_s ds$$

La forma diferencial de esta ecuación se escribe:

$$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$$

Para generalizar este tipo de procesos, por ejemplo si se piensa en una función $F(\cdot)$ que es una función del valor actual del procesos de difusión, x_t, es posible caracterizar el proceso $F(X_t)$?. El lema de Itô muestra la forma en la que una función $F(\cdot)$ pueda depender del proceso de difusión X_t.

Lema 1.3.1 *Sea X_t que cumple con el procesos $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$, y sea $F(\cdot)$ una función determinística con segunda derivada continua. Entonces el procesos de difusión $dF(X_t)$ esta dado por:*

$$dF(X_t) = \left[\frac{\partial F}{\partial x}\mu_t + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\sigma_t^2\right] dt + \frac{\partial F}{\partial x}\sigma_t dW_t$$

La demostración no se mencionará pero se presentarán algunos ejemplos prácticos que muestren el resultado del lema[16].

[16] Para ver la demostración de este lema véase Shreve [10].

Ejemplo:

Si X_t sigue un procesos de difusión $dX_t = \mu_t dt + \sigma dW_t$ donde μ_t es una función de t tal que $\int_0^T |\mu_t| dt < \infty$ y σ es una constante y $F(\cdot) = \exp\{\cdot\}$ entonces:

$$\begin{aligned}
dF(X_t) &= \left[\frac{\partial \exp\{x\}}{\partial x}\mu_t + \frac{\partial \exp\{x\}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \exp\{x\}}{\partial x^2}\sigma^2\right] dt + \frac{\partial \exp\{x\}}{\partial x}\sigma dW_t \\
&= (\exp\{x\}\mu_t + \tfrac{1}{2}\exp\{x\}\sigma^2)dt + \exp\{x\}\sigma dW_t \\
&= \exp\{x\}\left[(\mu_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t\right] \\
\frac{dF(X_t)}{F(X_t)} &= (\mu_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t
\end{aligned}$$

El lema de Itô permite encontrar la ecuación estocástica de una función determinística con segunda derivada continua de forma sencilla, pero dada la ecuación diferencial es posible encontrar el proceso que cumpla con la ecuación diferencial?. Por lo general encontrar un proceso que cumpla con cierta ecuación diferencial estocástica es difícil de resolver.

Por ejemplo si se tiene la siguiente ecuación estocástica $dX_t = \sigma X_t dW_t$. Este resultado se parece al ejemplo anterior donde $F(x) = \exp\{x\}$ de hecho si se escoge $\mu_t = -\frac{1}{2}\sigma^2$ entonces el resultado de la ecuación diferencial pasada sería igual a $dX_t = \sigma X_t dW_t$. Entonces se puede concluir que el proceso que cumple con la ecuación diferencial estocástica es:

$$X_t = \exp\{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$$

Ahora si se tiene la ecuación diferencial $dX_t = X_t(\sigma dW_t + \mu_t dt)$ donde $\int_0^t |\mu_s| ds < \infty$. Si se propone a $X_t = X_0 \exp\{\sigma W_t + v_t\}$ y si se toma $v = \int_0^t \mu_s ds - \frac{1}{2}\sigma^2 t$ entonces la solución de la ecuación diferencial estocásticas es:

$$X_t = X_0 \exp\{\sigma W_t + \int_0^t \mu_s ds - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$$

.

Este tipo de procesos se le llama "Proceso Wiener Geométrico".

1.4. El Proceso Wiener como un Modelo de Valuación de Activos

Se llama "valor stock" al valor de un activo, este término es muy utilizado en el lenguaje financiero. Así, el "modelo de Valuación de Activos" o tambien llamado "modelo Stock" es un modelo utilizado para predecir el comportamiento de algún activo, como puede ser el precio de una acción, una divisa, etc.

El valor del activo en el tiempo cero es conocido pero a medida de que pasa el tiempo el valor del activo puede tomar un conjunto de valores distintos.

Definición 1.22 *Dados los parámetros:*

- $\mu \in I\!R$ *la tasa de rendimiento esperado.*
- $\sigma > 0$ *la volatilidad.*
- $S_0 > 0$ *el valor inicial del valor stock.*

El "Proceso Stock" es definido como:

$$S_k = S_0 \exp\{\sigma W_k + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)k\} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Donde W_t es un proceso Wiener sobre estados discretos.

Existe otra forma de definir al proceso Stock que es por medio de ecuaciones en diferencias que es utilizando la siguiente expresión[17]:

[17] Véase Hull [21]

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta k + \sigma W_k$$

El valor del stock es un proceso wiener geométrico y el significado es que la variable ΔS es el cambio en el valor S, en un intervalo de tiempo, Δt. El parámetro μ es la tasa de rendimiento esperada por unidad de tiempo y σ es la volatilidad de dicha tasa.

La definición anterior se extiende con facilidad a un espacio continuo y el significado seguirá siendo el mismo.

Definición 1.23 *Sea $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ valores conocidos. El "Proceso Stock" sobre estados continuos esta dado por:*

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Donde W_t es un proceso Wiener sobre estados continuos.

De acuerdo al lema de Itô la solución a la ecuación estocástica es:

$$S_t = S_0 \exp\{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\}$$

En realidad es dificil que el valor de un activo siga un proceso Wiener geométrico pero debido a que es fácil su interpretación, la convergencia que tiene con la caminata aleatoria y los resultados a los que se llegan comunmente son fórmulas cerradas se utiliza este proceso[18].

1.5. El Paradigma Bayesiano

Una medida de probabilidad esta relacionada con una medida que toma como dominio el espacio de eventos y como contradominio el intervalo $[0, 1]$, sin embargo, es importante pensar en cómo asignar una medida de probabilidad a un evento?.

En un inicio, como se mencionó anteriormente, la probabilidad se relacionó con juegos de azar, dando origen a la defineión clásica de probabilidad.

[18] Para una explicación más profunda véase Baxter [5]

Definición 1.24 *Si un experimento aleatorio puede ser observado de n distintas maneras todas ellas excluyentes entre si e igualmente probables y si n_A de esos posibles resultados tienen un atributo A, entonces la probabilidad de que ocurra el evento A es igual a el cociente $\frac{n_A}{n}$.*

A las probabilidades asignadas se les llama "probabilidades a priori".

Esta definición de probabilidad es posible para experimentos sencillos como el lanzamiento de dados, monedas, en general juegos de azar. Pero qué sucede si en lugar de juegos de azar se piensa en experimentos más complejos como el nacimiento de un niño?, donde exiten dos posibilidades: niño o niña, sin embargo no existe la misma posibilidad de que sea niño a la que sea niña, ya que los eventos no son igualmente probables. Si se puediera pensar en que el nacimiento de un niño es infinitamente observable y se han hecho N observaciones donde N_A resultados observados han sido niño, entonces se podría proponer una medida de probabilidad al evento de que sea niño como $\frac{N_A}{N}$. Este tipo de experimentos dan origen a la definición frecuentista de probabilidad.

Definición 1.25 *Si un experimento aleatorio puede ser observado infinitamente y todas las observaciones son excluyentes. Si N_A de esos posibles observaciones tienen un atributo A, entonces la probabilidad de que ocurra el evento A es igual a $\lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}$, donde N es el número de veces que ha sido observado el experimento.*

A las probabilidades asignada se les llama "probabilidades a posteriori".

A diferencia de la definición pasada, la definición frecuentista[19] no se conoce la probabilidad de que ocurra un evento antes de observar el experimento. Pero, qué tan posible es encontrar experimentos de este tipo?, de hecho, el nacimiento de un niño no es infinitamente observable ya que existen políticas de estado que no hacen a los experimentos iguales[20]. Sin embargo, si se piensa en experimentos más complejos como las crisis económicas de un país donde el experimento no es infinitamente observable y más aún, donde las observaciones no son idénticas ni mucho menos independientes es difícil pensar

[19] Esta definición de probabilidad da inicio a la estadística clásica.

[20] Pero posiblemente si se toma un horizonte de tiempo razonable los experimentos si serían idénticos.

que la posibilidad de que ocurra el evento esta representada por la definición frecuentista de probablidad.

Si se piensa en la medida de probabilidad como una medida que refleje la posibilidad de que ocurra un evento entonces de este hecho se puede dar una definición informal de la medida de probabilidad.

Definición 1.26 *La probabilidad es una medida de credibilidad acerca de la ocurrencia de un evento.*

La idea de credibilidad refleja a la medida de probabilidad como una medida personal, ya que dependerá del estado inicial de información. Por ejemplo si se desea saber cual es la probabilidad de que ocurra una crisis económica en un país determinado, esta crisis puede depender de muchos factores internos como políticos, sociales, etc. y muchos factores externos como las relaciones comerciales con otros países. El asignar una probabilidad al evento dependerá de la información inicial que se tenga del evento, es decir, alguien que conozca la situación de las finanzas públicas del país tendrá un mejor juicio respecto a aquella persona que no las conoce.

La estadística Bayesiana se sustenta en la teoría de la decisión. Una introducción a esta teoría se muestra en el apéndice A o para mayor información véase Bernardo [6].

1.5.1. Teoría Bayesiana

Un fenómeno aleatorio es un problema de decisión, así que la "Estadística Bayesiana" está sustentada, básicamente, por cuatro distribuciones, donde se mezcla la información inicial M_0 y se mezcla la información muestral.

La forma de mezclar la información inicial con la información muestral es por medio del teorema de Bayes[21].

Teorema 1.4 *Para cualquier partición finita $\{E_j, j \in J\}$ de Ω y $G \succ \phi$:*

$$P(E_i|G) = \frac{P(G|E_i)P(E_i)}{\sum_{j\in J} P(G|E_j)P(E_j)}$$

[21] Véase Migon [26].

Si el espacio es continuo entonces el teorema de Bayes se extiende a:

Teorema 1.5 *Si X y Y son dos variables aleatorias continuas con $f_X(x)$ y $f_{Y|X}(y|x)$ entonces:*

$$f(x|y) = \frac{f(y|x)f(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x)f(x)dx}$$

Distribución Inicial y Final

En estas distribuciones se introduce la información inicial y se mezcla con las información muestral. El estado de inicial y final es el estado de información.

Definición 1.27 *Si $\{H_j, j \in J\}$ son eventos mutuamente excluyentes, entonces para cualquier evento D,*

i) $P(H_j|M_0)$ *o simplemente* $P(H_j)$, $j \in J$ *es llamada la distribución inicial de* H_j, $j \in J$ *dada la información inicial* M_0.

ii) $P(D|H_j)$, $j \in J$, *es llamada la función de verosimilitud de* H_j, $j \in J$ *dado* D.

iii) $P(H_j|D)$, $j \in J$ *es llamada la distribución final de* H_j, $j \in J$.

Por medio de la distribución inicial se introduce la información inicial M_0 y utilizando la distribución final se actualiza según la información muestral, utilizando el teorema de Bayes.

Ejemplo:

Si se tiene un fenómeno aleatorio donde $X \sim Poisson(\lambda)$ y si se escoge el modelo tal que la distribución inicial es una distribución *Gamma* con parámetros α, β entonces

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}\exp\{-\beta\lambda\}$$

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria. La función de verosimilitud es igual a:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\lambda) = \frac{\exp\{-n\lambda\}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

La distribución final, utilizando el teorema de Bayes, es igual a:

$$\begin{aligned} f(\lambda|X_1, X_2, \ldots, X_n) &= \frac{\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}\exp\{-\beta\lambda\}\exp\{-n\lambda\}\lambda^{\sum x_i}}{\int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}\exp\{-\beta\lambda\}\exp\{-n\lambda\}\lambda^{\sum x_i}} \\ &= \frac{\beta^{\alpha+\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\Gamma(\alpha+\sum_{i=1}^{n} x_i)}\lambda^{\alpha+\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}\exp\{-(\beta+n)\lambda\} \end{aligned}$$

que es una distribución *Gamma* con parámetros $\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $\beta + n$.

En un modelo paramétrico, se suponen a los parámetros del modelo como variables aleatorias[22]. Sin embargo hay una gran cantidad de distribuciones que se pueden elegir, de este hecho se llega a la siguiente definición:

Definición 1.28 *Dada una muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ con una medida de probabilidad P. Un estadístico t_n definido sobre $\mathbb{R}^n$ se dice que es un "Estadístico Suficiente" de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si:*

$$p(\theta|X_1, X_2, \ldots, X_n) = p(\theta|t_n)$$

Definición 1.29 *La familia conjugada, $\mathcal{F}$, de la distribución inicial $\theta \in \Theta$ con respecto a la función de verosimilitud $p(\mathbf{x}|\theta)$ con un estadístico suficiente $t = t(\mathbf{X}) = \{s(\mathbf{x}, n)\}$ $t \in T$ donde*

[22] En la estadística clásica se suponen a los parámetros como valores ya dados, sólo desconocidos.

$$T = \left\{ t : \int_{\Theta} p(s = |\theta, n = n_0)d\theta < \infty \right\}$$

es:

$$\mathcal{F} = \frac{p(s = |\theta, n = n_0)d\theta}{\int_{\Theta} p(s = |\theta, n = n_0)d\theta}$$

El significado de la definición anterior es que si la distribución inicial pertenece a una familia entonces la distribución final también pertenezca a la misma familia.

Ejemplo:

Si $X \sim Poisson(\lambda)$ entonces la familia conjugada de la familia poisson es la distribución *Gamma*.

$$\begin{aligned} f(\theta|\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\dfrac{\exp\{-n\lambda\}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}}{\int_0^{\infty} \dfrac{\exp\{-n\lambda\}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}} \\ &= \frac{\beta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\Gamma(\sum_{i=1}^{n} x_i)} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1} \exp\{-n\lambda\} \end{aligned}$$

Que el resultado anterior es una distribución Gamma para todo $\sum_{i=1}^{n} x_i > 0$ y toda n.

Como se ha mencionado, los modelos bayesianos parten del supuesto de que se tiene cierta información inicial, sino se tuviera se utiliza como información inicial la siguiente distribución:

Definición 1.30 *Sea X una variable aleatoria talque $X|\theta \sim p(x|\theta)$. La dis-*

tribución no informativa de Jeffreys para θ es

$$P(\theta) \;\propto\; (|I(\theta)|)^{\frac{1}{2}} \quad \theta \in \Theta \subseteq I\!R^n \tag{1.2}$$

Es importante mencionar que el espacio paramétrico es unidimensional entonces $|\cdot|$ se refiere al valor absoluto de la función pero si el espacio es multidimensional ($n \geq 2$) entonces es el determinante de la matriz de información de Fisher.

Distribuciones Predictivas

En un modelo paramétrico se elige la distribución de fenómeno en cuestión pero ésta se encuentra condicionada a ciertos parámetros. La estadística clásica considera a esos parámetros como valores dados y sólo hay que estimarlos, pero en la estadística bayesiana los parámetros son variables aleatorias.

Definición 1.31 *$P(D)$ es llamada la "Distribución Predictiva Inicial" inducida por la función de verosimilitud y la distribución inicial.*

Definición 1.32 *$P(D|X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se llama la "Distribución Predictiva Final" inducida por la función de verosimilitud y la distribución inicial.*

El significado de la primera definición es conocer la probabilidad de cierto evento sin haber observado antes anteriormente dicho evento y el de la segunda es conocer la probabilidad de observar dicho evento dado que se tienen ciertas observaciones del mismo.

Ejemplo:

Si se tiene una variable aleatoria $X|\lambda$ tal que $X \sim Poisson$, $\lambda \sim Gamma(\alpha, \beta)$ y $\lambda|X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Gamma(\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i, \beta + n)$.Entonces la distribución predictiva inicial es una binomial negativa con parámetros $p = \frac{1}{\beta+1}$ y $r = \alpha$.

Para encontrar la distribución predictiva final se hará el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} P(z) &= \int_0^\infty P(z|x)f(x|\underline{z})dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\exp\{-x\}x^z}{z!}\frac{(\beta+n)^{\alpha+\sum_i^n x_i}}{\Gamma(\alpha+\sum_i^n x_i)}x^{\alpha+\sum_i^n x_i-1}\exp\{-(\beta+n)X\}dx \\ &= \binom{\alpha+\sum x_i+z-1}{z}\left(\frac{\beta+n}{\beta+n+1}\right)^{\alpha+\sum x_i}\left(\frac{1}{\beta+n+1}\right)^x I_{\{x=0,1,\ldots\}} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Que es una distribución Binomial Negativa con parámetros $p=\frac{1}{\beta+n+1}$ y $r=\alpha+\sum x_i$.

Capítulo 2

Riesgo de Crédito

Podemos definir al crédito como *una suma de dinero esperada dentro de un periodo determinado*[1], de esta definición podemos entender al crédito como un activo contingente que dependerá de la voluntad y la capacidad del acreditado en el pago de sus obligaciones. Por otro lado, el riesgo de crédito se puede definir como *las pérdidas potenciales por el incumplimiento de dicha suma*. Por lo tanto podemos concluir que el crédito por naturaleza es riesgoso.

El crédito y el riesgo de crédito son unas de las actividades más antiguas. Los registros datan, al menos, desde 1800 A.C.[2], pero esencialmente no han cambiado desde la época de los egipcios donde siempre hay un elemento de incertidumbre sobre si un acreditado pagará o no un crédito en particular.

Por otro lado, los bancos como hasta ahora los conocemos fueron formados en Florencia hace 700 años y la administración del riesgo crédito fue hecha principalmente por medio de la experiencia. A lo largo del tiempo se ha tenido un mayor interés por la administración en riesgo crédito, se han formado organismos internacionales que dan propuestas para regular el riesgo crédito como es el Comité de Basilea y han generado diversos modelos para medir el riesgo como: KMV, Credit-Metrics[3], que van desde encontrar la distribución de pérdidas utilizando una distribución Poisson hasta métodos que consiste en valuación de opciones, y se han surgido una gran cantidad de

[1] Esta definición fue tomada de John B. Caouette, no es una definición formal de crédito, más adelante se definirá al crédito formalmente

[2] El código de Hammurabi incluye relatos sobre la regulación del crédito en Babilonia.

[3] Para mayor información de estos modelos véase Gutiérrez [20] o Crouhy [13].

instituciones, las cuales tienen como principal objetivo la administración de riesgos como JP Morgan, KMV, Credit Suisse, etc.

2.1. Definición y Clasificación de Riesgos

2.1.1. Definición de Riesgos

La palabra riesgo proviene del latín *risicare*, que significa atreverse a transitar por un sendero peligroso. Esta palabra tiene un sentido negativo ralacionado con peligro o daño. Sin embargo, ese daño o peligro es inevitable en los procesos de toma de decisiones. El riesgo en términos financieros puede definirse como la pérdida potencial acerca de los rendimientos futuros de un activo[4].

Una institución puede ser afectada por factores internos y/o externos. Al riesgo que se enfrenta una institución originado por factores internos como puede ser el nivel de endeudamiento se le llama *riesgo no sistemático*. La otra parte del riesgo es denominada *riesgo sistemático*, el cual, es originado por movimientos generales del mercado, como puede ser inflación. De esta manera el riesgo total para una institución es el riesgo sistemático más el riesgo no sistemático.

2.1.2. Clasificación de Riesgos

Existen una infinidad de clasificaciones de riesgo pero el siguiente cuadro esquematiza los diferentes tipos de riesgo:

[4]Véase De Lara [14].

Riesgo
- Riesgo Empresa
- Riesgo Financiero
  - Riesgo de Liquidez
  - Riesgo de Operacional
  - Riesgo de Mercado
  - Riesgo Legal
  - Riesgo de Crédito
- Riesgo Estratégico

El **riesgo empresa** es un riesgo no sistemático que la empresa asume al crear una ventaja competitiva frente a otra empresa o al incrementar su valor, se incluyen las eventualidades de la empresa provocadas por las innovaciones tecnológicas, los diseños de un producto, las técnicas de mercado. Por ejemplo los cambios de imágen de una empresa.

El **riesgo estratégico** es aquel riesgo sistemático derivado de cambios fundamentales en el ambiente natural que rodea a una empresa, ya sea económico o político, y que puede tener un efecto significativo en sus ingresos. Por ejemplo una reforma fiscal.

El **riesgo financiero** es el riesgo sistemático relacionado con las posibles pérdidas en los mercados financieros provocadas por los movimientos en las variables financieras tales como las tasas de interés, tipo de cambio, etc.

Tipos de Riesgos Financieros

Como se mostró anteriormente, los riesgos financieros generalmente se clasifican en: riesgo operacional, riesgo legal, riesgo de mercado, riesgo de liquidez y riesgo crédito.

Riesgo Operacional

Dentro de una empresa hay áreas de operaciones que se encargan de procesar, confirmar y conciliar transacciones. El **riesgo operacional** es el riesgo financiero referido a las pérdidas potenciales resultado de sistemas no adecuados o alteraciones de los mismos, fallas en administración o dirección de la empresa, fraudes o errores humanos.

Riesgo legal

El **riesgo legal** se da cuando la contraparte no tiene autoridad legal o reguladora para llevar a cabo una transacción. Este riesgo incluye el quebranto o violación a las regulaciones gubernamentales, como la manipulación del mercado.

Riesgo de Mercado

El **riesgo de mercado** es el riesgo finaciero que se tiene a raíz de la existencia de la incertidumbre de un individuo, empresa o insitución financiera sobre el valor de un portafolio de activos y/o pasivos financieros que poseé, debido a fluctuaciones inesperadas de las variables macroeconómicas. Algunas de las influencias que pueden hacer variar el valor de mercado de estos elementos son externas a la empresa de tal manera que no pueden ser controladas por ésta.

El riesgo de mercado puede tomar dos formas: *el riesgo absoluto* medido por la pérdida potencial en una moneda determinada, por ejemplo el peso o el dólar, y el *riesgo relativo* medido por la pérdida potencial respecto a un punto de referencia (benchmark) como un índice, por ejemplo el índice de precios y cotizaciones.

Dentro del riesgo de mercado se tienen: el riesgo de tipo de cambio, el riesgo de tasa de interés y tasa de inflación[5].

Riesgo de Liquidez

Básicamente existen dos tipos de definiciones de riesgo de liquidez, una rela-

[5] Véase Rojas [29]

cionada con el valor de los activos y otra relacionada con las instituciones en general:

a) El riesgo de liquidez de un activo es el riesgo de poder vender o comprar a un precio cercano a valor de mercado debido a la insuficiente actividad de mercado, y se mide a través del margen entre el precio de venta y el precio de compra. Así, entre mayor sea este margen menos líquido es el instrumento y viceversa. En general, el riesgo de liquidez es el riesgo financiero derivado de una posible pérdida de liquidez. Hay dos tipos de riesgo de liquidez: el *riesgo específico* y el *riesgo sistemático.* El riesgo específico es el que afecta a una sola institución, mientras que el riesgo sistemático es el que afecta al mercado como un conjunto, es decir, es el riesgo de que todo el mercado pierda liquidez. Los mercados financieros tienden a perder liquidez en periodos de crisis o alta volatilidad.

b) El riesgo de liquidez se define como la contingencia de que la entidad incurra en pérdidas excesivas por la venta de activos a descuentos inusuales y significativos, con el fin de disponer rápidamente de los recursos necesarios para cumplir con sus obligaciones contractuales.

Ambas definiciones están relacionadas ya que con el fin de obtener recursos rápidamente para hacer frente a las obligaciones, el valor de los activos pierden valor respecto al valor de mercado.

Riesgo de Crédito

El crédito es un activo resultante del financiamiento que otorgan las instituciones con base en el estudio de viabilidad económica de los acreditados.

El riesgo de crédito se refiere a la posibilidad de que los deudores o contrapartes de los contratos no cumplan con la obligacion pactada originalmente[6].

Se considera que el riesgo de crédito de instrumentos emitidos por el gobierno federal es cero, ya que en teoría, nadie es más solvente que él; aunque en la

[6]La definición de crédito y la de riesgo de crédito fueron tomadas de la circular 1488 (Anexo $B-6$) de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores, emitida el 30 de octubre de 2000.

práctica, cuando dichos instrumentos se cotizan en el extranjero, está implícito el riesgo país[7].

2.2. Análisis de Riesgo de Crédito

Existen dos aspectos fundamentales en el análisis de riesgo crédito: la **voluntad** de pago y la **posibilidad real** de pago, pero a medida en la que se desarrolle un marco jurídico más sólido la voluntad de pago se hará a un lado del análisis y el segundo tomará una mayor importancia.

Existen varias formas de analizar el riesgo crédito, una de ellas es el *sistema de expertos* que es un conjunto de analistas de crédito que tienen una opinión calificada por su gran experiencia, conocían las políticas de la empresa, tenían una gran sensibilidad de los efectos que ocasionaba el entorno económico, así como de la situación financiera de la empresa. Este sistema era muy útil mientras el número de deudores era pequeño, pero conforme se iba incrementado el número de deudores el sistema de expertos era sumamente costoso.

Debido al crecimiento del número de acreditados y sobre todo de aquellos que emiten títulos de deuda han surgido las *agencias calificadoras.* Estas empresas se dedican a dar una opinión de todos aquellos títulos de deuda, esto quiere decir que no califican a los deudores sino a la deuda, así que un acreditado puede tener dos diferentes tipos de calificaciones en diferentes deudas. Esta calificación representa una opinión acerca de la calidad de la deuda, de la probabilidad y el riesgo, tal análisis se basa principalmente en el estudio de razones y proyecciones financieras, el entorno económico, su posición competitiva, desarrollo de productos, administración y estrategias, etc. dependiendo en el tipo y plazo de la emisión de deuda y de las garantias que la respalden.

Dichas calificaciones se presentan en una matriz de transición como se muestra a continuación:

[7] El riesgo país es el riesgo en el que influye la solvencia del país y su liquidez, así como los factores políticos o sociales del mismo.

Calificación inicial	1	2	3	4	5	6
1	0.8760	0.0810	0.0290	0.0140	0.0000	0.0000
2	0.0250	0.8860	0.0610	0.0150	0.0060	0.0070
3	0.0020	0.0250	0.8340	0.0740	0.0430	0.0230
4	0.0000	0.0000	0.0360	0.8370	0.0940	0.0330
5	0.0000	0.0000	0.0060	0.0000	0.8080	0.1860
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

En esta matriz la mejor calificación es 1 y el estado de incumplimiento es el 6[8]. Esta matriz representa la probabilidad de pasar de un estado a otro donde el último estado es el estado de incumplimiento.

Existen muchas empresas calificadoras[9] pero las más importantes internacionalmente son Standard $ Poor's, Moody's y Fitch, sin embargo existen algunas otras como son Mikuni & Co., International Bank Credit Analysis, etc.

Proceso de Calificación de Crédito

Las agencias calificadoras se basan de la misma información generalmente, sin embargo difieren en sus proyecciones[10]. Algunos de las áreas que toman en cuenta son:

- El riesgo corporativo: dentro de esta área se toma en cuenta las características de la empresa, competitividad por ejemplo tecnología, etc, y la administración de la misma.

- El riesgo financiero: las características financieras de la empresa, su estructura de capital, etc.

[8]Esta matriz fue calculada por la CONSAR en junio del 2002 para deudas de mediano y largo plazo. También es importante mencionar que la CONSAR toma al estado de incumplimiento como un estado absorbente, algo que no necesariamente es cierto.

[9]La Comisión Nacional Bancaria y de Valores por medio de la circular 1480 emitida el 29 de septiembre del 2000 exige a los bancos la implementación de una metodología para la calificación de la cartera comercial.

[10]De hecho una empresa puede tener una calificación alta en una calificadora pero en otra puede tener otra calificación totalmente diferente, por ejemplo Cemex para agosto del 2002 tenía una deuda con calificación menor en Standard & Poor's que en Fitch.

- Entorno económico.

2.3. Regulación

El crédito es una actividad ligada principalemte a la banca, por lo tanto, la legislación esta dirigida a los créditos bancarios. Las instituciones que regulan a los servicios de banca y crédito.

2.3.1. Comité de Basilea

El Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria, mejor conocido como "Comité de Basilea", es un foro integrado por los gobernadores de los bancos centrales y reguladores bancarios de los pases integrantes del Grupo de los Diez[11]. Sus conclusiones y recomendaciones se han convertido en la norma de supervisión y regulación bancaria en el resto del mundo. En 1996 el Comité invitó a la CNBV a participar en la elaboración de un documento titulado "Core Principles for Effective Banking Supervision", cuyo principal propósito es establecer una serie de lineamientos mínimos que debe cumplir todo sistema de regulación y supervisión bancaria.

Actualmente, los trabajos del Comité de Basilea se han orientado, entre otros, hacia el diseño de una estrategia para difundir y apoyar la instrumentación de estos principios de supervisión. Para tal efecto, se invitó a la CNBV a participar en un grupo de enlace, en el que se diseñan las medidas que contribuirán a la aplicación de dichos lineamientos.

Basilea [3] propone una medida para el cálculo del capital mínimo. El capital mínimo esta compuesto por tres elementos fundamentales: Una definición de capital regulador, activos ponderados por riesgo y la relación mínima capital-activos ponderados por riesgo.

Para calcular el coeficiente de capital se calcula como un cociente del capital regulador como numerador y el denominador o capital de activos ponderados se determina multiplicando el capital mínimo obligatorio por riesgo de

[11] Los países que integran el "Grupo de los Diez'son: Canadá, Suiza, Estados Unidos, Bélgica, Francia. Alemania, Holanda, Italia, Suecia y Reino Unido.

mercado y el riesgo operativo por 12.5 más los activos ponderados por riesgo de crédito. Este coeficiente deberá ser mayor a 8 %, es decir:

$$\frac{\text{Capital Regulador}}{12.5\left(\begin{array}{l}\text{Capital mínimo}\\ \text{obligatorio por riesgo de}\\ \text{mercado y operativo}\end{array}\right)+\begin{array}{l}\text{Activos ponderados por}\\ \text{riesgo crediticio}\end{array}} \geq 8\,\%$$

Los activos crediticios se deben ponderar según el siguiente cuadro[12]:

Calificación del Crédito	AAA hasta $AA-$	$A+$ hasta $A-$	$BBB+$ hasta $BB-$	Inferior a $BB-$	No Calificados
Ponderación del Riesgo	20 %	50 %	100 %	150 %	100 %

2.3.2. Reglas de Capitalización Mexicanas

Estas reglas exige a las instituciones de banca múltiple mantener un capital neto en relación con los riesgos de mercado y de crédito en que incurran en su operación[13], que no podrá ser inferior a la cantidad que resulte de sumar los requerimientos de capital por ambos tipos de riesgo.

Las Instituciones deberán clasificar sus activos y operaciones causantes de pasivo contingente, en atención al riesgo de crédito, en alguno de los siguientes grupos[14]:

V.11. Caja; depósitos, valores y créditos a cargo del Banco de México; valores emitidos o avalados por el Gobierno Federal; valores, títulos y documentos, así como créditos a cargo del Instituto para la Protección al Ahorro Bancario, así como las obligaciones garantizadas por este Instituto, distintos a los señalados en el numeral V.13, segundo y tercer párrafos; créditos al Gobierno Federal o con garantía expresa de la Federación, registrados en la

[12] Este cuadro únicamente presenta los ponderadores aplicables a empresas, sin embargo, existen diferentes ponderadores según el tipo de crédito, por ejemplo, créditos soberanos, bancos, etc.

[13] Las siguientes reglas fueron publicadas el 22 de febrero de 1999 en el Diario Oficial de la Federación por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público [31].

[14] Las clásificaciones fueron transcritas de la reglas de capitalización vigentes.

Dirección General de Crédito Público de la Secretaría; valores y créditos a cargo de o garantizados o avalados por bancos centrales o gobiernos de países cuyos títulos en el mercado estén calificados con Alto Grado de Inversión por alguna agencia calificadora de reconocido prestigio internacional; valores y créditos garantizados con los instrumentos derivados de las operaciones señaladas en la fracción I incisos b y d, fracciones II y III del artículo 46 de la Ley, siempre y cuando la garantía se constituya con pasivos a cargo de la propia Institución; operaciones de futuro (mediante contratos "normalizados y liquidaciones múltiples); compraventa al contado de divisas; operaciones de reporto, de intercambio de flujos de dinero (swap), contratos adelantados, préstamo de valores, opciones, operaciones estructuradas, paquetes de instrumentos derivados y operaciones contingentes realizadas con las personas señaladas en este numeral; así como las demás operaciones autorizadas que se asimilen a este grupo.

V.12. Depósitos, valores y créditos a cargo de o garantizados o avalados por entidades financieras filiales de la Institución o entidades financieras integrantes del grupo financiero al que pertenezca la Institución, incluidas las entidades financieras filiales de éstas, por otras instituciones y por casas de bolsa; valores y créditos a cargo de o garantizados o avalados por bancos centrales o gobiernos de países distintos de aquéllos incluidos en el numeral V.11., cuyos títulos en el mercado estén calificados con Grado de Inversión por alguna agencia calificadora de reconocido prestigio internacional; valores y créditos garantizados con los instrumentos derivados de las operaciones señaladas en la fracción I incisos b y d, fracciones II y III del artículo 46 de la Ley, siempre y cuando la garantía se constituya con pasivos a cargo de otras instituciones; depósitos, valores y créditos a cargo de o garantizados o avalados por bancos constituidos en los países incluidos en V.11., cuyos títulos en el mercado estén calificados con Alto Grado de Inversión por alguna agencia calificadora de reconocido prestigio internacional; depósitos, valores y créditos a cargo de o garantizados o avalados por sociedades nacionales de crédito, instituciones de banca de desarrollo; créditos y valores a cargo de o garantizados o avalados por fideicomisos públicos constituidos por el Gobierno Federal para el fomento económico; valores y créditos a cargo de organismos descentralizados del Gobierno Federal; operaciones de reporto, de intercambio de flujos de dinero (swap), contratos adelantados, préstamo de valores, opciones y operaciones contingentes, operaciones estructuradas y paquetes de instrumentos derivados realizadas por las personas señaladas en este numeral, así como las demás operaciones autorizadas que se asimilen a este grupo.

V.13. Créditos, valores y demás activos, así como las operaciones de reporto, de intercambio de flujos de dinero (swap), contratos adelantados, préstamo de valores, opciones, operaciones estructuradas, paquetes de instrumentos derivados y operaciones contingentes, no comprendidos en V.11. o V.12.

Los requerimientos de capital neto de las Instituciones por su exposición a riesgo de crédito se determinarán aplicando el 8 por ciento a la suma de sus activos y de otras operaciones, conforme a lo siguiente:

Los importes de los activos y de otras operaciones que deberán considerarse a efecto de determinar los requerimientos de capital por riesgo de crédito, serán los que se obtengan de aplicar, al monto de cada uno de los grupos citados, los porcentajes de ponderación de riesgo que se señalan a continuación:

GRUPOS	PORCENTAJES DE PONDERACION DE RIESGO
V.11.	0
V.12.	20
V.13.	100

2.4. Modelos de Estimación

Los métodos más conocidos para la estimación de la probabilidad de incumplimiento son:

- Métodos Econométricos: estos métodos tratan de encotrar una relación de la probabilidad de incumplimiento con variables endógenas a la empresa, como el apalacamiento, y las exógenas como factores macroeconómicos. El principal expositor es CreditPortfolioView.

- Distancia al Incumplimiento: Este tipo de métodos expresan al incumplimiento como el número de desviaciones estándar a las que se encuentra en un momento del tiempo la diferencia entre el valor de los activos y el punto de incumplimiento. Un ejemplo es el Modelo de Merton.

2.4.1. CreditPortfolio View

CreditPortfolio View fue desarrollado por McKinsey & Co. y aplica un modelo econométrico considerando las variables macroeconómicas como el desempleo o la tasa de interés. La relación[15] propuesta es la siguiente[16]:

$$p = \frac{1}{1 + exp\{\sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i + \nu_i\}}$$

Donde:

Y_i es el i-ésimo factor macroeconómico.
β_i es el coeficiente asociado al i-ésimo factor macroeconómico.
p es la probabilidad de incumplimiento del grupo.

Además propone estimar los factores macreconómicos por medio de un modelo autoregresivo de órden dos.

2.4.2. Modelo Z-Score

En 1981, Altmann [2] discute por primera vez la utilidad del análisis discriminante dentro del análisis financiero, que tenía como propósito clasificar a las empresas en dos grupos:

- Bancarrota
- No Bancarrota

La idea es que se obtiene la siguiente función de discriminante:

$$Z_t = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \ldots + \omega_n X_n$$

Donde:
$\omega_1, \ldots, \omega_n$ son los coeficientes del descriminante.

[15] Para mayor detalle véase Crouhy [13]
[16] Para mayor información acerca del modelo véase Greene [18]

$X_1, \ldots, X_n$ son las variables independientes.
Z_t Es el valor de la función descriminante o $Z - Score$.

Dentro del análisis de este tipo de modelos es importante tomar en cuenta lo siguiente:

i) Las selección de las variables.

ii) Las selección de la muestra.

iii) Las pruebas de significancia.

iv) Las selección de las variables.

v) La validación de resultados.

vi) El poder predictivo de la función discriminante.

vii) La validez de los supuestos que sustentan el modelo.

Altman analizó la información financiera de 68 corporaciones del sector manufacturero y de 22 razones financieras. Se eligieron cinco razones como los mejores predictores de quiebra corporativa:

$$X_1 = \frac{\text{capital de trabajo}}{\text{activos totales}}$$

$$X_2 = \frac{\text{utilidades retenidas}}{\text{activos totales}}$$

$$X_3 = \frac{\text{utilidades antes de impuestos e intereses}}{\text{activos totales}}$$

$$X_4 = \frac{\text{capital a valor de mercado}}{\text{pasivos totales}}$$

$$X_5 = \frac{\text{ventas}}{\text{activos totales}}$$

2.4.3. Modelo de Merton

En 1974, Robert C. Merton, identificó la falta de un desarrollo sistemático de una teoría para valuar bonos sujetos a una probabilidad de impago significativa[17].

En este trabajo, Merton parte del supuesto de que una empresa emite un bono, cuyo valor de mercado en cada momento del tiempo es función del valor --de los activos - de dicha empresa. Supone además que los activos de la empresa se comportan de acuerdo con un proceso estocástico.

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dZ \tag{2.1}$$

Donde dA_t es el cambio en el valor de los activos, μ_A es la tendencia del valor de los activos, dZ es un proceso de Wiener. Estos supuestos permiten colocar el problema en un contexto en el cual es posible utilizar la metodología de valuación de Black-Scholes[18].

Suponiendo que no existe posibilidad de reestructura o negociación y la única forma de resolver el crédito es que la empresa liquida el monto pactado dentro del plazo original y que la empresa se declara insolvente y transfiere sus activos al banco.

Tómese el caso de la empresa y suponiendo que la empresa sólo tiene un crédito, entonces si el valor de la empresa es A y el valor de la deuda al tiempo t es M, entonces la utilidad que se recibe es $A - M$. Por el contrario, si los activos de la empresa al vencimiento del crédito valen $A < M$, entonces se transfieren los activos al acreedor, por lo tanto el valor de mercado de la opción esta dado por $S_t = max(0, A_t - M)$. Este patrón de pagos es igual a una opción de call. Entonces utilizando Balck-Scholes se tiene:

$$S_t = VN_1(k + \sigma_A\sqrt{T-t}) - M\exp\{-r_F(T-t)\}N_1(k)$$

Donde:

[17] Una buena descripción está en Saunders[30]. Para ver una descripción más detallada, se sugiere consultar la fuente original, Merton[25]

[18] Véase Hull [21].

S_t = El precio de mercado de la opción call
A_t = El valor de los activos de la empresa
M = Valor de la deuda
r_F = Tasa libre de riesgo
σ_A = La volatilidad instantanea del valor activos
t = Fecha actual
T = Fecha de vencimiento
$N_1(\cdot)$ = Distribución normal acumulada
k = $\frac{\ln\left(\frac{V}{M}\right)+(r_F-\frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}}$

La probabilidad de incumplimiento será la probabilidad de que el valor de los activos sea menor al valor de la deuda, es decir, la probabilidad de que la empresa sea insolvente e incumpla con sus obligaciones es:

$$p = 1 - N_1(k)$$

y k es la distancia al incumplimiento.

2.4.4. Modelo de Geske

Geske en 1979 generaliza el modelo de Merton[19], que únicamente acepta una deuda permitiendo, con múltiples opciones de incumplimiento, deudas de corto, mediano, largo plazo, amortizaciones, etc.

Considérese que una empresa tiene deudas a corto plazo y a largo plazo. Asúmase que las deudas a largo plazo, M_2, tienen como fecha de vencimiento T_2 y las de corto plazo, M_1, tienen una fecha de vencimiento T_1, donde $T_1 < T_2$. Si el valor de la empresa al tiempo T_1 es igual a A_{T_1}, y es más grande que el valor de la deuda a corto plazo, M_1, más el valor de mercado de la deuda de largo plazo en el tiempo T_1, B_{2T_1}, entonces la empresa no está en quiebra. Esto es igual a que el valor de la opción en a la fecha T_1, después de la fecha de vencimiento de la deuda a corto plazo, M_1, sea positiva. Entonces el valor de la empresa, A_{T_1}, a la fecha de vencimiento T_1 satisface la siguiente ecuación:

$$A_{T_1} = M_1 + A_{T_1} - S_{T_1} = M_1 + A_{T_1} - A_{T_1} N(k_2 + \sigma_A\sqrt{T_2 - T_1}) + M_2 \exp\{r_{F_1}(T_2 - T_1)\} N(k_2)$$

[19] Véase Geske [17]

Resolviendo el valor de la opción al día de hoy:

$$
\begin{aligned}
S = \; & V N_2(k_1 + \sigma_A\sqrt{T_1 - t}, k_2 + \sigma_A\sqrt{T_1 - t}; \rho) - \\
& M_2 \exp\{-r_{F_2}(T_2 - t)\} N_2(k_1, k_2; \rho) - \\
& M_1 \exp\{-r_{F_1}(T_1 - t)\} N(k_1)
\end{aligned}
$$

Donde:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{\frac{T_1 - t}{T_2 - t}} \\
k_1 &= \frac{\ln \frac{V}{M_1} + (r_{F_1} - \frac{1}{2}\sigma_A^2)(T_1 - t)}{\sigma_A\sqrt{T_1 - t}} \\
k_2 &= \frac{\ln \frac{V}{M_2} + (r_{F_2} - \frac{1}{2}\sigma_A^2)(T_2 - t)}{\sigma_A\sqrt{T_2 - t}}
\end{aligned}
$$

Y $N_2(\cdot)$ es la distribución nomal bivariada.

Del modelo de Geske se puede obtener lo siguiente:

La probabilidad de que incumpla en el tiempo T_1 y en el tiempo T_2:

$$p_{T_1,T_2} = 1 - N_2(k_1, k_2; \rho)$$

La probabilidad de incumpla en el tiempo T_1:

$$p_{T_1} = 1 - N(k_1)$$

La probabilidad de que incumpla en T_2 dado que no incumplió en T_1 es:

$$p_{T_2|T_1} = 1 - \frac{N_2(k_1, k_2; \rho)}{N(k_1)}.$$

2.5. Modelos de Medición de Riesgo de Crédito

Dentro de los métodos más aceptados para medir riesgo crédito, se distinguen dos enfoques[20]:

- Modelos de Incumplimiento: estos modelos consideran que el acreditado sólo puede estar en dos estados, pago o impago, y se basan principalmente en modelos actuariales donde el siniestro ocurre o no; un acreditado paga o no paga. Dentro de este tipo de modelos está por ejemplo $CreditRisk^+$.

- Modelos de Marcar Mercado: Consideran, además de la pérdida del portafolio, el aumento o disminución del valor de los créditos debido a migración de estos a mayor o menor calidad. Dentro de este tipo de modelos está por ejemplo: $CreditMetrics^{TM}$.

2.5.1. $CreditRisk^+$

$CreditRisk^+$ es un modelo diseñado por Credit Suisse Financial Products (CSFP) en 1996[21], y supone de la misma forma que el incumplimiento entre deudores son eventos *Bernoulli independientes* y que sólo pueden estar en dos estados: *el cumplimiento o incumplimiento.*

CreditRisk+: Modelo Simple

Distribución de Incumplimiento

Sea X_k el k–ésimo acreditado dentro de una cartera de crédito donde:

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si incumple} \\ \\ 0 & \text{si no incumple} \end{cases} \tag{2.2}$$

[20] Existen una gran variedad de modelos de Medición de Riesgo de Crédito. Véase Rodolfo [20]

[21] Véase Credit Suisse [12]

Para encontrar la distribución de incumplimiento primero se encuentra a la función generadora de probabilidad.

Sea p_k la probabilidad de incumplimiento del k–ésimo acreditado, entonces la función generadora de probabilidades[22] de cada acreditado está dada por:

$$F_{X_k}(s) = \sum_{i=0}^{1} P_{X_k}(x_k = i)s^i = 1 + p_k(s-1) \tag{2.3}$$

Suponiendo independencia entonces la función generadora de probabilidad de toda la cartera es:

$$F(s) = \prod_{i=1}^{N} F_{X_k}(s) = \prod_{i=1}^{N}(1 + p_k(s-1)) \tag{2.4}$$

Donde N es el total de acreditados. Al tomar logaritmos de ambos lados

$$\ln F(s) = \sum_{i=1}^{N} \ln(1 + p_k(s-1))$$

Comúnmente las probabilidades de incumplimieto son pequeñas, entonces para valores muy pequeños de p_k[23]:

$$\ln(1 + p_k(s-1)) \approx p_k(s-1)$$

Lo que indica intuitivamente es que, dado independencia y mientras la probabilidad de incumplimiento sea pequeña, la probabilidad de que un acreditado incumpla más de dos veces es practicamente despreciable.

Por lo tanto:

$$F(s) = \exp\{\sum_{i=1}^{N} p_i(s-1)\} = \exp\{\mu(s-1)\}$$

Donde $\mu = \sum_{i=1}^{N} p_i$

[22] La función generadorea de probabilidad se define como $F_X(s) = E(S^x)$.

[23] Esto se puede verificar descomponiendo al $\ln(1 + p_k(s-1))$ bajo la serie de Taylor y las potencias de $p_k(s-1)$ son despresiables.

La función generadora de probabilidades anterior se identifica como la función generadora de probabilidades de una *Poisson con parámetro* μ[24], entonces la probabilidad de que incumplan n acreditados es:

$$P_N(N = n) = \frac{1}{n!}\mu^n \exp\{-\mu\}$$

Es importante mencionar lo siguiente:

- El único parámetro de la distribución es μ que no depende de las exposiciones en la cartera.
- No es necesario que los acreditados tengan la misma probabilidad de incumplimiento, de hecho, cada acreditado podría tener su propia probabilidad de incumplimiento.

Agrupación por bandas de exposición

CreditRisk$^+$ empieza a agrupar a los deudores en bandas de exposición semejantes. Aunque esta agrupación introduce un error de redondeo en la estimación de la distribución, facilita el desarrollo del modelo.

Supóngamos que la pérdida esperada de cada deudor que cae en impago, es una proporción fija λ_i del monto D_i que debe el i-ésimo deudor, y supóngase que el nivel de exposición que representa el deudor para el acreedor L_i, es un múltiplo entero de una unidad fija de pérdida L. Este múltiplo recibe el nombre de: Niveles de exposición estándar. Así, la pérdida que puede representar el incumplimiento del deudor i para el acreedor, se mide en términos de múltiplos v_i, de la unidad fija de pérdida L y es simplemente:

$$v_i = redondeo\left(\frac{\lambda_i D_i}{L}\right)$$

De esto se obtiene el nivel estádar de exposición que representa cada deudor para el acreedor mediante $L_i = Lv_i$.

Así la cartera puede dividirse en m bandas de exposición indexadas por i, donde $1 \leq i \leq m$. Con respecto a las bandas de exposición, definiremos lo siguiente:

[24]Aunque se puede expander por serie de Taylor y se puede observar que es la distribución Poisson

Referencia	Símbolo
Exposición para la j-ésima banda en unidades de L	v_j
Pérdida esperada en la j-ésima banda en unidades de L	ϵ_j
Número esperado de incumplimientos en la j-ésima banda	μ_j

Para empezar el deudor sólo puede estar en dos estados según la definición 2.2 por lo tanto:

$$\mu_j = \sum_{\{i|v_i=v_j\}} p_i$$

Además de que la siguiente relación se mantiene, expresando la relación entre la pérdida esperada en términos v_j y μ_j

$$\epsilon_j = v_j \times \mu_j \tag{2.5}$$

Distribución de Pérdida

Para generar la distribución de pérdida, *CreditRisk+* primero genera la función generadora de probabilidad, después la expande por serie de Taylor, algo muy similar a lo que se hace para el modelo simple.

Sea $G(Z)$ la función generadora de probabilidades expresada en múltiplos de una unidad fija de pérdida L:

$$G(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{pérdida acumulada} = nL)Z^n$$

Asumiendo independencia entre las bandas de exposición, la función generadora de probabilidad es igual a $G(Z) = \prod_{i=1}^{m} G_i(Z)$ donde m es el número total de bandas.

Primero se calculará una expresión de $G_i(Z)$:

$$G_i(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{n incumplan})Z^{nv_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\{-\mu_i\}\mu_i^n}{n!} Z^{nv_i} = \exp\{-\mu_i + \mu_i Z^{v_i}\}$$

Así:

$$G(Z) = \prod_{i=1}^{m} \exp\{-\mu_i + \mu_i Z^{v_i}\} = \exp\{-\sum_{i=1}^{m} \mu_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i Z^{v_i}\} \tag{2.6}$$

Sea $P(Z)$:

$$P(Z) = \frac{\sum_{j=1}^{m} \mu_j Z^{v_j}}{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\epsilon_j}{v_j}\right) Z^{v_j}}{\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\epsilon_j}{v_j}\right)}$$

Y además se puede verificar lo siguiente:

$$G(Z) = \exp\{\mu(P(Z) - 1)\} = F(P(Z))$$

$G(Z)$ expresa matemáticamente la composición de dos fuentes de incertidumbre para la distribución de pérdida: la primera que es el comportamiento Poisson del incumplimiento y la segunda la variabilidad del monto de las exposiciones dentro de la cartera. Esta distribución se conoce como "Poisson Compuesta".

Puesto que $G(Z)$ es la función generadora de probabilidad, para encontrar las probabilidades de la distribución se necesita aplicar:

$$P(\text{perder nL}) = \frac{1}{n!} \frac{d^n G(Z)}{dZ^n}\bigg|_{Z=0} = A_n$$

$G(Z)$, dada en la expresión 2.6, entonces:

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n G(Z)}{dZ^n}\bigg|_{Z=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dZ^{n-1}} \left(G(Z) \frac{d}{dZ} \sum_{j=1}^{m} \mu_j Z^{v_j} \right)\bigg|_{Z=0}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^{n-k-1}}{dZ^{n-k-1}} G(Z) \frac{d^{k+1}}{dZ^{k+1}} \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j Z^{v_j} \right)\bigg|_{Z=0}$$

Analizando:

$$\frac{d^{k+1}}{dZ^{k+1}}\left(\sum_{j=1}^{m}\mu_j Z^{v_j}\right)\Bigg|_{Z=0} = \begin{cases} \mu_j(k+1)! & \text{Si } k = v_j - 1 \text{ para algún } j \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Y por definición:

$$\frac{d^{n-k-1}}{dZ^{n-k-1}}G(Z)\Bigg|_{Z=0} = (n-k-1)!A_{n-k-1}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{\substack{k \leq n-1 \\ k = v_j - 1}} \frac{1}{n!}\binom{n-1}{k}(k+1)!(n-k-1)!\mu_j A_{n-k-1} \\ &= \sum_{\substack{k \leq n-1 \\ k = v_j - 1}} \frac{1}{n}(k+1)\mu_j A_{n-k-1} \end{aligned}$$

Dado que $k = v_j - 1$ entonces $k + 1 = v_j$ y la formula quedará de la siguiente forma:

$$A_n = \sum_{j|v_j \leq n} \frac{\mu_j v_j}{n} A_{n-v_j}$$

Por último utilizando la relación $\epsilon_j = v_j \times \mu_j$ que se mencionó en 2.5 en se obtiene:

$$A_n = \sum_{j|v_j \leq n} \frac{\epsilon_j}{n} A_{n-v_j} \tag{2.7}$$

Donde $A_0 = G(0) = F(P(0)) = \exp\{-\mu\} = \exp\{-\sum_{j=1}^{m} \frac{\epsilon_j}{v_j}\}$[25].

[25] Es importante mencionar que si una de las bandas v_j fuera igual a cero entonces $P(0) \neq 0$.

Lo anterior se conoce como fórmula recursiva y esto se debe a que la distribución Poisson compuesta hereda las propiedades de la distribución Poisson la cual es recursiva.

Precisión bajo Bandas de Exposición

En el capítulo anterior se habló que las bandas de exposición son útiles siempre y cuando el número el número de exposiciones es grande y el ancho de las bandas es pequeño, pero no se trató de medir el error de dicha aproximación. En esta sección trataremos de encotrar el error que provocan las bandas de exposición.

En términos de la notación expuesta en el capítulo pasado, el valor esperado y la desviación estandar [26] estan dados por:

$$\epsilon = \sum_{j=1}^{m} \epsilon_j \ ; \ \ \sigma^2 = \sum_{j=1}^{m} v_j \epsilon_j$$

Para facilitar la estimación del error supondremos que v_j se redondea hacia el número entero mayor. Este proceso introduce el siguiente error:

$$\hat{v}_j = v_j + \tau_j \ \text{ donde } \ 0 \leq \tau_j \leq 1$$

El valor esperado no se afecta ya que el valor esperado no depende de las bandas de exposición.

Sin embargo para la desviación estandar:

$$\sigma^2 \leq \hat{\sigma}^2 = \sum_{j=1}^{m} \hat{v}_j \times \epsilon_j = \sigma^2 + \sum_{j=1}^{m} \tau_j \times \epsilon_j \leq \sigma^2 + \sum_{j=1}^{m} \epsilon_j = \sigma^2 + \epsilon$$

Se puede concluir que:

- El valor esperado no se afecta por el uso de las bandas de exposición
- La varianza se sobreestima y dependerá directamente del valor esperado.

[26] Ambos resultados se pueden verificar utilizando la distribución generadora de probabilidades.

Modelo Completo

Es intuitivamente cierto pensar que la probabilidad de incumplimiento depende de tanto factores idiosincráticos como a factores macroeconómicos. El modelo completo de *CreditRisk*$^+$ modela asociando la probabilidad de incumplimiento con factores macroeconómicos, donde cada factor se distribuye como una gamma.

Distribución de incumplimiento

Para iniciar supondremos que el incumplimiento está afectado por un solo factor al cual lo llamaremo X_k. Si el incumplimiento de cada sector se distribuye como una Poisson con parámetro X_k y a su vez X_k se distribuye como una Gamma con parámetros α_k y β_k, entonces la distribución del sector será:

$$\begin{aligned} P(z_k) &= \int_0^\infty P(z|x_k)f(x_k|\underline{\mathrm{z_k}})dx_k \\ &= \int_0^\infty \frac{\exp\{-x_k\}x_k^z}{z!}\frac{(\beta_k)^{\alpha_k+}}{\Gamma(\alpha_k+)}{x_k}^{\alpha_k+-1}\exp\{-(\beta_k+n)x_k\}dx_k \qquad (2.8) \\ &= \binom{\alpha_k++Z-1}{z}\left(\frac{\beta_k}{\beta_k+1}\right)^{\alpha_k+}\left(\frac{1}{\beta_k+1}\right)^{z_k} I_{\{z_k=0,1,\ldots\}} \end{aligned}$$

Que es una distribución Binomial Negativa con parámetros $p = \frac{1}{\beta_k+1}$ y $r = \alpha_k$.

Sí el portafolio está dividido en varios sectores entonces, el comportamiento total de la cartera será una suma de variables aleatorias distribuidas como Binomiales Negativas donde cada Z_k tendrá los parámetros $p_k = \frac{1}{\beta_k+1}$ y $r_k = \alpha_k$.

Distribución de Pérdida

Para encontrar la distribución de pérdida la función generadora de probabilidades, así que la función generadora de probabilidad estará dada por:

$$G_k(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{n incumplán})Z^n$$

Sin embargo, igual que en el modelo simple, Sea $P_k(Z)$:

$$P_k(Z) = \frac{\sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{c_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} \right) Z^{v_j^{(k)}}}{\sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{c_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} \right)}$$

Ahora cada polinomio estará definido para cada sector y de la misma forma que el modelo simple se puede verificar que:

$$G_k(Z) = F_k(P_k(Z))$$

De acuerdo a la ecuación 2.6 se tiene:

$$\exp\{-\sum_{A \epsilon k} X_A + \sum_{A \epsilon k} X_A Z^{v_k}\} = \exp\{X_k(P_k(z) - 1)\} \tag{2.9}$$

La expresión 2.9 puede ser vista de la misma forma que 2.6, sólo que hay una misma expresión 2.9 para cada sector. Ahora para generar la función generadora de probabilidades de cada sector, estará dada por:

$$\begin{aligned} G_k(Z) &= \int_0^\infty \exp\{X_k(P_k(Z) - 1)\} f_k(X_k) dX_k \\ & \left(\frac{\beta_k}{1 - P_k(Z) + \beta_k} \right)^{\alpha_k} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ahora si tenemos n sectores, la función generadora de probabilidades es igual a:

$$G(Z) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\beta_k}{1 - P_k(Z) + \beta_k} \right)^{\alpha_k}$$

Para encontrar la distribución de pérdida se genera la siguiente recursión. Supongamos que $G(Z)$ se puede representar como una serie de Taylor:

$$G(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n Z^n$$

$G(Z)$ satisface la siguiente relación:

$$\frac{d}{dZ}(\ln G(Z)) = \frac{1}{G(Z)}\frac{dG(Z)}{dZ} = \frac{A(Z)}{B(Z)}$$

Donde A y B son polinomios dados por:

$$\begin{aligned} A(Z) &= a_0 + \ldots + a_r Z^r \\ B(Z) &= b_0 + \ldots + b_s Z^s \end{aligned}$$

Primero veremos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} B(Z)\frac{dG}{dZ} &= A(Z)G \\ \left(\sum_{j=0}^{s} b_j Z^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(n+1)A_{n+1}Z^n\right) &= \left(\sum_{j=0}^{s} a_j Z^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} A_n Z^n\right) \end{aligned}$$

Ahora para que ambos polinomios sean iguales entonces se debe de cumplir que:

$$\sum_{i=0}^{min(r,s)} a_j A_{n-i} - \sum_{j=0}^{min(s,n)} b_j(n+1-j)A_{n+1-j} = 0$$

Esto es equivalente a:

$$A_{n+1} = \frac{1}{b_0(n+1)}\left(\sum_{i=0}^{min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=0}^{min(s-1,n-1)} b_{j+1}(n-j)A_{n-j}\right) \quad (2.11)$$

Así para

$$G(Z) = \left(\frac{\beta_k}{1 - P_k(Z) + \beta_k}\right)^{\alpha_k}$$

Tomando el logaritmo y derivando obtenemos:

$$\frac{G'(Z)}{G(Z)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{G'(Z)}{G_k(Z)}$$

Así si definimos como $\frac{A(Z)}{B(Z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{G'(Z)}{G_k(Z)}$ podemos encontrar la distribución de pérdida.

Análisis con descomposción de sectores

Como se vió anteriormente la función generadora de probabilidades del portafolio es igual al producto de las funciones generadoras de cada sector, es decir:

$$G(z) = \prod_{k=1}^{n} G_k(z) = \prod_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} \exp\{x_k(P_i(z) - 1)\} f_k(x_k) dx_k$$

Esta misma expresión se puede reacomodar de la siguiente forma:

$$G(z) = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} exp\{\sum_{k=1}^{n} x_k(P_k(Z) - 1)\} \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k) dx_k$$

Usando la ecuación 2.9 tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(P_k(Z) - 1) = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\frac{\sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\epsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} \right) Z^{v_j^{(k)}}}{\sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\epsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} \right)} - 1 \right) = \sum_{A,k} \delta_{A,k} \frac{X_k \epsilon_A}{\mu_k v_A} (Z^{v_A} - 1)$$

Donde:

$$\delta_{A,k} = \begin{cases} 0 & A \notin k \\ 1 & A \in k \end{cases}$$

Para generalizar el concepto, *CreditRisk*$^+$ cambia $\delta_{A,k}$ por $\theta_{A,k}$ tal que:

$$\theta_{A,k} : \sum_{i=1}^{n} \theta_{A,k} = 1$$

Entonces la ecuación anterior se transforma por:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(P_k(Z) - 1) = \sum_{A,k} \theta_{A,k} \frac{x_k \epsilon_A}{\mu_k v_A} (Z^{v_A} - 1)$$

2.5.2. $CreditMetrics^{TM}$

Este modelo fue desarrolado en 1997 con el apoyo de varios grupos[27], el primero que desarrollo este modelo fue J.P. Morgan. Este tipo de modelos es considerado dentro de los modelos de marcar mercado, es decir, además de considerar las pérdidas por incumplimiento, consideran las pérdidas del valor de los activos por la migración de la calidad de la deuda.

Este modelo, a diferencia de $CreditRisk^{+}$, necesita las probabilidades de transición. Básicamente la idea de este modelo es valuar un bono en cada momento del tiempo como si fuera a ser negociado.

Modelo Simple

El concepto es valuar bonos tradicionalmente, es decir, traer los flujos a valor presente tomando en cuenta a todos los estados a los que puede pasar el bono y para el estado de impago se aplican las tasas de recuperación.

Supóngase que se tiene un bono que paga un cupón anual fijo del 8 %, y vence en cuatro anõs. Sean:

- C_t^i = Cupón que paga el bono actualmente calificado con i en el periodo t.

- d_t^j = Tasa de descuento que se debe aplicar al flujo generado por un bono de calificación j en el periodo t[28].

- V = Valor nominal del bono.

- $V_{i,j}$ = Valor de un bono actualmente calificado con i, que dentro de un año migra al estado j.

[27]Véase *CreditMetrics* [19]

[28]*CreditMetrics* propone calcularlas por medio de la tasa *forward* tomando como estructura de tasas la de los bonos cupón cero, pero la tasa de interés puede ser obtenida de cualquier forma.

El precio del bono esta dado por:

$$V_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i^k}{(1+d_i^k)} + \frac{C_n^k}{1+d_n^k}$$

Para obtener la media y la varianza se aplica la siguiente fórmula:

$$\text{media} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} V_{ij}$$

$$\text{varianza} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(V_{ij} - \text{media})^2$$

Donde p_i es la probabilidad de pasar del estado i al estado j.

Determinación del Valor de los Activos

El modelo de *CreditMetrics*^{tm} supone que existe una relación entre la calificación de su deuda y el valor de la empresa. Para lograr dicha relación, *CreditMetrics*^{tm} hace uso del modelo de Merton y de la calificación de la deuda de la empresa[29].La idea se esquematiza en la figura 2.1.

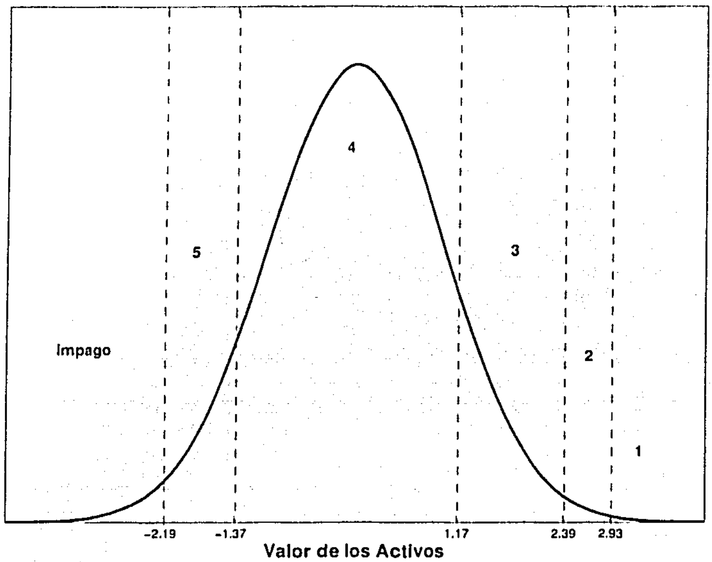
Para disociar las carácterísticas particulares de un deudor se utiliza la distribución normal estándar, por ejemplo, si se tiene la siguiente matriz de transición:

Calificación inicial	1	2	3	4	5	6
1	0.8760	0.0810	0.0290	0.0140	0.0000	0.0000
2	0.0250	0.8860	0.0610	0.0150	0.0060	0.0070
3	0.0020	0.0250	0.8340	0.0740	0.0130	0.0230
4	0.0000	0.0000	0.0360	0.8370	0.0940	0.0330
5	0.0000	0.0000	0.0060	0.0000	0.8080	0.1860
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Supóngase que el valor de la deuda de una empresa esta calificado inicialmente con 4 y la probabilidad de que incumpla es igua a 0.0230, por lo tanto, el umbral que determina el nivel de activos es igual a:

[29] El supuesto de que las probabilidades de transición proviene de una distribución normal y el cambio de probabilidad de un estado a otro esta dado en términos de la desviacion estándar.

Figura 2.1: Calificaciones de un bono como múltiplos de la desviación estándar



$$p_{4,6} = \int_{\lambda_6^4}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{x^2}{2}\} dx = 0.033$$

Entonces $\lambda_6^4 = -1.838425305$. En general, la fórmula es la siguiente:

$$p_{i,j} = \int_{\lambda_{j-1}^i}^{\lambda_j^i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{x^2}{2}\} dx$$

Conociendo el valor esperado y la varianza del valor de los activos de la empresa entonces se puede conocer el valor futuro de la empresa utilizando la siguiente relación:

$$\lambda_i = \frac{\Delta A_j - \mu}{\sigma}; \text{ es decir: } \Delta A_j = \mu + \lambda_i \sigma \text{ y } A_j = A_0(1 + \Delta A_j)$$

Una vez calculados los umbrales se puede encontrar la probabilidad conjunta de migración utilizando una normal multivariada de la siguiente forma:

$$p_{(c_i^1, c_{i+1}^1), \ldots, (c_i^n, c_{i+1}^n)} = \int_{\lambda_i^1}^{\lambda_j^1} \cdots \int_{\lambda_i^n}^{\lambda_j^n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} V^{\frac{1}{2}}} \exp\{-\frac{1}{2} Y^t V^{-1} Y\} dY$$

Modelo Completo

El modelo en su versión completa se hace muy complejo al número de cálculos asciende a C^n donde C es el número de calificaciones y n es el total de bonos, por lo que se propone un modelo de simulación que consta de los siguiente:

Suponiendo que el cambio en calificación de la deuda de una empresa depende del valor de los activos de una empresa y de acuerdo al modelo de Merton, esto se hace posible utilizando la distribución normal.

Sea $X \in \Re^n$ donde cada x_i son i.i.d. y $x_i \sim N(0,1)$ $i = 1, \ldots, n$; sea Σ la matriz de varianzas y covarianzas y A la factorización de Cholesky[30]. Entonces

[30] Si una matriz, M, es simétrica y definida positiva entonces se puede descomponer como $M = AA'$ donde A es una matriz triangular inferior, a esta descomposición se llama "Descomposición de Cholesky".

$$Y = AX \sim N(0, \Sigma)$$

Una vez obtenidas los vectores resta asignarles a cada bono un precio de acuerdo a las calificaciones obtenidas y así determinar el valor de la cartera bajo cada uno de los escenarios simulados.

2.6. Tasas de Recuperación

En realidad un acreditado no incumple su deuda de manera total, es decir, el incumplimieto puede ser de forma parcial, por eso se introduce el concepto de "Tasas de Recuperación" que es el monto parcial de la deuda con el que el acreditado puede cumplir. El concepto se aplica de la siguiente manera:

Supóngase que se considera una tasa de recuperación del 30 %, esto quiere decir qe el acréditado, dado el incumplimiento, pagará el 30 % del monto de la deuda total, por lo tanto se espera que el acreditado, dado incumplimiento, deje de pagar el 70 % de su deuda.

A pesar de que ste concepto no es muy realista pero si muy fácil de aplicar, se aplica el modelo de *CreditRisk*$^+$ y en muchos más modelos[31] y actualmente ya es muy aceptado dentro de la administración de riesgo de crédito.

Según la Comisión Nacional Bancaria y de Valores [11] menciona aunque el acréditado no incumpla con la totalidad de la deuda, la institución prestamista deberá de reservar el 100 % de la deuda. Esta regla se inicio en enero de 1997 y trajo grandes cambios en el requerimiento de capital, sin embargo, la posición de la Comisión fue conservadora y discutía que cuando un acreditado no pagaba la totalidad de su deuda éste daba indicios de que no podía pagar la deuda por lo tanto era necesario reservar el 100 % de la deuda.

[31] Por ejemplo CyrCe [24] aplica el mismo concepto.

Capítulo 3

Bonos

3.1. Mercados Financieros

El encuentro entre la oferta y la demanda de una determinada mercancía se produce en su correspondiente mercado. Si en este encuentro surge el acuerdo, se producen las compraventas, caracterizadas por su precio, por la cantidad de mercancía intercambiada y por la fecha pactada para su entrega y pago.

Por lo tanto, *los mercados financieros* es cuando la mercancía pactada en él son instrumentos financieros, es decir, un reconocimiento de deuda a favor de su poseedor, para quien es un activo, y en contra de su emisor, para quien es un pasivo.

Los mercados financieros se dividen en dos, de acuerdo a la naturaleza en que los recursos pasan de los oferentes a los demandantes [1]:

i) **Sistema Bancario:** en este mercado los bancos actuan como intermediarios y las operaciones de crédito se realizan en forma directa a los intermediarios. Por un lado el Banco capta recursos directamente, emitiendo instrumentos de captación y convirtiéndose en deudor y por otra parte coloca directamente los recursos convirtiéndose en acreedor. Ambas operaciones son independientes, siendo el Banco quien asume el riesgo de los deudores y los ahorradores asumen el riesgo del Banco.

[1] Para mayor detalle véase Gonzalo [7]

ii) **El Mercado de Valores:** en este mercado los recursos son captados por el emisor directamente de los inversionistas. Para esto, los títulos representativos de pasivos o capital se fraccionan y se colocan a través de la Bolsa de Valores mediante Oferta Pública[2], de tal manera que cada inversionista adquiere una parte del pasivo o capital representado por un título, el cual confiere al titular los derechos sobre su inversión. Las operaciones se realizan en forma de colocación de capital fraccionado (acciones), o bien, en forma de una colocación de un crédito (títulos de deuda). Suelen actuar como intermediarios las Casas de Bolsas para la colocación de las inversiones, sin embargo, el riesgo es asumido por el inversionista no por la Casa de Bolsa.

3.1.1. Mercado de Valores

El Mercado de Valores es un submercado del Mercado Financiero que cumple una función importante para fomentar el crecimiento de las empresas y, por lo tanto para el desarrollo de la economía; por un lado, para las empresas constituye una fuente de recursos de deuda para programas de expansión y/o respaldo de proyectos; y por el otro, ofrecen a los ahorradores alternativas de inversión.

El Mercado de Valores puede ser subdividido en submercados de acuerdo a la naturaleza de las operaciones que en él se realizan.

De acuerdo a la naturaleza de la oferta, el Mercado de Valores se divide en: **Mercado Primario y Mercado Secundario.** El mercado primario está compuesto por colocaciones de nueva emisión, resultado de aumentos en el capital o en el pasivo de las empresas que aportan recursos frescos; en el mercado secundario se conforma de las transacciones que ya han sido colocadas en el mercado primario, este mercado no aporta dinero a las empresas sino constituyen un cambio de tenedor de los títulos.

De acuerdo a la naturaleza del instrumentos que se operen: **Mercado de Capitales, Mercado de Dinero y Mercado de Metales.** En el mercado de capitales el instrumento que operan son instrumentos de capital, por

[2]La Oferta Pública es un proceso para la suscripción de compra o venta de títulos a través de la Bolsa de Valores que realiza por medio de un aviso público.

ejemplo, acciones, obligaciones; en el mercado de dinero el instrumento que se opera es el dinero, dentro de este mercado se encuentran, por ejemplo, los bonos gubernamentales, papel comercial, pagarés, etc.; en el mercado de metales el instrumento que se opera son los metales amonedados, por ejemplo, centenarios y onzas troy[3].

3.2. Bonos

3.2.1. Definición de Bono

Un bono es un título de deuda de mediano o largo plazo emitido por un agente financiero, el cual se compromete a pagar a una contraparte, tenedor del bono, un monto pactado más los intereses generados durante el plazo de vigencia.

Un bono esta compuesto por los siguientes elementos:

- El valor nominal o nocional del bono: este valor se expresa al frente del bono.
- El valor de rescate o principal: es el monto que se paga al vencimiento. En la gran mayoría de las veces, el valor de rescate es igual al valor nominal,por lo que también es llamado nominal, pero algunas veces el valor de rescate difiere al valor de bono.[4].
- La tasa de cupón son los intereses que el emisor esta dispuesto a pagar por cada periodo. El monto de los intereses pagados por cada periodo es llamado cupón. Por ejemplo si la tasa de cupón es del 8 % y el principal es de $1,000 entonces el valor del cupón es igual a $80.
- La tasa de rendimiento o tasa de descuento es la tasa ganada por el tenedor del bono.

[3] El mercado de metales es el mercado con menor importancia de acuerdo a las operaciones que en él se realizan.

[4] Por lo general, el valor de rescate es igual al valor nominal, de hecho, Todos los bonos gubernamentales su valor nominal es igual al valor de rescate. Algunos autores no definen el valor de rescate y al mismo valor nominal también lo nombran como "Principal", por ejemplo, Fabozzi[15]. En este trabajo se nombrará indistíntamente valor de rescate, nocional, nominal o principla.

- La fecha de vencimiento de cada cupón es la fecha donde el emisor del bono se compromete a pagar los intereses generados.
- La fecha de vencimiento del bono es la fecha donde se paga el último cupón y el valor nominal.

3.2.2. Clasificación de los Bonos

Los bonos se clasifican, según el tipo de colateral, en:

i) *Senior (secured):* Son bonos preferentes o con garantía de algún tipo, que estan respaldados por un derecho legal sobre una propiedad específica del emisor en caso de incumplimiento. Por ejemplo, la emisión de bonos hipotecarios estan garantizados sobre un bien raíz.

ii) *Unsecured:* Estos bonos estan respaldados sólo por la promesa del emisor de pagar intereses y el principal en un periodo determinado.

iii) *Subordinado (junior):* El tenedor posee un derecho sobre los activos e ingresos del emisor. Respecto a los bonos junior, el último en el orden de prelación es el bono sobre ingresos, en el cual los intereses sobre el mismo es pagado por el emisor sólo si son generados dichos ingresos o si existen utilizades suficientes.

Los bonos también se clasifican, según las características del emisor, y son: bonos del gobierno federal y sus filiales, gobiernos municipales y corporaciones.

3.2.3. Bonos Gubernamentales

En esta sección se utilizarán dos conceptos importantes que son la definición de precio limpio y precio sucio:

- Precio sucio es el precio calculado en el momento en la que se transfiere la posesión del bono.
- Precio limpio es el precio calculado en la fecha de transferencia de la posesión del bono menos el valor de cupón acumulado.

Los bonos gubernamentales en México son los siguientes: Cetes, Bondes, Bonos M3, M5 y M0, Udibonos, Brems, IPAB, PICS y UMS[5].

CETES

Su nombre completo es Certificados de la tesorería de la federación y son los instrumentos de deuda bursátil más antiguos emitidos por el gobierno federal. Su emisión inicio desde 1978. Estos títulos pertenecen a la familia de los bonos cupón cero, esto significa que no devengan intereses en el transcurso de su vida y liquidan su valor nominal en la fecha de vencimiento. Su valor nominal es de \$10 . En la actualidad los plazos a los que se comercializan son a 28, 91, 180 y 364 días. La colocación primaria de estos títulos se realiza mediante subastas, en la cual los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y la tasa de descuento que están dispuestos a pagar. Estos títulos también se operan en el mercado secundario, en la actualidad se pueden realizar operaciones de compra-venta en directo y en reporto, así como operaciones de préstamo en valores. También pueden ser utilizados como activo subyacente en los mercados de instrumentos derivados (futuros y opciones).

La clave para identificar a los Cetes es mediante la letra "B" seguido de un espacio en blanco y por la fecha de vencimiento (año, mes y día), por ejemplo, "B 000921", esto quiere decir, que es un CETE con vencimiento el 21 de septiembre de 2000.

Valuación de CETES

El precio de un CETE se puede calcular a partir de su tasa de rendimiento o de su tasa de descuento, el precio final puede variar ligeramente en función del número de cifras decimales que se ocupen.

A partir de la tasa de rendimiento, el precio de un CETE se puede calcular utilizando la siguiente fórmula:

$$P = \frac{VN}{1 + \frac{rt}{360}} \tag{3.1}$$

[5]A continuación se hará una descripción de los Cetes, Bondes, Bonos M3, M5 y M0, Udibonos y Brems. Si desea información véase la página www.banxico.org.mx.

donde:

P = Precio del CETE (redondeado a 7 decimales)
VN = Valor nominal del título en pesos
r = Tasa de rendimiento anual
t = Plazo en días del CETE

UDIBONOS

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Unidades de Inversión (UDIS) fueron creados en 1996 cuya finalidad es proteger al tenedor ante cambios inesperados en la tasa de inflación. Los UDIBONOS se colocan a largos plazos y pagan intereses cada seis meses en función de una tasa de interés real fija que se determina en la fecha de emisión del título. Su valor nominal es de 100 UDIS. El plazo de emisión es de múltiplo de 182 días, pero hasta la fecha estos títulos se han emitido a plazos de 3, 5 y 10 años. El pago de intereses es en pesos y cada seis meses. La tasa de interés es fijada por el Gobierno Federal y se publica en la convocatoria a la subasta de valores gubernamentales. Para calcular los intereses se aplica la siguiente fórmula:

$$I_j = VN \frac{N_j * TC}{360}$$

donde:

I_j = Intereses por pagar al final del periodo j
TC = Tasa de interés anual del cupón j
VN = Valor nominal de títulos en unidades de inversión
N_j = Plazo en días del cupón j

La colocación primaria de estos títulos es mediante subasta, en la cual los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y el precio denominado en UDIS que están dispuestos a pagar.

Los títulos se identifican con la letra "S" seguido del plazo y del año, mes y día (año,mes,día), por ejemplo, "S3040106" significa UDIBONOS a 3 años con vencimiento el 6 de enero de 2004.

Valuación de UDIBONOS

Para valuar los IDIBONOS se utiliza la siguiente fórmula:

$$P = \sum_{i=1}^{k} C_i F_i + F_k * VN - \left(C_1 \frac{d}{N_1} \right)$$

donde:

P	=	Precio limpio del BONO (redondeado a 5 decimales)
VN	=	Valor nominal del título
K	=	Número de cupones por liquidar, incluyendo el vigente
d	=	Número de días transcurridos del cupón vigente
N_j	=	Plazo en días del cupón j
C_j	=	Cupón j, el cual se obtiene de la siguiente manera
TC	=	Tasa de interés anual del cupón
F_j	=	Factor de descuento para el flujo de efectivo j
r_j	=	Tasa de interés relativa para descontar el cupón

El factor de descuento es igua a $F_j = \frac{1}{\left(1 + r_j \frac{N_j}{360}\right)^{j - \frac{d}{N_1}}}$ y el valor del cupón se calcula: $C_j = VN \frac{N_j * TC}{360}$.

BONDEST

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con pago trimestral de interés (BONDEST) se ubican dentro de la familia de los valores gubernamentales a tasa flotante, esto significa que pagan intereses en perodos predeterminados y revisan su tasa de interés en cada uno de esos periodos. Tiene un valor nominal de 100 pesos y se emiten en plazos múltiplos de 91 días, sólo que hasta la fecha, se han emitido en plazos de 1092 días (3 años). El pago de intereses se hace de forma trimestral y su tasa de interés es la misma que la de los CETES a 91 días en su colocación primaria o al que sustituya a éste en caso de días inhábiles, correspondiente a la semana en que empiezan a devengarse los intereses. Para calcular los intereses se aplica la siguiente fórmula:

$$I_j = VN\frac{N_jTC_j}{360}$$

donde:

I_j	=	Intereses por pagar al final de periodo j
TC_j	=	Tasa de interés anual del cupón j
VN	=	Valor nominal del título en pesos
N_j	=	Plazo en días del cupón j

Los títulos, en el mercado primario, se colocan mediante subasta, en la cual los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y el precio que están dispuestos a pagar.

Se identifican con la letra "LT" seguido del año, mes y día (año,mes,día), por ejemplo, "LT030306" significa: BONDEST con vencimiento el 6 de marzo de 2003.

Valuación de BONDEST

La fórmula es la siguiente:

$$P = \sum_{i=1}^{k} C_jF_j + F_kVN - \left(C_1\frac{d}{N_1}\right)$$

donde:

P	=	Precio limpio del BONDE (redondeado a 5 decimales)
VN	=	Valor nominal del título
K	=	Número de cupones por liquidar, incluyendo el vigente
d	=	Número de días transcurridos del cupón vigente
N_j	=	Plazo en días del cupón j
C_j	=	Cupón j
TC_j	=	Tasa de interés anual que paga el cupón j
F_j	=	Factor de descuento para el flujo de efectivo j

El valor del cupon se calcula de la siguiente $C_j = VN\frac{N_jTC_j}{360}$ y el factor de descuento $F_j = \frac{1}{\left(1+(r_j+s_j)\frac{N_j}{360}\right)^{j-\frac{d}{N_1}}}$, donde r_j es la tasa con al que se descuentan los flujos y s_j es la sobretasa asociada al cupón j[6].

BONDES182

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con pago semestral de interés y protección contra la inflación pertenecen a la familia de los valores gubernamentales a tasa flotante, que son títulos que pagan intereses en periodos predeterminados y revisan su tasa de interés en cada uno de esos periodos. En adición, los BONDES182 ofrecen en cada uno de los periodos de interés una protección contra cambios inesperados en la inflación, lo cual garantiza que el título nunca pueda pagar una tasa real negativa. El valor nominal es de 100 pesos. El plazo de la emisión de los BONDES es en múltiplos de 182, pero sólo se han emitido bonos por plazos a 1820 días (5 años). Los títulos devengan intereses por cada 6 meses o en plazos que se sustituya en días hábiles. La tasa de interés se calcula de la fórmula siguiente:

$$\text{Tasa de interés} = \text{Tasa de referencia} + \text{Protección contra la inflación}$$

La tasa de referencia es la tasa de rendimiento para los CETES a un plazo de 182 días, en su colocación primaria. En aquellos casos cuando el incremento porcentual da la unidad de inversión (UDI) sea mayor a la tasa de los CETES a 182 días; el título paga al tenedor, además de la tasa de referencia, una prima adicional que se determina como la diferencia entre el aumento porcentual del valor de la UDI y la tasa de rendimiento de los CETES a 182 días:

$$\text{Protección contra la Inflación} = \left[\left(\frac{UDI_{j_{N_j}}}{UDI_{j_1}} - 1\right) - CETES182_j\left(\frac{N_j}{360}\right)\right]\frac{360}{N_j}$$

[6] En la fórmula de valuación se debe notar que cuando $j = 1$, los valores N_1, TC_1, r_1 y s_1, son conocidos (son los valores correspondientes al primer cupón), esto implica que para poder valuarla es necesario estimar los valores de N_j, TC_j, r_j y s_j para $j = 2, 3, \ldots, K$.

donde:

$$
\begin{aligned}
UDI_{jN_j} &= \text{Valor de la UDI correspondiente al día del pago del cupón } j \\
UDI_{j_1} &= \text{Valor de la UDI correspondiente al primer da del cupón } j \\
N_j &= \text{Plazo en días del cupón } j \\
CET182_j &= \text{Tasa de interés de los CETES 182 días} \\
&\quad\ \text{de la subasta primaria al inicio del cupón } j
\end{aligned}
$$

Los intereses se calculan tomando los días transcurridos entre la fecha de pagos de los mismos, tomando como base año 360 días. La fórmula es la siguiente:

$$I_j = VN\frac{N_jTC_j}{360}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
I_j &= \text{Intereses por pagar al final del periodo } j \\
TC_j &= \text{Tasa de interés anual del cupón } j \\
VN &= \text{Valor nominal del título en pesos}
\end{aligned}
$$

Los títulos se colocan mediante subasta, en la cual los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y el precio que están dispuestos a pagar.

Se identifican con la letra "LS" seguido del plazo y del año, mes y día (año,mes,día), por ejemplo, "LS040106" significa: BONDET con vencimiento el 6 de enero de 2004.

Valuación de los BONDES182

La fórmula es la siguiente:

$$P = \sum_{j=1}^{k} C_jF_j + F_kVN - \left(C_1\frac{d}{N_1}\right)$$

donde:

P	=	Precio limpio del BONDE (redondeado a 5 decimales)
VN	=	Valor nominal del título
K	=	Número de cupones por liquidar, incluyendo el vigente
d	=	Número de dias transcurridos del cupon vigente
N_j	=	Plazo en dias del cupón j
C_j	=	Cupón j
F_j	=	Factor de descuento

Para calcular el valor del cupón se aplica la siguiente fórmula:

$$C_j = VN\frac{N_j TC_j}{360}$$

TC_j es la tasa de interés que paga el cupón j:

$$TC_j = max\left\{CETES182_j, \left(\frac{UDI_{j_{N_j}}}{UDI_{j_1}} - 1\right)\frac{360}{N_j}\right\}$$

Y el factor de descuento es calculado:

$$F_j = \frac{1}{(1 + (r_j + s_j)\frac{N_j}{360})^{j-\frac{d}{N_1}}}$$

donde r_j es la tasa de interés de descuento y s_j es la sobretasa.

En la expresin anterior se debe notar que cuando $j = 1$, los valores N_1,TC_1,r_1 y s_1, son conocidos (son los valores correspondientes al primer cupón), esto implica que para poder valuarla es necesario estimar los valores de N_j,TC_j,r_j y s_j para $j = 2, 3, \ldots, K$.

Bonos

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de Interés Fija (BONOS) son la familia de valores gubernamentales de más reciente creación que se encuentran a disposición del público inversionista. Estos instrumentos son emitidos y colocados a plazos mayores a un año, pagan intereses cada seis meses y, a diferencia de los BONDES, la tasa de interés se determina en la emisión del instrumento y se mantiene fija a lo largo de toda la vida del mismo. Tienen un valor nominal de 100 pesos y se emiten en plazos como múltiplos de 182, pero estos títulos se han emitodo por plazos de 3 a 5 años. El pago de intereses se hace por cada 6 meses y la tasa de interés que pagan estos títulos es fijada por el Gobierno Federal en la emisión de la serie y es dada a conocer al público inversionista en la Convocatoria de la Subasta de Valores Gubernamentales. Los intereses se calculan aplicando la siguiente fórmula:

$$I_j = VN\frac{N_jTC}{360}$$

donde:

I_j	=	Intereses por pagar la final de periodo j
TC	=	Tasa de interés anual del cupón
VN	=	Valor nominal del título en pesos

Los títulos, en el mercado primario, se colocan mediante subastas en el cual los participantes presentan sus posturas por el monto que desean adquirir y el precio que estan dispuestos a pagar.

Los BONOS se identifican con la letra "M", seguido del plazo y del año, mes y día (año,mes,día), por ejemplo, "M3040106" significa BONOS a 3 años con vencimiento el 6 de enero de 2004.

Valuación de BONOS

La fórmula es la siguiente:

$$P = \sum_{j=1}^{k} C_jF_j + F_kVN - (C_1\frac{d}{N_1})$$

donde:

$$
\begin{aligned}
P &= \text{Precio limpio del BONO (redondeado a 5 decimales)} \\
VN &= \text{Valor Nominal} \\
k &= \text{Números de cupones por liquidar, incluyendo el vigente} \\
d &= \text{Número de días transcurridos del cupón vigente} \\
N_j &= \text{Plazo en días del cupón } j \\
C_j &= \text{Cupón } j \\
F_j &= \text{Flujo de descuento} \\
r_j &= \text{Tasa de interés relevante para descontar los flujos}
\end{aligned}
$$

El valor del cupón se calcula $C_j = VN\frac{N_jTC}{360}$ y el factor de descuento es igual a $F_j = \frac{1}{(1+r_j)^{j-\frac{d}{N_1}}}$

BREMS

Son bonos emitidos por El Banco de México llamados Bonos de Regulación Monetaria con el propósito de regular la liquidez en el mercado de dinero y facilitar con ello la conducción de la política monetaria. Su valor nominal es de 100 pesos. Se emiten en plazos múltiplos de 28 días, pero sólo se han emitodo en plazos de 3 y 1 año. Los intereses se pagan cada 28 días y se calculan utilizando la siguiente fórmula:

$$TC_j = \left[\prod_{i=1}^{N_j}\left(1+\frac{r_i}{360}\right) - 1\right]\frac{360}{N_j}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
TC_j &= \text{Tasa de interés anual del cupón } j \\
N_j &= \text{Plazo en días del cupón } j
\end{aligned}
$$

r_i es la "Tasa Ponderada de Fondeo de Títulos Bancarios" correspondiente al día i. Esta tasa es calculada por el El Banco de México mediante la siguiente fórmula: $r_t = \dfrac{\sum_j r^{pb}_{j,t}pb_{j,t} + r^{ab}_{j,t}ab_{j,t} + r^{cd}_{j,t}cd_{j,t}}{\sum_j pb_{j,t} + ab_{j,t} + cd_{j,t}}$,donde: $pb_{j,t}$ = El monto de la operación número j con pagaré bancario, ya sea en directo o en reporto realizada entre instituciones financieras el día t, con plazo a vencimiento de un día hábil, $r^{pb}_{j,t}$ = La tasa de interés de la operación número j con pagaré bancario, ya sea en directo o en reporto realizada entre instituciones financieras el día t, $ab_{j,t}$ = el monto de la operación número j con aceptaciones bancarias, ya sea en directo o en reporto realizada entre instituciones financieras el día t, con plazo a vencimiento de un día hábil, $r^{ab}_{j,t}$ = La tasa de interés de la operacin número j con aceptaciones bancarias, ya sea en directo o en reporto realizada entre instituciones financieras el día t, $cd_{j,t}$ = el monto de la operación número j con certificados de depósito, ya sea en directo o en reporto realizada entre instituciones financieras el día t, con plazo a vencimiento de un día hábil, $r^{cd}_{j,t}$ = La tasa de interés de la operación número j con certificados de depósito, ya sea en directo o en reporto realizada entre instituciones financieras el día t.

Para calcular los intereses se aplica la siguiente fórmula:

$$I_j = VN\frac{N_jTC_j}{360}$$

donde:

$$\begin{aligned} I_j &= \text{Intereses por pagar la final del periodo } j \\ TC_j &= \text{Tasa de interés anual del cupón } j \\ VN &= \text{Valor nominal del título en pesos} \end{aligned}$$

Los títulos se colocan mediante subasta, en la cual los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y el precio que están dispuestos a pagar.

Los BREMS se identifican con la letra "XA", seguido del año, mes y día (año,mes,día), por ejemplo, "XA040106" significa BREMS con vencimiento el 6 de enero de 2004.

Valuación de BREMS

Para valuar los BREMS se aplica la siguiente fórmula:

$$P = \sum_{j=1}^{k} C_j F_j + F_k VN - I_{idev_1}$$

donde:

P	=	Precio limpio del BREM (redondeado a 5 decimales)
VN	=	Valor nominal del título
K	=	Número de cupones por liquidar, incluyendo el vigente
d	=	Número de días transcurridos del cupón vigente
N_j	=	Plazo en días del cupón j
jC	=	Cupón j
TC_j	=	Tasa de interés anual del cupón j
F_j	=	Factor de descuento para el flujo de efectivo j

Donde el factor de descuento se calcula $F_j = \frac{1}{(1+(r_j+s_j)\frac{N_j}{360})^{j-\frac{d}{n_1}}}$ r_j es la tasa de descuento y s_j es la sobretasa ambas asociadas al cupón j.

3.2.4. Riesgos Asociados por la Adquisición de Bonos

Un bono esta expuesto por uno o más de los siguiente riesgo[7]:

Riesgo de Tasa de Rendimiento

Este riesgo se refiere a los cambios que puede tener el precio del bono debido a los cambios en la tasa de rendimiento. Cuando la tasa de rendimiento aumenta el precio del bono diminuye y viceversa. Esto sucede si la tasa de interés es positiva pero si la tasa de rendimiento fuera negativa entonces sucedería lo contario, un ejemplo fué en la crisis de 1995 donde por la necesidad de obtener dólares los tesobonos pagaban tasas negativas.[8].

Riesgo de Reinversión

Muchas de las veces el flujo de efectivo es reinvertido. El ingreso adicional debido a tal reinversión es llamado *intereses sobre intereses*. Este riesgo se

[7] Fabozzi [15] menciona otros tipos de riesgos.

[8] En el cápitulo 4 se analizará con más detalle

refiere a los cambios que puedan sufir la tasa de reinversión.

Riesgo de Inflación

Este riesgo se refiere a los cambios que pueda tener los flujos de efectivo debido a los cambios en la tasa de inflación.

Riesgo de Tipo de Cambio

Este riesgo es principalmente para los bonos que pagan en una moneda diferente a la doméstica y se refiere a la apreciación o depreciacón de la moneda extranjera con la moneda doméstica.

Riesgo de Liquidez

Este riesgo se refiere a la facilidad con la que un bono se puede vender lo más cercano a su valor en libros. La primera medida de liquidez es el diferencial que existe entre el precio ofrecido (bid price) y el precio demandado (ask price). Si el tenedor piensa en conservar el bono hasta la fecha de vencimiento entonces el riesgo de liquidez no es relevante.

Riesgo de Crédito

Este riesgo se refiere a la posibilidad de que el deudor incumpla con las obligaciones pactadas.

Capítulo 4

Riesgo de Crédito y Valuación de Bonos

Los bonos son intrumentos financieros muy utilizados dentro del mercado como medio de financiamiento, sin embargo, es necesario conocer el valor del bono en una fecha determinada. Para encontrar el valor del bono se harán los siguientes supuestos:

i) La fecha de pago de las obligacionse será de forma vencida a una fecha determinada.

ii) El bono tendrá una fecha de vencimiento.

ii) La tasa de interés es constante y conocida a lo largo de todo el periodo.

Se utilizará la siguiente notación:

- El precio del bono estará denotado por P
- El valor nocional del bono estará denotada por c: este valor se expresa al frente del bono. También será llamado valor de rescate.
- El monto del cupón estará denotado por f_t.
- La tasa de rendimiento del bono estará denotada por i.
- El número de periodos estará denotado por n.
- La tasa de cupón denotada por r ($r = \frac{f_t}{c}$). Esta tasa se ocupa para conocer el monto del cupón.

4.1. Precio de un Bono libre de riesgo

4.1.1. Precio de un Bono en fechas de pago de cupón

El precio del bono es igual al valor presente de los cupones más el valor nominal, es decir:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^{n} f_t(1+i)^{-k} + c(1+i)^{-n} \\ &= f_t\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) + c(1+i)^{-n} \end{aligned} \tag{4.1}$$

La ecuación anterior es llamada la fórmula básica.

La siguiente fórmula es llamada fórmula de prima/descuento y se obtiene a partir de la ecuación 4.1:

$$\begin{aligned} P &= f_t\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) + c(1+i)^{-n} \\ &= f_t\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) + c(1 - i\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)) \\ &= c + (f_t - ci)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Y por último la fórmula de Makeham:

$$\begin{aligned} P &= f_t\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) + c(1+i)^{-n} \\ &= \frac{f_t}{c}c\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) + c(1+i)^{-n} \\ &= c(1+i)^{-n} + \frac{f_t}{iC}(c - c(1+i)^{-n}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Los cálculos anteriores se hicieron tomando como punto de partida la fecha de emisión del bono, pero también se puede valuar un bono desde un periodo diferente, es decir, $t \neq 0$ [1] hasta la fecha de vencimiento. Si el bono es valuado en una fecha diferente a la fecha de emisión se llamará *Valor en libro* y se denorará como B_t. De aqui se puede concluir que $B_0 = P$. Por ejemplo si se quiere valuar el bono desde el periodo m hasta la fecha de vencimiento n $(m < n)$, entonces el valor en libros es igual a:

$$B_m = f_t \left(\frac{1 - (1 + i)^{-(n-m)}}{i} \right) + c(1 + i)^{-(n-m)}$$

4.1.2. Precio de un Bono entre fechas de pago de cupón

Sea B_t y B_{t+1} el valor en libro de dos fechas consecutivas de pago de cupón, entonces se puede deducir la siguiente fórmula recursiva:

$$B_{t+1} = B_t(1 + i) - F_t$$

Si se deseará vender el bono en un periodo entre pago de cupón entonces el nuevo poseedor del cupón recibirá, al final del periodo, el pago del cupón pero el precio traerá la porción del pago del cupón que le pertenece al primer poseedor. Ese valor es nombrado como *cupón acumulado* y se denotará como f_{t_k}. De aqui se puede notar que $f_{t_0} = 0$ y que $f_{t_1} = f_t$.

Como se definió en el capítulo anterior el **precio sucio del bono** es el precio calculado en el momento en la que se transfiere la posesión del mismo, denotada como B^s_{t+k} y el **precio limpio de un bono** es el precio calculado en la fecha de transferencia de la posesión menos el valor de cupón acumulado, denotado como B^l_{t+k}. De las definiciones anteriores se deduce que:

$$B^s_{t+k} = B^l_{t+k} + f_{t_k} \quad \text{para } 0 < k < 1$$

[1] t es una fecha de pago de cupón.

Existen 3 maneras para calcular le precio de un bono en fechas entre pago de cupón [2], pero únicamente se presentará la más utilizada.

De acuerdo a la definición de precio sucio, el precio sucio es igual a:

$$B^{s}_{t+k} = B_t(1+i)^k$$

Suponiendo linealidad, el valor acumulado del cupón es proporcional al valor del cupón, es decir:

$$f_{t_k} = kf_t$$

Así que el valor límpio del bono es igual a:

$$B^{l}_{t+k} = B(1+i)^k - kf_t$$

Este método es llamado *método semiteórico.*

4.1.3. Prima y descuento

El concepto de prima y descuento tiene una vinculación con la ecuación 4.2.

Si el precio del bono P es mayor al valor de recate c entonces se dice que es transferido con una prima, y a la diferencia entre P y c se le llama *Prima.* Así mismo, si el precio del bono P es menor que el valor de rescate c entonces se dice que es tranferido con un descuento, y la diferencia entre c y P se le llama *descuento.*

[2] Véase Kellison [22].

Según las definiciones anteriores se llega a las siguientes fórmulas.

$$\begin{aligned}
\text{Prima} &= P - c \\
&= (f_t - ic)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \\
&= c\left(\frac{f_t}{c} - i\right)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \quad \text{si } \frac{f_t}{c} > i
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\text{Descuento} &= c - P \\
&= (ic - f_t)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \\
&= c\left(i - \frac{f_t}{c}\right)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \quad \text{si } i > \frac{f_t}{c}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

El concepto de prima y descuento es análogo, sólo que si la prima es negativa se denomina descuento y viceversa.

4.1.4. Duración y Convexidad

El precio del valor del bono depende del valor presente de los cupones y del valor de rescate. Comunmente dicho precio es mayor o menor al valor de rescate originando una pérdida o ganacia. La pérdida o ganancia dependará de la tasa de interés, es decir, si la tasa de interés es mayor el precio del bono es menor y viceversa, esto se puede verificar a continuación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial i} &= \sum_{j=1}^{n} f_t(1+i)^{-j} + c(1+i)^{-n} \\
&= -f_t\sum_{j=1}^{n} j(1+i)^{-j-1} - nc(1+i)^{-n-1}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Como se puede observar existe una relación inversa entre la tasa de interés y el precio de un bono, como se muestra en la gráfica 4.1, pero además esta será mayor si aumenta el plazo del vencimiento. Esto da origen a la *teoría de preferencia de liquidez* que dice que los inversionistas tiene una mayor preferencia por los activos de corto plazo a los de largo plazo, debido a que los activos a largo plazo son más sensibles a cambios en la tasa de interés. Según la gráfica 4.1, el precio del bono es sensible a los cambios en la tasa de interés, pero es necesario saber que tan sensible puede ser. La Convexidad y la duración son medidas que ayudan a medir la sensibilidad que tiene el precio del bono respecto a la tasa de interés.

Duración

A pesar de que hay dos diferentes fórmulas para medir la duración se debe de entender como el cambio del precio del bono debido a un ligero cambio en la tasa de interés.

La duración de Macaulay se define de la siguiente forma:

Definición 4.1 *La duración de Macaulay, denotada como d, se define como:*

$$d = -\frac{\partial P}{\partial i}\frac{(1+i)}{P} \tag{4.7}$$

Se concidera a $(1+i)$ como la proporción de Macaulay por lo que se llega a la siguiente definición.

Definición 4.2 *La duración Modificada, denotada como md, se define como:*

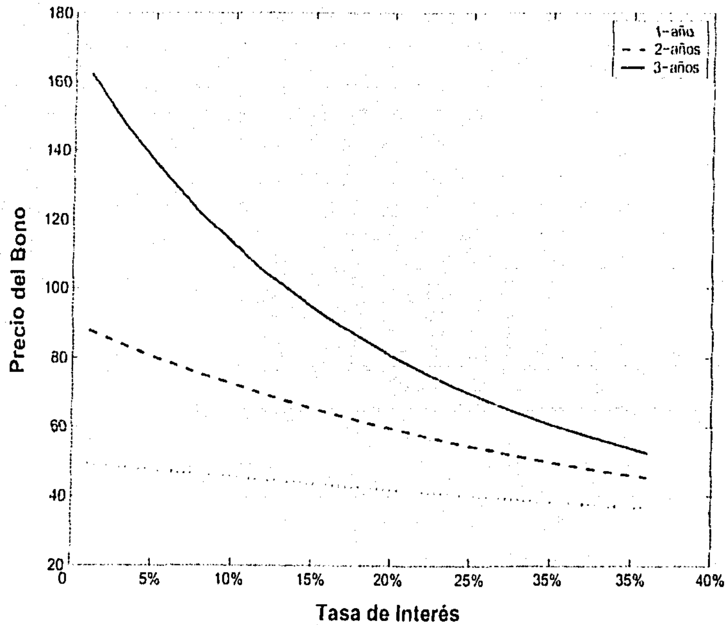
$$md = \frac{d}{(1+i)} \tag{4.8}$$

Es importante notar que cuando la tasa de interés aumenta la duración disminuye.

Convexidad

La duración es una aproximación para cambios pequeños en la tasa de interés, pero si los cambios en la tasa de interés son mas grandes la duración no

Figura 4.1: Precio del Bono y Tasa de Interés



captura la convexidad del precio. La Convexidad es una medida que captura la curvatura del precio de un bono para cambios más grandes.

Utilizando la serie de Taylor para aproximar el cambio del precio:

$$dP = \frac{dP}{di}di + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{di^2}(di)^2 + \text{error} \tag{4.9}$$

Ahora dividiendo la ecuacuón 4.8 por el precio del bono:

$$\frac{dP}{P} = \frac{dP}{di}\frac{1}{P}di + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{di^2}\frac{1}{P}(di)^2 + \frac{\text{error}}{P} \tag{4.10}$$

El primer término de la ecuación anterior es la duración modificada, el segundo término de la ecuación incluye la segunda derivada de la ecuación que es usada como una medida aproximada para la relación de la convexidad entre el precio del bono y la tasa de interés.

Definición 4.3 *La segunda derivada dividido por el precio es una medida del cambio porcentual del precio del bono debido a la convexidad o simplemente llamada convexidad:*

$$Convexidad = \frac{d^2P}{di^2}\frac{1}{P} \tag{4.11}$$

4.2. Precio de un Bono bajo Riesgo de Crédito

4.2.1. Precio de Cada Cupón

Sea I_t una variable aleatoria tal que:

$$I_t = \begin{cases} 0 & \text{Si el cupón en el periodo } t \text{ es pagado} \\ \\ 1 & \text{Si el cupón en el periodo } t \text{ no es pagado} \end{cases}$$

Con una función de densidad:

$$P(I = i|\theta) = \theta^i (1-\theta)^{1-i} I_{\{i=0,1\}} \tag{4.12}$$

Definición 4.4 *Sea Z_t la variable aleatoria que denota el monto pagado del cupón en el periodo t[3], definida de la siguiente manera:[4]:*

$$Z_t = (f_t - I_t f_t)(1+i)^{-t} \tag{4.13}$$

La variable aleatoria Z_t puede tomar valores de 0 ó $f_t(1+i)^{-t}$.

La función masa de probabilidad de Z_t está dada por:

$$p_{Z_t}(Z_t = z) = \begin{cases} 1-\theta_t & \text{Si } z = f_t(1+i)^{-t} \\ \theta_t & \text{Si } z = 0 \end{cases}$$

Y el valor esperado y la varianza son:

$$E(Z_t) = (f_t - f_t\theta_t)(1+i)^{-t} \tag{4.14}$$

$$Var(Z_t) = (f_t^2\theta_t(1-\theta_t))(1+i)^{-2t} \tag{4.15}$$

Por último la función de distribución de Z_t es:

$$F_{Z_t}(z) = \begin{cases} 0 & \text{Si } z < 0 \\ \theta_t & \text{Si } 0 \leq z < \frac{f_t}{(1+i)^t} \\ 1 & \text{Si } z \geq \frac{f_t}{(1+i)^t} \end{cases} \tag{4.16}$$

Distribución de la Probabilidad de Incumplimiento

Si conociéramos el parámetro θ entoces la distribución de la variable aleatoria I sería la ecuación 4.12, pero en la realidad no se conoce la probabilidad θ. Así que propondremos una familia de distribuciones que represente nuestro

[3]La misma definición de variable será aplicado para el valor de resacate

[4]Esta definición fué tomada del modelo de riesgo individual. Véase Bowers [8] o véase Bühlmann [9].

nivel de credibilidad acerca de la ocurrencia del evento.

A pesar de que para modelar cualquier problema uno puede utilizar cualquier distribución para θ en este caso utilizaremos la distribución *Beta* aprovechando que pertenece a la familia conjugada de la distribución *Bernoulli*.

Entonces si θ se distribuye como una *Beta* con parámetros a, b, la distribución está dada por:

$$P(\theta) \;\propto\; \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}I_{(0<\theta<1)} \tag{4.17}$$

Utilizando el teorema de Bayes para encontrar la distibución final obtenemos lo siguiente:

$$P(\theta\,|\,\mathrm{x}) \;\propto\; \theta^{a+\sum_{i=1}^{n}x_i-1}(1-\theta)^{b+n-\sum_{i=1}^{n}x_i-1}I_{(0<\theta<1)} \tag{4.18}$$

Lo que significa que es una distribución $Beta(a+\sum_{i=1}^{n}x_i, b+n-\sum_{i=1}^{n}x_i)$.

Distribuciones Predictivas

La primera distribución es la **distribución predictiva inicial**. que esta dada por:

$$P(x_i) = \int_{\Theta} P(x_i\,|\,\theta)P(\theta)d\theta = \frac{\beta(a+x_i, b+1-x_i)}{\beta(a,b)}I_{\{x_i=0,1\}}$$

Dado que

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

y además

$$\Gamma(x+1) \;=\; x\Gamma(x)$$

$$P(x_i) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{x_i}\left(\frac{b}{b+a}\right)^{1-x_i} I_{\{x_i=0,1\}} \tag{4.19}$$

Que es una *Bernoulli* con parámetro $\frac{a}{a+b}$

La siguiente distribución es la **distribución predictiva final**, que esta dada por:

$$P(x_i \mid \mathbf{x}) = \int_{\Theta} P(x \mid \theta) P(\theta \mid \mathbf{x}) d\theta$$

Y haciendo lo mismo que la distribución predictiva inicial:

$$P(x_i \mid \mathbf{x}) = \left(\frac{a + \sum_{j=i}^{n} x_j}{a+b+n}\right)^{x_i}\left(\frac{b+n-\sum_{j=1}^{n} x_j}{a+b+n}\right)^{1-x_i} I_{\{x_i=0,1\}} \tag{4.20}$$

Que es una distribución *Bernoulli* con parámetro $\frac{a+\sum X_i}{a+b+n}$.

En esta distribución la probabilidad de incumplimiento estará dada por $\frac{a+\sum X_i}{a+b+n}$ donde a, b son los parámetros de la distribución inicial y $\sum x_i$ es el número de acreditados que caen en incumplimiento una vez observadas y n es el total del número de observaciones muestrales.

Este resultado permite hacer correcciones a la información inicial por ejemplo supóngase que se tiene una cartera de 100,000 acréditados y se espera esperamos que deacuedo a la información inicial, 2,000 de ellos caigan en incumplimiento entonces la probabilidad de incumplimiento si no hay información muestral es $p = \frac{2,000}{100,000} = 0.02$ pero supóngase que se tiene la siguiente información muestral:

número de acreditados	acreditados que incumplen
94,500	4,725

Figura 4.2: Distribución Beta con $\alpha = 20$ y $\beta = 980$

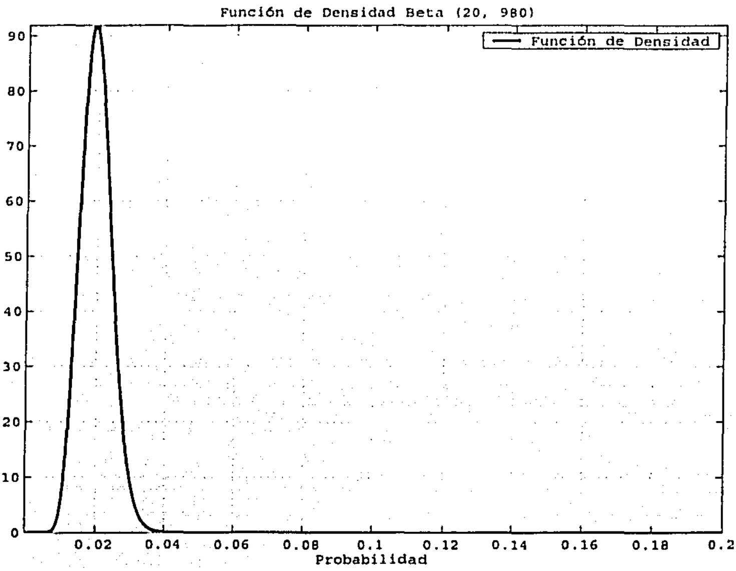
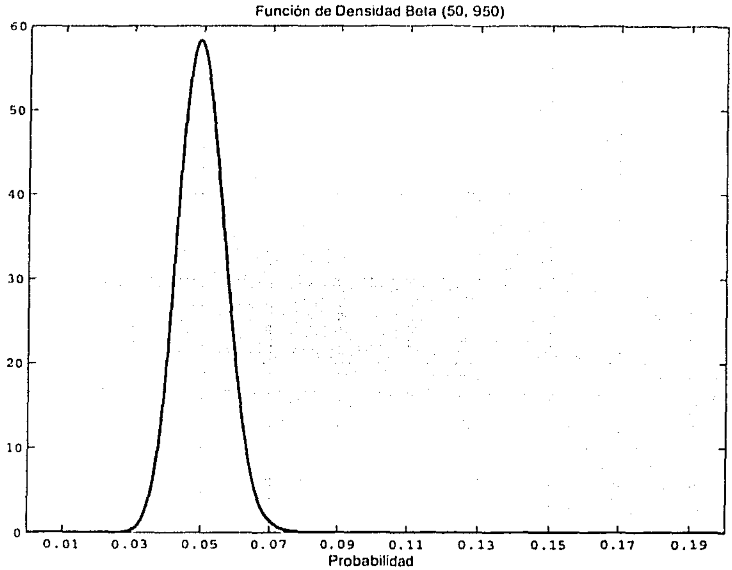


Figura 4.3: Distribución Beta con $\alpha = 50$ y $\beta = 950$



Antes de obtener con que probabilidad se distribuye $P(x_i \mid \mathbf{x})$ es necesario observar lo siguiente: la probabilidad de incumplimiento observada de acuerdo a la información muestral es $\frac{4,725}{94,500} = 0.05$ y es mayor a la que de acuerdo a la información inicial se tenía, así que intuitivamentene la probabilidad de incumplimiento debe de incrementar.

4.2.2. Estimación de la Probabilidad de Incumplimiento

Se entenderá por **Incumplimiento** como la falta de pago de alguna de sus obligaciones financieras[5].

Una vez definido el incumplimiento es importante conocer las causas por las cuales una persona física o moral incumple: (Robert C. Merton[25] define al incumplimiento al momento en donde el valor de los activos de la empresa es menor al valor de la deuda contraida).

Solvencia es la capacidad finaciera (capacidad de pago) de la empresa para cumplir sus obligaciones, o sea una relación entre lo que una empresa tiene y lo que debe. Y la **liquidez** es tener el efectivo necesario en el momento oportuno que nos permita hacer el pago de los compromisos anteriormente contraidos.[6]

Del concepto de liquidez podemos decir que si una empresa no es liquida entonces incumplirá con sus obligaciones. Así que la probabilidad de incumplimiento se entenderá como una relación de liquidez.

[5]Esta definición es tomada de Standar & Poor's [32] hecha el 19 de abril de 2001. La Comisión Nacional Bancaria y de Valores define al *Concurso Mercantil* como a cualquier persona física o moral, con carácter de comeciante, incumpla generalizadamente en el pago de sus obligaciones. La definición que se manejará de incumplimiento será un poco más rigurosa, ya que desde el primer momento que no efectue una empresa el pago de sus obligaciones se considerará como incumplimiento. Para mayor información véase la circular de la CNBV número 1488[11].

[6]Véase Acosta[1]

Sea $A(t)$ el valor del activos circulantes[7] de una empresa en el tiempo t tal que cumplen con los siguientes procesos stock:

$$dA(t) = \mu_t A_t dt + A_t \sigma_t W(t) \qquad \text{Con } A(0) > 0 \tag{4.21}$$

Donde W es un proceso Wiener estandar y μ_t es una funciones tal que: $\int_0^T |\mu_s| ds \leq \infty$ [8].

Por el lema de Ito el proceso:

$$A(t) = A_0 \exp^{\sigma W(t) + (\int_0^t \mu_s ds - \frac{\sigma^2 t}{2})} \tag{4.22}$$

Es la solución de 4.21[9] .

Suponiendo que una empresa incumple cuando el valor de los activos circulantes a un tiempo dado, t, es menor al valor de los pasivos con vencimiento en el tiempo t, d_t[10], entonces la probabilidad de incumplimiento al tiempo t es la probabilidad de que la empresa no sea líquida al tiempo t[11]. Sea p_t la probabilidad de incumplimiento que esta dada por:

$p_t = Pr(\frac{A(t)}{d_t} \leq 1)$

Al tomar logaritmos es igual:

[7] Se utilizarán los activos circulates ya que son todos aquellos activos que se pueden convertir rápidamente en efectivo.

[8] Estas funciones representan las expectativas del analista sobre el crecimiento de la empresa en su nivel de activo.

[9] Si se desea valuar el valor de los activos sobre estados discretos, también el valor de los activos se puede definir como un proceso stock sobre estados discretos según la definición 1.22, los resultados serán iguales.

[10] Donde el valor de los pasivos con vencimiento en t es conocido

[11] Si $\frac{A(t)}{d_t}$ es menor que uno entonces el valor de los activos será menor que el valor de los pasivos. La idea de esta relación se tomó a partir del concepto de razones financieras más en concreto de la razón de solvencia, sólo que dicha razón utiliza el valor de los pasivos circulante y aqui se utilizará el valor de todos los pasivos con vencimiento en t.

$$
\begin{aligned}
Pr(\ln \tfrac{A(t)}{d_t} \leq 0) &= Pr(\ln A(t) - \ln d_t \leq 0) \\
&= Pr(\sigma W(t) + \textstyle\int_0^t \mu_s ds - \tfrac{\sigma^2 t}{2} \leq \ln \tfrac{d_t}{A_0}) \\
&= Pr(\sigma W_t + \textstyle\int_0^t \mu_s ds - \tfrac{\sigma^2 t}{2} \leq \ln \tfrac{d_t}{A_0}) \\
&= Pr(W \leq \frac{\ln \frac{d_t}{A_0} - \int_0^t \mu_s ds + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma})
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la probabilidad de incumplimiento es igual a:

$$
\begin{aligned}
p_t &= Pr(W(t) \leq \frac{\ln \frac{d_t}{A_0} - \int_0^t \mu_s ds + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma}) \\
&= Pr(\sqrt{t} Z \leq \frac{\ln \frac{d_t}{A_0} - \int_0^t \mu_s ds + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma}) \qquad (4.23) \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{d_t}{A_0} - \int_0^t \mu_s ds + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sqrt{t}\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{w^2}{2}} dw
\end{aligned}
$$

Debido a que las empresas incumplen según su nivel de liquidez y como cada empresa tiene diferentes niveles de liquidez, entonces difícilmente se encontrará una muestra aleatoria, así que la distribución que se utilizará será la distribución inicial.

Según la ecuación 4.29, la probabilidad de incumplimiento se calcula por medio de la expresión $\left(\frac{a}{a+b}\right)$ entonces se puede decir que $p_t = \frac{a}{a+b}$, esto nos ayudará a encontrar la distribución de donde proviene la probabilidad de incumplimiento. En el ejercicio 4 del siguiente cap'ıtulo se muestra la forma de encontrar la distribución inicial con la finalidad de conocer los niveles máximos a los que puede llegar la probabilidad de incumplimiento.

4.2.3. Precio del Bono en Fechas de Pago de Cupón bajo Riesgo Crédito

Según la ecuación 4.1, el precio del bono es igual al valor presente de los cupones más el valor de rescate, por lo tanto:

Definición 4.5 *Sea S la variable aleatoria que denota el precio del bono definida como:*

$$S = \sum_{t=1}^{n} Z_t + (1+i)^{-n}(c - cI_n) \tag{4.24}$$

Donde Z_t es la variable aleatoria definida en 4.4.

Antes de calcular la función de distribución, la covarianza entre Z_r, Z_j es igual a:

$$\begin{aligned}
Cov(Z_r, Z_j) &= E(Z_r, Z_j) - E(Z_t)E(Z_j) \\
&= E((1+i)^{-r}(1+i)^{-j}(f_r - I_r f_r)(f_j - I_j f_j)) - \\
&\quad E((1+i)^{-r}(f_r - I_r f_r))E((1+i)^{-j}(f_j - I_j f_j)) \\
&= (1+i)^{-r}(1+i)^{-j}(f_r f_j - f_r p_j f_j - f_j p_r f_r + E(I_r f_s I_j f_j)) - \\
&= (1+i)^{-r}(1+i)^{-j}(f_r - p_r f_r)(f_j - p_j f_j) \\
&= (1+i)^{-r}(1+i)^{-j}(E(I_r f_s I_j f_j) - p_r f_r p_j f_j)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
E(I_r f_s I_j f_j) &= E(I_s I_j) f_s f_j \\
&= Pr(I_s = 1, I_j = 1) f_j f_s
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que la probabilidad de que incumpla en el periodo s y que incumpla en el periodo j $(s < j)$ es igual a la probabilidad de que el valor de los activos en el periodo s sea menor o igual al valor de los pasivos con vencimiento en s y que la probabilidad de que el valor activos en el periodo j sea menor al valor de los pasivos con vencimiento en j, esto quiere decir:

$$\begin{aligned} Pr(I_s = 1, I_j = 1) &= Pr(\tfrac{A_s}{P_s} < 1, \tfrac{A_j}{P_j} < 1) \\ &= Pr(\textstyle\int_0^s \mu_t dt - \frac{\sigma^2 s}{2} + \sigma W_s \leq \ln \frac{P_0}{A_0}, \int_0^j \mu_t dt - \frac{\sigma^2 j}{2} + \sigma W_j \leq \ln \frac{P_0}{A_0}) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{P_0}{A_0} - \int_0^s \mu_t dt + \frac{\sigma^2}{2} s}{\sqrt{s}\sigma}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{P_0}{A_0} - \int_0^j \mu_t dt + \frac{\sigma^2}{2} j}{\sqrt{j}\sigma}} \frac{1}{2\pi |R|^{\frac{1}{2}}} \exp^{W^t R^{-1} W} dW \end{aligned}$$

Donde $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{s}{t}} \\ \sqrt{\frac{s}{t}} & 1 \end{pmatrix}$[12], que es la una distribución acumulada de una normal bivariada con vector de medias igual a cero y matriz de varianza-covarianza R

Bajo el mismo razonamiento $Pr(I_s = 0, I_j = 1)$ es igual a la probabilidad de que el valor de los activos en el tiempo s sea mayor al valor de los pasivos y que el valor de los activos en el tiempo j sea menor al valor de los pasivos, es decir:

$$Pr(I_s = 1, I_j = 0) = \int_{\frac{\ln \frac{P_0}{A_0} - \int_0^s \mu_t dt + \frac{\sigma^2}{2} s}{\sqrt{s}\sigma}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{P_0}{A_0} - \int_0^j \mu_t dt + \frac{\sigma^2}{2} j}{\sqrt{j}\sigma}} \frac{1}{2\pi |R|^{\frac{1}{2}}} \exp^{W^t R^{-1} W} dW$$

De la misma forma $Pr(I_{t_1} = i_{t_1}, \ldots, I_{t_n} = i_{t_n})$ $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ y $i_{t_k} = 0, 1$ Para $k = 1, \ldots, n$ es una distribución normal multivariada con media cero y

[12]Si $W(t)$ es un proceso Wiener, entonces la distribución conjunta de $W(s)$ y $W(j)$ $s < j$ es una normal multivariada con vector de medias $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y matriz de varianza-covarianza $\begin{pmatrix} s & s \\ s & j \end{pmatrix}$ y $\frac{W(s)}{\sqrt{s}}$ y $\frac{W(j)}{\sqrt{j}}$ se distribuye como una normal multivariada con media cero y matriz de varianza-covarianza $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{s}{j}} \\ \sqrt{\frac{s}{j}} & 1 \end{pmatrix}$

matriz de varianza-covarianza igual a $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} & \cdots & \sqrt{\frac{t_1}{t_n}} \\ \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{t_2}{t_n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\frac{t_1}{t_n}} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$[13]

Para facilitar la notación definiremos a $p_{t_{k_{r_1}},\ldots,t_{k_{r_m}}} = Pr(I_{t_1} = 0, \ldots, I_{t_{r_1}} = 1, \ldots, I_{t_{t_m}} = 1, \ldots, I_{t_n} = 0)$ para $r_j < n$, por ejemplo $p_{t_3,t_5} = Pr(I_{t_1} = 0, I_{t_2} = 0, I_{t_3} = 1, I_{t_4} = 0, I_{t_5} = 1, I_{t_6} = 0, \ldots, I_{t_n} = 0)$.

Utilizando la notación anterior. La función de distribución esta dadá por:

$$F_s(S \leq s) = \begin{cases} Pr(I_1 = 0, \ldots, I_n = 0) & \text{Si } I_1 = 0, \ldots, I_n = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} p_j I_{\{f_{r_1} = s\}} + \\ \sum_{j_1=1}^{n-1} \sum_{j_2}^{n} p_{j_1,j_2} I_{\{f_{r_1}+f_{r_2} = s\}} + \cdots + & \text{Si por lo menos algún } I_j \neq 0 \\ \sum_{j_1=1}^{n-(s-1)} \cdots \sum_{j_k=j_{k-1}+1}^{n-(s-k)} \cdots \sum_{j_s=j_{s-1}+1}^{n} p_{j_1,\ldots,j_k,\ldots,j_s} I_{\{\sum_{i=1}^{k} f_{r_i} = s\}} & \text{para } j = 1, \ldots, n \\ + \cdots + p_{1,2,\ldots,n} I_{\{\sum f_{r_i} = s\}} & \end{cases} \tag{4.26}$$

El valor esperado del precio del bono es igual a:

$$E(S) = f_t \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right) + (1+i)^{-n} c - \sum_{t=1}^{n} (1+i)^{-t} p_t f_t - (1+i)^{-n} p_n c \tag{4.27}$$

[13]Si $I_{t_k} = 1$ entonces la integral tomará valores desde $-\infty$ hasta $\frac{\ln \frac{P_0}{A_0} - \int_0^j \mu_t dt + \frac{\sigma^2 j}{2}}{\sqrt{t_k}\sigma}$, pero si $I_{t_k} = 0$ entonces la integral tomará valores desde $\frac{\ln \frac{P_0}{A_0} - \int_0^j \mu_t dt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sqrt{t_k}\sigma}$ hasta ∞ $k = 1, \ldots, n$

La varianza esta dada por:

$$Var(S) = \sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-2t}(p_t(1-p_t)f_t^2+$$
$$2\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(1+i)^{-r}(1+i)^{-j}(Pr(I_r=1,I_j=1)f_rf_j)-p_rf_rp_jf_j) \quad (4.28)$$

El precio de algun activo commmente se define como el valor esperado de la variable aleatoria que representa el precio de un activo como suelen ser el caso de las anualidades[14], en este caso se definirá al precio del bono como el valor esperado de la variable aleatoria, S, que representa el precio del bono, sin embargo, se puede tomar cualquier otro punto de la distribución como es la moda, la mediana, etc.

Por otro lado, el valor esperado del precio de un bono no da ninguna medida respecto a la dispersión que pueda haber, por lo tanto, se utilizará el valor esperado sobre la desviación estandar como una media para conocer las unidades que se esperán por cada unidad de dispersión:

$$\frac{E(S)}{\sqrt{Var(S)}} = \frac{f_t\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)+(1+i)^{-n}c-\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}p_tf_t-(1+i)^{-n}p_nc}{\sqrt{Var(S)}} \quad (4.29)$$

De la misma forma que en el caso de valuación de un bono libre de riesgo, los cálculos se hicieron para t =0. Si el bono es valuado en una fecha diferente a $t=0$ lo llamaremos, de igual forma, como *Valor en libro* y lo denotaremos como V_t. De aqui podemos concluir que $L_0 = E(S)$. Por ejemplo si se quiere valuar el bono desde el periodo m[15] hasta la fecha de vencimiento

[14] Véase Bowers [8].
[15] m es una fecha de pago de cupón

n $(m < n)$, entonces el valor en libros será:

$$\begin{aligned} V_m &= f_t\left(\frac{1-(1+i)^{-(n-m)}}{i}\right) + \\ &\quad (1+i)^{-(n-m)}c - \sum_{t=1}^{(n-m)} (1+i)^{-t} p_t f_t - (1+i)^{-(n-m)} p_{n-m} c \end{aligned}$$

4.2.4. Precio de un Bono entre Fechas de Pago de Cupón bajo Riesgo Crédito

El precio sucio denotado como L^s_{m+k}, donde $0 < k < 1$ y m es una fecha de pago de cupón, es igual a

$$\begin{aligned} L^s_{m+k} &= L_m(1+i)^k \\ &= (1+i)^k \left(f_t\left(\frac{1-(1+i)^{-(n-m)}}{i}\right) + \right. \\ &\quad \left. (1+i)^{-(n-m)}c - \sum_{t=1}^{(n-m)} (1+i)^{-t} p_t f_t - (1+i)^{-(n-m)} p_{n-m} c \right) \end{aligned}$$

Antes de que se analice el precio limpio, es necesario definir:

Definición 4.6 *Sea Z_{t_k} el monto a pagar en el periodo en el periodo $t, t+k$ para $0 < k < 1$, definido de la siguiente forma*[16]*:*

$$Z_{t_k} = f_{t_k} - I_k f_{t_k} \tag{4.30}$$

[16] Utilizando el método semiteórico $F_{t_k} = kF_t$. I_{t_k} tiene como parámetro $p_k = \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{P_0}{A_0} - \mu}{\sqrt{k}\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{w^2}{2}} dw$, recordando que la probabilidad de incumplimiento al tiempo k es igual la probabilidad de que el valor de los activos circulantes de sean menores o igual al valor de los pasivos al tiempo k.

El precio limpio, denotado por L^l_{m+k}, es igual a:

$$
\begin{aligned}
L^l_{m+k} &= L_m(1+i)^k - f_{k_t} - p_k f_{t_k} \\
&= (1+i)^k \left(f_t \left(\tfrac{1-(1+i)^{-(n-m)}}{i} \right) + \right. \\
&\quad (1+i)^{-(n-m)}c - \sum_{t=1}^{(n-m)} (1+i)^{-t} p_t f_t - (1+i)^{-(n-m)} p_{n-m} c) \\
&\quad -f_{k_t} - p_k f_{t_k}
\end{aligned}
$$

Bajo este modelo la pérdida esperada (Precio del bono libre de riesgo$-E(P)$) se cubre por medio de las reservas preventivas y la desviación estándar del precio del bono ($\sqrt{Var(P)}$) se cubre por medio del capital económico[17].

4.2.5. Generación de Escenarios

La finalidad es que a partir de cierta información inicial acerca del crecimiento de la empresa y su dispersión se pueda construir distribuciones para ambos parámetros por medio de simulación. Este método es utilizado en la medición de riesgo de mercado y es conocido como "Método de Simulación MonteCarlo"[18].

Se exhibirá el modelo Normal-Gamma[19], sin embargo el modelo a utilizar será propuesto por cualquier analista. Los pasos son los siguientes:

- El analista obtiene diferentes escenarios[20], obteniendo el escenario más probable del crecimiento esperado. Se obtiene el recíproco de cada σ_i^2, haciendo la siguiente transformación $\lambda_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$[21]. A continuación será equivalente mencionar la distribución normal con media μ y varianza σ^2 o la distribución normal con media μ y precisión λ, donde $\lambda = \frac{1}{\sigma^2}$.

[17] El capital económico es el capital por el cual el banco hace frente a las pérdidas referidas al riesgo crédito. Véase el documento de *CreditRisk*$^+$ [12]

[18] Véase De Lara [14]

[19] Véase Bernardo [6]

[20] Estos escenarios se obtienen según la información inicial de la gente relacionada con el conocimiento de la empresa.

[21] Este término se le conoce como precisión.

- Sea μ_i y σ_i i-ésimo escenario. Se contruye la media y la varianza de la volatilidad.

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{n}$$

$$\hat{Var}(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \hat{\lambda}\right)^2}{n-1}$$

- Dados los escenarios del crecimiento esperado, μ_i, se toma como al escenario más probabable como la moda de la distribución[22]. Tomando en cuenta que cada cuantil de la distribución normal, X, con media μ y varianza σ^2 asociado a cierta probabilidad, γ, se puede calcular como $X_\gamma = \mu + z_\gamma \sigma$ donde z_γ es el cuantil de la distribución normal estándar, entoces tomando el escenario más extremoso, μ_{max}, asociada a cierta volatilidad, σ_{max} y suponiendo que dicho escenario no excederá cierta probabilidad, γ, entonces μ_{max} se puede caracterizar como: $\mu_{max} = \mu_{med} + z_\gamma \sigma_0 \sigma_{max}$[23], despejando se llega al resultado siguiente: $\sigma_0 = \frac{\mu_{max} - \mu_{med}}{z_\gamma \sigma_{max}}$. Por último sea $\lambda_0 = \frac{1}{\sigma_0^2}$.

- Dados la estimación de los parámetros (la media y la varianza) se estima por medio del método de momentos los parámetros α y β de la distribución Gamma[24].

$$\alpha = \frac{\hat{\lambda}^2}{\hat{Var}(\lambda)}$$

$$\beta = \frac{\hat{Var}(\lambda)}{\hat{\lambda}}$$

- Una vez caracterizada la distribución se simulan diferentes escenarios tanto de presición y la tasa de crecimiento aplicando el siguiente método:

[22]Debido a que se toma el caso normal la media, la moda y la mediana son iguales.

[23]Tomando en cuenta que la distribución de crecimiento esperado es una normal con media μ_{med} y varianza $\sigma_0^2 \sigma^2$.

[24]Existen diferentes parametrizaciones para la distribución Gamma. La distribución Gamma utilizada es $\frac{x^{(\alpha-1)} exp^{(-x/\beta)}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} I_{(x>0)}$.

$$F(\mu,\lambda) = F(\mu|\lambda)F(\lambda)$$

El modelo Normal-Gamma depende de cuatro hiperparámetros, $(\mu_0, \lambda_0, \alpha, \beta)$, así la distribución Normal-Gamma se expresa de la siguiente forma:

$$Ng(\mu,\lambda|\mu_0,\sigma_0,\alpha,\beta) = N(\mu|\mu_0,\lambda_0\lambda)Ga(\lambda|\alpha,\beta) \quad \mu \in \Re, \lambda > 0$$

Donde $N(\cdot|\mu_0,\lambda_0\lambda)$ es la distribución Normal con media μ_0 y precisión $\lambda_0\lambda$ y $Ga(\cdot|\alpha,\beta)$ es la distribución Gamma con parámetros α y β.

Para simular μ y λ de forma conjunta, primero se simula λ y una vez conocida λ se simula μ.

- Se hace la siguiente transformación $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Se calcula la distribución empírica para ambos parámetros.

Un ejemplo de este método se lleva acabo en el ejemplo tres del capítulo siguiente.

Sensibilidades

La probabildad de incumplimiento depende de las expectativas de crecimiento de los activos de la empresa y de la volatilidad de los mismos.

Según la ecuación 4.23, la probabilidad se calcula con la siguiente fórmula:

$$p_t = \int_{-\infty}^{\frac{\ln\frac{d_t}{A_0} - \int_0^t \mu_s ds + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sqrt{t}\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{w^2}{2}} dw$$

Para facilitar la notación se denotará a $\int_0^t \mu_s ds$ como μ_t

$$p_t = \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{d_t}{A_0} - \mu_t + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{w^2}{2}} dw$$

Para medir la sensibilidad respecto a σ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_t}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{d_t}{A_0} - \mu_t + \frac{\sigma^2_t}{2}}{\sigma_t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{w^2}{2}} dw}{\partial \sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{\left(\frac{\ln \frac{d_t}{A_0} - \mu_t + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{\ln \frac{d_t}{A_0} - \mu_t}{\sqrt{t\sigma^2}}\right) \end{aligned} \tag{4.31}$$

Por lo tanto, la dirección del cambio de la derivada lo determina $\left(\frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{\ln \frac{d_t}{A_0} - \mu_t}{\sqrt{t\sigma^2}}\right)$, si el valor es negativo entonces un aumento en la volatilidad representará una disminución en la probabiliad y viceversa.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{\ln \frac{d_t}{A_0} - \mu_t}{\sqrt{t\sigma^2}}\right) &\geq 0 \\ \frac{\sqrt{t}}{2} &\geq \frac{\ln \frac{d_t}{A_0} - \mu_t}{\sqrt{t\sigma^2}} \\ \frac{\sigma^2 t}{2} &\geq \ln \frac{d_t}{A_0} - \mu_t \\ \frac{\sigma^2 t}{2} + \mu_t &\geq \ln \frac{d_t}{A_0} \\ A_0 \exp^{\frac{\sigma^2 t}{2} + \mu_t} &\geq d_t \end{aligned}$$

Si σ^2 es pequeña entonces $\exp^{\frac{\sigma^2 t}{2}}$ es muy cercano a uno entonces si $A_0 \exp^{\mu_t}$ es mayor que la deuda con vencimiento en t entonces se puede pensar que un incremento en la volatilidad aumenta la probabilidad de incumplimiento.

Los cambios de la probabilidad de incumplimiento debido a los cambios de la expectativas de crecimiento de la emperesa dependeran de la función que se elija. Haciendo un caso particular si $\mu_t = f(t)\mu$ entonces:

$$\frac{\partial p_t}{\partial \mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{\left(\frac{\ln \frac{d_t}{A_0} - \mu f(t) + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2}{2}} \left(-\frac{f(t)}{t\sigma}\right) \tag{4.32}$$

En este caso la tasa de incumplimiento es inversamente proporcional a la probabilidad de incumplimiento es decir un aumento en la tasa de crecimiento decrementa la probabilidad de incumplimiento.

4.2.6. Tasas de Recuperación

En este método, la inclusión de tasas de recuperación se vuelve muy sencillo, como se mostró en 2.6. Para calcular el valor del bono basta por medio del valor esperado basta cambiar el valor del cupón por 1 − tasa de recuperación, es decir, la fórmula cambia a la siguiente:

$$E(S) = f_t\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) + (1+i)^{-n}c - \sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}p_t f_t(1-tr_t) - (1+i)^{-n}p_n c(1-tr_t) \tag{4.33}$$

De la misma forma se aplica para la varianza, la covarianza y la distribución de probabilidad.

4.3. Requerimiento de Capital

Esta sección consiste en calcular las reservas que deberán constituir el tenedor del bono debido al riesgo de credito que incurre.

Como se vio en el capítulo 2, los lineamientos para el cálculo del requerimientos de capital impuestos por la ley actual son en base a reglas rigidas, sin embargo, utilizando la distribución de la variable del precio del bono 4.26,

S, se puede fijar el requerimiento de capital tomando en cuenta los niveles de liquidez de la empresa.

La variable del precio del bono, S, se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{t=1}^{n}(f_t - I_t f_t)(1+i)^{-t} + (c - I_n c)(1+i)^{-n} \\ &= P - \sum_{t=1}^{n} I_t f_t (1+i)^{-t} + I_n c(1+i)^{-n} \end{aligned}$$

Donde P es el precio del bono libre de riesgo y $\sum_{t=1}^{n} I_t f_t(1+i)^{-t} + I_n c(1+i)^{-n}$ es la parte de la variable aleatoria S que representa el incumplimiento asociado. Para facilitar la notación, sea $S^* = \sum_{t=1}^{n} I_t f_t(1+i)^{-t} + I_n c(1+i)^{-n}$, entonces $S = P - S^*$.

El requerimiento de capital es el percentil asociado a una cierta probabilidad, lo que indicaría que sería la pérdida máxima posible sobre cierto nivel de probabilidad[25]. Sea γ una probabilidad asociada, entonces el requerimiento de capital estaría dado por:

$$F_{S^*}(S^* \leq s^*_\gamma) = \gamma$$

Donde s^*_γ es el requerimiento de capital.

Entonces:

[25] En las áreas de administración de riesgos también se conocida como "nivel de confianza"

$$\begin{aligned}
F_{S^*}(S^* \leq s^*_\gamma) &= \gamma \\
&= F_{S^*}(-S^* > -s^*_\gamma) \\
&= F_{S^*}(P - S^* > P - s^*_\gamma) \\
&= F_S(S > s) \\
&= 1 - F_S(S \leq s)
\end{aligned}$$

Entonces $F_S(S \leq s_{1-\gamma}) = 1 - \gamma$, por lo tanto, para encontrar el requerimiento de capital es necesario encontar el percentil asociado a $1-\gamma$ de la distribución de S, y después aplicarle la siguiente transformación:

$$\text{Requerimiento de Capital}_\gamma = P - s_{1-\gamma}$$

Capítulo 5

Aplicaciones y Conclusiones

5.1. Aplicaciones

Ejemplo 1: Supóngase que un acreditado tiene un bono cupón cero con un valor nominal de 1,000,000 de pesos con vencimiento en un año a una tasa de descuento de 10 %. El valor del cupón es igual a 909,090 pesos.

Suponiendo que el acreditado tiene el siguiente nivel de activos:

Concepto	Valor
Activos Circulantes	27,700
Pasivos con vencimiento en un año	25,000

Y el crecimiento del nivel de activos se espera que sea del 0.075 y una dispersión de 0.1 en un año .

El valor esperado y la desviación estándar del valor de los activos en un año es igual a:

Concepto	Valor
Valor Esperado	29,857
Desviación Estándar	2,993

La probabilidad de que no pague el cupón es igual a:

$$p_1 = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{x^2}{2}} dx = 0.042212733$$

Donde $a = \frac{\ln\frac{25,000}{27,700} - 0,07}{\sqrt{0,01}} = -1.725565883$

Si se tienen diferentes expectativas de crecimiento y manteniendo la volatilidad constante se tiene la siguiente tabla:

μ_A	umbral	$Pr(I_1 = 1)$
0.035	-1.325565883	0.092492
0.055	-1.525565883	0.063559
0.075	-1.725565883	0.042213
0.095	-1.925565883	0.027079
0.115	-2.125565883	0.01677

Si μ_A incrementa entonces la probabilidad de incumplimiento baja y viceversa. Si se mantiene la tasa esperada de crecimiento constante y varia la varianza:

σ_A^2	Umbral	$Pr(I_1 = 1)$
0.0225	-1.150377256	0.124994
0.0169	-1.327358372	0.092195
0.01	-1.725565883	0.042213
0.0025	-3.451131767	0.000279
0.0004	-8.627829416	0

Algo similar a lo que ocurría con los cambios en μ_A ocurre con cambios en la varianza. A un incremento de la varianza habrá un aumento en la probabilidad de incumplimiento y viceversa.

El valor esperado, la varianza y la desviación estándar del precio del bono son:

Concepto	Valor
Valor esperado	904,966
Varianza	4,106,166,001
Desviación	58,254

El descuento del bono libre de riesgo es igual a 1,000,000-909,090 = 90,909. Tomando en cuenta el riesgo de crédito 1,000,000-904,966=95,034.

Ejemplo 2: Supóngase que una empresa emite un bono con vencimiento en 2 años y que paga cupones cada seis meses por una cantidad 12,000 y el valor de rescate es igual a 150,000 con una tasa de interés del 10.25 % anual.

La tasa de cupón, r, es igual a 16 %[1] y el valor del cupón libre de riesgo es igual a:

P = 165,247

La prima es igual a 165,247 - 150,000 = 15,248

Si se valua el bono para un periodo diferente al de emisión:

Valor en libros	Valor
B_1	161,716
B_2	158,004
B_3	154,102

Supóngamos que se quiere valuar el bono para el noveno mes (t = 1.5) entonces:

El precio sucio del bono es igual a 165,808.

El precio limpio del bono es igual a 159,808.

Supóngase que la empresa que emitió el bono presenta las siguientes características:

Concepto	Valor
Activos Circulante	127,700

Si los analistas esperan una tasa de crecimiento del valor de los activos de 19.76 % anual, y una dispersión de 0.24 anual. El valor esperado del valor de los activos y la desviación es la siguente:

[1] Debido a que la tasa de cupón es mayor a la tasa de descuento entonces habrá una prima

año	Valor esperado	Varianza	Desviación
1	155,599	1,435,506,534	37,888
2	189,594	4,388,904,341	66,249
3	231,015	10,066,727,463	100,333
4	281,486	20,529,949,256	143,283

Si la empresa tiene los siguientes compromisos, en la fechas de vencimiento de pago de cupón:

Primer Vencimiento	12,000
Segundo Vencimiento	12,000
Tercer Vencimiento	80,000
Cuarto Vencimiento	162,000

En la primera, segunda y cuarta fecha la empresa tiene como compromisos únicamente los contraidos por la emisión del cupón pero en la tercera fecha además del compromiso que tiene por el pago de intereses del cupón emitido, la empresa tiene una deuda contraida por 78,000 pesos.

Las probabilidades de que la empresa incumpla en los periodos de 1 a 4 son las siguientes:

Cuadro 5.1: Tabla de probabilidades

Periodo	Cuantil	Probabilidad de Incumplimiento
0.5	-14.39923044	0
1	-10.53325182	0
1.5	-2.433195369	0.007483112
2	-0.276922907	0.390919713

Para el primero y segundo pago la probabilidad de que incumpla es cero es decir la empresa, según su nivel de activos, tendrá para pagar los intereses contraidos, para el tercero pago es muy poco probable que la empresa incumpla pero para el cuarto es muy probable que la empresa incumpla debido a que el valor esperado del nivel de los activos de la empresa son menores a la deuda contraida.

Dado que la probabilidad de incumplimiento en el periodod uno y dos son cero entonces I_t para $t = 1, 2$ son variables aleatorias degeneradas, sin embargo, la probabilidad de que incumpla en el periodo tres y cuantro es igual:

$$Pr(I_3 = 1, I_4 = 1) = 0.00744891754l$$

La probabilidad de que incumpla en el periodo cuatro dado que incumplió en el periodo tres es igual:

$$Pr(I_4 = 1 | I_3 = 1) = 0.995430473$$

Esto quiere decir que si existe un incumplimiento en el periodo tres la posibilidad de que incumpla en el periodo cuatro es muy alta.

El precio del bono bajo riesgo de crédito es igual a:

$$E(P) = 113,317$$

Y la varianza y desviación estándar son:

$$Var(P) = 2,642,814,668$$

$$\sqrt{Var(P)} = 51,408$$

El valor esperado entre la dispersión, llamado coeficiente de determinación, es igual a:

$$\frac{E(P)}{\sqrt{Var(P)}} = 1.88$$

Si se tiene un bono con un coeficiente de determinación mayor se prefiere a este bono y viceversa, debido a que se espera tener un mayor rendimiento por cada unidad de dispersión.

Según 150,000-106,956 = 43,044, es decir, analizando un bono bajo riesgo crédito puede cambiar las prespectivas acerca de la ganancia o pérdida.

Por último se calculará la función de distribución de S[2].

[2]Para este cálculo se estimo la función de distribución por medio de simulación Monte Carlo.

$$F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{Para } s \leq 22,273 \\ 0.0028 & \text{Para } 22,273 < s \leq 32,603 \\ 0.3861 & \text{Para } 32,603 < s \leq 145,093 \\ 0.3905 & \text{Para } 145,093 < s \leq 155,422 \\ 1 & \text{Para } s > 155,422 \end{cases}$$

El requerimiento de capital asociado a un nivel de probabilidad de 0.95 es igual 132,644.

Supongamos el mismo ejemplo la diferencia es que el analista propone que la tasa de crecimiento de la empresa se encuentra reflejado según la siguiente función:

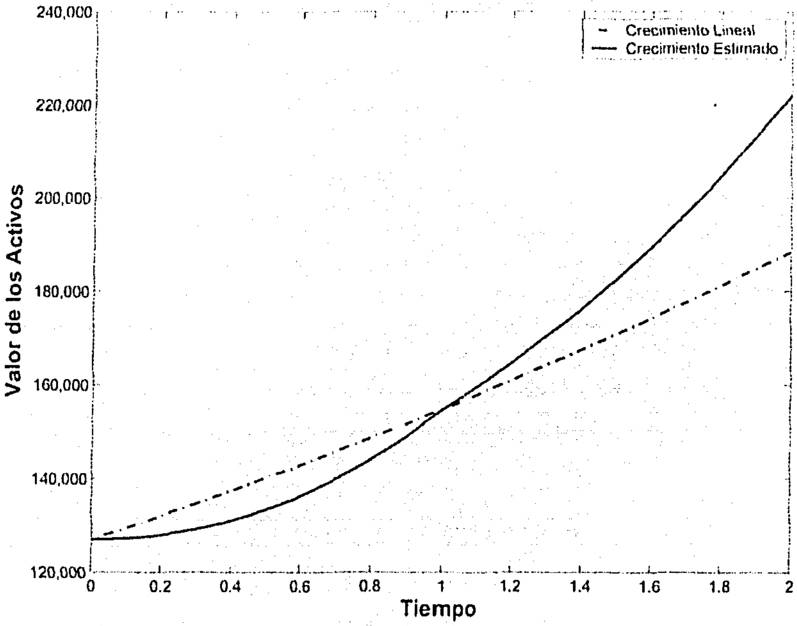
$$\mu(t) = 0.1976(t^2 I_{\{0<t\leq 1\}} + t^{1.5} I_{\{1<t<2\}})$$

Se puede ver en la gráfica 5.1 que el crecimiento de los activos para el primer año será menor que el crecimiento lineal pero para el segundo año se espera que el crecimiento sea mayor que al lineal.

Bajo esta nueva estimación el crecimiento del valor se encuentra en la siguiente tabla:

Periodo	Valor esperado	Varianza	Desviación
1	133,431	936,247,344	30,598
2	154,746	1,259,260,217	35,486
3	182,582	1,753,043,076	41,869
4	222,090	2,593,786,607	50,929

Figura 5.1: Valor de los Activos



A continuación se presenta la probabilidad de incumplimiento para los periodos de pago de cupón:

Cuadro 5.2: Tabla de probabilidades

Periodo	Cuantil	Probabilidad de Incumplimiento
0.5	-14.10843277	0
1	-10.53366849	0
1.5	-2.660332402	0.003903222
2	-0.759809662	0.223684112

La probabilidad de incumplimiento para el segundo año cuando se supone un crecimiento no lineal es menor a la probabilidad de incumplimiento cuando se supone el crecimiento lineal, como lo muestra la tabla 5.1, esto se debe a que en la tabla 5.2 supone un crecimiento de la empresa mayor, como se muestra en la gráfica 5.1.

la probabiliad de incumplimiento de incumpla en el periodo tercer pago y en el cuarto pago es igual:

$$Pr(I_3 = 1, I_4 = 1) = 0.0038390273 45$$

Y la probabilidad de que incumpla en el pago cuatro dado que incumples en el periodo tres es igual a :

$$Pr(I_4 = 1 | I_3 = 1) = 0.983553423$$

Esta probabilidad es menor a la anteriormente calculada debido a que se espera un crecimient mayor sin embargo la probabilidad sigue siendo alta.

El precio del bono es igual a:

$$E(P) = 135,537$$

La varianza y la desviación estandar es igual a:

$$Var(P) = 2,641,876,701$$

$$\sqrt{Var(P)} = 51,399$$

El coeficiente de determinación es igual a:

$$\frac{E(P)}{\sqrt{Var(P)}} = 2.636942569$$

El resultado indica que el bono se prefiere más bajo este escenario que bajo el escenario con crecimientos lineales.

La función de distribución del precio del bono, S:

$$F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{Para } s \leq 22,273 \\ 0.0008 & \text{Para } 22,273 < s \leq 32,603 \\ 0.2252 & \text{Para } 32,603 < s \leq 145,093 \\ 0.2279 & \text{Para } 145,093 < s \leq 155,422 \\ 1 & \text{Para } s > 155,422 \end{cases}$$

Y el requerimiento de capital a un 0.95 de probabilidad es igual a 132,644 pesos. Esto se debe a que las espectativas de crecimiento son parecidas.

Ejemplo 3:

Supóngase que el analista tiene la siguiente información:

Escenarios	μ_i	σ_i	λ_i
Escenarios optimista	0.06	0.34	8.650519031
Escenario bueno	0.04	0.31	10.40582726
Escenario regular	0.03	0.3	11.1111111
Escenario malo	0.02	0.33	9.18273646
Escenario pesimista	-0.03	0.39	6.574621959

Donde el escenario regular es el que el analísta considera como el más probable.

Entonces se obtienen los siguientes datos:

$$\hat{\mu} = 0.03$$
$$\hat{\lambda} = 9.184963164$$
$$\sigma_0 = 0.093531829$$ [3]
$$\lambda_0 = 114.3091899$$
$$\hat{var}(\lambda) = 3.075017939$$

De los datos anteriores se obtienen los parámetros de la distribución Gamma:

$$\alpha = 27.43514021$$
$$\beta = 0.334788271$$

Se simulan 10,000 escenarios diferentes utilizando la distribución Gamma con los parámetros anteriores para simular la precisión (λ_i) y por cada número simulado se genera un número aleatorio normal con media $\hat{\mu}$ y precisión $\lambda_0\lambda_i$.

El histograma y la función de distribución empírica se muestran en la gráfica en las gráficas 5.2, 5.3, 5.4, 5.5.

[3]Este dato se calculo asignando una probabilidad de 5 % al escenario más pésimista que es el escenraio más extremoso entonces σ_0 se calcula como $\frac{-0.03-0.03}{(-1.64485348)(0.39)}$.

Figura 5.2: Histograma de la Volatilidad

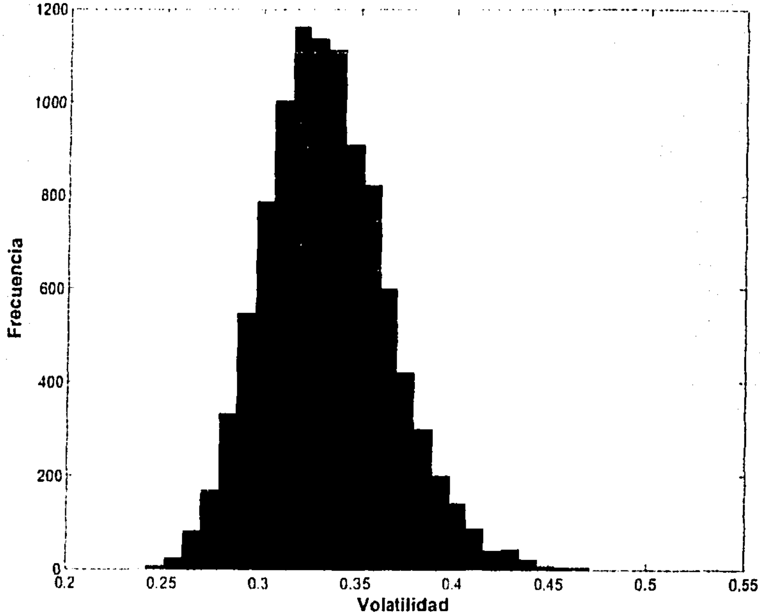


Figura 5.3: Histograma de la Tasa de Crecimiento

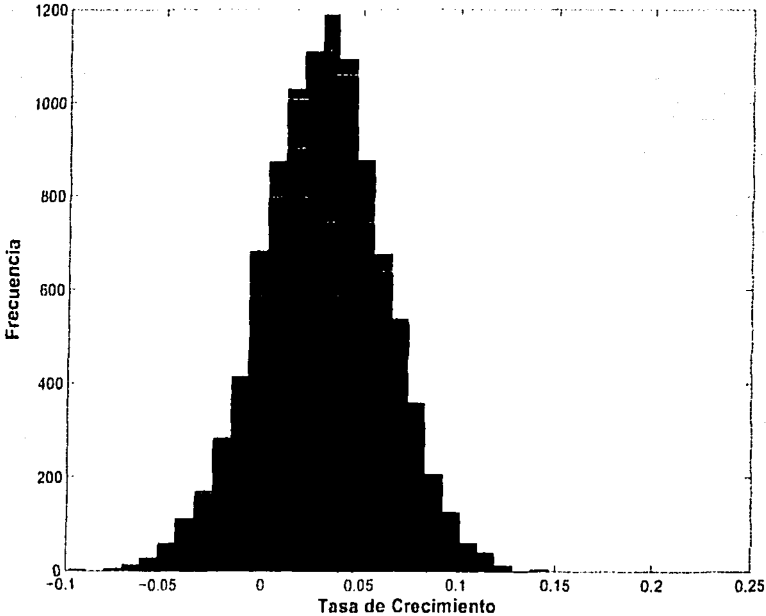


Figura 5.4: Distribución Acumulada Empírica de la Volatilidad

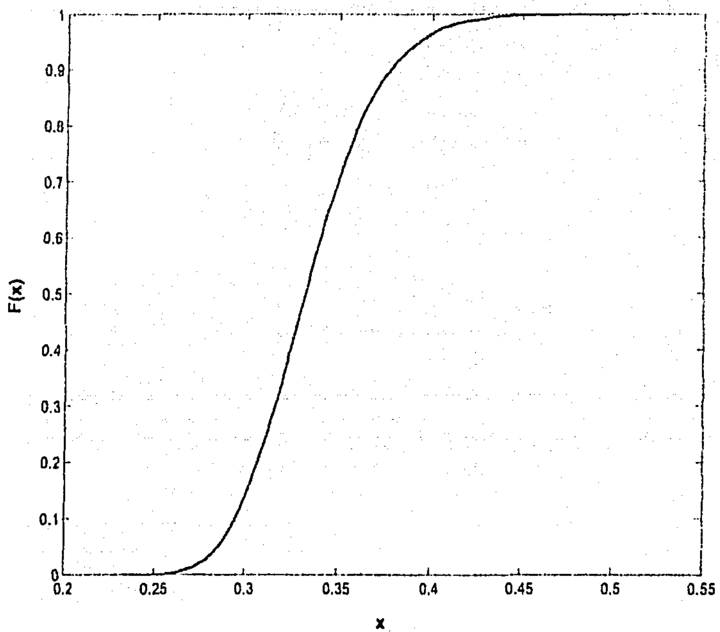
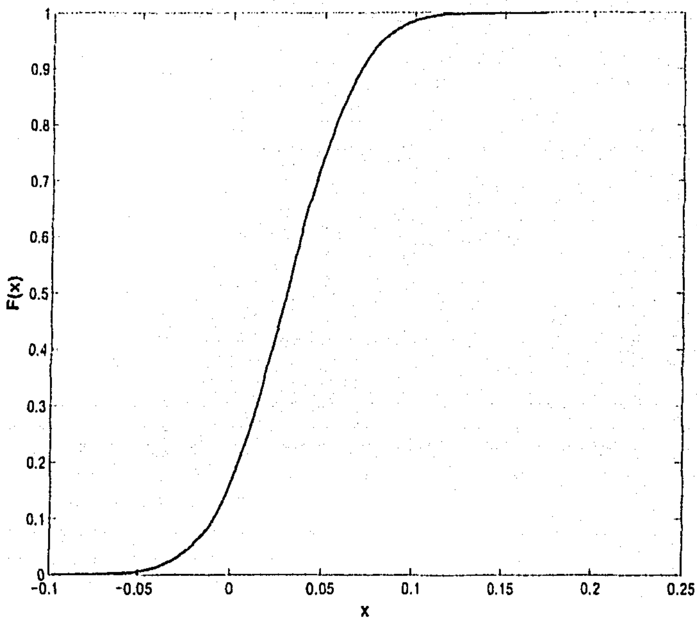


Figura 5.5: Distribución Acumulada Empírica de la Tasa de Crecimiento



A pesar de que se muestran las distribuciones de forma marginal, las variables aleatorias fueron calculadas de manera conjunta.

De esta forma se obtienen los siguientes valores para la volatilidad y la tasa de crecimiento:

Volatilidad:

$$E(\sigma) = 0.3341$$

$$Var(\sigma) = 0.001066$$

$$Mediana(\sigma) = 0.3319$$

Tasa de crecimiento:

$$E(\mu) = 0.03031$$

$$Var(\mu) = 0.000999204$$

$$Mediana(\mu) = 0.0304$$

Los cuantiles de la distribución son:

Volatilidad

$$\gamma_{0.95} = 0.3917$$
$$\gamma_{0.975} = 0.4049$$
$$\gamma_{0.99} = 0.4246$$

Tasa de Crecimiento

$$\gamma_{0.01} = -0.0455$$

$$\gamma_{0.025} = -0.0325$$
$$\gamma_{0.05} = -0.0218$$
$$\gamma_{0.95} = 0.0818$$
$$\gamma_{0.975} = 0.0925$$
$$\gamma_{0.99} = 0.1046$$

Con este método se obtienen diferentes escenarios de la volatilidad y la tasa de crecimiento a partir de cierta información inicial.

Supóngase que se emite un bono a cinco años con pago de cupón cada seis meses, con una tasa de cupón de 5 % anual y una tasa de descuento de 8 %, con un valor nominal de 1,000,000 de pesos. Este bono es bajo par debido a que la tasa cupón es menor a la tasa de descuento. El precio del bono libre de riesgo es igual a \$878,337.

Si la empresa tiene la siguiente estructura de pagos en la fecha de vencimiento de los cupones y el principal:

Periodos	Pagos
1	25,000
2	25,000
3	25,000
4	25,000
5	25,000
6	25,000
7	25,000
8	25,000
9	25,000
10	1,025,000

Según esta estructura, esta empresa no tiene deudas en la fecha de vencimiento de los cupones más que los mismos cupones y el principal.

Si el valor de los activos hoy es de 10,000,000 de pesos y se toman diferentes cuantiles de la distribución empirica de la tasa de crecimiento fijando la volatilidad (σ) en el valor esperado 0.30956619, el valor del bono varia como se muestra en la tabla siguiente:

Nivel de Probabilidad	μ	σ	Precio del Bono	Requerimiento de Capital
0.001	-0.07151986	0.3341487	868,622	16,889
0.025	-0.03254228	0.3341487	873,490	16,889
0.05	-0.0217685	0.3341487	874,381	16,889
0.1	-0.00910322	0.3341487	875,240	16,889
Mediana	0.03040843	0.3341487	876,953	16,889
Media	0.03031815	0.3341487	876,951	16,889
0.9	0.07085469	0.3341487	877,770	16,889
0.95	0.08174814	0.3341487	877,896	16,889
0.975	0.09250421	0.3341487	877,995	16,889
0.999	0.12782478	0.3341487	878,193	16,889

Esta tabla expresa las tasas de crecimiento asociadas a los cuantiles de la distribución empírica. Se toman tanto escenarios negativos como son los primero cuatro escenarios y escenarios positivos. Los cambios de la tasa de crecimiento y el precio se muestran en la gráfica 5.6.

Si se deja fija la tasa de crecimiento (μ) en 0.030034577 y se varia la volatilidad dependiendo de los cuantiles de la distribución empírica de la volatilidad.

Nivel de Probabilidad	μ	σ	Precio del Bono	Requerimiento de Capital
0.001	0.03031815	0.25168035	878,318	16,889
0.025	0.03031815	0.27724612	878,230	16,889
0.05	0.03031815	0.28487	878,173	16,889
0.1	0.03031815	0.29458637	878,066	16,889
Mediana	0.03031815	0.3349	876,915	16,889
Media	0.03031815	0.3341487	876,951	16,889
0.9	0.03031815	0.37678231	873,558	16,889
0.95	0.03031815	0.39174475	871,579	16,889
0.975	0.03031815	0.40491478	869,435	16,889
0.999	0.03031815	0.460466	855,806	16,889

Los cambios de la tasa de crecimiento y el precio se muestran en la gráfica 5.7.

Si se varia tanto la volatilidad y el crecimiento esperado se llega a los siguientes niveles de precio:

Figura 5.6: Precio de un Bono y Tasa de Crecimiento

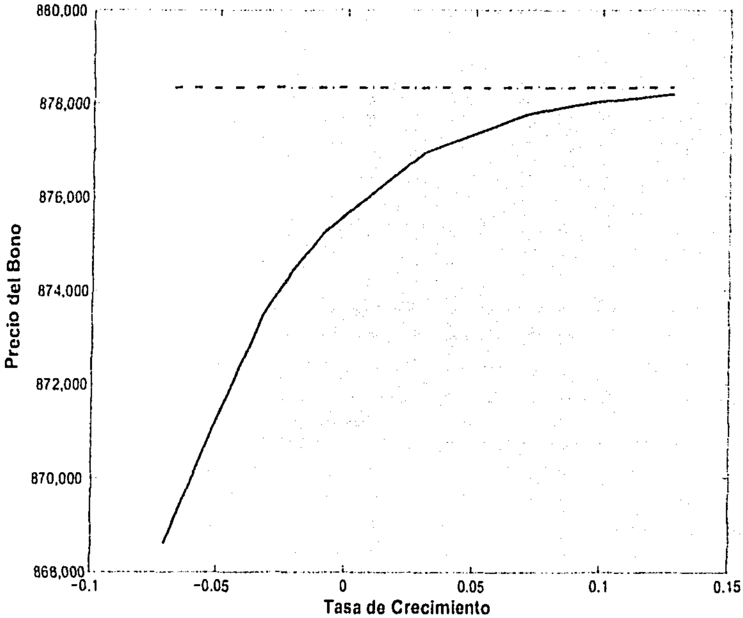
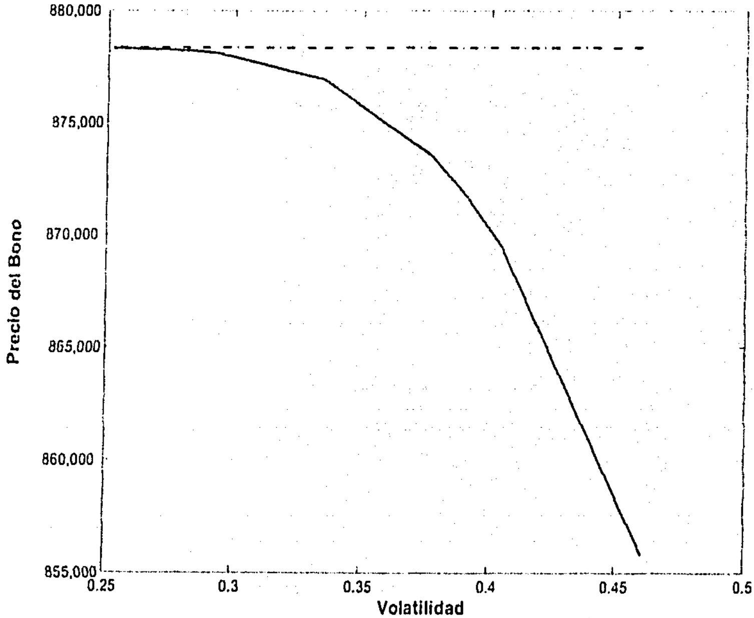


Figura 5.7: Precio de un Bono y Volatilidad



Nivel de Probabilidad	μ	σ	Precio del Bono	Requerimiento de Capital
0.0001	-0.18789656	0.09859804	878,337	16,889
0.025	0.02053177	0.14966582	878,337	16,889
0.05	0.02372681	0.162916	878,337	16,889
0.1	0.02617573	0.17929	878,337	16,889
Mediana	0.02999689	0.27136293	878,261	16,889
Media	0.03003458	0.30956619	877,793	16,889
0.9	0.03376388	0.47733728	851,109	16,889
0.95	0.03630498	0.58273823	803,383	692,453
0.975	0.04029187	0.70028957	731,708	692,453
0.999	0.08255031	1.34536955	362,667	729,016

De los resultados anteriormente mostrados se puede concluir que el requerimiento de capital no es muy sensible a los cambios en la tasa de crecimiento y en la volatilidad por lo tanto para dos diferentes analístas con prespectivas relativamente opuestas obtendrán los mismos resultados para el requerimiento de capital.

Ejemplo 4:

En el ejercicio anterior se simularon la tasa de crecimiento y la volatilidad y para valuar el precio del bono analizando el riesgo de crédito se fijaron tanto la tasa de crecimiento y la volatilidad, sin embargo, existe la posibilidad de no fijar ningún parámetro y simular directamente la variable aleatoria del precio de bono. Ee ejercicio nos dará un mayor entendimiento de los cambios que sufre la probabilidad de incumplimiento y el precio del bono por cambios en los escenarios de la tasa de crecimiento y la volatilidad.

Supóngase que se tienen los mismos datos que el ejercicio anterior excepto por la estructura de pagos que tiene en la fecha de los pagos de cupón[4] , es decir, se tienen los diferentes escenarios:

[4] Esto se debe a que en el ejercicio pasado la estructura de pagos liquidables en la fecha de vencimiento de cada cupón eran exactamente la deuda contraida por la emisión de dicho cupón entonces la probabilidad de que incumpliera los pagos de cupón es demasiado pequeña, es decir, prácticamente cero por lo que es dificil apreciar el histograma de la variable aleatoria, S.

Escenarios	μ_i	σ_i	λ_i
Escenarios optimista	0.06	0.34	8.650519031
Escenario bueno	0.04	0.31	10.40582726
Escenario regular	0.03	0.3	11.1111111
Escenario malo	0.02	0.33	9.18273646
Escenario pesimista	-0.03	0.39	6.574621959

Se obtiene los mismos resultados de los parámetros de α, β, $\hat{\mu}$ y λ_0:

$$\hat{\mu} = 0.03$$

$$\lambda_0 = 114.3091899$$

$$\alpha = 27.43514021$$

$$\beta = 0.334788271$$

La nueva estructura de pagos será:

Periodo	Pago
1	6,144,055
2	8,108,350
3	7,444,800
4	6,726,301
5	6,346,051
6	7,910,361
7	6,999,405
8	8,506,641
9	7,067,746
10	8,675,539

A diferencia del ejercicio anterior, en este ejercicio se simulará directamente la variable aleatoria del precio del bono, S^5. El histograma y la función de distribución empírica se muestran en la gráfica 5.8 y 5.9 respectivamente.

[5] Véase la definición 4.24.

Figura 5.8: Histograma de la v.a. del Precio del Bono (S)

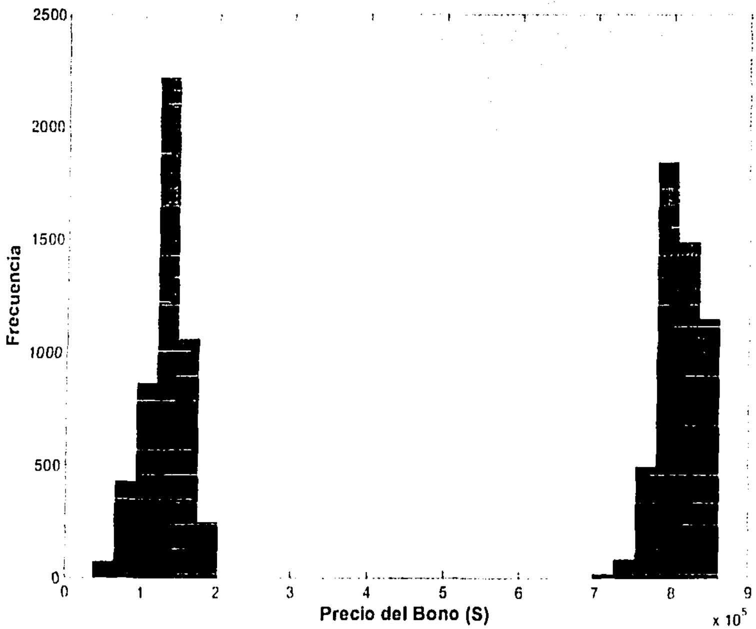
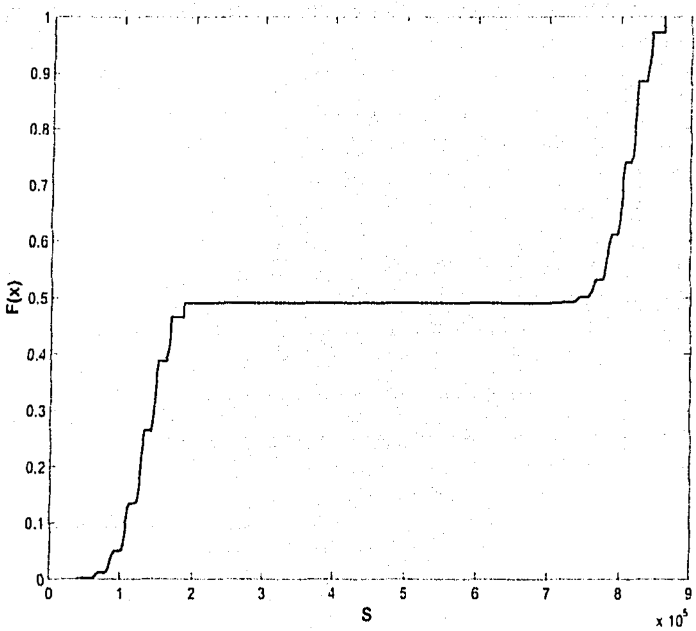


Figura 5.9: Distribución Empírica de la v.a. del Precio del Bono (S)



En la gráfica 5.8 refleja el paradigma del riesgo de crédito debido a que las pérdidas asociadas suelen ser o poco extremas o muy extremas conforme crece la correlación[6], de hecho, como se puede observar en Márquez [23], donde presenta un comparativo de la distribución obtenida por *CreditRisk*$^+$ con una distribución *Gamma* y se apreciar que la distribución obtenida por *CreditRisk*$^+$ es bimodal. Por otro lado si la correlación entre los pagos es muy cercana al cero entonces la distribución de pérdida se convierte en una distribución unimodal.

Comúnmente las distribuciones de pérdida tienen colas más pesadas[7] y en algunas ocasiones tienen más de una moda[8] por lo que hace muy difícil ajustar la distribución de pérdidas a un modelo teórico.

De los resultados anteriores se puden estimar momentos de la distribución como son la media y la varianza del precio del bono y algunos cuantiles:

$$E(S) = 477,680$$

$$\sqrt{Var(S)} = 340,229$$

$$Mediana = 743,198$$

$$Moda = 861,447$$

El precio del bono, definido en el capítulo anterior como el valor esperado, ($477,680) se encuentra, según la gráfica 5.8, en una vencidad de probabilidad cero, esto quiere decir que la probabilidad de se observe el precio del

[6] Este ejercicio se cambio la estructura de la empresa de tal forma que fuera lo suficientemente riesgosa para poder observar, de una forma más adecuada, las pérdidas en las que puede incurrir, sin embargo, si una empresa tuviera ese nivel de endeudamiento se le catalogaría como una empresa de alto riesgo

[7] Como se puede ver en Márquez [23], el cual muestra la gráfica de pérdidas utilizando el modelo de *CreditRisk*$^+$.

[8] Hay muchos factores que hacen que varíe la forma de la distribución de pérdida como pueden ser los factores propios del modelo: la probabilidad de incumplimiento y la varianza, sin embargo, hay algunos otros factores externos que tambien provocan que varie dicha distribución como puede ser la forma de amortización de los créditos, por ejemplo, la forma de amortización de un bono hace mucho más riesgoso el último pago debido a que es donde se concentra el pago interés y del valor nominal.

bono es cero[9]. Por lo tanto, como precio de referencia tomando en cuenta el riesgo de crédito se pueden tomar diferentes valores como son la mediana o la moda, ya que ambos precios son observables.

Cuantiles de la distribución empírica de S:

$$\gamma_{0.01} = 66,861$$
$$\gamma_{0.025} = 84,224$$
$$\gamma_{0.05} = 90,747$$
$$\gamma_{0.1} = 106,635$$
$$\gamma_{0.5} = 743,198$$
$$\gamma_{0.90} = 839,223$$
$$\gamma_{0.95} = 843,180$$
$$\gamma_{0.975} = 861,447$$
$$\gamma_{0.99} = 861,447$$

Por otro lado, se puede estimar una probabilidad de incumplimiento para cada periodo y para diferentes escenarios de la tasa de crecimiento y de la volatilidad, a continuación se mostrará una gráfica que muestra las variaciones que sufre la probabilidad de incumplimiento ante variaciones en los escenarios.

En el siguiente análisis únicamente tomaremos en cuenta la probabilidad de incumplimiento del último periodo. En la gráfica 5.10 y 5.11 se muestran el histograma y la distribución empírica de la probabilidad de incumplimiento, esto se logro simulando los escenarios de μ y σ y valuandolos en la ecuación 4.23 sustituyendo t =10.
La media y la varianza de p_t son iguales a:

$$E(p_t) = 0.491723663$$

[9]Esto se debe al tipo de amortización, ya que el último pago es el más grande (principal + intereses).

Figura 5.10: Histrograma de la Probabilidad de Incumplimiento (p_t)

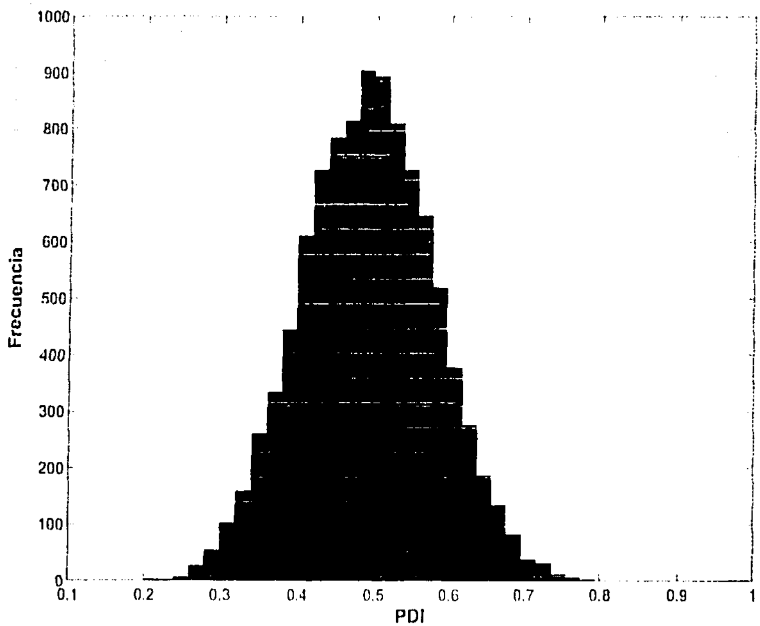
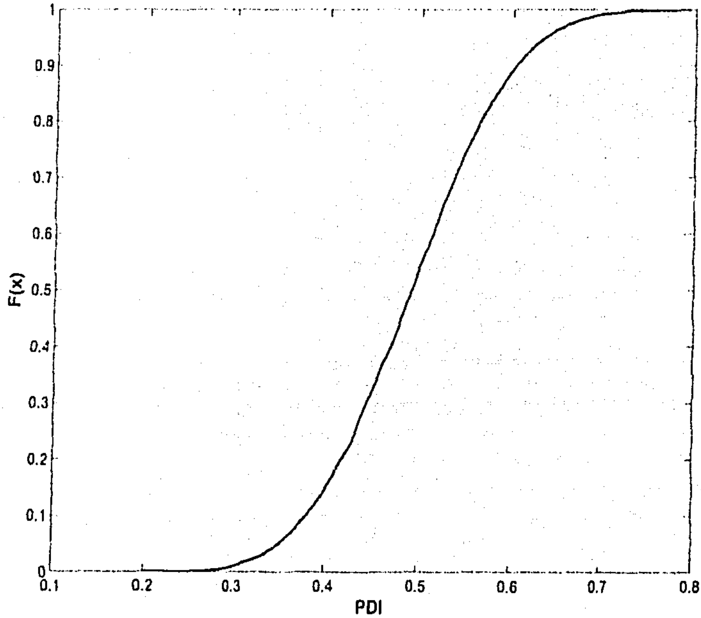


Figura 5.11: Distribución Empírica de la Probabilidad de Incumplimiento (p_t)



$$Var(p_t) = 0.007496991$$

Para concluir la distribución empírica se puede ajustar a una distribución Beta encontrando los parámetros α y β a partir de la media y la varianza de la distribución empírica[10]. La gráfica 5.12 muestra el ajuste obtenido.

De esta forma se pueden obtener los diferentes cuantiles según cierto nivel de probabilidad, γ, de la distribución Beta y la disitribución empírica:

Cuantil	D. Beta	D. Empírica
0.01	0.29792879	0.298927115
0.025	0.32639437	0.326133785
0.05	0.35168053	0.349154028
media	0.49172366	0.491723663
mediana	0.49155681	0.491478843
0.95	0.63233812	0.635663144
0.975	0.65799099	0.663090264
0.99	0.68695102	0.692575929

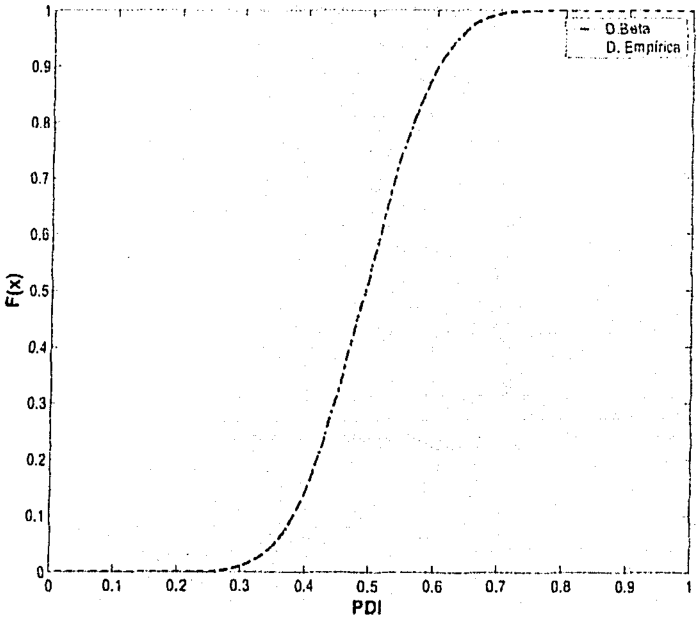
De esta forma se puede decir que la probabilidad de incumplimiento no excederá con un 0.95 de probabilidad 0.68695102 así se puede valuar el bono tomando los escenarios más extremosos de la distribución[11].

Como conclusión de los ejercicios anteriormente mostrados, el analísta puede hacer una gran cantidad de modificaciones, que pueden variar desde tomar escenarios fijos de la tasa de crecimiento y volatiliad hasta generar escenarios y estresar la probabilidad de incumplimiento, con la finalidad de tener una mejor interpretación de la información inicial, sin embargo, es importante analizar detalladamente cada uno de los ejercicios obtenidos para conocer tanto la depreciación que sufren los bonos por el riesgo de crédito y los requerimientos de capital.

[10] $\alpha = \frac{\mu\beta}{1-\mu}$ y $\beta = \frac{(1-\mu)^3-\sigma^2(1-\mu)}{\sigma^2}$.

[11] Esto puede ayudar cuando se tiene un periodo de alta volatilidad.

Figura 5.12: Distribución Empírica vs. Distribución Beta (α =16.45297621 β = 17.00682541



5.2. Conclusiones

Analizando algunos de los modelos matemáticos que existen dentro de la administración del riesgo de crédito, se puede decir, que cada modelo parte de ciertos supuestos que no son aplicables a la realidad de manera exacta, como pueden ser: que el comportamiento de los activos cumple con cierto proceso estocástico, el que la migración de créditos de una calificación a otra cumplen con una distribución normal, el que se pueda construir una distribución de pérdida que dependa de los factores económicos y que a su vez ellos dependan de una distribución Gamma, etc. De hecho, no existe un consenso respecto a cuál de ellos resulte ser el mejor.

Por otro lado, las técnicas que utilizan una serie de reglas rígidas para la administración de riesgo de crédito, no toman en cuenta las condiciones actuales del mercado, y en algunos casos puede incluso haber un exceso de capital requerido, ocasionando una menor utilidad respecto del capital, y en otros casos existe la posibilidad de que el requerimiento exigido no alcance a cubrir la pérdida (esto sucede principalmente en periodos de alta volatilidad), ocasionando el quebranto de la empresa o en el peor de los casos crisis financieras.

En este trabajo se presentó una manera de medir la probabilidad de que un acreditado incumpla con las obligaciones contraidas en la emisión de un bono (este modelo no es aplicable únicamente a la valuación de bonos, de hecho es aplicable a cualquier tipo de deuda sin importar el tipo de amortización) tomando en cuenta la situación financiera de la empresa (afirmando que el valor de un bono está relacionado con el valor de los activos del emisor) y la sensibilidad del analista para determinar el crecimiento del valor de los activos de la empresa (ya que en un entorno real el crecimiento del valor de los activos de una empresa no depende de datos históricos sino de las condiciones actuales de mercado y de las condiciones actuales de la empresa). Ningún modelo o técnica es lo suficientemente exacto como para poder afirmar que es el mejor, pero la aplicación de varios modelos nos dará un visión de en donde pueden estar las pérdidas asociadas al incumplimiento.

Por otro lado, como se mencionó anteriormente, el incumplimiento de una deuda esta asociada a dos características del acréditado: la voluntad de pago y la capacidad de pago. Administrar el riesgo de crédito tomando en cuenta la capacidad de pago es responsabilidad de los administradores de riesgo pero administrar el riesgo de crédito tomando en cuenta la voluntad de pago es responsabilidad de las autoridades que tienen la obligación de generar un marco jurídico más adecuado. Por lo tanto, para la administración del riesgo de crédito es necesaria la participación tanto de los administradores como de las autoridades para generar un mercado más sano y competitivo.

Para conlcuir, la buena administración del riesgo dará a las empresas la manera de conocer, de una forma más exacta, el requerimiento de capital para que, en el caso del incumplimiento de algunos deudores, no se ponga en riesgo el capital de la empresa, la depreciación y la pérdida de liquidez de los activos ocasionado por la disminución de la calidad del emisor, etcétera. Por lo tanto, es necesario e indispensable tomar en cuenta la administración de riesgos para la el buen funcionamiento de cualquier actividad empresarial y para mantener una estabilidad financiera.

Apéndice A

Introducción a la Teoría de la Decisión

Un problema de decisión es aquella situación en la cual se tiene que escoger una acción dentro de un conjunto de acciones donde la o las consecuencias de la acción tomada no son conocidas. La estructura de un problema de decisión se basa en tres elementos básicos[1]:

- Un conjunto $\{a_i, i \in I\}$ de acciones posibles, donde una de ellas deberá ser escogida.

- Para cada acción a_i, un conjunto $\{E_j, j \in J\}$ de eventos.

- Para cada conjunto de eventos $\{E_j, j \in J\}$, un conjunto de consecuencias $\{c_j, j \in J\}$.

La idea es que si se escoge una acción, a_i, uno y sólo uno de los eventos, E_j, occurre dando origen a la consecuencia, c_j $j \in J$.

Además de los elementos anterior descritos, el problema de decisión debe de tener una relación de preferencia, $\preceq$ la cual representa que el tomar una acción a_i es igualmente o más preferible que el tomar una acción a_j, $a_j \preceq a_i$.

[1] Véase Bernardo [6]

Definición A.1 *Un problema de decisión es definido por lo elementos* $(\mathcal{E}, \mathcal{C}, \Lambda, \preceq)$, *donde:*

i) $\mathcal{E}$ *es un álgebra de eventos relevantes,* E_j.

ii) C *es un conjunto de posibles consecuencias,* c_j.

iii) Λ *es un conjunto de acciones u opciones potenciales.*

iv) $\preceq$ *una relación de preferencia entre los elementos de* Λ.

Cada acción esta asociada a un evento y a su vez cada evento esta asociado a una sola consecuencia. Para denotar esa relación se adoptará la notación $\{c_j|E_j, j \in J\}$, dándole la interpretación de que el evento E_j lleva consigo la consecuencia c_j, $j \in J$. De la definición pasada se llega a la conclusión de que por ejemplo la acción $\{c_1|E, c_2|E^c\}$ es igual a $\{c_2|E^c, c_1|E\}$ y que la acción $\{c|E_1, c|E_2, c_j|E_j, j \in J\}$ es equivalente a la acción $\{c|E_1 \bigcup E_2, c_j|E_j, j \in J\}$, es decir, todas ellas son equivalentes.

Definición A.2

i) *Si dice que una acción* a_1 *es más o igualmente preferible que la acción* a_2 *se denota como* $a_1 \preceq a_2$.

ii) *Se dice que la acción* a_1 *es igualmente preferible a la acción* a_2 *y se denota como* $a_1 \sim a_2$ *si y sólo si* $a_1 \preceq a_2$ *y* $a_2 \preceq a_1$.

iii) *Se dice que la acción* a_2 *es más preferible a la acción* a_1 *y se denota* $a_1 \prec a_2$ *si y sólo si* $a_1 \preceq a_2$ *pero no es cierto que* $a_2 \preceq a_1$.

iv) *Se dice que la acción* a_2 *es igualmente o menos preferible que la acción* a_1 *y se denota* $a_1 \succeq a_2$ *si y sólo si* $a_2 \preceq a_1$.

v) Se dice que la acción a_2 es menos preferible que la acción a_1 y se denota $a_1 \succ a_2$ si y sólo si $a_2 \prec a_1$.

La relación de preferencia esta sujeta a cierta información inicial M_0, por ejemplo si existen las acciones de llevar un paraguas y no llevar un paraguas la acción de llevar un paraguas será más preferible si se tiene como información inicial que es muy probable que llueva y viceversa.

La definición de relación de preferencias A.2 es aplicable de la misma forma al espacio de consecuencias $\mathcal{C}$.

Definición A.3 *Se dice que un evento F es igual o más probable que un evento E y se denota $E \preceq F$ si y sólo si para todo $c_1 \prec c_2$, $\{c_2|E, c_1|E^c\} \preceq \{c_2|F, c_1|F^c\}$.*

La idea es que si escogemos dos diferentes acciones ambas con las mismas consecuencias pero diferentes eventos, se preferirá la acción donde se crea que es más probable. Esta definición se puede extender para todos los tipos de relaciones de preferencias definidos en A.2.

Si se piensa en un problema de decisión real entonces se parte de cierta información inicial M_0 y se tiene una relación de preferencia $\preceq$ dada la información inicial pero conforme llega información nueva, G, la relación de preferencias puede cambiar a $\preceq_G$.

Definición A.4 *Para cualquier evento $G \succ \phi$:*

i) $a_1 \preceq_G a_2$ si y sólo si para todo a $\{a_1|G, a|G^c\} \preceq \{a_2|G, a|G^c\}$.

ii) $E \preceq_G F$ si y sólo si para $c_1 \preceq_G c_2$, $\{c_2|E, c_1|E^c\} \preceq_G \{c_2|F, c_1|F^c\}$.

Así como la llegada de cierta información puede hacer cambiar nuestras preferencias, también existe información que es más bien indiferente a nuestras preferencias, es decir, nuestras preferencias son independientes a cierta información F. De esta idea se desprende la siguiente definición:

Definición A.5 *Se dice que un evento E es significativo dado el evento $G \succ \phi$ si para $c_1 \prec_G c_2$ implica que $c_1 \prec_G \{c_2|E, c_1|E^c\} \prec_G c_2$. Si $G = \Omega$, entonces se dice sólamente que E es significativo.*

El significado de esta definición es que si se tienen dos consecuencias seguras, c_1 y c_2, donde $c_1 \prec_G c_2$, y si E es significativo dado G se va a preferir $\{c_2|E, c_1|E^c\}$ a c_1 dado que da una posibilidad de obtener c_2. De manera similar se cumple para c_2.

Definición A.6 *Se dice que el evento E y el evento F son independientes, y se denota como $E \perp F$, si y sólo si, para todo c, c_1, c_2:*

i) $c \bullet \{c_2|E, c_1|E^c\} \Rightarrow c \bullet_F \{c_2|E, c_1|E^c\}$.

ii) $c \bullet \{c_2|F, c_1|F^c\} \Rightarrow c \bullet_E \{c_2|F, c_1|F^c\}$.

donde $\bullet$ significa cualquier relación $\prec, \succ, \sim$.

La idea es que a la llegada de información F no afecta nuestras preferencias es decir el evento no es significativo.

A.1. Axiomas de Coherencia

Para dar una visión más formal a los problemas de decisión, un problema de decisión debe de cumplir con ciertos axiomas.

Axioma A.1.1

i) *Existen por lo menos dos consecuencias c_1 y c_2 tales que $c_1 \prec c_2$.*

ii) *Para toda consecuencia c_1, c_2, y eventos E, F, sucede $\{c_2|E, c_1|E^c\} \preceq \{c_2|F, c_1|F^c\}$ ó $\{c_2|E, c_1|E^c\} \succeq \{c_2|F, c_1|F^c\}$.*

La idea del inciso *i)* de este axioma es que no existe problema de decisión si todas las consecuencias fueran indiferentes ya que cualquier acción que se tomará daría el mismo resultado. El inciso *ii)* quiere decir que todo evento es más probable o menos probable o igualmente probable, no existe otra opción.

Axioma A.1.2

i) $a \preceq a$.

ii) *Si* $a_1 \preceq a_2$ *y* $a_2 \preceq a_3$, *entonces* $a_1 \preceq a3$.

El inciso *i)* quiere decir que una opción es igualmente preferible a si misma[2]. El inciso *ii)* es acerca de la transitividad de las acciones, este axioma se extiende a eventos y consecuencias.

Axioma A.1.3

i) *Si* $c_1 \preceq c_2$ *entonces para todo evento* $G \succ \phi$ *entonces* $c_1 \preceq_G c_2$.

La idea es que si uno prefiere una consecuencia a otra, la llegada de información no cambiará nuestro estado de preferencia sobre las consecuencias. Por ejemplo si se tienen dos consecuencias, no mojarse y mojarse, y se prefiere no mojarse, el hecho de que llegue información de que es posible que llueva no cambiará nuestra preferencia sobre las consecuencias.

Axioma A.1.4 *Existe un subálgebra* S *de* $\mathcal{E}$ *y una función* $\mu : S \rightarrow [0, 1]$ *tal que:*

i) $S_1 \preceq S_2 \Leftrightarrow \mu(S_1) \leq \mu(S_2)$.

ii) $S_1 \bigcap S_2 = \phi \Rightarrow \mu(S_1 \bigcap S_2 = \mu(S_1) + \mu(S_2)$.

iii) *Para cualquier número* α *en* $[0, 1]$, *y eventos* E *y* F, *existe un evento estándar* S *tal que* $\mu(S) = \alpha$, $E \perp F$ *y* $F \perp F$.

iv) *Si* $S_1 \perp S_2 \Rightarrow \mu(S_1 \bigcap S_2) = \mu(S_1)\mu(S_2)$.

[2] Como $a \preceq a$ entonces, por la definición de $\sim$, $a \sim a$.

v) Si $E \perp S$, $F \perp S$ *y* $E \perp F$, $E \sim F \Rightarrow E \sim_F S$.

Los incisos *i)*, *ii)* y *iv)* son prácticamente para asociar la posibilidad de que ocurra un evento a una medida[3]. El inciso *iv)* sirve para asegurar que siempre existe un evento estándar para cualquier número en $[0, 1]$ independiente de cualquier evento[4]. El inciso *v)* significa que si E es independiente de F y S, y F es independiente de S, entonces el juicio de equivalencia entre E y S no debe ser afectado por F. La idea de los eventos estándar es que son elementos de un sigma álgebra con el fin de asegurar que los eventos sean significativos.

Axioma A.1.5

i) Si $c_1 \preceq c \preceq c_2$ *existe un evento* S *tal que* $c \sim \{c_2|S, c_1|S^c\}$.

ii) Para cada evento E*, existe un evento estándar* S *tal que* $E \sim S$.

El primer inciso asegura que siempre existe un evento estándar que es significativo y el segundo inciso asegura que a todo evento se le puede asociar un evento estándar.

A.2. Credibilidad y Probabilidad

Los axiomas de coherencia, la definición de eventos estándar y la medida definida en el axioma A.1.4 permiten definir lo que es una medida de credibilidad de una manera formal.

Definición A.7 Medida del Grado de Credibilidad: *Dada una relación* $\leq$*, la probabilidad,* $p(E)$*, de un evento* E *es el número real* $\mu(S)$ *asociado a cualquier evento estándar* S *tal que* $E \sim S$.

Lo anterior define a la probabilidad como un grado de credibilidad acerca de la ocurrencia de un evento que depende de una cierta información inicial, M_0, y que puede ir cambiando a la llegada de más información, $G \succ \phi$.

[3]Esta forma de asignar una medida de credibilidad es igual que la medida de probabilidad a pesar de que nunca se ha mencionado que la medida μ es una medida de probabilidad.

[4]Si este inciso no se definiera entonces se podría dar el caso que algún valor en el intervalo $[0, 1]$ no estuviera asociado a un evento estándar.

Bibliografía

[1] Acosta Altamirano, Jaime. *Análisis de Interpretación de la información financiera I.* Instituto Politécnico Nacional.

[2] Altman, Edward I. Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy. *Journal of Finance*, (23):189–209, 1968.

[3] Basle Comitee on Banking Supervision. Credit risk modelling: Current practices and applications., 1999.

[4] Basle Committee on Banking Supervision. International convergence of capital measurement and capital standards. *Basle Comittee Publications*, (4), July 1988.

[5] Baxter, Martin. *Financial Calculus.* Cambridge University Press.

[6] Bernardo, José M. and et. al. *Bayesian Theory.* Wiley, firs edition, 1994.

[7] Blanco H., Gonzalo. *El Sistema Financiero en México.* Captus Press, México, 1963.

[8] Bowers, Newton and et. al. *Actuarial Mathematics.* The Society of Actuaries., 1997.

[9] Bülman, Hans. *Mathematical Methods in Risk Theory.* Springer, New York, second edition edition, 1970.

[10] Chalasani, Prasad. *Stochastic Calculus and Finance.* Shreve, Steven, 1997.

[11] Comisión Nacional Bancaria y de Valores. Circular 1488: Emitida el 30 de ocubre de 2000.

[12] Credit Suisse Financial Products. Creditrisk+: A credito risk managment framework. 1996.

[13] Crouhy, Michael and Galai, Dan and Mark, Robert. A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking & Finance*, (24):59-117, 2000.

[14] De Lara Haro, Alfonso. *Medición y Control de Riesgos Financieros.* Limusa, 2a. edition.

[15] Fabozzi, Frank J. *Bond Markets, Analysis and Strategies.* Prentice Hall, 3th edition edition.

[16] Fristedt, Bert. *A Modern Approach to Probability Theory.* Birkhäuser, 1997.

[17] Geske, Robert. Credit risk and risk neutral default probabilities: Information about rating migration and defaults. *The Anderson School at UCLA.*

[18] Greene, William H. *Econometric Analysis.* Prentice Hall, New Jersey, second edition edition, 1993.

[19] Gupton, Greg M. and Finger, Christopher C. and Bhatia, Mickie. Creditmetrics technical document. *JP Morgan & Co*, 1997.

[20] Gutierrez Salas, Rodolfo. *Medición Integral del Riesgo de Crédito.* Limusa, México, primera edición edition, 2003.

[21] Hull, John C. *Options, Futures, & Other Derivatives.* Prentice Hall, 4th edition.

[22] Kellison, Stephen G. *The Theory of Interest.* Irwin, 2nd edition edition.

[23] Márquez Diez Canedo, Javier. *Paradigmas de riesgo crédito: apuntes del curso. Diplomado de Riesgos, Universidad Panamericana.* Sin publicar., Septiembre 2000.

[24] Márquez Diez Canedo,Javier y López Castañón, Calixto. Concentration risk in a bank loan portfolio's: Measurement, single obligor limits and capital requirements. *Documentos de Investigación, Banco de México.*, (9902), Abril 1999.

[25] Merton, Robert C. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, December(28-30):449–470, May 1974.

[26] Migon, H.S. *Statistical Inference and Integrated Approach.* Arnorld.

[27] Parzen, Emanuel. *Stochastic Processes.* Holden-Day, 3th edition edition.

[28] Pastor, J. Rey. *Análisis Matemático.* Kapelusz.

[29] Rojas Garduño, Maribell. *Aplicaciones del VaR en un Portafolio Compuesto por Instrumentos del Mercado Mexicano.* Tesis: Universidad Nacional Autonoma de México, México, 2000.

[30] Saunders, Anthony. *Credit Risk Measurement: New approaches to Value at Risk and Other Paradigms.* Wiley Frontiers in Finance. Wiley, 1999.

[31] Secretaría de Hacienda y Crédito Público. Diario oficial de la federación: Emitido el 22 de febrero de 1999.

[32] Standar & Poor's. *European Ratings Performance: Strong Growth and Low Defaults-For Now.* 2001.

[33] Vega Amaya, Oscar. Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad. *Educación Matemática*, (6), 2002.