

00324

26



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS  
(MÉTODO DE EULER)”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
M A T E M Á T I C A  
P R E S E N T A  
GABRIELA POSADAS DURÁN

DIRECTOR DE TESIS  
M.ENC. GUILLERMO GÓMEZ ALCARÁZ

2003



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCIÓN ESCOLAR

A



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN

DISCONTINUA



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
**Jefa de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Sistemas Dinámicos Discretos (Método de Euler)"

realizado por Gabriela Posadas Durán

con número de cuenta 9411641-6, quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

M. en C. Guillermo Gómez Alcaráz

Propietario

Dr. Pedro Miramontes Vidal

Propietario

M. en C. José Luis Gutiérrez Sánchez

Suplente

Mat. Luis Manuel Hernández Gallardo

Suplente

Mat. Omar Alejandro Suárez Guerrero

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

*Dedico esta tesis a:*

A mi PADRE:

*Salomón Posadas*

Cuando todo parecía incierto, cuando todo era duda, tú nunca dudaste de mí gracias por el gran apoyo que me diste y que siempre me haz dado. Porque tú me das fortaleza, comprensión y seguridad. Porque te admiró. Pero sobre todo, por tu inmenso amor, cariño y cuidado.

A mi MADRE:

*Irene Durán*

Por tus consejos. Porque conoces tu territorio y sabes bien tus limites, gracias por la libertad, el apoyo y la comprensión que siempre me haz dado.

A mi HERMANO:

*Juan Pablo*

A tus escasos 17 años tienes en mí a una admiradora porque eres mi héroe, por tu gran calidad humana, porque eres mi pequeño gran hombre que nació para ser sabio y aunque sabemos que nuestros caracteres son totalmente diferentes, cuando sea grande quiero ser como tú.

A mis AMIGOS forever (En orden alfabético)

*Alexandra, Araceli, Dalia, Oscar y Yolanda.*

Gracias por brindarme su amistad.

A mi ESCUELA:

Con el respeto y la admiración que siempre se ha profesado a esta institución  
la *Universidad Nacional Autónoma de México*

Con el orgullo y satisfacción de ser egresada de la *Facultad de Ciencias.*

A mis COMPAÑEROS

A los que AMO y me AMAN sin dependencia

A los que no temen que los caminos nos separen porque saben de los reencuentros.

*"Uno busca lleno de esperanzas  
el camino que los sueños  
prometieron a sus ansias"*

Tango "Uno",  
de Mores y Discípulo

## *Mi agradecimiento a:*

Mi ASCESOR:

*M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz*

Por haberme permitido ser su tesista, por su paciencia y comprensión, así como por sus muy constantes correcciones.

A mis SINODALES

Por sus muy acertados comentarios y contribuciones

*Dr. Pedro Miramontes Vidal*  
*M. en C. José Luis Gutiérrez Sánchez*  
*Mat. Luis Manuel Hernández Gallardo*  
*Mat. Omar Alejandro Suárez Guerrero*

# Índice general

<b>1. Nociones básicas</b>	<b>9</b>
1.1. Ecuaciones Diferenciales . . . . .	9
1.1.1. Clasificación de los puntos de equilibrio . . . . .	9
1.1.2. Identificación del tipo de puntos de equilibrio . . . . .	10
1.2. Ecuaciones en Diferencias . . . . .	11
1.2.1. Introducción . . . . .	11
1.2.2. Definiciones . . . . .	12
1.3. Sistemas Dinámicos Discretos . . . . .	13
1.3.1. Introducción . . . . .	14
1.3.2. Definiciones y Conceptos . . . . .	16
<b>2. Criterios esenciales en el estudio de los sistemas dinámicos discretos</b>	<b>23</b>
2.1. Criterios relacionados con la existencia de puntos fijos . . . . .	23
2.2. Criterio para la estabilidad asintótica de puntos fijos y puntos periódicos . . . . .	26
<b>3. Una familia sencilla, carismática, pero con una dinámica compleja: La familia cuadrática.</b>	<b>31</b>
3.1. Familia parametrizada de funciones . . . . .	31
3.2. La familia cuadrática . . . . .	32
3.2.1. Determinación de los puntos fijos . . . . .	32
<b>4. Análisis de la familia cuadrática para <math>-2 &lt; c &lt; \frac{1}{4}</math>. Parte I</b>	<b>37</b>
4.1. $q$ punto atractor: $-\frac{3}{4} \leq c < \frac{1}{4}$ . . . . .	37
4.2. Primera bifurcación de duplicación de periodo $c = -\frac{3}{4}$ . . . . .	38

4.2.1. Conjunto estable para el ciclo periódico de período 2 para $-\frac{5}{4} < c \leq -\frac{3}{4}$ . . . . .	41
4.3. Un resumen gráfico . . . . .	42
<b>5. Análisis de la familia cuadrática para <math>c \leq -2</math>.</b>	<b>45</b>
5.1. $c = -2$ . . . . .	45
5.2. $c < -2$ . . . . .	46
5.3. Conjunto de Cantor . . . . .	53
5.4. Caos . . . . .	55
<b>6. Derivada Schwarziana</b>	<b>59</b>
<b>7. Análisis de la familia cuadrática para <math>-2 &lt; c &lt; \frac{1}{4}</math>. Parte II : Transición al caos</b>	<b>65</b>
<b>8. Conjugación Topológica</b>	<b>75</b>
<b>9. Método de Euler</b>	<b>81</b>
9.1. Métodos Numéricos . . . . .	81
9.2. Método de Euler . . . . .	82
9.3. El método de Euler como un sistema iterativo: . . . . .	86
<b>10. Aplicaciones</b>	<b>89</b>
10.1. La ecuación $y' = c$ . . . . .	89
10.1.1. Soluciones de la ecuación diferencial $y' = c$ . . . . .	89
10.1.2. Análisis del método de Euler para la ecuación $y' = c$ . . . . .	90
10.2. La ecuación diferencial $y' = ky$ . . . . .	94
10.2.1. Soluciones de la ecuación diferencial $y' = ky$ . . . . .	94
10.2.2. Análisis del método de Euler aplicado a la ecuación $y' = ky$ . . . . .	95
10.3. La ecuación $y' = \alpha - \beta y^2$ . . . . .	104

10.3.1. Soluciones de la ecuación diferencial $y' = \alpha - \beta y^2$	104
10.3.2. Análisis del método de Euler para la ecuación $y' =$ $\alpha - \beta y^2$	106
10.4. Dos Ecuaciones Diferenciales $y' = kt$ y $y' = k\frac{1}{t}$	122
10.4.1. Solución de $y' = kt$ y $y' = k\frac{1}{t}$	122
10.4.2. Análisis del método de Euler para las ecuaciones $y' =$ $kt$ y $y' = k\frac{1}{t}$	123
<b>11. Apéndice A:</b>	<b>131</b>



# Introducción

Con el estudio de los sistemas dinámicos evolucionó un conjunto de técnicas que ya habfan atraído la atención de muchos matemáticos enfocados en el campo de los métodos numéricos: la iteración que no es más que un proceso de aproximación utilizado en las soluciones de ecuaciones tanto algebraicas como diferenciales.

Este proceso de tomar el resultado de una ecuación diferencial y retroalimentarlo una y otra vez mientras se observa su desarrollo, permitió descubrir fascinantes fenómenos que han atraído la atención de muchos.

Desde hace mucho tiempo, los métodos numéricos, han estado buscando una explicación a sus propias deficiencias, deficiencias que además son naturales. En esta búsqueda, encuentran en la teoría de los sistemas dinámicos discretos una explicación que trasciende. Esta tesis busca que en complicidad con los sistemas dinámicos discretos, hacer de los métodos numéricos, una potente y bella aplicación.

En el presente trabajo, se hace un análisis del método de Euler, para una condición inicial y un tamaño de paso fijo, a ciertas ecuaciones diferenciales, utilizando el enfoque y la metodología de los sistemas dinámicos discretos.

Cuando se discretizaron, las ecuaciones diferenciales más sencillas, como  $y' = c$  y  $y' = ky$  con  $k > 0$ , se observó, que salvo por el error, ambas soluciones, la solución exacta y la aproximación por el método de Euler, tenían comportamientos cualitativamente iguales, de ahí se pensó, que tan agradable coincidencia, podía darse siempre, independientemente de la ecuación diferencial en cuestión, más aún, se pensó que este comportamiento no dependería del incremento en el tamaño del paso y la condición inicial que se

tomará. Pero muy pronto nos dimos cuenta del gran error, la cuestión ahora era, explicar tal fenómeno. Buscando en diversas fuentes, resultaba que un análisis analítico, es decir, desde el punto de vista de las ecuaciones en diferencias, se volvía engorroso y al final no se aclaraba mucho el panorama, después se vio que lo más conveniente era tratar la cuestión aquí presente, desde un punto de vista cualitativo, es decir, desde el punto de vista que nos proporciona la teoría de los sistemas dinámicos discretos.

Dentro de esta amplia e interesante perspectiva que los sistemas dinámicos nos proporcionan y considerando las ecuaciones diferenciales que trabajé y pude concretizar, el ejemplo más pródigo fue una ecuación autónoma cuadrática de primer orden, esto junto con el hecho de que cualquier ecuación cuadrática es homeomorfa a la familia cuadrática, para alguna  $c$  fija, son las razones fundamentales para que la dinámica de la familia cuadrática ocupe gran parte de este trabajo.

La gran mayoría de la información que se consultó, está relacionada con la familia logística, en este trabajo, las gráficas, el análisis y los resultados se refieren a la familia cuadrática, su desarrollo es muy amplio aunque debo de advertir no acabado.

Como es de suponerse la computadora fue una herramienta fundamental en el desarrollo de esta tesis. El código de programa escrito en Mathematica para hacer las simulaciones del "análisis gráfico" y del "diagrama de bifurcación" puede encontrarse en [rholmgr@alleg.edu](mailto:rholmgr@alleg.edu). Muchas de las gráficas mostradas en el siguiente trabajo han sido realizadas en el paquete Mathematica y retocadas en "paint" y "PRWin 3.0".

El presente trabajo está constituido de 10 capítulos y un apéndice o si se prefiere, de una forma más compacta, el siguiente trabajo consta de cuatro partes:

Como todo buen principio, el capítulo 1, está constituido por las definiciones y conceptos básicos relacionados con ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias y sistemas dinámicos discretos con el fin de establecer un lenguaje común entre el lector y el desarrollo posterior de este trabajo.

En el capítulo dos podemos encontrar dos criterios importantes sobre la estabilidad asintótica de puntos periódicos.

El capítulo 3 junto con el capítulo 4, 5, 6, y 7 forman la segunda parte de esta tesis, y en ellos se explica la dinámica de la familia cuadrática. Más específicamente en capítulo 3, se introduce la familia cuadrática y se hace énfasis en el nacimiento de un punto fijo cuando  $c = \frac{1}{4}$ , antes de este valor del parámetro, la dinámica de dicha familia no tiene mucho interés ya que la órbita de cualquier punto en  $\mathbb{R}$  se va a infinito. Si  $c < \frac{1}{4}$  entonces este punto se bifurca en dos, uno de ellos siempre repulsor. También en este capítulo se define el conjunto  $I_c$  en el cual se desarrolla la dinámica interesante de  $Q_c$ , es decir, cualquier punto en  $I_c$ , para el cual exista una iteración que se salga de  $I_c$ , la órbita de dicho punto tenderá a infinito.

Al advertir que uno de los puntos fijos es atractor si y solo si  $c \geq -\frac{3}{4}$ , en el capítulo 4 se expone la primera bifurcación de duplicación de período, se calcula analíticamente los puntos periódicos atractores de período primo 2, así como su conjunto estable. Hasta aquí, aún podemos decir que la dinámica en cuestión es sencilla, esto nos permite concluir el capítulo con un diagrama "síntesis" en el que se muestra toda la dinámica de  $Q_c$  para  $-\frac{5}{4} \leq c \leq \frac{1}{4}$ .

El capítulo 5 presenta el análisis de la dinámica de la familia cuadrática para  $c \leq -2$ , se observa que el conjunto de puntos en  $I_c$  cuya órbita pertenece siempre a este intervalo para cualquier iteración es un conjunto de Cantor. A dicho conjunto se le denota como  $\Lambda$ . Se demuestra que efectivamente si  $c < \frac{-5+2\sqrt{5}}{2}$ ,  $\Lambda$  es un conjunto de Cantor. Considerando la definición de Devaney, una función es caótica si es topológicamente transitiva, es sensible a las condiciones iniciales y el conjunto de puntos periódicos es denso; se demuestra que  $Q_c$  es caótica en  $\Lambda$  si  $c < \frac{-5+2\sqrt{5}}{2}$ . La razón de este brinco, que por el momento evita los valores de  $c$  en  $[-2, -\frac{5}{4}]$ , es que, esta dinámica tan bonita que la familia cuadrática muestra para  $c < -2$  en  $I_c$ , se presenta antes, en algunos subintervalos de  $I_c$  al iterar  $Q_c^n$ , con  $n$  el período de algún punto periódico atractor, y para algún valor del parámetro donde se da el brinco.

La dinámica de la función  $Q_c$  para valores del parámetro en el brinco, se esboza, hasta el capítulo 7, para ello se utiliza una radiografía de la dinámica de  $Q_c$ , vea la figura 1 de este mismo capítulo. A pesar de que muchas partes de este diagrama no son del todo comprendidas; despertando una serie de preguntas como la autosemejanza de dicho diagrama, nos permite darnos cuenta de fenómenos como el de "la cascada de duplicación de período".

El resultado que nos permite valernos del diagrama anterior para conocer esta diversidad de órbitas atractoras periódicas, se expone en el capítulo 6; si tenemos una función con derivada schwarziana negativa y un punto

periódico atractor  $p$  de  $f$ , entonces el conjunto estable de  $p$  ya sea que se extienda a infinito o a menos infinito o exista un punto crítico cuya órbita es atraída hacia  $p$ . Como  $Q_c$  tiene derivada schwarziana negativa y el conjunto estable para cualquier punto periódico atractor no se extiende ni a infinito ni a menos infinito, el teorema anterior nos garantiza que si  $Q_c$  tiene una órbita atractora periódica, entonces la órbita del cero, único punto crítico de esta familia, está en el conjunto estable de dicha órbita.

En el capítulo 7, se analiza la ruta hacia el caos.

La tercera parte de esta trabajo consta exclusivamente del capítulo 8, este capítulo es la conexión de la familia cuadrática y el análisis del comportamiento de la solución aproximada por Euler de la ecuación  $y' = \alpha + \beta y^2$ . Aquí se demuestra un teorema muy importante, el cual establece que si  $f$  es topológicamente conjugada a  $g$  entonces,  $g$  hereda la dinámica de  $f$  y el capítulo se cierra mostrando que cualquier función cuadrática es topológicamente conjugada a  $Q_c$ .

La cuarta y última parte, queda constituida por los capítulos 9 y 10. El capítulo 9 es una introducción al método de Euler. La propiedad de que este método se pueda ver como un sistema iterativo es la razón fundamental de su relación con los sistemas dinámicos. En el capítulo 10 se hace un análisis sobre la aplicación del método de Euler para diferentes ecuaciones. Cada una de las ecuaciones diferenciales seleccionada aquí estuvo motivada por aplicaciones bien concretas y de hecho, por el afán de discretizar estas aplicaciones es como surgió toda esta investigación.

# Capítulo 1

## Nociones básicas

### 1.1. Ecuaciones Diferenciales

**Definición 1.1** La forma general de una ecuación de primer orden es:

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t, y)$$

donde  $f(t, y)$  está definida y es una función continua en  $t$  y  $y$  en cierto dominio  $D_f \subset \mathbb{R}^2$ .

Una solución de una ecuación diferencial es una función diferenciable que satisface la ecuación diferencial. Esto es, para  $y' = f(t, y)$ ,  $y = y(t)$  es una solución si  $y'(t) = f(t, y(t))$ .

**Definición 1.2** Si en  $y' = f(t, y)$ ,  $f$  no depende explícitamente de  $t$ , entonces  $y' = f(y)$ , y dicha ecuación es llamada **autónoma**.

**Definición 1.3** Supóngase que  $y_0$  es una solución constante de la ecuación autónoma  $y' = f(y)$ , entonces  $y_0$  es un **punto de equilibrio** de la ED y puede ser obtenida de  $f(y) = 0$ .

#### 1.1.1. Clasificación de los puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio son sumamente importantes en el estudio de las soluciones de una ecuación autónoma. Así dada su importancia los puntos de equilibrio se dividen en tres clases:

**Definición 1.4** Un punto de equilibrio  $y_0$ , es un "sumidero" si cualquier solución con condición inicial suficientemente cercana a  $y_0$  es asintótica a  $y_0$  cuando  $t$  tiende a  $+\infty$ .

La idea de sumidero, debe traernos a la mente un sumidero del lavabo de cocina con el punto de equilibrio en el desagüe. Si el agua cae suficientemente cercana al desagüe fluirá hacia tal punto.

**Definición 1.5** Un punto de equilibrio  $y_0$ , es una "fuente" si cualquier solución con condición inicial suficientemente cercana a  $y_0$  tiende a alejarse de  $y_0$  en la medida de que  $t$  tiende a  $+\infty$ .

El nombre fuente debe llevarnos a imaginar las soluciones como si brotaran de algún generador de energía.

**Definición 1.6** Se dice que un punto de equilibrio es un nodo si no es un sumidero ni una fuente.

### 1.1.2. Identificación del tipo de puntos de equilibrio

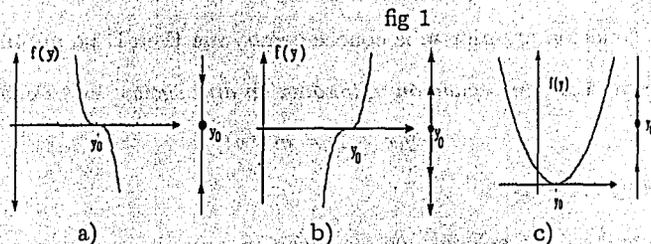
**Teorema 1.7 (de linealización)** Supóngase que  $y_0$  es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dt} = f(y)$ , donde  $f$  es una función continua de clase  $C^1$ .

- Si  $f'(y_0) < 0$ , entonces  $y_0$  es un sumidero.
- Si  $f'(y_0) > 0$ , entonces  $y_0$  es una fuente.
- Si  $f'(y_0) = 0$  o si  $f'(y_0)$  no existe, entonces se necesita información adicional para determinar el tipo de  $y_0$ .

#### DEMOSTRACIÓN:

- Como  $f'(y_0) < 0$ , entonces  $f$  está decreciendo cerca de  $y_0$  y como  $f(y_0) = 0$ , entonces  $f(y)$  debe ser positiva cuando  $y$  es menor que  $y_0$  y  $f(y)$  debe ser negativa cuando  $y$  es mayor que  $y_0$ . Así  $y(t)$  es creciente si  $y$  es menor que  $y_0$  y  $y(t)$  es decreciente si  $y$  es mayor que  $y_0$ . Por lo anterior y por el teorema de unicidad  $y(t) \rightarrow y_0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para  $y(t)$  suficientemente cercano a  $y(t_0)$ . Por lo tanto  $y_0$  es un sumidero.

- b) Como  $f'(y_0) > 0$ , entonces  $f$  está creciendo cerca de  $y_0$  y como  $f(y_0) = 0$ , entonces  $f(y)$  debe ser negativa cuando  $y$  es menor que  $y_0$  y  $f(y)$  debe ser positiva cuando  $y$  es mayor que  $y_0$ . Así  $y(t)$  es decreciente si  $y$  es menor que  $y_0$  y  $y(t)$  es creciente si  $y$  es mayor que  $y_0$ . Por lo anterior  $y(t)$  tiende a alejarse de  $y_0$  para  $y(t)$  suficientemente cercano a  $y(t_0)$ . Por lo tanto  $y_0$  es una fuente.
- c) No se puede concluir nada sobre la clasificación de  $y_0$  si  $f''(y_0) = 0$  porque puede haber tres posibilidades, vea figura 1.



En la fig 1 inciso a)  $y_0$  es un sumidero en el segundo caso de la figura 1 inciso b)  $y_0$  es un fuente y en el tercer caso de la fig 1 inciso c)  $y_0$  es un nodo.

La derivada  $f'(y_0)$  nos da el comportamiento de la mejor aproximación lineal de  $f$  cerca de  $y_0$ . Si se reemplaza  $f$  por su mejor aproximación lineal entonces la ecuación diferencial que obtenemos es muy cercana a la ecuación diferencial original para las  $y$  más próximas a  $y_0$ .

## 1.2. Ecuaciones en Diferencias

### 1.2.1. Introducción

Las ecuaciones en diferencias (E en D) usualmente describen la evolución de ciertos fenómenos a través del tiempo y a diferencia de las ecuaciones diferenciales, que describen tal evolución en un tiempo continuo, éstas lo hacen en tiempos discretos. Las ecuaciones en diferencias de primer orden aparecen en muchos contextos de la biología, economía y ciencias sociales, tales ecuaciones a pesar de ser simples y determinísticas pueden exhibir una

sorprendente variedad de comportamientos dinámicos que van de puntos atractores a bifurcaciones de puntos periódicos e incluso desembocar en caos.

## 1.2.2. Definiciones

**Definición 1.8** Una ecuación en diferencias está dada por

$$y(n+1) = g(n, y(n))$$

donde  $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

A la ecuación anterior se le conoce como una E en D no autónoma.

**Definición 1.9** Una ecuación autónoma en diferencias, está dada por

$$y(n+1) = g(y(n))$$

donde  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Este trabajo se enfocará en las ecuaciones en diferencias más sencillas es decir en las ecuaciones en diferencias de primer orden.

**Definición 1.10** Una ecuación homogénea en diferencias de primer orden, está dada por

$$y(n+1) = a(n)y(n) \quad y(n_0) = y_0 \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (1.1)$$

**Definición 1.11** Una ecuación no homogénea en diferencias de primer orden, está dada por

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n) \quad y(n_0) = y_0 \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (1.2)$$

Para obtener la solución a la ecuación ( 1.1 ) simplemente se iterará.

$$y(n_0+1) = a(n_0)y(n_0) = a(n_0)y_0$$

$$y(n_0+2) = a(n_0+1)y(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)y_0$$

$$y(n_0+3) = a(n_0+2)y(n_0+2) = a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)y_0$$

y por inducción es fácil ver que:

$$\begin{aligned}
y(n) &= y(n_0 + n - n_0) \\
&= a(n-1)a(n-2)\dots a(n_0)y_0 \\
&= \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0
\end{aligned}$$

Ahora bien, se encontrará una solución a la ecuación (1.2) .

$$\begin{aligned}
y(n_0 + 1) &= a(n_0)y(n_0) + g(n_0) \\
y(n_0 + 2) &= a(n_0 + 1)y(n_0 + 1) + g(n_0 + 1) \\
&= a(n_0 + 1)a(n_0)y_0 + a(n_0 + 1)g(n_0) + g(n_0 + 1)
\end{aligned}$$

Ahora bien, se utilizará inducción para mostrar que para toda  $n \in \mathbb{Z}^+$

$$y(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[ \prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r) \quad (1.3)$$

Para demostrar lo anterior, supóngase que (1.3) se cumple para  $n = k$ . Entonces de la ecuación (1.2)  $y(k+1) = a(k)y(k) + g(k)$  que de (1.3), nos lleva a:

$$\begin{aligned}
y(k+1) &= a(k) \left[ \prod_{i=n_0}^{k-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[ a(k) \prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r) + g(k) \\
&= \left[ \prod_{i=n_0}^k a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[ \prod_{i=r+1}^k a(i) \right] g(r) + \left[ \prod_{i=kr+1}^k a(i) \right] g(k) \\
&= \left[ \prod_{i=n_0}^k a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^k \left[ \prod_{i=r+1}^k a(i) \right] g(r)
\end{aligned}$$

por lo tanto la formula (1.3) se cumple, para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$

## 1.3. Sistemas Dinámicos Discretos

### 1.3.1. Introducción

**Definición 1.12** Un sistema dinámico discreto puede ser caracterizado como una función  $f : I \rightarrow I$ ,  $I \subset \mathbb{R}^m$  y sus composiciones consigo misma

Así pues, se trabajará con funciones definidas del intervalo  $I$  en el intervalo, abierto o cerrado. (lo anterior para poder realizar la composición).

Las funciones que determinan un sistema dinámico también se les conoce como mapeos.

**Definición 1.13** Las iteraciones de  $f$  son las funciones que se obtienen al componer  $f$  consigo misma:

$$f = f^{(1)}, \quad f \circ f = f^{(2)}, \quad f \circ f \circ f = f^{(3)}, \quad \dots, \quad f^{(n-1)} \circ f = f^{(n)}, \quad \dots$$

Estas funciones ayudan a definir el movimiento que se genera en el intervalo  $I$ .

Así por ejemplo si se tiene

$$f(x) = -x^3$$

y si se compone  $f$  consigo misma se obtiene

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = -(-x^3)^3 = x^9 = x^{3^2} \\ f^3(x) &= (f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f^2)(x) = -(x^9)^3 \\ &= -x^{27} = -x^{3^3} \end{aligned}$$

$$f^n(x) = (f \circ f^{n-1})(x) = (-1)^n x^{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ahora interesa contestar, las siguientes preguntas:

Dado un número real  $x_0$ , ¿qué pasa con  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0)$ ?, ¿qué propiedades tiene el conjunto  $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$ . Más generalmente en un sistema dinámico se pregunta ¿cómo y a dónde van los puntos y qué les pasa asintóticamente hablando?

Se intenta visualizar estas preguntas de otra forma. Supóngase que cada uno de nosotros vivimos en un lugar de la línea recta y que nuestra dirección esta dada por un mapeo en el cual nuestro departamento esta colocado: Por ejemplo, supóngase que su departamento es el 2.

Cada año el gobierno decreta que usted se debe trasladar a un nuevo departamento cuya dirección será encontrada elevando al cubo su dirección actual y después multiplicar por menos uno, esto es, se aplicará la función  $f(x) = -x^3$  a su dirección actual para encontrar su nueva dirección. Entonces como actualmente usted está residiendo en el número dos, el siguiente año estará viviendo en  $f(2) = -2^3 = -8$ . Un año después estará viviendo en  $f^2(2) = -(-8)^3 = 512$  y después de  $n$  años estará viviendo en  $f^n(2) = (-1)^n 2^{3^n}$ . Incluso si usted es una persona de edad avanzada, es claro que usted nunca vivirá en el mismo lugar dos veces. Se considerará usted un hombre afortunado de andar herrante por la vida. El valor absoluto de su dirección se convertirá en un valor más grande y usted se movera de un lugar a otro del cero. Por lo que si yo empiezo en el punto 2, entonces  $f^n(x)$  crece sin cota alguna en valor absoluto y oscilará.

Supóngase ahora que usted empieza en el numero  $\frac{1}{2}$ . El siguiente año usted estará en  $f(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$ , el siguiente año estará en  $f(-\frac{1}{8}) = f^2(\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{8})^3 = -\frac{1}{512}$ , y después de  $n$  años se estará en  $f^n(\frac{1}{2}) = (-1)^n (\frac{1}{2})^{3^n}$ .

Entonces cada año se moverá de un lado a otro del cero, pero conforme el tiempo pase su número no se alejará del cero, sino que tenderá a él.

En general, su dirección después de  $n$  años sera  $f^n(x_0) = (-1)^n (x_0)^{3^n}$ , donde  $x_0$  es la primera dirección. Si  $|x_0| > 1$  se ve que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n x_0^{3^n}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_0|^{3^n} = \infty$$

En valor absoluto,  $f^n(x_0)$ , se incrementará sin cota alguna y el factor  $(-1)^n$  causará que el factor  $f^n(x_0)$  oscile de un lado a otro del cero. Por



otro lado, si  $0 < |x_0| < 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = 0$ , entonces mientras que  $f^n(x_0)$  oscila de un lado a otro del cero tendiendo a cero cuando  $n$  es suficientemente grande. En términos de escoger un departamento, una persona cuya dirección sea menor que uno en valor absoluto preferirá un departamento cuya dirección es mas pequeña que uno, conforme el tiempo pase, esa persona no se tendrá que mover anualmente más lejos de su casa.

Consideremos tres puntos importantes:  $-1, 0, 1$ . Nótese que  $f(-1) = 1$  y  $f(1) = -1$ . Por lo tanto  $-1$  y  $1$  forman un 2-ciclo. Más adelante se definirá formalmente. Así que si usted estuviera viviendo en  $1$  cambiaría su domicilio con la persona que estuviera viviendo en  $-1$  por un año y luego se regresaría a su domicilio original por otro año y después volvería a cambiar con su socio del  $-1$  y así sucesivamente, es decir cada dos años regresaría a su mismo lugar, qué aburrido ¿no lo cree?. Pero más aburrido sería si su dirección fuera  $0$  porque usted nunca se mudaría en toda su larga vida. Se dice, que cero es un *punto fijo*.

Así se puede decir que en esencia el objetivo principal de la teoría de los sistemas dinámicos es entender todos los puntos de su dominio.

Para hacer el análisis necesitamos una serie de conceptos.

### 1.3.2. Definiciones y Conceptos

**Definición 1.14** Si  $x_0$  es un elemento de  $I$ , entonces la *órbita* de  $x_0$  bajo  $f$  es el siguiente conjunto.

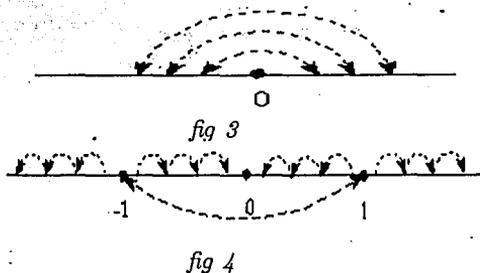
$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\} = \{f^n(x_0) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

y generalmente se denota como  $\mathcal{O}(x_0, f)$ .

Este conjunto  $\mathcal{O}(x_0, f)$  describe las distintas posiciones que visita un punto al paso del tiempo (ó al paso de las iteraciones)

**Definición 1.15** El *retrato fase* es un diagrama que representa posibles posiciones del sistema y flechas que indican el cambio de posiciones bajo la iteración de una función. Es una gráfica en la recta real, donde se dibujan todas las órbitas de un sistema dinámico.

**Ejemplo 1.16** Las siguientes gráficas, fig 3 y fig 4, son retratos fases de  $f(x) = -x$  y  $f(x) = x^3$



La siguiente definición es una de las más importantes

**Definición 1.17** Si  $f$  es una función real de variable real y  $f(c) = c$ , entonces  $c$  es un punto fijo de  $f$ .

Denotamos al conjunto de puntos fijos por  $Fix(f)$ . Entonces una función tiene un punto fijo en  $c$  si y sólo si su gráfica interseca la línea recta  $y = x$  en el punto  $(c, c)$ . En este caso la  $O(x_0, f) = \{x_0\}$ .

**Ejemplo 1.18** El mapeo  $f(x) = -x^3$ , tiene un punto fijo que para encontrarlo analíticamente se debe resolver

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x \iff \\
 -x^3 &= x \iff \\
 -x^3 - x &= 0 \iff \\
 x(x^2 + 1) &= 0 \iff \\
 x = 0 \text{ o } (x^2 + 1) &= 0 \iff \\
 x &= 0
 \end{aligned}$$

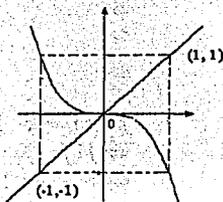


fig 5

Por lo tanto su punto fijo es: 0.

Se puede observar que  $f$  mapea 1 en -1 y -1 en 1.

Consecuentemente a estos puntos, 1 y -1, se les da el nombre de punto de período dos o 2 - ciclo y al conjunto  $\{-1,1\}$  una órbita periódica de  $f$ .

**Definición 1.19** El punto  $x$  es un punto periódico de período  $n$  si

$$f^n(x) = x$$

En otras palabras  $x$  es un punto periódico de  $f$  con período  $n$ , si  $x$  es un punto fijo de  $f^n$ .

**Definición 1.20** Un punto periódico  $x$  tiene período primo  $n_0$  si

$$f^{n_0}(x) = x \text{ y } f^n(x) \neq x$$

para cualquier  $0 < n < n_0$ .

Esto es, un punto periódico tiene período primo  $n_0$ , si éste regresa por vez primera a su lugar original de donde empezó en la  $n_0$  iteración.

Los puntos fijos de  $f$  se consideran puntos periódicos de período 1. Se denotará al conjunto de puntos periódicos de período  $n$  por  $\text{Per}_n(f)$ .

A el conjunto de todas las iteraciones de puntos periódicos se le denomina una órbita periódica

**Ejemplo 1.21.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -x$ . Obsérvese que 0 es el único punto fijo. Para ver que todos los puntos del dominio de la función son puntos periódicos de período 2, de hecho  $\text{Per}_2 f = \mathbb{R}$ , resuélvase la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} f^2(x) &= x \\ \Leftrightarrow f(f(x)) &= x \\ \Leftrightarrow -(-x) &= x \\ \Leftrightarrow x &= x \end{aligned}$$

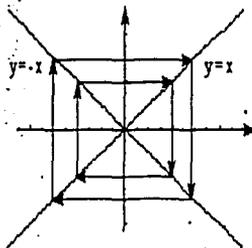


fig 16

Por lo tanto para todo punto en los reales se cumple que ese punto está en el conjunto de puntos periódicos de período dos.

**Definición 1.22** Sea  $f$  una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , el punto  $x$  es un punto eventualmente periódico de período  $n$  si  $x$  no es periódico pero existe  $m > 0$  tal que  $f^{n+i}(x) = f^i(x)$  para  $i \geq m$  esto es  $f^i(x)$  es periódico para  $i \geq m$ .

Obsérvese que con esta definición, es natural dar la siguiente definición.

**Definición 1.23**  $x$  es un punto eventualmente fijo, si es eventualmente periódico de período 1.

**Ejemplo 1.24** Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x) = 0$ , cualquier punto en su dominio excepto el cero es un punto eventualmente fijo y  $m = 1$  sirve.

Ahora bien, hasta el momento se han visto tres clases de puntos importantes, puntos fijos, puntos periódicos y puntos eventualmente periódicos, pero hay una cuarta clase, los puntos periódicos asintóticamente estables.

**Definición 1.25** Sea  $f$  una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $p$  un punto periódico de  $f$  con período  $k$ . Entonces  $x$  es asintótico a  $p$  si la sucesión  $x, f^k(x), f^{2k}(x), f^{3k}(x) \dots$  converge a  $p$ . En otras palabras

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = p$$

**Ejemplo 1.26** Considérese la función  $f(x) = x^3$ . Cero es un punto fijo, supóngase se empieza con  $\frac{1}{2}$  e iteramos  $f$  sucesivamente, se obtiene

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^9}, \dots$$

entonces  $\frac{1}{2}$  no es periódico y nunca alcanza a cero, a pesar de que éste parece estar más y más cerca de él. Esto es  $f^n(\frac{1}{2})$  converge a cero cuando  $n$  tiende a infinito. Se deduce que  $\frac{1}{2}$  es asintótico a 0 bajo  $f(x) = x^3$ .

**Definición 1.27** El conjunto estable de  $p$  se denota como  $W^s(p)$  y consiste de todos los puntos que son asintóticos a  $p$ .

Nótese que si se buscan puntos en el conjunto estable de un punto con periodo primo  $k$ , se debe considerar la sucesión:

$$x, f^k(x), f^{2k}(x), f^{3k}(x), \dots$$

y no la sucesión de la órbita  $\mathcal{O}(x, f)$ :

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x)$$

**Definición 1.28** Si la sucesión  $\{|x|, |f(x)|, |f^2(x)|, |f^3(x)|, \dots\}$  crece sin cota alguna, entonces  $x$  es asintóticamente estable a infinito.

**Ejemplo 1.29** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x^3$ . Obsérvese que  $x = 0$  es un punto fijo,  $1$  es un punto periódico de periodo  $2$  junto con  $-1$ . El conjunto estable de cero,  $W^s(0)$ , consiste de todos los puntos en el intervalo  $(-1, 1)$ . El conjunto estable de infinito,  $W^s(\infty)$  consiste en todos los puntos en el intervalo  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ . El conjunto estable de  $-1$  contiene solo dos puntos  $-1$  y  $1$  al igual que el conjunto estable de  $1$  es decir:

$$\begin{aligned} W^s(0) &= (-1, 1), & W^s(\infty) &= (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \\ W^s(-1) &= \{-1, 1\}, & W^s(1) &= \{-1, 1\} \end{aligned}$$

Aún y cuando  $p$  no es un punto periódico se puede definir un punto  $x$  asintótico a  $p$  si  $|f^i(x) - f^i(p)| \rightarrow \infty$  cuando  $i \rightarrow \infty$ .

Si analíticamente queremos estudiar todas las órbitas y clasificarlas, resulta una tarea prácticamente imposible.

Por ejemplo si  $f(x)$  es un polinomio cuadrático para encontrar explícitamente los puntos periódicos de periodo  $n$  se necesita resolver la ecuación  $f^n(x) = x$ , que significa encontrar las raíces de un polinomio de grado  $2^n$ .

**Definición 1.30** Como su nombre lo indica el **análisis gráfico** usa la gráfica de la función para analizar su dinámica.

Lo anterior se entenderá mejor si se ilustra con ejemplos. Empecemos con la dinámica de la función  $f(x) = -x^3$ , así pues antes que nada grafíquese la función  $f$  y la identidad es decir la recta  $y = x$  en el mismo sistema coordenado. Se tratará de determinar la órbita de un punto que cae en el intervalo  $(0, 1)$ . Empecemos en el punto  $a$  o si se prefiere en el punto  $(a, a)$ . De este punto tracemos una línea vertical hasta tocar la gráfica de  $f$ . Como

el punto se mueve verticalmente al valor de la abscisa, es decir, el valor en el eje  $x$  deberá ser  $a$  y el valor de  $y$  ( el valor en la ordenada ) deberá ser  $f(a)$ . Ahora muévase horizontalmente hasta tocar la recta  $y = x$  para arribar al punto  $f(a) \circ (f(a), f(a))$ . Repitiendo este proceso, ahora se mueve verticalmente a la gráfica de  $f$  para llegar al punto  $(f(a), f^2(a))$  y después horizontalmente hasta tocar la línea  $y = x$  para llegar a  $(f^2(a), f^2(a))$ . Continuando con este proceso se puede ver que  $f^n(x)$  se aproxima a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Un análisis más detallado sugiere que

$$w^s(0) = (-1, 1), w^s(\infty) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty), w^s(-1) = \{-1\}, w^s(1) = \{1\}$$

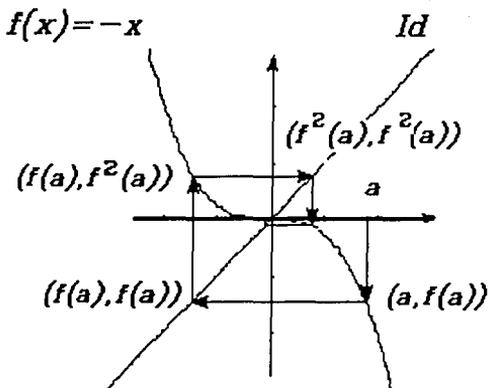


fig 7

STATE OF ALABAMA  
DEPARTMENT OF REVENUE  
MONTGOMERY, ALABAMA

## Capítulo 2

# Criterios esenciales en el estudio de los sistemas dinámicos discretos

### 2.1. Criterios relacionados con la existencia de puntos fijos

A continuación enunciaremos dos teoremas, que establecen condiciones suficientes para la existencia de puntos fijos.

**Teorema 2.1** *Sea  $I = [a, b]$  y  $f : I \rightarrow I$  continua, entonces  $f$  tiene al menos un punto fijo en  $I$ .*

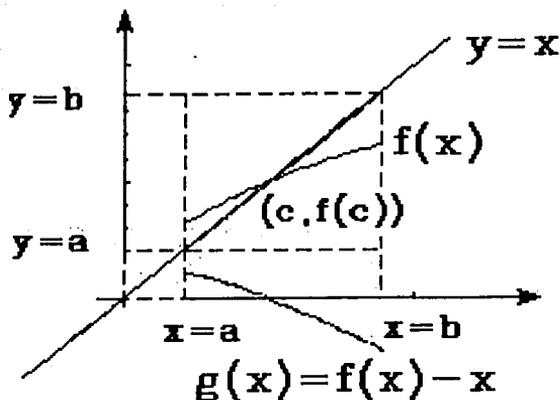


fig 1

**DEMOSTRACIÓN:**

Sea  $I = [a, b]$  y  $f : I \rightarrow I$  continua. Si  $f(a) = a$  o si  $f(b) = b$ , entonces tanto  $a$  como  $b$  son puntos fijos y ya acabamos. Supóngase que  $f(a) \neq a$  y que  $f(b) \neq b$ . Sea  $g(x) = f(x) - x$ . Como  $f(a)$  está en  $(a, b)$ , entonces  $f(a) > a$  así mismo  $f(b) < b$ , entonces  $g(a) = f(a) - a > 0$  y  $g(b) = f(b) - b < 0$  y como  $g$  es continua, el teorema del valor intermedio implica que existe un  $c$  en  $[a, b]$  tal que  $g(c) = 0$ . Pero  $g(c) = f(c) - c$ , entonces  $f(c) = c$ , que es lo que queríamos demostrar. ■

**Ejemplo 2.2** Para  $f(x) = x^3$  e  $I = [-1, 1]$ , el teorema anterior garantiza que  $f$  tiene al menos un punto fijo.

**Teorema 2.3** Sea  $I$  un intervalo cerrado y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Si  $f(I) \supset I$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $I$ .

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

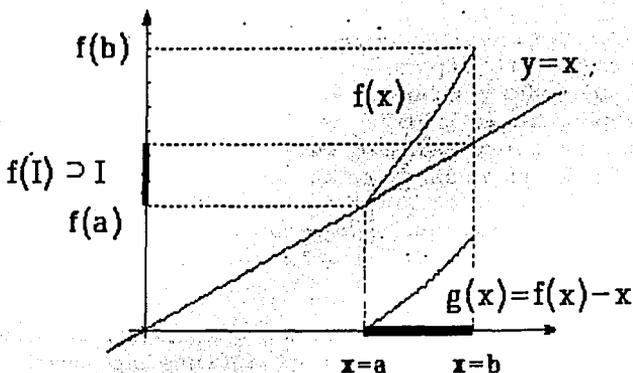


fig 2

**DEMOSTRACIÓN:**

Sea  $I = [a, b]$  un intervalo cerrado. Como  $f(I) \supset I$ , entonces existe un  $\xi_1$  y  $\xi_2$  en  $I$ , tales que  $f(\xi_1) = a$  y  $f(\xi_2) = b$ . Si  $\xi_1 = a$  o si  $\xi_2 = b$ , entonces, ya acabamos. En caso contrario,  $a < \xi_1 < b$  y  $a < \xi_2 < b$ . Si se define  $g(x) = f(x) - x$ , entonces  $g(\xi_1) = f(\xi_1) - \xi_1 < 0$ , ya que  $f(\xi_1) = a$  y  $a < \xi_1$ . Igualmente  $g(\xi_2) = f(\xi_2) - \xi_2 > 0$ , ya que  $f(\xi_2) = b$  y  $b > \xi_2$ . Así pues como  $g(\xi_1) < 0$  y  $g(\xi_2) > 0$ , y  $g$  es continua, por el teorema del valor intermedio existe un  $\xi_3$  entre  $\xi_1$  y  $\xi_2$  (y por lo tanto en  $I$ ) que satisface  $g(\xi_3) = 0$  y  $f(\xi_3) = \xi_3$  lo cual finaliza la prueba. ■

**Ejemplo 2.4** Sea  $f : [1, 2] \rightarrow [1, 8]$  con  $f(x) = x^3$ . Obsérvese que  $f[1, 2] = [1, 8] \supset [1, 2]$ . Así, por el teorema anterior,  $f$  tiene un punto fijo. 1.

## 2.2. Criterio para la estabilidad asintótica de puntos fijos y puntos periódicos

Los puntos fijos cuya derivada no es igual a uno en valor absoluto son los suficientemente importantes como para tener su propio nombre. Estos se llaman puntos fijos hiperbólicos. La hiperbolicidad es uno de los temas más importantes en los sistemas dinámicos. A continuación se dan ciertos criterios primero se demuestra para puntos fijos y después se menciona la generalización para puntos periódicos de período  $n$ .

**Definición 2.5** Sea  $p$  un punto periódico de período  $n$ . El punto  $p$  es un punto hiperbólico si  $|f^n(x)| \neq 1$ .

El siguiente lema se puede demostrar como una condición necesaria y suficiente pero como aquí se utilizará sólo una implicación, en el teorema siguiente, sólo se enunciará en una dirección.

**Lema 2.6** Si  $f(x)$  es continua en  $p$  tal que  $c < f(p) < d$  con  $c \in \mathbb{R}$  y  $d \in \mathbb{R}$ , entonces existe un  $\delta > 0$ , tal que si  $x$  está en la vecindad del dominio de  $f$ ;  $x \in (p - \delta, p + \delta)$ , entonces  $c < f(x) < d$ .

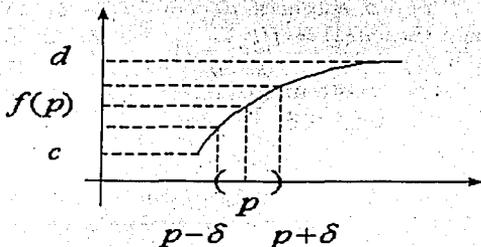


fig 3

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $\varepsilon = \min\{d - f(p), f(p) - c\}$ . Como  $f(x)$  es continua en  $p$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - p| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ . Pero

$|x - p| < \delta$  es equivalente a  $-\delta < x - p < \delta$  o  $p - \delta < x < p + \delta$ ; es decir  $x \in (p - \delta, p + \delta)$  similarmente  $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$  es equivalente a

$$f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon \quad (2.1)$$

Como  $f(p) - c \geq \varepsilon$  y  $\varepsilon \leq d - f(p)$  la desigualdad anterior (2.1) implica que

$$\begin{aligned} f(p) - (f(p) - c) &< f(x) < f(p) + (d - f(p)) \\ \implies c &< f(x) < d. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $c < f(x) < d$ , si  $x \in (p - \delta, p + \delta)$  ■.

**Teorema 2.7** Sea  $f$  una función de clase  $C^1$  (su derivada existe y es continua en todo punto de su dominio  $D \subset \mathbb{R}$ ) y  $p$  un punto periódico con período primo  $k$ . Si  $|(f^k)'(p)| < 1$ . Entonces existe un intervalo abierto  $U$  alrededor de  $p : U(p)$  tal que si  $x$  está en  $U$ , implica que  $x$  es un punto asintóticamente estable a  $p$ . Es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = p.$$

#### DEMOSTRACIÓN

Sea  $p$  un punto periódico de  $f$  con período primo  $k$ , es decir  $f^k(p) = p$  y  $f^n(p) \neq p$  para cualquier  $0 < n < k$  tal que  $|(f^k)'(p)| < 1$ .

Tómese una  $M$  que cumpla que  $|(f^k)'(p)| < M < 1$ . Como  $(f^k)'$  es una función continua por el lema anterior, existe una  $\delta > 0$  tal que si  $x \in (p - \delta, p + \delta)$  entonces  $|f^{k'}(x)| < M$ .

Considérese  $U(p) = (p - \delta, p + \delta)$

Demostremos que todas las órbitas de los puntos en  $U(p)$  son atraídos a  $p$ .

Sea  $x \in U$ , con  $x \neq p$ . Como  $f$  es una función de clase  $C^1$ , entonces  $f^k$  es una función de clase  $C^k$  (ya que la composición de dos funciones derivables es derivable y la composición de dos funciones continuas es una función continua). Así aplicando el teorema del valor medio a  $f^k$  se tiene que existe  $c$  en  $[x, p]$  o  $[p, x]$ , tal que

$$|f^k(x) - f^k(p)| = |(f^k)'(c)| |x - p|$$

Como  $c \in U$

$$|(f^k)'(c)| < M$$

Se tiene entonces que

$$|f^k(x) - f^k(p)| < M |x - p| \quad (2.2)$$

Pero  $f^k(p) = p$ , de donde resulta que

$$|f^k(x) - p| < M |x - p|$$

Como  $M < 1$  se tiene que la distancia de  $f^k(x)$  a  $p$  es menor que la distancia de  $x$  a  $p$ . Por lo tanto  $f^k(x) \in U$ .

Esto permite aplicar el procedimiento que se realiza para  $x$  ahora a  $f^k(x)$

Si  $f^k(x) \neq p$  por el teorema del valor medio existe  $c_1$  en  $[f^k(x), p]$  o  $[p, f^k(x)]$  tal que

$$|f^k(f^k(x)) - f^k(p)| = |f^{k'}(c_1)| |f^k(x) - p|$$

Como  $c_1$  está en  $U$  se tendrá que  $|f^{k'}(c_1)| < M$ .

De aquí que

$$|f^{2k}(x) - f^k(p)| < M |f^k(x) - p|$$

Como  $f(p) = p$ , por el resultado 2.2 lo anterior es equivalente a

$$|f^{2k}(x) - p| < M^2 |x - p|$$

Siguiendo este proceso obtenemos que para toda  $n \in \mathbb{N}$  se cumple la siguiente desigualdad

$$|f^{nk}(x) - p| < M^n |x - p|$$

Como  $0 < M < 1$ , se sabe que  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0$ , por consecuencia  $|f^{nk}(x) - p| \rightarrow 0$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = p \quad \forall x \in U.$$

■

**Teorema 2.8** Sea  $f$  una función de clase  $C^k$  y sea  $p$  un punto periódico de  $f$  con período primo  $k$ . Si  $|(f^k)'(p)| > 1$ , entonces existe un intervalo abierto  $U$  alrededor de  $p$  tal que si  $x \in U$ , entonces  $x$  se sale de la vecindad bajo las iteraciones de  $f$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $p$  un punto periódico de  $f$  con período primo  $k$  tal que  $|(f^k)'(p)| > 1$ . Tómese una  $M$  tal que  $|(f^k)'(p)| > M > 1$ . Como  $(f^k)'$  es una función continua (ya que por hipótesis  $f$  es una función de clase  $C^1$ , entonces  $f$  es una función  $C^1$ , composición de derivables es derivable y composición de continuas es continua, así en particular  $(f^k)'$  es continua) existe una  $\delta > 0$  tal que si  $x \in (p - \delta, p + \delta)$  entonces  $|f^k(x)| > M$ .

Considérese  $\dot{U} = (p - \delta, p + \delta)$ , la vecindad agujerada de radio  $\delta$  con centro en  $p$ .

Por demostrar que todas las órbitas de los puntos en  $\dot{U}$  son repelidos por  $p$ .

Sea  $x \in \dot{U}$ , como  $f$  es una función  $C^k$  en particular  $f^k$  es derivable así aplicando el teorema del valor medio, teorema 2.7, existe  $c$  en  $[x, p]$  o  $[p, x]$ , tal que

$$|f^k(x) - f^k(p)| = |(f^k)'(c)| |x - p|$$

Como  $c \in U$

$$|(f^k)'(c)| > M$$

De aquí que

$$|f^k(x) - f^k(p)| > M |x - p| \quad (2.3)$$

Pero  $f^k(p) = p$

$$|f^k(x) - p| > M |x - p|$$

Si  $f^k(x) \in \dot{U}$  se puede aplicar nuestro procedimiento que se aplicó para  $x$  ahora para  $f^k(x)$  por el teorema del valor medio existe  $c_1$  en  $[f^k(x), p]$  o  $[p, f^k(x)]$  tal que

$$|f^k(f^k(x)) - f^k(p)| = |f^k(c_1)| |f^k(x) - p|$$

Como  $c_1$  está en  $U$  se tendrá que  $|f^k(c_1)| > M$ .

De aquí que

$$|f^{2k}(x) - f^k(p)| > M |f^k(x) - p|$$

Como  $f(p) = p$  lo anterior es equivalente a

$$|f^{2k}(x) - p| > M^2 |x - p|$$

y así mientras que  $f^n(x) \in \overset{\circ}{U} = (p - \delta, p + \delta)$  obtenemos

$$|f^{nk}(x) - p| > M^n |x - p|$$

Como  $M > 1$  se sabe que  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \infty$  y como  $|x - p| > 0$ , entonces de la desigualdad de arriba implica que va a existir una  $n$  iteración tal que  $(f^k)^n(x)$  dista de  $p$  una distancia suficientemente grande y de esta última desigualdad se sigue que para esa  $n$  el punto  $f^n(x)$  ya no pertenece a  $U$ . ■

Los puntos fijos cuya derivada son menor que 1 en valor absoluto se llaman *atractores* y los puntos fijos cuya derivada es más grande que 1 en valor absoluto se llaman *repulsores*.

## Capítulo 3

# Una familia sencilla, carismática, pero con una dinámica compleja: La familia cuadrática.

Este capítulo tendrá como fin presentar a la familia cuadrática

### 3.1. Familia parametrizada de funciones

Se entenderá por una familia parametrizada de funciones una colección de funciones que tiene la misma forma.

**Ejemplo 3.1** *Considérese la familia de funciones lineales  $f_m(x) = mx$  donde  $m$  varía sobre los números reales. La variable  $m$  es llamada el parámetro y  $f_m(x) = mx$  es llamada la familia parametrizada. Para todos los valores de  $m$  excepto para el 1 es claro que 0 es el único punto fijo de  $f_m = mx$ .*

*Si  $m < -1$ , entonces  $x = 0$  es un punto fijo repulsor y todos los otros puntos están en el conjunto estable de infinito.  $W^s(\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .*

*Si  $m = -1$ , entonces todos los puntos excepto el 0 que es el único punto periódico primo de período 2.*

*Cuando  $-1 < m < 1$ ,  $x = 0$  es el único punto fijo atractor y  $W^s(0) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .*

Si  $m = 1$ , entonces todos los puntos son puntos fijos.

Finalmente cuando  $m > 1$ ,  $x = 0$  es el único punto repulsor y todos los demás puntos están en el conjunto estable de  $\infty$ ,  $W^s(\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Definición 3.2** Sea  $f_c$  una familia parametrizada de funciones, entonces existe una bifurcación en  $c_0$ , si existe un  $\varepsilon > 0$  tal que para cualquier  $a$  y  $b$  que satisfaga  $c_0 - \varepsilon < a < c_0$  y  $c_0 < b < c_0 + \varepsilon$ , entonces la dinámica de  $f_a(x)$  es diferente a la dinámica de  $f_b(x)$ .

En otras palabras la dinámica de la función cambia cuando el valor del parámetro cruza el valor de  $c_0$ .

**Ejemplo 3.3** En la familia de funciones  $f_m(x) = mx$ , obsérvese que la dinámica de la familia de funciones cambia bruscamente para valores antes que  $-1$  y después de  $1$  por lo que se dice que en menos uno y en uno hay una bifurcación. Y para cualquier otro valor  $m$  que esté entre  $(-\infty, -1)$  ó  $(-1, 1)$  ó  $(1, \infty)$  la dinámica permanece igual.

## 3.2. La familia cuadrática

A pesar de que es una de las familias más simples su dinámica es muy compleja.

Esta familia es importante porque más adelante se verá que cualquier otra familia de funciones cuadráticas se puede hacer homeomorfa a aquella y por un teorema que también se verá más adelante hereda toda su dinámica.

### 3.2.1. Determinación de los puntos fijos

La familia cuadrática tiene la forma  $Q_c(x) = x^2 + c$  esta es una familia de parábolas que abren hacia arriba, con vértice sobre el eje  $y$ .

Evidentemente la posición de las parábolas dependen del valor de  $c$ , pues  $c$  únicamente desplaza sobre el eje  $y$  a la parábola  $y(x) = x^2$ .

Para determinar los puntos fijos debemos de resolver la ecuación  $x^2 + c = x$ , es decir  $x^2 - x + c = 0$ . Las raíces son

$$p = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

$$q = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

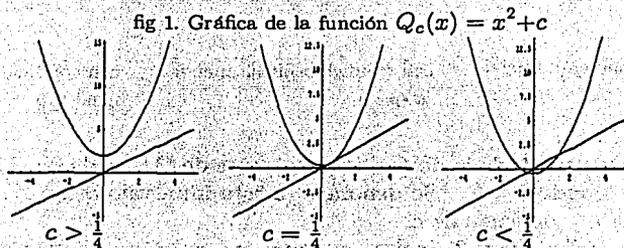
Si  $c > \frac{1}{4}$ ,  $p$  y  $q$  son complejos, y en consecuencia las parábolas no intersectan a la identidad.

Estos números son reales si y sólo si

$$1 - 4c \geq 0$$

$$\frac{1}{4} \geq c$$

Por lo tanto si  $c = \frac{1}{4}$  nace un punto fijo y después conforme  $c$  se hace más pequeño ( $c < \frac{1}{4}$ ) este punto se divide en dos puntos fijos. Aquí hay una bifurcación, este tipo de bifurcación se conoce como bifurcación tangencial, ya que en  $c = \frac{1}{4}$ , ambas graficas se tocan tangencialmente. Obsérvese que cuando  $c > \frac{1}{4}$  las órbitas de cualquier punto tienen el mismo comportamiento, tienden a infinito.



Note que  $p = q$  si y sólo si  $c = \frac{1}{4}$ . Además.

$$-p < q < p \quad \forall c < \frac{1}{4}$$

ya que

$$-\sqrt{1 - 4c} < \sqrt{1 - 4c}$$

$$1 - \sqrt{1 - 4c} < 1 + \sqrt{1 - 4c} \quad (3.1)$$

y análogamente

$$-1 - \sqrt{1 - 4c} < 1 - \sqrt{1 - 4c} \quad (3.2)$$

Juntando (3.1) y (3.2) tenemos

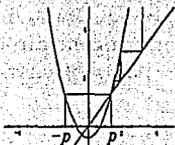
$$-1 - \sqrt{1 - 4c} < 1 - \sqrt{1 - 4c} < 1 + \sqrt{1 - 4c}$$

Dividiendo entre 2 obtenemos que:

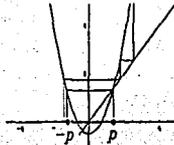
$$-p < q < p$$

Gráficamente se puede observar fig 2 inciso a) y b) que si  $x_0 > p$  y  $x_0 < -p$ , tiene siempre el mismo comportamiento, entonces la órbita de  $x_0$  tiende a infinito.

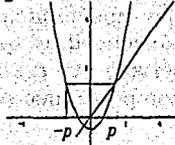
fig 2. Dinámica de  $Q_c(x) = x^2 - \frac{1}{2}$



a)  
con condición inicial  
mayor a p



b)  
con condición inicial  
a -p



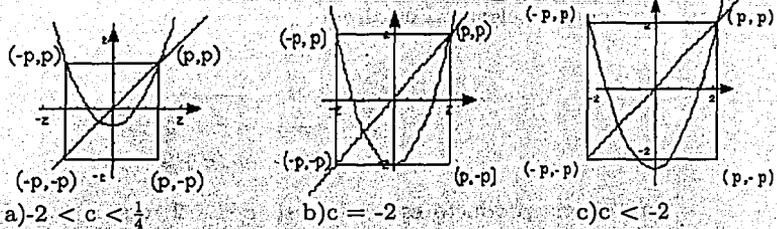
c)  
con condición inicial  
igual a p

Esto sugiere que toda la dinámica interesante de  $Q_c$  se da en el intervalo  $-p < x < p$  donde  $c \leq \frac{1}{4}$ . Se denotará a este intervalo como  $I_c$ . Donde el tamaño de  $I_c$  depende de  $c$ .

También nótese fig 2 inciso c) que  $-p$  es un punto eventualmente fijo porque  $Q_c(-p) = p$  y  $Q_c(p) = p$  el cual es un punto fijo luego de la primera iteración. Y por último el conjunto estable de infinito son todos los puntos que quedan fuera de  $I_c$  así que  $W^s(\infty) = (-\infty, -p) \cup (p, \infty)$ .

Dividamos el siguiente análisis en los siguientes tres casos cuando  $-2 < c < \frac{1}{4}$ ,  $c = -2$ ,  $c < -2$ . En cada uno de los casos se ha adjuntado un cuadrado de lado  $2p$  centrado en el origen y con vértices en  $(p, p)$ ,  $(p, -p)$ ,  $(-p, p)$  y  $(-p, -p)$ .

fig 3. Grafica de  $Q_c$



Aquí un hecho importante de notar es que la gráfica de  $Q_c$  queda contenida en un cuadrado para  $-2 < c < \frac{1}{4}$ . La gráfica toca a la base del cuadrado cuando  $c = -2$  y  $Q_c(x)$  se sale de la base de la caja cuando  $c < -2$  y el comportamiento de los puntos fuera del cuadrado todos tienden al mismo tipo de órbita : se escapan a infinito.

Se puede ver analíticamente que para  $c = -2$  la gráfica toca la base del cuadrado. El razonamiento es el siguiente:

Supóngase que el punto más bajo de la gráfica es  $(0, c)$  mientras que el punto centrado que se encuentra más abajo del cuadrado es  $(0, -p)$ . En realidad lo que se pregunta es, para qué valores del parámetro  $c$ , se cumple que:

$$\begin{aligned}
 c &< -p \\
 \Leftrightarrow c &< \frac{-1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} \\
 \Leftrightarrow 2c &< -1 - \sqrt{1 - 4c} \\
 \Leftrightarrow 2c + 1 &< -\sqrt{1 - 4c} \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Supongamos que  $2c + 1$  es negativo, entonces necesariamente  $c < -\frac{1}{2}$ . En la desigualdad (3.3) se puede tomar valor absoluto. Así:

$$\begin{aligned}
 |2c + 1| &> |-\sqrt{1 - 4c}| \\
 \Leftrightarrow -(2c + 1) &> \sqrt{1 - 4c}
 \end{aligned}$$

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Como  $2c + 1$  es un número negativo, entonces  $-(2c + 1)$  es positivo así que podemos elevar al cuadrado.

$$\begin{aligned}4c^2 + 4c + 1 &> 1 - 4c \\ \iff 4c^2 + 8c &> 0 \\ \iff 4c(c + 2) &> 0\end{aligned}$$

Este último producto es positivo si  $c < -2$  o si  $c > 0$ . Por lo tanto, usando la restricción anterior de que,  $2c + 1 < 0$ , es decir  $c < -\frac{1}{2}$  se tiene que el valor del parámetro  $c$  para el cual el vértice de la gráfica se sale del cuadrado es  $c < -2$ .

## Capítulo 4

# Análisis de la familia cuadrática para $-2 < c < \frac{1}{4}$ . Parte I

La importancia del cuadrado de la *fig 3* es que éste atrapa todas las órbitas de  $Q_c$  para  $-2 \leq c < \frac{1}{4}$ .

Primero se analizará qué pasa con la familia cuadrática para valores del parámetro en  $-\frac{3}{4} \leq c \leq \frac{1}{4}$ .

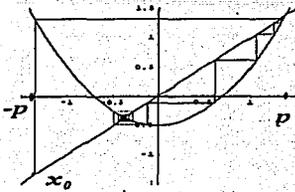
### 4.1. $q$ punto atractor: $-\frac{3}{4} \leq c < \frac{1}{4}$ .

Como se vió anteriormente hay dos puntos fijos  $p$  y  $q$ , de los cuales  $q$  es atractor, ya que:

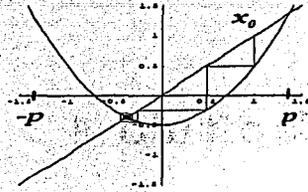
$$|f'(q)| = \left| 2 \frac{1 - \sqrt{1+2c}}{2} \right| = |1 - \sqrt{1+2c}| < 1 \quad \text{si y solo si} \quad c \geq -\frac{3}{4}$$

Gráficamente se puede ver que el conjunto estable de  $q$  es decir  $W^s(q) = (-p, p)$  para cuando  $-\frac{3}{4} \leq c < \frac{1}{4}$ .

fig1 Dinámica de  $Q_c(x) = x^2 - \frac{1}{2}$



a)  
con condición inicial entre  
-p y cero



b)  
con condición inicial entre  
cero y p

## 4.2. Primera bifurcación de duplicación de periodo $c = -\frac{3}{4}$

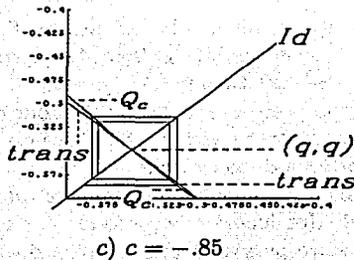
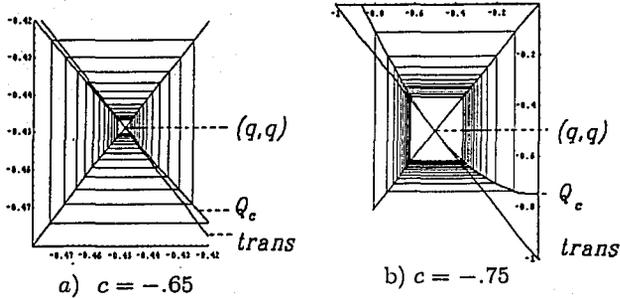
Quando  $c = -\frac{3}{4}$ , ocurre otro tipo de bifurcación, esta bifurcación es llamada bifurcación de duplicación de periodo. De acuerdo a la sección anterior, la órbita de cualquier punto en  $I_c$  es atraída por  $q$ , cuando  $-\frac{3}{4} \leq c < \frac{1}{4}$ ; cuando  $c = -\frac{3}{4}$  hay un cambio abrupto en la dinámica de esta órbita porque ya no convergerá a  $q$ , sino a un ciclo de período 2.

Así pareciera que conforme  $c$  decrece hasta  $-\frac{3}{4}$  el punto fijo atractor desaparece y un nuevo ciclo de período 2 nace. Pero en realidad el punto fijo no desaparece, sino que,  **$q$  cambia de ser un punto atractor a un repulsor mientras que al mismo tiempo un nuevo ciclo atractor de período 2 nace.** Veamos cómo se da este cambio.

En cada una de las siguientes gráficas se ha dibujado una línea que es perpendicular a la gráfica de la función identidad y que pasa por  $q$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

fig 2 Grafica de  $Q_c$

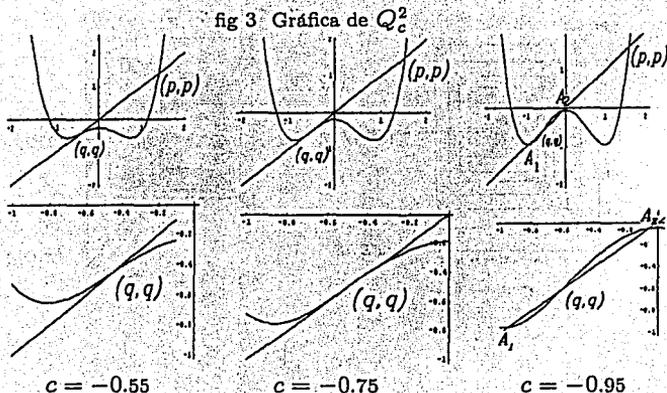


Obsérvese que cuando  $c = -\frac{3}{4}$  la gráfica de  $Q_c$  es tangente a esta línea perpendicular. Cuando  $c$  pasa disminuyendo este valor la gráfica cruza de un lado de esta línea al otro.

Así se puede observar que la pendiente de la tangente a la gráfica en  $q$  pasa de ser menor que 1 a ser mayor que 1 en valor absoluto. Es decir, el punto pasa de ser atractor a ser repulsor.

Para entender el segundo aspecto de cómo es que un punto en una vecindad de  $q$  es atraído a una órbita de periodo 2 al pasar del parámetro

$c \geq -\frac{3}{4}$  a  $c < -\frac{5}{4}$  se observará la gráfica de  $Q_c^2$  para distintos valores de  $c$ .



Nótese que se da el nacimiento de dos puntos fijos para  $Q_c$  conforme  $c$  decrece a través de  $-\frac{3}{4}$ . Un análisis gráfico demuestra que estos son puntos atractores para  $Q_c^2$ . Se denota por  $A_1$  y  $A_2$  a tales puntos. Obsérvese que la derivada de  $Q_c^2(x)$  en esos puntos es menor que 1. Como  $A_1$  y  $A_2$  no son puntos fijos atractores para  $Q_c$  entonces estos deben de caer en una órbita periódica atractora de período 2.

Ya se había mencionado anteriormente que este tipo de bifurcación es llamada bifurcación de duplicación de período, ya que conforme el parámetro varía se tiene una órbita periódica que cambia de ser atractora a repulsora y en su lugar aparece un ciclo atractor cuyo período es el doble al período del ciclo atractor ya existente.

Se pueden calcular analíticamente los puntos periódicos de período 2:

Los puntos periódicos de período 2 son soluciones de la ecuación  $Q_c^2(x) = x$

$$\iff x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0 \quad (4.1)$$

Pero recuerdese que  $p$  y  $q$  son puntos fijos esto significa que  $(x - p)$  y  $(x - q)$  son factores del polinomio (4.1). Pero además  $p$  y  $q$  son raíces de la

ecuación cuadrática  $x^2 - x + c = 0$  así que este polinomio debe dividir a (4.1). Así

$$\frac{x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c}{x^2 - x + c} = x^2 + x + c + 1$$

Por lo tanto

$$A_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(1+c)}}{2}$$

$$A_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4(1+c)}}{2}$$

Son los dos puntos del 2-ciclo, es decir el punto periódico de período 2.

#### 4.2.1. Conjunto estable para el ciclo periódico de período 2 para $-\frac{5}{4} < c \leq -\frac{3}{4}$

Se puede calcular el conjunto estable de  $A_1$  y de  $A_2$ . Más adelante se puede ver que, vea fig 3, el conjunto estable de la nueva órbita periódica de período 2, para  $c \in (-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}]$ , consiste de cualquier punto  $x$  en  $I_c = [-p, p]$  menos los puntos eventualmente periódicos a  $q$ .

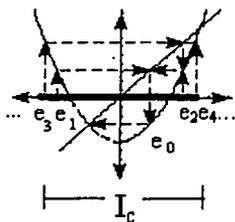


fig 3

Gráfica de la función  $Q_c(x)$  con  $c \in [-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}]$ . Los puntos  $e_0, e_1, e_2, e_3, \dots$  son puntos eventualmente fijos a  $q$ .

También se puede observar que cualquier condición inicial en  $I_c$  que no sea un punto eventualmente fijo de  $q$  estará en el conjunto estable de  $A_0$  y  $A_2$ . Por lo tanto  $W^s(A_1) = (-p, p) \setminus \{e_0, e_1, e_2, \dots\}$

Calcular analíticamente el conjunto de puntos eventualmente fijos de  $q$ , para los primeros términos del conjunto, se vuelve una tarea complicada, de ahí que sólo calcularé los tres primeros puntos eventualmente fijos a  $q$ :

Los puntos que a la primera iteración caen en  $q$  satisfacen la siguiente ecuación  $Q_c(x) = q \iff x^2 + c = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} \iff 2x^2 + 2x - 1 = -\sqrt{1 - 4c}$

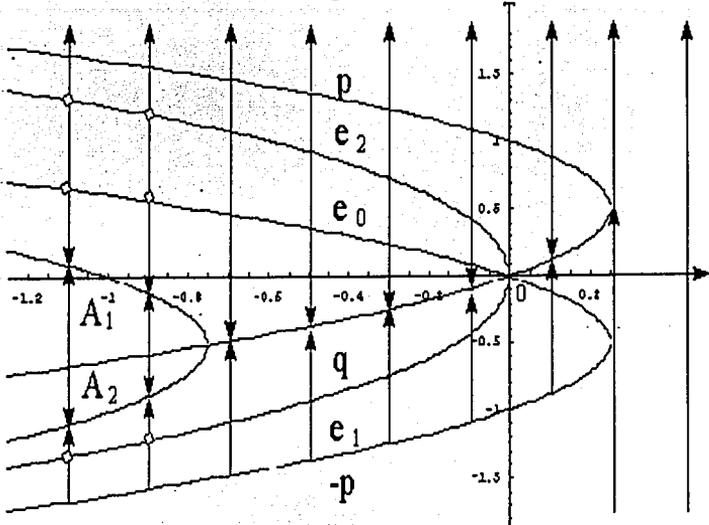
$\Leftrightarrow (2x^2 + 2x - 1)^2 = 1 - 4c \Leftrightarrow 4c^2 + 8x^2c + 4x^4 - 4x^2 = 0$ . Obsérvese que esta última expresión es una ecuación cuadrática en  $c$  que tiene 2 soluciones  $c_1 = -x^2 - x$  o  $c_2 = -x^2 + x$ . Despejándose a  $x$  de la ecuación  $c_1 = -x^2 - x$  se obtiene  $x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c_2}}{2}$  la expresión anterior tiene sentido si y sólo si  $1 + 4c \geq 0$  es decir si  $c \geq -\frac{1}{4}$ . Pero ya se ha observado gráficamente que cuando  $c > \frac{1}{4}$  la órbita de cualquier punto en  $\mathbb{R}$  tiende a infinito y si  $c = \frac{1}{4}$   $q$  no tiene punto eventualmente fijo. Por lo tanto  $x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c_2}}{2}$  no es un punto eventualmente fijo a  $q$ . Ahora bien despejando a  $x$  de la segunda ecuación obtenemos que  $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4c}}{2}$  o  $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4c}}{2}$  con gran sorpresa se observa que  $x_2$  es en realidad  $-p$  y, ya se había visto, que  $-p$  no es un punto prefijo de  $q$ , sino de  $p$  así que esta solución también se descartará. Por lo tanto el punto eventualmente fijo a  $q$  es  $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4c}}{2}$  para una  $c$  fija. Así siguiendo la notación descrita en la fig 3  $e_0 = x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4c}}{2}$  (el primer punto eventualmente fijo a  $q$ ). Esto se puede coprobar fácilmente, ya que  $Q_c\left(\frac{-1 + \sqrt{1-4c}}{2}\right) = q$ .

Podemos seguir con estos cálculos y obtener los siguientes puntos prefijos, es decir, puntos que en la segunda iteración caen en  $q$ . Pero se observa que primero tienen que caer en  $e_0$  para después caer en  $q$  así los puntos buscados cumplen con:  $Q_c(x) = \frac{-1 + \sqrt{1-4c}}{2} \Leftrightarrow x^2 + c = \frac{-1 + \sqrt{1-4c}}{2} \Leftrightarrow (2(x^2 + c) + 1)^2 = 1 - 4c \Leftrightarrow c^2 + (2 + 2x^2)c + x^4 + x^2 = 0$  una función cuadrática en  $c$  que tiene 2 soluciones:  $c_1 = -1 - x^2 + \sqrt{1 + x^2}$  y  $c_2 = -1 - x^2 - \sqrt{1 + x^2}$  al desarrollar ambas ecuaciones obtenemos una única ecuación:  $x^4 + (2c + 1)x^2 + c^2 + 2c = 0$  una ecuación de grado 4 en  $x$ . Así que para resolverla se hará un cambio de variable si  $y = x^2$ , entonces  $y^2 + (2c + 1)y + c^2 + 2c = 0$ , cuyas soluciones son  $y = \frac{-(2c+1) \pm \sqrt{(2c+1)^2 - 4(c^2+2c)}}{2}$ . Por lo tanto  $x = \pm \sqrt{\frac{-(2c+1) + \sqrt{(2c+1)^2 - 4(c^2+2c)}}{2}}$ , es la forma de los puntos que a la segunda iteración caen en  $q$  con  $c \in (-\infty, 0]$ . Así renombrando a nuestros puntos eventualmente fijos como se tiene en la fig 3:  $e_1 = -\sqrt{\frac{-(2c+1) + \sqrt{(2c+1)^2 - 4(c^2+2c)}}{2}}$  y  $e_2 = \sqrt{\frac{-(2c+1) + \sqrt{(2c+1)^2 - 4(c^2+2c)}}{2}}$ .

### 4.3. Un resumen gráfico

El analisis anterior se puede resumir en el siguiente diagrama el cual es una forma de graficar "la bifurcación de período doble"

fig 4



El eje horizontal (la variable independiente) representa el valor del parámetro  $c$ . El eje vertical corresponde al eje de las " $x$ " con  $-2 < x < 2$ , es decir corresponde al dominio de la función  $Q_c$  en  $[-2, 2]$ . Las parábolas acostadas representan: los puntos fijos ( $p$  y  $q$ ), los puntos eventualmente fijos a  $q$  que son:  $e_0, e_1, e_2$ , el punto eventualmente fijo a  $p$ :  $-p$  y los puntos de periodo dos ( $A_1$  y  $A_2$ ) así como su dinámica al variar el valor del parámetro  $c$ .

1950  
MAY 1950  
MAY 1950

## Capítulo 5

# Análisis de la familia cuadrática para $c \leq -2$ .

### 5.1. $c = -2$

En esta sección se hará el análisis de la dinámica de  $Q_c(x) = x^2 + c$  para  $c = -2$ .

En la figura 1 se presenta la función  $Q_2(x) = x^2 - 2$ , como bien se recordará del capítulo 3 sección 3.2 la dinámica interesante que presenta esta función se encuentra en el intervalo  $I_{-2} = [-2, 2]$  ya que cualquier intervalo fuera de  $I_c$  bajo la iteración de  $Q_{-2}$  tiende a menos infinito. También se recordará que es este valor del parámetro,  $c = -2$ , donde la función es tangente a la parte de abajo del cuadrado con vértices  $(-p, -p)$   $(-p, p)$   $(p, -p)$  y  $(p, p)$ .

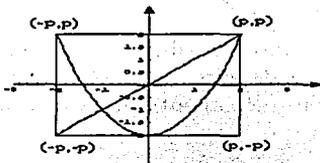


fig 1

Gráfica de la función  $Q_c(x) = x^2 - 2$  en el intervalo  $[-2, 2]$

Obsérvese que  $Q_{-2}$  manda al intervalo  $[-2, 0]$  en  $I_{-2} = [-2, 2]$  (vea

fig 1) por lo tanto la segunda iteración de  $Q_{-2}$  es decir  $Q_{-2}^2$ , manda este intervalo  $[-2, 2]$  sobre todo  $I_{-2}$  como exactamente  $Q_{-2}$  lo hizo con  $I_{-2}$ . Así, con excepción del 0 todos los puntos tendrán dos preimágenes en  $[-2, 0]$ . Análogamente lo anterior pasa para el intervalo  $[0, 2]$ . Es esta la razón por la cual la gráfica de  $Q_{-2}^2$  tiene exactamente dos valles vea la figura 2.

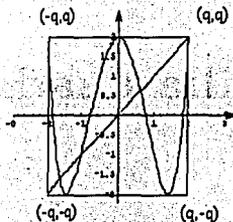


fig 2

Gráfica de la función  $Q_{-2}^2(x)$   
en el intervalo  $[-2, 2]$

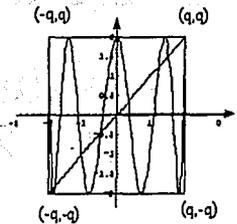


fig 3

Gráfica de la función  $Q_{-2}^3(x)$   
en el intervalo  $[-2, 2]$

Si se continúa de esta manera se puede observar en la figura 2 que hay cuatro intervalos a saber  $[-2, -1]$ ,  $[-1, 0]$ ,  $[0, 1]$  y  $[1, 2]$  en donde la función  $Q_{-2}^2$  mapea cualquiera de estos intervalos sobre  $I_{-2}$  de una manera análoga como  $Q_{-2}$  lo hizo en  $I_{-2}$ . Así que la gráfica de  $Q_{-2}^3$  tendrá cuatro valles, vea fig 3. De esta manera obtenemos que  $Q_{-2}^n$  tendrá  $2^{n-1}$  valles en  $I_{-2}$ . Obsérvese que por cada valle la función  $Q_{-2}^n$  cruza la diagonal exactamente dos veces. Por lo tanto  $Q_{-2}$  tiene exactamente  $2^n$  puntos periódicos de período  $n$  en  $I_{-2} = [-2, 2]$ .

Un análisis más detallado de la dinámica de la función  $Q_{-2}^n$  se puede ver en [14] en donde además de afirmar que  $Q_{-2}$  tiene puntos periódicos de todos los períodos posibles esto muestra que este conjunto, es decir,  $\text{Per}(Q_{-2})$  es denso en  $I_c$ .

## 5.2. $c < -2$

A continuación analizaremos la dinámica de  $Q_c$  para valores de  $c$  menores que menos dos. En la figura 4 se muestra una gráfica de  $Q_c$  con  $c < -2$  junto

con su caja de vértices  $(-p, -p), (-p, p), (p, -p), (p, p)$ . Como la gráfica de la función  $Q_c$  se sale de esta caja hay puntos dentro de la caja para los cuales sus imágenes en la primera iteración se salen de la caja vea fig 5 de hecho estos puntos son un conjunto abierto centrado en el origen llámese a dicho conjunto  $A_1$ , es decir  $A_1$  es el conjunto de puntos que escapan de  $I_c$  después de la primera iteración.

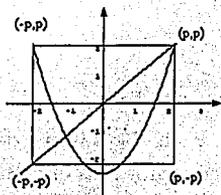


fig 4

Gráfica de la función  $Q_c$  para  $c < -2$

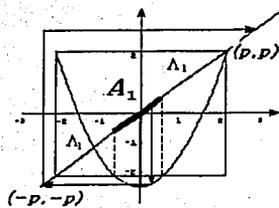


fig 5

Una órbita en el intervalo  $A_1$ . Obsérvese cómo es que tiende a infinito.

Identificando ahora los puntos que a la segunda iteración se salen de  $I_c$ , véase la fig 6, se nota que consta de dos subintervalos contenidos en  $I_c$ , llamemos  $A_2$  a este par de subintervalos. Continuando de esta manera se observa en la fig 7, que hay cuatro subintervalos para los cuales los puntos contenidos en estos subintervalos, en la tercera iteración salen de  $I_c$ . Llamemos  $A_3$  a estos subintervalos.

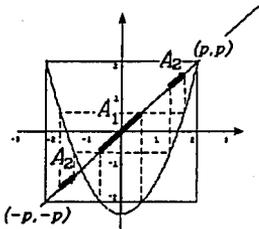


fig 6

Los intervalos  $A_1$  y  $A_2$

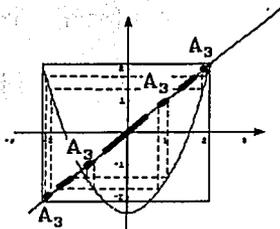


fig 7

Los intervalos  $A_1, A_2$  y  $A_3$

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Así  $A_n$  es el conjunto de puntos en  $I_c$  cuya órbita sale de  $I_c$  después de exactamente  $n$  iteraciones.

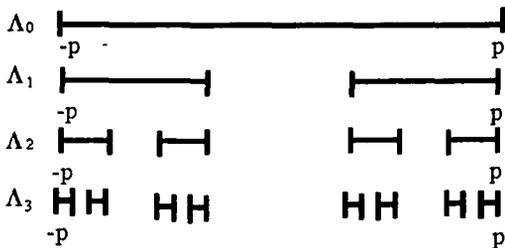
Mediante un análisis gráfico se puede observar que cualquier punto que salga fuera de  $I_c$  tiene una dinámica relativamente simple ya que su órbita tenderá a infinito bajo la iteración de  $Q_c$ . Es por eso que la pregunta obligada es sobre la dinámica de los puntos que nunca saldrán fuera de  $I_c$ . Para tal fin primero se analizará este conjunto cualitativamente (el conjunto de puntos que nunca sale fuera de  $I_c$ ).

Defínase

$$\Lambda_n = \{x \in I_c \mid Q_c^n(x) \in I_c\}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Nuestro objetivo es estudiar  $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ ,  $\Lambda$  es el conjunto de puntos que nunca sale fuera de  $I_c$ . Es evidente que en principio  $\Lambda$  es el complemento de la unión de  $A_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Para contruir  $\Lambda$  primero se retira  $A_1$  del intervalo  $I_c$  quedando dos intervalos cerrados después, en un segundo paso, de esos dos intervalos se quita el conjunto  $A_2$  quedando cuatro intervalos cerrados así en un tercer paso se retirará de estos cuatro intervalos a el conjunto  $A_3$  dando como resultado ocho intervalos cerrados. Continuando de esta manera se remueve a los conjuntos  $A_n$  obteniendo  $2^n$  intervalos, vea fig 8.

fig 8



**Proposición 5.1** Si  $Q_c(x) = x^2 + c$ , con  $c < -2$ , entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- a) El conjunto de números reales  $x \in I_c$  que satisface la condición de que  $Q_c(x)$  no esté en  $I_c$  es el intervalo  $\left( -\sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}}, \sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}} \right)$

b) El conjunto  $\Lambda_n$  consiste de  $2^n$  intervalos cerrados ajenos para todo número natural  $n$ .

c) Si  $I$  es uno de los  $2^n$  intervalos cerrados en  $\Lambda_n$ , entonces  $Q_c^n : I \rightarrow I_c$  es biyectiva.

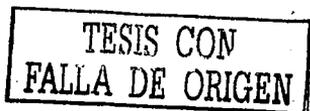
**DEMOSTRACIÓN:**

De la gráfica de  $Q_c$  en la figura 4, claramente se ve que los puntos que pertenecen a  $I_c$  bajo la iteración de  $Q_c$  son los puntos tales que  $Q_c(x) < -p$ , pero estos son los puntos que se encuentran entre  $-\sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}}$  y  $\sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}}$ , que son las raíces que resultan de resolver la siguiente expresión cuadrática  $Q_c(x) = -p$ , es decir  $x^2 + c = -\left(\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}\right)$ .

Se probará b) y c) por inducción. Claramente del inciso a) se puede ver que  $\Lambda_1$  consiste de  $2^1$  intervalos cerrados ajenos. También se puede ver que  $Q_c(-p) = Q_c(p) = p$  y además  $Q_c\left(-\sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}}\right) = Q_c\left(\sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}}\right) = -p$ . Por lo tanto los puntos finales de los dos intervalos son mapeados en  $p$  y  $-p$ . Por continuidad y por el teorema del valor intermedio, se puede concluir que si  $I$  es uno de los dos intervalos en  $\Lambda_1$  entonces  $Q_c : I \rightarrow [-p, p]$  es suprayectiva. Para verificar que  $Q_c$  es inyectiva en cada uno de los intervalos de  $\Lambda_1$  nótese que  $Q_c$  es estrictamente monótona en estos intervalos, ya que  $Q'_c(x) = 2x < 0$  cuando  $x \in \left[-p, -\sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}}\right]$ , entonces  $Q_c$  es estrictamente decreciente en este intervalo y  $Q'_c(x) = 2x > 0$  cuando  $x \in \left[\sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}}, p\right]$ , en consecuencia  $Q'_c$  es estrictamente creciente en este intervalo. Por lo que si  $I$  es uno de los dos intervalos en  $\Lambda_1$ , entonces  $Q_c(x) : I \rightarrow I_c$  es inyectiva y suprayectiva.

Para continuar el argumento de inducción supóngase que el inciso b) y c) es válido para  $k$ , es decir, supóngase que  $\Lambda_k$  consiste de  $2^k$  intervalos ajenos. Más aún supóngase que si  $[a, b]$  es uno de los intervalos cerrados que comprende  $\Lambda_k$ , entonces  $Q_c(x) : [a, b] \rightarrow [-p, p]$  es biyectiva y que  $Q'_c(x) < 0 \forall x \in [a, b]$ , o que  $Q'_c(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ .

Por demostrar que  $\Lambda_{k+1}$  consiste de  $2^{k+1}$  intervalos ajenos y que si  $[a, b]$  es uno de los intervalos cerrados que comprende  $\Lambda_{k+1}$ , entonces



$Q_c(x): [a, b] \rightarrow [-p, p]$  es biyectiva. Así considérese  $\Lambda_k$ . Como se vió en la fig 8, es fácil ver que  $\Lambda_{k+1} \subset \Lambda_k$ . Sea  $[a, b]$  uno de los  $2^k$  intervalos que están comprendidos en  $\Lambda_k$ . Entonces  $(Q_c^k)'(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ , o  $(Q_c^k)'(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b]$  en donde la función  $Q_c^k$  es estrictamente creciente en  $[a, b]$  para el primer caso y  $Q_c^k$  es estrictamente decreciente en  $[a, b]$  para el segundo caso. Sin pérdida de generalidad supóngase que  $Q_c^k(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ . Como  $Q_c^k(x)$  es estrictamente creciente en  $[a, b]$ ,  $Q_c^k$  es continua y  $Q_c^k([a, b]) = [-p, p]$ , por el teorema del valor intermedio, se puede asegurar que existen dos únicos puntos  $x_1$  y  $x_2$  que satisfacen:

$$1) a < x_1 < x_2 < b$$

$$2) Q_c^k([a, x_1]) = \left[ -p, -\sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}} \right]$$

$$3) Q_c^k([x_1, x_2]) = \left[ -\sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}}, \sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}} \right]$$

$$4) Q_c^k([x_2, b]) = \left[ \sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}}, p \right]$$

La primera condición asegura que  $[a, x_1]$  y  $[x_2, b]$  son disjuntos. Las últimas tres desigualdades implican que  $Q_c^{k+1}([a, x_1]) = [-p, p]$ ,  $Q_c^{k+1}([x_1, x_2]) < -q$  y que  $Q_c^{k+1}([x_2, b]) = [-p, p]$ . Por lo tanto el conjunto de puntos que esta en  $[a, b]$  y que también está en  $\Lambda_{k+1}$  consiste de dos intervalos cerrados disjuntos  $[a, x_1]$  y  $[x_2, b]$ . Si  $x$  está en  $[a, x_1]$ , entonces  $Q_c^k(x)$  esta en  $\left[ -p, -\sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}} \right]$  y  $Q_c(Q_c^k(x)) < 0$ . Como supusimos que,  $(Q_c^k)'(x) > 0$ , entonces:

$$(Q_c^{k+1})'(x) = Q_c'(Q_c^k(x)) \cdot (Q_c^k)'(x) < 0$$

para todo  $x \in [a, x_1]$ . Si  $x$  está en  $[x_2, b]$ , entonces  $Q_c^k(x)$  está en  $\left[ \sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{1-4c}}{2}}, p \right]$  y  $Q_c'(Q_c^k(x)) > 0$  y dado que,  $(Q_c^k)'(x) > 0$ , entonces:

$$(Q_c^{k+1})'(x) = Q_c'(Q_c^k(x)) \cdot (Q_c^k)'(x) > 0$$

para todo  $x \in [x_2, b]$ .

En caso que  $(Q_c^k)'(x) < 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , se utiliza un argumento análogo al anterior para asegurar que los puntos en  $\Lambda_k$  que están en

$[a, b]$ , están a su vez contenidos en dos intervalos ajenos  $[a, x_1]$  y  $[x_2, b]$ ,  $Q_c^{k+1}([a, x_1]) = [-q, q]$ ,  $Q_c^{k+1}([x_2, b]) = [-q, q]$ , y que  $(Q_c^{k+1})'$  es o estrictamente positivo o estrictamente negativo, en cada uno de los intervalos  $[a, x_1]$  y  $[x_2, b]$ . Como el intervalo  $[a, b]$  es un intervalo arbitrario de  $\Lambda_k$  se sigue que hay dos intervalos más en  $\Lambda_{k+1}$  que en  $\Lambda_k$ . Es decir,  $\Lambda_{k+1}$  contiene  $2(2^k) = 2^{k+1}$  intervalos cerrados ajenos. Más aún si  $J$  es uno de los  $2^{k+1}$  intervalos en  $\Lambda_{n+1}$  entonces  $Q_c^{k+1}: J \rightarrow [-p, p]$  es suprayectiva por las condiciones 2) y 4) y es biyectiva, ya que por inducción  $Q_c^{k+1}$  es estrictamente positiva o negativa en  $J$ . ■

**Lema 5.2** Si  $Q_c = x^2 + c$  y  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$ , entonces  $|Q_c'(x)| > 1 \forall x \in I_c - A_1$ .

DEMOSTRACIÓN:

Se sabe que  $Q_c'(x) = 2x$ . Entonces  $|Q_c'(x)| = |2x| > 1$  si  $|x| > \frac{1}{2}$ . Así es suficiente encontrar el valor de  $c$  para el cual  $Q_c(\frac{1}{2}) < -p$  para garantizar a su vez que  $|Q_c'(x)| > 1 \forall x \in I_c - A_1$ .

$$\begin{aligned} \text{Así } Q_c\left(\frac{1}{2}\right) < -p &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c < -\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2} \iff -\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + c\right) > \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2} \\ &\iff -\frac{1}{2} - 2c - 1 > \sqrt{1-4c} \iff -\left(\frac{3}{2} + 2c\right) > \sqrt{1-4c} \iff \left(\frac{3}{2} + 2c\right)^2 > 1-4c \\ &\iff 4c^2 + 10c + \frac{5}{4} > 0 \iff \left(c + \frac{5+2\sqrt{5}}{4}\right) \left(c + \frac{5-2\sqrt{5}}{4}\right) > 0 \iff c + \frac{5+2\sqrt{5}}{4} > 0 \\ &\text{y } c + \frac{5-2\sqrt{5}}{4} > 0 \text{ o } c + \frac{5+2\sqrt{5}}{4} < 0 \text{ y } c + \frac{5-2\sqrt{5}}{4} < 0 \iff c > -\frac{5+2\sqrt{5}}{4} = \\ &= -2.3680 \text{ y } c > \frac{5-2\sqrt{5}}{4} = -0.1319 \text{ o } c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4} = -2.3680 \text{ y } c < -\frac{5-2\sqrt{5}}{4} \\ &= -0.1319. \iff \text{ Por lo tanto se tiene que } c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4} \blacksquare. \end{aligned}$$

**Lema 5.3** Sea  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$  y  $Q_c(x) = x^2 + c$ . Si  $x$  es cualquier punto en  $\Lambda_n$ , entonces  $|(Q_c^n)'(x)| > \lambda^n$ .

DEMOSTRACIÓN:

Si  $x$  es un punto cualquiera en  $\Lambda_n$  y como  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$ , entonces por el lema 5.2 anterior existe un  $\lambda > 1$  tal que  $|Q'(x)| > \lambda \forall x \in \Lambda_n$ . Utilizando la regla de la cadena se obtiene.

$$\begin{aligned} |Q_c^n'(x)| &= |Q_c' \cdot Q_c'(Q_c(x)) \cdot Q_c'(Q_c^2(x)) \cdots Q_c'(Q_c^{n-1}(x))| \\ &= |Q_c'(x)| \cdot |Q_c'(Q_c(x))| \cdots |Q_c'(Q_c^{n-1}(x))| \\ &> \lambda \cdot \lambda \cdots \lambda = \lambda^n. \end{aligned}$$

**Proposición 5.4** Sea  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$  y  $Q_c(x) = x^2 + c$ . Entonces la longitud de cada intervalo en  $\Lambda_n$  es menor que  $\frac{2p}{\lambda^n}$ .

DEMOSTRACIÓN:

Si  $a$  y  $b$  son los extremos de uno de los intervalos que constituyen a  $\Lambda_n$ , entonces por el teorema del valor medio y por el lema 5.3.

$$|Q_c^n(b) - Q_c^n(a)| > \lambda^n |b - a| \quad (5.1)$$

Pero de la proposición 5.1 se puede ver que  $|Q_c^n(b) - Q_c^n(a)| = 2p$ . Por lo tanto la desigualdad 5.1 es equivalente a

$$\begin{aligned} 2p &> \lambda^n |b - a| \implies \\ \frac{2p}{\lambda^n} &> |b - a| \end{aligned}$$

Por lo tanto la longitud de un intervalo en  $\Lambda_n$  es menor que  $\frac{2p}{\lambda^n}$ .

Una de las preguntas interesantes es si  $\Lambda$  es no vacío y la respuesta es no, ya que los extremos de  $I_c$  es decir  $\pm p$  están en  $\Lambda$ . Más aún cada uno de los extremos de cada uno de los intervalos que compone  $I_c$  están en  $\Lambda$ . Una segunda pregunta es si  $\Lambda$  está únicamente constituido por extremos de los intervalos de  $I_n$  para alguna  $n$  y la respuesta es sorprendentemente no, hay otros puntos en  $\Lambda$  que no son necesariamente los extremos de un intervalo ¿Por qué?, más adelante se verá que el conjunto de puntos periódicos de  $Q_c$  es denso en  $\Lambda$  para  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$ , y como cada uno de los extremos de un intervalo  $I$  contenido en  $I_n$  no son puntos periódicos, de hecho son puntos eventualmente fijos a  $p$  o a  $-p$  entonces lo anterior necesariamente garantiza la existencia de otros puntos que no son extremos de un intervalo  $I$  para ser puntos periódicos.

En cuanto a la construcción de  $\Lambda$  se recordará que este conjunto es semejante al conjunto de Cantor.

### 5.3. Conjunto de Cantor



**Cantor, Georg Ferdinand Ludwing Philipp**

Nació el 3 de Marzo de 1845 en San Peterburgo Rusia

Murió el 6 de Enero de 1918 en Halle, Alemania

Fue uno de los matemáticos más brillantes de la humanidad y personificó al incansable em-

peño por comprender. Desde su juventud se interesó por el clásico problema del infinito tanto potencial como real e hizo importantes aportaciones al crear la teoría sobre los conjuntos transfinitos. Aunque fue muy atacado en su época, su trabajo se llegó a considerar como el producto más fino del genio matemático, así como uno de los supremos logros de la actividad humana puramente intelectual.

Aunque su vida estuvo llena de altibajos por su enfermedad que lo llevaban a constantes etapas de depresión. La complejidad de sus investigaciones, junto con la incomprensión de sus colegas lo condujeron a la locura.

**Definition 1** *Un conjunto  $\tau \subset \mathbb{R}$  es de cantor si:*

- a)  $\tau$  es cerrado y acotado (El conjunto de todos los números reales con esta característica son llamados conjuntos compactos.
- b)  $\tau$  no contiene intervalos (Conjuntos con esta propiedad son llamados disconexos)
- c) Cualquier punto en  $\tau$  es un punto de acumulación de  $\tau$  (cuando tales conjuntos son cerrados son llamados conjuntos perfectos).

Para demostrar que  $\Lambda$  es un conjunto de cantor para cuando  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$ , es necesario recordar la siguiente proposición cuya demostración se puede consultar en [19].

**Proposición 5.5** *Si  $\{A_n\}$  es una colección de intervalos cerrados, entonces  $\cap A_n$  es cerrada.*

**Teorema 5.6** Si  $Q_c(x) = x^2 + c$ , con  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$ , entonces  $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$  es un conjunto de Cantor.

**DEMOSTRACIÓN:**

Como  $p$  es un punto fijo de  $Q_c$ , entonces  $\Lambda$  es no vacío. Resta demostrar según la definición 2, que:

- a)  $\Lambda$  es cerrado y acotado
- b)  $\Lambda$  no contiene intervalos
- c) Cualquier punto en  $\Lambda$  es un punto de acumulación de  $\Lambda$

a) Como  $\Lambda$  es la intersección arbitraria de conjuntos cerrados, por la proposición 5.5 se afirma que  $\Lambda$  es cerrado. Luego, como  $\Lambda$  está contenido en  $[-p, p]$  entonces también es acotado

b) Supóngase que  $\Lambda$  contiene un intervalo abierto  $(x, y)$  de longitud  $|x - y|$ , entonces para toda  $n$ ,  $(x, y)$  debe de estar contenido en uno de los intervalos de  $\Lambda_n$  por la proposición 5.4, se tiene que existe un  $\lambda < 1$  tal que la longitud del intervalo en  $\Lambda_n$  es menor que  $\frac{2p}{\lambda^n}$ . Como se puede encontrar una  $n_0$  tal que  $|x - y| > \frac{2p}{\lambda^{n_0}}$ , el intervalo  $(x, y)$  no puede estar contenido en  $\Lambda_{n_0}$ . Por lo tanto  $\Lambda$  no contiene intervalos abiertos.

c) Finalmente supóngase que  $x$  es un punto en  $\Lambda$  y sea  $N_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta)$  una vecindad de radio  $\delta$  en  $x$ . Por demostrar que la vecindad  $N_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta)$  contiene al menos un punto de  $\Lambda$  distinto de  $x$ .

Obsérvese que si  $a$  es uno de los extremos de uno de los intervalos en  $\Lambda_n$ , entonces  $a$  está en  $\Lambda$ , ya que  $Q_c^{n+1}(a) = p$ . Para cada  $n$ ,  $x$  debe estar contenida en uno de los intervalos de  $\Lambda_n$ . Escójase  $\lambda > 1$  como en el proposición 5.4, y escójase un  $n$  suficientemente grande tal que  $\frac{2p}{\lambda^n} < \delta$ . Así, todo intervalo de  $\Lambda_n$  debe estar contenido en  $N_\delta(x)$ , ya que la longitud de cada intervalo es menor que  $\frac{2p}{\lambda^n}$ . Como cada uno de los extremos finales del intervalos están en  $N_\delta(x)$ , y por lo menos uno de ellos dista de  $x$  en menos de  $\delta$ . Por lo tanto cualquier punto en  $\Lambda$  es un punto de acumulación de  $\Lambda$ . ■

## 5.4. Caos

Ahora que ya sabemos que los puntos que permanecen en  $I_c$ , bajo la iteración de  $Q_c$  con  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$ , forman un conjunto de cantor interesaría saber un poco más sobre la dinámica de la familia cuadrática para  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$  restringida a  $\Lambda$  (Nótese que lo anterior tiene sentido puesto que  $Q_c$  mapea  $\Lambda$  en  $\Lambda$ )

Para tal fin se introducirá la noción de caos, que a su vez involucra 2 definiciones nuevas, la primera es la noción de que una función sea topológicamente transitiva y la segunda es que una función tenga sensibilidad bajo condiciones iniciales. Al final, la demostración de que la función  $Q_c$  con  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$  es caótica en  $\Lambda$ , será inmediata.

La teoría del caos se encuentra entre las ciencias más jóvenes y desde sus oscuros orígenes en la década de los setentas ha ascendido en la escala de popularidad hasta convertirse en uno de los campos de investigación más fascinantes que existen en la actualidad. El caos toma su nombre de la palabra griega que significa desorden. Uno de los errores más comunes es suponer que su área de estudio es el desorden, cuando en realidad el caos es la misma esencia del orden.

**Definición 5.7.** Una función  $f : D \rightarrow D$  es topológicamente transitiva en  $D$  si para cualquier par de puntos  $x$  y  $y$  en  $D$  y cualquier  $\epsilon > 0$  existe un  $z \in D$  y un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|z - x| < \epsilon$  y  $|f^n(z) - f^n(y)| < \epsilon$ .

En otras palabras, un sistema dinámico es topológicamente transitivo si dado cualesquiera dos puntos, podemos encontrar una órbita de otro punto que en un momento dado llega a estar arbitrariamente cercana a ambos.

**Proposición 5.8** Si  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$ , entonces  $Q_c = x^2 + c$  es topológicamente transitiva en  $\Lambda$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $x$  y  $y$  dos elementos de  $\Lambda$  y  $\epsilon > 0$ . Es suficiente probar que existe  $z \in \Lambda$  tal que  $|x - z| < \epsilon$  y  $Q_c^n(z) = y$  para alguna  $n$ .

De la proposición 5.4 se sabe que existe  $\lambda > 1$  tal que la longitud de cada intervalo en  $\Lambda_n$  es menor que  $\frac{2\epsilon}{\lambda^n}$ . Escójase  $n$  tal que  $\frac{2\epsilon}{\lambda^n} < \epsilon$ . Como

$x \in \Lambda$  se sabe de la proposición 5.1 c) que existe  $I_n$  en  $\Lambda_n$ , tal que  $x$  está en  $I_n$  y  $Q_c: I_n \rightarrow I_c$  es biyectiva. Así como hemos escogido  $n$ , la longitud de  $I_n$  es menor que  $\epsilon$  y por eso la distancia desde  $x$  que está en  $I_n$ , hasta cualquier punto de  $I_n$ , es menor que  $\epsilon$ .

Como  $Q_c^n: I_n \rightarrow I_c$  es biyectiva y  $y \in I_c$ , existe  $z \in I_n$  tal que la distancia de  $z$  a  $x$  es menor que  $\epsilon$ , tal que  $Q_c^n(z) = y$ , como  $y \in \Lambda \implies z \in \Lambda$ . Por lo tanto hemos encontrado  $z \in \Lambda$  tal que  $|x - z| < \epsilon$  y  $Q_c^n(z) = y$  ■.

**Definición 5.9** Una función  $f: D \rightarrow D$  tiene sensibilidad a las condiciones iniciales si existe un  $\delta > 0$ , tal que para cualquier  $x \in D$  y cualquier  $\epsilon > 0$  existe un  $y$  en  $D$  y un número natural  $n$ , tal que  $|x - y| < \delta$  y  $|f^n(x) - f^n(y)| > \epsilon$ .

**Proposición 5.10** La función  $Q_c(x) = x^2 + c$ , con  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$  es sensible a las condiciones iniciales. Más específicamente  $\forall x \in \Lambda$  y  $\forall \epsilon > 0$  existe  $y$  en  $\Lambda$  tal que  $|x - y| < \epsilon$  y  $|Q_c^n(x) - Q_c^n(y)| > p$  para alguna  $n$ .

#### DEMOSTRACIÓN:

Sea  $x \in \Lambda$  y  $\epsilon > 0$ . De la proposición 5.4 se sabe que existe  $\lambda > 1$ , tal que la longitud de cada intervalo en  $\Lambda_n$ , es menor que  $\frac{2p}{\lambda^n}$ . Escójase  $n$  tal que  $\frac{2p}{\lambda^n} < \epsilon$ , como  $x \in \Lambda$  se sabe, por la proposición 5.1 c), que existe  $I_n$  en  $\Lambda_n$  tal que  $x \in I_n$  y la distancia de  $x$  a cualquier otro punto en  $I_n$ , es menor que  $\epsilon$  y la función  $Q_c^n: I_n \rightarrow I_c$  es biyectiva. Entonces hay puntos  $a$  y  $b$  en  $I_n$  tal que  $Q_c^n(a) = -p$  y  $Q_c^n(b) = p$ . Los puntos  $a$  y  $b$  son puntos eventualmente fijos por lo tanto  $a$  y  $b$  están en  $\Lambda$ . Como  $Q_c^n(x)$  está en  $\Lambda$  ya que  $x \in \Lambda$ , y como cero no está en  $\Lambda$ , entonces  $Q_c^n(x)$  está en  $[-p, 0)$  ó  $Q_c^n(x)$  está en  $(0, p]$ . Si  $Q_c^n(x)$  está en  $[-p, 0)$ , entonces  $b$  está en  $\Lambda$  y  $|Q_c^n(x) - Q_c^n(b)| = |Q_c^n(x) - p| > p$ . Si  $Q_c^n(x)$  está en  $(0, p]$ , entonces  $a \in \Lambda$  y además  $|x - a| < \epsilon$  y  $|Q_c^n(x) - Q_c^n(a)| = |Q_c^n(x) - (-p)| > p$ .

Por lo tanto para cualquiera de los 2 casos existe  $y \in \Lambda$ , con  $y = a$  o  $y = b$ , tal que  $|x - y| < \epsilon$  y  $|Q_c^n(x) - Q_c^n(y)| > p$  para alguna  $n$ . ■

**Proposición 5.11** El conjunto de puntos periódicos de  $Q_c(x) = x^2 + c$  con  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$  es denso en  $\Lambda$ .

#### DEMOSTRACIÓN:

Por demostrar que  $\forall x \in \Lambda$  y  $\forall \epsilon > 0$ , existe un punto periódico  $p$  en  $\Lambda$  tal que  $|x - p| < \epsilon$ .

Sea  $x \in \Lambda$  y  $\epsilon > 0$  de la proposición 5.4 se sabe  $\exists \lambda > 1$  tal que la longitud de cada intervalo en  $\Lambda$  es menor que  $\frac{2\epsilon}{\lambda^n}$ . Escójase  $n$  tal que  $\frac{2\epsilon}{\lambda^n} < \epsilon$ . Como  $x \in \Lambda$  se sabe que existe  $I_n$  en  $\Lambda_n$ , tal que la distancia de  $x$  a cualquier punto en  $I_c$  es menor que  $\epsilon$ . Por la proposición 5.1. c)  $Q_c^n : I_n \rightarrow I_c$  es biyectiva, y por el teorema 2.3  $Q_c$  tiene un punto fijo digase  $\zeta$ . Entonces  $\zeta$  es periódico y además  $|x - \zeta| < \epsilon$ . Por lo tanto el conjunto de puntos periódicos de  $Q_c(x) = x^2 + c$  con  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$  es denso en  $\Lambda$ .

**Definición 5.12** Una función  $f$ , se dice que es caótica si

- a)  $f$  es topológicamente transitiva.
- b)  $f$  es sensible a las condiciones iniciales
- c) Los puntos periódicos de  $f$  son densos en  $D$ .

**Teorema 5.13** Si  $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$ , entonces  $Q_c(x) = x^2 + c$  es caótica en  $\Lambda$ .

DEMOSTRACIÓN:

Es inmediato de las proposiciones 5.9, 5.10 y 5.11.

RECEIVED  
MAY 10 1961

# Capítulo 6

## Derivada Schwarziana

En esta sección se analizará el teorema 7.1 que se utilizará en el siguiente capítulo, el cual explica porque surge una órbita atractora conforme varía el parámetro  $c$  para la familia cuadrática  $Q_c(x) = x^2 + c$ . Para lo anterior, primero se dará la definición de la derivada Schwarziana, así como algunas propiedades que ella cumple: teorema 6.2, proposición 6.3 y el principio Schwarziano de min-max. lema 6.4.

La derivada Schwarziana es una de las más fuertes herramientas con las que actualmente cuenta la teoría de los sistemas dinámicos discretos unidimensionales, introducida por Singer en 1978. Las funciones con derivada Schwarziana negativa tienen propiedades dinámicas interesantes que simplifican su dinámica.

**Definición 6.1** La derivada Schwarziana para una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

**Teorema 6.2** (Regla de la Cadena para la Derivada Schwarziana). Supóngase que  $f$  y  $g$  son funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  entonces:

$$S(f \circ g)(x) = Sf(g(x))(g'(x))^2 + Sg(x)$$

DEMOSTRACIÓN:

Por definición  $S(f \circ g)(x) = \frac{(f \circ g)'''(x)}{(f \circ g)'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{(f \circ g)''(x)}{(f \circ g)'(x)} \right)^2$ . Si se calcula por separado  $(f \circ g)'(x)$ ,  $(f \circ g)''(x)$ ,  $(f \circ g)'''(x)$  por medio de la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ (f \circ g)''(x) &= f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) \\ (f \circ g)'''(x) &= f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3g'(x)g''(x)f''(g(x)) + f'(g(x))g'''(x)\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}S(f \circ g)(x) &= \frac{f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3g'(x)g''(x)f''(g(x)) + f'(g(x))g'''(x)}{f'(g(x))g'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)}{f'(g(x))g'(x)} \right)^2 \\ &= \frac{f'''(g(x))(g'(x))^2 + 3g'(x)f''(g(x))}{f'(g(x))} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(g(x))(g'(x))^2 + 2f''(g(x))g'(x) + (g''(x))^2}{f'(g(x))} \right) \\ &= \left( \frac{f'''(g(x))}{f'(g(x))} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(g(x))}{f'(g(x))} \right)^2 \right) (g'(x))^2 + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \frac{(g''(x))^2}{g'(x)} = \\ &Sf(g(x))(g'(x))^2 + Sg(x) \blacksquare\end{aligned}$$

**Proposición 6.3** *Supóngase que  $Sf < 0$  y  $Sg < 0$ , entonces  $S(f \circ g) < 0$ . En particular si  $Sf < 0$ , entonces  $Sf^n < 0$ .*

DEMOSTRACIÓN:

Del teorema 6.2  $S(f \circ g)(x) = Sf(g(x))(g'(x))^2 + Sg(x)$ . Como  $Sf < 0$ , el primer sumando es negativo y como  $Sg < 0$  el segundo sumando también es negativo, por lo tanto  $S(f \circ g) < 0$ . ■

**Lema 6.4** (*Principio Schwarziano de min-max*).

*Si  $Sf < 0$ , entonces  $f'$  no puede tener un mínimo local positivo o un máximo local negativo.*

DEMOSTRACIÓN: (Reducción al absurdo)

Supóngase que  $f'$  tiene un mínimo local positivo en  $x_0$  y un máximo local negativo en  $y_0$ .

Si  $f'$  tiene un mínimo local positivo en  $x_0 \implies f''(x_0) = 0$  (Teorema: Si  $f$  esta definida sobre  $(a, b)$  y tiene un mínimo (ó máximo) local en  $x_0$ , entonces  $f'(x_0) = 0$ ). Es decir,  $x_0$  es un punto crítico para  $f'$ , así su

derivada schwarzina es:  $Sf(x_0) = \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)}$ . Además  $f'''(x_0) \geq 0$  (Criterio de la segunda derivada para mínimos locales aplicado a  $f'(x_0)$ ) y como el supuesto,  $x_0$  es un mínimo local positivo  $\implies f'(x_0) > 0$ , por lo tanto  $Sf \geq 0$  (Contradiciendo el hecho de que  $Sf < 0$ )

Si  $f'$  tiene un máximo local negativo en  $y_0 \implies f''(y_0) = 0$ , así  $Sf(y_0) = \frac{f'''(y_0)}{f'(y_0)}$ . Además  $f'''(y_0) \leq 0$  y  $f'(y_0) < 0$ , por lo tanto  $Sf(y_0) \geq 0$ . (Contradiciendo el hecho de que  $Sf < 0$ ), por lo tanto  $f'$  no puede tener mínimos locales positivos o máximos locales negativos. ■

**Teorema 6.5** *Sea  $f$  una función diferenciable en todo su dominio supóngase que  $Sf < 0$ . Si  $p$  es un punto periódico atractor para  $f$ , entonces el conjunto estable de  $p$  se extiende a infinito o menos infinito o existe un punto crítico cuya órbita es atraída a la órbita de  $p$ .*

#### DEMOSTRACIÓN:

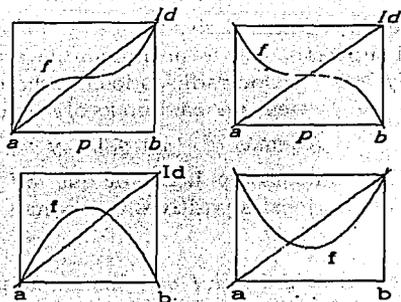
Supóngase primero que  $p$  es un punto fijo. Es claro que  $W^s(p)$  es un intervalo abierto, de lo contrario, por continuidad de  $f$  tal conjunto se puede extender al conjunto estable de  $p$  bajo  $f$ , más allá de los extremos. Así, supóngase que  $W^s(p) = (a, b)$  si  $a$  o  $b$  es más infinito o menos infinito, ya se habrá acabado puesto que  $W(p)$  se extiende a más infinito o a menos infinito. Por lo tanto supóngase que  $a$  y  $b$  son finitos.

Afirmación:  $f(W^s(p)) \subset W^s(p)$ , ya que si se supone lo contrario, es decir,  $f(W^s(p)) \not\subset W^s(p) \implies \exists x \in f(W^s(p))$  tal que  $x \notin W^s(p)$ , como  $x \in f(W^s(p)) \implies f(f^j(x)) \rightarrow p$  cuando  $j \rightarrow \infty$ , i.e.,  $f^{j+1}(x) \rightarrow p$  cuando  $j \rightarrow \infty \implies x \in W(p)$  (contradicción). Por lo tanto  $f(W^s(p)) \subset W^s(p)$ .

Como  $f$  mapea el intervalo  $(a, b)$  en  $(a, b)$ , y por la afirmación anterior  $f(a, b) \subset (a, b) \implies f$  preserva los extremos finales del intervalo  $(a, b)$  en ellos mismos, es decir,  $f(a)$  debe ser  $a$  o  $b$  y  $f(b)$  debe ser  $a$  o  $b$ . Entonces hay esencialmente cuatro posibilidades para la gráfica de  $f$  en el intervalo  $(a, b)$ , vea sus gráficas.

fig 1

- a)  $f(a) = a$   $f(b) = b$   
 b)  $f(a) = b$   $f(b) = a$   
 c)  $f(a) = a$   $f(b) = a$   
 d)  $f(a) = b$   $f(b) = b$



Para el inciso a) y b), es inmediato que  $f$  debe tener un máximo y un mínimo en  $W^s(p) = (a, b)$ , el cual por estar en  $W^s(p)$  será atraído a  $p$ . Por lo tanto el teorema es verdadero en estos incisos.

Para el primer inciso a),  $f(a) = a$  y  $f(b) = b$ . Por el teorema del valor medio  $\exists c \in (a, p)$  con  $c \neq p$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(p)}{a - p} = \frac{a - p}{a - p} = 1$$

En forma análoga por el teorema del valor medio existe un punto  $d$  en  $(p, b)$  tal que  $f'(d) = 1$ .

Del segmento  $[c, d]$ , el cual contiene a  $p$  en su interior se tiene  $f'(c) = 1$ ,  $f'(d) = 1$  y  $f'(p) < 1$ . (ya que  $p$  es un punto fijo atractor)

Así por el lema 6.4  $f'$  no puede tener un mínimo local positivo en  $[c, d] \implies f'$  tiene un mínimo local negativo o igual a cero. Así para cualquiera de estos dos casos lo anterior implica que al menos existe un punto en  $(c, d) \subset (a, b) = W^s(p)$ , en donde la derivada se anula, es decir, existe al menos un punto crítico en el conjunto estable de  $p$  bajo  $f$ , obteniéndose lo que se quería.

Para el inciso b),  $f(a) = b$  y  $f(b) = a$ , considérese  $g(x) = f^2(x)$  (ésto con el fin de que nuestra función  $g$  mapee  $a$  en  $a$  y  $b$  en  $b$  y así remontarnos al primer caso antes descrito). Obsérvese que si  $p$  es un punto fijo atractor de  $f$ , entonces  $p$  sigue siendo punto fijo de  $g$  ya que  $g(p) = f^2(p) = f(f(p)) = f(p) = p$  y además atractor ya que  $|g'(p)| = |f'(f(p))f'(p)| = |f'(p)f'(p)| < 1$ . Por el teorema 6.2  $Sg < 0$ ,

como  $g(a) = a$  y  $g(b) = b$ , se vuelve a aplicar el argumento del caso uno mostrando que  $g$  tiene un punto crítico, llamémosle  $s$  en  $(a, b)$  y como  $g'(s) = f'(f(s))f'(s)$  se sigue que  $s$  ó  $f(s)$  es un punto crítico de  $f$  en  $(a, b)$ . Esto completa la prueba si  $p$  es un punto fijo.

Si  $p$  es un punto periódico de período  $m$ , atractor, los mismos argumentos producen un punto crítico en el conjunto estable de  $f^m$ . De la práctica podemos asegurar que existe un intervalo abierto  $(a, b) \subset W^s(p)$ , donde  $f^m$  manda  $(a, b)$  en sí mismo y para los cuales  $f^m$  preserva los extremos finales en ellos mismos, es decir  $f^m(a) = a$  y  $f^m(b) = b$  o  $f^m(a) = b$  y  $f^m(b) = a$  o  $f^m(a) = a$  y  $f^m(b) = a$  o  $f^m(a) = b$  y  $f^m(b) = b$ , repitiéndose alguna de las cuatro figuras descritas en la fig. 1. Para el último y penúltimo caso, es claro que  $f^m$  debe tener un punto crítico en  $(a, b)$ . Ahora bien para el primer caso, es decir,  $f^m(a) = a$  y  $f^m(b) = b$  existe un  $c \in (a, p)$  tal que  $(f^m)'(c) = \frac{(f^m)'(p) - (f^m)'(a)}{p-a} = \frac{p-a}{p-a} = 1$ , análogamente  $\exists d \in (p, b)$  tal que  $(f^m)'(d) = \frac{f^m(b) - f^m(p)}{b-p} = \frac{b-p}{b-p} = 1$  por lo tanto  $(f^m)'(c) = 1$ ,  $(f^m)'(d) = 1$  y  $(f^m)'(p) < 1$  (por ser  $p$  un punto de período  $m$  atractor). Por hipótesis  $Sf < 0$ , y por la proposición 6.3  $Sf^m < 0$ , y por el lema 6.4  $(f^m)'$  no puede tener un mínimo local positivo  $\implies (f^m)'$  tiene un mínimo local negativo o igual a cero, entonces existe al menos un punto en  $(c, d) \subset (a, b) = W^s(p)$ , donde la derivada se anula, es decir,  $f^m$  tiene un punto crítico en  $(a, b)$ , obteniendo lo que se desea.

Para el segundo caso se puede hacer lo análogo considerando  $g = (f^m)^2$  como en el caso anterior para un punto fijo. ■



## Capítulo 7

# Análisis de la familia cuadrática para $-2 < c < \frac{1}{4}$ . Parte II : Transición al caos

En esta sección se continuará con el análisis de qué pasa conforme  $c$  se decreta de  $\frac{1}{4}$  a  $-2$ . Como se verá más adelante la transición para que  $Q_c$  sea caótica es necesaria una serie de bifurcaciones de período doble. Por lo que en este capítulo se analizará la ruta hacia el caos.

Uno de los resultados importantes que se utilizará es el siguiente:

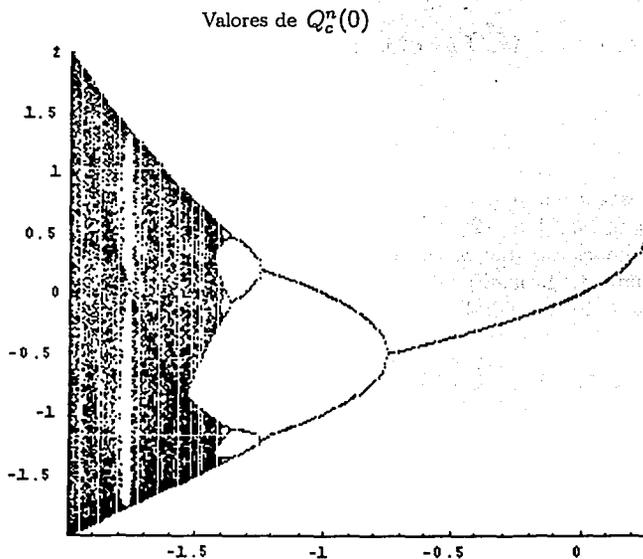
**Teorema 7.1** *Sea  $f$  una función diferenciable en todo su dominio y  $Sf < 0$ . Si  $p$  es un punto periódico atractor para  $f$ , entonces el conjunto estable de  $p$ , ya sea que se extienda a más infinito o a menos infinito o existe un punto crítico de  $f$ , cuya órbita es atraída a la órbita de  $p$ .*

La prueba de este teorema se puede ver en el capítulo anterior sobre la "Derivada Schwártziana".

Así puesto que  $S(Q_c(x)) < 0 \forall c \in \mathbb{R}$  y del análisis desarrollado en el capítulo 4 y más específicamente en la fig 4 de ese mismo capítulo, se puede ver que el conjunto estable para los puntos periódicos de período  $m$  con  $m \in \mathbb{N}$ , no se extiende a más infinito o a menos infinito, así que el punto crítico de  $Q_c$ , que es el cero, ya que  $Q'_c(0) = 0$ , está en el conjunto estable del punto periódico de período  $m$  con  $m \in \mathbb{N}$ , así, si  $Q_c(x)$  tiene una órbita

atractora para alguna  $c$ , entonces se sabe que el punto crítico de  $Q_c(x)$  está en el conjunto estable de la órbita. Se explorará esta información para dibujar un diagrama de bifurcación para  $Q_c$ . El parámetro  $c$  está graficado en el eje horizontal y el valor de  $Q_c^n(0)$  está graficado en el eje vertical para algunos valores de  $n$  entre 500 y 600. Por ejemplo supóngamose que  $c = 1.8$ . Así pues  $Q_c^{500}(0) = 1.18$ ,  $Q_c^{501}(0) = -0.38$ ,  $Q_c^{502}(0) = -1.64$  ....  $Q_c^{600}(0) = -0.93$  entonces los puntos  $(1.8, 1.18)$ ,  $(1.8, -0.38)$ ,  $(1.8, -1.64)$  ...  $(1.8, -0.93)$  serán graficados.

Esto se hizo para 400 valores de  $c$  entre  $-2$  y  $\frac{1}{4}$ . Los valores del rango están entre  $-2$  y  $2$ . El diagrama así descrito se muestra a continuación.



Ya que una órbita periódica atrae, según el teorema 7.1 a un punto crítico el diagrama debería de darnos una localización de las órbitas atractoras.

Obsérvese que se obtiene el comportamiento que se esperaba para  $\frac{1}{4} < c < -\frac{3}{4}$ , la órbita de cero ha convergido más o menos al punto fijo atractor

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$q$ . Cuando  $c = -\frac{3}{4}$  hay una bifurcación de duplicación de período, así para el parámetro un poco más pequeño que  $-\frac{3}{4}$ , hay una órbita de período doble. Si se sigue observando parece que una bifurcación de duplicación de período ocurre en  $-\frac{5}{4}$ , ya que en dicho punto la órbita de período 2 transita a una órbita de período 4, luego a una órbita de período 8 y luego a otra de período 16 y así sucesivamente. Como una demostración analítica se complicaría demasiado, el análisis gráfico es suficiente para fines prácticos.

Ahora bien en el siguiente bloque se observará que existe un intervalo en  $I_c$  donde la función  $Q_c^2(x)$  se parece a la función  $Q_s$  para alguna  $s$ .

Considérese la gráfica de  $Q_c^2(x)$  cuando  $-2 \leq c \leq \frac{1}{4}$ . Por ejemplo considérese la gráfica de  $Q_{-1.19}^2(x)$  la cual es mostrada en la figura 2

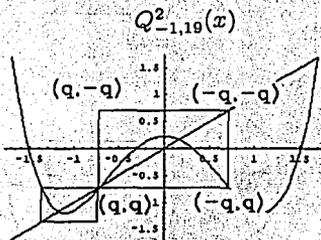


fig 2

Gráfica de  $Q_{-1.19}^2$  y  $Q_{-0.42}$ . Note la semejanza de las gráficas en las cajas

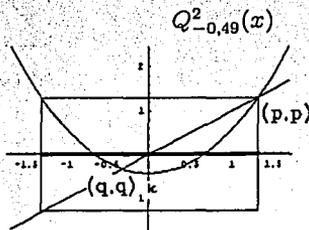


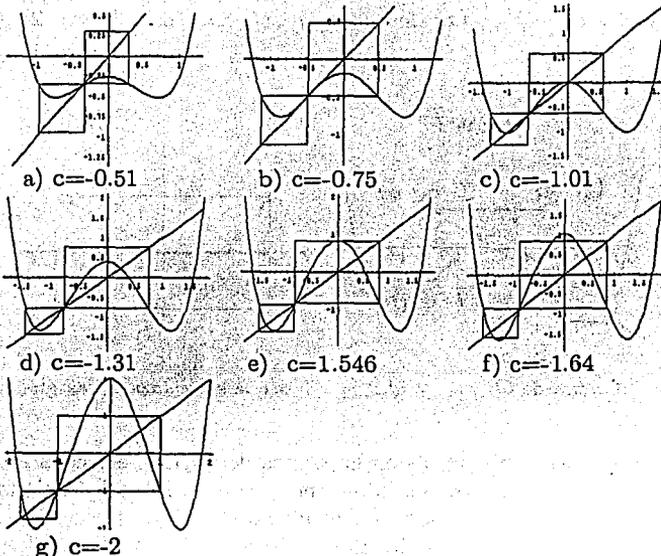
fig 3

Una de las cajas mostradas en la gráfica de  $Q_c^2(x)$  empieza en el punto fijo  $(q, q)$ , después se ha trazado una línea recta horizontal hacia la derecha hasta tocar la gráfica de  $Q_c^2$  en el punto  $(-q, q)$ . Enseguida se traza, una línea vertical hasta tocar la gráfica de  $y = x$  en el punto  $(-q, -q)$ . Finalmente se completa la caja trazando un segmento de línea horizontal de  $(-q, -q)$  a  $(q, -q)$ , y un segmento de línea vertical de  $(q, -q)$  a  $(q, q)$ . Esta caja ha sido dibujada en la gráfica de  $Q_{-1.19}^2(x)$ , en la fig. 2 junto con una segunda caja, la cual está al lado, abajo a la izquierda, de la caja ya contruida y tiene uno de sus vértices en  $(q, q)$ . Nótese la semejanza entre la gráfica de  $Q_s$  en  $I_s$  cuando  $s = -0,426845$ , en la fig 3, y la gráfica

de  $Q_{-1,19}^2$  en sus cajas, claro, rotando una de ellas  $180^\circ$  grados en sentido contrario a las manecillas del reloj. Dada la semejanza de las cajas se espera que la dinámica sea también semejante.

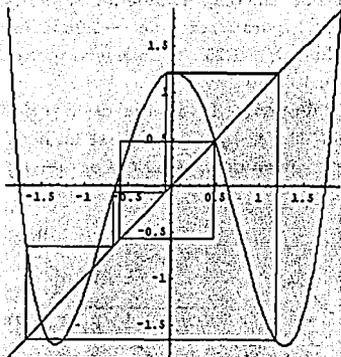
En la tabla de figuras, tabla 1, se verá la gráfica de  $Q_c^2(x)$  para una gran variedad de valores de  $c$  entre  $-2$  y  $\frac{1}{4}$  y en cada gráfica se han marcado las cajas descritas con anterioridad. Obsérvese que cada caja tiene una esquina en un punto fijo atractor de  $Q_c(x)$ . Obsérvese finalmente cómo la gráfica cambia dentro de la caja conforme  $c$  se decrementa.

tabla 1.



Los cambios de la gráfica de  $Q_c^2(x)$  son cualitativamente iguales a los cambios de la gráfica de  $Q_s(x)$  en  $I_s$  conforme  $s$  se decrementa desde cero. En particular nótese que cuando  $Q_c^2(0) = -q$ , el máximo local en  $x_0 = 0$ , es tangente a la parte superior de la caja. Esto es, cualitativamente igual a la gráfica de  $Q_2(x)$  en  $I_c$ . Como  $Q_c^2(c) = c^2 + c$ , se puede encontrar el valor

de  $c$  para el cual la tangencia ocurre, resolviendo la ecuación  $c^2 + c = -q$ , es decir,  $c^2 + c = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$ . Resolviendo la ecuación anterior se encuentra que la tangencia ocurre cuando  $c$  es aproximadamente  $-1.5437$ . Mirando de nuevo la tabla 1, nótese que cuando  $c$  es menor que  $-1.5437$ , la gráfica de  $Q_c^2(x)$  en las cajas es cualitativamente semejante a la gráfica de  $Q_s(x)$  en el cuadrado  $I_s$  cuando  $c$  es más pequeño que  $-2$ . Así pues, se espera que la dinámica para estos valores sea semejante, pero hay una importante diferencia, de aquellos puntos que salen del intervalo  $I_c$ , bajo la iteración de  $Q_s(x) = x^2 + s$ , cuando  $s < -2$  y que pertenecen al conjunto estable de  $\infty$ , los cuales nunca regresan a  $I_c$ . Sin embargo puntos que salen del intervalo  $[-q, q]$  bajo la iteración de  $Q_c^2(x)$  pueden regresar a  $[-q, q]$  bajo la iteración de  $Q_c^2(x)$ . Véase la siguiente fig 4



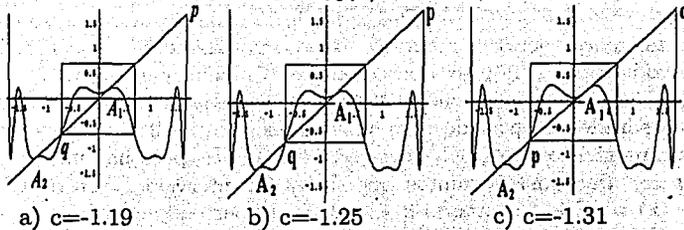
Gráfica de  $Q_c^2$  cuando  $c = -1.71$  nótese que los puntos en el cuadrado, es decir en el intervalo  $[-q, q]$  salen del intervalo bajo la iteración de  $Q_c^2(x)$  y pueden regresar. La condición inicial en este caso  $x_0 = 0$ .

fig 4

Como tales puntos pueden regresar al intervalo  $[-q, q]$  esto complica la dinámica de  $Q_c^2(x)$ . Además como la gráfica se sale del rectángulo señalado, se espera que exista un conjunto de Cantor en  $[-q, q]$  en el cual  $Q_c^2(x)$  se comporta caóticamente cuando  $c$  es menor que  $-1.5437$ . En forma análoga para la segunda caja hay un segundo conjunto de Cantor en donde  $Q_c^2(x)$  es caótica cuando  $c$  es menor que  $-1.5437$ .

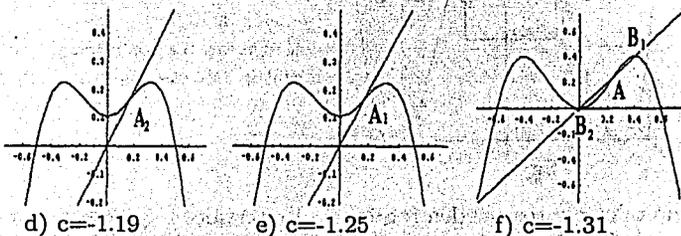
Obsérvese la gráfica de  $Q_c^4$  en la fig 5 inciso a), b) y c) para  $c = -1.19$ ,  $c = -1.25$  y  $c = -1.31$  y así determinar qué pasa cuando  $c$  se decrementa a partir de  $-1.25$  en cada caso la gráfica esta mostrada en el intervalo  $[-q, q]$ .

fig 5  $Q_c^4(x)$



Gráfica de  $Q_c^4(x)$  para valores del parámetro  $c = -1.19$ ,  $c = -1.25$ ,  $c = -1.31$ . El punto  $A_1$  es un punto de periodo 2 de  $Q_c$  que cambia a una bifurcación de duplicación de periodo cuando  $c = -1.25$ . El comportamiento es idéntico al que se observó cuando se vió la gráfica de  $Q_c^2(x)$ , para  $c$  cerca de  $-1.25$ . Una bifurcación de duplicación de periodo ocurre cuando  $c > -1.25$  y un nuevo punto de periodo cuatro ha nacido.

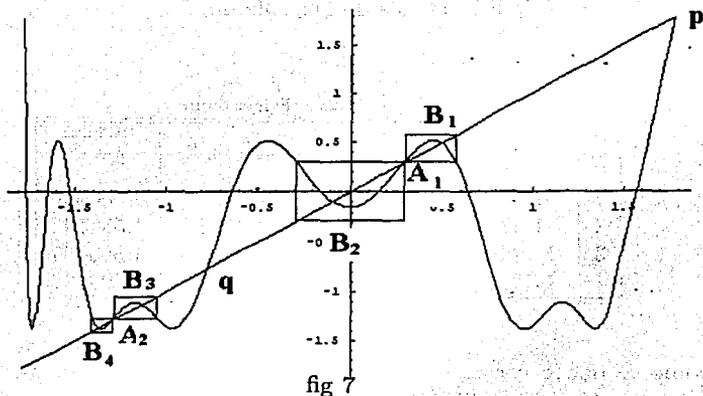
En cada una de las gráficas a) b) c) de arriba los límites de la region graficada son  $q$  y  $-q$ , sin embargo en las gráficas d) e) y f) de abajo se ha hecho un acercamiento para estos mismos parámetros y cuyo dominio ahora es  $[-p, p]$



Más adelante se verá que hay un valor del parámetro para el cual  $Q_c^4(x)$  vuelve a tener cuadrados, en donde la función  $Q_c^4(x)$  es semejante a  $Q_s$  en  $I_s$  para alguna  $-2 \leq s \leq \frac{1}{4}$ .

Por ejemplo obsérvese la gráfica de  $Q_c^4$  para  $c = -1.375625$  en la fig. 6, se notará de nuevo las cajas en las cuales la gráfica de  $Q_c^4$  es semejante a  $Q_c$  en  $I_c$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Fijándose se observa que cada una de las cajas tiene un punto de período 2. También, hay una caja para cada punto de período 4. Se espera que haya un valor del parámetro  $c$  para el cual la gráfica de  $Q_c^4(x)$  se sale del cuadrado y así con un razonamiento análogo al anterior se llega a que hay 4 conjuntos de Cantor en  $I_c$ , en donde la función  $Q_c^4(x)$  es caótica. Es decir si se toma un punto en cualquiera de estos conjuntos, su órbita bajo  $Q_c^4(x)$  será caótica.

Así pues, conforme el parámetro se decrementa en la función  $Q_c^4(x)$  el valor absoluto de la derivada de  $Q_c^4(x)$  en el punto de período 4 es mayor que 1 y por tanto hay otra bifurcación y la órbita periódica atractora de período 4 se convierte en repulsora. Ya creada la órbita de período 8 se verán 8 cajas en las cuales la gráfica de  $Q_c^2(x)$  se parece a la gráfica de  $Q_s(x)$  en  $I_s$  para alguna  $s$ . Conforme el parámetro continúa decreciendo se tiene otra bifurcación de período doble y una órbita de período 16 es creada.

Este proceso continua hasta un valor llamado " $c$  infinito" que es aproximadamente -1.4

Un aspecto interesante de esta cascada de duplicación de período consiste de la diferencia entre dos valores consecutivos del parámetro donde ocurre la bifurcación. Supóngase  $c_n$  el valor del parámetro para el cual el punto

periódico atractor  $2^n$  se divide en un punto periódico atractor de período  $2^{n+1}$ . Obsérvese la siguiente tabla de Feigenbaum

tabla 2 de Feigenbaum

$n$	$c_n$	$c_n - c_{n-1}$	$c_{n+1} - c_n$	$\frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n}$
0	-0.75	-	-	-
1	-1.25	-0.5	-0.12	4.166666
2	-1.37	-0.118098	-0.025947	4.551508
3	-1.3940	-.025947	$-5.585 \times 10^{-3}$	4.645837
4	-1.3996	$-5.585 \times 10^{-3}$	$-1.19 \times 10^{-3}$	4.693227

Como se puede ver  $c_n \rightarrow c_\infty \approx -1.4$  y además el cociente  $\frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n}$  pareciera tender a  $\delta = 4.6692016\dots$  Este número es el llamado número de Feigenbaum, ya que fue descubierto por el físico Mitchel Feigenbaum. En realidad Feigenbaum hizo un descubrimiento más sorprendente. El número  $\delta$  es universal, es decir, es independiente de la forma de la familia de los mapeos.

Por lo tanto si  $Q_c$  tiene un punto periódico de período primo  $n$ , se pueden encontrar  $n$  regiones de la gráfica de  $Q_c^n$ , en la cuales se pueden construir cajas cuadradas, tales que la gráfica de  $Q_c^n$  en dichas cajas sea semejante a la gráfica de  $Q_s$  en cierta región  $I_s$ .

Como se había mencionado anteriormente existe un conjunto de Cantor en  $[-q, q]$ , en el cual  $Q_c^2(x)$  es caótico siempre que  $c \geq -1.5437$ . Como resultado se espera que la dinámica para el valor del parámetro en el intervalo  $[-2, -1.5437]$  sea extremadamente complicada. En realidad la dinámica de  $Q_c$  para parámetros en esta sección no quedan del todo comprendidos. Como se mencionó arriba, en la figura 1 se muestra, un diagrama de bifurcación para los parámetros de este intervalo. Obsérvese las aparentes órbitas de período tres y cinco en dicha figura 1. Si se hace un acercamiento a cualquiera de estas 2 órbitas, digamos, alrededor de la órbita de período 3, se descubre otro diagrama de bifurcación aparentemente idéntico al de la fig1.

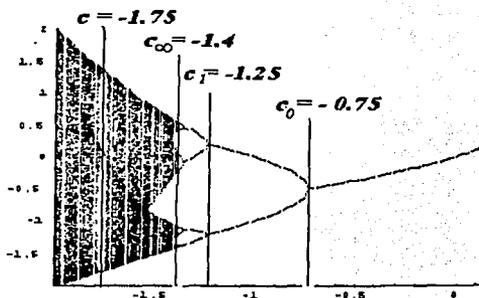


fig 7

Nótese las franjas verticales blancas. Estos espacios corresponden a puntos periódicos atractores. Las franjas más obvias corresponden a puntos atractores de período 5 y puntos periódicos de período 3. En la fig 9 se ha hecho un acercamiento a los puntos de periodo 3 restringiendo el valor del parámetro de -2 a -1.57. Se ha mostrado un cuadrado donde hay una gran semejanza de esta región con el diagrama de bifurcación mostrado el la fig. anterior.

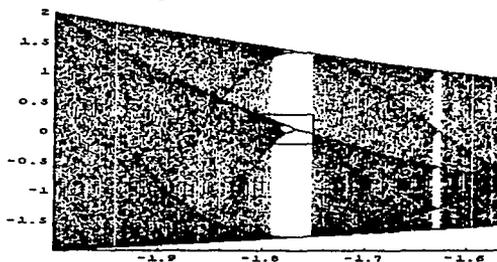


fig 9



# Capítulo 8

## Conjugación Topológica

**Definición 8.1**  $\gamma : D \rightarrow E$  es un homeomorfismo si y sólo si  $\gamma$  es continua, uno a uno y tiene inversa continua.

Si  $D$  y  $E$  son homeomorfos, entonces la topología de  $D$  y  $E$  es la misma.

**Definición 8.2** Sean  $f : D \rightarrow D$  y  $g : E \rightarrow E$  funciones, entonces  $f$  es topológicamente conjugada a  $g$  si existe un homeomorfismo  $\gamma : D \rightarrow E$  tal que  $\gamma \circ f = g \circ \gamma$ .

En este caso  $\gamma$  es llamado conjugación topológica. Esta relación se representa con un diagrama conmutativo:

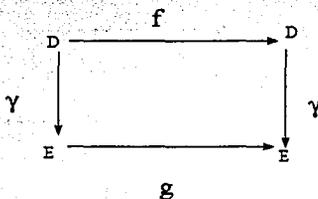


fig 1

Se dice que un diagrama es conmutativo, si se empieza con un elemento en  $D$ , se sigue las flechas a cualquier otro conjunto en el diagrama y se llega al mismo elemento no importa cual ruta se tome.

Ahora bien como  $\gamma$  es un homeomorfismo se sabe que  $\gamma^{-1}$  esta definido

y que

$$\gamma^{-1}(\gamma(f(x))) = f(x)$$

Como  $\gamma$  conmuta con  $f$  y  $g$ , se puede sustituir  $g(\gamma(x))$  por  $\gamma(f(x))$  en la ecuación previa para así obtener

$$\gamma^{-1}(g(\gamma(x))) = f(x) \tag{8.1}$$

Esta información se representa en el siguiente diagrama conmutativo.

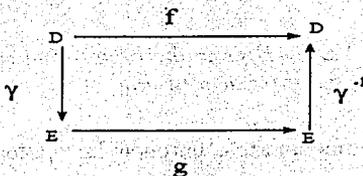


fig 2

En forma análoga si  $e$  es un elemento de  $E$ , entonces

$$\gamma(f(\gamma^{-1}(e))) = g(e)$$

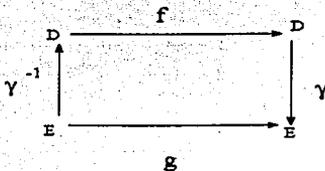
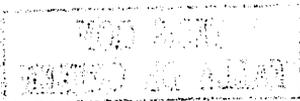


fig 3



**Ejemplo 8.3** (no matemático de conjugación topológica): Supóngase que  $X$  es el conjunto de sustantivos en francés y  $Y$  el conjunto de sustantivos en inglés y  $\gamma$  el diccionario de francés-inglés, sea  $f$  la función "plurales en francés" y hace que a cada sustantivo en francés le asigne su correspondiente plural y sea  $g$  "la función plurales en inglés".

Para ir a través de la fórmula (8.1) se puede iniciar con la palabra en francés "oeil" la cual por el diccionario francés inglés  $\gamma$  le corresponde "eye", la función "plurales en inglés" la transformará en "eyes" Ahora necesitamos transformala en francés usando el diccionario inglés francés", es decir  $\gamma^{-1}$ ; cuando se aplica  $\gamma^{-1}$  a "eyes" esto dará como resultado "yeux" el plural de "oeil". Esto es lo que hubiera hecho directamente  $f$  si se hubiera aplicado a "oeil".

La importancia de la conjugación topológica es que ésta preserva el comportamiento cualitativo de las órbitas, bajo iteración, es decir preserva las dinámicas como se verá en el siguiente teorema:

**Teorema 8.4** Sean  $D$  y  $E$  subconjuntos de los números reales,  $f : D \rightarrow D$ ,  $g : E \rightarrow E$  y  $\gamma : D \rightarrow E$  una conjugación topológica de  $f$  y  $g$ . Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas :

- $\gamma^{-1} : E \rightarrow D$  es una conjugación topológica
- $\gamma \circ f^n = g^n \circ \gamma$  para todo número natural  $n$ .
- $p$  es un punto periódico de  $f$  si y sólo si  $\gamma(p)$  es un punto periódico de  $g$ . Más aún el período primo de  $p$  y  $\gamma(p)$ , son idénticos.
- Si  $p$  es un punto periódico de  $f$  con conjunto estable  $W^s(p)$ , entonces el conjunto estable de  $\gamma(p)$  es  $\gamma(W^s(p))$ .

#### DEMOSTRACIÓN:

- a) Por demostrar dos cosas, la primera que  $\gamma^{-1}$  es un homeomorfismo y segunda que  $f \circ \gamma^{-1} = \gamma^{-1} \circ g$ . Para la primera como por hipótesis  $\gamma$  es un homeomorfismo, claramente  $\gamma^{-1}$  también lo es ya que  $\gamma^{-1}$ , es continua, tiene inversa continua ( $\gamma$  es continua), y es biyectiva ( $\gamma$  es biyectiva). Para la segunda parte, como por hipótesis  $\gamma \circ f = g \circ \gamma$ , entonces  $f = \gamma^{-1} \circ g \circ \gamma$ . Así pues,  $f \circ \gamma^{-1} = \gamma^{-1} \circ g \circ \gamma \circ \gamma^{-1} = \gamma^{-1} \circ g \circ I = \gamma^{-1} \circ g$  ■

b) ( Se utilizará inducción sobre  $n$  )

Para  $n = 1$ , como  $\gamma$  es conjugación topológica de  $f$  y  $g$ , entonces

$$\gamma \circ f = g \circ \gamma$$

Por lo que la desigualdad  $\gamma \circ f^n = g^n \circ \gamma$  claramente se cumple para  $n = 1$ .

Supóngase que es verdadera para  $n$ , es decir que

$$\gamma \circ f^n = g^n \circ \gamma$$

Por demostrar que es verdadera para  $n + 1$ . Pero

$$\gamma \circ f^{n+1} = (\gamma \circ f^n) \circ f = (g^n \circ \gamma) \circ f = g^n \circ (\gamma \circ f) = g^n \circ (g \circ \gamma) = g^{n+1} \circ \gamma$$

Por lo tanto  $\gamma \circ f^{n+1} = g^{n+1} \circ \gamma$  ■

c) Supóngase que  $p$  es un punto periódico de período  $n$  de  $f \implies f^n(p) = p \implies \gamma(f^n(p)) = \gamma(p)$ . Pero por el inciso b)  $g^n(\gamma(p)) = \gamma(f^n(p)) = \gamma(p)$ . Por lo tanto  $\gamma(p)$  es un punto de período  $n$  de  $g$ . ■

d) Sea  $p$  un punto periódico de  $f$ , con período primo  $k$  y sea  $x$  un elemento de  $W^s(p)$ . Por definición de  $W^s(p)$  para cada  $\delta > 0$ , existe una  $n \geq N$ , entonces  $|f^{nk}(x) - p| < \delta$

Por demostrar que para cualquier  $\epsilon > 0 \exists M$  tal que si  $n \geq M$ , entonces  $|g^{kn}(\tau(x)) - \gamma(p)| < \epsilon$ .

Sea  $\epsilon > 0$  como  $\gamma$  es continua, en particular  $\gamma$  es continua en  $p$ ,  $\exists \delta > 0$ , tal que si  $|y - p| < \delta$ , entonces  $|\gamma(y) - \gamma(p)| < \epsilon$ . Escójase  $M$  suficientemente grande tal que si  $n \geq M$ , entonces  $|f^{nk}(x) - p| < \delta$ . Entonces por continuidad

$$|\gamma(f^{nk}(x)) - \gamma(p)| < \epsilon$$

$\implies$  (Por conjugación topológica)

$$|g^{nk}(\tau(x)) - \gamma(p)| < \epsilon$$

cuando  $n \geq M$ . ■

**Ejemplo 8.5** Sea  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$  una función cuadrática. Mostrar que existe una función lineal  $\gamma(x) = mx + d$  y un parámetro  $c$  tal que  $\gamma$  es una conjugación topológica entre  $f$  y el mapeo cuadrático  $Q_c(x) = x^2 + c$ .

SOLUCIÓN:

Primero calcúlese la composición de  $f$  con  $\gamma$ ,

$$\gamma \circ f = \gamma(Ax^2 + Bx + C) = m(Ax^2 + Bx + C) + d = mAx^2 + Bmx + Cm + d$$

Enseguida la composición de  $\gamma$  con  $Q_c$ :

$$Q_c \circ \gamma = Q_c(mx + d) = (mx + d)^2 + c = m^2x^2 + 2mxd + d^2 + c$$

Como  $\gamma$  es una conjugación topológica entre  $Q_c$  y el mapeo cuadrático, entonces

$$\gamma \circ f = Q_c \circ \gamma$$

$\Leftrightarrow$

$$mAx^2 + Bmx + Cm + d = m^2x^2 + 2mdx + d^2 + c$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} Am = m^2 \\ Bm = 2md \\ Cm + d = d^2 + c \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m = A \\ d = \frac{B}{2} \\ CA + \frac{B}{2} = \frac{B^2}{4} + c \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m = A \\ d = \frac{B}{2} \\ c = CA + \frac{B}{2} \left(1 - \frac{B}{2}\right) \end{cases}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Por lo tanto, si la transformación lineal  $\gamma(x) = Ax + \frac{B}{2}$  y  $c = CA + \frac{B}{2} \left(1 - \frac{B}{2}\right)$ , entonces  $\gamma$  es topológicamente conjugada entre  $f$  y el mapeo cuadrático  $Q_c(x) = x^2 + c$ .

Por consiguiente se cumple el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & f(x) = Ax^2 + Bx + C \\ & \xrightarrow{\quad} & \\ \gamma(x) = mx + d & \begin{array}{c} \downarrow \\ \square \\ \uparrow \end{array} & \gamma^{-1}(x) = \frac{x}{A} - \frac{B}{2A} \\ = Ax + \frac{B}{2} & & \\ & \xrightarrow{\quad} & \\ Q(c) = x^2 + c = x^2 + CA + \frac{B}{2-B} & & \end{array}$$

fig 4

FOR SALE  
PACIFIC TELERADIO

# Capítulo 9

## Método de Euler

### 9.1. Métodos Numéricos

La gran mayoría de las ecuaciones diferenciales  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  no se pueden resolver de manera explícita mediante expresiones analíticas simples, es decir, dada una ecuación diferencial la probabilidad de que no sea resoluble analíticamente, es muy grande, de ahí la importancia del enfoque numérico.

Hay diversos paquetes computacionales como Matematica, Maple o Matlab que aún cuando no se pueda expresar la solución en términos elementales, la computadora muestra la gráfica de la solución. Esto es posible gracias a los métodos numéricos con los cuales la computadora aproxima las soluciones paso a paso.

Las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales son de suma importancia para las matemáticas aplicadas es por ello que se ha desarrollado una gran variedad de métodos numéricos. El más simple es el método de Euler, aunque rara vez se emplea en la práctica, la simplicidad de su deducción sirve para ejemplificar las técnicas con que se desarrollan algunos de los métodos más avanzados, sin los engorrosos inconvenientes algebraicos que acompaña a éstos.

La idea esencial de este método de aproximación numérica es tan intuitiva que es difícil atribuirselo a alguien en particular. Pero la primera descripción formal fue hecha por Euler. La primera prueba de que conforme el paso tiende a cero la solución aproximada tiende a la solución exacta la hizo Cauchy, sin embargo, ya Newton había usado este método en uno

de sus primeros libros que hablan de ecuaciones diferenciales.

## 9.2. Método de Euler

Para poner en práctica el método de Euler se da un incremento  $\Delta t$ , que generalmente se llama paso de tamaño  $h$ , el cual es un número positivo. Supóngase que inicialmente se empieza en algún punto  $(t_0, y_0)$ , que representa la condición inicial. En este punto la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  especifica la pendiente de la recta tangente a la solución en  $(t_0, y_0)$  enseguida  $t_0$  se incrementa un paso de longitud  $h$ , llamémosle  $t_1$ ; es decir,  $t_1 = t_0 + h$ , y nos movemos sobre la recta tangente que pasa por  $(t_0, y_0)$  y tiene como pendiente a  $f(t_0, y_0)$ . Si  $y_1$  es la componente en  $y$  de esta recta tangente que pasa por  $(t_0, y_0)$  y tiene como componente en el eje  $t$  a  $t_1$ , entonces:

$$y_1 = f(t_0, y_0) \cdot h + y_0$$

Por tanto

$$(t_1, y_1) = (t_0 + h, y_0 + hf(t_0, y_0))$$

Véase la figura 1

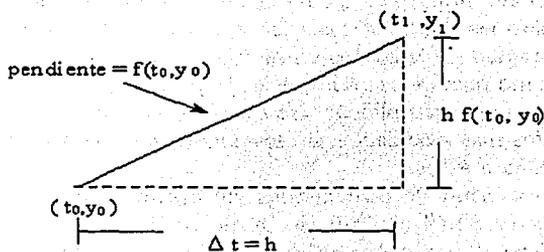


fig 1

La solución aproximada por el método de Euler entre estos dos puntos  $(t_0, y_0)$  y  $(t_1, y_1)$ , es el segmento de línea que los une .

La solución aproximada de Euler puede ser extendida a más puntos . Ahora se puede empezar desde el punto  $(t_1, y_1)$ , como nuevo punto inicial, usando la pendiente dada por  $f(t_1, y_1)$ , como nuevo punto inicial, para obtener

$$(t_2, y_2) = (t_1 + h, y_1 + hf(t_1, y_1))$$

De la misma forma se puede ahora utilizar  $(t_2, y_2)$ , como punto inicial para obtener  $(t_3, y_3)$  y así sucesivamente. La figura 2 muestra los resultados del método de Euler después de tres pasos consecutivos.

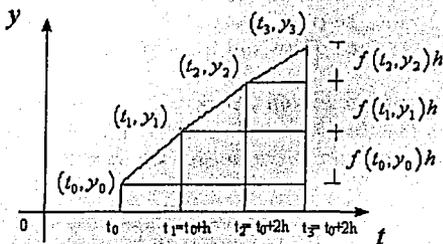


fig2

Por lo tanto dado un incremento  $h$  positivo el punto inicial se mueve a través de la siguiente sucesión de puntos.

$$(t_0, y_0)$$

$$(t_1, y_1) \text{ con } y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

$$(t_n, y_n) \text{ con } y_n = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})$$

Una definición más formal del método de Euler es la siguiente:

**Definición 9.1** *Considérese la ecuación diferencial  $y' = f(t, y)$  con  $f$  una función definida en algún rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Escójase un punto*

$(t_0, y_0) \in \mathbb{R}$  con un paso de tamaño  $h$ . Defínase una sucesión de puntos  $(t_n, y_n)$  recursivamente por

$$t_n = t_{n-1} + h = t_0 + nh$$

$$y_n = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})$$

Entonces la solución aproximada por el método de Euler,  $y_{n+1}(t)$  y que pasa a través del punto  $(t_0, y_0)$  es una función lineal que pasa a través de toda la secuencia de puntos  $(t_n, y_n)$ , donde cada segmento de recta cumple con

$$y_{n+1}(t) = y_n + (t - t_n)f(t_n, y_n), \quad \text{para } t \in [t_n, t_{n+1}]$$

Supóngase que la meta es determinar  $y(t)$  en  $t = b$  dada la ecuación  $y' = f(t, y)$  con  $y(t_0) = y_0$ , se puede elegir  $N$  como el número de subintervalos en el intervalo  $t_0 \leq t \leq b$ . Esto significa que  $h = \frac{b-t_0}{N}$ .

**Ejemplo 9.2** Para la ecuación  $y' = y$  que empieza en  $(t_0, y_0) = (0, 1)$  tal ecuación tiene la solución exacta  $y(t) = e^t$ . Se estimará la solución por el método de Euler con un incremento de  $h = 0,1$ .

Tabla 1

$t_n$	$y_n$	$y(t)$	$f(t_n, y_n)$	$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$
$t_0 = 0$	1	$y(0,0) = 1$	1	
$t_1 = 0.1$	1.1	$y(0,1) = 1.105$	1.1	$y_1 = 1 + (0.1)1.1 = 1.11$
$t_2 = 0.2$	1.2	$y(0,2) = 1.221$	1.2	$y_2 = 1.11 + (0.1)1.2 = 1.23$
$t_3 = 0.3$	1.3	$y(0,3) = 1.349$	1.3	$y_3 = 1.23 + (0.1)1.3 = 1.36$
$t_4 = 0.4$	1.4	$y(0,4) = 1.491$	1.4	$y_4 = 1.36 + (0.1)1.4 = 1.50$
$t_5 = 0.5$	1.5	$y(0,5) = 1.648$	1.5	$y_5 = 1.50 + (0.1)1.5 = 1.65$

Obsérvese que para tal estimación se necesitan cinco pasos para alcanzar el valor de  $t = 0.5$ . Vea la tabla anterior.

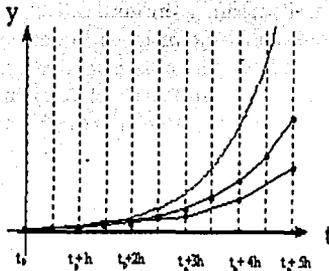
**Ejemplo 9.3** Para la misma ecuación  $y' = y$  y las mismas condiciones iniciales es decir  $(t_0, y_0) = (0, 1)$  que en el ejemplo anterior se puede estimar la solución aproximada para  $t = 0.5$  pero ahora con un tamaño de paso menor con  $h = 0.05$ .

Tabla 2

$t_n$	$y_n$	$y$
0.00	1.000	1.0000
0.05	1.050	1.6487
0.10	1.102	2.7182
0.15	1.157	1.1618
0.20	1.215	1.2214
0.25	1.276	1.2840
0.30	1.340	1.3498
0.35	1.407	1.4190
0.40	1.477	1.4918
0.45	1.551	1.5689
0.50	1.628	1.6487

Con un tamaño de paso menor,  $h = 0.05$ , se realiza más trabajo ya que por ejemplo, en este caso se requirió el doble de pasos para ir de  $t = 0$  a  $t = 0.5$ , sin embargo, al final se obtiene una aproximación mejor a la solución.

En general, esto es válido, dado un punto fijo en el dominio, la aproximación de Euler converge al valor exacto conforme el tamaño del paso disminuye. Una demostración puede verse en el Apéndice A.



Solución exacta para  $y' = f(x, y)$

Aproximación de Euler para un paso  $h/2$

Aproximación de Euler para un paso  $h$

fig3

Gráfica de la solución exacta de la ecuación diferencial  $y' = y$  con  $y_0 = 1$ , junto con dos soluciones aproximadas por el método de Euler, la primera con tamaño de paso  $h = 0.05$  y la segunda con tamaño  $h = 0.1$ .

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

### 9.3. El método de Euler como un sistema iterativo:

Como el método de Euler consiste en discretizar el tiempo de una ecuación diferencial se puede ver al método de Euler como una simple iteración. Durante mucho tiempo los matemáticos han tratado de explicar el comportamiento de las soluciones aproximadas por diferentes métodos en particular por el método de Euler, pero, por ejemplo se puede ver [16] que aún y cuando se conocían las grandes diferencias que había entre las soluciones aproximadas y exactas, para tiempos grandes y un incremento fijo, no se podía dar una explicación a este fenómeno como ahora. Los matemáticos siguen tratando de entender qué es lo que hacen en realidad los métodos numéricos, en general.

Como se ha tratado de ver las iteraciones abarcan un contexto muy amplio en las ecuaciones diferenciales. Por otro lado la computadora encuentra en la iteración una iteración muy compatible. A pesar de todo esto iterar no es una parte tradicional en el manejo de las ecuaciones diferenciales.

El objetivo principal de este trabajo es discutir lo que pasa si se fija el paso  $h$  y se incrementa la variable independiente. Más específicamente se dará respuesta a la pregunta, ¿Cuándo la aproximación de Euler, para un tamaño de paso fijo, tiene el mismo comportamiento cualitativo que una ecuación diferencial, para cierto tipo de ecuaciones diferenciales. Entiéndase por comportamiento cualitativo, la forma general de la curva solución, y en general, el estudio de las propiedades cualitativas de la solución. Por ejemplo, si la solución es  $y(t) = e^{-t}$ , todas las soluciones con diferentes condiciones iniciales, tiende a cero conforme la variable independiente tiende a infinito otra propiedad cualitativa de una ecuación de este mismo tipo podría ser la estabilidad de las soluciones.

Observación:

Analizar el comportamiento a largo plazo de las soluciones aproximadas, por el método de Euler es equivalente analizar su dinámica como un sistema iterativo.

Considérese el método de Euler aplicado a  $y' = f(t, y)$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \end{aligned} \quad (9.1)$$

Los puntos sucesivos  $(t_{n+1}, y_{n+1})$  son la órbita de  $(t_0, y_0)$  bajo la iteración del mapeo

$$\tilde{g}_h(t, y) = (t + h, g_h), \quad \text{donde } g_h = y + hf(t, y)$$

ya que la ecuación 9.1 se puede escribir como

$$(t_{n+1}, y_{n+1}) = \tilde{g}(t_n, y_n) = \tilde{g}(\tilde{g}(t_{n-1}, y_{n-1})) = \dots = \tilde{g}(t_0, y_0)$$

En realidad nuestro objetivo es estudiar la segunda coordenada de  $\tilde{g}_h(t, y)$ , es decir  $g_h(t, y) = y + hf(t, y)$ .

Por lo tanto, si  $f$  sólo depende de  $t$ , el método de Euler puede verse como la iteración de una función de números reales. Si  $f$  depende de  $t$  y de  $y$  entonces el método de Euler puede ser modelado como la iteración de una función de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$ .



# Capítulo 10

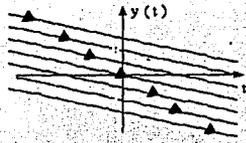
## Aplicaciones

### 10.1. La ecuación $y' = c$

#### 10.1.1. Soluciones de la ecuación diferencial $y' = c$

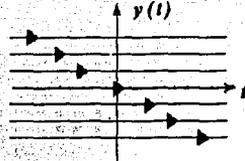
A continuación se analizará el comportamiento cualitativo de la solución aproximada por el método de Euler para la ecuación diferencial más sencilla, es decir,  $y' = c$  donde  $c$  es una constante en los reales y condición inicial  $y(t_0) = y_0$ . Por el método de separación de variables se tiene  $dy = \frac{dy}{dt} dt \implies dy = c dt \implies \int dy = c \int dt \implies y(t) = ct + k$ . Utilizando la condición inicial  $y(t_0) = y_0$  para obtener el valor de la constante de integración se obtiene que  $y_0 = ct_0 + k \implies k = y_0 - ct_0$ . Por lo tanto la solución explícita es:  $y(t) = ct + (y_0 - ct_0)$ . Obsérvese en la fig 1 los distintos comportamientos de las soluciones para los distintos valores de  $c$ :  $c < 0$ ,  $c = 0$ ,  $c > 0$ .

fig 1



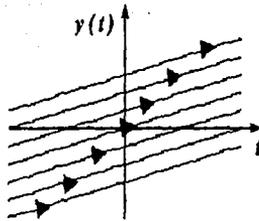
a)  $c < 0$

Para cualquier condición inicial las soluciones tienden a menos infinito



b)  $c = 0$

Las soluciones son constantes en el tiempo



c)  $c > 0$

Las soluciones tienden a más infinito cuando  $t$  tiende a infinito.

### 10.1.2. Análisis del método de Euler para la ecuación $y' = c$

Ahora bien, obtengamos la solución aproximada de esta ecuación por el método de Euler así:

$t_n$	$y_n$
$t_0$	$y_0$
$t_1 = t_0 + h$	$y_1 = ch + y_0$
$t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h$	$y_2 = ch + y_1$
$\vdots$	$\vdots$
$t_n = t_{n-1} + h = t_0 + nh$	$y_n = ch + y_{n-1}$

Como  $y_n = ch + y_{n-1}$  es una ecuación en diferencias muy sencilla su solución se puede encontrar iterando  $y_{n+1} = ch + y_n$  así:

$m = 0$	$y_0$
$m = 1$	$y_1 = ch + y_0$
$m = 2$	$y_2 = ch + y_1 = 2ch + y_0$
$\vdots$	$\vdots$
$m = n$	$y_n = ch + y_{n-1} = nch + y_0$

A continuación, para entender el comportamiento de las soluciones aproximadas por el método de Euler de una manera distinta a analizar su solución analítica, se buscará una función  $g_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(y_n) = y_{n+1}$ . Esta función generará una dinámica artificial, la cual proporcionará el comportamiento cualitativo de tal solución aproximada. Así pues, considérese  $g_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $g_h(x) = ch + x$ . Como  $g_h(x) = ch + x$  es una familia parametrizada de rectas, se obtienen y se sacan los comportamientos correspondientes para cada valor del parámetro  $h$ . Considérese los casos  $c < 0$ ,  $c = 0$ ,  $c > 0$  como inicialmente se había mencionado.

### 1. Caso A: $c < 0$

La gráfica de  $g_h$ , fig 2, es una función lineal que no pasa por el origen y además siempre es paralela a la identidad y queda por debajo de ésta independientemente del valor  $h \in \mathbb{R}^+$  que se tome. Es por esto que esta función no tiene puntos fijos. Así la órbita de cualquier punto en  $\mathbb{R}$  tenderá a menos infinito.

El retrato fase se muestra a continuación:

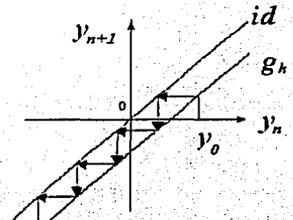


fig 2



fig 3

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

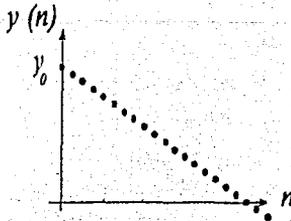


fig 4

Con el análisis anterior no es difícil intuir el comportamiento cualitativo de la solución aproximada por el método Euler para una condición inicial positiva y un incremento  $h$  positivo. Además se puede comprobar directamente de la expresión analítica.

Al comparar la forma cualitativa de las solución aproximada con la forma cualitativa de la solución exacta, se puede ver que es la misma, es decir, conforme  $t$  tiende a infinito la solución tenderá a menos infinito

2. Caso B:  $c = 0$

La gráfica de  $g_h = x$  es la identidad, esto significa que cualquier punto en el dominio  $\mathbb{R}$  de la función será un punto fijo

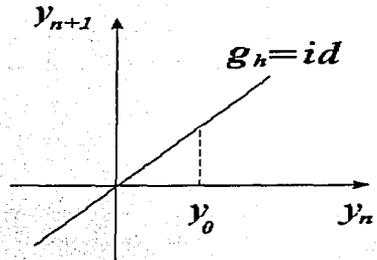


fig 5

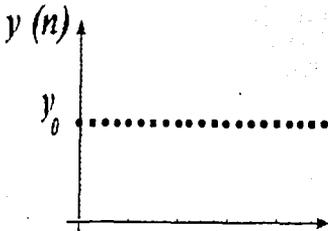


fig 6

Del análisis anterior nos damos cuenta que la solución aproximada por el método de Euler es constante y valdrá la condición inicial  $y_0$  todo el tiempo. Obsérvese que al comparar la forma cualitativa de las soluciones aproximadas con la forma cualitativa de las soluciones exactas, se puede ver que es la misma en el sentido de que conforme  $t$  tiende a infinito la solución permanece constante en el tiempo.

3. Caso C: Si  $C > 0$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

La gráfica de  $g_h$  es una función lineal que no pasa por el origen y además siempre es paralela a la identidad y queda por encima de ésta, independientemente del valor  $h \in \mathbb{R}^+$  que se tome. Es por esto que la función no tiene puntos fijos. Así la órbita de cualquier punto en  $\mathbb{R}$  tenderá a más infinito, (fig 7). El retrato fase se muestra a continuación: (fig 8)

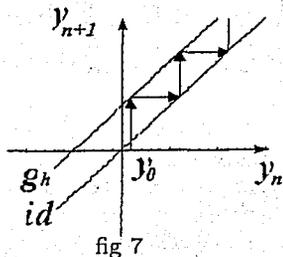


fig 7

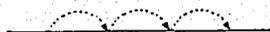


fig 8

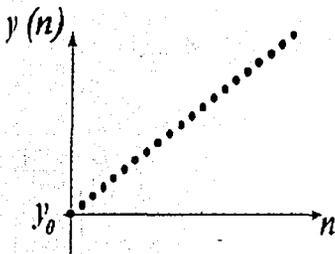


fig 9

Con el análisis anterior no es difícil intuir el comportamiento cualitativo de la solución aproximada por el método de Euler, para una condición inicial positiva y cualquier incremento  $h$  positivo

### CONCLUSIÓN:

Por lo tanto, bajo estas condiciones, la solución que aproxima a la solución exacta de la ecuación diferencial  $y' = c$ , por el método de Euler es "buena". Buena en el sentido de parecerse cualitativamente a ésta para cualquier incremento  $h$  positivo que se tome, para cualquiera, incluyendo  $h = 1$ .

Con este ejemplo pareciera que la afirmación: "la solución aproximada por el método de Euler siempre tendrá la forma de las soluciones exactas para cualquier incremento  $h$  que se tome y cualquier ecuación diferencial" es verdadera, sin embargo es totalmente falsa, más adelante se verá, que esto que pasó con el método de Euler para una ecuación tan simple no pasa en la mayoría de las ecuaciones diferenciales por muy simple que parezcan.

## 10.2. La ecuación diferencial $y' = ky$

### 10.2.1. Soluciones de la ecuación diferencial $y' = ky$ .

A continuación se analizará el comportamiento cualitativo de la solución aproximada por el método de Euler para la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden con coeficientes constantes.  $y' = ky$ , con  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $y(t_0) = y_0$ .

Obsérvese que  $y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$  es una solución que cumple la ecuación  $y' = ky$ . A tal solución se le conoce como solución trivial.

Uno de los métodos para resolver la ecuación anterior es por el método de separación de variables :

$$\begin{aligned} y' = ky &\implies \frac{dy}{y} = k dt \implies \int \frac{dy}{y} = \int k dt \implies \ln |y| = kt + \ln C_1 \implies |y| = e^{kt + \ln C_1} \implies \\ |y| &= C_2 e^{kt} \implies y = \pm C_2 e^{kt} \implies y(t) = C e^{kt} \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

La gráfica de la familia de soluciones es la siguiente:

Para  $k > 0$

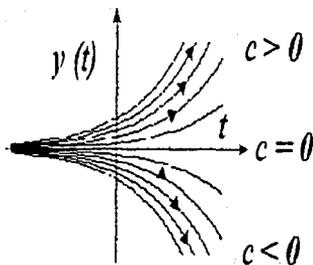


fig 10

El cero,  $y(t) = 0$ , es un repulsor.  
Cualquier solución se aleja de  $y = 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$

Si  $k < 0$

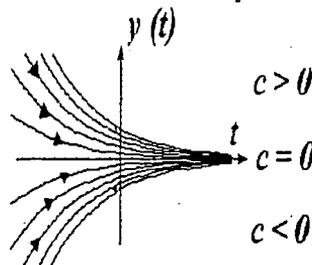
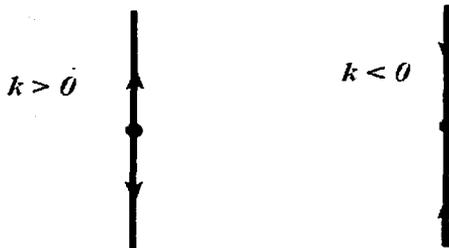


fig 11

El cero,  $y(t) = 0$ , es un atractor.  
Cualquier solución se acerca a  $y = 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$

Estas afirmaciones serían para las siguientes líneas de fase:

TESIS CON  
FALLA DE EN



### 10.2.2. Análisis del método de Euler aplicado a la ecuación $y' = ky$

Aplicando el método de Euler a la ecuación  $y' = ky$  una solución aproximada se obtiene de la siguiente manera:

$t_n$	$y_n$
$t_0$	$y_0$
$t_1 = t_0 + h$	$y_1 = (1 + hk)y_0$
$t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h$	$y_2 = (1 + hk)y_1$
$\vdots$	$\vdots$
$t_n = t_{n-1} + h = t_0 + nh$	$y_n = (1 + kh)y_{n-1}$

Como  $y_n = (1 + kh)y_{n-1}$  es una ecuación en diferencias muy sencilla, su solución, se puede encontrar, iterando  $y_m = (1 + kh)y_{m-1}$  así

$m = 0$	$y_0$
$m = 1$	$y_1 = (1 + kh)y_0 = (1 + kh)y_0$
$m = 2$	$y_2 = (1 + kh)y_1 = (1 + kh)^2 y_0$
$\vdots$	$\vdots$
$m = n$	$y_n = (1 + kh)y_{n-1} = (1 + kh)^n y_0$

Por lo tanto  $y_n = (1 + kh)^n y_0$  es la expresión analítica de la ecuación en diferencias  $y_n = (1 + kh)y_{n+1}$ . A continuación, para entender mejor el comportamiento de las soluciones, de una manera distinta a analizar su solución analítica, se definirá una función  $g_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpla  $g_h(y_n) = y_{n+1}$ . Tal función generará una dinámica artificial que proporcionará el comportamiento cualitativo de la solución.

Sea

$$\begin{aligned} g_h &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g_h(x) &= (1 + kh)x \end{aligned}$$

Nuestro objetivo principal es:

1. Ver que tan buena es la aproximación de Euler para la ecuación  $y' = ky$ , en este sentido entiéndase, si para una  $h$  arbitraria pero fija, la solución exacta y la solución aproximada se comportan cualitativamente igual para tiempos muy grandes.
2. Entender más específicamente el comportamiento de las soluciones aproximadas por el método de Euler conforme  $h$  (nuestro parámetro) barre el conjunto  $(0, \infty)$ .

Para desarrollar los objetivos propuestos, considérese a  $g_h(x) = (1 + kh)x$  como una familia parametrizada de rectas. Luego mediante un análisis parecido al ejemplo 3.1 con  $m = 1 + kh$  se sacarán los comportamientos correspondientes para el parámetro de cada  $h$ .

El análisis siguiente se dividirá en dos casos para  $h > 0$  y  $h < 0$  tal y como se dividió en un principio, pero antes, tal vez sea conveniente ver el siguiente cuadro sinóptico 1 que contiene los resultados que se obtuvieron, así como la manera en que se dividieron los casos:

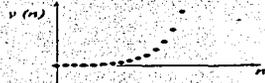
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Cuadro Sinoptico 1

**CASO1:**  
 $k > 0$

Para cualquier  $h > 0$   
la solución  $y(t) = 0$   
es un repulsor

La forma en que la sol. diverge de  $y(t) = 0$ .

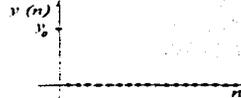


**SUBSUBCASO i:** Para  $-\frac{1}{k} < h < -\frac{2}{k}$



La solución oscilará de un lado a otro del cero

**SUBSUBCASO ii:** Para  $h = \frac{1}{k}$ . La solución aprox.



Salvo en el tiempo inicial la sol. valdrá cero en cualquier momento.

**SUBSUBCASO iii:** Para  $0 < h < -\frac{1}{k}$ . la sol. aprox. es:

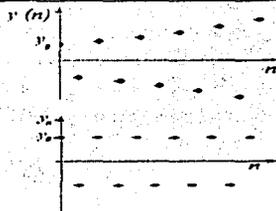


**SUBCASO a:**  
El cero  $y(t) = 0$ ,  
eje  $t$  es un  
atractor. Para  
 $0 < h < -\frac{2}{k}$

**CASO2:**  
 $k < 0$

**SUBCASO b:**  
El cero es un  
repulsor,  $h > -\frac{2}{k}$

**SUBCASO c:** Para  
 $h = -\frac{2}{k}$ . Cualquier  
solución es periódica  
de período 2.



Es periódica de período dos

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

También obsérvese la siguiente figura en donde se representa el diagrama de bifurcación para la ecuación  $y' = ky$  con  $k < 0$  para distintos valores del paramentro  $h$ .

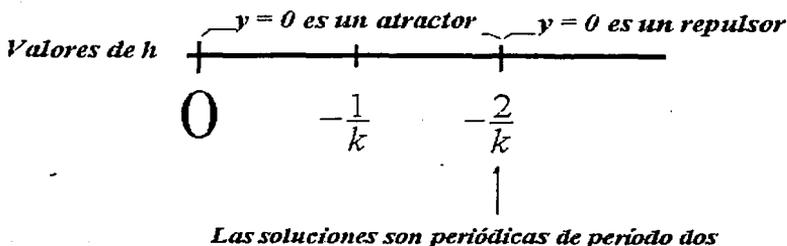


fig 12

### 1. CASO 1: $k > 0$

Cero es el único punto fijo de  $g$ , ya que  $g(p) = p \iff (1+kh)p = p \iff p + khp = p \iff khp = 0$  pero  $h > 0$  y  $k > 0$ , entonces  $p = 0$ . Como  $|g'(0)| = |1 + kh| > 1$ , entonces por el teorema 2 el cero es un repulsor.

La gráfica de  $g$  es una función lineal que pasa por el origen con pendiente mayor a uno, siempre, independientemente del valor de  $h \in \mathbb{R}^+$  que se tome. Obsérvese que el conjunto estable de infinito es todo  $\mathbb{R}$  menos el cero, es decir  $\mathbb{W}^s = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Y la órbita de cualquier punto  $p \in \mathbb{R}^+$  es positiva.

El retrato fase es el que se muestra a continuación:

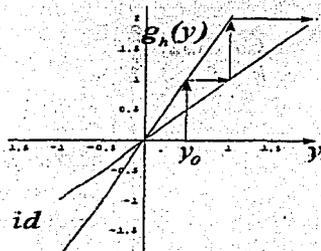


fig 13

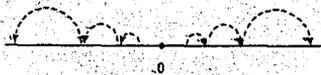


fig 14

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

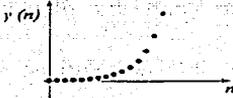


fig 15

Con el análisis anterior no es difícil intuir el comportamiento cualitativo de la solución aproximada para una condición inicial positiva.

## CONCLUSIÓN

*En este caso el método de Euler sí aproxima bien, en el sentido que las soluciones aproximadas y las soluciones exactas se comportan cualitativamente igual, conforme  $t$  se hace muy grande, y lo más IMPORTANTE: este comportamiento no depende del valor del incremento  $h$ .*

### 2. CASO 2: $k < 0$ .

Si  $k < 0$  se presenta una dinámica sencilla pero interesante .

Cero,  $p(t) = 0$ , es el único punto fijo de  $g$ . En efecto  $g(p) = p \iff (1 + kh)p = p \iff$

$p + khp = p \iff khp = 0$ , pero  $h > 0$  y  $k < 0$ , entonces de todas formas  $p = 0$ . La derivada de  $g$  es:  $g'(x) = 1 + hk \implies g'(0) = 1 + hk$ . Como  $k$  es negativo surgen tres casos interesantes según los criterios descritos por los teoremas 2.9 y 2.10.

$$\text{CASO a: } |1 + hk| < 1$$

$$\text{CASO b: } |1 + hk| > 1$$

$$\text{CASO c: } |1 + hk| = 1$$

#### a) SUBCASO a:

Si  $|g_h'(0)| = |1 + kh| < 1$ , entonces por el teorema 2.9, el cero es un atractor . De la desigualdad anterior despéjese  $h$  para ver el rango del parámetro  $h$  en el cual cero es un atractor:  $|1 + kh| < 1 \implies -1 < 1 + kh < 1 \implies 2 > -kh > 0 \implies \frac{2}{-k} > h > 0$

Obsérvese que para este caso la función  $g$  es una función lineal con pendiente en valor absoluto menor que uno, por último, como se puede ver en el cuadro sinóptico, hemos dividido este subcaso

a) del caso 2 en tres casos más, esto con el fin de ver la manera como nos aproximamos a cero.

SUBSUBCASO i)  $-1 < 1 + hk < 0$ . Si la pendiente está entre  $-1$  y  $0$

SUBSUBCASO ii)  $1 + hk = 0$ . Si la pendiente es igual a cero

SUBSUBCASO iii)  $0 < 1 + hk < 1$ . Si la pendiente está  $(0, 1)$

1) SUBSUBCASO i)  $-1 < 1 + hk < 0$

La gráfica de  $g$  es una función lineal con pendiente estrictamente mayor que  $-1$  y menor que  $0$  (ejemplo: fig 16).  
Retrato fase.

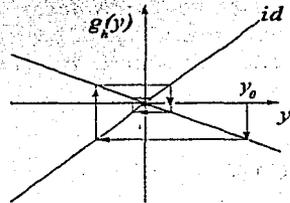


fig 16

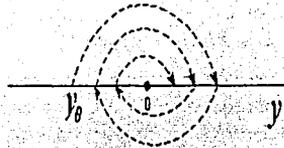


fig 17

La solución se aproxima a cero,  $y(t) = 0$ , oscilando de un lado a otro de éste.

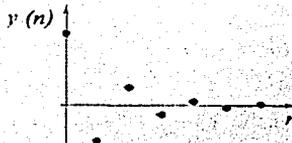


fig 18

De la condición:  $-1 < 1 + hk < 0$  despéjese  $h$ :  $-2 < kh < -1 \Rightarrow 2 > -kh > 1 \Rightarrow \frac{2}{-k} > h > \frac{1}{-k}$ . Por lo tanto, si  $k < 0$  y si  $h \in (\frac{1}{-k}, \frac{2}{-k})$  el cero atraerá las soluciones, que oscilarán de un lado a otro de éste.

2) SUBSUBCASO ii): Si  $1 + hk = 0$ :

La gráfica de  $g$  es una función lineal con pendiente igual a cero, por lo que coincide con el eje  $x$ . Obsérvese que en la dinámica de esta función, a cualquier punto lo manda a cero en la primera iteración; cualquier punto en los reales excepto el cero es un punto eventualmente fijo.

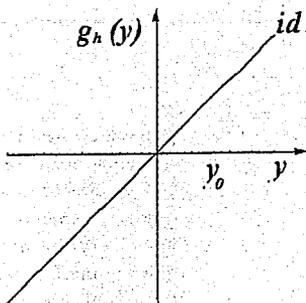


fig 19

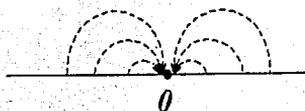


fig 20



fig 21

Forma cualitativa de la solución aproximada para una condición inicial positiva.

De la condición de este caso, despéjese  $h$ :  $1 + hk = 0 \implies hk = -1 \implies h = -\frac{1}{k}$ . Por lo tanto si  $h = -\frac{1}{k}$ , entonces el cero,  $y(n) = 0$ , es un atractor y salvo en el tiempo inicial la solución valdrá cero en cualquier otro momento.

3) SUBSUBCASO iii): Si  $0 < 1 + hk < 1$ .



$g$  es una función lineal que pasa por el origen con pendiente mayor que cero y menor que uno. La órbita de cualquier número positivo es siempre positiva

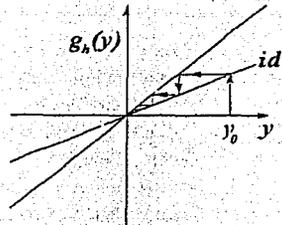


fig 22

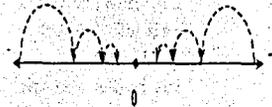


fig 23

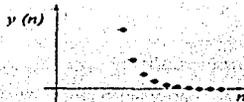


fig 24

Esta es la solución aproximada que más se parece a la solución exacta

De la condición de este caso se despejará  $h : 0 < 1 + kh < 1 \implies$

$-1 < -kh < 0 \implies 1 > -kh > 0 \implies \frac{1}{-k} > h > 0$ . Por lo tanto si  $h \in (0, -\frac{1}{k})$  el cero es un atractor y la solución aproximada convergerá a éste, de un solo lado.

### CONCLUSIÓN:

Una solución que aproxima a la ecuación  $y' = ky$ , con  $k < 0$ , por el método de Euler es buena si se toma el incremento en  $[0, -\frac{2}{k}]$

#### b) SUBCASO b:

Si  $|g'_h(0)| = |1 + kh| > 1$ , entonces por el teorema 2.10, cero es un repulsor. De la desigualdad para este caso despéjese  $h$  de  $|1 + kh| > 1 \implies 1 + kh > 1$  ó  $1 + kh < -1 \implies kh > 0$  o  $kh < -2$ , obsérvese que la primera condición se cumple porque  $k < 0$  y  $h > 0$ , así que  $1 + kh < -1$ , ésto es,  $h < -\frac{2}{k}$ .

Así, para este caso, la gráfica de  $g$  es una función lineal con pendiente menor que  $-1$  y mayor a  $0$ . En la fig 26 se muestra el retrato fase.

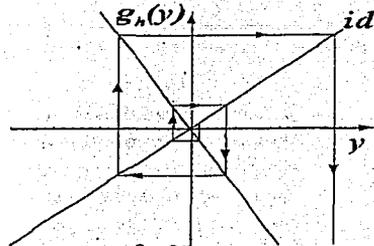


fig 25



fig 26

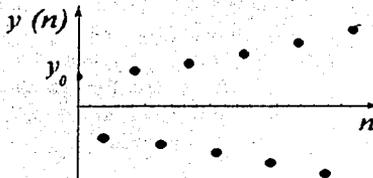


fig 27

La solución aproximada diverge de cero oscilando de un lado a otro de éste.

### CONCLUSIÓN:

Hacer la aproximación con un incremento  $h$  mayor a  $-\frac{2}{k}$ ; sería una mala aproximación en el sentido de que su solución tendrá un comportamiento totalmente diferente al deseado, las soluciones se alejarán del cero.

#### c) SUBCASO c:

Como  $|1 + hk| = 1 \implies 1 + hk = 1$ , ó  $1 + hk = -1 \implies hk = 0$ , ó  $hk = -2$ . Pero la primera condición no se cumple ya que tanto  $h > 0$  como  $k < 0$  son distintos de cero, por lo que solo queda  $1 + hk = -1$ , o sea,  $h = -\frac{2}{k}$

$g$  es una función lineal que pasa por el origen con pendiente igual a  $-1$ , cualquier punto distinto de cero es, un punto periódico de período dos

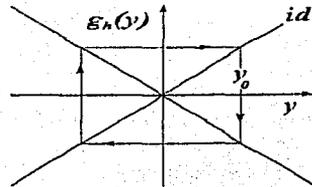


fig 28

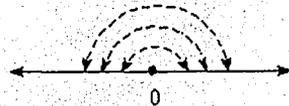


fig 29

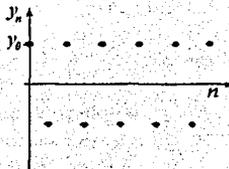


fig 30

Se puede ver claramente una solución aproximada de período dos, la solución  $y_n$  solo toma dos valores de uno y del otro lado de cero. Esta aproximación nunca convergerá al cero conforme  $y_n$  tiende a infinito

### CONCLUSIÓN:

*Si el incremento es igual a  $-\frac{2}{k}$  no se esperará que la solución aproximada se parezca cualitativamente a la solución exacta, de hecho no tiene que esperar tanto; espere un tiempo, espere dos tiempos y el tercer tiempo será lo que obtuvo en el primer tiempo y ésto se repite.*

## 10.3. La ecuación $y' = \alpha - \beta y^2$

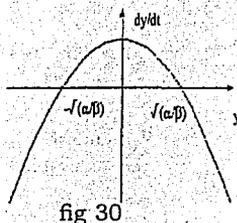
En esta sección se analizará el método de Euler aplicado a la ecuación  $y' = \alpha - \beta y^2$  con la condición inicial  $y(t_0) = y_0$ .

### 10.3.1. Soluciones de la ecuación diferencial $y' = \alpha - \beta y^2$

Por medio de un análisis cualitativo, se analizarán las soluciones de esta ecuación. Sea  $f(y) = \alpha - \beta y^2$  el lado derecho de la ecuación diferencial.

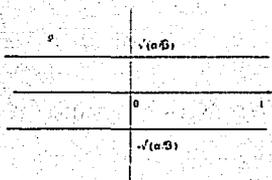
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Obsérvese la gráfica de  $y' = f(y)$  en la fig 30



Gráfica de la ecuación  $y' = f(y) = \alpha - \beta y^2$ , donde  $y'$  se interpreta como la función y como la variable independiente.

La gráfica corta al eje horizontal en dos puntos  $y_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  y  $y_2 = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ . Es decir, en estos dos puntos la derivada  $\frac{dy}{dt} = 0$  para todo  $t$ , esto significa que las soluciones  $y(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  y  $y(t) = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  permanecen constantes en el tiempo. En este caso se dice que  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones de equilibrio, o bien, *puntos de equilibrio*.



Gráfica de las soluciones  $y(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  y  $y(t) = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ .  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  y  $-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  son llamadas soluciones de equilibrio.

fig 31

El comportamiento a largo plazo de cualquier otra solución, con condición inicial distinta de  $-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  ó  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  es diferente. Si la condición inicial  $y_0$  está en  $(-\infty, -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})$ , entonces  $f(y) < 0$ , es decir,  $\frac{dy}{dt} = f(y)$  es negativa, por lo tanto las soluciones,  $y(t)$ , decrecen. Si la condición inicial  $y_0$  está en  $(-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})$ , entonces  $f(y) > 0$ , es decir, la  $\frac{dy}{dt} = f(y)$  es positiva, por lo tanto las soluciones  $y(t)$  son crecientes. Por último, si la condición inicial,  $y_0$ , está entre  $(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \infty)$ , entonces  $f(y) < 0$ , esto es,

$\frac{dy}{dt} = f(y)$  es negativa y por lo tanto las soluciones  $y(t)$  son decrecientes. Véase la siguiente gráfica, fig 32, junto con su retrato fase a la derecha de esta.

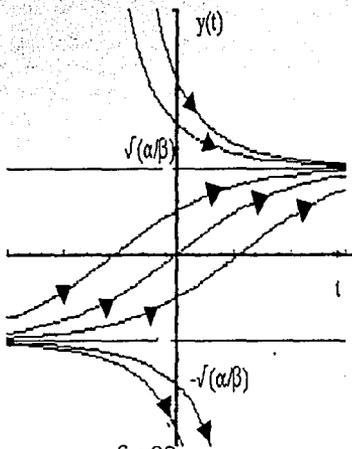


fig 32

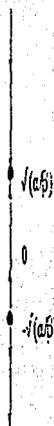


fig 33

Familia de soluciones de la ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dt} = \alpha - \beta y^2$ . Aproximándose a la solución de equilibrio estable

$$y(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \text{ y}$$

$$y(t) = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \text{ inestable.}$$

No es difícil ver, con los criterios descritos

anteriormente que  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

es un sumidero y

$-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  es una fuente.

Por lo tanto si  $y(t_0) \neq \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , entonces  $y(t)$  tiende a  $\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ .

### 10.3.2. Análisis del método de Euler para la ecuación

$$y' = \alpha - \beta y^2$$

Mediante un análisis cualitativo se decidirá para que incrementos de  $h$  nuestra aproximación es buena, es decir, para que incrementos  $h$  las soluciones aproximadas serán atraídas por  $-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  y repelidas por  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ . En el transcurso de este análisis se irán comparando los retratos fase que se obtendrán, con el retrato fase de la familia de soluciones exactas, fig 33

Si se aplica el método de Euler a la ecuación cuadrática  $\frac{dy}{dt} = \alpha - \beta y^2$  se obtiene

$$y_{n+1} = (\alpha - \beta y_n^2) \cdot h + y_n = g(y_n) = g^n(y_0)$$

Defínase  $g_h$  tal que

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$g_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_h(x) = (\alpha - \beta x^2) \cdot h + x$$

Como se ha mencionado anteriormente, estudiar la dinámica de la ecuación en diferencias  $y_{n+1} = (\alpha - \beta y_n^2) \cdot h + y_n$  es equivalente a estudiar la dinámica de  $g$ , porque es una ecuación en diferencias de primer orden. Obsérvese que la función  $g$  es una función cuadrática. Se aprovechará el trabajo realizado en el capítulo 1 sección 5, en donde se hizo un análisis detallado de la familia cuadrática  $Q_c(x)$ . Se conocerá la dinámica de  $g$  vía una conjugación topológica con  $Q_c(x)$ . En el ejemplo 8.5 de la sección de conjugación topológica se ha visto que todo mapeo cuadrático es topológicamente equivalente a la familia cuadrática  $Q_c(x) = x^2 + c$  vía una conjugación lineal. Es decir, existe  $\gamma(x) = mx + b$  tal que  $\gamma \circ Q_c = g \circ \gamma$ . Por lo tanto si  $A = -\beta h$ ,  $B = 1$ , y  $C = \alpha h$  son los coeficientes del polinomio cuadrático  $g$ , se pueden realizar los cálculos análogos a los realizados anteriormente, véase el diagrama en la siguiente fig 34, y de este modo llegar a que  $g(p) = (\alpha + x - \beta x^2)h = -\beta h x^2 + x h + \alpha h$  es topológicamente conjugada a  $Q_c(x) = x^2 + c$ , donde  $c = -\beta h^2 \alpha + \frac{1}{4}$  vía  $\gamma(x) = -\beta h x + \frac{1}{2}$ . Notese que la relación entre  $c$  y  $h$  descrito por la ecuación  $c = -\beta h^2 \alpha + \frac{1}{4}$  es importante, ya que relaciona el parámetro  $c$  de la familia cuadrática (ya analizada) con el incremento  $h$  de la aproximación de Euler para  $\frac{dy}{dt} = \alpha - \beta y^2$ . Vea el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 g(x) = -\beta h x^2 + x + \alpha h & & \\
 \gamma(x) = -\beta h x + \frac{1}{2} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \gamma^{-1}(x) = -\frac{x}{\beta h} + \frac{1}{2\beta h} \\
 Q_c(x) = x^2 + c = x^2 - \beta \alpha h^2 + \frac{1}{4} & & 
 \end{array}$$

fig 34

Teniendo presente la relación entre  $Q_c$  y  $g(x)$  recordemos la dinámica de la familia cuadrática, descrita en los capítulos 3, 4, 5, 7 y 8. conforme el parámetro  $c$  varía.

1. CASO 1:  $c \in [-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$  es equivalente a tomar  $h \in (0, \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}]$

Recuérdese en el capítulo 4 sección uno, que cuando el valor del parámetro está entre  $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$   $Q_c(x)$  tiene dos puntos fijos uno atractor,  $q = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$  y el otro repulsor,  $p = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$ .

Dado el homeomorfismo entre  $Q_c(x)$  y  $g(x)$  la conjugación topológica  $\gamma^{-1}$  manda a  $q = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$  en  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  y  $p = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$  en  $-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , ya que:

$\begin{aligned} \gamma^{-1}(q) &= \gamma^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}\right) \\ &= \gamma^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1-4(-\beta\alpha h^2 + \frac{1}{4})}}{2}\right) \\ &= \gamma^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{4\beta\alpha h^2}}{2}\right) \\ &= -\frac{1-\sqrt{4\beta h^2\alpha}}{2\beta h} + \frac{1}{2\beta h} \\ &= \frac{\sqrt{4\beta h^2\alpha}}{2\beta h} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \gamma^{-1}(p) &= \gamma^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right) \\ &= \gamma^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{1-4(-\beta\alpha h^2 + \frac{1}{4})}}{2}\right) \\ &= \gamma^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{4\beta\alpha h^2}}{2}\right) \\ &= -\frac{1+\sqrt{4\beta h^2\alpha}}{2\beta h} + \frac{1}{2\beta h} \\ &= -\frac{\sqrt{4\beta h^2\alpha}}{2\beta h} = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \end{aligned}$
--	--

Por lo tanto  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  es un punto fijo atractor de  $g$  y  $-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  es un punto repulsor de  $g$  cuando  $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ .

Para determinar el conjunto estable del punto atractor  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , es decir,  $W^s\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$ , basta conocer el conjunto estable de  $q$  y después aplicarle  $\gamma^{-1}$  según el teorema 8.4 inciso a) y c), así  $W^s\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) = \gamma^{-1}(W^s(q))$ . Pero cuando  $c \in [-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$ ,  $W^s(q) = \{x \in \mathbb{R} : -p < x < p\} = \left\{x \in \mathbb{R} : -\left(\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right) < x < \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right\}$ . Así que  $W^s\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \gamma^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right) < x < \gamma^{-1}\left(\frac{-1-\sqrt{1-4c}}{2}\right)\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} < x < \frac{1}{\beta h} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}$

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

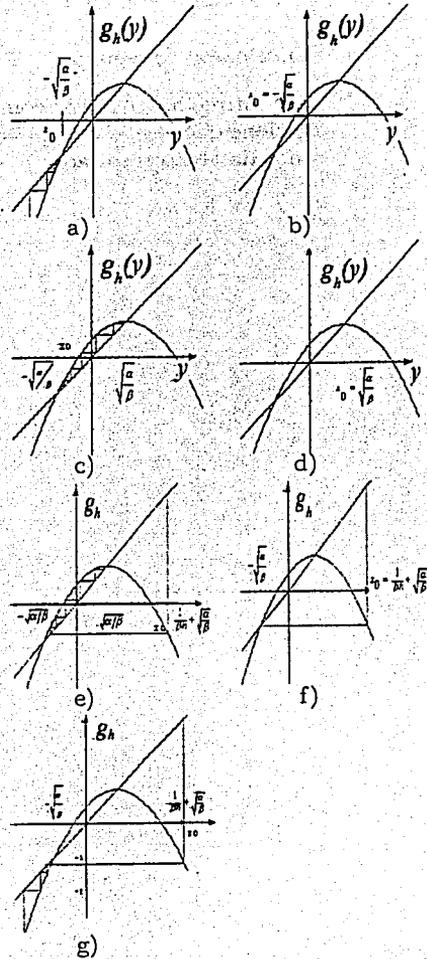
Por lo tanto el conjunto estable del único punto fijo atractor  $\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$  en el mapeo  $g$  son las  $x \in D_g$  tal que  $x \in \left(-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \frac{1}{\beta\alpha} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$ .

Por último hay que ver como debe ser  $h$ . De la condición de este caso se tiene que  $-\frac{3}{4} \leq c < \frac{1}{4} \implies -\frac{3}{4} \leq -\beta h^2 \alpha + \frac{1}{4} < \frac{1}{4}$ . Un despeje sencillo de  $h$  da como resultado:  $-1 \leq -\alpha\beta h^2 < 0$ , esto es,  $\frac{1}{\alpha\beta} \geq h > 0$ .

fig 35

Gráficas de la función  $g(x) = -\beta hx^2 + x + ah$  con  $h \in (0, \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})$  y diferentes condiciones iniciales:

- a) si  $x_0 \in (-\infty, -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})$ , este intervalo está contenido en  $W^s(\infty)$
- b) si  $x_0 = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ ,  $x_0$  es un punto fijo repulsor
- c) si  $x_0 \in (-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})$  este intervalo está contenido en  $W^s(\frac{\alpha}{\beta})$
- d) si  $x_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ ,  $x_0$  es un punto fijo atractor.
- e) si  $x_0 \in (\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \frac{1}{\beta h} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})$  este intervalo está contenido en  $W^s(\frac{\alpha}{\beta})$
- f) si  $x_0 = \frac{1}{\beta h} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ ,  $x_0$  es un punto eventualmente fijo.
- g) si  $x_0 \in (\frac{1}{\beta h} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \infty)$  la órbita de cualquier punto en este intervalo tiende a menos infinito.



De lo anterior se tiene que el retrato fase que describe  $g$ , con  $h \in (0, \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}]$ , es:

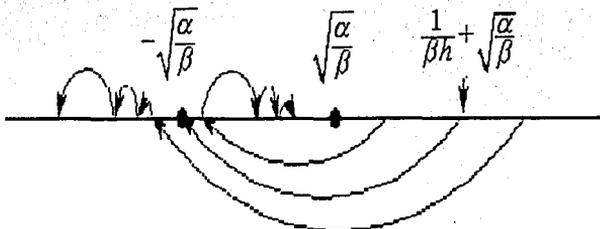
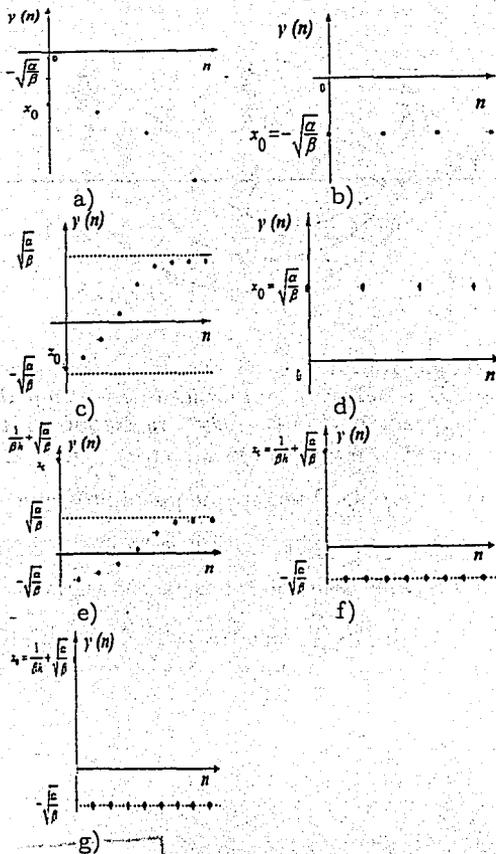


fig 36

Si se compara el diagrama anterior fig 36, rotado noventa grados en sentido contrario a las manecillas del reloj, con la línea de fase que describe las soluciones exactas de la ecuación  $y' = \alpha - \beta y^2$  mostrado en la fig 33, se verá que tienen cierta analogía, el punto fijo atractor  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  y el punto fijo repulsor  $-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  aparecen, pero se observa que los puntos que están entre  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  y  $\frac{1}{\beta h} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , en la primera iteración dan un salto hacia el otro lado de  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , cosa que no sucede con las soluciones exactas, y segundo, los puntos que están del lado derecho de  $\frac{1}{\beta h} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  tenderan a  $-\infty$  en lugar de tender a  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

fig 37



Con el análisis anterior no es difícil intuir el comportamiento cualitativo de las soluciones aproximadas. A continuación se muestran tales soluciones para las mismas condiciones iniciales descritas en la *fig 37* incisos a) - g)

1. **Caso 2:**  $c \in \left[ \frac{-5}{2+4}, \frac{3}{4} \right)$  es equivalente a tomar  $h \in \left( \sqrt{\frac{1}{\beta\alpha}}, \sqrt{\frac{3}{2\beta\alpha}} \right)$

Recordando un poco en el capítulo cuatro sección 2 se vió que para  $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$  hay una órbita periódica de período dos. De hecho se calcularon los puntos que constituyen tal órbita, son:  $A_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4(1+c)}}{2}$

y  $A_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4(1+c)}}{2}$ . Además se puede ver que el conjunto estable de  $A_1$  es  $(-p, p)$  es decir  $W^s(A_1) = (-p, p)$ . Dado el homeomorfismo entre  $Q_c$  y  $g$  la conjugación topológica manda a  $A_1$  en  $\frac{1 - \sqrt{\alpha\beta h^2 - 1}}{\beta h}$  y a  $A_2$  en  $\frac{1 + \sqrt{\alpha\beta h^2 - 1}}{\beta h}$ , ya que:

$\begin{aligned} \gamma^{-1}(A_1) &= \frac{-1 + \sqrt{1-4(1+c)}}{-2\beta h} + \frac{1}{2\beta h} \\ &= \frac{2 - \sqrt{1-4(1+c)}}{2\beta h} \\ &= \frac{2 - \sqrt{1-4(1+(-\alpha\beta h^2 + \frac{1}{4}))}}{2\beta h} \\ &= \frac{1 - \sqrt{\alpha\beta h^2 - 1}}{\beta h} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \gamma^{-1}(A_2) &= \frac{-1 - \sqrt{1-4(1+c)}}{-2\beta h} + \frac{1}{2\beta h} \\ &= \frac{2 + \sqrt{1-4(1+c)}}{2\beta h} \\ &= \frac{2 + \sqrt{1-4(1+(-\alpha\beta h^2 + \frac{1}{4}))}}{2\beta h} \\ &= \frac{1 + \sqrt{\alpha\beta h^2 - 1}}{\beta h} \end{aligned}$
---	---

Por lo tanto si  $A'_1 = \gamma^{-1}(A_1)$  y  $A'_2 = \gamma^{-1}(A_2)$ , entonces  $A'_1$  y  $A'_2$  constituyen una órbita de período 2 de  $g$ .

Para conocer el conjunto estable de los puntos periódicos de período 2,  $A'_1$  y  $A'_2$ , por el teorema 8.4 inciso a) y b), basta conocer el conjunto estable de  $A_1$  y  $A_2$  de  $W^s(A_1)$  o  $W^s(A_2)$ . Pero en capítulo 4 sección 4.2 se vio que  $W^s(A_1) = W^s(A_2) = \{x \in \mathbb{R} : -p < x < p\} \setminus \{\dots, e_3, e_2, e_1, e_0\}$ , donde cada  $e_i$  es un punto eventualmente periódico de  $g$ , por lo tanto  $W^s(A'_1) = \gamma^{-1}(W^s(A_1)) =$

$\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} < x < \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{1}{3h}\} \setminus \{\dots, e'_3, e'_2, e'_1, e'_0\}$ , donde  $\{\dots, e'_3, e'_2, e'_1, e'_0\}$  es el conjunto de puntos eventualmente fijos de  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  y  $e'_i = f^{-1}(e_i)$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ . Véase la fig 37

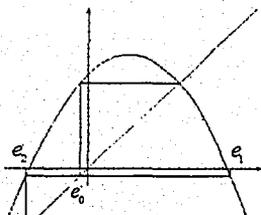


fig 37

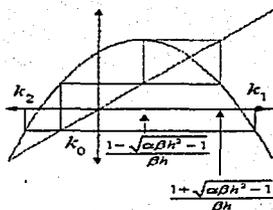


fig 38

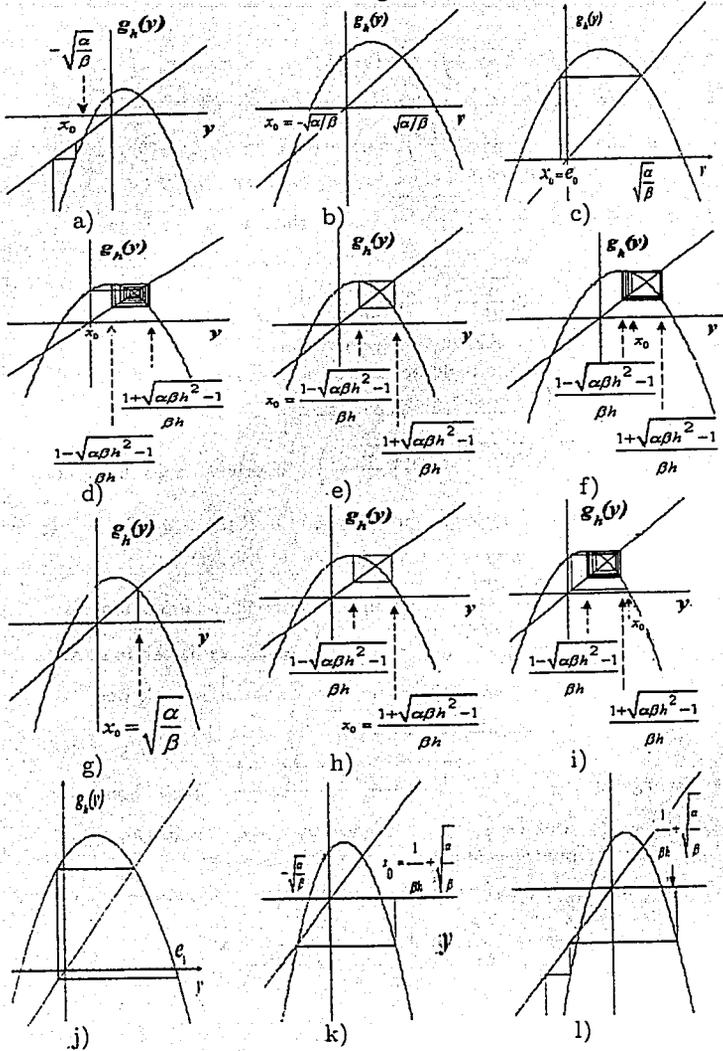
Los puntos que se muestran en la figura 38,  $k_0$ ,  $k_1$  y  $k_2$  son puntos eventualmente periódicos de período dos, puntos que en un número finito de pasos están en la órbita periódica de período 2.  $\left\{ \frac{1 - \sqrt{\alpha\beta h^2 - 1}}{\beta h}, \frac{1 + \sqrt{\alpha\beta h^2 - 1}}{\beta h} \right\}$ .

Por último véase cómo debe ser  $h$  de la restricción  $-\frac{5}{4} \leq c < -\frac{3}{4}$  en este caso:  $-\frac{5}{4} \leq c < -\frac{3}{4} \implies -\frac{5}{4} \leq -\beta\alpha^2 + \frac{1}{4} < -\frac{3}{4} \implies -\frac{6}{4} \leq -\beta\alpha h^2 < -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \implies \frac{3}{2} \geq \beta\alpha h^2 > 1 \implies \sqrt{\frac{3}{2\beta\alpha}} \geq h > \sqrt{\frac{1}{\beta\alpha}}$

A continuación se mostrará la gráfica de la función  $g(x) = (\alpha - \beta x^2) \cdot h + x$  con incrementos  $h$ , elemento del semiintervalo  $(\sqrt{\frac{1}{\beta\alpha}}, \sqrt{\frac{3}{2\beta\alpha}}]$  y diferentes condiciones iniciales.

- a) si  $x_0 \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$ ,  $\mathcal{O}(x_0, g) \rightarrow -\infty$
- b) si  $x_0 = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ ,  $x_0$  es un punto fijo repulsor,  $\mathcal{O}(x_0, g) = x_0$
- c) si  $x_0 = \gamma^{-1} \left(\frac{-1+\sqrt{1-4c}}{2}\right)$  para alguna  $c \in \left[-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ ,  
 $x_0$  es el primer punto eventualmente fijo,  $e'_0$ .
- d) si  $x_0 \in \left(-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \frac{1-\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h}\right)$ . La órbita de  $x_0$  converge  
asintóticamente a la órbita de período dos  
 $\left\{ \frac{1-\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h}, \frac{1+\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h} \right\}$
- e) si  $x_0$  es un punto periódico de período dos. Obsérvese como la  
órbita periódica consta de dos elementos  $\mathcal{O}(x_0, g) =$   
 $\left\{ \frac{1-\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h}, \frac{1+\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h} \right\}$ .
- f) si  $x_0 \in \left(\frac{1-\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h}, \frac{1+\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h}\right)$ . La órbita de  $x_0$  bajo  $g$  con-  
verge asintóticamente a la órbita de período 2 de  $\frac{1-\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h}$
- g) si  $x_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , entonces  $x_0$  es un punto fijo atractor.
- h) si  $x_0 = \frac{1+\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h}$ ,  $x_0$  es un punto periódico de período dos
- i) si  $x_0 \in \left(\frac{1+\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h}, \frac{1}{\beta h} + \sqrt{\alpha\beta}\right)$ , entonces la órbita de  $x_0$  con-  
verge asintóticamente a la órbita de período dos  
 $\left\{ \frac{1-\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h}, \frac{1+\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h} \right\}$
- j) si  $x_0 = \gamma^{-1} \left(-\sqrt{\frac{-(2c+1)+\sqrt{(2c+1)^2-4(c^2+2c)}}{2}}\right)$  para alguna  
 $c \in \left[-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ , entonces  $x_0$  es el segundo  
punto eventualmente fijo es decir  $x_0 = e'_1$ .
- k) si  $x_0 = \frac{1}{\beta h} + \sqrt{\alpha\beta}$  entonces  $x_0$  es un punto eventualmente fijo a  $-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
- l) si  $x_0 \in \left(\frac{1}{\beta h} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \infty\right)$ ,  $\mathcal{O}(x_0, g) \rightarrow -\infty$

fig 39



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Del análisis gráfico anterior el retrato fase que describe  $g$  con  $h \in \left( \sqrt{\frac{1}{\beta\alpha}}, \sqrt{\frac{3}{2\beta\alpha}} \right]$  es el siguiente :

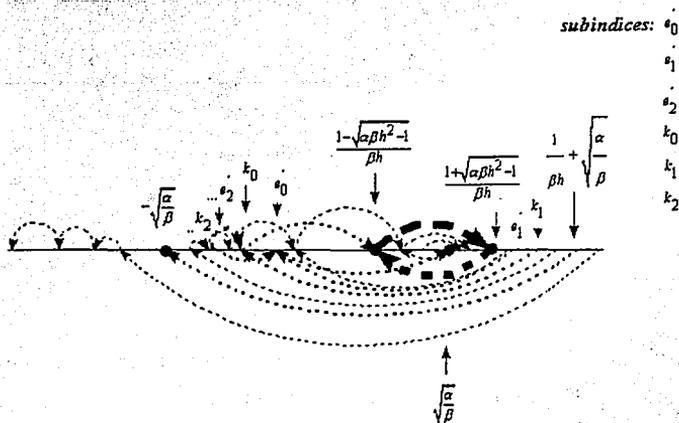


fig 40

Véase qué tanto difiere de la figura 33. La presente figura 40, un tanto cargada. Desmenucémosla en dos partes. El primer retrato fase sería el de la fig 41 que mostrará en primer lugar, representados por círculos, a los puntos fijos,  $-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  y  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  ambos repulsores, así como a los puntos periódicos de período 2 junto con sus órbitas. Se señala a  $\frac{1}{\beta h} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , punto eventualmente fijo de  $-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ . Del conjunto  $E'$  sólo se marcará a los tres primeros puntos  $e'_0, e'_1, e'_2$  puntos eventualmente fijos de  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , los puntos  $k_0, k_1$  y  $k_2$  puntos eventualmente fijos de período 2.

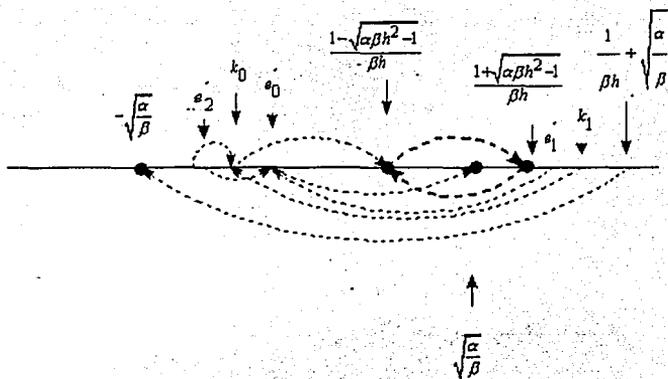


fig 41

En el segundo retrato fase, véase la fig 42 se muestran los puntos fijos  $-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  y  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , así como los puntos periódicos de período dos,  $\frac{1-\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h}$  y  $\frac{1+\sqrt{\alpha\beta h^2-1}}{\beta h}$ , salvo que ahora las trayectorias que se muestran son trayectorias de puntos que no son puntos eventualmente periódicos.

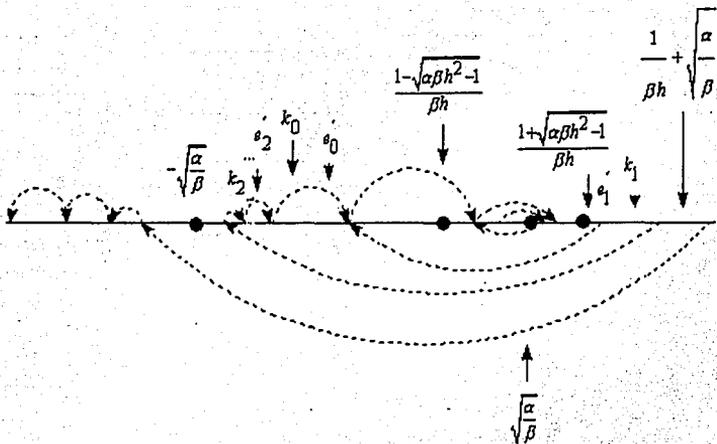
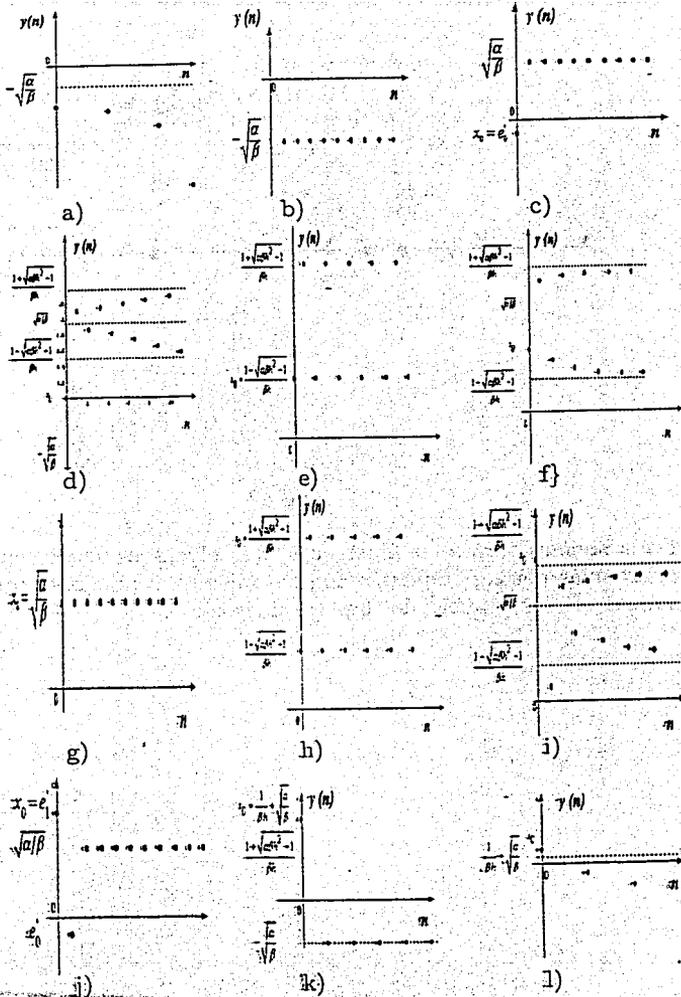


fig 42

En la siguiente figura se mostrarán las soluciones de las ecuaciones en diferencias correspondientes con las mismas condiciones iniciales utilizadas en las gráficas de figs 39 incisos a) - 1);

fig 43



Por lo tanto, si se toma un incremento en este rango, las soluciones

aproximadas nunca se acercarán a la solución de equilibrio  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , a menos que se tenga la gran suerte de que la condición inicial sea un punto eventualmente fijo de  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , entonces la solución aproximada no sólo se acercará asintóticamente a  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , sino que, en un número finito de pasos llegará a este valor, hecho que no sucede con las soluciones exactas.

Se podría seguir enumerando los casos tomando  $h$  en diferentes intervalos, por ejemplo, si se continuara y ahora se tomara  $h$  en  $\left(\sqrt{\frac{1.37+\frac{1}{2}}{\beta\alpha}}, \sqrt{\frac{1.3940+\frac{1}{2}}{\alpha\beta}}\right]$  se podrá ver que existirá un intervalo del dominio de la función donde todos los puntos son atraídos a una órbita periódica de periodo cuatro, que el punto fijo  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , que desde la primera bifurcación cambió a repulsor para ya nunca más ser atractor, estará en este conjunto y que la órbita de cualquier punto no se acercará a él, a menos que sea un punto eventualmente fijo de éste.

Así, conforme  $h$  tiende a infinito,  $c$  tiende a menos infinito y el mapeo  $g_h$  atraviesa por una serie de bifurcaciones de duplicación de período hasta llegar a  $h_\infty = \sqrt{\frac{1.65}{\beta\alpha}}$  que es el equivalente a  $c_\infty = -1.4$ , después, si  $h > \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4\beta\alpha}}$  tal mapeo será caótico en un conjunto de Cantor y las órbitas restantes tenderán a menos infinito. Así pues, ahora puede usted imaginarse soluciones caóticas.

Por lo tanto si se desea hacer la aproximación de Euler, el intervalo más recomendable donde se pueden tomar los incrementos  $h$  es  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\right]$ , ya que es el único intervalo que mantiene la característica de que  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  es un punto atractor. Sin embargo hay diferencias en las soluciones, diferencias que ya se conocen, porque se han expuesto arriba con gran detalle. Por lo tanto, dado una ecuación diferencial con condición inicial, la aproximación de soluciones exactas por el método de Euler no sólo depende del incremento  $h$  que se dé, sino también de su condición inicial  $y_0$ .

## 10.4. Dos Ecuaciones Diferenciales $y' = kt$ y $y' = k\frac{1}{t}$

A continuación analizaremos el comportamiento cualitativo de la solución aproximada por el método de Euler para dos ecuaciones diferenciales  $y' = kt$  y  $y' = k\frac{1}{t}$ , donde  $k$  es una constante distinta de cero. La motivación de escoger tales ecuaciones, son los ejemplos que se presentan en la sección 10.4.2.

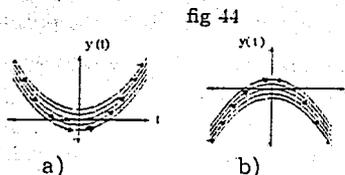
Se puede observar de los diversos análisis del método de Euler, que se ha hecho para diversas ecuaciones diferenciales, que hasta el momento las ecuaciones así mencionadas son autónomas. Recuerdese que si  $f(t, y)$  no depende explícitamente de  $t$ , es decir,  $y' = f(y)$ , la ecuación se llama autónoma, así que en estos dos ejemplos las ecuaciones que se presentan son en principio no autónomas y más aún obsérvese que si  $y' = f(t, y)$   $f$  no depende explícitamente de  $y$ , ie.,  $y' = g(t)$  y así encontrar sus soluciones significa simplemente encontrar la antiderivada de  $g$ .

### 10.4.1. Solución de $y' = kt$ y $y' = k\frac{1}{t}$

$$\text{si } y' = kt \implies dy = ktdt \implies \int dy = k \int t dt \implies y = k\frac{t^2}{2} + c$$

$$\text{si } y' = k\frac{1}{t} \implies dy = k\frac{1}{t}dt \implies \int dy = k \int \frac{1}{t} dt \implies y = k \ln t + c$$

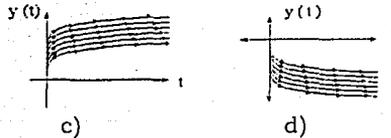
Véase las siguientes gráficas:



Solución general de la ecuación  $y' = kt$

- Si  $k > 0$  para cualquier condición inicial la solución tiende a infinito. Vea fig 44 a)
- Si  $k < 0$  para cualquier condición inicial las soluciones tienden a menos infinito,

fig 44 b)



c) d)  
 Solución general de la ecuación  $y' = k \frac{1}{t}$   
 · Si  $k > 0$  para cualquier condición inicial la solución tiende a infinito. Vea fig 44 c)  
 · Si  $k < 0$  para cualquier condición inicial las soluciones tienden a menos infinito.

### 10.4.2. Análisis del método de Euler para las ecuaciones $y' = kt$ y $y' = k \frac{1}{t}$

Ahora bien en la tabla 2 se ha aplicado el método de Euler para cada una de las siguientes ecuaciones  $y' = kt$  y  $y' = k \frac{1}{t}$ .

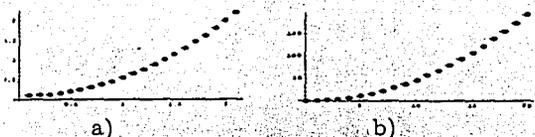
tabla 2

Evolución del tiempo hasta el paso $n + 1$ -ésimo	Método de aprox. aplicado a $y' = kt$	Método de aprox. aplicado a $y' = k \frac{1}{t}$
$t_0$	$y_0$	$y_0$
$t_1 = t_0 + h$	$y_1 = kt_0 h + y_0$	$y_1 = \frac{kh}{t_0} + y_0$
$t_2 = t_1 + h$	$y_2 = kt_1 h + y_1$	$y_2 = \frac{kh}{t_1} + y_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$t_{n+1} = t_n + h$	$y_{n+1} = kt_n h + y_n$	$y_{n+1} = \frac{kh}{t_n} + y_n$

Al analizar la aproximación de Euler para la primera ecuación, es decir, para la ecuación  $y' = kt$ , se acaba de ver que su solución exacta es  $y(t) = k \frac{t^2}{2} + c$  y que todas sus soluciones tienden a infinito o a menos infinito conforme  $t$  tiende a infinito. Dos ejemplos particulares de la aproximación de Euler para  $y' = kt$ , con  $k = 1$  para distintos incrementos de paso, con condición inicial  $(y_0, t_0) = (0.1, 0.1)$  y las primeras veinte iteraciones. El primer incremento de paso que se utilizara es  $h = 0.1$  su aproximación se puede ver en la figura 50 inciso a) y el segundo incremento de paso es  $h = 1$ , que por cierto es un incremento demasiado grande. su aproximación se puede ver en la fig 50 inciso b)



fig 50



Aparentemente, en principio ambas soluciones se parecen cualitativamente a las soluciones exactas de  $y' = kt$  (vea fig. 44 inciso a) es decir, tienden a infinito conforme  $t$  tiende a infinito y ambas son cóncavas. Así, hay dos cuestiones que nos resta ver con más claridad la primera es que la solución aproximada y la solución exacta para la ecuación  $y' = kt$  y  $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  se parecen cualitativamente para cualquier incremento  $h$  positivo que se tome. Y la segunda es ver que lo anterior pasa no solamente para las primeras veinte iteraciones.

Una de las maneras más clara de ver que la solución de la ecuación en diferencias  $y_{n+1} = kht_n + y_n$  converge a infinito o a menos infinito conforme  $t$  tiende a infinito dependiendo de si  $k > 0$  o si  $k < 0$  es resolviendo tal ecuación explícitamente. De la segunda columna del cuadro 2 podemos iterar directamente a  $y_n$  vea tabla 3.

tabla 3

$$\begin{aligned}
 & y_0 \\
 & y_1 = kt_0h + y_0 \\
 & y_2 = kht_1 + y_1 = kh(t_0+h) + kt_0h + y_0 \\
 & \vdots \\
 & y_{n+1} = kt_nh + y_n = hk(t_0+nh) + hk(t_0+(n-1)h) + \dots \\
 & \quad + hk(t_0+h) + kt_0h + y_0 \\
 & \quad = (n+1)kht_0 + y_0 + h^2k \sum_{i=1}^n i
 \end{aligned}$$

Se sabe que la suma de los  $n$  primeros términos enteros es:  $\frac{n(n+1)}{2}$ , esto es  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ . Por lo tanto  $y_n = (n+1)kht_0 + y_0 + h^2k \frac{n(n+1)}{2}$ . Claramente  $y_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , si  $k > 0$ ; y,  $y_n \rightarrow -\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , si  $k < 0$ .

Hay otra forma de poder ver lo anterior. Ya se vió que la aproximación de Euler para el paso  $(n+1)$ -ésimo es  $y_{n+1} = kt_nh + y_n$ , obsérvese

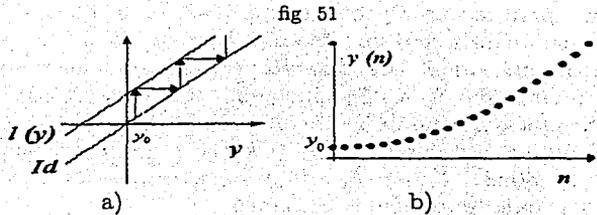
que la expresión anterior no solo involucra a  $y_n$  ahora también involucra a  $t_n$ , es decir el paso  $n + 1$  -ésimo dependerá de la solución aproximada en un paso anterior y del tiempo discreto involucrado en ese paso. Así pues, su análisis será un poco más complicado y necesitará remplazarse la función que simula las trayectorias de las soluciones aproximadas, no como una función de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , sino como una función de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$ .

Se puede recordar en el capítulo 9, sección 9.3, que si se aplica el método de Euler en particular para  $y' = kt$ , la sucesión de puntos con coordenadas  $(t_n, y_n)$ , donde  $t_{n+1} = t_n + h$  y  $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ , son la órbita de  $(t_0, y_0)$  bajo la iteración del mapeo

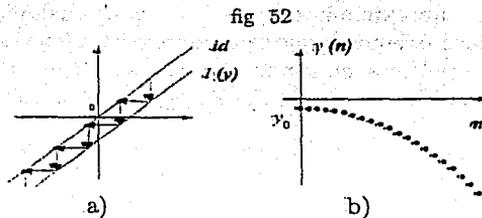
$$g_h(t, y) = (t + h, y + hkt)$$

es decir,  $(t_n, y_n) = g_h^n(t_0, y_0)$ . Como  $g$  es una función de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$  se pueden escribir las coordenadas de la función  $g_h$  como dos funciones separadas es decir,  $g_h(t, y) = (g_1(t, y), g_2(t, y))$ , donde  $g_1(t, y) = t + h$  y  $g_2(t, y) = y + hkt$ . Nos interesa el comportamiento de las soluciones aproximadas a largo plazo, es decir,  $y_n$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  es por esto que al iterar  $g_h$  se pondrá especial atención en el comportamiento de  $g_2$ .

1. Considérese  $k > 0$ . Para determinar si el el crecimiento de la aproximación de Euler para la ecuación  $y' = kt$  es no acotada considérese  $g_2(t, y) = y + kht$  nótese que conforme  $t$  se incrementa el comportamiento de  $g_2$  es semejante al de  $l(y) = y + c$  con  $c > 0$  se recordará que una dinámica idéntica se presentó en la sección 10.1.3, al describir la aproximación de Euler para la ecuación diferencial  $y' = c$ ; todos los puntos están en el conjunto estable de infinito, es decir, cualquier punto tiende a infinito bajo la iteración de  $l$ , vea la fig 51 inciso a). Por tanto para cualquier incremento  $h$  que se tome y cualquier tiempo suficientemente grande, la solución aproximada para la ecuación  $y' = kt$  crecerá sin cota alguna, que es lo que se esperaba. En general, una solución aproximada de  $y' = kt$  para cualquier condición inicial y cualquier incremento que se tome es como se muestra en la fig 51 inciso b). Lo que tiene en común con la solución exacta es que conserva su concavidad hacia arriba, compárese fig 51 inciso b) con fig 44 inciso a).



2. Considérese ahora  $k < 0$ . Para determinar si la aproximación de Euler para la ecuación  $y' = kt$ , no es acotada considérese  $g_2(t, y) = y + kth$ , ahora conforme  $t$  se incrementa el comportamiento de  $g_2$  es semejante al de  $l(y) = y + c$  con  $c < 0$ , la órbita de cualquier punto tiende a menos infinito vea fig 52 inciso a). Por lo tanto para cualquier incremento  $h$  que se tome y un tiempo suficientemente grande la solución aproximada por el método de Euler para la ecuación  $y' = kt$  con  $k < 0$  decrece sin cota alguna. En general una solución aproximada por el método de Euler para la ecuación  $y' = kt$ , para cualquier condición inicial y cualquier incremento  $h$  que se tome es como se muestra en la fig 52 inciso b) otra analogía que tiene con la solución exacta es que conserva su convexidad compare fig 52 inciso b) con fig 44 inciso b)



**CONCLUSIÓN:** Una solución que aproxima a la solución exacta de la ecuación diferencial  $y' = kt \ \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , con el método de Euler es buena; buena en el sentido de parecerse cualitativamente a ésta para cualquier incremento  $h$  positivo que se tome, cualquiera, incluyendo  $h = 1$  y cualquier condición inicial.

En la misma forma analizará la aproximación de Euler para la segunda ecuación diferencial.

Para la segunda ecuación diferencial  $y' = k\frac{1}{t}$ , su solución exacta es  $y(t) = k \ln t + c$ , todas sus soluciones son convexas y tienden a infinito conforme  $t$  tiende a infinito. Para ver el comportamiento de la solución aproximada de una manera clara, se puede hacer su estudio analítico. Para resolver explícitamente la ecuación  $y_{n+1} = \frac{kh}{t_n} + y_n$  itérese la tercer columna de la tabla 2 vea la tabla 4

Tabla 4

$y_0$
$y_1 = \frac{kh}{t_0} + y_0$
$y_2 = \frac{kh}{t_1} + y_1 = \frac{kh}{t_0+h} + \frac{kh}{t_0} + y_0$
⋮
$y_{n+1} = \frac{kh}{t_n} + y_n = \frac{kh}{t_0+nh} + \frac{kh}{t_0+(n-1)h} + \dots + \frac{kh}{t_0+h} + \frac{kh}{t_0} + y_0$
$= kh \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_0+ih} + \frac{kh}{t_0} + y_0.$

Así para afirmar que  $y_n$  diverge conforme  $n$  tiende a infinito es equivalente a afirmar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t_0+nh}$  diverge, para tal fin se utilizará un criterio de cálculo "Prueba de la integral" vea el siguiente teorema sobre convergencia de series infinitas. La demostración de tal teorema se puede ver en [21].

**Teorema 10.1** (prueba de la integral):

Supóngase que  $f$  es positiva y decreciente sobre  $[1, \infty)$  y que  $f(n) = a_n$  para todo  $n$ .

Entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge si y sólo si el límite

$$\int_1^{\infty} f = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A f$$

existe ( la serie y la integral convergen o divergen simultáneamente )

Por lo tanto según el teorema anterior el que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t_0+nh}$  no converja es equivalente a demostrar que  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{t_0+xh}$  no existe. Así pues  $\int_1^A \frac{1}{t_0+xh} dx = \frac{1}{h} [\log(t_0+Ah) - \log(t_0+h)]$ . Como  $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{h} [\log(t_0+Ah) - \log(t_0+h)]$  diverge  $\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{t_0+xh}$  divergerá, es decir  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{t_0+ih}$  también divergerá. Por lo tanto  $y_n$  diverge cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Una segunda forma de poder ver el comportamiento de la solución aproximada. Al aplicar el método de Euler a la ecuación  $y' = k\frac{1}{t}$  se obtiene una sucesión de puntos  $(t_n, y_n)$ , donde  $t_{n+1} = t_n + h$  y  $y_{n+1} = y_n + hk\frac{1}{t_n}$  y además  $(t_n, y_n) = g^n(t_0, y_0)$  con  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $g(t, y) = (t+h, y+hk\frac{1}{t})$ . Como  $g$  es una función de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se pueden reescribir las coordenadas de la función  $g$  como dos funciones separadas  $g_1$  y  $g_2$  es decir  $g(t, y) = (g_1(t, y), g_2(t, y))$  como nos interesa el comportamiento a largo plazo de las soluciones, es decir,  $y_n$ , por lo mismo que al iterar  $g$  se pone especial atención en  $g_2$ .

1. Considere  $k > 0$ , para determinar si la solución aproximada por Euler crece para tiempos suficientemente grandes, al igual que mi solución exacta considérese  $g_2(t, y)$ , nótese que conforme  $t$  se incrementa el comportamiento de  $g_2$  también es semejante al de  $l(y) = y + c$  con  $c > 0$ , es decir, cualquier punto tenderá a infinito bajo la iteración de  $l$  (vea fig 51 a), en consecuencia para cualquier incremento  $h$  que se tome y cualquier tiempo suficientemente grande, la solución que aproxima a la ecuación  $y' = k\frac{1}{t}$ , crecerá sin cota alguna, vea fig 53

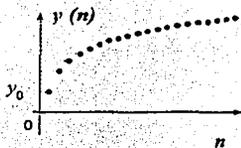


fig 53

Solución aproximada por Euler para la ecuación  $y' = k\frac{1}{t}$ . Obsérvese que la solución en efecto crece sin cota alguna conforme  $t \rightarrow \infty$ , y además la propiedad de convexidad se mantiene, compare fig 44 c) y fig 44 d).

2. Considerese  $k < 0$ , para determinar ahora si el crecimiento de la solución aproximada por Euler decrece para un tiempos suficientemente grandes, al igual que la solución exacta, nótese que conforme  $t$  decrece, el comportamiento de  $g_2$  sigue siendo semejante al de  $l(y) = y + c$ , pero ahora con  $c < 0$ , es decir, todos los puntos están en el conjunto estable de menos infinito, vea fig 52 inciso a), por lo tanto para cualquier incremento  $h$  que se tome, y cualquier tiempo suficientemente grande la solución que aproxima a la solución de  $y' = \frac{1}{t}$ , decrece sin cota alguna, vea fig 54

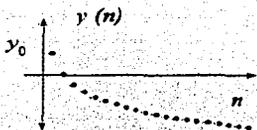


fig 54

La solución aproximada por Euler para la ecuación  $y' = k\frac{1}{t}$ . Obsérvese que solución, en efecto, decrece sin cota alguna conforme  $t \rightarrow \infty$ , y la propiedad de concavidad se mantiene comparese con la fig 54 y fig 44 c).

**CONCLUSIÓN** : Una solución que aproxima a la solución exacta de la ecuación diferencial  $y' = k\frac{1}{t}, \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , se parece cualitativamente a la solución exacta para cualquier incremento  $h$  positivo que se tome.



# Apendice A

En este apéndice se mostrará que la aproximación de Euler converge a la solución exacta conforme el tamaño del paso disminuye. Así, en un primer resultado, Teorema 11.3, se verá, la convergencia de la aproximación de Euler conforme el tamaño de paso disminuye para posteriormente demostrar efectivamente, que la solución a la que se aproxima es una solución exacta de  $x' = f(t, y)$ . Teorema 11.4.

Para tal fin necesitaremos la condición de Lipschitz y los resultados relacionados con la desigualdad fundamental y la cota de error para la pendiente de la aproximación de Euler. Dicha condición se mencionará en la definición 11.2 y los resultados se enunciarán en los teoremas 11.2 y 11.1 respectivamente. Si se desea ver más sobre estos teoremas, vea [11].

## **Teorema 11.1** (Cota de error en la pendiente de aproximación de Euler)

Considerese una ecuación diferencial  $x' = f(t, x)$ , donde  $f$  es una función continua en un rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  en el plano  $tx$ . Sea  $u_h$  una solución aproximada por Euler con tamaño de paso  $h$ . Entonces

i) Para cada  $h$ , existe un  $\varepsilon_h$  tal que

$$|u'_h - f(t, u_h(t))| \leq \varepsilon_h$$

en cualquier punto donde  $u_h$  sea diferenciable

ii) Si  $f$  es una función en  $R$  con derivadas parciales continuas y además tanto  $f$  como sus derivadas parciales están acotadas, es decir:

$$\sup |f| \leq M; \quad \sup \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leq P; \quad \sup \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq Q$$

Entonces podemos conocer específicamente el valor de  $\varepsilon_h$  (arriba mencionada), así si  $\varepsilon_h = h(P + QM)$  entonces

$$|u'_h(t) - f(t, u_h(t))| \leq h(P + QM)$$

**Definición 11.2** Un número  $K$  es una constante de Lipschitz con respecto a  $x$  en una función  $f(t, y)$  definida en una región  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  si

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K |x_1 - x_2| \quad (11.1)$$

A la desigualdad (11.1) se le llama condición de Lipschitz

**Definición 11.3** Una ecuación diferencial  $x' = f(t, x)$  admite la condición de Lipschitz si la función  $f$  admite la condición de Lipschitz

**Teorema 11.4** (Desigualdad Fundamental)

Si en un rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ , la ecuación diferencial  $x' = f(t, x)$  satisface la condición de Lipschitz con respecto a  $x$ , con constante de Lipschitz  $K \neq 0$ , y si  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  son dos funciones continuas, diferenciables a pedazos y satisfacen que

$$\begin{aligned} |u'_1(t) - f(t, u_1(t))| &\leq \varepsilon_1 \\ |u'_2(t) - f(t, u_2(t))| &\leq \varepsilon_2 \end{aligned}$$

para todo  $t \in [a, b]$  para el cual  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  es diferenciable; y si existe  $t_0 \in [a, b]$  tal que

$$|u_1(t_0) - u_2(t_0)| \leq \delta;$$

entonces

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \delta e^{K|t-t_0|} + \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{K}\right) (e^{K|t-t_0|} - 1)$$

para todo  $t \in [a, b]$ ,

**Teorema 11.5** (Convergencia de la aproximación de Euler)

Considerese una ecuación diferencial  $x' = f(t, x)$ , donde  $f$  es una función continua que satisface la condición de Lipschitz en  $x$  con  $K$  constante de Lipschitz en un rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  en el plano  $tx$ . Si  $u_h$  y  $u_k$  son dos soluciones aproximadas con tamaño del paso  $h$  y  $k$ , respectivamente y la misma condición inicial, es decir

$$u_h(t_0) = u_k(t_0) = x_0$$

entonces para cada  $t \in [a, b]$ ,

$$|u_h(t) - u_k(t)| \leq \frac{\varepsilon_h + \varepsilon_k}{K(e^{K|t-t_0|} - 1)}$$

Mas aún, si la  $\frac{\partial f}{\partial t}$  y  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existen y son acotadas, es decir,

$$\sup \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leq P \text{ y } \sup \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq Q$$

entonces

$$|u_h(t) - u_k(t)| \leq \frac{P + MQ}{K} (h + k) (e^{K|t-t_0|} - 1)$$

**DEMOSTRACION :**

*Demostración 1* Por teorema 11.1 inciso i) existe  $\varepsilon_h$  y  $\varepsilon_k$  tal que

$$\begin{aligned} |u_h(t) - f(t, u_h(t))| &\leq \varepsilon_h \\ |u_k(t) - f(t, u_k(t))| &\leq \varepsilon_k \end{aligned} \quad (11.2)$$

para todo  $t$  en  $[a, b]$ .

Luego, por hipotesis como  $u_h(t_0) = u_k(t_0)$  entonces

$$|u_h(t_0) - u_k(t_0)| = 0 \leq \delta \quad (11.3)$$

de (11.2) y (11.3), y por la desigualdad fundamental (teorema 11.2)

$$|u_h(t) - u_k(t)| \leq \frac{\varepsilon_h + \varepsilon_k}{K} (e^{K|t-t_0|} - 1)$$

Para la segunda parte, como  $f$  es una función diferenciable entonces  $f$  es continua, luego  $R$  es compacto así que  $f$  es acotada, es decir, existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $\sup |f| = M$  y si  $\varepsilon_h = (P + MQ)h$  y  $\varepsilon_k = (P + MQ)k$  (teorema 11.1 inciso ii), se obtiene lo deseado, es decir

$$|u_h(t) - u_k(t)| \leq \frac{P + MQ}{K} (h + k) (e^{K|t-t_0|} - 1)$$

**Teorema 11.6** Considerese la ecuación diferencial  $x' = f(t, x)$ , donde  $f$  es una función continuamente diferenciable en  $R = [a, b] \times [c, d]$ , en el plano  $tx$ . Si una solución aproximada con  $h$  el tamaño de paso, es  $u_h$  y condición inicial  $u_h(t_0) = x_0$  entonces para todo  $t \in [a, b]$  se obtiene

i) El límite  $u(t) = \lim_{h \rightarrow 0} u_h(t)$  existe;

ii) La función  $u(t)$  es diferenciable y es una solución de  $x' = f(t, y)$

La demostración de la primera parte es directa del teorema 11.3. Vamos a demostrar la segunda parte. Por demostrar que:

Para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|\eta| < \delta$  entonces

$$\left| \frac{u(t+\eta) - u(t)}{\eta} - f(t, u(t)) \right| < \varepsilon$$

$\forall t \in [a, b]$

**DEMOSTRACIÓN:**

Sea  $\varepsilon > 0$ . De la parte i), se tiene:

$$u(t+\eta) - u(t) - \eta f(t, u(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} [u_h(t+\eta) - u_h(t) - \eta f(t, u_h(t))]$$

por lo que mejor se trabajará con  $u_h$  en vez de  $u$ .

Por definición de  $u_h$

$$\frac{du_h}{d\eta} = f(t_i, u_h(t_i))$$

para cada punto, donde  $u_h$  se diferenciable, vea figura 1.

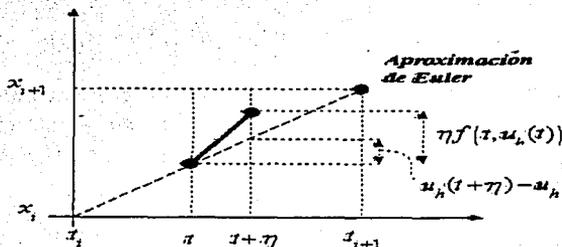


fig 1

Así

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{d\eta} [u_h(t+\eta) - u_h(t) - \eta f(t, u_h(t))] \right| \quad (11.4) \\ &= \left| \frac{d}{d\eta} u_h(t+\eta) - \frac{d}{d\eta} u_h(t) - f(t, u_h(t)) \frac{d}{d\eta} \eta \right| \\ &= \left| f(t_i, u_h(t_i)) - f(t, u_h(t)) \right| \end{aligned}$$

Como  $f$  es una función continuamente diferenciable entonces  $\frac{\partial f}{\partial t}$  y  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existen y son continuas y como  $R$  es un compacto entonces

$$\sup |f| \leq M, \quad \sup \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leq P, \quad \sup \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq Q$$

Así

$$\begin{aligned} & \left| f(t_i, u_h(t_i)) - f(t, u_h(t)) \right| \leq \\ & \left| f(t_i, u_h(t_i)) - f(t, u_h(t_i)) \right| + \left| f(t, u_h(t_i)) - f(t, u_h(t)) \right| \end{aligned}$$

Utilizando el teorema del valor medio y la cota  $P$  y  $Q$  para  $\frac{\partial f}{\partial t}$  y  $\frac{\partial f}{\partial x}$  respectivamente se obtiene:

$$\left| f(t_i, u_h(t_i)) - f(t, u_h(t)) \right| \leq |t - t_i| P + |u_h(t_i) - u_h(t)| Q$$

Volviendo a aplicar de nuevo el teorema del valor medio, ahora considerando  $M$  como cota de  $f$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \left| f(t_i, u_h(t_i)) - f(t, u_h(t)) \right| & \leq |t - t_i| P + |t - t_i| M \cdot Q \quad (11.5) \\ & \leq |t - t_i| (P + MQ) \end{aligned}$$

Es decir de (11.4) y (11.5)

$$\left| \frac{d}{d\eta} [u_h(t+\eta) - u_h(t) - \eta f(t, u_h(t))] \right| \leq |t - t_i| (P + MQ)$$

Como  $|\eta| < \delta$  entonces  $|t - t_i| < \delta + h$ . Si se considera  $\delta = \frac{\epsilon}{2(P+MQ)}$  y  $h < \delta$  entonces

$$\left| \frac{d}{d\eta} [u_h(t+\eta) - u_h(t) - \eta f(t, u_h(t))] \right| \leq 2\delta(P + MQ) = \varepsilon$$

la función  $u_h(t+\eta) - \eta f(t, u_h(t))$ , como función en  $\eta$ , es continua, lineal, y diferenciable por pedazos entonces por el teorema del valor medio.

$$\left| \frac{u_h(t+\eta) - \eta f(t, u_h(t)) - u_h(t)}{\eta - 0} \right| \leq \varepsilon$$

Por lo tanto

$$|u_h(t+\eta) - \eta f(t, u_h(t)) - u_h(t)| \leq \varepsilon |\eta|$$

si  $|\eta| < \delta$  y  $h < \delta$ .

Tomando el límite cuando  $h$  tiende a cero obtenemos

$$|u(t+\eta) - \eta f(t, u(t)) - u(t)| \leq \varepsilon |\eta|$$

y dividiendo la desigualdad anterior entre  $|\eta|$ , obtenemos lo deseado.

$$\left| \frac{u(t+\eta) - u(t)}{\eta} - f(t, u(t)) \right| < \varepsilon$$

■

## Comentarios finales

No hay nada tan intuitivo que una simple ecuación que produzca resultados tan complejos. El descubrimiento de ciertos comportamientos como el caos ha sido algo inquietante que todavía después de 30 años, sorprende y perturba tanto a legos como a expertos por igual. porque después de todo, en el tiempo que la humanidad se ha dedicado a hacer ciencia, hemos llegado a esperar una evidente relación entre causa y efecto que hoy por hoy se ha trastocado, generando caos donde antes se pensaba que había orden.

Si el comportamiento aleatorio es producido por un mecanismo determinista, entonces habría que expulsar a la probabilidad y la estadística del seno de la ciencia y desde luego a todas sus aplicaciones. De cualquier manera, lo cierto es que tanto fenómenos naturales como artificiales ( métodos numéricos), requieren de una teoría que permita explicarlos adecuadamente a la luz de sus necesidades y descubrimientos.

Pareciera que, cuando se presentan estas conductas caóticas, no tuvieran ninguna aplicación práctica puesto que se elimina la predictibilidad a largo plazo del sistema. Si embargo, el panorama no es tan sobrio como aparenta ya que, en primer lugar se debe considerar la verdad, por poco esperanzadora que sea, siempre es mejor que una falsedad llena de ilusiones pero sin sustancia y en segundo hasta ahora no se ha podido conocer con exactitud el futuro de un sistema caótico. aunque ello no elimina la posibilidad de predecir su conducta global o hasta su estado aproximado a corto plazo. Se ha visto que para analizar esta conducta global, la topología ha tenido mucho que ver, pues ha dado importantes resultados.

Para el estudio del método de Euler actualmente existen dos enfoques, el primero, que es el tradicional, corresponde a encontrar analíticamente las soluciones de las ecuaciones en diferencia mediante diversos métodos muchas veces insuficientes y cuya visión no trasciende, el segundo enfoque corre-

sponde a los sistemas dinámicos discretos, que es un estudio cualitativo-geométrico del método de Euler, esta nueva forma es mucho más clara y completa.

En el desenlace de esta historia, capítulo 10, se ha presentado el análisis del método de Euler para seis ecuaciones diferenciales. Las gráficas junto con el hecho de dejar bien establecidas las formas tan sutiles de pasar de un análisis a otro, permitieron entender las diferentes conductas que estas ecuaciones presentan. Siguiendo de esta manera, podemos afirmar, que un camino parecido se puede desarrollar para conocer con exactitud el comportamiento de la solución aproximada por Euler de cualquier ecuación autónoma de primer orden con coeficientes constantes, para diferentes incrementos y condiciones iniciales

Para que una solución aproximada por el método de Euler sea buena, en el sentido estricto de parecerse cualitativamente a la solución exacta, depende de tres factores: primero de la ecuación diferencial misma, segundo del incremento  $h$  que se tome y tercero de la condición inicial.

Desde antes, que se diera origen a esta nueva teoría, de los sistemas dinámicos discretos, se conocían estas diferencias, el problema consistía en que no se sabía ni siquiera abordarlo. Con los estudios hasta ahora desarrollados, poco a poco, se ha delimitado el problema en el conocimiento de estas diferencias, aclarando la situación y aunque quedan aún muchas incógnitas por resolver, el problema queda ya caracterizado como el de resolver la dinámica del mapeo correspondiente. Así en nuestro afán por entender la dinámica de ciertos mapeos, en particular el de describir la aproximación de Euler para la ecuación diferencial  $y' = \alpha + \beta y$ , se presentó un desarrollo muy completo, aunque no acabado, de la familia cuadrática.

De los diversos resultados aquí presentados, hay una observación, que surge al responder una inquietud personal: el conjunto estable de una órbita atractora de periodo  $2^n$ , para alguna  $n \in \mathbb{N}$ , en la llamada cascada de duplicación de periodo, es decir para  $c \in (-1,4, -0,75]$ , consiste del intervalo  $(-p, p)$  menos, los puntos eventualmente fijos, a cada una de las órbitas repulsoras de periodo  $2^{j-1}$  con  $j \in \mathbb{N}$  y  $j < n$ .

Se observó que, los puntos eventualmente fijos, correspondientes a la órbita atractora periódica en cuestión, juegan un papel importante en otros puntos del conjunto estable.

Consciente en que aún hay una gran y basta tarea por realizar, puntualizaré lo que considero ha de seguir, y que gracias a la diversidad de este tema toma sentido en tres grandes enfoques. Dentro del enfoque relacionado con el análisis numérico, sería aplicar otros métodos de aproximación diferentes al de Euler, por ejemplo, el de Runge-Kutta o el método del punto medio-Euler a una ecuación diferencial y mediante un análisis cualitativo con ayuda de la metodología de los sistemas dinámicos ver el comportamiento a largo plazo de la solución aproximada para diversos incrementos. Esto permitirá conocer con más claridad las diferentes ventajas y desventajas de los diversos métodos.

En relación con el enfoque de las ecuaciones en diferencia, se podrían considerar ecuaciones de orden superior, y después, ampliar nuestro estudio a los sistemas de ecuaciones en diferencias.

Por último, dentro del enfoque de los sistemas dinámicos discretos y más específicamente, respecto a la dinámica de la familia cuadrática, habría que dar más claridad a la dinámica de dicha familia en la llamada transición al caos. Cada vez que observo el diagrama de bifurcación, figura 7 y 8 del capítulo 7, no deja de sorprenderme la autosemejanza del diagrama ¿Será posible algún día entender bien a bien el patrón que sigue este diagrama? ¿Será posible algún día entender la transición al caos? o tal vez simplemente sea cuestión del azar.

¿Habrá otra familia que presente una dinámica tan bonita e interesante como la hasta aquí estudiada, y además, que no tenga ningún parentesco con la familia cuadrática?. De existir ¿cual es?.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

NOV 21 1957  
RECEIVED IN ALBAT

# Bibliografía

- [1] Abell, M., *Differential Equations with Mathematica*. Academic Press, Second Edition.
- [2] Blanchard, P., Devaney, R. y Hall, G., *Ecuaciones Diferenciales*. International Thomson Editores.
- [3] Campells, S. y Haberman, R. *Introducción a las ecuaciones diferenciales*. Mc. Graw Hill, 1998.
- [4] Combes, K. y Lipsman R., *Differential Equation with Mathematica*. John Wiley & Sons. 1998.
- [5] Devaney, R., *An Introductions to Chaotic Dinamical Systems*. Adison Wesley, 1989.
- [6] Devaney, R., *Chaos. Fractal and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics*. Adison Wesley, 1990.
- [7] Devaney, R., *A First Cours in Chaotic Dinamical Systems: Theory and Experiments*. Adison Wesley 1992.
- [8] Elaydi, S., *Introduction to Difference Equations*. Springer, 1999.
- [9] Hidelbrand, F., *Finite-Difference Ecuation y Simulations*. Prentice-Hall, 1968.
- [10] Holmgren, R., *A first Course in Discrete Dynamical Systems*. Springer, 1996.
- [11] Hubbard, J. y West, B. *Differential Ecuation. A Dinamical Approach*, Springer -Verlag, 1991

- [12] Kelley, W. y Peterson, A., *Difference Equations*. Harcourt, Academic Press, 2001.
- [13] Levy, H. y Lesman, F. *Finite-Difference Equation*, Dover , 1992.
- [14] Mendez, H., *Iteracion de Funciones*..
- [15] Monroy, C., *Teoría del Caos*. Computec, 1998.
- [16] Mickens R., *Difference Equations: Theory and Applications*. Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [17] Peitgen, O., Jurgens, H. y Saupe, D., *Fractals for the Classroom*. Springer Verlag, 1991.
- [18] Peitgen, O., Jurgens, H. y Saupe, D., *Chaos and Fractals*. Springer Verlag, 1992.
- [19] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*. Mc Graw-Hill.
- [20] Sanderfur, J. *Discrete Dynamical Systems*. Clerendon Press, 1990.
- [21] Spivak, M., *Cálculo Infinitesimal* . Editorial Reverte.