00321

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

83

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ASPECTOS MATEMATICOS EN EL PLANTEAMIENTO DE LA TEORIA DEL INTERES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ERNESTO ANTONIO DEL RIO VALDES

DIRECTOR DE TESIS : A. C. T. MARINA CASTILLO GARDUÑO

A

PAGINACION DISCONTINUA

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
ALGUNOS ASPECTOS MATEMATICOS EN EL PLANTEAMIENTO DELA TEORIA DEL INTERES

realizado por ERNESTO ANTONIO DEL RIO VALDES

con número de cuenta 09226817-9 , quien cubrió los créditos de la carrera de: ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	ACT. MARINA CASTILLO GARDUÑO	
Propietario	ACT. FERNANDO ALONSO PEREZ TEJADA LOPEZ	
Propietario	ACT. FELIPE ZAMORA RAMOS	
Suplente	ACT. YOLANDA SILVIA CALIXTO GARCIA	
Suplente	ACT. BENIGNA CUEVAS PINZON	Benigna Cuevas P.

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M. EN C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

B

AGRADECIMIENTOS:

A mis padres por todo su apoyo.

A mis abuelitos Emma y Antonio.

A mis Hermanos José Luis y Emma.

A mi asesora Act. Marina Castillo Garduño, por el apoyo que me brindó en la dirección de esta tesis.

A mis sinodales por la dedicación en la revisión de este trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México.

A todos mis profesores de la Facultad de Ciencias.

A mis amigos Dulce, Roberto, Vladimir, David y Hugo.

ÍNDICE

Introducción ii

Capítulo 1. Interés 1

1.1 Interés Simple 1
1.2 Tasa de Descuento Simple 3
1.3 Interés Compuesto 4
1.3.1 Tasa Instantánea de Interés 5
1.4 Triple Igualdad 6
1.5 Valor Presente 7
1.5.1 Tasa de Descuento Compuesto 8
1.5.2 Fuerza de Descuento 9
1.6 Ecuación de Valor 12

Capítulo 2. Anualidades 14
2.1 Anualidades Vencidas 15
2.1.1 Valor Presente de una Anualidad 15
2.1.2 Monto de una Anualidad 16
2.2 Aproximaciones Sucesivas 21
2.3 Algoritmo para calcular el Interés por medio de Aproximaciones Sucesivas 23
2.3.1 Caso1 24
2.3.2 Caso2 24
2.3.3 Caso3 24
2.4 Interpolación 28
2.5 Por Desarrollo de $a_{\overline{n|}}$ ó $s_{\overline{n|}}$ 33
2.6 Anualidades Anticipadas 35
2.7 Ejemplos 39
2.8 Anualidades Diferidas 43
2.9 Ejemplos 45
2.10 Perpetuidades 47

Capítulo 3. Anualidades Crecientes y Decrecientes en Progresión Aritmética y Geométrica 49
3.1 . Anualidades Crecientes y Decrecientes en Progresión Aritmética 49
3.2 Anualidades Crecientes y Decrecientes en Progresión Geométrica 52
3.3 Ejemplos 53

Conclusiones 59

Bibliografía 60

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este trabajo es el desarrollo de algunos temas sobre matemáticas financieras ya que esta área presenta gran diversidad tanto de contenido como de aplicaciones en el campo de la investigación y en el ámbito económico y financiero.

La introducción que realizó J. M. Keynes sobre la tasa de interés y el estudio del interés compuesto sin duda ha tenido grandes repercusiones en el mercado financiero desde un inicio hasta nuestros días.

Cabe señalar la importancia sobre el estudio del valor presente y los diferentes tipos de anualidades que tienen en el cálculo de prestamos hipotecarios, pensiones, avaluos sobre valores de activo fijo, cálculo del valor presente neto, la tasa interna de rendimiento (TIR) y el fondo de amortización acumulativo entre otros.

Las instituciones que aplican las matemáticas financieras, son tanto del sector publico como del sector privado, en el primero se encuentran algunas como: Gobernación, la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, la Secretaría de Salud, el Seguro Social y el ISSSTE.

Actualmente existen varios libros en español de Matemáticas Financieras muy buenos. Pero considero que algunos aspectos matemáticos no están lo suficientemente claros, en esta tesis el objetivo principal es presentar esos aspectos más explicados.

En el primer capitulo se ve el interés simple, la tasa de descuento simple, el interés compuesto, la quintuple igualdad etc. En el segundo capitulo se ven varios métodos para encontrar la tasa de interés de una anualidad. también se ven algunos aspectos de las anualidades diferidas y anticipadas. En el tercer capitulo se ven a las anualidades crecientes y decrecientes en forma geometrica y aritmética.

Nota: Debido al formato del editor de ecuaciones del programa en que fue escrita esta tesis, el símbolo utilizado para representar el valor presente de una anualidad aparece de dos formas distintas $a_{\overline{n|}}$ y $a_{\overline{n|}}$

CAPITULO 1

INTERÉS.

Para hablar del interés es necesario hablar de la parte económica que le ha dado origen al interés esto es ,el Capital , término que designa un conjunto de bienes y una cantidad de dinero de los que se puede obtener , en el futuro, una serie de ingresos.

Para los economistas del siglo XIX el término "Capital" se refería únicamente a la parte de la riqueza que habia sido anteriormente producida. La riqueza no producida como la tierra o los yacimientos de minerales no se incluían en la definición . Así los ingresos provenientes del capital se denominaban beneficios o interés, mientras que a los ingresos provenientes de los recursos naturales se les llamó rentas. En la actualidad ya no se hace esta distinción.

Bajo el capitalismo moderno, el pago de intereses por cualquier préstamo se considera correcto.

Se define el Interés como el rédito que hay que pagar por el uso del dinero tomado en préstamo. Por consiguiente al calcular el interés hay que tener en cuenta tres factores

a) El capital.
b) El tiempo.
c) La tasa.

Donde el capital es la suma prestada , el tiempo es la duración del lapso para el que se calcula el interés y la tasa es el número de unidades pagadas como rédito, en la unidad de tiempo, por cada cien unidades de la suma prestada.

1.1 Interés simple.

El interés simple se calcula sobre el capital inicial que permanece invariable. Por lo tanto, el interés que se obtiene en cada intervalo unitario de tiempo es siempre el mismo. La notación que se utiliza es la siguiente:

P es el capital inicial.
C es el capital más los intereses.
t es el número de intervalos de tiempo.
I es el interés ganado.
i es la tasa de interés.

Al principio se tiene la cantidad **P** de capital
Al transcurrir el primer periodo de tiempo se tiene $P+P*i = P(1+i)$
Al pasar el segundo periodo el capital es de $P+P*i+P*i = P(1+2*i)$
En general se tiene que el capital al final del n-ésimo periodo es de $P(1+n*i)$
De aquí se obtienen las siguientes fórmulas:

C = P + I
I = P*i*t
C = P + P*i*t
C = P(1+i*t)

Sin embargo estas fórmulas son para cuando $t \in \mathbf{N}$, podemos suponer que el interés es acumulado proporcionalmente sobre fracciones de periodos en el interés simple y por lo tanto las fórmulas serían validas para $t \in \mathbf{R}^{+}$. Otra manera mas rigurosa de definir al interés simple para valores de t no enteros puede ser desarrollada por medio de la siguiente propiedad que sería deseable que tuviera el interés simple:

$F(a+b)=F(a)+F(b)-P$ para $a \geq 0$ y $b \geq 0$ donde $F(x)$ es el capital más el interés en el periodo x.

Esta ecuación nos dice que en el interés ganado por una inversión de P unidades en un periodo de $a+b$ unidades es igual al interés ganado en un periodo de a unidades más el interés ganado en un periodo de b unidades. El $-P$ del lado derecho de la ecuación es para no contar dos veces la inversión inicial.

Suponiendo que F(x) es derivable se tiene que:

$$F'(t) = \lim_{x \to 0} \frac{F(t+x)-F(t)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{[F(t)+F(x)-P]-F(t)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{F(x)-P}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{F(x)-P}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x}$$

$$= F'(0) = cte.$$

Por lo que F'(t) es una función constante, integrando ambos lados de la ecuación de 0 a t

$$\int_0^t F'(x)\,dx = \int_0^t F'(0)\,dx$$

F(t) - F(0) = t*F'(0)

F(t) = P + t*F'(0)

Para saber el valor de F'(0), basta evaluar la función en t=1.

F(1) = P + t*F'(0)

Sin embargo F(1) = P + P*i, por lo que F'(0)=P*i

Por lo que

F(t) = P + t*P*i = P(1+t*i).

1.2 Tasa de descuento simple.

Es la tasa de interés pagada anticipadamente.
Vamos a denotar:

D = descuento.	**D = C*d*t**
d = tasa de descuento.	**P = C – D**
t = tiempo.	**P = C – C*d*t**
P = capital inicial.	**P = C(1 – d*t)**
C = capital final.	**C = P/(1 – d*t)**

Ejemplo.- Un banco otorga el 8% de descuento si un cliente firma un documento por $2.500.- a cuatro meses, ¿Qué cantidad le dará el banco?

C = $2,500.-	D = C + d	D = 2500*(0.08)*(4/12)
d = 0.08	P = C – D	D = 66.67
t = 4 meses = 4/12 años		P = 2500 – 66.67 = 2433.33

Como hemos visto el interés simple y el descuento simple crecen en forma lineal.

1.3 Interés compuesto.

El interés compuesto se define como el interés que se suma al capital, formando un nuevo capital, y sobre ese nuevo capital se calcula el interés, es decir, es interés sobre interés.

Se tiene un capital de \$1 en el momento 0 (al principio del periodo). Si $f(t)$ es el capital en el tiempo t entonces:

$f(0) = 1$

$f(1) = 1 + i$ esta cantidad será el nuevo capital

$f(2) = f(1)*(1 + i) = (1 + i)^2$

$f(3) = f(2)*(1 + i) = (1 + i)^3$

En general:

$f(n+1) = f(n)*(1 + i) = (1 + i)^{n+1}$ para n entero positivo.

Como vemos aquí el capital tiene un crecimiento geométrico.

En el interés compuesto se tienen diferentes tasas de interés:

a) tasa nominal de interés.- Es el interés total que es pagado en un año, considerando que los intereses pagados durante ese año no son reinvertidos y dichos intereses son pagados m veces al año, en intervalos de tiempo iguales.

b) tasa efectiva de interés.- Es la tasa que se paga en cada periodo, por ejemplo: mensual efectiva, trimestrai efectiva, anual efectiva, etc.

c) tasa instantánea de interés ó fuerza de interés.- Es la tasa continua con la cual crece una unidad de capital bajo una operación de interés.

Si queremos comparar una tasa efectiva con una nominal, podemos calcular la tasa efectiva que sea equivalente a dicha tasa nominal de la siguiente manera:

Supongamos que tenemos una tasa nominal $\mathbf{i^{(m)}}$ que paga **k** de interés m veces al año.
Pero como $\mathbf{k}*m = \mathbf{i^{(m)}}$, se tiene que $\mathbf{k = i^{(m)}/m}$.

$f(0) = 1$

$f(1/m) = 1 + i^{(m)}/m$

$f(2/m) = (1 + i^{(m)}/m)^2$

$f(3/m) = (1 + i^{(m)}/m)^3$

$f(1) = f(m/m) = (1 + i^{(m)}/m)^m$

$f(1) = 1 + i = (1 + i^{(m)}/m)^m$ donde i es la tasa efectiva anual equivalente a la tasa nominal.

de aquí se tiene que:

$$i = (1 + i^{(m)}/m)^m - 1 \qquad (1.1)$$

$$i^{(m)} = m*((1 + i)^{1/m} - 1) \qquad (1.2)$$

1.3.1 Tasa instantánea de Interés

El crecimiento del Monto del tiempo t al (t + h) por unidad de capital y por unidad de tiempo es de:

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h*f(t)}$$

Tomando el limite cuando h tiende a cero, se obtiene el crecimiento instantáneo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h*f(t)} = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\partial}{\partial t}\log(f(t))$$

Al cual lo designaremos por $\delta(t)$, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(f(t)) = \delta(t)$$

Integrando de 0 a t :

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\log(f(x))\partial x = \int_0^t \delta(x)\partial x$$

$$\log(f(t)) - \log(f(0)) = \int_0^t \delta(x)\partial x$$

$$\log\left(\frac{f(t)}{f(0)}\right) = \int_0^t \delta(x)\partial x$$

$$\frac{f(t)}{f(0)} = \exp\int_0^t \delta(x)\partial x$$

$$f(t) = f(0)^* \exp\int_0^t \delta(x)\partial x \qquad (1.3)$$

Si la tasa de crecimiento es constante en el tiempo, $\delta(t) = \delta$, entonces:

$$f(t) = f(0)\, e^{t\delta} \qquad (1.4)$$

1.4 Triple Igualdad

Para encontrar tasas instantáneas de interés equivalentes ya sea a tasas de interés nominales o efectivas se usa la triple igualdad, que se obtiene de la siguiente forma:

$f(1) = f(0)^*(1+i)$ es el monto con una tasa de interés efectiva
$f(1) = f(0)^*(1+i^{(m)}/m)^m$ es el monto con una tasa de interés nominal
$f(1) = f(0)^* e^{\delta}$ es el monto con una tasa de interés instantánea

igualando y dividiendo entre f(0) se tiene que:

$$(1+i) = (1+i^{(m)}/m)^m = e^{\delta} \qquad (1.5)$$

Si queremos encontrar la fuerza de interés equivalente a una tasa anual efectiva, de la triple igualdad $e^{\delta} = (1+i) \Rightarrow \delta = \log(1+i)$. (1.6)

De otra forma, si deseamos encontrar la tasa anual equivalente a la fuerza de interés $e^{\delta} = (1+i) \Rightarrow i = e^{\delta} - 1$. (1.7)

Si deseamos encontrar la fuerza de interés (tasa instantánea de interés) equivalente a una tasa nominal convertible m-veces al año:

$$e^{\delta} = (1 + i^{(m)}/m)^{m} \Rightarrow \delta = m*\log(1 + i^{(m)}/m) \qquad (1.8)$$

Observe que aunque en el interés compuesto solo es para un número de periodos enteros, con la tasa de interés instantánea, el monto se puede calcular para cualquier periodo de tiempo, y usando las igualdades 1.5 y 1.6 , se tiene que el monto para un tiempo t y con una tasa de interés i es:

$$e^{\delta * t} = e^{\log(1+i)*t} = (1 + i)^{t} \qquad (1.9)$$

y para calcular el monto con una tasa nominal $i^{(m)}$,con las igualdades 1.5 y 1.8:

$$e^{\delta * t} = \exp(m*\log(1 + i^{(m)}/m)*t) = (1 + i^{(m)}/m)^{m*t} \qquad (1.10)$$

Por último, para encontrar la tasa nominal convertible m-veces al año equivalente a una tasa instantánea de interés:

$$e^{\delta} = (1 + i^{(m)}/m)^{m} \Rightarrow e^{\delta/m} = 1 + i^{(m)}/m \Rightarrow i^{(m)} = m*(e^{\delta/m} - 1). \qquad (1.11)$$

De esta última ecuación si se toma el límite cuando m tiende a infinito:

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} m*(e^{\delta/m} - 1) = \lim_{m\to\infty} \frac{e^{\delta/m} - 1}{m^{-1}}$$

aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{-\delta * m^{-2} e^{\delta/m}}{-m^{-2}} = \lim_{m\to\infty} \delta * e^{\delta/m} = \delta.$$

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta \qquad (1.12)$$

por lo tanto $i^{(m)}$ tiende a la fuerza de interés δ.

1.5 Valor Presente

El monto **S** de una cantidad se calcula tomando como fecha focal n.
En este caso **P** , que es el capital inicial, es conocido y se invierte a n periodos a una tasa de interés **i** , se tiene que **S = P*(1+i)**^{n}. (1.13)

Si nosotros conocemos el valor de **S** y queremos conocer el capital que le dio origen conociendo el tiempo y la tasa, despejando a **P** de la fórmula anterior

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}$$

$$P = S*(1+i)^{-n} \tag{1.14}$$

Definimos $V = (1+i)^{-1}$ (1.15)

Esta fórmula $P = S*(1+i)^{-n} = S*V^n$ se le conoce como Valor Presente.

Podemos calcular el monto y el valor presente de $1 con las tasas que hemos visto hasta ahora.

	i	$i^{(m)}$	δ
Monto	$(1+i)^n$	$(1+i^{(m)}/m)^{m*n}$	$e^{\delta*n}$
Valor presente	$(1+i)^{-n}$	$(1+i^{(m)}/m)^{-m*n}$	$e^{-\delta*n}$

1.5.1 Tasa de Descuento compuesto

La tasa de descuento d es la cantidad que se le descuenta por unidad al monto:

$$P = S - d*S = S*(1-d) \tag{1.16}$$

$$P = S*(1-d) \Rightarrow P*(1-d)^{-1} = S = P*(1+i) \Rightarrow (1-d)^{-1} = (1+i)$$

$$\Rightarrow 1 - d = \frac{1}{(1+i)} \Rightarrow d = 1 - \frac{1}{(1+i)} \Rightarrow d = \frac{i}{(1+i)} \Rightarrow d = i*V \tag{1.17}$$

Si el capital $S = 1$

En el primer periodo $P = 1 - d$
En el segundo periodo $P = (1-d)*(1-d) = (1-d)^2$
En el tercer periodo $P = (1-d)^2*(1-d) = (1-d)^3$
En el n-ésimo periodo $P = (1-d)^n$

Si $S \neq 1$ $P = S*(1-d)^n$ (1.18)

Esta fórmula es el valor presente calculado con la tasa de descuento efectiva, si queremos conocer S basta con despejarla de la fórmula:

$$S = P*(1-d)^{-n} \tag{1.19}$$

Si la tasa de descuento es nominal, es decir, convertible m veces al año, seria equivalente a una tasa de descuento compuesto en m periodos con tasa de descuento igual a $d^{(m)}/m$.

$$S = P*(1 - d^{(m)}/m)^{-m} \qquad (1.20)$$

1.5.2 Fuerza de descuento

Sea $\varphi(t)$ el valor presente de una unidad en el instante t, entonces la fuerza de descuento se define como:

$$\delta' = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t+h)}{h * \varphi(t)} \qquad (1.21)$$

$$\delta' = \frac{-1}{\varphi(t)} * \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \frac{-1}{\varphi(t)} * \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{-d \log \varphi(t)}{dt}$$

$$\delta' = \frac{-d \log \varphi(t)}{dt} \qquad (1.22)$$

pero como $\varphi(t) = (1 + i)^{-t} = [(1 + i)^{t}]^{-1} = f(t)^{-1}$,

$$\delta' = \frac{-d \log[f(t)^{-1}]}{dt} = \frac{d \log[f(t)]}{dt} = \delta \qquad (1.23)$$

por lo tanto, la fuerza de interés es igual a la fuerza de descuento.
Integrando ambos términos de la igualdad 1.22 :

$$\int_0^t \delta' \partial x = \int_0^t \frac{-d \log \varphi(x)}{dx} \partial x$$

$$\delta' * t = -[\log \varphi(t) - \log \varphi(0)]$$

$$\delta' * t = -[\log \varphi(t) - \log 1]$$

$$\delta' * t = - \log \varphi(t)$$

$$\varphi(t) = \exp(-\delta'^{*}t) = \exp(-\delta^{*}t) \quad (1.24)$$

tomando a $t = 1$; $\varphi(1) = \exp(-\delta)$

$$(1-d^{(m)}/m)^{m} = 1-d = \varphi(1) = e^{-\delta} \quad (1.25)$$

y con esto se tiene la quintuple igualdad

	i	$i^{(m)}$	δ	d	$d^{(m)}$
Valor Presente	$(1+i)^{-1}$	$(1+i^{(m)}/m)^{-m}$	$e^{-\delta}$	$(1-d)$	$(1-d^{(m)}/m)^{m}$
Monto	$(1+i)$	$(1+i^{(m)}/m)^{m}$	e^{δ}	$(1-d)^{-1}$	$(1-d^{(m)}/m)^{-m}$

Con la quintuple igualdad, dada una tasa podemos encontrar las otras tasas, ya que son equivalentes.

Ejemplo.- Encontrar la tasa de descuento anual efectiva equivalente a una tasa de interés del 12% anual convertible semestralmente.

$$(1-d)^{-1} = (1 + i^{(m)}/m)^{m}$$
$$(1-d)^{-1} = (1 + .12/2)^{2}$$
$$(1-d)^{-1} = (1 + .06)^{2}$$
$$(1-d) = (1.06)^{-2}$$
$$d = 1 - (1.06)^{-2}$$
$$d = 0.11$$
$$d = 11\%$$

Ejemplo 2.- Si se tiene una tasa de interés del 8% anual efectiva, encontrar la tasa de descuento anual efectiva.

$$i = .08$$
$$(1 + i) = (1-d)^{-1}$$
$$(1 + i)^{-1} = (1-d)$$
$$d = 1-(1 + i)^{-1}$$
$$d = 1-(1 + .08)^{-1}$$
$$d = 0.0741$$

En el cálculo del monto y valor presente están involucrados: el tiempo, la tasa el capital inicial (Valor Presente) , el capital final (monto). Por lo tanto en los problemas que se pueden presentar la incógnita puede ser el Valor Presente, el monto, la tasa y el tiempo.

1) Valor Presente, Monto.
2) Tasa de interés.
3) Tiempo.

1) Valor Presente, Monto.

$S = P*(1 + i)^n$

$P = S*(1 + i)^{-n}$

2) Tasa de Interés.

$S = P*(1 + i)^n$
$S/P = (1 + i)^n$
$(S/P)^{1/n} = (1 + i)$
$i = (S/P)^{1/n} - 1$

Ejemplo.- Se invirtieron 1000.- durante 5 años a una tasa anual efectiva y se acumuló 1402.55, ¿ Cuál fue la tasa de interés involucrada en la operación ?

$P = 1000$	$S = P*(1 + i)^n$
$S = 1402.55$	$i = (S/P)^{1/n} - 1$
$n = 5$ años	$i = (1402.55/1000)^{1/5} - 1$
$i = ?$	$i = 0.07$

Respuesta 7% anual efectiva.

3) Tiempo. El tiempo lo podemos calcular por logaritmos.

$S = P*(1 + i)^n$
$S/P = (1 + i)^n$
$\log(S/P) = n*\log(1 + i)$
$n = [\log(S/P)]/\log(1 + i)$

Ejemplo.- ¿ En cuánto tiempo \$2000.- colocados a una tasa de interés del 6.5% anual efectiva, se convertirán en \$2,918.28 ?

$P = 2000$	$n = [\log(S/P)]/\log(1 + i)$
$S = 2918.28$	$n = [\log(2918.28/2000)]/\log(1.065)$
$i = .065$	$n = \log(1.45914)/\log(1.065)$
$n = ?$	$n = 0.377847/0.062975$

Resultado $n = 6$

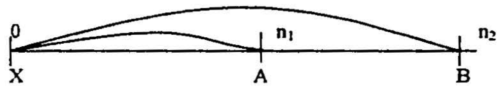
1.6 Ecuación de Valor

En casi todos los problemas de Matemáticas Financieras por complicados que sean se plantea una ecuación de valor.

Ecuación de valor: "La ecuación de valor en términos generales interpreta y ordena para su cálculo, la forma en que están definidas las obligaciones y los derechos derivados de toda transacción financiera en el tiempo; obligaciones y derechos especificado normalmente en términos de uso y retribuciones de capitales."[1]

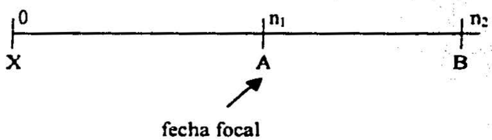
Si tenemos dos deudas A y B pagaderas en n_1 y n_2 respectivamente y se desea liquidar ahora las dos deudas con un pago X. Encontrar X si se considera una tasa i.

Linea de tiempo

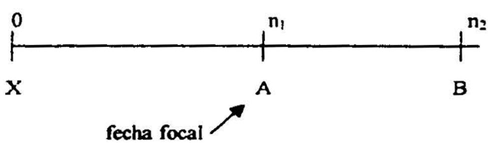


Tomemos como fecha focal cero.
La ecuación de valor sería: $A*V^{n1} + B*V^{n2} = X$

Si consideramos la fecha focal como



Nuestra ecuación de valor sería:
$X*(1 + i)^{n1} = A + B*V^{n1-n2}$
Si consideramos como fecha focal n_2

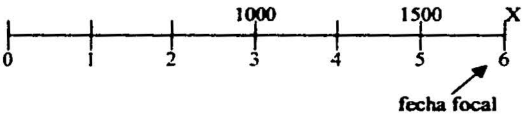


[1] Salas Torá Jorge "Teoría del Interés y Aplicaciones Financieras"

$$X*(1 + i)^{n2} = A*(1 + i)^{n2-n1} + B$$

Como se ve no importa que fecha focal se elija siempre y cuando se plantee en forma correcta la ecuación de valor.

Ejemplo.- Se tienen dos deudas, una de $1000.- y otra de $1500.- a pagar en 3 y 5 años respectivamente y se desea cambiarlas por un solo pago en el 6° año. Si la tasa de interés es del 8% anual. ¿De cuánto será dicho pago?



Se toma como fecha focal el año 6.

$$X = 1500*(1+i) + 1000*(1+i)^3$$

$$X = 1500*(1.08) + 1000*(1.08)^3$$

$$X = 1620 + 1259.712$$

$$X = 2879.712$$

Si la fecha focal la tomamos en cero:

$$X*V^6 = 1500*V^5 + 1000*V^3$$

que al multiplicar por $(1+i)^6$ se obtiene la ecuación anterior.

CAPITULO 2

ANUALIDADES

Una anualidad se define como una serie de pagos periódicos generalmente iguales a una cierta tasa de interés que se efectúa durante n periodos.
Las anualidades se clasifican en:

a) Anualidades Ciertas.

b) Anualidades Contingentes.

Las anualidades ciertas consisten en una serie de pagos periódicos que deben efectuarse con certeza e independientemente de cualquier evento fortuito durante un cierto tiempo establecido. Por ejemplo, el pago de una renta, el pago de intereses sobre un bono de renta fija etc.

Las anualidades contingentes son una serie de pagos que se efectúan sujeto a algún evento fortuito. Por ejemplo, los pagos que recibe un pensionado y el pago de la prima de un seguro.

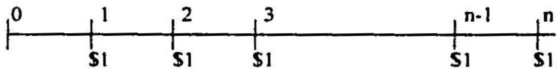
- Anualidades
  - Ciertas
    - anticipadas
    - vencidas
    - diferidas
    - perpetuidades
    - crecientes
    - decrecientes
    - variables
  - Contingentes
    - anticipadas
    - vencidas
    - diferidas
    - perpetuidades
    - crecientes
    - decrecientes
    - variables

2.1 Anualidades ordinarias o vencidas

Una anualidad ordinaria o vencida es una serie de pagos unitarios efectuados al final de cada periodo y pagaderos durante n periodos a una tasa de interés i.

2.1.1 Valor Presente de una anualidad vencida

Se dice que es el valor Presente cuando tomamos como fecha de valuación o fecha focal el cero, es decir, al principio del primer periodo.



y denotamos por $a_{\overline{n}|}$ el valor presente de una anualidad.

$$a_{\overline{n}|} = V + V^2 + V^3 + \ldots + V^{n-1} + V^n \qquad (1)$$

Esta es una suma de progresión geométrica de razón V.

$$V * a_{\overline{n}|} = V^2 + V^3 + V^4 + \ldots + V^n + V^{n+1} \qquad (2)$$

restando (2) a (1) se tiene:

$$(1-V) * a_{\overline{n}|} = V - V^{n+1} = V * (1-V^n) \qquad (3)$$

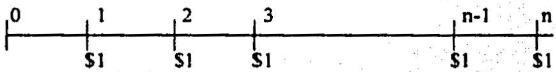
$1-V \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq V \Leftrightarrow 1+i \neq 1 \Leftrightarrow i \neq 0$
por lo tanto, si $i \neq 0$, se puede dividir en ambos lados de la ecuación por 1+V;
(si i = 0 entonces la anualidad es igual a n)

$$a_{\overline{n}|} = \frac{V * (1-V^n)}{1-V} = \frac{(1-V^n)}{V^{-1}-1} = \frac{(1-V^n)}{(1+i)-1} \qquad (4)$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i} \qquad (5)$$

2.1.2 Monto de una Anualidad

Si la fecha de evaluación es al final del periodo n queda:



$$S_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{n-1} \qquad (6)$$

esta es la suma de una progresión geométrica de razón (1+i), si $i \neq 0$, entonces:
(si i = 0 entonces Sn = n)

$$S_{\overline{n}|} = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^n}{-i}$$

$$S_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (7)$$

En los dos casos, tanto en el Valor Presente como en el monto de una anualidad, los pagos se están considerando de un peso, si en la anualidad los pagos son de R pesos, se tiene:

Para el Valor Presente:

$$A = R * a_{\overline{n}|} = R * \left[\frac{1-v^n}{i}\right] \qquad (8)$$

Para el monto:

$$S = R * S_{\overline{n}|} = R * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (9)$$

La relación entre el Valor Presente y el monto de una anualidad es la siguiente: de la ecuación (1) si multiplicamos por $(1+i)^n$ se tiene:

$$(1+i)^n * a_{\overline{n}|} = (1+i)^n *(V + V^2 + V^3 + ... + V^{n-1} + V^n)$$

$$(1+i)^n * a_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + ... + (1+i) + 1 = S_{\overline{n}|} \quad (10)$$

En los problemas que involucran anualidades se puede presentar que el valor buscado sea:

a) El monto (S) o el Valor Presente (A)

b) La Renta

c) El tiempo

d) La tasa de interés

Para el monto y el Valor Presente ya vimos las fórmulas
b) Para encontrar la Renta (R) despejamos en:

$A = R * a_{\overline{n}|}$; $R = A / a_{\overline{n}|}$

$S = R * S_{\overline{n}|}$; $R = S / S_{\overline{n}|}$

c) Si la incógnita es el tiempo, se puede despejar:

1.-Para valor presente

$$A = R * a_{\overline{n}|} = R * \left[\frac{1 - V^n}{i} \right]$$

$$A/R = \left[\frac{1-V^n}{i}\right]$$

$$(A/R)*i - 1 = -V^n$$

$$1 - (A/R)*i = V^n$$

$$n*\log V = \log(1 - (A/R)*i)$$

$$n = \left[\frac{\log(1-(A/R)*i)}{\log V}\right] \qquad (11)$$

pero la ecuación (11) no tendría sentido si n es negativo, no es entero o peor aún $(1-(A/R)*i) \leq 0$, ya que el logaritmo no estaria definido.
pero $(1-(A/R)*i) \leq 0 \iff R/i \leq A$, como se vera mas adelante el valor presente de una anualidad en donde el número de pagos es infinito (perpetuidad) es igual a R/i, por lo que si $1-(A/R)*i) > 0$ la ecuación no tiene solución, y si $1-(A/R)*i) = 0$ se pode considerar como solución $n = \infty$.

Para que n sea negativo $\log(1-(A/R)*i)$ tiene que ser positivo, debido a que logV siempre es negativo (pues $i>0$), y para que $\log(1-(A/R)*i)$ sea positivo $(1-(A/R)*i)$ tiene que ser mayor que 1, es decir, $A/R*i < 0$, pero esto no puede pasar ya que tanto i, A y R son positivos.

el último caso es cuando n es positivo pero no es entero, en este caso se considera una anualidad con un pago incompleto en el último periodo.

observe que la función $h(x) = \left[\frac{1-V^x}{i}\right]$ es creciente en $[0,\infty)$, por lo que si n no es entero, no se puede elegir $[n]+1$ como el número de pagos, pues el valor de esta anualidad seria mayor al buscado, y si se elige el número $[n]$ la anualidad seria menor a la buscada, por lo que el pago incompleto se efectuaria en el periodo $[n]+1$ para completar el valor de la anualidad. El pago incompleto K que se efectúa en el periodo $[n]+1$ se determina de la siguiente forma:

$$K = (A - R*a_{\overline{[n]}|})(1+i)^{[n]+1}$$

por la observación anterior K es positivo, además el valor presente de la anualidad con este pago incompleto es A

el valor presente de la anualidad es $\lambda = R*V + R*V^2 + \ldots + R*V^{[n]} + K*V^{[n+1]}$

$\lambda = R(a_{\overline{[n]}}) + K*V^{[n+1]}$

$\lambda = R(a_{\overline{[n]}}) + (A - R*a_{\overline{[n]}})[(1+i)^{[n]+1}]*V^{[n+1]}$

$\lambda = R(a_{\overline{[n]}}) + (A - R*a_{\overline{[n]}})$

$\lambda = A$ que es lo que se quería.

además K es menor que R puesto que:

$A < R*a_{\overline{[n]+1}}$

$A - R*a_{\overline{[n]}} < R*(a_{\overline{[n]+1}} - a_{\overline{[n]}})$

$A - R*a_{\overline{[n]}} < R*(V^{[n]+1})$

$K = (A - R*a_{\overline{[n]}})(1+i)^{[n]+1} < R$

2.-Para el monto

$S = R*S_{\overline{n}}$

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$i*S/R = (1+i)^n - 1$

$i*S/R + 1 = (1+i)^n$

$\log((i*S/R)+1) = n*\log(1+i)$

$$n = \frac{\log((i*S/R)+1)}{\log(1+i)}$$

Al igual que en el caso anterior, esta n puede no ser un entero positivo, sin embargo, como i, S y R son positivos n es positiva, en el caso en que n no fuera entero, se puede considerar una anualidad con el último pago incompleto.

El número de pagos y el valor del pago incompleto K se obtienen de la siguiente forma:

Observe que la función $h(x) = \left[\frac{(1+i)^x - 1}{i}\right]$ es una función creciente, por lo que:

$S > R*S_{\overline{[n]|}}$ y $S < R*S_{\overline{[n]+1|}}$

Podemos considerar el número de pagos igual a [n] y completar el monto con el pago incompleto, no obstante, dicho pago puede ser negativo pues al trasladar la fecha focal de [n] a [n]+1 el monto podria sobrepasar a S.

$S = S_{\overline{[n]|}}(1+i) + K$

$K = S - S_{\overline{[n]|}}(1+i)$

d) Cuando la incógnita es la tasa de interés, no se puede despejar, por lo que se deben aplicar otros métodos como:

1) Por aproximaciones sucesivas.
2) Por interpolación.
3) Por desarrollo de $a_{\overline{n|}}$ o $S_{\overline{n|}}$.

Primero se va a demostrar que si 0<T<n, la ecuación $T = a_{\overline{n|}}$ tiene una única solución positiva i.

ya que $g(i) = a_{\overline{n}|i} = V + V^2 + V^3 + ... + V^{n-1} + V^n$ vista como función de i, la tasa de interés, es estrictamente decreciente y continua en $(-1,\infty)$, ya que si $-1 < y < x$ entonces

$0 < 1 + y < 1 + x \Rightarrow 0 < (1 + x)^{-1} < (1 + y)^{-1} \Rightarrow (1 + x)^{-k} < (1 + y)^{-k}$ para $k = 1,2,....$

$$g(x) = (1 + x)^{-1} + (1 + x)^{-2} + ... + (1 + x)^{-n} < (1 + y)^{-1} + (1 + y)^{-2} + ... + (1 + y)^{-n} = g(y)$$

y se tiene que $g(x) < g(y)$, es decir, $g(i) = a_{\overline{n}|i}$ es decreciente.

además como $a_{\overline{n}|i}$ es suma de funciones continuas en $(-1,\infty)$, es continua en $(-1,\infty)$.

$g(0) = n$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ por lo que $g(x) = a_{\overline{n}|x}$ toma todos los valores entre cero y n.

y como es estrictamente decreciente, para cualquier valor $0<T<n$, la ecuación $T = a_{\overline{n}|}$ tiene una única solución positiva.

2.2 Aproximaciones Sucesivas.

Para calcular la tasa de Interés de la ecuación:

$$A = R a_{\overline{n}|}$$

se hace lo siguiente:

$$T = A/R = a_{\overline{n}|} = \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

por lo tanto:

$$i = \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{T}\right] \quad \text{con } T = A/R \qquad (12)$$

de aquí se sigue que la tasa de interés es el punto fijo de la función:

$$f(x)=\left[\frac{1-(1+x)^{-n}}{T}\right] \quad , x>0 \tag{13}$$

f(x) es estrictamente creciente.

además $0<T=a_{\overline{n}|}<n$ sí $i>0$,

$$f'(x)=\left[\frac{n(1+x)^{-n-1}}{T}\right]=\left[\frac{n}{T(1+x)^{n+1}}\right] \tag{14}$$

$f'(x)$ es estrictamente decreciente, y $f'(0)=n/T>1$.

Sea x_0 el punto fijo de f(x), entonces $f'(x_0)<1$, pues por el teorema del valor medio existe x_1 en $(0,x_0)$ tal que

$$f'(x_1)=\left[\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}\right]=\left[\frac{x_0-0}{x_0-0}\right]=1 \text{ , pero } x_1<x_0 \Rightarrow f'(x_0)<f'(x_1)=1.$$

y $f(x_1)=\int_0^{x_1} f'(x)dx > \int_0^{x_1} 1dx = x_1$, y como $g(x)=f(x)-x$ es continua, se tiene que $g(x)>0$ en

$(0,x_0)$, pues de lo contrario f(x) tendria mas de un punto fijo en $(0,\infty)$, y si $x_2>x_0$ se tiene

que $f(x_2)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x_2} f'(x)dx < f(x_0)+\int_{x_0}^{x_2} 1dx = x_0+x_2-x_0=x_2$, de aquí se tiene que:

$$f(0)=0 \tag{15}$$

$$f(x)>x \quad \text{si } x \text{ esta en } (0,x_0) \tag{16}$$

$$f(x_0)=x_0 \tag{17}$$

$$f(x)<x \quad \text{si } x \text{ está en } (x_0,\infty) \tag{18}$$

además $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{1-(1+x)^{-n}}{T} \right] = \frac{1}{T}$

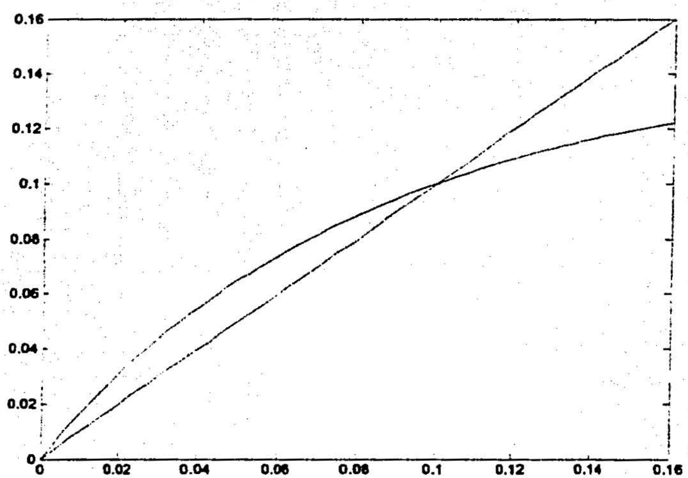


Figura 3.1 f(x) con n =12 y T = 6.18

2.3 Algoritmo para calcular el interés por medio de aproximaciones sucesivas

Primero se escoge cualquier $y_0>0$ y genere la sucesión $\{y_n\}$ recursivamente mediante la relación

$$y_{n+1} = f(y_n), \qquad n = 1,2,3,....$$

entonces $\lim_{x \to \infty} y_n = x_0$ donde x_0 es la única solución de $A = Ra_{\overline{n}|}$ si $0<A/R<n$

Nota. como la tasa de interés es positiva se tiene que $0 < a_{\overline{n|}} = A/R < n$.

Demostración:

2.3.1 Caso 1. $y_0 < x_0$

$f(y_n) < x_0$ para $n = 0,1,2,3,....$ (19)

ya que $f(y_0) < f(x_0) = x_0$ pues f es creciente, y x_0 es punto fijo de f, además si $y_{n+1} = f(y_k) < x_0$

entonces $f(y_{n+1}) < f(x_0) = x_0$.

Por (16) y (19), $\{y_n\}$ es una sucesión creciente y acotada, por lo tanto tiene límite:

$$\lim_{x\to\infty} y_n = z$$

y $z \leq x_0$ (ya que $y_n < x_0$, $n = 0,1,2,....$)

supongamos que $z < x_0$:

entonces $z < f(z)$, pero $f(z) = f(\lim_{x\to\infty} y_n) = \lim_{x\to\infty} f(y_n) = \lim_{x\to\infty} y_{n+1} = z$, ya que f es continua.

por lo tanto $z = x_0$.

2.3.2 Caso 2. $y_0 = x_0$

entonces $y_n = x_0$ para $n = 0,1,2,....$ ya que x_0 es punto fijo de f.

por lo tanto $\lim_{x\to\infty} f(y_n) = \lim_{x\to\infty} x_0 = x_0$.

2.3.3 Caso 3. $y_0 > x_0$

$f(y_n) > x_0$ para $n = 0,1,2,3,....$ (20)

ya que $f(y_0) > f(x_0) = x_0$ pues f es creciente, y x_0 es punto fijo de f, además si $y_{n+1} = f(y_k) > x_0$

entonces $f(y_{n+1}) > f(x_0) = x_0$.

Por (18) y (20), $\{y_n\}$ es una sucesión decreciente y acotada, por lo tanto tiene límite:

$\lim_{x\to\infty} y_n = u$

y $u \geq x_0$ (ya que $y_n > x_0$, $n = 0,1,2,\ldots$)

supongamos que $u > x_0$:

entonces $u > f(u)$, pero $f(u) = f(\lim_{x\to\infty} y_n) = \lim_{x\to\infty} f(y_n) = \lim_{x\to\infty} y_{n+1} = u$, ya que f es continua. por lo tanto $u = x_0$.

Nota.-El método de aproximaciones sucesivas sólo sirve para $a_{\overline{n|}}$ ya que como se vera a continuación este método no se puede aplicar para el caso de $S_{\overline{n|}}$

Supongamos que queremos utilizar el método de aproximaciones sucesivas para encontrar la tasa de interés de la ecuación:

$$S = R * S_{\overline{n|}} = R * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \tag{21}$$

"despejando" i

$$i = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(S/R)}\right]$$

como $S_n > n$ pues la tasa de interés es positiva, de (21) $S/R > n$.

$$f(x) = \left[\frac{(1+x)^n - 1}{(S/R)}\right]$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{n(1+x)^{n-1}}{(S/R)} \text{ , } f'(x) \text{ es estrictamente creciente.}$$

$$f'(0) = \frac{n}{(S/R)} = a < 1$$

como $f'(x)$ es continua, existe $0 < u < x_0$ tal que $f'(x) < (a+1)/2$ si $0 \leq x \leq u$

$$f(u) = \int_0^u f'(x)dx \leq \int_0^u \frac{a+1}{2}dx = u(a+1)/2 < u$$

por lo tanto $f(u) - u > 0$

aun más $f(x) - x > 0$ si $0 < x < x_0$ (22)

ya que si $0 < b < x_0$ y $f(b) - b \leq 0$, como $f(x) - x$ es una función continua, habría un número real t en (u,b] si u<b ó en [b,u) si b<u, tal que $f(t) - t = 0$, pero esto no puede ser pues x_0 es el único punto fijo positivo de $f(x)$.

$f'(x_0) > 1$ ya que si $f'(x_0) \leq 1$, entonces $f(x_0) = \int_0^{x_0} f'(s)ds < x_0$ lo cual no es posible.

Si $x_0 < x$ entonces

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(s)ds > f(x_0) + \int_{x_0}^{x} 1ds = x_0 + x - x_0 = x$$

$$f(x) > x \qquad \text{si} \quad x_0 < x \tag{23}$$

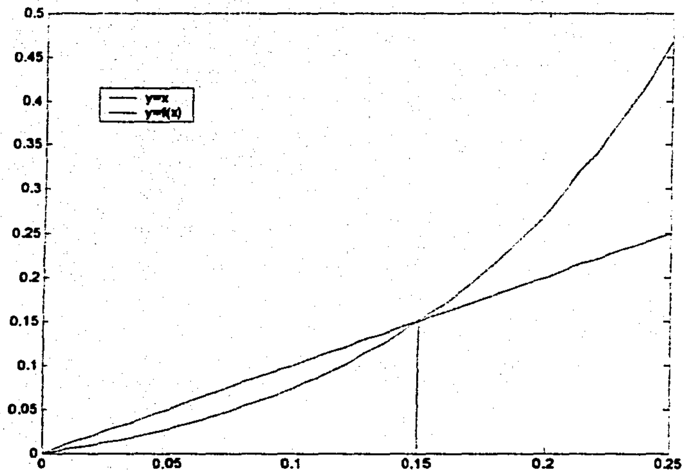


Figura 3.2 f(x) con n=12 y S/R=29

En la figura 3.2 se ve claramente que si $0< x < x_0=.15$ $f(x)$ esta debajo de la linea $y = x$, y si $x_0<x$ entonces $f(x)$ esta arriba de la recta.

La sucesión $\{y_n\}$ generada recursivamente mediante la relación

$$y_0 = c$$
$$y_{n+1} = f(y_n), \qquad n = 1,2,3,....$$

no converge a x_0, a menos que $c = x_0$, ya que si:

Caso1.- $0<c<x_0$

$y_{n+1}= f(y_n) < y_n = f(y_{n-1}) < y_{n-1} \dots <y_1= f(y_0) <y_0<x_0$

por lo que los términos de la sucesión cada vez se alejan mas de x_0.

Caso2.- $x_0<c$

$y_{n+1}= f(y_n) > y_n = f(y_{n-1}) > y_{n-1} \dots >y_1= f(y_0) >y_0>x_0$

por lo que los términos de la sucesión cada vez se alejan mas de x_0.

por lo tanto éste método no funciona para Sn.

2.4 Interpolación.

$T = a_{\overline{n}|i}$, $K = s_{\overline{n}|i}$

Este método se utiliza cuando se tienen dos estimaciones de la tasa de interés una de las cuales (i_1) es menor a la tasa buscada y por lo tanto $a_{\overline{n}|i_1} > T$, ($s_{\overline{n}|i_1} < K$) y la otra (i_2) es mayor y por lo tanto $a_{\overline{n}|i_2} < T$, ($s_{\overline{n}|i_2} < K$). Como la tasa buscada esta entre i_1 y i_2 sería lógico tomar el valor intermedio $(i_1+i_2)/2$, pero puede pasar que la tasa buscada este mucho más cerca de alguna de estas estimaciones, si la distancia entre i_1 y i_2 es pequeña se puede aproximar a $f(i) = a_{\overline{n}|i}$ ($f(i) = s_{\overline{n}|i}$) por una función lineal en el intervalo $[i_1,i_2]$, es decir, $a_{\overline{n}|i} \approx a+bi$ ($s_{n,i} \approx a+bi$).

a) En el caso de $a_{\overline{n}|i}$

Sea $T_1 = a_{\overline{n}|i_1}$, $T_2 = a_{\overline{n}|i_2}$ y $T = a_{\overline{n}|i}$

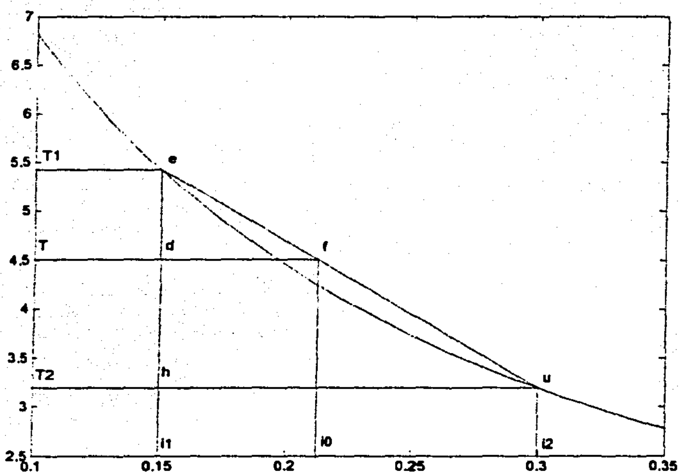


Figura 3.3 $a_{\overline{n}|x}$ con n=12 junto con la recta a+bx .

Para encontrar el valor aproximado i_0 para la tasa por medio de interpolación, observe que en la figura 3.3 los triángulos Δfde y Δuhe son semejantes pues tienen un ángulo común en e y ángulos rectos en d y h, por lo que se tiene la igualdad:

$$\frac{df}{hu} = \frac{ed}{eh}$$ es decir,

$$\frac{i_0 - i_1}{i_2 - i_1} = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_2} \tag{24}$$

despejando a i_0:

$$i_0 = i_1 + \frac{T_1 - T}{T_1 - T_2}(i_2 - i_1) \tag{25}$$

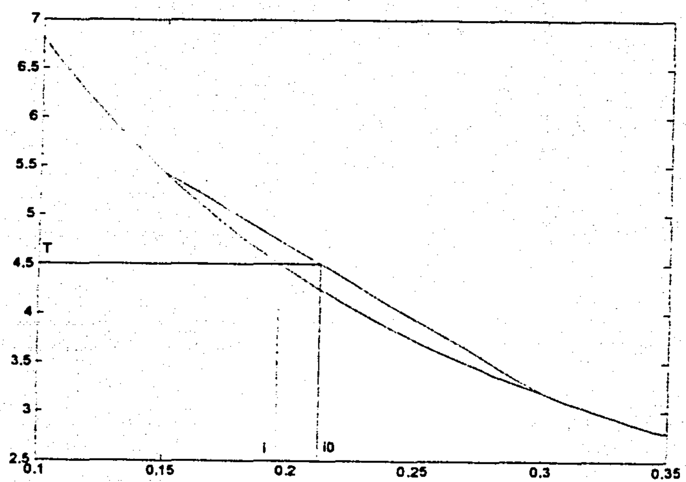


Figura 3.4

En la figura 3.4 se muestra a la i_0 obtenida por interpolación y la tasa de interés i.

b) En el caso de $S\overline{n|}i$

Sea $K_1 = S\overline{n|}i_1$ $K = S\overline{n|}i$ y $K_2 = S\overline{n|}i_2$

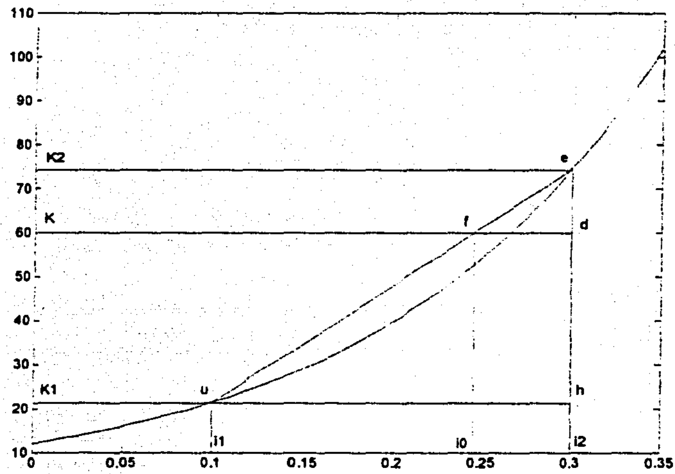


Figura 3.5 Gráfica de $S\overline{n|}x$ con n=12, y la recta a+bx

Para encontrar el valor aproximado i_0 para la tasa por medio de interpolación, observe que en la figura 3.5 los triángulos Δfed y Δueh son semejantes pues tienen un ángulo común en e y ángulos rectos en d y h, por lo que se tiene la igualdad:

$$\frac{df}{hu} = \frac{ed}{eh}$$ es decir,

$$\frac{i_0 - i_2}{i_1 - i_2} = \frac{K_2 - K}{K_2 - K_1} \qquad (26)$$

despejando a i_0:

$$i_0 = i_2 + \frac{K_2 - K}{K_2 - K_1}(i_1 - i_2) \qquad (27)$$

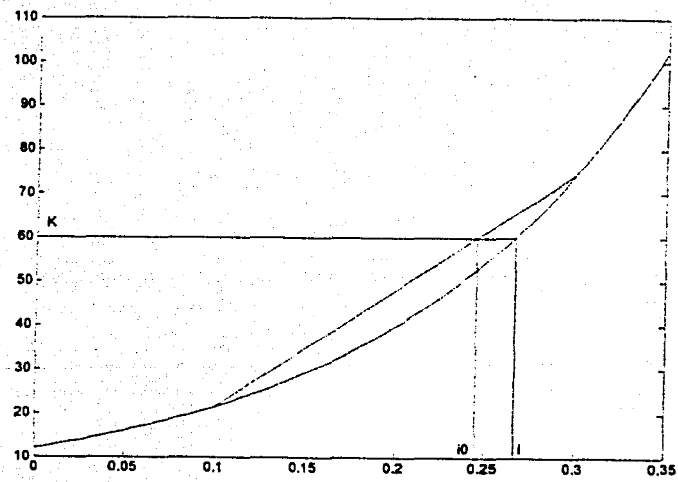


Figura 3.6

En la figura 3.6 se muestra a la i_0 obtenida por interpolación y la tasa de interés i.

2.5 Por desarrollo de $a_{\overline{n}|}$ ó $S_{\overline{n}|}$

Este método consiste en desarrollar en serie de potencias el inverso de $a_{\overline{n}|i}$ ó el de $S_{\overline{n}|i}$, según sea el caso, y truncar hasta el segundo término y de ahí despejar i.

a) Para $a_{\overline{n}|i} = T$

$$f(i) = a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n}$$

$$f(0) = n$$

$$f'(i) = -1(1+i)^{-2} + (-2)(1+i)^{-3} + \ldots + (-n)(1+i)^{-n-1}$$

$$f'(0) = -1 - 2 - 3 - \ldots - n = -(1+2+3+ \ldots + n) = -(n(n+1))/2$$

$$g(i) = [\ f(i)\ ]^{-1} = g(0) + g'(0)i/1! + \ldots.$$

$$T^{-1} = g(i) \approx g(0) + g'(0)i$$

$$g(0) = 1/n$$

$$g'(i) = \frac{-f'(i)}{f(i)^2}$$

$$g'(0) = \frac{-f'(0)}{f(0)^2} = \frac{(n(n+1))/2}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$T^{-1} \approx \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2n}(\,i\,)$$

$$T^{-1} - n^{-1} \approx \frac{n+1}{2n}(\,i\,)$$

$$i \approx (T^{-1} - n^{-1})2n/(n+1)$$

$$i \approx \frac{2(n/T-1)}{n+1}$$

$$i \approx \frac{2(n-T)}{T(n+1)} \qquad (28)$$

b) Para $S_{\overline{n}|i} = K$

$f(i) = S_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}$

$f(0) = S_{\overline{n}|0} = 1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^{n-1} = n$

$f'(i) = 1 + 2(1+i) + 3(1+i)^2 + \ldots + (n-1)(1+i)^{n-2}$

$f'(0) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = n(n-1)/2$

$g(i) = [\, f(i)\,]^{-1} = g(0) + g'(0)i/1! + \ldots$

$K^{-1} = g(i) \approx g(0) + g'(0)i$

$g(0) = 1/n$

$$g'(i) = \frac{-f'(i)}{f(i)^2}$$

$$g'(0) = \frac{-f'(0)}{f(0)^2} = \frac{-(n(n-1))/2}{n^2} = \frac{1-n}{2n}$$

$$K^{-1} \approx \frac{1}{n} + \frac{1-n}{2n}(\,i\,)$$

$$K^{-1} - \frac{1}{n} \approx \frac{1-n}{2n}(\,i\,)$$

$$i \approx \left[\frac{2n}{1-n}\right] \times \left[1/K - 1/n\right]$$

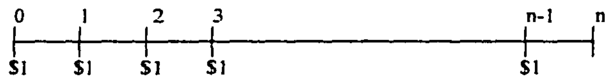
$$i \approx \left[\frac{2(n-K)}{K(1-n)}\right]$$

$$i \approx \left[\frac{2(K-n)}{K(n-1)}\right] \qquad (29)$$

2.6 Anualidades Anticipadas

Las anualidades anticipadas son aquellas que se empiezan a pagar al principio del periodo. Un ejemplo de este tipo de anualidades son las rentas que se pagan por un departamento .

Vamos a ver gráficamente una anualidad anticipada de $1 pagadera durante n periodos.



$\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ es el simbolo para el valor presente de una anualidad anticipada pagadera durante n periodos .

Tomando como fecha focal el cero , tenemos el valor presente de una anualidad anticipada

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + V + V^2 + \ldots + V^{n-1} \qquad (30)$$

Si multiplicamos por V la anualidad anticipada

$$V\ddot{a}_{\overline{n}|} = V\,(1 + V + V^2 + \ldots + V^{n-1})$$

$$v\ddot{a}_{\overline{n|}} = v + v^2 + \ldots + v^n$$

que es el valor presente de una anualidad vencida

$$v\ddot{a}_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}}$$

y

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}}/v = a_{\overline{n|}}(1+i) \qquad (31)$$

Esto nos da una relación entre el valor presente de una anualidad anticipada y el valor presente de una anualidad vencida.

También

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + a_{\overline{n-1|}} \qquad (32)$$

Es otra relación entre los dos tipos de anualidades.

La fórmula para el valor presente de una anualidad anticipada, se obtiene de la siguiente manera:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$$

que es una progresión geométrica

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1 - V^{n-1}V}{1 - V} = \frac{1 - V^n}{1 - V}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1 - V^n}{d} \qquad (33)$$

donde $d = 1 - V$ es la tasa de descuento.

Se denota como $\ddot{S}_{\overline{n}|}$ al monto anticipado y tomamos como fecha focal n

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^n \qquad (34)$$

y recordando el monto de una anualidad vencida

$$S_{\overline{n}|} = 1 - (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1}$$

Si multiplicamos el monto de una anualidad anticipada por V nos queda:

$$V\ddot{S}_{\overline{n}|} = V[(1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^n]$$

$$V\ddot{S}_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1}$$

nos queda

$$V\ddot{S}_{\overline{n}|} = S_{\overline{n}|} \qquad (35)$$

de esta relación podemos encontrar

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = S_{\overline{n}|}/V = S_{\overline{n}|}(1+i) \qquad (36)$$

y si a $\ddot{S}_{\overline{n}|}$ le sumamos y le restamos 1

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^n + 1 - 1$$

$\ddot{S}_{\overline{n}|} = S_{\overline{n+1}|} - 1$ (37)

Estas fueron algunas de las relaciones que existen entre el monto de una anualidad anticipada con el monto de una anualidad vencida.

Al sustituir $S_{\overline{n}|}$ de las ecuaciones (7) y (36) :

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)\, S_{\overline{n}|} = (1+i) \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{iV}\right] \qquad (38)$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{d}\right] \qquad (39)$$

donde d es la tasa de descuento.

En las anualidades anticipadas también se pueden presentar los mismos problemas que con las anualidades vencidas:

1) Encontrar A ó S

2) Calcular la Renta

3) Calcular el tiempo

4) Calcular la tasa de interés

1) Para calcular A ó S

$A = R\ddot{a}_{\overline{n|}}$

$S = R\ddot{S}_{\overline{n|}}$

2.7 Ejemplos

Ejemplo 1.- Calcular el monto de unos pagos de $100.- c/u a pagar en 8 años con una tasa de interés del 9% anual efectivo.

n = 8 años $\quad S = R\ddot{S}_{\overline{n|}}$

R = $100.- $\quad S = R(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$

i = .09 $\quad S = 100(1.09)\left[\frac{(1.09)^8 - 1}{.09}\right]$

S = $1202.10

Ejemplo 2.- Se tiene una deuda de $10,000.- y se desea liquidar mediante pagos anuales anticipados durante 5 años a una tasa del 7.5% anual.

A = 10,000 $\quad A = R\ddot{a}_{\overline{n|}}$

n = 5 años $\quad R = A / \ddot{a}_{\overline{n|}}$

$i = .075$ $R = A\left[\frac{iV}{1-V^n}\right]$ $R = 10{,}000\left[\frac{.075(1.075)^{-1}}{1-(1.075)^{-5}}\right]$

$R = 2{,}299.21$

Ejemplo 3.- Se deposita en un Banco $1,000.- mensuales en forma anticipada. Si el monto que se obtiene al final de n periodos es $35,960.58 y la tasa de interés es del 6% anual convertible mensualmente. Calcular n

$R = 1{,}000.-$ $S = 35{,}960.58$ $i^{(12)} = 0.06$

$i' = \frac{i^{(12)}}{12} = 0.005$ $n = ?$

$S = R\ \ddot{S}_{\overline{n|}}$ $S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{iV}\right]$ $S\left[\frac{iV}{R}\right] + 1 = (1+i)^n$

$\log\left[\frac{SiV}{R}+1\right] = n\log(1+i)$ $n = \frac{\log\left[\frac{SiV}{R}+1\right]}{\log(1+i)}$

$$n = \frac{\log\left[\frac{(35{,}960.58)(0.005)(1.005)^{-1}}{1000} + 1\right]}{\log(1.005)}$$

$$n = \frac{0.16458889}{0.004987542} \qquad n = 33 \text{ meses.}$$

Ejemplo 4.- Una persona paga trimestralmente $2,500.- en forma anticipada durante 2 años por una deuda de $12,000.- ¿ Cuál fué la tasa de interés que le cobraron ?

A = 12,000.- R = 2,500.- n = 2 años m = 4 nm = 2*4 = 8

$A = R\,\ddot{a}_{\overline{n|}}$ recordemos que $\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + a_{\overline{n-1|}}$

$A = R(1 + a_{\overline{n-1|}})$

$A/R - 1 = a_{\overline{n-1|}}$ de aquí se puede encontrar el interés con los métodos vistos anteriormente

$a_{\overline{7|}} = 12000/2500 - 1$ $a_{\overline{7|}} = 3.8$

si consideramos una tasa del 18%

$a_{\overline{7}|0.18} = 3.81$

$a_{\overline{7}|i} = 3.8$

$a_{\overline{7}|0.185} = 3.75$

Se puede aproximar la tasa usando interpolación

$$i_0 = i_1 + \frac{T_1 - T}{T_1 - T_2}(i_2 - i_1)$$

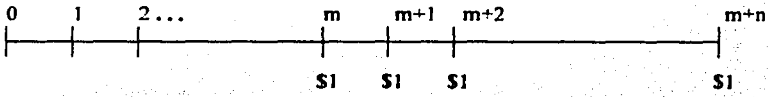
$$i_0 = 0.18 + \frac{3.81 - 3.8}{3.81 - 3.75}(0.185 - 0.18)$$

$$i_0 = 0.18 + \frac{0.01}{0.06}(0.005)$$

$$i_0 = 0.1808$$

2.8 Anualidades Diferidas

Una anualidad diferida es una anualidad en donde el primer pago se efectúa después de un cierto numero de años.



Calculemos el valor presente de todos los pagos y lo denotamos en la siguiente forma

$$m/a_{\overline{n}|} = V^{m+1} + V^{m+2} + \ldots + V^{m+n} \qquad (40)$$

$$m/a_{\overline{n}|} = V^{m} (V + V^{2} + \ldots + V^{n}) \qquad (41)$$

$$m/a_{\overline{n}|} = V^{m}\ a_{\overline{n}|} \qquad (42)$$

También podemos encontrar la fórmula de $m/a_{\overline{n}|}$ de la siguiente manera:

$$a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|} = m/a_{\overline{n}|} \qquad (43)$$

Demostración

$$a_{\overline{m+n}|} = V + V^2 + \dots + V^m + V^{m+1} + V^{m+2} + \dots + V^{m+n}$$

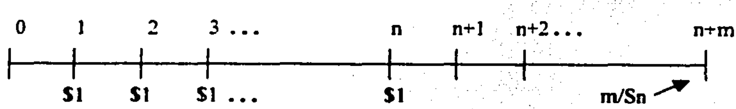
$$a_{\overline{m}|} = V + V^2 + \dots + V^m$$

al restar

$$a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|} = V^{m+1} + V^{m+2} + \dots + V^{m+n}$$

que es $m/a_{\overline{n}|}$.

Para el monto de una anualidad diferida



$$m/S_{\overline{n}|} = (1+i)^m + (1+i)^{m+1} + \dots + (1+i)^{m+n-1}$$

$$m/S_{\overline{n}|} = (1+i)^m \; [\, 1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{n-1}]$$

$$m/S_{\overline{n}|} = (1+i)^m \; S_{\overline{n}|} \qquad (44)$$

ya que $S_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{n-1}$

También podemos calcular el monto diferido en la siguiente forma:

$$m/S_{\overline{n}|} = S_{\overline{n+m}|} - S_{\overline{m}|} \qquad (45)$$

Demostración

$$S_{\overline{n+m}|} = 1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{m-1} + (1+i)^{m} + \dots + (1+i)^{m+n-1}$$

$$S_{\overline{m}|} = 1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{m-1}$$

$$S_{\overline{n+m}|} - S_{\overline{m}|} = (1+i)^{m} + \dots + (1+i)^{m+n-1}$$

que es igual a $m/S_{\overline{n}|}$.

2.9 Ejemplos

Ejemplo 1.- Una empresa va a recibir pagos de $1,000.- a partir del 5° año durante 10 años ¿Cuál es el valor presente de estos pagos, si la tasa de interés es del 6.5%?

R = 1,000.- m = 4 n = 10

$$A = R\,(m/a_{\overline{n}|}) = R\,V^{m}\,a_{\overline{n}|}$$

$$A = 1000(1.065)^{-4}\left[\frac{1-(1.065)^{-10}}{0.065}\right]$$

A = 5,588.044

Ejemplo 2.- Una persona deposita $2,000.- cada mes durante 2 años . ¿Cuánto habrá acumulado en 4 años, si la tasa de interés es del 6% anual?

R = 2,000 mensuales n = 2 años = 24 meses

m = 2 años = 24 meses m es el diferimiento

i = .06 (tasa anual)

por la triple igualdad

$(1+i^{(m)}/m) = (1+i)$

$i^{(m)}/m = (1+i)^{1/m} - 1$

$i^{(12)}/12 = (1.06)^{1/12} - 1$

$i^{(12)}/12 = 0.00486755$ que es la tasa efectiva por mes

i = 0.00486755 (tasa mensual)

$S = R\ 24/S_{\overline{24}|} = R\ (1+i)^{24}\ S_{\overline{24}|}$

$$S = R\ (1+i)^{24} \left[\frac{(1+i)^{24} - 1}{i} \right]$$

$$S = 2000(1.00486755)^{24} \left[\frac{(1.00486755)^{24} - 1}{.00486755} \right]$$

S = 57,062.366

2.10 Perpetuidades

Existen operaciones en las que se estipula efectuar pagos en forma indefinida, formando así un tipo especial de anualidades conocidas como perpetuidades y se denota por a_∞.
Ejemplos de perpetuidades son la renta de un departamento, el mantenimiento de una Presa, etc.

por lo tanto

$$a_\infty = V + V^2 + V^3 + \ldots$$

$$a_\infty = \sum_{1}^{\infty} V^j$$

$$a_\infty = \lim_{k\to\infty} (V + V^2 + \ldots + V^k)$$

$$a_\infty = \lim_{k\to\infty} a_n$$

$$a_\infty = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1-V^k}{i}\right)$$

como $0 < V < 1$ $\quad \lim_{k\to\infty} V^k = 0$

$$a_\infty = \frac{1}{i} \tag{46}$$

sí la renta no es unitaria

$$A = \frac{R}{i}$$

Ejemplo 1.- Un edificio proporciona rentas anuales de $288,000.- si el interés es del 7%. ¿En cuánto podría venderse el edificio?

Ra = 288,000.-

i = 0.07

A = ?

$$A = \frac{Ra}{i} = \frac{288000}{0.07} = \$4,114,285.71$$

CAPITULO 3

ANUALIDADES CRECIENTES Y DECRECIENTES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA

En ocasiones los pagos de una anualidad no son iguales ya sea que crezcan (lo que es más común) o disminuyan.

Anualidades Crecientes y Decrecientes en progresión aritmética

Las anualidades crecientes (decrecientes) en progresión aritmética son anualidades crecientes (decrecientes) en las que la diferencia de un pago y el anterior es una constante Q.

Vamos a ver el valor presente de esta anualidad denotado por X.

$$X = PV + (P+Q)V^2 + (P+2Q)V^3 + \ldots + (P+(n-2)Q)V^{n-1} + (P+(n-1)Q)V^n$$

Si multiplicamos por (1+i) los dos miembros de la ecuación se tiene:

$$(1+i)X = P + (P+Q)V + (P+2Q)V^2 + \ldots + (P+(n-2)Q)V^{n-2} + (P+(n-1)Q)V^{n-1}$$

restando las dos ecuaciones anteriores:

$$(1+i)X - X = P + QV + QV^2 + \ldots + QV^{n-1} - (P+(n-1)Q)V^n$$

$$iX = P + QV + QV^2 + \ldots + QV^{n-1} - PV^n - nQV^n + QV^n$$

$$iX = P - PV^n + QV + QV^2 + \ldots + QV^{n-1} + QV^n - nQV^n$$

$$iX = P(1 - V^n) + Q\,a_n - nQV^n$$

$$X = P\left(\frac{1-V^n}{i}\right) + Q\left(\frac{a_{\overline{n}|} - nV^n}{i}\right)$$

$$X = P\,a_{\overline{n}|} + Q\left(\frac{a_{\overline{n}|} - nV^n}{i}\right) \qquad (1)$$

al valor presente de una anualidad en donde $P = 1$ y $Q = 1$ se le denota como $(Ia)n$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + \left(\frac{a_{\overline{n}|} - nV^n}{i}\right)$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{1-V^n}{i} + \frac{a_{\overline{n}|} - nV^n}{i}$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{1-V^n + a_{\overline{n}|} - nV^n}{i}$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nV^n}{i} \qquad (2)$$

y al valor presente de una anualidad en donde $P = n$ y $Q = -1$ se le denota por $(Da)_{\overline{n}|}$

$$(Da)_{\overline{n|}} = n * a_{\overline{n|}} - \left(\frac{a_{\overline{n|}} - nV^n}{i} \right)$$

$$(Da)_{\overline{n|}} = n\left(\frac{1 - V^n}{i} \right) - \left(\frac{a_{\overline{n|}} - nV^n}{i} \right)$$

$$(Da)_{\overline{n|}} = \left(\frac{n - nV^n - a_{\overline{n|}} + nV^n}{i} \right)$$

$$(Da)_{\overline{n|}} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{i} \qquad (3)$$

Para calcular el monto (Y) de las anualidades crecientes (decrecientes) en progresión aritmética, se puede hacer un desarrollo análogo al que se hizo para encontrar el valor presente o se puede usar la ecuación del valor presente ya obtenida y multiplicarla por $(1+i)^n$.

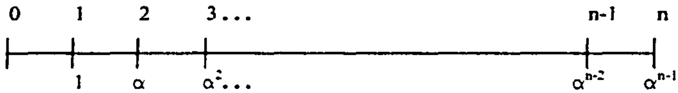
$$Y = X(1+i)^n$$

$$Y = \left[P\, a_{\overline{n|}} + Q\left(\frac{a_{\overline{n|}} - nV^n}{i} \right) \right](1+i)^n$$

$$Y = P * S_{\overline{n|}} + Q \left(\frac{S_{\overline{n|}} - n}{i} \right) \qquad (4)$$

Anualidades Crecientes y Decrecientes en progresión geométrica

Las anualidades crecientes (decrecientes) en progresión geométrica son anualidades crecientes (decrecientes) en las que el cociente de un pago y el anterior es una constante α.



El valor presente de esta anualidad es:

$$X = V + \alpha V^2 + \alpha^2 V^3 + \ldots + \alpha^{n-2} V^{n-1} + \alpha^{n-1} V^n$$

$$X = V(1 + \alpha V + \alpha^2 V^2 + \ldots + \alpha^{n-2} V^{n-2} + \alpha^{n-1} V^{n-1})$$

$$X = V(1 + \alpha V + (\alpha V)^2 + \ldots + (\alpha V)^{n-2} + (\alpha V)^{n-1})$$

$$X = V\left(\frac{1-(\alpha V)^n}{1-\alpha V}\right) \qquad (5)$$

si $\alpha = 1 + r$

$$X = V\left(\frac{1-(1+r)^n V^n}{1-(1+r)/(1+i)}\right)$$

$$X = V\left(\frac{1-(1+r)^n V^n}{1-(1+r)/(1+i)}\right)$$

$$X = \left(\frac{1-(1+r)^n V^n}{(1+i)-(1+r)} \right)$$

$$X = \left(\frac{1-(1+r)^n V^n}{i-r} \right) \quad (6)$$

El monto de una anualidad creciente ó decreciente en progresión geométrica es:

$$M = X(1+i)^n = \left(\frac{1-(1+r)^n V^n}{i-r} \right)(1+i)^n$$

$$M = \left(\frac{(1+i)-(1+r)^n}{i-r} \right) \quad (7)$$

Ejemplo 1.- Una persona ahorra en el banco $1,000.- en el 1er mes, $1,500.- en el 2°, $2,000 en el 3er, etc, así durante 2 años ¿Cuánto tendrá al final de los dos años si la tasa de interés es del 6% anual convertible mensualmente?

En este caso los pagos crecen a una razón de $500.

utilizando la ecuación (4)

$$Y = P * S_{\overline{n|}} + Q \left(\frac{S_{\overline{n|}} - n}{i} \right)$$

donde $P = 1000$ $n = 2(12) = 24$ $i = .06/12 = 0.005$

$$S_{24} = \left(\frac{(1.005)^{24} - 1}{0.005} \right)$$

$S_{24} = 25.4320$

$$Y = 500 * S_{\overline{24}|} + 1000\left(\frac{S_{\overline{24}|} - 24}{0.005}\right)$$

$$Y = 500(25.432) + 1000\left(\frac{25.432 - 24}{0.005}\right)$$

$$Y = 12716 + 286400$$

$$Y = 299,116$$

Ejemplo 2.- El Señor Martínez obtiene un préstamo y se compromete a pagar \$1000 un semestre, \$2000 en el siguiente, y así durante 5 años ¿Cuánto le prestaron si la tasa de interés fue del 18% anual?

$P = 1000$ $\quad$ $Q = 1000$ $\quad$ $n = 5$ años $= 10$ semestres

$i = 0.18$ (anual) $\quad$ $i^{(2)}/2 = ?$ (semestral)

Primero cambiaremos las tasa de interés anual por una equivalente semestral

$$(1 + i^{(2)}/2)^2 = (1 + i)$$

$$i^{(2)}/2 = (1+i)^{1/2} - 1$$

$$i^{(2)}/2 = (1.18)^{1/2} - 1$$

$$i^{(2)}/2 = 0.0863$$

Usando la ecuación (1)

$$X = P\,a_{\overline{n}|} + Q\left(\frac{a_{\overline{n}|} - nV^n}{i}\right)$$

$$a_{\overline{10}|} = \left(\frac{1-(1.0863)^{-10}}{0.0863}\right)$$

$$a_{\overline{10}|} = 6.5235$$

$$X = 1000(6.5235) + 1000\left(\frac{6.5235 - 10V^{10}}{0.0863}\right)$$

$$X = 6523.5 + 1000\left(\frac{6.5235 - 10(1.0863)^{-10}}{0.0863}\right)$$

$$X = 6523.5 + 1000(24.9513)$$

$$X = 31{,}474.80$$

Ejemplo 3.- Calcular el valor presente de una anualidad que consiste en 30 pagos anuales en donde el k-ésimo pago es de k^2 pesos, si la tasa de interés es del 5% anual.

$$X = V + 2^2V^2 + 3^2V^3 + \ldots + 29^2V^{29} + 30^2V^{30}$$

$$X = \sum_{k=1}^{29} k^2 V^k + 30^2V^{30}$$

$$X(1+i) = 1 + 2^2V + 3^2V^2 + \ldots + 29^2V^{28} - 30^2V^{29}$$

$$X(1+i) = 1 + \sum_{k=1}^{29} (k+1)^2 V^k$$

Si restamos

$$X(1+i) - X = 1 + \sum_{k=1}^{29} (k+1)^2 V^k - \sum_{k=1}^{29} k^2 V^k - 30^2V^{30}$$

$$X(1+i) - X = 1 + \sum_{k=1}^{29} [(k+1)^2 - k^2] V^k - 30^2V^{30}$$

$$Xi = 1 + \sum_{k=1}^{29} [k^2 + 2k + 1 - k^2] V^k - 30^2V^{30}$$

$$Xi = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{29} [2k+1] V^k} - 30^2V^{30}$$

es una anualidad creciente en progresión aritmética
(con P = 3 , Q = 2 y n =29)

$$Xi = 1 + P\, a_{\overline{n|}} + Q \left(\frac{a_{\overline{n|}} - nV^n}{i} \right) - 30^2V^{30}$$

$$a_{\overline{29}|} = \frac{1-(1.05)^{-29}}{0.05}$$

$$a_{\overline{29}|} = 15.141$$

$$X(0.05) = 1 + 3(15.141) + 2\left(\frac{15.141 - 29(1.05)^{-29}}{0.05}\right) - 30^{2}(1.05)^{-30}$$

$$X(0.05) = 1 + 45.423 + 323.822 + 208.240$$

$$X = \frac{578.485}{0.05}$$

$$X = 11{,}569.70$$

Ejemplo 4.- Calcular el valor presente de una anualidad creciente en progresión geométrica cuyos pagos anuales son: el primero de $300 el segundo de $306, el tercero de $312.12, así hasta completar 10 pagos con una tasa de interés del 6%.

usando la ecuación (5)

$$X = V\left(\frac{1-(\alpha V)^{n}}{1-\alpha V}\right)300$$

para calcular α dividimos el segundo pago entre el primero.

$$\alpha = \frac{306}{300} = 1.02$$

$$V = (1.06)^{-1} = 0.9434$$

$$X = 0.9434\left(\frac{1-[(1.02)(0.9434)]^{10}}{1-(1.02)(0.9434)}\right)300$$

$$X = 2394.95$$

CONCLUSIONES

Como se vió en el presente trabajo el desarrollo matemático de la tasa de interés aclara los conceptos y proporciona una visión más completa de las matemáticas financieras y facilita una mejor comprensión.

Se demostró la triple igualdad donde se ven las tasas efectivas, nominales y la tasa instantánea de interés, con la triple igualdad podemos calcular cualquiera de las tasas mencionadas.

En la quintuple igualdad se relacionan las tasas efectivas, nominales instantáneas de interés, con las tasas efectivas, nominales e instantáneas de descuento. Se demostró que la tasa instantánea de interés es igual que la tasa instantánea de descuento.

También se analizó la ecuación de valor que es uno de los conceptos más importantes en las Matemáticas Financieras, ya que casi cualquier problema de Matemáticas Financieras se resuelve planteando una ecuación de valor.

Para calcular la tasa de interés se presentaron algunas de las formas más importantes presentando por ejemplo la interpolación en su forma gráfica para hacer mas claro este concepto.

Otro punto importante, fué analizar el algoritmo para calcular la tasa de interés por medio de aproximaciones sucesivas, demostrándose que sólo es aplicable al valor presente, pero no así para el monto.

Se vieron las anualidades, su clasificación ,la principal clasificación que es la de anualidades ciertas y contingentes. Para nuestro estudio sólo se vieron las anualidades ciertas.

Dentro de las anualidades ciertas se vieron vencidas, anticipadas, diferidas perpetuidades, crecientes y decrecientes en progresión aritmética y geométrica.

Por último se proporcionaron algunos ejemplos prácticos para ilustrar la teoría.

BIBLIOGRAFIA

Ayres Frank; Matemáticas Financieras;Shaums.

Benjamin de la Cueva G.; Matemáticas Financieras, Porrúa.

D.W.A.Donald; Compound Interest and Annuities-Certain, Cambridge.

Jorge Salas Torá; Teoria del Interés y Aplicaciones Financieras.

Justine H. Moore; Manual de Matemáticas Financieras,UTEHA.

Michael Spivak; Cálculo Infinitesimal,REPLA.

Stephen G. Kellison; The Theory of Interest, FRWIN.

Shoichiro Nakamura; Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab,Prentice-Hall.