

00324
29



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Orientaciones en gráficas y núcleos

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C A
P R E S E N T A :
ZAIRA ERENDIRA ROJASGARCIA



DIRECTORA DE TESIS: MAT. LAURA PASTRANA RAMIREZ



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN

DISCONTINUA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
Orientaciones en gráficas y núcleos.

realizado por Zaira Eréndira Rojas García.

con número de cuenta 9523900-4 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Mat. Laura Pastrana Ramírez.

Laura Pastrana R.

Propietario Dra. Hortensia Galeana Sánchez.

H. Galeana

Propietario Dr. Zeferino Parada García.

Z. Parada G.

Suplente Mat. Juana Martínez Martínez.

~~_____~~

Suplente Mat. Clara Elena Vidrio Amor.

Clara E. Vidrio A.

Consejo Departamental de Matemáticas.



M. en C. José Antonio Gómez Ortega.

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE
DE
MATEMATICAS

B

A mis padres:

Jesús y María.

*Por caminar siempre conmigo,
especialmente en los momentos
más difíciles y por ser la luz que
iluminan mi voluntad y perseverancia
en mi vida.*

A mi Director de tesis:

Mat. Laura Pastrana Ramírez.

*Por el empeño que realizó para
la terminación de este trabajo*

*Con respeto y gratitud a quienes
culminaron a mi meta profesional:*

Dra. Hortensia Galeana Sánchez

Dr. Zeférino Parada García

Mat. Juana Martínez Martínez

Mat. Clara Elene Vidrio Amor

Índice general

Introducción	I
Resultados elementales	V
0.1. Definiciones Básicas	V
0.2. Núcleos	XIII
1. Gráficas de Paridad	1
2. Orientaciones en gráficas de líneas	39
3. Operaciones	75
3.1. Suma	78
3.2. Duplicación	85
A. Conjetura de Meyniel	101
Conclusiones	121
Bibliografía	123

Introducción

El trabajo que se desarrolla en esta tesis, (cuyo título es “ **Orientaciones en gráficas y núcleos**”), consta de algunos resultados relacionados con orientaciones en ciertas clases de gráficas de modo que impliquen la existencia de núcleo.

El concepto de núcleo de una digráfica fué introducido por John Von Neumann y Morgenstern (1944), en el libro, “ *Theory of Games and Economic Behavior* ” [14], donde introducen dicho concepto en la teoría de juegos como solución. Unas de las áreas en las que se aplica dicho concepto son física, ingeniería, química y genética. Algunas aplicaciones se verán en la sección **Resultados elementales**.

Entre los trabajos realizados sobre la existencia de núcleo, podemos citar a los investigadores franceses C. Berge, P. Duchet, H. Meyniel y F. Mafray y mexicanos V. Neumann-Lara y Hortensia Galeana Sánchez, el propósito de sus investigaciones es encontrar las propiedades estructurales de las digráficas conocidas como núcleo perfectas, es decir, aquellas en las que todas sus subdigráficas inducidas (incluida la misma digráfica) tienen núcleo. Del trabajo realizado por Von Neumann y Morgenstern se obtuvo el primer resultado importante de la Teoría de Núcleos: Toda digráfica sin ciclos dirigidos es núcleo perfecta y su núcleo es único [18]. Sabemos que las digráficas sin ciclos dirigidos de longitud impar tienen núcleo, dicho resultado fué probado por Richardson en 1953 [1], por lo que podemos hacernos esta pregunta ¿Las digráficas con ciclos dirigidos de longitud impar tienen núcleo?, no necesariamente.

Duchet generalizó la existencia de núcleos en digráficas con ciclos dirigidos de longitud impar, la cual dice: “**Si cada ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos dos cuerdas simétricas, entonces la digráfica es núcleo perfecta**”, otras condiciones para dichos ciclos dirigidos son:

- (Duchet, Meyniel [8]) Si cada ciclo dirigido de longitud impar tiene dos cuerdas cruzadas, entonces la digráfica es núcleo perfecta.
- (Neumann-Lara, Galeana-Sánchez [8]) Si cada ciclo dirigido impar tiene dos polos consecutivos, entonces la digráfica es núcleo perfecta.

En 1976 H. Meyniel conjeturó: "Sea D una digráfica. Si todo ciclo dirigido de longitud impar de D tiene dos cuerdas, entonces D es una digráfica con núcleo". Para las digráficas en general, la condición de que cada ciclo dirigido de longitud impar tiene dos cuerdas no es suficiente para que posean núcleo, el contraejemplo lo mostró Galeana-Sánchez [11], el cual lo analizaremos en el apéndice A.

En el concepto de núcleo y digráficas núcleo perfecta, la orientación de una gráfica juega un papel muy importante. A una gráfica G le podemos asociar de manera natural una digráfica D obtenida a partir de G , orientando cada arista de G en al menos una de las direcciones, una digráfica obtenida así la vamos a llamar una orientación de G , entre las orientaciones que se van a tratar a lo largo de este trabajo están las orientaciones admisibles, llamadas también normales, las M -admisibles o M -orientaciones. Si cada orientación admisible (respectivamente M -admisible) de una gráfica tiene núcleo, entonces reciben el nombre de gráficas solubles (respectivamente M -solubles); las gráficas solubles suelen llamarlas núcleo solubles y las gráficas M -solubles, núcleo- M -solubles.

La importancia de la solubilidad, la podemos ilustrar con la conjetura de Berge y Duchet, la cual hace un enlace entre núcleo y gráficas perfectas. Una gráfica G es perfecta si el número cromático de cada subdigráfica H de G es igual al número de clan de H , entre ellas están las gráficas completas y bipartitas. La conjetura de Berge y Duchet se puede establecer como sigue:

Conjetura No. 0.1. [9] *Una gráfica es perfecta, si y sólo si, es soluble.*

Una parte de la conjetura la demostraron Boros y Gurvich ([9]), usando teoría de juegos, a continuación lo mencionamos: **Toda gráfica perfecta es soluble.**

El resultado relacionado con gráficas perfectas, M -solubles y núcleo es más débil que la conjetura (0.1), el cual se enuncia en la siguiente conjetura:

Conjetura No. 0.2. [5] *Toda gráfica perfecta es M -soluble.*

El objetivo de este trabajo es orientar las gráficas de paridad, de líneas, y algunas operaciones, como es la duplicación de un vértice y la suma de gráficas, tal que cumplan ciertas condiciones los ciclos de longitud impar, de modo que impliquen la existencia de núcleo.

En el capítulo 1, se estudian las orientaciones M -admisibles de una gráfica de paridad y la estructura que deben de tener los ciclos dirigidos de longitud impar en dichas orientaciones, es decir, " **si orientamos a una gráfica de paridad, de tal manera que cada ciclo dirigido de longitud tres tenga dos flechas simétricas, entonces se afirma que cada ciclo de longitud impar tiene dos polos consecutivos o dos cuerdas cruzadas triangulares** ", al final del capítulo se prueba la conjetura de Meyniel (0.2), para las gráficas de paridad, se concluirá que las gráficas de paridad son M -solubles.

En el capítulo 2, vamos a demostrar la relación que guardan las gráficas de líneas, las orientaciones admisibles, los ciclos dirigidos de longitud impar y el concepto de digráfica núcleo perfecta, dicha relación la anunciamos a continuación, **“Sea H una gráfica y $L(H)$ su gráfica de líneas. Una orientación D de $L(H)$ es núcleo perfecta, si sólo si, D es una orientación admisible y todo ciclo dirigido de longitud impar tiene una cuerda”**[14].

Y finalmente en el capítulo 3, consideramos algunas operaciones de gráficas con respecto a las orientaciones admisibles y M-admisibles, una de ellas es la suma, se demostrarán dos resultados de dicha operación, el primero **“ la suma de dos gráficas M-solubles es M-soluble ”** y el segundo **“ si la suma de dos gráficas subyacentes de digráficas núcleo perfectas, le damos una orientación M-admisibles, entonces la suma es núcleo perfecta ”**. Otra operación es la duplicación de un vértice en una gráfica, la cual puede ser no adyacente o adyacente el teorema que vamos a plantear con respecto a la duplicación no adyacente es: **“ La duplicación no adyacente de una gráfica soluble es soluble ”**, el cual fue probado por E. Boros y V. Gurvich [8], usando teoría de juegos. Y el resultado relacionado con duplicación adyacente es más débil, el cual anunciamos en el siguiente teorema: **“ si la duplicación adyacente de una gráfica soluble, le damos la orientación admisible, entonces dicha digráfica tiene núcleo ”**.

Resultados elementales

En esta sección definimos los conceptos de teoría de las gráficas y teoría de núcleos que vamos a utilizar en este trabajo.

0.1. Definiciones Básicas

Definición No. 0.1. Una gráfica G consta de un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices o puntos, el cual se denota por $V(G)$, junto con un conjunto de pares no ordenados de distintos elementos de G llamados aristas, el cual se denota por $A(G)$.

Si u y v son vértices de una gráfica G y $a = (u, v) \in A(G)$ diremos que u y v son extremos de a y que u y v son adyacentes. Dos aristas son adyacentes si tienen un extremo en común. Una arista incide en un vértice u , si u es uno de sus extremos.

Definición No. 0.2. El grado de un vértice x en G , es el número de aristas que inciden en x , es decir, el número de vértices adyacentes a x , el cual se denota por $\delta_G(x)$,

Los vecinos de un vértice x de G es el conjunto $\mathcal{N}(x) = \{u \in V(G) \mid (x, u) \in A(G)\}$

Definición No. 0.3. Un camino $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, es una sucesión de vértices tal que x_i es adyacente a $x_{i+1} \forall 0 \leq i \leq n-1$.

Si el camino empieza en u y termina en v , lo llamamos un uv -camino.

Definición No. 0.4. Un paseo P es un camino en el que no se repiten aristas.

Definición No. 0.5. Una trayectoria T es un camino en el que no se repiten vértices.

Notemos que una trayectoria es un paseo, pero un paseo no es necesariamente una trayectoria, ver figura 1.

Definición No. 0.6. Un camino cerrado es un camino que empieza y termina en el mismo vértice.

Definición No. 0.7. La longitud de un camino C , la denotamos por $\ell(C)$, es el número de aristas que contiene.

Si C tiene n vértices, entonces $\ell(C)$ es $n - 1$.

Definición No. 0.8. Un ciclo C es un camino cerrado de longitud ≥ 3 tal que no repite vértices, sólo el primero y el último que son iguales.

Definición No. 0.9. Sea $C = (x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_1)$ un ciclo de G , llamamos una cuerda e de C a la arista $e = (x_i, x_m)$ en G , donde $\{x_i, x_m\} \in V(C)$ y $x_i \neq x_m$.

Una cuerda $e = (x_i, x_m)$ de C , determina dos ciclos teniendo a e como arista, los cuales son:

- $(x_i, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{i-1}, x_i)$
- $(x_m, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{m-1}, x_m)$

Cuando C es impar, exactamente uno de estos dos ciclos es impar y lo denotamos por C_e .

Definición No. 0.10. Sea C un ciclo de G una cuerda e de C se llama triangular, si el ciclo inducido por e , C_e es de longitud tres en G .

Definición No. 0.11. Sea C un ciclo en G , dos cuerdas (x, y) y (z, t) en C son cruzadas en C si sólo si los vértices $\{x, z, y, t\}$ están en ese orden en el ciclo C en G .

Definición No. 0.12. Una gráfica H es una subgráfica de G si se cumple que: $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Definición No. 0.13. Una gráfica H es una subgráfica inducida de G , si $V(H) \subseteq V(G)$ y $(u, v) \in A(H)$ si y sólo si $(u, v) \in A(G)$.

Definición No. 0.14. Una gráfica G es conexa si para todo $\{u, v\} \subseteq V(G)$ existe un uv -camino.

Definición No. 0.15. Las componentes conexas de una gráfica G son las subgráficas de G máximas con la propiedad de ser conexas, donde $w(G)$ denota el número de componentes conexas de G .

Definición No. 0.16. Si en una gráfica G todo par de vértices es adyacente, entonces decimos que G es completa, la cual la denotamos por K_p , donde p es el número de vértices de G .

Definición No. 0.17. Un clan de G es una subgráfica completa de G .

Definición No. 0.18. Una gráfica G es bipartita si existe una bipartición V_1, V_2 de $V(G)$ tal que toda arista de G tiene un extremo en V_1 y otro en V_2 .

Definición No. 0.19. A cada gráfica G le podemos asociar una nueva gráfica, llamada gráfica de líneas, denotada por $L(G)$, tal que:

- $V(L(G)) = A(G)$
- u es adyacente a v en $L(G)$, si sólo si, u es adyacente a v en G como arista.

Algunos ejemplos de los conceptos anteriores los podemos encontrar en la figura 1

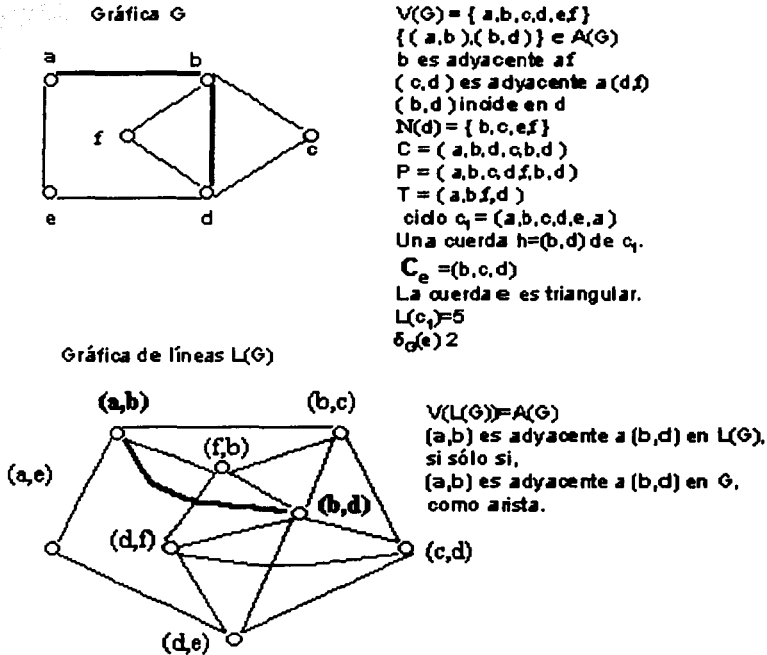


Figura 1:

Definición No. 0.20. Una digráfica D consiste en un conjunto finito, no vacío, de objetos llamados *vértices*, denotados por $V(D)$, junto con una colección de pares ordenados de distintos elementos de $V(D)$, llamados *flechas (aristas dirigidas)*, denotados por $F(D)$.

Si $f = (u, v) \in F(D)$, entonces se dice que u es adyacente a v ó f incide en v .

Definición No. 0.21. El *ingrado* (grado interior) de un vértice v en D , denotado por $\delta_D^-(v)$, es el número de vértices adyacentes hacia v , es decir, el número de flechas que llegan a v .

Definición No. 0.22. El *exgrado* (grado exterior) de un vértice v en D , denotado por $\delta_D^+(v)$, es el número de vértices adyacentes desde v , es decir, el número de flechas que salen de v .

Definición No. 0.23. El *grado* de un vértice v en D , denotado por $\delta_D(v)$, es la suma del exgrado y del ingrado de v .

Definición No. 0.24. Los *vecinos exteriores* de un vértice x es el conjunto

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V(D) \mid (x, y) \in F(D)\}$$

Definición No. 0.25. Los *vecinos interiores* de un vértice x es el conjunto

$$\Gamma^-(x) = \{y \in V(D) \mid (y, x) \in F(D)\}$$

Definición No. 0.26. Una *digráfica* H es *subdigráfica* de D , si $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$.

Definición No. 0.27. Sea $A \subseteq V(D)$, decimos que H es una *subdigráfica inducida* por A , denotada por $D[A]$, si $V(H) = A$ y $(u, v) \in F(H)$ si y sólo si $(u, v) \in F(D)$ con $\{u, v\} \subseteq A$.

Definición No. 0.28. Una *subdigráfica* H de D es *generadora* si $V(H) = V(D)$.

Definición No. 0.29. Un *camino no dirigido* $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de D es una *sucesión alternada* de vértices y flechas tal que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ o $(x_{i+1}, x_i) \in F(D)$, con $0 \leq i \leq n-1$.

Si \mathcal{C} empieza en u y termina en v decimos que \mathcal{C} es un *uv-camino no dirigido*.

Definición No. 0.30. Un *camino dirigido* $\vec{\mathcal{C}} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ de D es una *sucesión alternada* de vértices y flechas tal que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$, con $0 \leq i \leq n-1$.

Si $\vec{\mathcal{C}} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $x \in V(\vec{\mathcal{C}})$ y $y \in V(\vec{\mathcal{C}})$, con $x = x_i$, $y = x_j$, $i < j$, entonces $(x, \vec{\mathcal{C}}, y) = (x = x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j = y)$.

Definición No. 0.31. Una *trayectoria no dirigida* T de D es un *camino no dirigido* en el que no se repiten vértices.

Definición No. 0.32. Una *trayectoria dirigida* \vec{T} de D es un *camino dirigido* en el que no se repiten vértices.

Definición No. 0.33. Un *camino cerrado no dirigido* en D es un *camino no dirigido* en el que el primero y el último vértice son iguales.

Definición No. 0.34. Un camino cerrado dirigido en D es un camino dirigido en el que el primero y el último vértice son iguales.

Definición No. 0.35. Un ciclo no dirigido C en D es un camino cerrado no dirigido en el que no se repiten vértices (sólo el primero y el último).

Definición No. 0.36. Un ciclo dirigido \vec{C} en D es un camino cerrado dirigido en el que no se repiten vértices (sólo el primero y el último).

Si $\vec{C} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$, $x \in V(\vec{C})$ y $y \in V(\vec{C})$, con $x = x_i$, $y = x_j$, $i < j$, entonces $(x, \vec{C}, y) = (x = x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j = y)$.

Teorema No. 0.1. Todo uv - camino dirigido en D contiene una uv - trayectoria dirigida, con $u \neq v$

Demostración:

Sea D una digráfica y \vec{C} un camino dirigido de u a v en D . Por demostrar que \vec{C} contiene una uv - trayectoria dirigida.

La demostración la hacemos por inducción sobre la longitud del camino \vec{C} en D . Sea $\ell(\vec{C}) = n$

Si $\ell(\vec{C}) = 1$, entonces el camino dirigido es $\vec{C} = (u, v)$, con $\{u, v\} \subseteq V(D)$ y $u \neq v$, en tal caso \vec{C} es una uv - trayectoria dirigida en D

Supongamos que todo uv camino dirigido de longitud menor que n contiene una uv - trayectoria dirigida.

Sea $\vec{C} = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = v)$ un uv - camino dirigido de longitud igual que n .

Si $x_i \neq x_j$, $\forall i, j = \{0, 1, \dots, n\}$, con $i \neq j$, entonces \vec{C} es una x_0x_n - trayectoria dirigida.

Si existe $x_i = x_j$ para $i \neq j$, supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$, entonces,

$$\vec{C} = (x_0 = u, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j-1}, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$$

De aquí obtenemos $\vec{C}_1 = (x_0, \vec{C}, x_i = x_j) \cup (x_j, \vec{C}, x_n) = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$, el cual es un uv - camino dirigido, tal que $\ell(\vec{C}_1) < \ell(\vec{C}) = n$. Por hipótesis de inducción \vec{C}_1 contiene una uv trayectoria dirigida \vec{T} . Como $\vec{C}_1 \subseteq \vec{C}$, entonces $\vec{T} \subseteq \vec{C}$.

Teorema No. 0.2. Todo camino cerrado dirigido de longitud impar en D contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Demostración:

Sea D una digráfica y \vec{C} un camino cerrado dirigido de longitud impar en D . Por demostrar que \vec{C} contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

La demostración la hacemos por inducción sobre la longitud del camino \vec{C} en D . Sea $\ell(\vec{C}) = n$.

Si $\ell(\vec{C}) = 3$, entonces el camino cerrado dirigido es $\vec{C} = (x_0, x_1, x_2, x_0)$, como $\ell(\vec{C}) = 3$ y \vec{C} es cerrado, entonces $x_0 \neq x_1$, $x_1 \neq x_2$ y $x_2 \neq x_0$, por lo tanto \vec{C} es un ciclo dirigido de longitud impar.

Supongamos que \vec{C} es un camino cerrado dirigido de longitud impar menor que n y \vec{C} contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Sea $\vec{C} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n}, x_0)$ un camino cerrado dirigido de longitud impar, tal que $\ell(\vec{C}) = n$.

Si $x_i \neq x_j$, con $i \neq j$, $\forall i, j$ con $1 \leq i \leq 2n$ y $1 \leq j \leq 2n$, entonces \vec{C} es un ciclo dirigido de longitud impar.

Si existe $x_i = x_j$ para $i \neq j$, sin pérdida de generalidad $i < j$, es decir,

$$\vec{C} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_{2n}, x_0).$$

Por lo que $\vec{C}^1 = (x_0, \vec{C}, x_i = x_j) \cup (x_j, \vec{C}, x_0) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_{2n}, x_0)$ un camino cerrado dirigido y $\vec{C}^2 = (x_i, \vec{C}, x_i) = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j-1}, x_j = x_i)$ un camino cerrado dirigido. Como $\ell(\vec{C}) = \ell(\vec{C}^1) + \ell(\vec{C}^2)$ es impar, entonces sólo uno de los dos caminos dirigidos, ya sea \vec{C}^1 ó \vec{C}^2 es de longitud impar.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\ell(\vec{C}^1)$ es impar. Como $\ell(\vec{C}^1) < \ell(\vec{C}) = n$, entonces por hipótesis de inducción \vec{C}^1 contiene un ciclo dirigido de longitud impar. Por otro lado sabemos que $\vec{C}^1 \subseteq \vec{C}$, entonces \vec{C} contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Definición No. 0.37. Sea $\vec{C} = (x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_1)$ un ciclo dirigido de D , llamamos una cuerda e de \vec{C} a la flecha $e = (x_i, x_m) \in F(D)$ ó $e = (x_m, x_i) \in F(D)$, donde $\{x_i, x_m\} \in V(\vec{C})$, $m \neq i + 1$.

Definición No. 0.38. Sea $C = (x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_1)$ un ciclo no dirigido de D , llamamos una cuerda e de C a la arista $e = (x_i, x_m)$ en D , donde $\{x_i, x_m\} \in V(C)$, $i - 1 \neq m \neq i + 1$.

Definición No. 0.39. Sea C un ciclo no dirigido de D y $\{x, y\} \in V(C)$, al vértice x lo llamamos polo de C si y sólo si x es extremo final de una flecha (y, x) en D , tal que (x, y) es una cuerda de C .

Definición No. 0.40. Se llaman polos consecutivos a los vértices $\{x, y\} \in V(C)$, que son extremos finales de dos cuerdas de C , tal que son vértices consecutivos en C .

Definición No. 0.41. Sea C un ciclo no dirigido (respectivamente dirigido) en D y dos cuerdas (x, y) y (z, t) de C son cruzadas en C si y sólo si los vértices $\{z, x, y, t\}$ se encuentran en ese orden en el ciclo C en D .

Definición No. 0.42. Una digráfica D es conexa si $\forall \{u, v\} \subseteq V(D)$ existe un uv - camino no dirigido y por lo tanto un vu - camino no dirigido.

Definición No. 0.43. Una digráfica D es fuertemente conexa si $\forall \{u, v\} \subseteq V(D)$ existe un uv - camino dirigido y un vu - camino dirigido.

Algunos ejemplos de los conceptos anteriores se encuentran en la figura 2

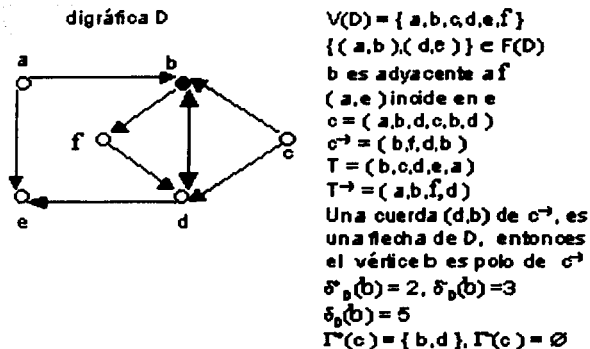


Figura 2:

Definición No. 0.44. Una digráfica D es completa si $\forall \{u, v\} \subseteq V(D)$, existe $(u, v) \in F(D)$ ó $(v, u) \in F(D)$.

Definición No. 0.45. Un clan Q es una digráfica, cuya gráfica subyacente es una gráfica completa.

Definición No. 0.46. Un pozo de D es un vértice x , tal que $\forall y \in V(D) - \{x\}$, existe $(y, x) \in F(D)$.

Definición No. 0.47. Una flecha $(u, v) \in F(D)$ es simétrica, si $(v, u) \in F(D)$.

Definición No. 0.48. Una flecha $(u, v) \in F(D)$ es asimétrica, si $(v, u) \notin F(D)$.

Definición No. 0.49. La parte simétrica de D , denotada por $\text{Sim}(D)$, es una subdigráfica generadora de D , tal que $V(D) = V(\text{Sim}(D))$ y las $F(\text{Sim}(D)) = \{f \in F(D) \mid f \text{ es una flecha simétrica de } D\}$.

Definición No. 0.50. La parte asimétrica de D , denotada por $\text{Asim}(D)$, es una subdigráfica generadora D , tal que $V(D) = V(\text{Asim}(D))$ y las $F(\text{Asim}(D)) = \{f \in F(D) \mid f \text{ es una flecha asimétrica de } D\}$

Definición No. 0.51. Una digráfica D es simétrica, si $(u, v) \in F(D)$, entonces $(v, u) \in F(D)$.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Definición No. 0.52. Una digráfica D es asimétrica, si $(u, v) \in F(D)$, entonces $(v, u) \notin F(D)$.

Definición No. 0.53. Una digráfica D se llama transitiva, si $(u, v) \in F(D)$ y $(v, w) \in F(D)$, entonces $(u, w) \in F(D)$.

Definición No. 0.54. La componente fuertemente conexa C de D es una subdigráfica de D , que cumple $\forall u, v \in C \exists uv$ -camino dirigido y vu -camino dirigido en C , máxima con esta propiedad.

Definición No. 0.55. Sea D una digráfica, se llama componente fuertemente conexa terminal a la componente fuertemente conexa, que no tiene flechas hacia cualquier otra componente.

En la figura (3), damos un ejemplo de una digráfica D transitiva y C_i las componentes fuertemente conexas, con $i = \{1, 2, 3, 4\}$, notemos que dichas componentes fuertemente conexas son transitivas. Las componentes fuertemente conexas terminales son: C_1 y C_3 , ya que no existen flechas $(C_i, V(D) - C_i)$ en D , con $i = \{1, 3\}$.

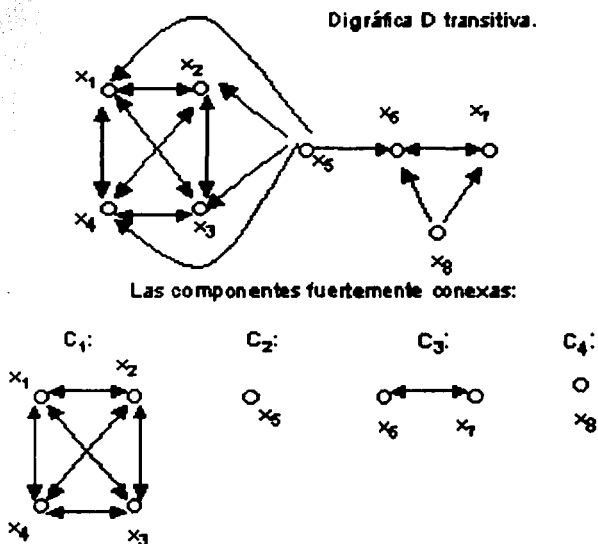


Figura 3:

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

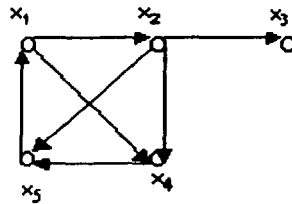
0.2. Núcleos

A continuación vamos a definir conceptos generales de teoría de núcleos que necesitamos en este trabajo.

Definición No. 0.56. Sea $N \subseteq V(D)$, N es un conjunto independiente si $\forall \{x, y\} \subseteq N$, x no es adyacente a y .

Definición No. 0.57. Sea $N \subseteq V(D)$, N es un conjunto absorbente si $\forall x \in V(D) - N \exists y \in N$ tal que $(x, y) \in F(D)$.

En la figura (4), se muestra algunos conjuntos independientes y absorbentes.



Conjuntos independientes: $I_1 = \{x_i\}$, con $1 \leq i \leq 5$ $I_6 = \{x_3, x_1\}$,
 $I_7 = \{x_3, x_4\}$, $I_8 = \{x_3, x_5\}$

Conjuntos absorbentes: $A_1 = \{x_3, x_5, x_4\}$, $A_2 = \{x_3, x_5, x_4, x_1\}$

Figura 4: Digráfica D

Notemos que en las digráficas completas, completas simétricas y completas asimétricas los conjuntos independientes son de un sólo vértice.

Definición No. 0.58. Sea D una digráfica, $N \subseteq V(D)$ es un núcleo de D si N es independiente y absorbente.

Veamos un ejemplo, en la figura (5) se muestra un ciclo par, el cual tiene dos núcleos: $N_1 = \{x_1, x_3\}$ y $N_2 = \{x_2, x_4\}$.

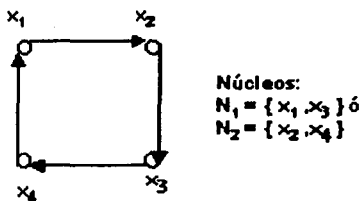
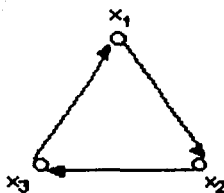


Figura 5: Digráfica D

Además no toda digráfica tiene núcleo, un ejemplo son los ciclos de longitud 3, ver figura (6).



Ciclo de longitud 3, el cual no tiene núcleo

Figura 6: Digráfica D

Estudiaremos los teoremas de existencia y unicidad.

Ejemplo No. 0.1 (J. Von Neumann, O. Morgenstein, 1944). Dado un conjunto de situaciones X , n jugadores denotados por $(1), (2), \dots, (n)$ deben elegir un elemento $x \in X$, para lo cual deben establecer la preferencia de una situación sobre las demás.

Como nos interesa una elección de grupo, entonces la preferencia individual no la vamos a considerar. Por lo anterior es necesario introducir el concepto general de "preferencia eficaz".

Para definir la preferencia eficaz, vamos a decir que entre los n jugadores existe un grupo de personas que prefieren la situación "a" de la situación "b". Tomando en cuenta las situaciones y la relación de preferencia eficaz, se puede construir una digráfica D , donde

$$V(D) = X \text{ y}$$

$$F(D) = \{(a, b) \mid \text{la situación "b" la prefieren sobre la situación "a"}\}.$$

La solución del problema se reduce a elegir un elemento dentro del núcleo $N \subseteq D$.

Por ser N independiente, no existen flechas entre vértices de N , así ninguna situación en N la prefieren sobre otra situación en N y si $x \in V(D) - N$, entonces por ser N absorbente, existe otra situación en N que la prefieren sobre la situación x .

Otro ejemplo que podemos citar donde se aplica el concepto de núcleo es:

Ejemplo No. 0.2 (Bases de axiomas de una teoría). Consideremos una "teoría", es decir, un conjunto de proposiciones a, b, \dots , que se pueden representar por puntos. Queremos determinar una "base de axiomas" para esta teoría, es decir, un conjunto N de proposiciones (llamados axiomas), ver figura (7), tal que:

- 1) Toda proposición que no está en N puede ser demostrada a partir de alguno de los axiomas.
- 2) Ningún axioma se puede deducir a partir de otro axioma.

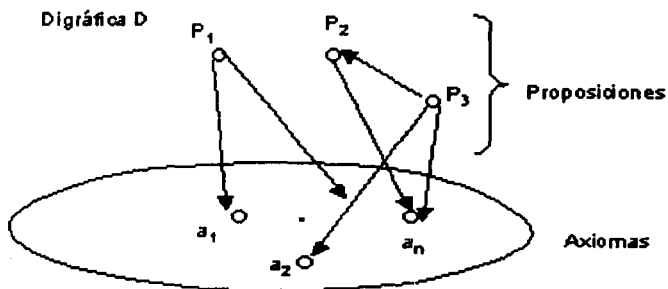


Figura 7:

Notemos que este problema se puede representar por medio de una digráfica D , donde $V(D) =$ conjunto de proposiciones y

$$F(D) = \{(a, b) \mid \text{si la proposición "a" se puede deducir lógicamente de la proposición "b"}\}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Por construcción la digráfica D es transitiva, es decir,

si $(a, b) \in F(D)$ y $(b, c) \in F(D)$, entonces $(a, c) \in F(D)$.

Esto se debe a que "c" implica "b" y "b" implica "a", entonces "c" implica "a".

Como toda digráfica transitiva tiene núcleo [1], entonces D tiene núcleo.

Dicho núcleo N es el conjunto de axiomas.

- Por ser N absorbente, se tiene el inciso (1).

- Por ser N independiente, se tiene el inciso (2).

Por lo tanto el problema de encontrar una base de axiomas para una teoría se reduce a encontrar un núcleo de la digráfica D .

Definición No. 0.59. Sea N un conjunto. La función característica $\varphi_N(x)$ de un conjunto N la definimos como:

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in N \\ 0 & \text{si } x \notin N \end{cases}$$

A continuación vamos a ver una condición necesaria y suficiente para en una digráfica $D = (V(D), F(D))$, se cumpla que un conjunto $N \subseteq V(D)$ sea núcleo de D .

Proposición No. 0.1. Sea $D = (V(D), F(D))$. $N \subseteq V(D)$ es núcleo de $D \Leftrightarrow$ su función característica satisface que :

$$\varphi_N(x) = 1 - \text{máx}_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y), \forall x \in V(D)$$

Si $\Gamma^+(x) = \emptyset$ definimos $\text{máx}_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 0$.

Demostración:

\Rightarrow) Sea D una digráfica y $N \subseteq V(D)$ el núcleo de D . Por demostrar que la función característica satisface que :

$$\varphi_N(x) = 1 - \text{máx}_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y), \forall x \in V(D)$$

Sea $N \subseteq V(D)$ tal que N es núcleo de D :

(1) Si $x \in N$, $\varphi_N(x) = 1$, como N es independiente, entonces $\forall y \in V(D)$ tal que y es adyacente a x , implica que $y \notin N$, por lo tanto $\varphi_N(y) = 0 \forall y \in \Gamma^+(x)$, en consecuencia $\text{máx}_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 0$.

$$\therefore 1 = \varphi_N(x) = 1 - \text{máx}_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 1 - 0 = 1.$$



(2) Si $x \notin N$, entonces $\varphi_N(x) = 0$, como N es absorbente $\exists y \in N$ tal que $(x, y) \in F(D)$, por lo tanto $y \in \Gamma^+(x)$, en consecuencia $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 1$

$$\therefore 0 = \varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 1 - 1 = 0.$$

\Leftrightarrow Sea $N \subseteq V(D)$ tal que su función característica satisface $\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$.
Por demostrar que N es núcleo.

(1) N es un conjunto independiente.

Sea $\{x, y\} \subseteq N$, por demostrar que x no es adyacente a y .

$\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 1$, por lo tanto $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 0$, por lo cual $\nexists y \in \Gamma^+(x)$ tal que $y \in N$.

$\therefore x$ no es adyacente a y

$\therefore N$ es independiente.

(2) N es un conjunto absorbente.

Sea $z \in V(D) - N$, por hipótesis $\varphi_N(z) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(z)} \varphi_N(y) = 0$, por lo tanto $\max_{y \in \Gamma^+(z)} \varphi_N(y) = 1$, por lo cual $\exists y \in N$ tal que $y \in \Gamma^+(z)$

$\therefore \exists y \in N$ tal que $y \in \Gamma^+(z)$

$\therefore N$ es absorbente

Proposición No. 0.2. *Todo núcleo es un conjunto independiente maximal y absorbente minimal.*

Demostración:

Sea $N \subseteq V(D)$ tal que N es núcleo de D .

(1) Por demostrar que N es un conjunto independiente maximal.

Suponemos que N no es independiente maximal, es decir, existe un conjunto I independiente tal que $N \subset I$, de donde $\exists x \in I$, tal que $x \notin N$. Como N es absorbente, hay una xN -flecha, es decir, existe $y \in N$, tal que $(x, y) \in F(D)$, pero como $N \subset I$, entonces $\{x, y\} \subseteq I$, lo cual no es posible, ya que I es independiente.

$\therefore N$ es independiente maximal.

(2) Por demostrar que N es absorbente minimal.

Suponemos que N no es absorbente minimal, es decir, existe $A \subseteq V(D)$ absorbente tal que $A \subset N$, por lo tanto $\exists x \in N$ tal que $x \notin A$. Como A es absorbente, $\exists xA$ - flecha, con $A \subset N$, es decir, $\exists y \in A$, tal que $(x, y) \in F(D)$, llegamos a que N no es independiente, pues $\{x, y\} \subseteq N$, lo cual es una contradicción.

$\therefore N$ es absorbente minimal.

Teorema No. 0.3. Sea D una digráfica simétrica y $N \subseteq V(D)$ es núcleo de $D \Leftrightarrow N$ es un conjunto independiente máximo.

Demostración:

\Rightarrow) Como N es núcleo de D , por la proposición (0.2), N es un conjunto independiente maximal.

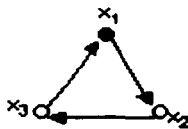
\Leftarrow) Sea N un conjunto independiente maximal. Por demostrar N es un conjunto absorbente.

Sea $N \subseteq V(D)$ independiente maximal, entonces $\forall x \in V(D) - N \exists Nx$ - flecha ó $\exists xN$ - flecha. Si $\exists Nx$ - flecha y como D es una digráfica simétrica, entonces $\exists xN$ - flecha, por lo cual N es absorbente.

$\therefore N$ es núcleo de D .

Lo que quiere decir que toda digráfica simétrica tiene núcleo.

Surge una pregunta ¿Cualquier conjunto independiente maximal de una digráfica es núcleo?, esto es falso, un ejemplo son los ciclos impares dirigidos, ver figura (8).



$\{x_i\}$ es un conjunto independiente máximo, pero no es núcleo.

Figura 8:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Lema No. 0.3.1. Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos, entonces D tiene al menos un vértice de exgrado cero.

Demostración:

Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos, por demostrar que D tiene al menos un vértice de exgrado cero, es decir, $\delta_D^+(v) = 0$, para algún $v \in V(D)$

Supongamos que $\delta_D^+(v) > 0, \forall v \in V(D)$.

Consideramos $\vec{T} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima en D . Como $\delta_D^+(x_n) > 0$, entonces existe $u \in V(D)$, tal que $(x_n, u) \in F(D)$.

Si $u \notin V(\vec{T})$, entonces existe una trayectoria dirigida $\vec{T}' = (x_0, \vec{T}, x_n) \cup (x_n, u)$, tal que $\ell(\vec{T}') > \ell(\vec{T})$, lo cual es una contradicción, ya que \vec{T} es de longitud máxima. Por lo tanto $u \in V(\vec{T})$, es decir, $u = x_j$, para algún $0 \leq j \leq n-1$, entonces se forma un ciclo dirigido $(x_j, x_{j+1}, \dots, x_n, x_j = u)$ en D , lo cual no es posible, ya que por hipótesis D no tiene ciclos dirigidos.

$\therefore D$ tiene al menos un vértice de exgrado cero.

Teorema No. 0.4. Toda digráfica D sin ciclos dirigidos tiene núcleo.

Demostración:

Sea D una digráfica sin ciclos. Por demostrar que D tiene núcleo.

Como D no tiene ciclos dirigidos, entonces por el lema 0.3.1, existe al menos un vértice $v \in V(D)$ de exgrado cero, es decir, $\delta_D^+(v) = 0$, definimos los siguientes conjuntos en D .

$$N_0 = \{x \in V(D) \mid \delta_D^+(x) = 0\}$$

$$S_0 = \{z \in V(D) \mid \exists z N_0 - \text{flecha}\}$$

Afirmamos que N_0 es un conjunto independiente.

Sea $\{u, v\} \subseteq N_0$, si $(u, v) \in F(D)$, entonces $\delta_D^+(u) > 0$, lo cual nos conduce a una contradicción, puesto que $\forall u \in N_0$, se cumple $\delta_D^+(u) = 0$

$$\therefore (u, v) \notin F(D)$$

Sea $D_1 = D - (N_0 \cup S_0)$

- Si $V(D_1) = \emptyset$, entonces por definición de S_0 , tenemos que $\forall z \in V(D) - N_0 = S_0 \exists zN_0 - \text{flecha}$ en D , por lo tanto N_0 es absorbente.

$$\therefore N_0 \text{ es núcleo de } D.$$

- Si $V(D_1) \neq \emptyset$, como $D_1 \subseteq D$, entonces D_1 no tiene ciclos dirigidos, formemos los siguientes conjuntos:

$$N_1 = \{x \in V(D_1) \mid \delta_{D_1}^+(x) = 0\}$$

$$S_1 = \{z \in V(D_1) \mid \exists zN_1 - \text{flecha}\}$$

Afirmamos que $N_1 \cup N_0$ es independiente.

- Sea $x \in N_1$, por demostrar que \nexists una $xN_0 - \text{flecha}$.
Suponemos que $\exists xN_0 - \text{flecha}$, entonces $x \in S_0$, por lo tanto $x \notin D_1$, lo cual no es posible, ya que $N_1 \subseteq D_1$.

$$\therefore \nexists xN_0 - \text{flecha}.$$

- Sea $x \in N_0$, por demostrar que \nexists una $xN_1 - \text{flecha}$.
Suponemos que $\exists xN_1 - \text{flecha}$, lo cual implica que $\delta_D^+(x) > 0$, lo cual no es posible, ya que $\forall x \in N_0 \delta_D^+(x) = 0$

$$\therefore \nexists xN_1 - \text{flecha}.$$

$$\therefore N_1 \cup N_0 \text{ es independiente.}$$

Sea $D_2 = D_1 - (N_1 \cup S_1)$

- Si $V(D_2) = \emptyset$, entonces por definición de $N_0 \cup N_1$, tenemos que $\forall x \in V(D) - (N_0 \cup N_1)$, existe $xN_0 - \text{flecha}$ en D ó $xN_1 - \text{flecha}$ en D , es decir, $N_0 \cup N_1$ es absorbente, por lo tanto $N_0 \cup N_1$ es núcleo de D .

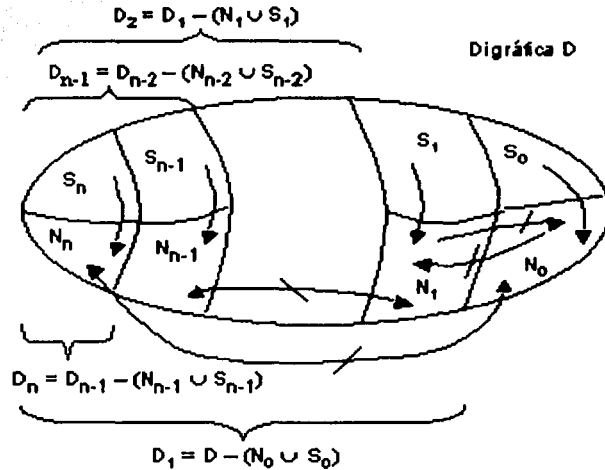
- Si $V(D_2) \neq \emptyset$, como $D_2 \subseteq D_1$, entonces D_2 no tiene ciclos dirigidos, formemos los siguientes conjuntos:

$$N_2 = \{x \in V(D_2) \mid \delta_{D_2}^+(x) = 0\}$$

$$S_2 = \{z \in V(D_2) \mid \exists zN_2 - \text{flecha}\}$$

$$\text{Sea } D_3 = D_2 - (N_2 \cup S_2).$$

Continuando con este proceso y como D es finita, obtenemos para una n la digráfica $D_{n+1} = D_n - (N_n \cup S_n) = \emptyset$, ver figura (9)



El conjunto $\cup_{i=0}^n N_i$ es independiente

Figura 9: Digráfica D

Afirmamos que $\cup_{j=0}^n N_j$ es independiente.

Sea $\{x, y\} \subseteq \cup_{j=0}^n N_j$.

- o Por definición de N_i , con $0 \leq i \leq n$, cada N_i es independiente.
- o Sea $x \in N_j$ y $y \in N_i$, sin pérdida de generalidad $i < j$, por demostrar que no existe xy - flecha ni la yx - flecha en D .

Si suponemos que $\exists x N_i$ - flecha, para algún i , con $0 \leq i \leq n-1$, entonces $x \in S_i$, con $0 \leq i \leq n-1$, como $D_j = D_i - (N_i \cup S_i) \subseteq D_i$, entonces $x \notin D_j$, lo cual no es posible, ya que $x \in N_j \subset V(D_j)$.

$\therefore \nexists x N_i$ - flecha, para $i = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Si suponemos que $\exists y N_j$ - flecha, como $D_j \subset D_i$, entonces $\delta_{D_i}^+(y) > 0$, lo cual no es posible, ya que $\forall y \in N_i$, con $0 \leq i \leq n-1$, $\delta_{D_i}^+(y) = 0$

$\therefore \nexists y N_j$ - flecha, para $y \in N_i$ y $0 \leq i \leq n-1$.

$\therefore \cup_{j=0}^n N_j$ es independiente.

Afirmamos que $\cup_{j=0}^n N_j$ es absorbente.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Sea $x \in V(D) - \bigcup_{j=0}^n N_j$

Por construcción de las N_j , $x \in S_j$ para algún $0 \leq j \leq n$ y por definición de las S_j , existe xN_j - flecha en D .

$\therefore \bigcup_{j=0}^n N_n$ es núcleo de D .

Ahora introducimos un nuevo concepto, seminúcleo de una digráfica.

Definición No. 0.60. Sea D una digráfica, $S \subseteq V(D)$. S es un seminúcleo de D si y sólo si:

1.- S es independiente.

2.- Si $\exists (s, x) \in F(D)$ con $s \in S$ y $x \in V(D) - S$, entonces existe una xS - flecha en D .

Veamos un ejemplo, figura (10), sea D una digráfica, con $V(D) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y $F(D) = \{(x_1, x_5), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_4, x_2), (x_5, x_4)\}$.

El conjunto $S = \{x_3, x_4\}$ es independiente y cumple que si $\exists Sx$ - flecha en D , entonces existe xS - flecha en D , por lo tanto S es seminúcleo en D .

Surge la pregunta ¿Todo núcleo es seminúcleo?, esto es claro, ya que por ser núcleo es independiente y además $\forall x \in V(D) - S$, \exists una xS - flecha.

Inversamente ¿Todo seminúcleo es núcleo?, esto es falso, en la figura (10), el seminúcleo es el conjunto $S = \{x_3, x_4\}$, notamos que no existe la flecha (x_1, x_j) , con $j = \{3, 4\}$, es decir, S no es absorbente, por lo que S no es núcleo.

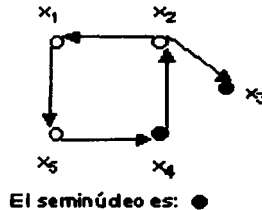


Figura 10: Digráfica D

El siguiente lema relaciona los conceptos de núcleo y seminúcleo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Lema No. 0.4.1 (1970 [15]). Sea D una digráfica. Si toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo $\neq \emptyset$, entonces D tiene núcleo.

Demostración:

La demostración la hacemos por inducción sobre el número de vértices de D . Sea $|V(D)| = p$.

1).- Si $p = 1$, en tal caso D consta de un solo vértice, entonces D tiene núcleo. Si $p = 2$, entonces la digráfica D consta de $V(D) = \{x_1, x_2\}$ y flechas con varias posibilidades:

caso (a) $F(D) = \emptyset$, es decir, son dos vértices aislados, por lo tanto el núcleo es $N = \{x_1, x_2\}$ el cual es independiente, ya que no existen flechas en D y como no existen vértices fuera del núcleo, entonces por vacuidad N es absorbente.

caso (b) $F(D) = (x_1, x_2)$ ó $F(D) = (x_2, x_1)$, por lo tanto el núcleo es $N = \{x_2\}$ ó $N = \{x_1\}$ respectivamente, puesto que un solo vértice es independiente y absorbente ya que $\forall x \in V(D) - N, \exists x_1N - flecha$ ó $x_2N - flecha$ respectivamente en D .

caso (c) $F(D) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$, entonces el núcleo en este caso es sólo un vértice, ya sea x_1 ó x_2 , en ambos casos es independiente y absorbente puesto que la flecha que existe es simétrica.

2).- Supongamos que D' es una digráfica con $|V(D')| < p$ y toda subdigráfica inducida de D' tiene seminúcleo $\neq \emptyset$, entonces D' tiene núcleo.

3).- Sea D una digráfica tal que $|V(D)| = p$ y toda subdigráfica inducida tiene seminúcleo $\neq \emptyset$. Por demostrar que D tiene núcleo.

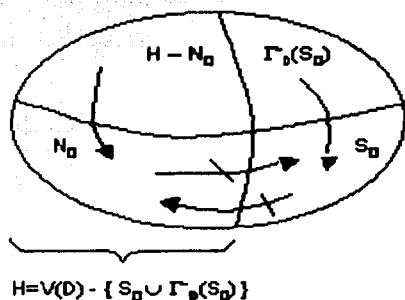
Sea S_0 un seminúcleo $\neq \emptyset$ de D y

$$\Gamma_D^-(S_0) = \{x \in V(D) \mid \exists xS_0 - flecha\}$$

Sea $H = V(D) - (S_0 \cup \Gamma_D^-(S_0))$

caso (3.a) Si $V(H) = \emptyset$, implica que S_0 es núcleo de D .

caso (3.b) Si $|V(H)| > 0$, por hipótesis de inducción H tiene núcleo. Sea N_0 el núcleo de H . Afirmamos que $S_0 \cup N_0$ es núcleo de D . Como se ve en la figura (11).



S_0 es el seminúcleo de D .
 N_0 es el seminúcleo de H .
 $S_0 \cup N_0$ es núcleo de D .

Figura 11: Digráfica D

1. $N_0 \cup S_0$ es independiente.

Tenemos que N_0 y S_0 son independientes, por ser núcleo de H y seminúcleo de D respectivamente, por construcción no existe la $N_0 S_0$ - flecha.

Por demostrar: No existe $S_0 N_0$ - flecha.

Suponemos que existe la $S_0 N_0$ - flecha, como S_0 es seminúcleo, entonces $\exists N_0 S_0$ - flecha, lo cual no es posible ya que por definición de H y de N_0 , no existe $N_0 S_0$ - flecha, por lo tanto no existe $S_0 N_0$ - flecha.

$\therefore N_0 \cup S_0$ es independiente.

2. $N_0 \cup S_0$ es absorbente.

Sea $x \in V(D) - (N_0 \cup S_0)$, se tiene dos casos: $x \in \Gamma_D^-(S_0)$ ó $x \in V(H) - N_0$. Por construcción, existe una $x S_0$ - flecha, en el primer caso y por ser N_0 núcleo de H , tenemos $x N_0$ - flecha, en el segundo caso, por lo tanto $\exists x(N_0 \cup S_0)$ - flecha en D .

$\therefore N_0 \cup S_0$ es absorbente.

$\therefore D$ tiene núcleo. ■

Con lo anterior expuesto podemos demostrar el Teorema de Richardson.

Teorema No. 0.5 (Richardson, 1953 [1]). Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar, entonces D tiene núcleo.

Demostración:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar, usando el lema (0.4.1), es suficiente mostrar que toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo, $\neq \emptyset$, para así poder concluir que D tiene núcleo.

Supongamos que D es conexa, si no es conexa, entonces se demuestra de igual manera para cada componente conexa.

Afirmamos que una digráfica D siempre tiene al menos una componente fuertemente conexa terminal.

Supongamos que D no tiene ninguna componente fuertemente conexa terminal, es decir, $\forall H_i$ componente fuertemente conexa, con $1 \leq i \leq r$, \exists una $H_i H_{j+1}$ - flecha con $i \neq j+1$, como D es finita, entonces en algún momento se forma un ciclo, lo cual no es posible, esto es por definición de componente fuertemente conexa, por lo tanto D siempre tiene al menos una componente fuertemente conexa terminal.

Consideramos una componente fuertemente conexa terminal γ de D , como $\gamma \subseteq D$, γ no tiene ciclos de longitud impar. Existen 2 casos:

Caso (1) Si $|\gamma| = 1$, entonces γ consta de un vértice, por lo tanto dicho vértice es el seminúcleo.

Caso (2) Si $|\gamma| > 1$.

Sea $x_0 \in \gamma$ y $S = \{x \in \gamma \mid \exists x_0 x - \text{camino dirigido de longitud par}\}$, como $x_0 \in S$, entonces $S \neq \emptyset$.

Por demostrar que S es seminúcleo de D , figura (12).

1. S es independiente, es decir, que no existen $x_1 x_2$ - flecha ni $x_2 x_1$ - flecha para todo $\{x_1, x_2\} \subseteq S$.

a) Por demostrar que $\nexists x_1 x_2$ - flecha en γ , con $\{x_1, x_2\} \subseteq S$. Suponemos que $\exists x_1 x_2$ - flecha, como $\{x_1, x_2\} \subseteq S$, entonces existen:

\vec{c}_1 camino dirigido de longitud par de x_0 a x_1 .

\vec{c}_2 camino dirigido de longitud par de x_0 a x_2 .

Como γ es una componente fuertemente conexa, entonces existe un camino \vec{c}_3 dirigido de x_2 a x_0 . Dicho camino puede ser de longitud par o impar. Si \vec{c}_3 es de longitud impar, entonces se forma un camino cerrado:

$(x_0, \vec{c}_2, x_2) \cup (x_2, \vec{c}_3, x_0)$ de longitud impar,

el cual contiene un ciclo dirigido de longitud impar, esto no es posible, ya que γ no tiene ciclos de longitud impar, por lo tanto \vec{c}_3 es de longitud par. Por lo que obtenemos un camino cerrado:

$(x_0, \vec{c}_1, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup (x_2, \vec{c}_3, x_0)$ de longitud impar,

el cual contiene un ciclo dirigido de longitud impar, esto es una contradicción, por lo tanto no existe $x_1 x_2$ - flecha.

b) Por demostrar que $\nexists x_2 x_1$ - flecha en γ .

Supongamos que existe x_2x_1 - flecha, como $\{x_1, x_2\} \subseteq S$, entonces existen:

- \vec{c}_1 camino dirigido de longitud par de x_0 a x_1 .
- \vec{c}_2 camino dirigido de longitud par de x_0 a x_2 .

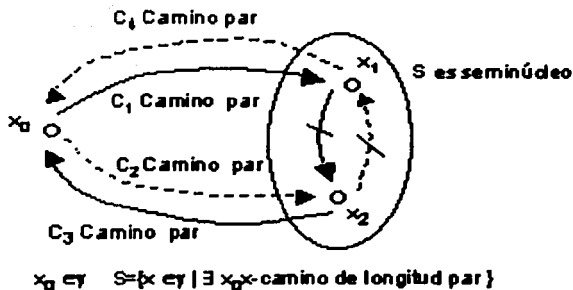


Figura 12: Digráfica D

Como γ es una componente fuertemente conexa, entonces existe un camino \vec{c}_4 dirigido de x_1 a x_0 , dicho camino puede ser de longitud par o impar, si \vec{c}_4 es de longitud impar, entonces se forma un camino cerrado:

$$(x_0, \vec{c}_1, x_1) \cup (x_1, \vec{c}_4, x_0) \text{ de longitud impar,}$$

el cual contiene un ciclo de longitud impar, esto no es posible, ya que γ no tiene ciclos de longitud impar, por lo tanto \vec{c}_4 es de longitud par, por todo lo anterior se forma un camino cerrado:

$$(x_0, \vec{c}_2, x_2) \cup (x_2, x_1) \cup (x_1, \vec{c}_4, x_0) \text{ de longitud impar,}$$

el cual contiene un ciclo dirigido de longitud impar, esto es una contradicción, por lo tanto no existe x_2x_1 - flecha.

$\therefore S$ es independiente

2. S cumple:

Si $\exists (s, y) \in F(\gamma)$, con $s \in S$ y $y \in V(\gamma) - S$, entonces $\exists yS$ - flecha en γ .

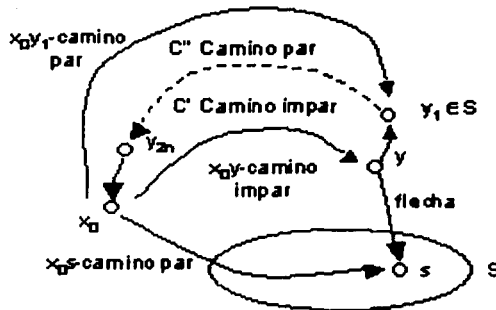
Supongamos que $\exists (s, y) \in F(\gamma)$, con $s \in S$, $y \in V(\gamma) - S$.

Por demostrar que existe la yS - flecha.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Por definición de S , existe x_0s -camino dirigido de longitud par, como $y \in V(\gamma) - S$ y γ es fuertemente conexa, entonces existe un x_0y -camino dirigido de longitud impar, como γ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar y γ es una componente fuertemente conexa, entonces existe un camino dirigido $\vec{C}' = (y, y_1, y_2, \dots, y_{2n}, x_0)$ de longitud impar, el cual contiene un camino dirigido $\vec{C}'' = (y_1, \vec{C}', x_0)$ de longitud par.

Por ser γ una componente fuertemente conexa y no tener ciclo dirigido de longitud impar, tenemos x_0y_1 - camino dirigido de longitud par. Por definición de S , el vértice $y_1 \in S$, por lo tanto existe yy_1 - flecha, con $y \in V(D) - S$ y $y_1 \in S$.



$C' = (y, y_1, y_2, \dots, y_{2n}, x_0)$ camino dirigido de longitud impar.
 $C'' = (y_1, C', x_0)$ camino dirigido de longitud par.
 x_0y_1 -camino dirigido de longitud par, entonces $y_1 \in S$

Figura 13: Digráfica D

$\therefore S$ es seminúcleo de γ .

Para los casos 1 y 2, obtenemos un seminúcleo $\neq \emptyset$ de γ .

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Como D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar y cada subdigráfica inducida esta contenida en D , entonces cada subdigráfica inducida de D , no tiene ciclos dirigidos de longitud impar. Para cada subdigráfica inducida de D , tomar una componente fuertemente conexa terminal y realizar lo mismo, es decir, encontrar un seminúcleo de dicha subdigráfica, por lo tanto toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo, entonces por el lema (0.4.1) D tiene núcleo. ■

Definición No. 0.61. Una digráfica D es núcleo perfecta (R -digráfica) si D y todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo.

Como la propiedad de no tener ciclos dirigidos de longitud impar, se conserva para las subdigráficas inducidas y por el teorema (0.5), algunas clases de digráficas R -digráficas son:

1. Los ciclos dirigidos de longitud par.
2. Las digráficas sin ciclos dirigidos.
3. Las digráficas sin ciclos dirigidos de longitud impar.

Definición No. 0.62. Una digráfica D es núcleo imperfecta crítica (R^- -digráfica) si D no tiene núcleo y todas sus subdigráficas inducidas propias tienen núcleo.

Veamos un ejemplo en la figura (14), en el cual se muestra un ciclo dirigido de longitud tres.

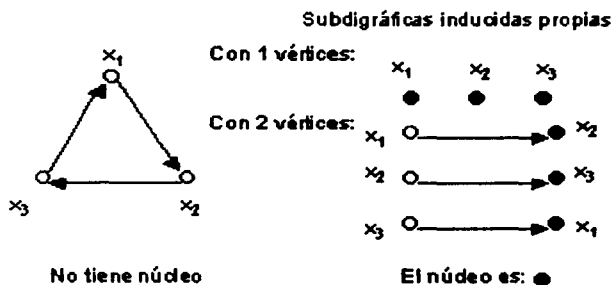


Figura 14: Digráfica núcleo imperfecta crítica

Definición No. 0.63. Sea G una gráfica. Una n -coloración de G , es asignar colores a los vértices de G , usando a lo más n colores.

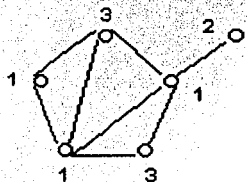
Definición No. 0.64. Una n -coloración propia de una gráfica G , es una n -coloración, tal que vértices adyacentes tienen asignado distinto color.

Definición No. 0.65. El número cromático de G , es el mínimo número n , tal que tenga una n -coloración propia, es decir, es el mínimo de colores necesarios para colorear todos los vértices de G , de tal forma que cualesquiera dos vértices adyacentes tengan asignado distinto color, se denota como $\chi(G)$

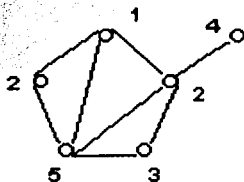
Definición No. 0.66. El número de clan $w(G)$, es el máximo número de vértices dos a dos adyacentes en G .

Unos ejemplos de los conceptos anteriores se encuentran en la figura (15).

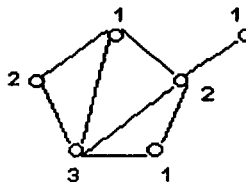
Consideramos la gráfica G , para cada vértice le asignamos un color, denotemos por 1 al color rojo, por 2 al color azul, por 3 al color verde, por 4 al color amarillo y por 5 al color najanja.



Es una 3-coloración



Es una 5-coloración propia



Es una 3-coloración propia

Figura 15:

En nuestro ejemplo $\chi(G) = 3$, pues con 2 colores no podemos dar una coloración propia. En general un ciclo impar tiene $\chi(G) = 3$ y G contiene ciclos de longitud impar.

Las gráficas perfectas fueron inventadas por C. Berge en 1961, estas gráficas relacionan el número cromático con el número de clan.

Definición No. 0.67. Una gráfica G es perfecta, si para cada subgráfica inducida H se tiene $\chi(H) = w(H)$

Algunas ejemplos de gráficas perfectas son:

1. La gráficas completas, pues toda subgráfica inducida H es completa y $\chi(H) = n = w(H)$.
2. La gráficas bipartitas, ya que $\chi(G) = 2$ y $w(G) = 2$.

Definición No. 0.68. Sea G una gráfica, llamamos una orientación de G , a la gráfica dirigida (digráfica) D , con los mismos vértices de G y dos vértices en G son adyacentes, si sólo si, existe al menos una flecha entre ellos en D .

Inversamente G es llamada gráfica subyacente de D .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Definición No. 0.69. Una orientación D de una gráfica G se llama admisible, si cada clan Q de D tiene núcleo (pozo).

En la figura (16), damos una orientación admisible D de la gráfica G .

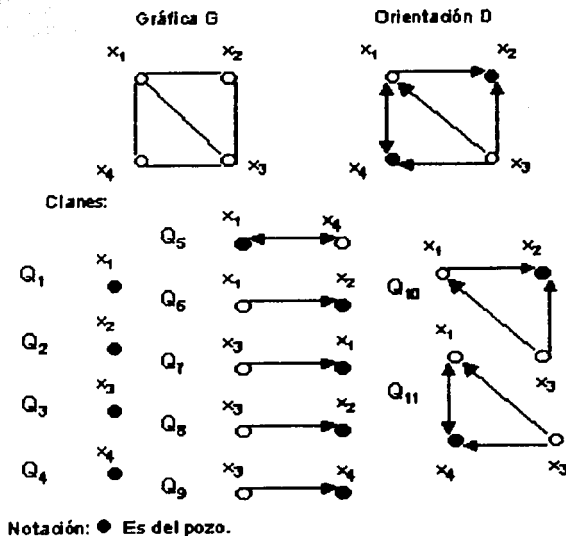


Figura 16:

Definición No. 0.70. Una orientación se llama M -admissible, si cada ciclo dirigido de longitud tres $\vec{C} = (x_1, x_2, x_3, x_1)$ tiene al menos 2 flechas simétricas.

Veamos un ejemplo, figura (17).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

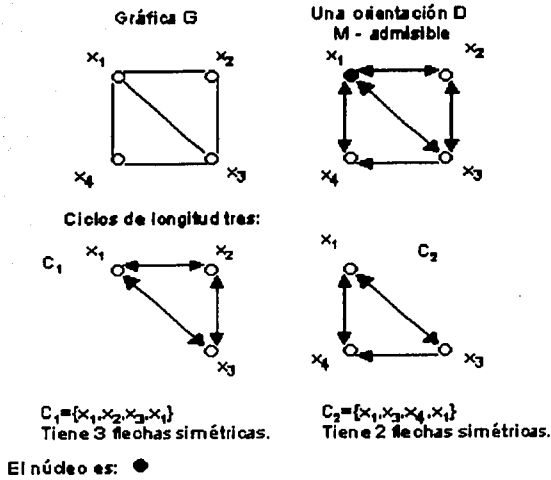


Figura 17:

Definición No. 0.71. Una gráfica G se llama soluble (respectivamente M-soluble), si cada orientación admisible (respectivamente orientación M-admisible) tiene núcleo.

TEMA CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 1

Gráficas de Paridad

Recordemos que una orientación M -admisibles, es aquella donde cada ciclo dirigido de longitud tres tiene al menos dos cuerdas simétricas. Si cada orientación M -admisibles de una gráfica tiene núcleo, entonces dicha gráfica recibe el nombre de gráfica M -soluble. En este capítulo se estudian las orientaciones M -admisibles de una gráfica de paridad y la estructura que deben de tener los ciclos dirigidos de longitud impar en dichas orientaciones, para que las gráficas de paridad tengan núcleo. Vamos usar la definición de gráfica de paridad introducida por Burlet y Uhry [2].

El capítulo empieza con una condición necesaria y suficiente para que una gráfica sea de paridad, dicha condición es: “ **Todo ciclo de longitud impar mayor o igual que cinco en la gráfica de paridad tiene dos cuerdas cruzadas** ”. Continuamos con orientaciones, si tenemos una gráfica de paridad y la orientamos de tal manera que cada ciclo dirigido de longitud tres tenga dos flechas simétricas, entonces podemos afirmar que cada ciclo de longitud impar tiene dos polos consecutivos ó dos cuerdas cruzadas triangulares, lo anterior lo vamos a demostrar en el teorema 1.2. A partir de esto podemos concluir que cada orientación M -admisibles de una gráfica de paridad satisface la siguiente condición, “ **Cada ciclo dirigido de longitud impar tiene dos polos consecutivos** ”.

Como todos los ciclos de longitud impar mayor o igual que cinco en la gráficas de paridad, tienen dos cuerdas cruzadas, entonces las gráficas de paridad son gráficas de Meyniel (gráficas en los que cada ciclo de longitud impar tiene al menos dos diagonales), por otro lado sabemos que las gráficas de Meyniel son una clase de gráficas perfectas, lo cual implica que las gráficas de paridad son perfectas.

Por otro lado tomando en cuenta una condición para las gráficas núcleo perfectas, dada por Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara, la cual dice: “ Cada ciclo dirigido \vec{C} de longitud impar tiene dos polos consecutivos en \vec{C} ”, se concluirá que cada orientación M -admisibles de una gráfica de paridad tiene núcleo, esto quiere decir, que las gráficas de paridad son M -solubles, dicho resultado es un caso particular de la conjetura de Meyniel [5], la cual dice: **Toda gráfica perfecta es M -soluble.**

Definición No. 1.1. Sea G una gráfica y $T = (x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n)$ una trayectoria, llamamos una cuerda c de T a la arista $c = (x_i, x_m)$ en G , con $\{x_i, x_m\} \subseteq T$, $1 \leq i \leq n-2$, $i+2 \leq m \leq n$.

Definición No. 1.2. Sea G una gráfica, llamamos T una trayectoria minimal ó trayectoria sin cuerda, aquella que no tiene ninguna cuerda.

Notemos que la paridad de una trayectoria es par o impar.

Definición No. 1.3. G es una gráfica de paridad si y sólo si para todo par de vértice x y y , todas las xy - trayectorias sin cuerdas tienen la misma paridad.

Para un ejemplo de gráfica de paridad, ver figura (1.1)

Gráfica G , de paridad

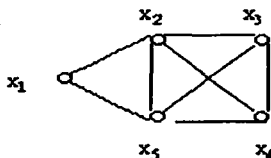


Figura 1.1:

Las trayectorias sin cuerdas (minimales) que existen para cualquier par de vértices de la gráfica G de nuestro ejemplo, se describen a continuación:

- Las trayectorias sin cuerdas (minimales) de x_1 a x_i , con $i = \{2, 3, 4, 5\}$ son:
 - las aristas (x_1, x_i) con $i = \{2, 5\}$ es G , de longitud uno, es decir, de paridad impar.
 - De x_1 a x_3 son:
 - (x_1, x_2, x_3) de paridad par.
 - (x_1, x_5, x_3) de paridad par.
 - De x_1 a x_4 son:
 - (x_1, x_2, x_4) de paridad par.
 - (x_1, x_5, x_4) de paridad par.
- Las trayectorias sin cuerdas de x_2 a x_i , con $i = \{1, 3, 4, 5\}$ son las aristas (x_2, x_i) , las cuales son de paridad impar.

- Las trayectorias sin cuerdas de x_3 a x_i , con $i = \{1, 2, 4, 5\}$ son:
 - (x_3, x_i) con $i = \{2, 4, 5\}$, son de paridad impar.
 - De x_3 a x_1 son:
 - (x_3, x_2, x_1) de paridad par.
 - (x_3, x_5, x_1) de paridad par.
- Las trayectorias sin cuerdas (minimales) de x_5 a x_i , con $i = \{1, 2, 3, 4\}$ son:
 - (x_5, x_i) , son de paridad impar.

nota No. 1.1. La noción de gráfica de paridad, es una generalización de gráficas bipartitas, esto se debe a que las trayectorias de $x \in V_1$ a $y \in V_2$ ó $y \in V_2$ a $x \in V_1$ son de longitud impar y las trayectorias de $x \in V_i$ a $y \in V_i$, con $i = \{1, 2\}$, son de longitud par, entonces todas las trayectorias sin cuerdas (minimales) de $\{x, y\} \subseteq V(G)$ son de la misma paridad, ver figura (1.2)

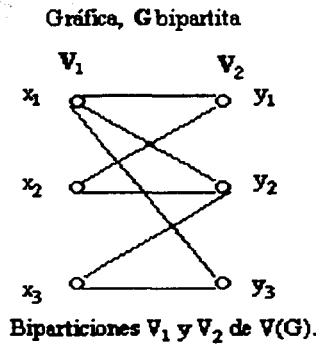


Figura 1.2:

nota No. 1.2. Las gráficas de paridad, no son necesariamente gráficas bipartitas, ver figura (1.1).

Observemos que en la figura que presentamos en el ejemplo de la gráfica de paridad (1.1) no es bipartita, ya que tiene ciclos de longitud impar.

A continuación vamos a ver una propiedad que existe entre las gráficas de paridad y los ciclos de longitud impar, la cual fue dada por (Olarú y Sachs), dicha propiedad es necesaria y suficiente.

Teorema No. 1.1 (Olarú y Sachs [2]). Una condición necesaria y suficiente para que $G = (V(G), A(G))$ sea una gráfica de paridad es:

Todo ciclo de longitud impar ≥ 5 de G tiene 2 cuerdas cruzadas.

Demostración:

Necesaria :

Sea G una gráfica de paridad y C un ciclo de longitud impar ≥ 5 de G .

Por demostrar que C tiene dos cuerdas cruzadas.

La demostración la vamos hacer por inducción sobre la longitud del ciclo impar C , $\ell(C) = n$.

- Si $n = 5$, sea $C = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1)$ el ciclo impar, como vemos en la figura (1.3).

Por demostrar que C tiene dos cuerdas cruzadas.

Las trayectorias inducidas por el ciclo C de x_1 a x_3 son:

1. (x_1, x_2, x_3) de paridad par y
2. (x_1, x_5, x_4, x_3) de paridad impar

las cuales son de diferente paridad. Como G es una gráfica de paridad, entonces ambas no pueden ser trayectorias sin cuerdas.

Supongamos que las x_1x_3 - trayectorias sin cuerdas son de paridad impar, entonces existe la cuerda (x_1, x_3) , con esta cuerda se forma un ciclo $C' = (x_1, x_3, x_4, x_5, x_1)$ de longitud par, donde las $x_i x_j$ - trayectorias inducidas por C' , con $\{x_i, x_j\} \subseteq V(C')$ son de la misma paridad.

Para x_2 y x_4 , tenemos la trayectoria $T_1 = (x_2, x_3, x_4)$ inducida por C de paridad par y la trayectoria $T_2 = (x_2, x_1, x_5, x_4)$ de paridad impar, como G es una gráfica de paridad, entonces todas las x_2x_4 - trayectorias sin cuerdas son de la misma paridad.

Si las x_2x_4 - trayectorias sin cuerdas son de paridad impar, entonces en T_1 debe existir la cuerda (x_2, x_4) , por lo tanto las cuerdas (x_1, x_3) y (x_2, x_4) son cruzadas. Si las x_2x_4 - trayectorias sin cuerdas son de paridad par, entonces en T_2 debe existir una cuerda (x_1, x_4) ó (x_2, x_5) . Si existe la cuerda (x_2, x_5) , entonces las cuerdas (x_1, x_3) y (x_2, x_5) son cruzadas. Si existe la cuerda (x_1, x_4) , entonces se forma un ciclo $C'' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$ de longitud par, donde todas las $x_i x_j$ - trayectorias inducidas por C'' , con $\{x_i, x_j\} \subseteq V(C'')$ son de la misma paridad. Por otro lado, para x_2 y x_5 , tenemos la trayectoria $T_3 = (x_2, x_3, x_4, x_5)$ inducida por C de paridad par y la trayectoria $T_4 = (x_2, x_1, x_5)$ inducida por C de paridad impar, como G es una gráfica de paridad, entonces todas las x_2x_5 - trayectorias sin cuerdas son de la misma paridad.

Si las x_2x_5 - trayectorias sin cuerdas son de paridad impar, entonces en T_4 debe existir la cuerda (x_2, x_5) , por lo tanto las cuerdas (x_1, x_3) y (x_2, x_5) , son cruzadas. Si las trayectorias sin cuerdas de x_2 a x_5 son de paridad par, entonces en T_3 debe existir la cuerda (x_2, x_4) ó (x_3, x_5) , por lo tanto en ambos casos tenemos cuerdas cruzadas (x_2, x_4) y (x_1, x_3) ó (x_3, x_5) y (x_1, x_4) .

$$|V(C)|=5$$

Posibilidades del ciclo C , de G , una gráfica de paridad

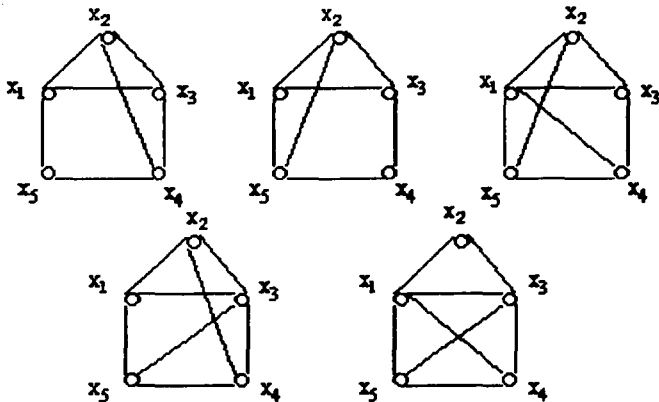


Figura 1.3:

Si las x_1x_3 - trayectorias son de paridad par, entonces se hace análogamente.

Hipótesis de inducción. Sea G una gráfica de paridad, entonces todo ciclo C de longitud impar $n' > 5$, con $n' < n$ de G tiene dos cuerdas cruzadas.

Sea G una gráfica de paridad y $C = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$ un ciclo de G de longitud n , con n impar.

- Por demostrar que C tiene dos cuerdas cruzadas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Consideramos x_1 y x_3 vértices de C , se forman dos trayectorias de x_1 a x_3 inducidas por C , las cuales son $T_1 = (x_1, x_2, x_3)$ de paridad par y $T_2 = (x_3, x_4, \dots, x_n, x_1)$ de paridad impar. Como G es una gráfica de paridad, entonces todas las x_1x_3 -trayectorias sin cuerdas tienen la misma paridad. Existen dos casos, que las trayectorias sin cuerdas de x_1 a x_3 son de paridad par ó las trayectorias sin cuerda de x_1 a x_3 son de paridad impar.

Caso A.- Las trayectorias sin cuerdas de x_1 a x_3 son de paridad par, entonces la trayectoria T_3 debe tener una cuerda $e_1 = (x_s, x_j)$. Con dicha cuerda, se forman dos ciclos:

$$\bullet C_1 = (x_1, T_1, x_3) \cup (x_3, C, x_s) \cup (x_s, x_j) \cup (x_j, T_2, x_n, x_1)$$

$$\bullet C_2 = (x_j, x_s, x_{s+1}, T_2, x_{j-1}, x_j)$$

Como C es de longitud impar, entonces sólo se puede dar uno de los siguientes casos, que C_1 es de longitud impar ó C_2 es de longitud impar.

Supongamos que C_2 es de longitud impar > 3 , lo cual implica que C_1 es de longitud par, ver figura (1.4), por hipótesis de inducción C_2 tiene dos cuerdas f, g cruzadas, como $C_2 \subset C$.

$\therefore C$ tiene dos cuerdas cruzadas.

Si $\ell(C_2) = 3$, notemos que para toda trayectoria de $x_i \in C_1$ a $x_j \in C_1$ inducida por C_1 son de la misma paridad, esto se debe a que C_1 es un ciclo par.

Por otra parte la trayectoria de $x_i \in C_1$ a $x_m \in C_2$ con $\{i, m\} \neq \{j, s\}$ y $i \neq m$ inducidas por C es:

$$T_3 = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{m-1}, x_m)$$

y la trayectoria de x_m a x_i es:

$$T_4 = (x_m, x_{m+1}, \dots, x_{i-1}, x_i)$$

Como $T_i \subset C$ con $i = \{3, 4\}$, entonces las trayectorias son de diferente paridad, como G es una gráfica de paridad, entonces todas las x_ix_m -trayectorias sin cuerdas son de la misma paridad. Sin pérdida de generalidad, supongamos que T_3 es de longitud par y T_4 es de longitud impar.

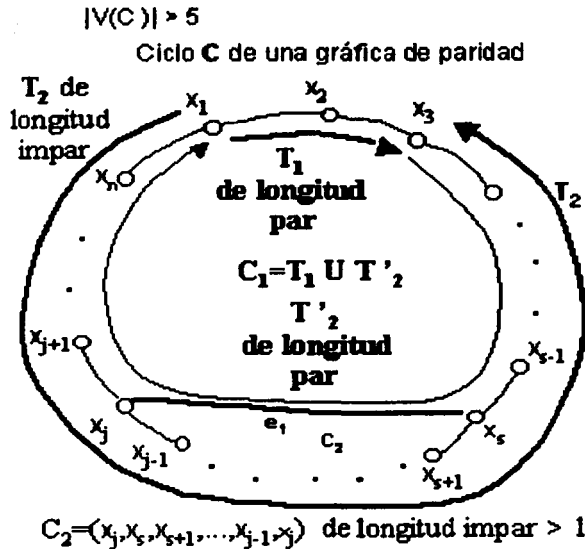


Figura 1.4:

Supongamos que las trayectorias sin cuerdas de x_i a x_m son de paridad par, entonces en T_4 debe tener una cuerda $e = (x_k, x_n)$. Existen dos casos:

Caso (1): Si $x_k \in V(T_4) \cap V(C_2)$ y $x_n \in V(T_4) \cap V(C_1)$, con $x_k \neq x_j \neq x_n$, ver figura (1.5). Se forman dos cuerdas $e_1 = (x_j, x_s)$ y $e_2 = (x_k, x_n)$ cruzadas en C .

$\therefore C$ tiene dos cuerdas cruzadas.

Caso (2): Si $\{x_k, x_n\} \subset V(T_4) \cap V(C_1)$, con $x_k \neq x_j \neq x_n$, como se muestra en la figura (1.6). Con la cuerda (x_k, x_n) se forma los ciclos:

$$C_3 = (x_k, T_4, x_n) \cup (x_n, x_k) = (x_k, x_{k+1}) \cup (x_{k+1}, T_4, x_n) \cup (x_n, x_k)$$

$$C_4 = (x_n, C, x_k) \cup (x_k, x_n)$$

Como C es de longitud impar, entonces uno de los dos ciclos C_3 ó C_4 es de longitud impar.

Caso (1): $e_2 = (x_k, x_n)$, con x_k en C_1 , x_n en C_2

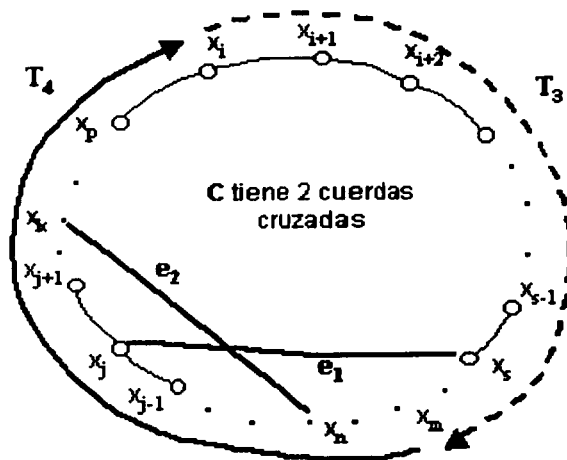


Figura 1.5:

Supongamos sin pérdida de generalidad que C_3 es de longitud impar, $\ell(C_3) > 3$, entonces por hipótesis de inducción C_3 tiene dos cuerdas cruzadas $\{f, g\}$, como $C_3 \subset C$, por lo tanto $\{f, g\}$ son cuerdas cruzadas en C .

Si $\ell(C_3) = 3$, entonces el ciclo C_4 es de longitud par, con la cuerda e_1 se forman dos ciclos C_2 de longitud 3 y $C_5 = (x_n, C_4, x_s) \cup (x_s, x_j) \cup (x_j, C_4, x_n)$.

Como C_4 es de longitud par y C_3 es de longitud impar, entonces C_5 es de longitud impar. Así por hipótesis de inducción C_5 tiene dos cuerdas f, g , cruzadas.

$\therefore C$ tiene dos cuerdas cruzadas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

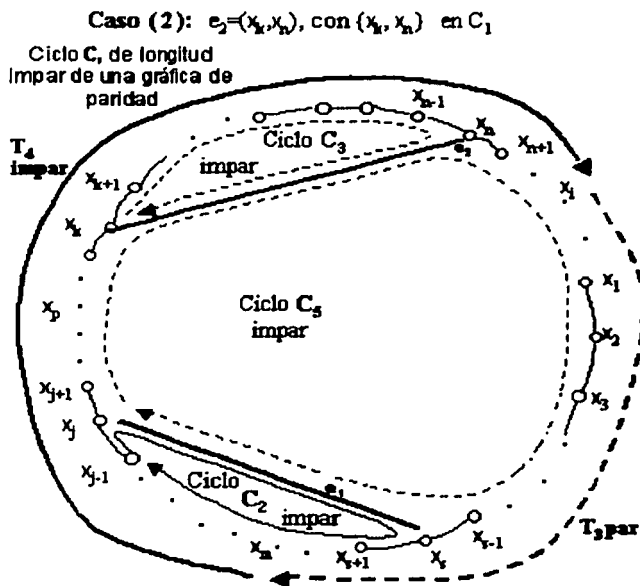


Figura 1.6:

Caso B.- Las trayectorias sin cuerdas de x_1 a x_3 son de paridad impar, en dicho caso se procede análogamente.

Suficiente :

Sea G una gráfica, tal que todo ciclo de longitud impar ≥ 5 en G tiene dos cuerdas cruzadas. Por demostrar que G es una gráfica de paridad.

Suponemos por contradicción, que G no es una gráfica de paridad. Elegir G que sea mínima con respecto al número de vértices y que no sea de paridad. Por lo que existen $\{x, y\} \subseteq V(G)$, tal que exista xy - trayectoria sin cuerda de paridad par y exista xy - trayectoria sin cuerda de paridad impar, por la minimalidad de G ambas trayectorias no se intersectan, dichas trayectorias son:

$T_1 = (x = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} = y)$ de paridad par y

$T_2 = (x = x_0, y_1, y_2, \dots, y_{2m-2}, y_{2m-1}, y_{2m}, y_{2m+1} = y = x_{2n})$ de paridad impar.

Si $\ell(T_1) = 2$ y $\ell(T_2) = 3$, entonces se forma un ciclo $C = T_1 \cup T_2^{-1}$ de longitud cinco, como T_1 y T_2 no tienen cuerdas, entonces C no tiene cuerdas cruzadas, lo cual no es posible, ya que por hipótesis todo ciclo de longitud impar de longitud ≥ 5 tiene dos cuerdas cruzadas, por lo tanto $\ell(T_2) > 3$.

Como las trayectorias T_1 y T_2 no tienen cuerdas, entonces las únicas cuerdas que pueden existir en C son las que van de $x_i \in V(T_1)$ a $y_j \in V(T_2)$, con $x_i \neq x_0$ y $y_j \neq y$, ver figura(1.7).

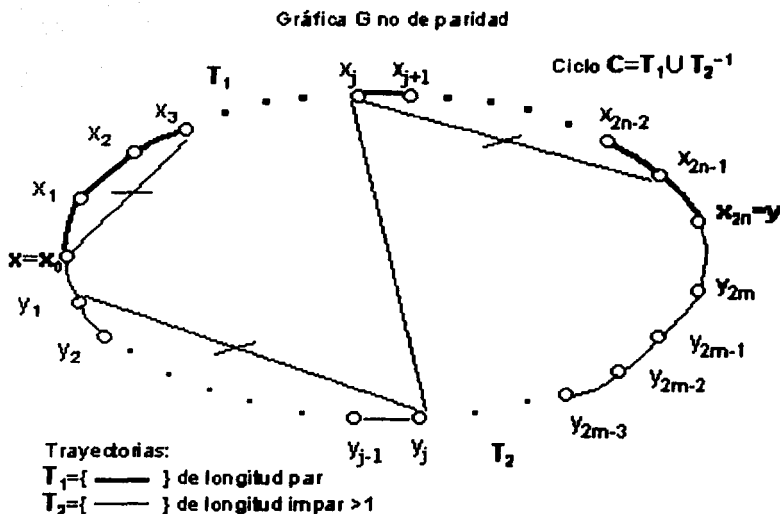


Figura 1.7:

A continuación vemos los casos de las cuerdas que pueden existir:

Sea $x_i \in T_1$

Caso (a): Si $i = 1$, es decir, x_1 es un extremo de la cuerda.

Subcaso (a.1): Si existe (x_1, y_{2m}) , entonces se forman dos $x_1 -$ trayectorias:

- $S_{2n} = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} = y) = (x_1, T_1, y)$ de longitud impar y
- $T_{2m} = (x_1, y_{2m}, y)$ de longitud par.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Observamos que dichas trayectorias no tienen cuerdas y se forma un ciclo $C_{2n} = S_{2n} \cup T_{2m}^{-1}$ de longitud impar sin cuerdas cruzadas, lo cual es contradicción, ya que por hipótesis todo ciclo impar ≥ 5 tiene dos cuerdas cruzadas.

$\therefore \nexists$ la arista (x_1, y_{2m}) en G .

Subcaso (a.2): Si existe (x_1, y_{2m-1}) , con esta arista se forman dos $x y_{2m-1}$ -trayectorias sin cuerdas:

- $T_{2m-1} = (x, x_1, y_{2m-1})$ de longitud par y
- $S_{2m-1} = (x, y_1, y_2, \dots, y_{2m-2}, y_{2m-1})$ de longitud impar

Estas dos trayectorias sin cuerdas tienen longitud menor o igual que T_1 y T_2 y con ellas se forma el ciclo:

$$C_2 = (x, x_1, y_{2m-1}, y_{2m-2}, y_{2m-3}, \dots, y_2, y_1, x)$$

de longitud impar sin cuerdas cruzadas y $\ell(C_2) < \ell(C)$. lo cual no es posible, ya que por hipótesis todo ciclo de longitud impar ≥ 5 tiene cuerdas cruzadas.

$\therefore \nexists$ la arista (x_1, y_{2m-1}) en G .

En general, ver la figura (1.8), observemos que el índice j del vértice y_j puede ser par ó impar.

Si existe la arista (x_1, y_j) , con $j = \{2, 4, 6, \dots, 2m - 2\}$, entonces se forman dos $x_1 y_j$ -trayectorias sin cuerdas:

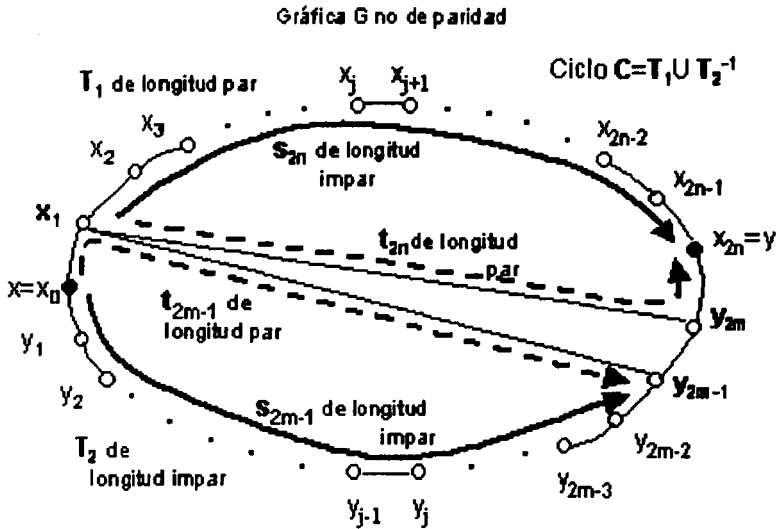
- $S_j = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} = y)$ de longitud impar y
- $T_j = (x_1, y_j, y_{j+1}, \dots, y_{2m+1} = y)$ de longitud par

Al menos una de las dos trayectorias sin cuerdas es de longitud menor que las que teníamos por hipótesis, lo cual no es posible.

$\therefore \nexists$ la arista (x_1, y_j) , con $j = \{2, 4, 6, \dots, 2m\}$ en G

Si existe la arista (x_1, y_j) , con $j = \{3, 5, 7, \dots, 2m - 1\}$, con esta arista se forman dos $x y_j$ -trayectorias sin cuerdas:

- $T_j = (x, x_1, y_j)$ de longitud par y
- $S_j = (x, y_1, y_2, \dots, y_j)$ de longitud impar



Tenemos: $x_1 y_j$ -arista en G, con $j = \text{par o impar}$

Figura 1.8:

Llegamos a que existen al menos alguna de las dos trayectorias sin cuerdas con longitud menor que las que partimos desde el principio, lo cual es una contradicción.

$\therefore \nexists$ la arista (x_1, y_j) , con $j = \{3, 5, 7, \dots, 2m - 1\}$ en G

El caso que nos falta es:

Subcaso (a3): Si existe la arista (x_1, y_1) , en este caso se forman dos ciclos, ver (figura(1.9)).

1. $C^1 = (x, x_1, y_1, x)$, el cual esta formado por 2 trayectorias sin cuerdas, una de paridad par, la cual es (x, x_1, y_1) de longitud dos, la otra de paridad impar, es decir, la arista (x, y_1) , la cual es menor que T_2 , dicha trayectoria no afecta en nada las hipótesis del teorema.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

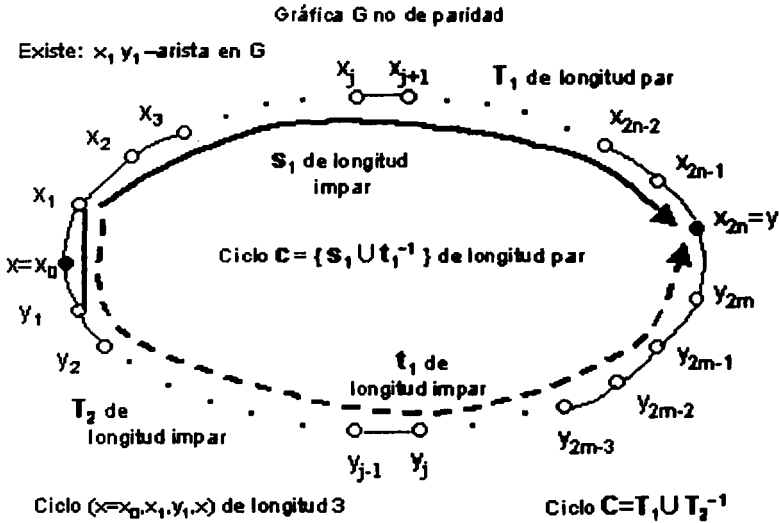


Figura 1.9:

2. $C^2 = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, y, y_{2m}, y_{2m-1}, \dots, y_2, y_1, x_1)$, el cual esta formado por la trayectoria: $(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, y)$ de longitud impar y $\{x_1, y_1, y_2, \dots, y_{2m-1}, y_{2m}, y\}$ de longitud impar, es decir, el ciclo es par, por lo que dicho ciclo no afecta las hipótesis del teorema, por lo tanto puede existir la arista (x_1, y_1) en G.

∴ la única arista que puede existir es: (x_1, y_1) .

Caso (b): Si $i = 2$, es decir, un extremo de la cuerda es el vértice x_2 y el otro extremo se encuentra en los $V(T_2)$.

Si existe la arista (x_2, y_j) , con j par, entonces se forma dos xy_j -trayectorias sin cuerdas:

- $T_j = (x, y_1, y_2, \dots, y_j)$ de longitud par y
- $S_j = (x, x_1, x_2, y_j)$ de longitud impar.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Al menos alguna de las dos trayectorias sin cuerdas tiene longitud menor que las que teníamos por hipótesis, lo cual no es posible, ya que por hipótesis las trayectorias sin cuerda T_1 y T_2 son de longitud mínima en G .

$\therefore \nexists$ la arista (x_2, y_j) , con j par en G .

Este caso lo ilustramos con la figura (1.10).

Si existe la arista (x_2, y_j) , con j impar, se forman dos x_2y -trayectorias sin cuerdas:

- $T_j = (x_2, x_3, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} = y)$ de longitud par.
- $S_j = (x_2, y_j, y_{j+1}, \dots, y_{2m+1} = y)$ de longitud impar.

$\therefore \nexists$ la arista (x_2, y_j) , con j impar en G .

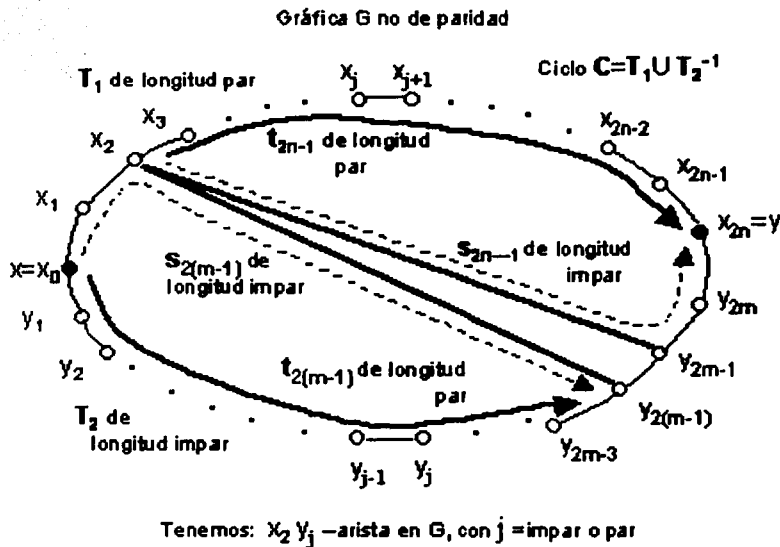


Figura 1.10:

Al menos alguna de las dos trayectorias sin cuerdas tiene longitud menor que T_1 ó T_2 , respectivamente en G , lo cual no es posible.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Caso (c): Si $i = \{3, 5, 7, \dots, 2n - 3\}$, es decir, las aristas son (x_i, y_j) , con j par o impar, ver figura (1.11).

Existen 2 casos:

i).- Si $j = \{2, 4, \dots, 2m\}$, con la arista (x_i, y_j) se forman dos $x_i y$ - trayectorias sin cuerdas:

- $S_j = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{2n} = y)$ de longitud impar y
- $T_j = (x_i, y_j, y_{j+1}, \dots, y_{2m+1} = y)$ de longitud par

Al menos alguna de las dos trayectorias sin cuerda es de longitud menor que T_1 ó T_2 , respectivamente, lo cual no es posible.

∴ ∄ la arista (x_i, y_j) , con $i = \{3, 5, \dots, 2n - 3\}$ y $j = \{2, 4, 6, \dots, 2m\}$ en G

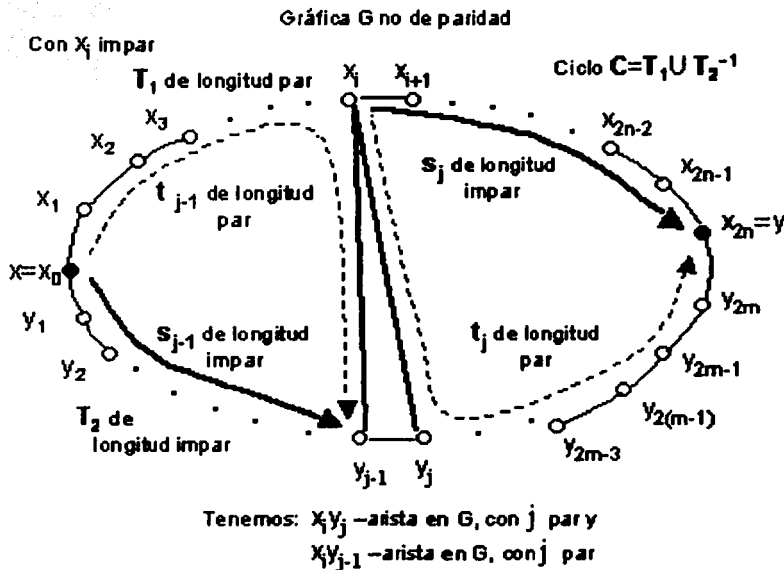


Figura 1.11:

ii).- Si $j = \{1, 3, \dots, 2m - 1\}$, con la arista (x_i, y_j) se forman dos $x_i y_j$ - trayectorias sin cuerdas:

- $T_j = (x, x_1, \dots, x_i, y_j)$ de longitud par y
- $S_j = (x, y_1, y_2, \dots, y_j)$ de longitud impar

Con lo que llegamos que al menos una de las dos trayectorias sin cuerda es de longitud menor a T_1 ó T_2 , lo cual es una contradicción.

∴ \nexists la arista (x_i, y_j) , con $i = \{3, 5, \dots, 2n - 3\}$ y $j = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2m - 1\}$ en G

Caso (d): Si $i = \{4, 6, \dots, 2n - 2\}$, es decir, tenemos la arista (x_i, y_j) , con j par o impar, ver figura (1.12). Dichos caso se hace análogamente como el Caso(c).

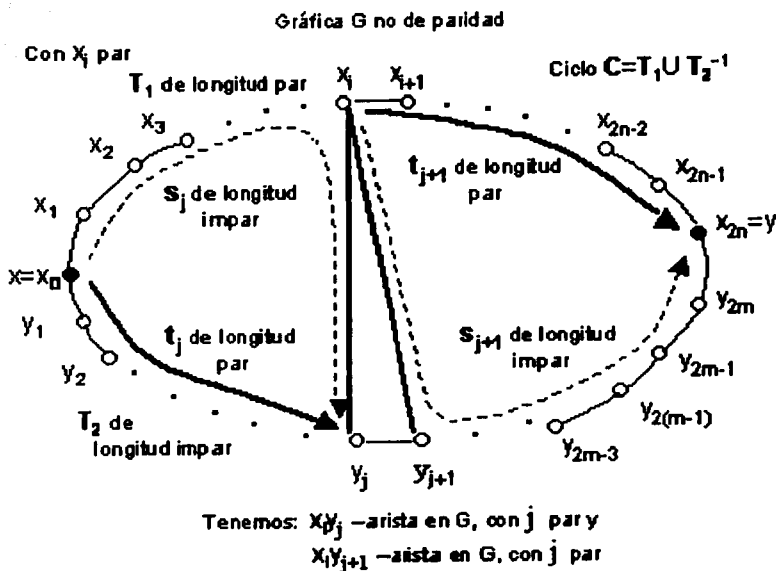


Figura 1.12:

Caso (e): Si $i = 2n - 1$, es decir, la arista (x_{2n-1}, y_j) , con j par o impar, ver figura (1.13).

Existen tres casos:

subcaso (e1): Si $j = \{2, 4, \dots, 2m - 2\}$, con la arista (x_{2n-1}, y_j) se forma dos $x_{2n-1} y_j$ -trayectorias sin cuerdas:

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

- $T_j = (x_{2n-1}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_{2m}, y)$ de longitud par.
- $S_j = (x_{2n-1}, x_{2n} = y)$ de longitud 1.

Con esto llegamos a que la $\ell(S_j) < \ell(T_2)$ y se forma un ciclo $C^j = S_j \cup T_j^{-1}$ de longitud impar sin cuerdas; menor que $C = T_1 \cup T_2^{-1}$, lo cual no es posible, ya que por hipótesis todo ciclo C de longitud impar ≥ 5 tiene dos cuerdas cruzadas.

$\therefore \nexists$ la arista (x_{2n-1}, y_j) , con $j = \{2, 4, \dots, 2m - 2\}$.

subcaso (e2): Si $j = \{1, 3, \dots, 2m - 1\}$, con la arista (x_{2n-1}, y_j) se forman dos trayectorias sin cuerdas:

- $T_j = (x, x_1, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, y_j)$ de longitud par y
- $S_j = (x, y_1, \dots, y_j)$ de longitud impar.

Con esto llegamos a que la $\ell(S_j) < \ell(T_2)$, lo cual no es posible ya que por hipótesis la trayectoria sin cuerda de longitud mínima de paridad impar es T_2 , por lo tanto la arista (x_{2n-1}, y_j) no existe.

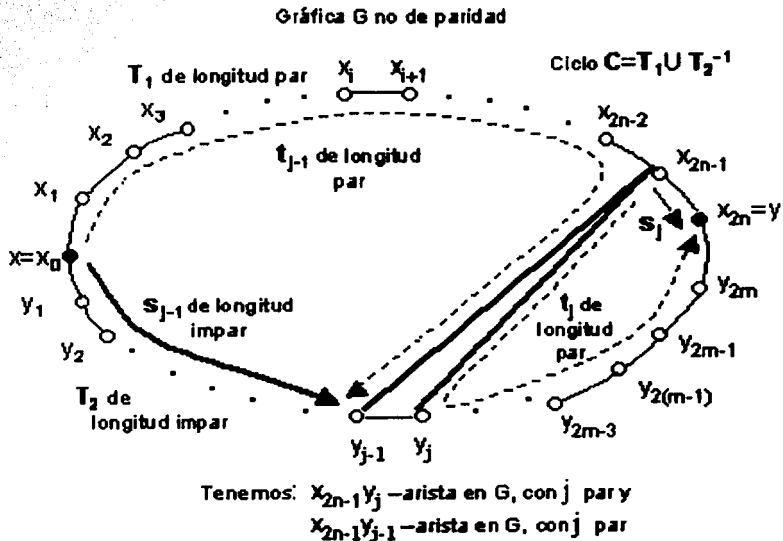


Figura 1.13:

$\therefore \nexists$ la arista (x_{2n-1}, y_j) con $j = \{1, 3, \dots, 2m - 1\}$ en G.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Solo el caso que nos falta es la arista: (x_{2n-1}, y_{2m}) ver figura (1.14).

subcaso (e3): Si existe la arista (x_{2n-1}, y_{2m}) , se forman dos ciclos:

- $C^1 = (x, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, y_{2m}, y_{2m-1}, \dots, y_1, x)$ de longitud par, el cual no altera la hipótesis del teorema y
- $C^2 = (x_{2n-1}, x_{2n} = y, y_{2m}, x_{2n-1})$ de longitud impar, es decir, formado por dos trayectorias, una de longitud par $\{x_{2n-1}, y_{2m}, y\}$, menor o igual que T_1 y la otra de de longitud 1, es decir, la arista (x_{2n-1}, y) , la cual es menor que T_2 , la cual no afecta a la hipótesis del teorema, esto se debe a que la trayectoria sin cuerdas de paridad impar T_2 es mayor o igual que tres,

∴ la única cuerda que puede existir es (x_{2n-1}, y_{2m}) en G .

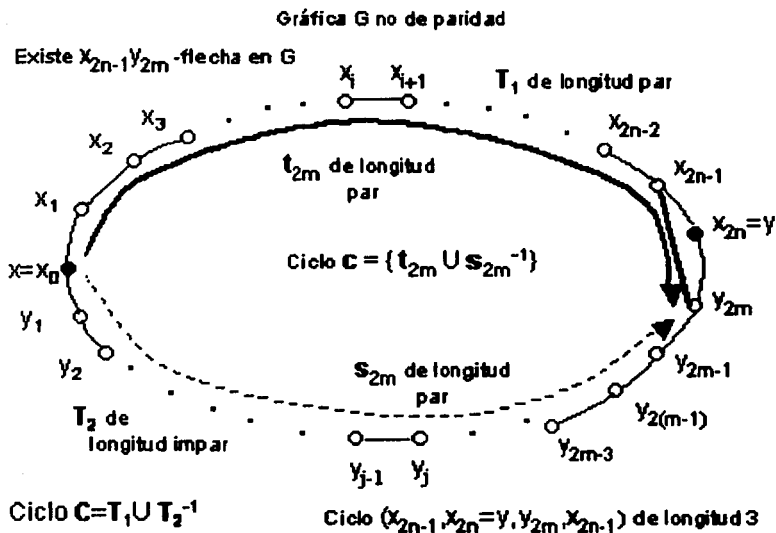


Figura 1.14:

Por lo anterior, las únicas cuerdas que puede tener el ciclo C de G , son de la forma (x_1, y_1) y (x_{2n-1}, y_{2m}) , las cuales no son cruzadas, esto no es posible, ya que todo ciclo de longitud impar ≥ 5 tiene dos cuerdas cruzadas, por lo tanto G es una gráfica de paridad.

∴ la condición es necesaria y suficiente. ■

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Definición No. 1.4. Sea \vec{C} ciclo dirigido en D , una cuerda $e = (x, y)$ se llama triangular si el ciclo inducido por e , \vec{C}_e es de longitud tres en D .

Definición No. 1.5. Dos cuerdas triangulares (x, y) y (z, t) en \vec{C} son cruzadas, si y sólo si, existe una trayectoria dirigida inducida por \vec{C} , (x, z, y, t) .

Ahora vamos a ver la relación que tienen las orientaciones M-admisibles de una gráfica de paridad con los ciclos dirigidos de longitud impar, es decir, si tenemos una gráfica G de paridad y la orientamos de tal manera que cada ciclo dirigido de longitud tres tenga dos flechas simétricas (orientación M-admissible), entonces podemos afirmar que cada ciclo C de longitud impar tiene dos polos consecutivos ó dos cuerdas triangulares cruzadas, lo anterior lo vamos a demostrar en el teorema 1.2.

Teorema No. 1.2. Si D es una orientación M-admissible de una gráfica G de paridad, entonces cada ciclo C de longitud impar ≥ 5 de D , tiene 2 polos consecutivos ó tiene 2 cuerdas triangulares cruzadas.

Demostración:

Sea G una gráfica de paridad, D una orientación M-admissible de G y C un ciclo de longitud impar ≥ 5 de D . Por demostrar que C tiene dos polos consecutivos ó tiene dos cuerdas cruzadas triangulares.

- Si $l(C) = 5$, $C = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1)$.

Como G es una gráfica de paridad y cumple las hipótesis del teorema (1.1), entonces el ciclo C tiene dos cuerdas cruzadas.

Por demostrar que C tienen dos cuerdas cruzadas triangulares ó dos polos consecutivos.

Supongamos que $f = (x_1, x_4) \in A(G)$ y $g = (x_5, x_3) \in A(G)$ son cuerdas cruzadas ver figura (1.15). Existen dos casos:

Caso a: Si $f = (x_1, x_4) \in F(D)$ y $g = (x_5, x_3) \in F(D)$, entonces tiene dos polos consecutivos $\{x_3, x_4\}$; si $f = (x_1, x_4) \in F(D)$ y $g = (x_3, x_5) \in F(D)$, entonces tiene dos polos consecutivos $\{x_4, x_5\}$

Caso b: Si $f = (x_4, x_1) \in F(D)$ y $g = (x_3, x_5) \in F(D)$, entonces tiene dos polos consecutivos $\{x_1, x_5\}$; si $f = (x_4, x_1) \in F(D)$ y $g = (x_5, x_3) \in F(D)$, ver figura (1.16).

Se forma un ciclo (x_3, x_4, x_5, x_3) de longitud tres, como D es una orientación M-admisble, entonces existe la flecha (x_5, x_4) y la flecha (x_4, x_3) en D , por lo tanto existen dos polos consecutivos $\{x_3, x_4\}$ en C .

Posibilidades de las direcciones de las cuerdas f y g en D

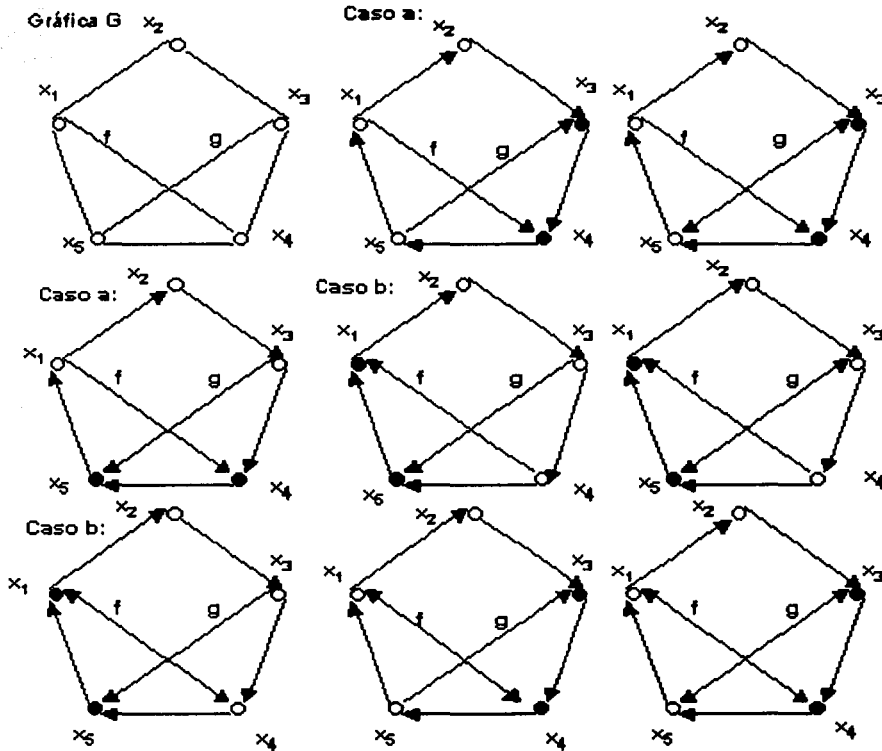


Figura 1.15:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

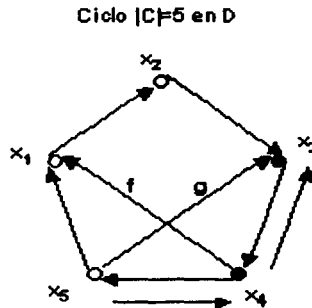


Figura 1.16:

\therefore Se cumple el teorema para $\ell(C) = 5$.

- Sea D una orientación M -admisibles de una gráfica G de paridad y C un ciclo de longitud $n > 5$. Por demostrar que C tiene dos polos consecutivos o dos cuerdas cruzadas triangulares.

Supongamos que existe un ciclo $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{2n}, x_0)$ de longitud impar mínima ≥ 7 en D , que no tiene dos polos consecutivos, ni dos cuerdas cruzadas triangulares. Por el teorema (1.1), C tiene dos cuerdas cruzadas en G , entonces podemos considerar los siguientes casos:

- a). - Si C no tiene cuerdas triangulares,
- b). - Si C tiene una cuerda triangular e , cruzada por otra cuerda f y
- c). - Si C tiene una cuerda triangular e y ninguna cuerda triangular de C es cruzada por otra cuerda.

Caso (a): Si C no tiene cuerdas triangulares.

Elegimos una cuerda $e = (x_s, x_{i+1})$ en C , denotemos $x_s = x$ y $x_{i+1} = y$, tal que el ciclo inducido por e , $C_e = (x, y, x_{i+2}, C, x_{s-1}, x)$, es de longitud impar mínima, ver figura (1.17).

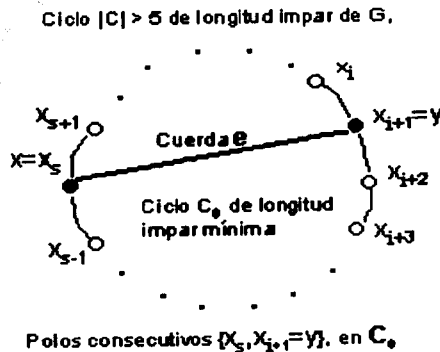


Figura 1.17:

Sean x', y' los vecinos de x y y respectivamente en $C_e - \{x, y\}$, es decir, $x' = x_{s-1}$ y $y' = x_{i+2}$ en C . Por la elección de C y $5 \leq \ell(C_e) < \ell(C)$, tenemos dos subcasos:

- C_e tiene 2 polos consecutivos ó
- C_e tiene 2 cuerdas cruzadas triangulares.

subcaso (a.1) C_e tiene 2 polos consecutivos.

Como $V(C_e) \subseteq V(C)$ y C no tiene polos consecutivos, entonces los únicos polos de C_e son los extremos de la cuerda e , es decir, $\{x, y\}$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Supongamos que $(x, y') \notin A(G)$, entonces tenemos una trayectoria sin cuerdas $\{x, y, y'\}$ de longitud par y una trayectoria de y' a x inducida por C_e , la cual es: $T = (y' = x_{i+2}, x_{i+3}, \dots, x' = x_{s-1}, x)$ de longitud impar, ver figura(1.18).

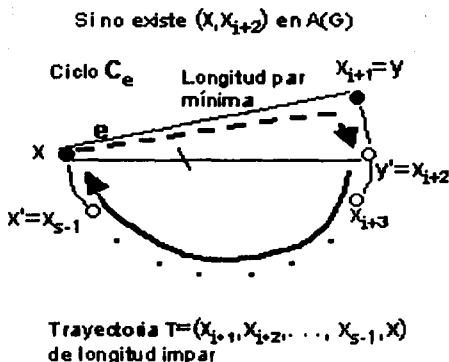


Figura 1.18:

Como $C_e \subseteq G$ y que G es una gráfica de paridad, entonces todas y' -trayectorias sin cuerdas son de la misma paridad, como supusimos que la trayectoria (x, y, y') no tiene cuerdas, entonces la trayectoria T debe tener una cuerda e' , con dicha cuerda se forman dos ciclos en G , como C es de longitud impar, entonces uno de los ciclos formados por e' es de longitud impar, el cual lo denotamos por $C_{e'}$, dicho ciclo es de longitud menor que C_e , es decir, $\ell(C_{e'}) < \ell(C_e)$, esto nos conduce a una contradicción, ya que por hipótesis C_e es de longitud impar mínima.

\therefore la cuerda (x, y') existe en G .

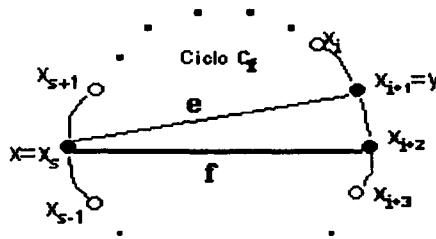
Sea $f = (x, y')$, como $\ell(C_e) \geq 5$, entonces f es una cuerda de C , obtenemos un ciclo inducido por f , $C_f = (y' = x_{i+2}, x, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_i, x_{i+1} = y, y')$, que cumple: $5 \leq \ell(C_f) < \ell(C)$. Por ser el ciclo C de longitud mínima, tenemos dos casos si C_f tiene dos polos consecutivos o C_f tiene dos cuerdas cruzadas triangulares.

Si C_f tiene 2 polos consecutivos, como $V(C_f) \subseteq V(C)$ y C no tiene polos consecutivos, entonces los únicos polos de C_f son $\{x, y'\}$, ver figura (1.19).

Con ésto llegamos, que $\{x, y, y'\}$ son polos de C , $\{y, y'\}$ son polos consecutivos en C , lo cual no es posible, ya que C no tiene polos consecutivos.

$\therefore C_f$ no tiene polos consecutivos.

Si existe (x, x_{i+2}) en $A(G)$.



$C_f = (x_{i+2}, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{i+1}, x_{i+2})$, tiene dos polos, (x, x_{i+2}) , consecutivos

Figura 1.19:

Si C_f tiene 2 cuerdas cruzadas triangulares, como C no tiene cuerdas cruzadas triangulares, además $C_f \subseteq C$, entonces las únicas cuerdas triangulares de C_f son $e = (x, y)$ y (x'', y') , donde x'' es el vértice en C_f adyacente a x , con $x'' \neq y'$, es decir, $x'' = x_{s+1}$ en C , ver figura(1.20).

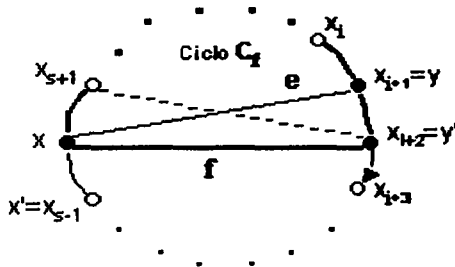
TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Por lo tanto x'' ó y' son polos en C :

1. Si y' es polo en C , entonces $\{y, y'\}$ son polos consecutivos en C , lo cual no es posible, ya que por hipótesis C no tiene polos consecutivos, por lo tanto y' no es polo en C .
2. Si x'' es polo en C , entonces $\{x, x''\}$ son polos consecutivos en C , lo cual es imposible, ya que C no tiene polos consecutivos, por lo tanto x'' no es polo en C .

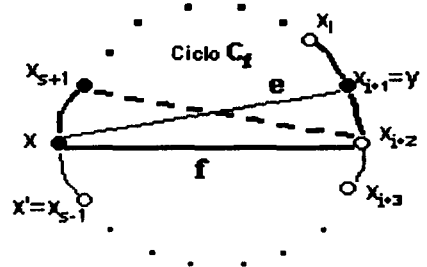
C_f tiene 2 cuerdas, (x, x_{i+1}) y (x_{s+1}, x_{i+2}) , cruzadas triangulares.

1.- Si y' es polo en C_f .



Tiene $\{x_{i+1}, x_{i+2}\}$ polos consecutivos en D

2.- Si x_{s+1} es polo en C_f



Tiene $\{x, x_{s+1}\}$ polos consecutivos en D .

Figura 1.20:

$\therefore C_f$ no tiene 2 cuerdas cruzadas triangulares.

Por lo que podemos concluir que C_e no tiene polos consecutivos, es decir, este caso no es posible.

subcaso (a.2): C_e tiene 2 cuerdas cruzadas triangulares.

Como C no tiene cuerdas cruzadas triangulares y además $C_e \subset C$, entonces las únicas cuerdas triangulares de C_e son: (x, y') y (x', y) , ver figura(1.21), en G .

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

- Si x es polo en C , como C no tiene polos consecutivos, entonces x' no es polo en C , lo cual implica que existe $(x', y) \in F(D)$.
 - Si y es polo en C , como C no tiene polos consecutivos, entonces y' no es polo en C , lo cual implica que existe $(y', x) \in F(D)$.
- En ambos casos obtenemos $\{x, y\}$ polos consecutivos en C_e , lo cual ya vimos que no es posible (subcaso (a.1)).
- Si x' es polo en C , como C no tiene polos consecutivos, entonces x no es polo en C , lo cual implica que existe $(x, y) \in F(D)$ y $(x, y') \in F(D)$, por lo tanto $\{y, y'\}$ son polos consecutivos en C , lo cual no es posible.
 - Si y' es polo en C , como C no tiene polos consecutivos, entonces y no es polo en C , lo cual implica que existe $(y, x) \in F(D)$ y $(y, x') \in F(D)$, por lo tanto $\{x, x'\}$ son polos consecutivos en C , lo cual no es posible.

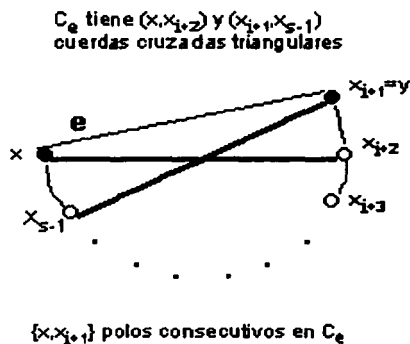


Figura 1.21:

$\therefore C_e$ no tiene dos cuerdas cruzadas triangulares, es decir, este caso no es posible.

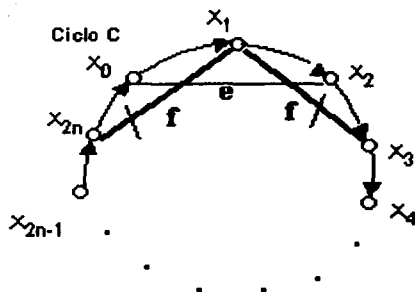
Caso (b): Si C tiene una cuerda triangular e , cruzada por otra cuerda f .

Sea $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}, x_0)$, sin pérdida de generalidad sea $e = (x_0, x_2) \in A(G)$ y $f = (x_1, w) \in A(G)$, como C no tiene cuerdas cruzadas triangulares, ver figura (1.22), entonces $x_{2n} \neq w \neq x_3$, es decir, $w \in x_i \in V(C)$, con $4 \leq i \leq 2n - 1$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Con la cuerda $e = (x_0, x_2)$, obtenemos que x_0 es polo en C ó que x_2 es polo en C , entonces x_1 no puede ser polo en C , por que se tendrá dos polos consecutivos en C .

$\therefore \exists (x_1, w) \in \text{Asim}(D)$.



Como C no tiene cuerdas cruzadas triangulares, entonces $(x_1, x_{2n}) \notin A(G)$ y $(x_1, x_3) \notin A(G)$

Figura 1.22:

Como C es de longitud impar y f es una cuerda de C , entonces se forma un ciclo inducido por f , C_f de longitud impar, sin pérdida de generalidad $C_f = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, w, x_1)$. Por la elección de C y $5 \leq \ell(C_f) \leq \ell(C)$, tenemos dos casos:

C_f tiene dos polos consecutivos ó C_f tiene dos cuerdas cruzadas triangulares.

Si C_f tiene 2 polos consecutivos, como $C_f \subset C$ y C no tiene polos consecutivos, entonces los únicos polos consecutivos en C_f son los extremos de la cuerda f , es decir, $\{x_1, w\}$, ver figura (1.23), lo cual no es posible, ya que x_1 no es polo en C .

$\therefore C_f$ no tiene 2 polos consecutivos.

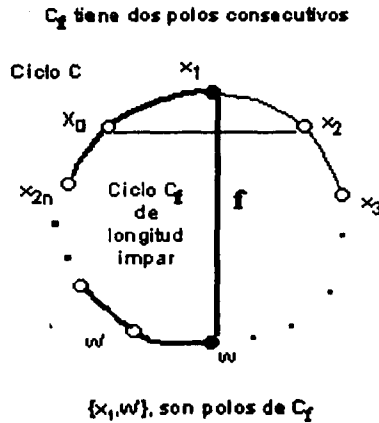


Figura 1.23:

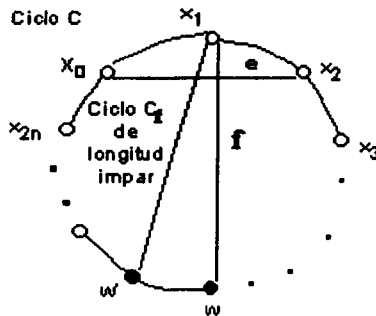
Si C_f tiene 2 cuerdas cruzadas triangulares, como $V(C_f) \subset V(C)$ y C no tiene cuerdas cruzadas triangulares, entonces las únicas cuerdas cruzadas triangulares en C_f son $g = (x_1, w')$ y $h = (w, x_0)$, donde $w' \in V(C_f)$ y $(w, w') \in A(C)$, ver figura (1.24).

Como x_1 no es polo en C , entonces existe la flecha $(x_1, w') \in F(D)$, es decir, w' es polo en C , por lo tanto w' y w son polos consecutivos en C , lo cual no es posible, ya que C no tiene polos consecutivos.

$\therefore C_f$ no tiene 2 cuerdas cruzadas triangulares, lo cual implica que este caso no es posible.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

C_2 tiene 2 cuerdas cruzadas triangulares



$\{w, w\}$, son polos consecutivos en C

Figura 1.24:

Caso (c): Si C tiene una cuerda triangular e y ninguna cuerda triangular de C es cruzada por otra cuerda.

Sea $\{x = x_s, x_{s+1}, x_{s+2}\} \subseteq V(C)$, tal que exista la trayectoria $(x = x_s, x_{s+1}, x_{s+2}) \subseteq C$, la cuerda $e = (x = x_s, x_{s+3})$ sea triangular y $\{x_{s-1}, x_{s+3}\}$ los vecinos de $x = x_s$ y x_{s+2} , respectivamente en $C - \{x = x_s, x_{s+2}\}$.

Como $\ell(C) \geq 7$, entonces los vértices $\{x, x_{s-1}, x_{s+2}, x_{s+3}\}$ son todos diferentes entre sí, ver figura (1.25).

Por demostrar que existen las aristas $(x_{s-1}, x_{s+2}) \in A(G)$ y $(x, x_{s+3}) \in A(G)$.

Tenemos las siguientes trayectorias de x_{s+1} a x_{s-1} :

1. La trayectoria (x_{s+1}, x, x_{s-1}) , como no existe la cuerda (x_{s+1}, x_{s-1}) , entonces dicha trayectoria no tiene cuerdas y es de longitud par en G .
2. Como la cuerda $(x_{s+1}, x_{s+3}) \notin A(G)$, entonces la trayectoria de x_{s+1} a x_{s-1} inducida por C debe pasar por el vértice x_{s+2} , dicha trayectoria la denotamos por $T = (x_{s+1}, x_{s+2}, x_{s+3}, C, x_{s-1})$, la cual es de longitud impar.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

C tiene una cuerda triangular $e=(x, x_{s+2})$
y no es cruzada por otra.

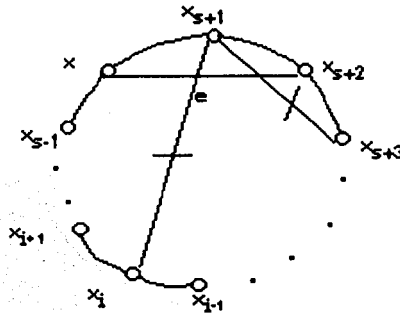


Figura 1.25:

Como G es una gráfica de paridad, entonces toda trayectoria de x_{s+1} a x_{s-1} tienen la misma paridad, sabemos que $x_{s+1}x_{s-1}$ - trayectoria sin cuerda es de paridad par, entonces debe existir una cuerda (x_i, x_j) en T , ver figura(1.26). Con la cual se forma T' una trayectoria inducida por C .

$$T' = (x_{s+1}, T, x_i) \cup (x_i, x_j) \cup (x_j, T, x_{s-1})$$

Como la trayectoria T' no tiene cuerdas y $T'' = (x_{s+2}, T', x_{s-1}) \subset T'$, entonces T'' no tiene cuerdas y es de paridad impar, ya que $(x_{s-1}, x_{s+2}) \notin A(T'')$.

Obtenemos dos trayectoria de x_{s+2} a x_{s-1} :

- (x_{s+2}, x, x_{s-1}) de paridad par y
- $T'' = (x_{s+2}, T', x_{s-1})$ de paridad impar

de diferente paridad, como la trayectoria sin cuerda es de longitud impar, entonces debe existir la cuerda (x_{s+2}, x_{s-1}) .

$\therefore \exists$ la arista (x_{s-1}, x_{s+2}) en G .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Trayectorias:

(x_{s+1}, x, x_{s-1}) de longitud par, sin cuerdas.

$T = (x_{s+1}, x_{s+2}, x_{s+3}, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{s-2}, x_{s-1})$ de longitud impar.

$T' = (x_{s+1}, x_{s+2}, x_{s+3}, x_{i+1}, x_j, x_{i-1}, \dots, x_{s-2}, x_{s-1})$ de longitud par, sin cuerdas.

$T'' = (x_{s+2}, x_{s+3}, x_{i+1}, x_j, x_{i-1}, \dots, x_{s-2}, x_{s-1})$ de longitud impar, sin cuerdas

Figura 1.26:

Sola falta demostrar que existe la arista $(x, x_{s+3}) \in A(G)$.

Las trayectorias de x_{s+1} a x_{s+3} son:

1.- La trayectoria $(x_{s+1}, x_{s+2}, x_{s+3})$, como no existe la cuerda (x_{s+1}, x_{s+3}) , entonces dicha trayectoria no tiene cuerdas y es de longitud par.

2.- Como la cuerda $(x_{s+1}, x_{s-1}) \notin A(G)$, entonces la trayectoria de x_{s+3} a x_{s+1} inducida por C debe pasar por el vértice x , dicha trayectoria la denotamos por $T_1 = (x_{s+3}, C, x_{s-1}, x, x_{s+1})$, la cual es de longitud impar.

Como G es una gráfica de paridad, entonces todas las $x_{s+3}x_{s+1}$ - trayectorias sin cuerdas tienen la misma paridad, por lo tanto toda $x_{s+3}x_{s+1}$ - trayectoria sin cuerdas es de paridad par, entonces debe existir una cuerda (x_i, x_j) en T_1 .

Denotemos $f = (x, x_{s+3}) \in A(G)$ y $g = (x_{s-1}, x_{s+2}) \in A(G)$ cuerdas de C . Como C es de longitud impar > 5 , entonces se forman dos ciclos, C_f es el ciclo inducido por f y C_g es el ciclo inducido por g , los cuales son de longitud impar. Por la elección de C y $5 \leq \ell(C_f) = \ell(C_g) < \ell(C)$, tenemos dos casos:

Si C_f tiene 2 polos consecutivos, como $C_f \subset C$ y además C no tiene polos consecutivos, entonces los únicos polos consecutivos de C_f son los extremos de f , es decir, $\{x, x_{s+3}\}$ son polos consecutivos de C_f , ver figura (1.28).

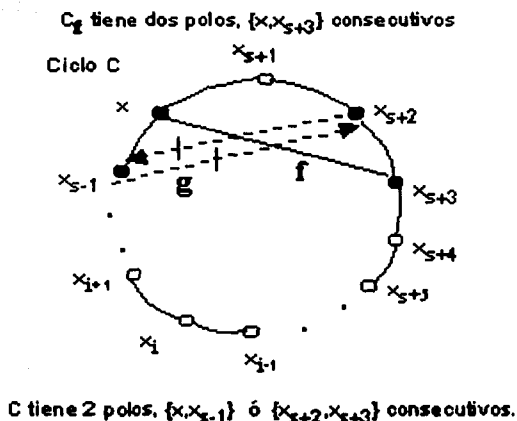


Figura 1.28:

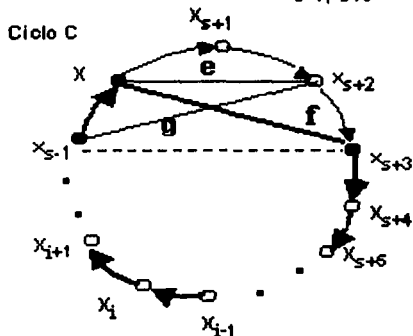
Como x es polo de C , entonces x_{s-1} no es polo de C , por lo cual existe $(x_{s-1}, x_{s+2}) \in F(D)$, con esto llegamos que $\{x_{s+2}, x_{s+3}\}$ son polos consecutivos en C , lo cual no es posible.

$\therefore C_f$ no tiene 2 polos consecutivos.

Si C_f tiene 2 cuerdas cruzadas triangulares, como C no tiene cuerdas cruzadas triangulares y además $C_f \subset C$, entonces una de las cuerdas triangulares de C_f es (x_{s-1}, x_{s+3}) , ver figura (1.29)

- Si x_{s+3} es polo en C , entonces x_{s+2} no es polo en C , por lo cual $(x_{s+2}, x_{s-1}) \in F(D)$ y $(x_{s+2}, x) \in F(D)$, lo cual implica que $\{x_{s-1}, x\}$ son polos consecutivos en C , lo cual no es posible, ya que C no tiene polos consecutivos, por lo tanto x_{s+3} no es polo en C .

C_j tiene dos cuerdas cruzadas, (x_{s-1}, x_{s+3}) y (x, x_{s+4})



- Si x_{s+3} es polo, entonces C tiene 2 polos, $\{x, x_{s-1}\}$ consecutivos.
- Si x_{s-1} es polo, entonces C tiene 2 polos, $\{x_{s+2}, x_{s+3}\}$ consecutivos.

Figura 1.29:

- Si x_{s-1} es polo en C, entonces x no es polo en C, por lo cual $(x, x_{s+3}) \in F(D)$ y $(x, x_{s+2}) \in F(D)$, lo cual implica que $\{x_{s+2}, x_{s+3}\}$ son polos consecutivos en C, lo cual no es posible, ya que C no tiene polos consecutivos, por lo tanto x_{s-1} no es polo en C.

$\therefore C_j$ no tiene 2 polos consecutivos.

Por lo tanto todos los casos no son posibles.

\therefore Se cumple el teorema para $\ell(C) \geq 5$. ■

Teorema No. 1.3. [7] Sea G una gráfica de paridad. Cada orientación M-admisibles de G , satisface la condición:

Cada ciclo dirigido \vec{C} de longitud impar tiene 2 polos consecutivos en \vec{C} .

Demostración:

Sea G una gráfica de paridad, $D = (V(D), F(D))$, una orientación M-admisibles de G . Por demostrar que todo ciclo dirigido \vec{C} de D tiene 2 polos consecutivos.

Suponemos que todo ciclo dirigido de longitud impar en D no tiene dos polos consecutivos, por lo tanto existe un ciclo dirigido de longitud impar \vec{C} que no tiene dos polos consecutivos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Por otro lado tenemos que cumple las hipótesis del teorema (1.2) y \vec{C} no tiene dos polos consecutivos, entonces \vec{C} tiene dos cuerdas cruzadas triangulares.

Sin pérdida de generalidad $f = (x_2, x_4)$ y $g = (x_1, x_3)$ son las cuerdas cruzadas triangulares en C .

Como se ve en la figura (1.30).

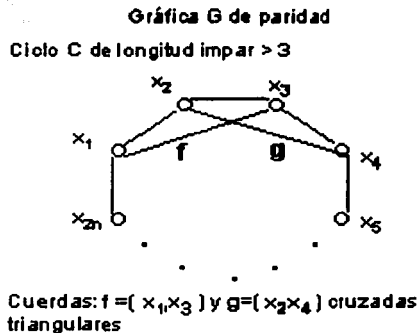


Figura 1.30:

Existen varias posibilidades de las direcciones de las cuerdas en el ciclo dirigido \vec{C} en D , ver figura(1.31).

caso (1): Si $f = (x_1, x_3) \in F(D)$, tenemos dos casos si $g = (x_2, x_4) \in F(D)$, entonces $\{x_3, x_4\}$ son polos consecutivos en \vec{C} y si $(x_4, x_2) \in F(D)$, entonces $\{x_2, x_3\}$ son polos consecutivos en \vec{C} .

caso (2): Si $f = (x_3, x_1) \in F(D)$, tenemos dos casos si $g = (x_4, x_2) \in F(D)$, entonces $\{x_1, x_2\}$ son polos consecutivos en \vec{C} y si $g = (x_2, x_4) \in Asim(D)$, con la flecha (x_3, x_1) se forma un ciclo de longitud 3 en D , el cual es (x_1, x_2, x_3, x_1) , por ser D una orientación M-admisibles, tiene dos cuerdas simétricas, las cuales son $(x_2, x_1) \in F(D)$ y $(x_3, x_2) \in F(D)$, por lo tanto $\{x_1, x_2\}$ son dos polos consecutivos en \vec{C} .

En ambos casos existen polos consecutivos, lo cual es una contradicción, ya que por hipótesis \vec{C} no tiene polos consecutivos.

Posibilidades de las cuerdas f y g en la orientación D, M -admisble de una gráfica G de paridad

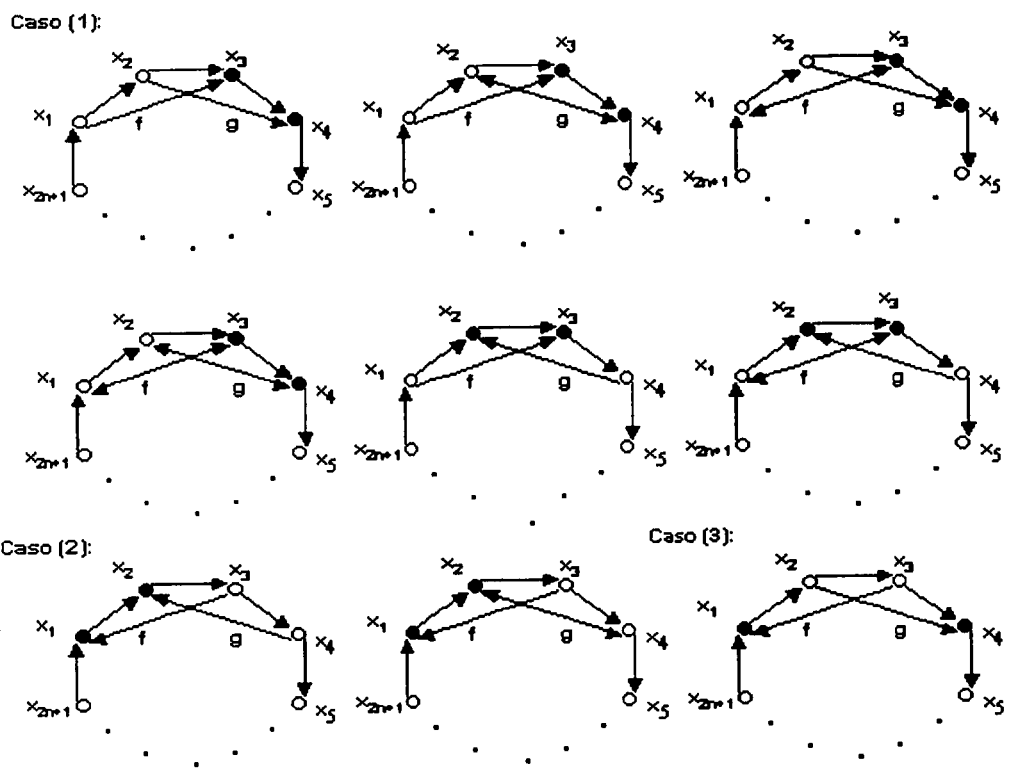


Figura 1.31:

∴ Se cumple el teorema ■

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A continuación mencionamos una condición suficiente para las digráficas núcleo perfectas, dada por Galeana-Sanchez y V. Neumann-Lara:

Teorema No. 1.4 (Galeana y Neumann [12]). *Sea D una digráfica. Si cada ciclo dirigido \vec{C} de longitud impar, tiene dos polos consecutivos en \vec{C} , entonces D es núcleo perfecta.*

Sea G una gráfica de paridad, D una orientación M -admisibles de G y \vec{C} un ciclo dirigido de longitud impar. Por el teorema (1.3), cada ciclo dirigido \vec{C} de longitud impar tiene 2 polos consecutivos en \vec{C} , es decir, que cumple la condición del teorema (1.4) de Galeana y Neumann, por lo cual D es una digráfica núcleo perfecta, es decir, las orientaciones M -admisibles de una gráfica de paridad son núcleo perfectas.

Por lo que podemos concluir que: Cada orientación M -admisibles de una gráfica de paridad tiene núcleo, es decir, que las gráficas de paridad son M -solubles.

Capítulo 2

Orientaciones en gráficas de líneas

Los primeros en estudiar el concepto de gráfica de líneas fueron los investigadores Whitney[17] y Krausz[13]. A una gráfica G podemos asociarle una nueva gráfica, llamada gráfica de líneas, denotada por $L(G)$, tal que, $V(L(G)) = A(G)$ y u es adyacente a v en $L(G)$, si y sólo si, u es adyacente a v en G como arista.

Uno de los objetivos del presente capítulo, es relacionar las gráficas de líneas, las orientaciones admisibles, los ciclos dirigidos de longitud impar y el concepto de digráfica núcleo perfecta, dicha relación la podemos redactar de esta manera: “ **Una orientación D de una gráfica de líneas es núcleo perfecta, si y sólo si, D es una orientación admisible y todo ciclo dirigido de longitud impar tienen una cuerda.** Al final del presente capítulo daremos algunos ejemplos que representan los casos posibles del teorema anterior.

En el presente capítulo, vamos a considerar las digráficas que no tienen flechas simétricas. Recordamos que una gráfica le podemos asociar una nueva gráfica, llamada gráfica de líneas, denotada por $L(G)$, tal que:

- $V(L(G)) = A(G)$
- u es adyacente a v en $L(G)$, si y sólo si, u es adyacente a u en G como arista.

Una orientación D de una gráfica G se llama admisible, si cada clan Q de D tiene núcleo, es decir, Q tiene un pozo. Por último una digráfica D es núcleo perfecta, si todas sus subdigráficas inducidas de D , incluyendo ella misma tienen núcleo.

A continuación vamos a ver un teorema que relaciona las gráficas de líneas, las orientaciones admisibles, los ciclos dirigidos de longitud impar y el concepto de digráfica núcleo perfecta.

Teorema No. 2.1. *Sea H una gráfica y $L(H)$ su gráfica de líneas. Una orientación D de $L(H)$ es núcleo perfecta $\Leftrightarrow D$ es una orientación admisible y todo ciclo dirigido de longitud impar tiene una cuerda.*

Demostración:

\Rightarrow) Sea H una gráfica, $L(H)$ su gráfica de líneas y D una orientación de $L(H)$, tal que D es núcleo perfecta.

Por demostrar que D es una orientación admisible y cada ciclo dirigido impar en D tiene una cuerda.

Como D es núcleo perfecta, entonces cada subdigráfica inducida en D tiene núcleo, lo que cada subdigráfica inducida completa tiene pozo, es decir, D es una orientación admisible.

Sea \vec{C} un ciclo dirigido impar en D , como D es núcleo perfecta, entonces la subdigráfica inducida por \vec{C} tiene núcleo, por lo tanto al menos tiene una cuerda.

$\therefore D$ es una orientación admisible y cada ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos una cuerda.

\Leftarrow) Sea H un gráfica y $L(H)$ su gráfica de líneas. Consideramos D una orientación admisible de $L(H)$, tal que todo ciclo dirigido de longitud impar en D tiene una cuerda.

Por demostrar que D es núcleo perfecta.

La demostración la vamos hacer por inducción sobre el número de aristas de H . Sea $|A(H)| = q$

Si $q = 1$.

Sea $V(H) = \{x_1, x_2\}$ y $A(H) = \{(x_1, x_2)\}$, la gráfica $L(H)$ sólo consta de un vértice, es decir, $V(L(H)) = \{(x_1, x_2)\}$ y $A(L(H)) = \emptyset$, entonces D es núcleo perfecta.

Si $q > 1$. Sea H una gráfica mínima con respecto al número de aristas, que no cumple con el teorema, es decir, consideramos D una orientación admisible de $L(H)$, tal que todo ciclo dirigido de longitud impar en D tiene una cuerda, pero D no tiene núcleo. Y por hipótesis de inducción toda subgráfica inducida propia tiene núcleo.

A continuación vamos a etiquetar las aristas de H . Para cada $u \in V(H)$, cada arista e que incide en u le ponemos la etiqueta $\ell_u(e)$, de modo que todas las aristas cumplan:

si $\ell_u(e') < \ell_u(e'')$, entonces $(e', e'') \in F(D)$

Para cada vértice $u \in V(H)$, denotamos por $e(u)$ a la arista que incide en u con la máxima etiqueta $\ell_u(e)$, es decir, $e(u) = \max \ell_u(e)$, por lo que existen dos casos:

- Si existen $\{u, w\} \subseteq V(H)$, con $u \neq w$, tal que $e(u) = e(w)$.
- Si para todo $\{u, w\} \subseteq V(H)$, con $u \neq w$, se tiene $e(u) \neq e(w)$.

Caso 1: Si existen $u, w \in V(H)$, con $u \neq w$, tal que $e(u) = e(w)$.

Tomamos la orientación de D restringida a la gráfica $L(H - \{u, w\})$, denotamos dicha orientación por D' , entonces D' es una subgráfica de D , por la minimalidad de H , la digráfica D' tiene núcleo. Sea N el núcleo en D' , por demostrar que $N \cup \{e(u)\}$ es núcleo en D .

1. $N \cup \{e(u)\}$ es independiente.

Como N es núcleo en $D' \subseteq D$, entonces N es independiente en D . Sea $q \in N$, sin pérdida de generalidad, suponemos que existe $(q, e(u)) \in F(D)$. Como $q \in N \subseteq V(D)$ y $e(u) \in V(D)$, entonces $\{q, e(u)\} \subseteq A(H)$, por otro lado sabemos que $e(u) = e(w)$, entonces $e(u) = (u, w)$. Denotamos por $q = (x, y)$, como $(q, e(u)) \in F(D)$, entonces $y \in \{u, w\}$, ver figura (2.1).

Por lo que $q \notin A(H - \{u, w\})$, lo cual implica que $q \notin V(D')$, entonces $q \notin N$, lo cual es una contradicción.

2. $N \cup \{e(u)\}$ es absorbente.

Sea $x \in V(D) - (N \cup \{e(u)\})$, tenemos los siguientes casos:

- Para $x \in V(D') - N$, $\exists xN$ - flecha en D' , como $D' \subseteq D$, entonces $\exists xN$ - flecha en D .

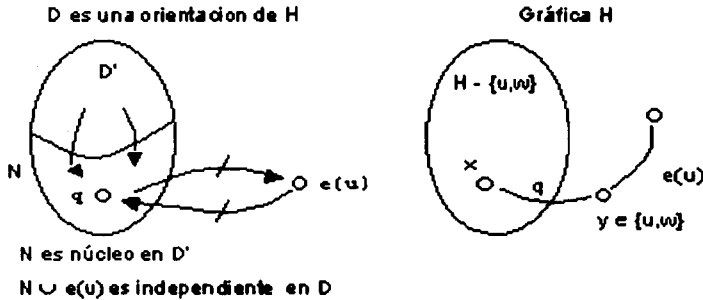


Figura 2.1:

- Para $x \in V(D - D') - \{e(u)\}$, observemos que el vértice x corresponde a una arista que incide en u ó una arista que incide en w , como $\ell_u(x) < \max \ell_u(e) = e(u)$ ó $\ell_w(x) < \max \ell_w(e) = e(w)$, entonces existe $(x, e(u) = e(w)) \in F(D)$.

Por lo tanto $N \cup \{e(u)\}$ es núcleo en D , lo cual es una contradicción, ya que D no tiene núcleo.

\therefore para todo $\{u, w\} \subseteq V(D)$, $e(u) \neq e(w)$.

Caso 2 Si para todo $\{u, w\} \subseteq V(D)$, con $u \neq w$, tenemos que todas las $e(u)$ son distintas.

Entonces formamos el conjunto $M = \{e(u) \mid u \in V(H)\}$. Tomamos $e \in M$, denotamos $e = (x(e), y(e)) \in A(H)$, donde $e = e(x(e))$, pero $e \neq e(y(e))$, esto es por que las $e(u)$ son distintas.

Subcaso 2.1 Si para algún $e \in M$, $\exists e_1 \in A(H)$ que incide en $y(e)$, tal que $\ell_{y(e)}(e_1) < \ell_{y(e)}(e)$.

Tomamos $\ell_{y(e)}(e_1) = \min\{\ell_{y(e)}(e') \mid \ell_{y(e)}(e') < \ell_{y(e)}(e)\}$. Como $\ell_{y(e)}(e_1) < \ell_{y(e)}(e)$, entonces $(e_1, e) \in F(D)$. Sea $D_1 = D - e_1$, por hipótesis de inducción, D_1 tiene núcleo, sea N el núcleo en D_1 , por demostrar que N es núcleo en D , ver figura (2.2).

1. N es independiente.

Como N es núcleo en D_1 y $N \subseteq D_1 \subseteq D$, entonces N es independiente en D .

2. N es absorbente.

Sea $x \in V(D) - N$, tenemos lo siguientes casos:

- Para $x \in V(D) - \{e_1\}$, N es absorbente en D , por ser N núcleo de D .

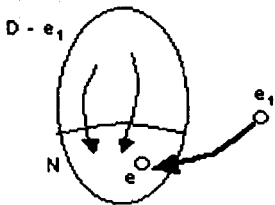
- Si $e \in N$, como existe la flecha $(e_1, e) \in F(D)$, entonces existe $e_1 N$ - flecha en D .

- Si $e \notin N$, entonces existe $(e, b) \in F(D)$, con $b \in V(D) \cap N$, notemos que la arista b es incidente en $y(e)$, supongamos que b es incidente en $x(e)$, como $e = e(x(e))$, existe la flecha (b, e) en D , lo cual es una contradicción ya que la flecha $(e, b) \in Asim(D)$, por lo tanto la arista b es incidente en $y(e)$.

Por otra parte sabemos que la arista e_1 tiene etiqueta mínima, es decir, $\ell_{y(e)}(e_1) < \ell_{y(e)}(a)$, para toda $a \in A(H)$ incidentes en $y(e)$, entonces existe $(e_1, a) \in A(L(H))$ y en la digráfica D se tiene la flecha (e_1, a) , lo cual implica que $(e_1, b) \in F(D)$, con $b \in N$, por lo tanto N es absorbente.

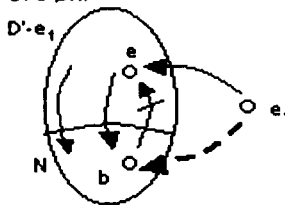
Si para algún $e \in M, \exists e_1 \in A(H)$ que incide en $y(e)$, cumple que $\ell_{y(e)}(e_1) < \ell_{y(e)}(e)$. Supongamos que la arista e_1 tiene etiqueta mínima.

Si $e \in N$.

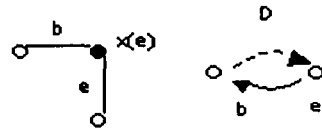


Como la arista e_1 tiene etiqueta mínima, entonces $(e_1, e) \in F(D)$.

Si $e \notin N$.



Si b incide en $x(e)$ en H .



Lo cual no es posible, ya que $(e, b) \in Asim(D)$, por lo b incide en $y(e)$.

Figura 2.2: N es núcleo en D

Por lo tanto N es núcleo en D , lo cual no es posible, ya que D no tiene núcleo.

\therefore Este caso no es posible, es decir, para $e \in M, \nexists e_1 \in A(H)$ que incide en $y(e)$, tal que $\ell_{y(e)}(e_1) < \ell_{y(e)}(e)$.

Subcaso 2.2: Si para cada $e_1 \in M$ y cada $e_2 \in A(H)$ que incide en $y(e_1)$, cumple que $\ell_{y(e_1)}(e_1) < \ell_{y(e_1)}(e_2)$.

Como toda $e(u) \in A(H)$ son distintos, es decir, para cada $u \in V(H)$, tenemos su respectivo $e(u) \in M$; por lo tanto $|M| = |V(H)|$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Por demostrar $\delta_M(u) = 2$.

Suponemos que $\delta_M > 2$, entonces existen $\{e_1, e_2\} \subseteq M$, con $e(u) \neq e_1 \neq e_2$ incidentes en u , ver figura (2.3).

Sean $e_1 = (x(e_1), y(e_1))$ y $e_2 = (x(e_2), y(e_2))$, con $y(e_1) = y(e_2) = u$.

Por hipótesis $\ell_{y(e_1)}(e_1) < \ell_{y(e_1)}(e') \forall e'$ que inciden en $y(e_1)$, en particular $\ell_{y(e_1)}(e_1) < \ell_{y(e_1)}(e_2)$, lo cual implica que existe $(e_1, e_2) \in F(D)$, por otro lado como $e_2 \in M$ y $e_1 \in A(H)$ incidente en $y(e_2)$, entonces por hipótesis se cumple que $\ell_{y(e_2)}(e_2) < \ell_{y(e_2)}(e_1)$, lo cual implica que $(e_2, e_1) \in F(D)$, por lo tanto la flecha $(e_2, e_1) \in \text{Sim}(D)$, lo cual es una contradicción, ya que no existen flechas simétricas en D .

$\therefore \delta_M(u)$ no es mayor que 2

Suponemos que $\delta_M(u) < 2$, entonces sólo existe la arista $e(u) = (x(e), y(e)) \in M$ incidente en u , donde $u = x(e)$, como los $e \in M$ son distintos, entonces existe la arista $e_1 = (x(e_1), y(e_1)) \in M$ incidente en $y(e(u))$. Por la misma razón existe $e_2 = (x(e_2), y(e_2)) \in M$, incidente en $y(e_1)$, continuando de esta manera y como H es finita, entonces $\exists n$, tal que $e_n = (y(e_n), x(e_n))$ incidente en $y(e_{n-1})$ y $y(e_n) = x(e_i)$, con $x(e_i) \neq u$, para algún $1 < i < n - 2$, por lo tanto en $x(e_i)$ inciden las aristas $\{e_{i-1}, e_i, e_n\} \in M$, con $e_n \neq e_{i-1} \neq e_i$, es decir $\delta_M(e_i) > 2$, lo cual no es posible.

$\therefore \delta_M(u) = 1$

Por lo tanto M forma un 2-factor en H .

Si algún ciclo C generado por M es impar, entonces se forma un ciclo $L(C) \subseteq L(H)$, el cual a su vez corresponde a un ciclo dirigido en D de longitud impar sin cuerda, lo cual es una contradicción, ya que todo ciclo dirigido de longitud impar en D tiene al menos una cuerda, por lo tanto todo ciclo generado por M es de longitud par.

Vamos a ver que D tiene núcleo ó un ciclo dirigido de longitud impar sin cuerda, para lo cual damos un algoritmo.

Paso 0: Elegimos un ciclo par del 2-factor generado por las aristas de M , el cual lo denotamos por:

$$C_0 = (v(0, 1), v(0, 2), v(0, 3), \dots, v(0, 2r_1), v(0, 1))$$

Sea $W_0 = \{v(0, 2_j) \mid 1 \leq j \leq r_0\}$ y $B_0 = V(C_0) - W_0$.

- Si W_0 no es independiente.

Sea $\{x, y\} \subseteq W_0 \subseteq V(C_0)$, tal que $e = (x, y) \in A(H)$, entonces se forman dos ciclos:

$$C^1 = (x, C_0, y) \cup (y, x) \text{ y}$$

$$C^2 = (x, C - C_0, y) \cup (y, x),$$

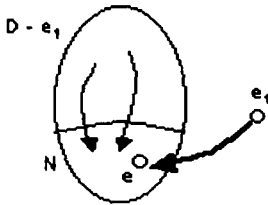
- Si $e \in N$, como existe la flecha $(e_1, e) \in F(D)$, entonces existe $e_1 N$ - flecha en D .

- Si $e \notin N$, entonces existe $(e, b) \in F(D)$, con $b \in V(D) \cap N$, notemos que la arista b es incidente en $y(e)$, supongamos que b es incidente en $x(e)$, como $e = e(x(e))$, existe la flecha (b, e) en D , lo cual es una contradicción ya que la flecha $(e, b) \in Asim(D)$, por lo tanto la arista b es incidente en $y(e)$.

Por otra parte sabemos que la arista e_1 tiene etiqueta mínima, es decir, $\ell_{y(e)}(e_1) < \ell_{y(e)}(a)$, para toda $a \in A(H)$ incidentes en $y(e)$, entonces existe $(e_1, a) \in A(L(H))$ y en la digráfica D se tiene la flecha (e_1, a) , lo cual implica que $(e_1, b) \in F(D)$, con $b \in N$, por lo tanto N es absorbente.

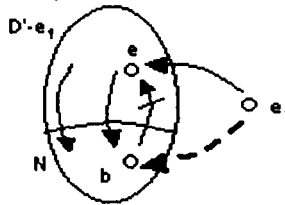
Si para algún $e \in M, \exists e_1 \in A(H)$ que incide en $y(e)$, cumple que $\ell_{y(e)}(e_1) < \ell_{y(e)}(e)$. Supongamos que la arista e_1 tiene etiqueta mínima.

Si $e \in N$.

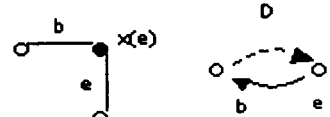


Como la arista e_1 tiene etiqueta mínima, entonces $(e_1, e) \in F(D)$.

Si $e \notin N$.



Si b incide en $x(e)$ en H .



Lo cual no es posible, ya que $(e, b) \in Asim(D)$, por lo b incide en $y(e)$

Figura 2.2: N es núcleo en D

Por lo tanto N es núcleo en D , lo cual no es posible, ya que D no tiene núcleo.

\therefore Este caso no es posible, es decir, para $e \in M, \exists e_1 \in A(H)$ que incide en $y(e)$, tal que $\ell_{y(e)}(e_1) < \ell_{y(e)}(e)$.

Subcaso 2.2: Si para cada $e_1 \in M$ y cada $e_2 \in A(H)$ que incide en $y(e_1)$, cumple que $\ell_{y(e_1)}(e_1) < \ell_{y(e_1)}(e_2)$.

Como toda $e(u) \in A(H)$ son distintos, es decir, para cada $u \in V(H)$, tenemos su respectivo $e(u) \in M$, por lo tanto $|M| = |V(H)|$.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Por demostrar $\delta_M(u) = 2$.

Suponemos que $\delta_M > 2$, entonces existen $\{e_1, e_2\} \subseteq M$, con $e(u) \neq e_1 \neq e_2$ incidentes en u , ver figura (2.3).

Sean $e_1 = (x(e_1), y(e_1))$ y $e_2 = (x(e_2), y(e_2))$, con $y(e_1) = y(e_2) = u$.

Por hipótesis $\ell_{y(e_1)}(e_1) < \ell_{y(e_1)}(e') \forall e'$ que inciden en $y(e_1)$, en particular $\ell_{y(e_1)}(e_1) < \ell_{y(e_1)}(e_2)$, lo cual implica que existe $(e_1, e_2) \in F(D)$, por otro lado como $e_2 \in M$ y $e_1 \in A(H)$ incidente en $y(e_2)$, entonces por hipótesis se cumple que $\ell_{y(e_2)}(e_2) < \ell_{y(e_2)}(e_1)$, lo cual implica que $(e_2, e_1) \in F(D)$, por lo tanto la flecha $(e_2, e_1) \in \text{Sim}(D)$, lo cual es una contradicción, ya que no existen flechas simétricas en D .

$\therefore \delta_M(u)$ no es mayor que 2

Suponemos que $\delta_M(u) < 2$, entonces sólo existe la arista $e(u) = (x(e), y(e)) \in M$ incidente en u , donde $u = x(e)$, como los $e \in M$ son distintos, entonces existe la arista $e_1 = (x(e_1), y(e_1)) \in M$ incidente en $y(e(u))$. Por la misma razón existe $e_2 = (x(e_2), y(e_2)) \in M$, incidente en $y(e_1)$, continuando de esta manera y como H es finita, entonces $\exists n$, tal que $e_n = (y(e_n), x(e_n))$ incidente en $y(e_{n-1})$ y $y(e_n) = x(e_i)$, con $x(e_i) \neq u$, para algún $1 < i < n - 2$, por lo tanto en $x(e_i)$ inciden las aristas $\{e_{i-1}, e_i, e_n\} \in M$, con $e_n \neq e_{i-1} \neq e_i$, es decir $\delta_M(e_i) > 2$, lo cual no es posible.

$\therefore \delta_M(u) = 1$

Por lo tanto M forma un 2 - factor en H .

Si algún ciclo C generado por M es impar, entonces se forma un ciclo $L(C) \subseteq L(H)$, el cual a su vez corresponde a un ciclo dirigido en D de longitud impar sin cuerda, lo cual es una contradicción, ya que todo ciclo dirigido de longitud impar en D tiene al menos una cuerda, por lo tanto todo ciclo generado por M es de longitud par.

Vamos a ver que D tiene núcleo ó un ciclo dirigido de longitud impar sin cuerda, para lo cual damos un algoritmo.

Paso 0: Elegimos un ciclo par del 2 - factor generado por las aristas de M , el cual lo denotamos por:

$$C_0 = (v(0, 1), v(0, 2), v(0, 3), \dots, v(0, 2r_1), v(0, 1))$$

Sea $W_0 = \{v(0, 2_j) \mid 1 \leq j \leq r_0\}$ y $B_0 = V(C_0) - W_0$.

- Si W_0 no es independiente.

Sea $\{x, y\} \subseteq W_0 \subseteq V(C_0)$, tal que $e = (x, y) \in A(H)$, entonces se forman dos ciclos:

$$C^1 = (x, C_0, y) \cup (y, x) \text{ y}$$

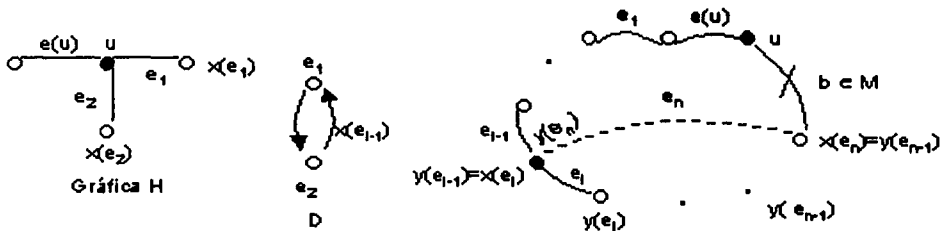
$$C^2 = (x, C - C_0, y) \cup (y, x),$$

Si para cada $e \in M$ y cada $e_1 \in A(H)$ que incide en $\gamma(e)$, cumple que $l_{\gamma(e)}(e) < l_{\gamma(e)}(e_1)$.

Notar que M forma 2-factor.

Si $\{e(u), e_1, e_2\} \in M$, incidentes en u .

Si sólo existe $e(u) \in M$ incidente en u .



En ambos casos se forman flechas simétricas en D , lo cual no es posible. Por lo tanto inciden exactamente dos aristas de M en $V(H)$.

Figura 2.3:

como C es un ciclo par y $\{x, y\} \subseteq W_0 \subseteq V(C_0)$, entonces C^1 y C^2 son ciclos impares en H , los cuales corresponden a dos ciclos de longitud impar, $L(C^1)$ y $L(C^2)$, respectivamente en $L(H)$, entonces al menos uno de los dos ciclos es dirigido y de longitud impar en D sin cuerdas, lo cual es una contradicción, ya que todos los ciclos dirigidos de longitud impar tienen al menos una cuerda.

- Si no existe $v_1 \in V(H) - (W_0 \cup B_0)$, tal que v_1 es adyacente a un vértice de W_0 , en particular si $V(H) = W_0 \cup B_0$ y además el conjunto W_0 es independiente, entonces por minimalidad de H , la subdigráfica de D inducida por la gráfica $L(H') = L(H - (W_0 \cup B_0))$ tiene núcleo, denotamos a dicha subdigráfica por D_1

Sea N el núcleo de D_1 y el conjunto $M' = \{e(v) \mid v \in B_0\}$, por demostrar que $N \cup M'$ es núcleo en D .

A.- $N \cup M'$ es independiente.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Como N es núcleo de D , $N \subseteq D$, entonces N es independiente en D . Por demostrar que M' es independiente, suponemos que M' no es independiente, es decir, existen $\{e(v), e(w)\} \subseteq M'$, tal que $e(v)$ y $e(w)$ son adyacentes, sea z el vértice donde incide $e(v)$ y $e(w)$; si $z = v$, (análogamente $z = w$), entonces $e(w) = (z, w) = (v, w)$, (análogamente $e(v) = (z, v) = (w, v)$), lo cual es una contradicción, ya que $\{v, w\} \subseteq B_0$ y la arista $e(w) \in M'$, (análogamente $e(v) \in M'$).

Por demostrar que $N \cup M'$ es independiente, es decir, no existe NM' - flecha en D ni $M'N$ - flecha en D , sea $q \in N$ y $e = (u, v) \in M'$, sin pérdida de generalidad, suponemos que existe $(q, e) \in F(D)$, como $q \in N \subseteq V(D)$ y $e \in M' \subseteq V(D)$, entonces $\{q, e\} \subseteq A(H)$. Como $(q, e) \in F(D)$, entonces q incide en el vértice $u \in (W_0 \cup B_0) \cap V(H)$ ó el vértice $v \in (W_0 \cup B_0) \cap V(H)$, como $\{u, v\} \notin H'$, implica que la arista $q \notin A(H')$, es decir, $q \notin N$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $N \cup M'$ es independiente. De manera análoga se demuestra que no existe $M'N$ - flecha en D .

B.- $N \cup M'$ es absorbente.

Como $D_1 \subseteq D$ y N es absorbente en D_1 , entonces para $v \in V(D_1) - N$, existe vN - flecha en D ; por otro lado, por construcción de M' , tenemos que M' absorbe a todos los vértices en D correspondientes a las aristas que inciden en los vértices de B_0 en H , entonces para $v \in V(D) - (D_1 \cup M')$, existe vM' - flecha en D .

Por lo tanto $N \cup M'$ es núcleo en D ; lo cual es una contradicción ya que D no tiene núcleo.

- Si existe $v_1 \in V(H) - (W_0 \cup B_0)$ adyacente a un vértice de W_0 y W_0 es independiente, entonces ir al paso 1.

Paso $k \geq 1$: Elegimos un vértice $v_k \in V(H) - (W_{k-1} \cup B_{k-1})$ adyacente a un vértice de W_{k-1} . Sea $C_k = (v(k, 1), v(k, 2), v(k, 3), \dots, v(k, 2r_k), v(k, 1))$, el ciclo formado por las aristas de M , el cual contiene a v_k , renumeramos los vértices de C_k , tal que $v_k = v(k, 1)$.

Sea $W_k = W_{k-1} \cup \{v(k, 2j) \mid 1 \leq j \leq r_k\}$ y $B_k = B_{k-1} \cup [V(C_k) - W_k]$.

Si W_k no es independiente ó si no existe $v_{k+1} \in V(H) - (W_k \cup B_k)$, adyacente a un vértice de W_k , en particular si $V(H) = B_k \cup B_k$ ó D tiene núcleo ó un ciclo dirigido de longitud impar sin cuerdas, entonces terminamos el algoritmo, de lo contrario podemos continuar con el paso $k + 1$.

El número de pasos es a lo más el número de ciclos formados por las aristas en M , esto es por definición de los ciclos C_k . Supongamos que el algoritmo termina en el paso m .

Existen dos posibilidades que el conjunto W_m es independiente ó W_m no es independiente.

- Si el conjunto W_m es independiente. Por la minimalidad de H , la subdigráfica de D inducida por la gráfica $L(H') = L(H - (W_m \cup B_m))$ tiene núcleo, denotamos a dicha subdigráfica por D_1 .

Sea N el núcleo de D_1 y el conjunto $M' = \{e(v) \mid v \in B_m\}$, por demostrar que $N \cup M'$ es núcleo en D .

- A.- $N \cup M'$ es independiente.

Como N es núcleo de $D_1 \subseteq D$, entonces N es independiente en D , por demostrar que M' es independiente, suponemos que M' no es independiente, es decir, existen $\{e(v), e(w)\} \subseteq M'$, tal que $e(v)$ y $e(w)$ son adyacente, sea z el vértice donde incide $e(v)$ y $e(w)$, si $z = v$ (análogamente $z = w$), entonces $e(w) = (z, w) = (v, w)$, (análogamente $e(v) = (z, v) = (w, v)$), lo cual es un contradicción, ya que $\{v, w\} \subseteq B_m$ y la arista $e(w) \in M$, (análogamente $e(v) \in M$).

Por demostrar que $N \cup M'$ es independiente, es decir, no existe $NM' - \text{flecha}$ en D ni $M'N - \text{flecha}$ en D , sea $q \in N$ y $e = (u, v) \in M'$, sin pérdida de generalidad, suponemos que existe $(q, e) \in F(D)$, como $q \in N \subseteq V(D)$ y $e \in M' \subseteq V(D)$, entonces $\{q, e\} \subseteq A(H)$, como $(q, e) \in F(D)$, entonces q incide en el vértice $u \in (W_m \cup B_m) \cap V(H)$ ó el vértice $v \in (W_m \cup B_m) \cap V(H)$, como $\{u, v\} \notin H'$, implica que la arista $q \notin A(H')$, es decir, $q \notin N$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $N \cup M'$ es independiente. De manera análoga se demuestra que no existe $M'N - \text{flecha}$ en D .

- B.- $N \cup M'$ es absorbente.

Como $D_1 \subseteq D$ y N es absorbente en D_1 , entonces para $v \in V(D_1) - N$, existe $vN - \text{flecha}$ en D ; por otro lado, por construcción de M' , tenemos que M' absorbe a todos los vértices en D correspondientes a las aristas que inciden en los vértices de B_m en H , entonces para $v \in V(D) - (D_1 \cup M')$, existe $vM' - \text{flecha}$ en D .

Por lo tanto $N \cup M'$ es núcleo en D , lo cual es una contradicción ya que D no tiene núcleo.

- Si W_m no es independiente: Sea $\{x, y\} \subseteq W_m$, tal que $e = (x, y) \in A(H)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \in V(C_d)$, $y \in V(C_k)$; si $d = k$, entonces se forma la cuerda $(x, y) \in C_d$, por lo cual se forman dos ciclos:

$$C_d^1 = (x, C_d, y) \cup (y, x) \text{ y}$$

$$C_d^2 = (x, C - C_d, y) \cup (y, x),$$

como C_d es un ciclo par y $\{x, y\} \subseteq W_d \subseteq C_d$, como las etiquetas los vértices de W_m son pares, entonces $\{C_d^1, C_d^2\}$ son ciclos de longitud impar en H , los cuales corresponden a dos ciclos de longitud impar, $L(C_d^1)$ y $L(C_d^2)$, respectivamente en $L(H)$, entonces al menos uno de los dos ciclos es dirigido y de longitud impar en D sin cuerdas, lo cual es una contradicción, ya que todos los ciclos dirigidos de longitud impar tienen al menos una cuerda, por lo tanto $d \neq k$.

Notemos que las etiquetas de los vértices de W_m son pares y los vértices de B_m son impares. Renumerando los ciclos formados por las aristas de M , de tal forma que $x = v(d, 2) \in W_d \subseteq V(C_d)$ y $y = v(k, 2j) \in W_k \subseteq V(C_k)$, para algún $1 \leq j \leq r_k$.

A continuación vamos a tomar algunas trayectorias inducidas por M .

- La trayectoria inducida por C_d de x a $v(d, 2j)$ es T_d , tal que $v(d, 2j) \in W_d$, es adyacente a $v_{d+1} \in B_{d+1} \subseteq V(C_{d+1})$, entonces dicha trayectoria es de longitud par.
- La trayectoria inducida por C_{d+1} de v_{d+1} a $v(d+1, 2r) \in W_{d+1}$, es T_{d+1} , tal que $v(d+1, 2r)$ es adyacente a $v_{d+2} \in B_{d+2} \subseteq V(C_{d+2})$, entonces la trayectoria T_{d+1} es de longitud impar.
- La trayectoria inducida por C_{d+2} de v_{d+2} a $v(d+2, 2s) \in W_{d+2}$, es T_{d+2} , tal que $v(d+2, 2s)$ es adyacente a $v_{d+3} \in B_{d+3} \subseteq V(C_{d+3})$, entonces dicha trayectoria es de longitud impar.

Continuando con este proceso y como $d < k \leq m$, entonces en un momento llegamos al ciclo C_k .

- La trayectoria inducida por C_k de $v_k \in B_k \in V(C_k)$ al vértice $v(k, 2j) = y \in W_d$, es de longitud impar.

Obtenemos una nueva trayectoria:

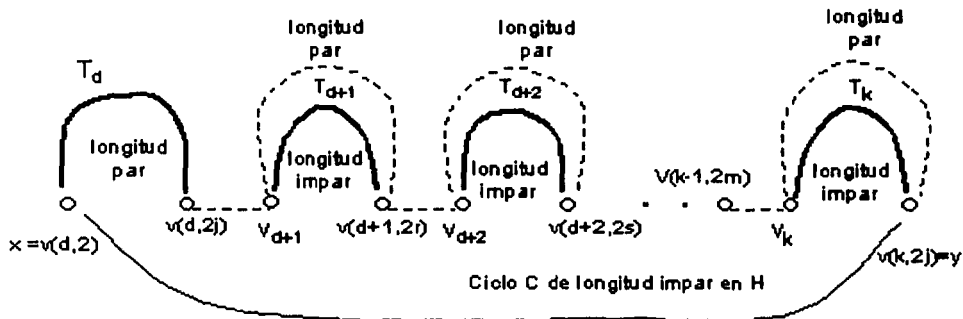
$$T = (x = v(d, 2), T_d, v(d, 2j)) \cup (v(d, 2j), v_{d+1}) \cup (v_{d+1}, T_{d+1}, v(d+1, 2r)) \cup (v(d+1, 2r), v_{d+2}) \cup (v_{d+2}, T_{d+2}, v(d+2, 2s)) \cup \dots \cup (v(k, 2j), v_k) \cup (v_k, T_k, v(k, 2j) = y)$$

la cual es de longitud par, ver figura (2.4).

Por lo tanto el ciclo:

$$C = (x = v(d, 2), T, v(k, 2j) = y) \cup (y, x)$$

es de longitud impar, entonces se forma un ciclo $L(C) \subseteq L(H)$ de longitud impar, el cual a su vez induce un ciclo dirigido en D de longitud impar sin cuerdas, lo cual es una contradicción, ya que todo ciclo dirigido de longitud impar en D tiene al menos un cuerda.



Donde $v_i \in B_i$ con $d < i < k+1$ y $\{x, v(d, 2i), v(d+2, 2i), \dots, y\} \in W_m$

Las trayectorias:

$T_{d+1} = (v_{d+1}, C_{d+1}, v(d, 2i))$, $T_{d+2} = (v_{d+2}, C_{d+2}, v(d+2, 2s))$, \dots , $T_k = (v_k, C_k, y)$ son de longitud impar

La trayectoria:

$T = (x, T_d, v(d, 2i), v_{d+1}, T_{d+1}, v(d+1, 2i), v_{d+2}, T_{d+2}, v(d+2, 2s), \dots, v(k-1, 2m), v_k, T_k, y)$ es de longitud par.

El ciclo $C = (x = v(d, 2), T, v(k, 2j) = y) \cup (y, x)$ es de longitud impar en H .

Figura 2.4:

\therefore Este caso no es posible, es decir, para cada $e_1 \in M$ no existe $e_2 \in A(H)$ que inciden en $y(e_1)$, tal que cumpla $\ell_{y(e_1)}(e_1) < \ell_{y(e_1)}(e_2)$.

Por lo tanto podemos concluir que si D es una orientación admisible de una gráfica de líneas y todo ciclo dirigido de longitud impar en D tiene al menos una cuerda, entonces D es núcleo perfecta.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A continuación vamos a ver unos ejemplos que representan cada uno de los casos que hemos analizado en el teorema (2.1), damos una gráfica $H = (V(H), A(H))$, su gráfica de líneas $L(H) = (V(L(H)), A(L(H)))$ y una orientación admisible D de $L(H)$.

Ejemplo 1.

Sea H una gráfica con $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y $A(H) = \{a, b, c, d, h, f, g\}$ y su gráfica de líneas $L(H) = (V(L(H)), A(L(H)))$, ver figura (2.5).

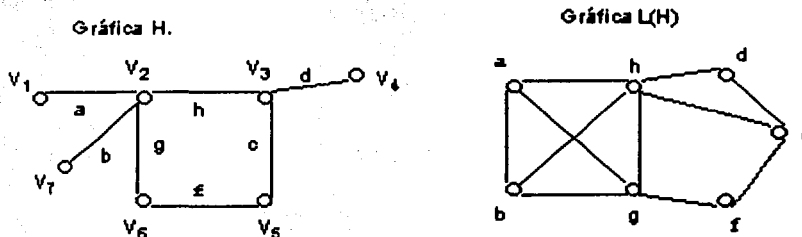


Figura 2.5:

Consideramos $D = (V(D), F(D))$ una orientación admisible de $L(H)$, tal que cada ciclo dirigido de longitud impar en D tiene una cuerda, ver figura (2.6), entonces:

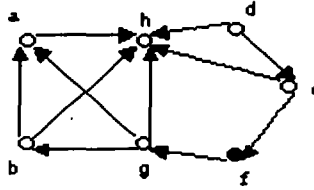
$$V(D) = V(L(H)) \text{ y}$$

$$F(D) = \{(a, h), (b, a), (b, h), (g, b), (g, a), (g, h), (d, h), (d, c), (c, h), (c, f), (f, g)\}$$

De acuerdo a la demostración del teorema (2.1), para cada $u \in V(H)$ y cada arista e que incide en u le ponemos la etiqueta $\ell_u(e)$, de modo que todas las aristas de H deben de cumplir con lo siguiente:

$$\text{Si } \ell_u(e') < \ell_u(e''), \text{ entonces } (e', e'') \in F(D)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 2.6: Orientación admisible de H

Por lo que:

- Para las aristas que inciden en $v_2 \in V(H)$, tenemos que sus etiquetas cumplen que $\ell_{v_2}(g) < \ell_{v_2}(b) < \ell_{v_2}(a) < \ell_{v_2}(h)$. Observamos la arista h incidente en v_2 tiene la máxima etiqueta, por lo tanto $e(v_2) = h$. Recordemos que $e(u)$ es la arista que incide en u , con la máxima etiqueta.
- Para todas las aristas que inciden en $v_3 \in V(H)$, tenemos $\ell_{v_3}(d) < \ell_{v_3}(c) < \ell_{v_3}(h)$, la arista h incidente en v_3 tiene la máxima etiqueta, por lo tanto $e(v_3) = h$.

Por lo tanto, existen v_2 y v_3 vértices de H , con $v_2 \neq v_3$, tal que $e(v_2) = e(v_3)$, es decir, estamos en el caso 1, del teorema (2.1), entonces tomamos la orientación D restringida a la gráfica $L(H - \{v_2, v_3\})$, dicha orientación sólo consta de un sólo vértice, por lo tanto tiene núcleo, sea $N = \{f\}$ el núcleo.

Por el teorema (2.1), caso (1), el núcleo de D es $N \cup \{h\}$, ver figura (2.7).

1.- Sabemos que la arista $h = (v_2, v_3)$ y la arista $f = (v_6, v_7)$ no tienen vértices en común, entonces $(h, f) \notin A(L(H))$, por lo tanto no existe la flecha (h, f) ni (f, h) en D , es decir $N \cup \{h\}$ es independiente en D .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2.- Como h es la arista que incide en v_2 con la máxima etiqueta, entonces existen las flechas $(a, h), (b, h), (g, h)$, por otra parte también h es la arista que incide en v_3 con la máxima etiqueta, entonces existen las flechas $(c, h), (d, h)$ en D , por lo tanto para $x \in V(D) - (N \cup \{h\})$, existe $(x, h) \in F(D)$, es decir, $N \cup \{h\}$ es absorbente en D .

$\therefore N \cup \{h\}$ es núcleo en D .

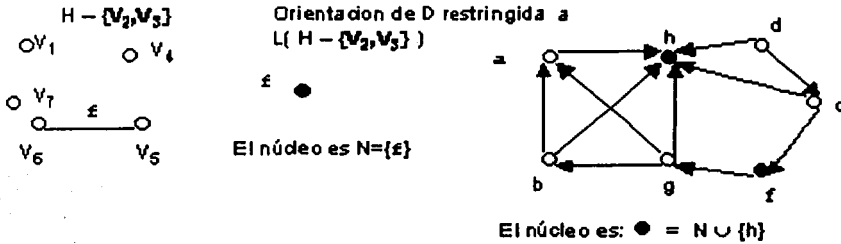


Figura 2.7:

Ejemplo 2.

Sea H , la gráfica del ejemplo 1 y su gráfica de líneas $L(H)$, ver figura (2.5). Consideramos D^1 otra orientación admisible de $L(H)$, a la que dimos en el ejemplo (1), tal que cada ciclo dirigido de longitud impar en D tiene una cuerda, entonces:

$V(D^1) = V(L(H))$ y

$F(D^1) = \{(a, h), (b, h), (g, h), (g, a), (b, a), (b, g), (d, h), (d, c), (h, c), (c, f), (f, g)\}$, ver figura 2.8

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Sea D^1 la orientación de H .

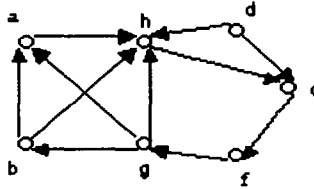


Figura 2.8:

De acuerdo a la demostración del teorema (2.1), para cada $u \in V(H)$ y cada arista e que incide en u le ponemos la etiqueta $\ell_u(e)$, de modo que todas las aristas de H deben de cumplir con lo siguiente:

$$\text{Si } \ell_u(e') < \ell_u(e''), \text{ entonces } (e', e'') \in F(D)$$

Observamos que:

1. La arista a incidente en $v_1 \in V(H)$ tiene la máxima etiqueta, por lo tanto $e(v_1) = a$.
2. Para todas las aristas que inciden en $v_2 \in V(H)$, tenemos $\ell_{v_2}(g) < \ell_{v_2}(b) < \ell_{v_2}(a) < \ell_{v_2}(h)$. Observamos que la arista h incidente en v_2 tiene la máxima etiqueta, por lo tanto $e(v_2) = h$. Notamos que la arista g incidente en v_2 tiene la mínima etiqueta.
3. Para todas las aristas que inciden en v_3 tenemos $\ell_{v_3}(d) < \ell_{v_3}(h) < \ell_{v_3}(c)$, por lo que la arista c incidente en v_3 tiene la máxima etiqueta, por lo tanto $e(v_3) = c$. Notamos que la arista d incidente en v_3 tiene la mínima etiqueta.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

4. La arista d que incide en $v_4 \in V(H)$ tiene la máxima etiqueta, por lo tanto $e(v_4) = d$.
5. Para todas las aristas que inciden en v_5 , tenemos $\ell_{v_5}(c) < \ell_{v_5}(f)$, por lo que, la arista f incidente en v_5 tiene la máxima etiqueta, por lo tanto $e(v_5) = f$.
6. Para todas las aristas incidentes en $v_6 \in V(H)$, tenemos $\ell_{v_6}(f) < \ell_{v_6}(g)$, por lo que la arista g incidente en v_6 tiene la máxima etiqueta, por lo tanto $e(v_6) = g$.
7. La arista b que incide en $v_7 \in V(H)$ tiene la máxima etiqueta, por lo tanto $e(v_7) = b$.

Observamos que todas las etiquetas son distintas, es decir, estamos en el caso 2, del teorema (2.1).

Por lo tanto podemos formar el conjunto $M = \{e(u) \mid u \in V(H)\}$.

$$M = \{e(v_1), e(v_2), e(v_3), e(v_4), e(v_5), e(v_6), e(v_7)\} = \{a, h, c, d, f, g, b\}$$

Recordemos que si $e \in M$, entonces $e = (x(e), y(e)) \in A(H)$, donde $e = e(x(e))$, pero $e \neq e(y(e))$, esto es por que las $e(u)$ son distintas. Siguiendo esta notación, tenemos que para d , $x(d) = v_4$, $y(d) = v_3$ y para h , $x(h) = v_2$, $y(h) = v_3$, observamos que $h \in M$, $d \in A(H)$ incide en $y(h) = v_3$ y por el inciso (3), tenemos que $\ell_{y(h)=v_3}(d) < \ell_{y(h)=v_3}(h)$, por lo que la arista d incidente en $y(h) = v_3$ tiene la mínima etiqueta, es decir, estamos en el subcaso (2.1), el cual dice:

Si para algún $e \in M$, existe $e_1 \in A(H)$ que incide en $y(e)$, tal que $\ell_{y(e)}(e_1) < \ell_{y(e)}(e)$.

Consideramos $D^2 = D^1 - \{d\}$, ver figura (2.9).

Por otro lado tenemos que para g , $x(g) = v_6$, $y(g) = v_2$ y para a , $x(a) = v_1$, $y(a) = v_2$. Observamos que $a \in M$, $g \in A(H)$ incide en $y(a) = v_2$ y por el inciso (2), sabemos que $\ell_{y(a)=v_2}(g) < \ell_{y(a)=v_2}(a)$, por lo que la arista g incidente en $y(a) = v_2$ tiene la mínima etiqueta.

Por el subcaso (2.1), podemos considerar $D^3 = D^2 - \{g\}$, ver figura (2.9), con:

$$V(D^3) = \{a, b, c, h, f\} \text{ y } F(D) = \{(a, h), (h, c), (c, f), (b, a), (b, h)\}$$

Dicha digráfica tiene núcleo, sea $N_1 = \{h, f\}$.

Como no existe la flecha (h, f) ni (f, h) en D^3 , entonces N_1 es independiente. Para $x \in V(D^3) - N_1$, existe xN_1 - flecha en D^3 , es decir, N_1 es absorbente, por lo tanto N_1 es núcleo de D^3 .

Por otra parte $V(D^2) = V(D^2) \cup \{g\}$ y $F(D^2) = F(D^2) \cup \{(g, h), (g, a), (g, b)\}$, como N_1 es independiente y $N_1 \subseteq D^3 \subseteq D^2$, entonces N_1 es independiente en D^2 . Como $h \in N_1$ y además existe $(g, h) \in F(D^2)$, lo cual implica que N_1 es absorbente en D^2 , por lo tanto N_1 es núcleo en D^2 .

Afirmamos que N_1 es núcleo de D^1 .

1.- Como N_1 es núcleo en D^2 y $N_1 \subseteq D^2 \subseteq D^1$, entonces N_1 es independiente en D^1 .

2.- Sea $x \in V(D^1) - N_1$, tenemos dos casos:

- Para $x \in V(D^2) - N_1$, N_1 es absorbente en D^2 , por ser N_1 núcleo de D^2 , como $N_1 \subseteq D^2 \subseteq D^1$, entonces existe xN_1 - flecha en D^1 .
- Para $d \in V(D^1) - N_1$, sabemos que la arista d tiene etiqueta mínima, es decir, $\ell_{y(h)=v_3}(d) < \ell_{y(h)=v_3}(h)$, para todo $h \in A(H)$ incidente en $y(h) = v_3$, existe $(d, h) \in A(L(H))$ y en la digráfica D^1 se tiene la flecha (d, h) , como $h \in N_1$, entonces existe dN_1 - flecha en D^1 .

$\therefore N_1$ es núcleo en D^1 .

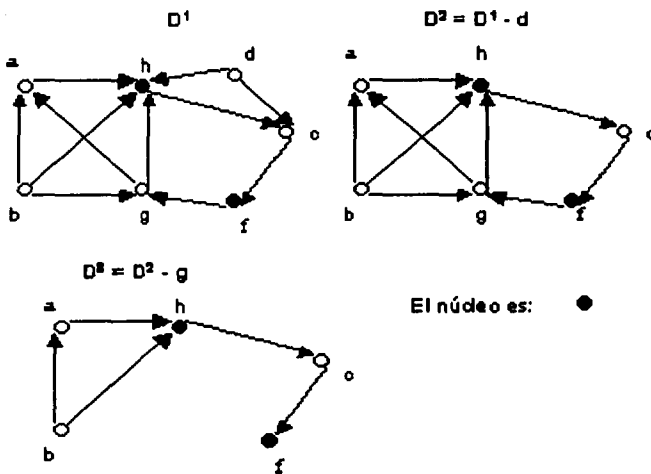


Figura 2.9:

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Ejemplo 3.

Sea H una gráfica con

$$V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \text{ y}$$

$$A(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

y su gráfica de líneas $L(H)$, ver figura (2.10).

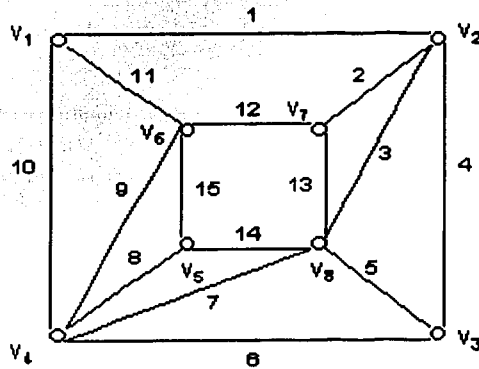
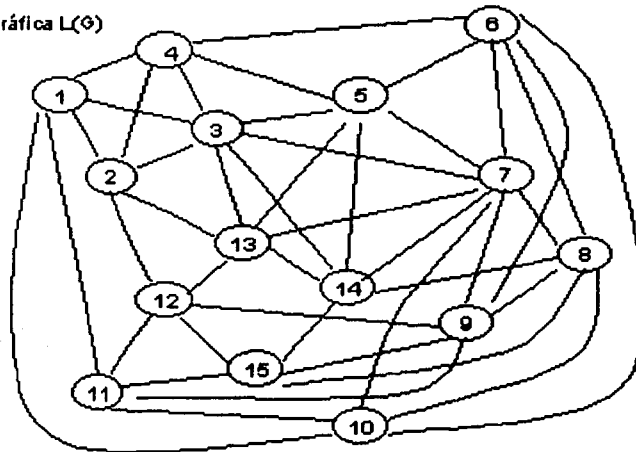
Gráfica H.**Gráfica $L(G)$** 

Figura 2.10:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Consideramos $D = (V(D), F(D))$ una orientación admisible de $L(H)$, tal que cada ciclo dirigido de longitud impar en D tiene una cuerda, ver figura (2.11).

Orientación admisible D

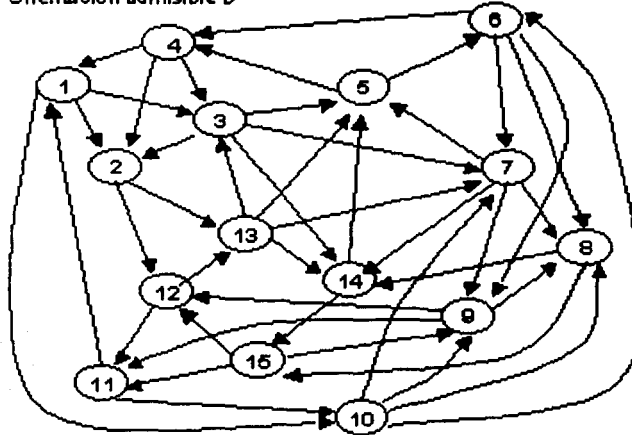


Figura 2.11:

De acuerdo a la demostración del teorema (2.1), para cada $u \in V(H)$ y cada arista e que incide en u le ponemos la etiqueta $l_u(e)$, de modo que todas las aristas de H deben de cumplir con lo siguiente:

$$\text{Si } l_u(e') < l_u(e''), \text{ entonces } (e', e'') \in F(D)$$

Por lo que las etiquetas cumplen :

1. Para todas las aristas que inciden en v_1 , tenemos $l_{v_1}(11) < l_{v_1}(1) < l_{v_1}(10)$, por lo tanto la arista 10 incidente en v_1 tiene la máxima etiqueta, $e(v_1) = 10$.
2. Para todas las aristas que inciden en v_2 , tenemos $l_{v_2}(4) < l_{v_2}(1) < l_{v_2}(3) < l_{v_2}(2)$, por lo tanto la arista 2 incidente en v_2 tiene la máxima etiqueta, $e(v_2) = 2$.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

3. Para todas las aristas que inciden en v_3 , tenemos $\ell_{v_3}(5) < \ell_{v_3}(6) < \ell_{v_3}(4)$, por lo tanto la arista 4 incidente en v_3 tiene etiqueta máxima, $e(v_3) = 4$.
4. Para todas las aristas que incidente en v_4 , tenemos $\ell_{v_4}(10) < \ell_{v_4}(6) < \ell_{v_4}(7) < \ell_{v_4}(9) < \ell_{v_4}(8)$, por lo tanto la arista 8 incidente en v_4 tiene etiqueta máxima, $e(v_4) = 8$.
5. Para todas las aristas que inciden en v_5 , tenemos $\ell_{v_5}(8) < \ell_{v_5}(14) < \ell_{v_5}(15)$, por lo tanto la arista 15 incidente en v_5 tiene la máxima etiqueta, $e(v_5) = 15$.
6. Para todas las aristas que inciden en v_6 tenemos $\ell_{v_6}(15) < \ell_{v_6}(9) < \ell_{v_6}(12) < \ell_{v_6}(11)$, por lo tanto la arista 11 incidente en v_6 tiene la máxima etiqueta, $e(v_6) = 11$.
7. Para todas las aristas que inciden en v_7 , tenemos $\ell_{v_7}(2) < \ell_{v_7}(12) < \ell_{v_7}(13)$, por lo tanto la arista 13 incidente en v_7 tiene la máxima etiqueta, $e(v_7) = 13$.
8. Para todas las aristas que incidente en v_8 , tenemos $\ell_{v_8}(13) < \ell_{v_8}(3) < \ell_{v_8}(7) < \ell_{v_8}(14) < \ell_{v_8}(5)$, por lo tanto la arista 5 incidente en v_8 tiene etiqueta máxima, $e(v_8) = 5$.

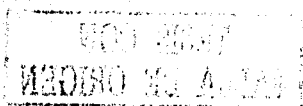
Se tiene que todas las etiquetas máximas son distintas, es decir, estamos en el caso 2, del teorema (2.1), por lo tanto podemos formar el conjunto $M = \{e(v) \mid v \in V(H)\}$.

$$M = \{e(v_1), e(v_2), e(v_3), e(v_4), e(v_5), e(v_6), e(v_7), e(v_8)\} \\ = \{10, 2, 4, 8, 15, 11, 13, 5\},$$

Recordemos que si $e \in M$, entonces $e = (x(e), y(e)) \in A(H)$, donde $e = e(x(e))$, pero $e \neq e(y(e))$, esto es por que las $e(u)$ son distintas.

Siguiendo esta notación, tenemos que:

- Para 10, $x(10) = v_1$, $y(10) = v_4$, incidente en $y(11) = v_1$ y para 11, $x(11) = v_6$, $y(11) = v_1$, por el inciso (1), se cumple que $\ell_{y(11)=v_1}(11) < \ell_{y(11)=v_1}(10)$.
- Para 11, $x(11) = v_6$, $y(11) = v_1$, incidente en $y(15) = v_6$ y para 15, $x(15) = v_5$, $y(15) = v_6$, por el inciso (6), se cumple que $\ell_{y(15)=v_6}(15) < \ell_{y(15)=v_6}(11)$.
- Para 15, $x(15) = v_5$, $y(15) = v_6$, incidente en $y(8) = v_5$ y para 8, $x(8) = v_4$, $y(8) = v_5$, por el inciso (5), se cumple que $\ell_{y(8)=v_5}(8) < \ell_{y(8)=v_5}(15)$.



- Para 8, $x(8) = v_4$, $y(8) = v_5$, incidente en $y(10) = v_4$ y para 10, $x(10) = v_1$, $y(10) = v_4$, por el inciso (4), se cumple que $\ell_{y(10)=v_4}(10) < \ell_{y(10)=v_4}(8)$.
- Para 2, $x(2) = v_2$, $y(2) = v_7$, incidente en $y(4) = v_2$ y para 4, $x(4) = v_3$, $y(4) = v_2$, por el inciso (2), se cumple que $\ell_{y(4)=v_2}(4) < \ell_{y(4)=v_2}(2)$.
- Para 4, $x(4) = v_3$, $y(4) = v_2$, incidente en $y(5) = v_3$ y para 5, $x(5) = v_8$, $y(5) = v_3$, por el inciso (3), se cumple que $\ell_{y(5)=v_3}(5) < \ell_{y(5)=v_3}(4)$.
- Para 5, $x(5) = v_8$, $y(5) = v_3$, incidente en $y(13) = v_8$ y para 13, $x(13) = v_7$, $y(13) = v_8$, por el inciso (8), se cumple que $\ell_{y(13)=v_8}(13) < \ell_{y(13)=v_8}(5)$.
- Para 13, $x(13) = v_7$, $y(13) = v_8$, incidente en $y(2) = v_7$ y para 2, $x(2) = v_2$, $y(2) = v_7$, por el inciso (7), se cumple que $\ell_{y(2)=v_7}(2) < \ell_{y(2)=v_7}(13)$.

Es decir, estamos en el subcaso (2.2), del teorema (2.1), el cual dice:

Si para cada $e_1 \in M$ y cada $e_2 \in A(H)$ que incide en $y(e_1)$, cumple que $\ell_{y(e_1)}(e_1) < \ell_{y(e_1)}(e_2)$.

Como toda $e(u) \in A(H)$ son distintos, es decir, para cada $u \in V(H)$, tenemos su respectivo $e(u) \in M$, por lo tanto $|M| = |V(H)|$, además para todo $u \in M$, $\delta_M(u) = 2$, es decir, M forma un 2-factor en H .

De acuerdo al subcaso (2.2), del teorema (2.1), se tiene un algoritmo para poder encontrar el núcleo en D ó un ciclo dirigido de longitud impar.

Paso 0: Elegimos un ciclo par del 2-factor generado por las aristas de M , el cual lo denotamos por:

$$\begin{aligned} C_1 &= (2, 13, 5, 4, 2) \\ &= (e(v_2), e(v_7), e(v_8), e(v_3), e(v_2)) \\ &= (e(v(1, 1)), e(v(1, 2)), e(v(1, 3)), e(v(1, 4)), e(v(1, 1))), \end{aligned}$$

donde $W_1 = \{v(1, 2), v(1, 4)\}$ y

$$B_1 = V(C_1) - W_1 = \{v(1, 3), v(1, 1)\}.$$

El conjunto W_1 es independiente.

Paso 1: Elegimos el vértice $v_6 \in V(H) - (B_1 \cup W_1)$ adyacente a $v(1, 2)$.

Sea $C_2 = (11, 10, 8, 15, 11)$

$$= (e(v_6), e(v_1), e(v_4), e(v_5), e(v_6))$$

$$= (e(v(2, 1)), e(v(2, 2)), e(v(2, 3)), e(v(2, 4)), e(v(2, 1))),$$

donde $W_2 = W_1 \cup \{v(2, 2), v(2, 4)\}$

$$\text{y } B_2 = B_1 \cup V(C_2) - W_2 = \{v(1, 1), v(1, 3), v(2, 1), v(2, 3)\}.$$

Notamos que el conjunto W_2 es independiente, entonces podemos construir el conjunto $M' = \{e(v) \mid v \in B_2\}$

$$M = \{e(v(1, 1)), e(v(1, 3)), e(v(2, 1)), e(v(2, 3))\}$$

$$= \{2, 5, 11, 8\}.$$

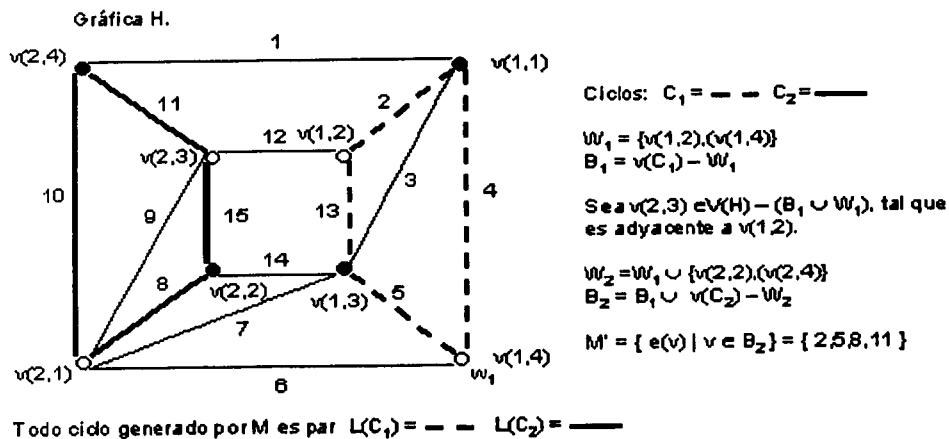
Afirmamos que el núcleo de D es el conjunto M' .

1.- Como todas las $e(v)$ son distintos, entonces no existen flechas entre los vértices de M' , por lo tanto M' es independiente.

2.- Por construcción de M' , tenemos que M' absorbe a todos los vértices en D correspondientes a las aristas que inciden en los vértices B_2 en H , por lo tanto para $v \in V(D) - M'$, existe vM' - flecha en D .

Como M' es independiente y absorbente, entonces M' es núcleo en D , ver figura (2.12).

$\therefore M'$ es núcleo en D .



Orientación admisible D

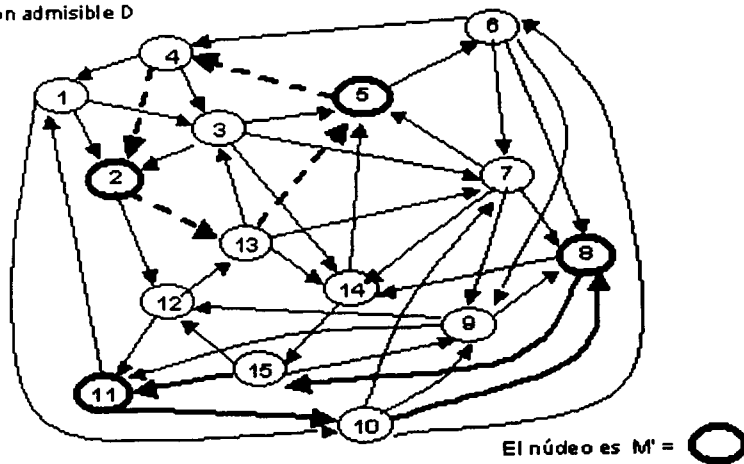


Figura 2.12: El conjunto W_2 es independiente.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Ejemplo 4.

Sea H una gráfica con

$$V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \text{ y}$$

$$A(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 3, 10, 11\}$$

y su gráfica de líneas $L(H)$, ver figura (2.13).

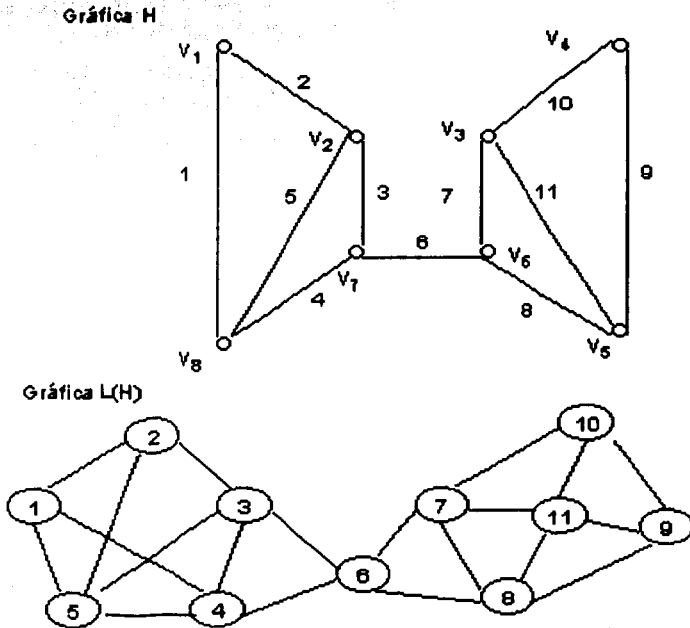


Figura 2.13:

Consideramos $D = (V(D), F(D))$ una orientación admisible de $L(H)$, tal que cada ciclo dirigido de longitud impar en D tiene una cuerda, ver figura (2.14).

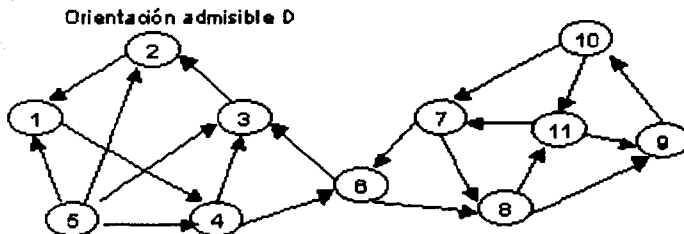


Figura 2.14:

De acuerdo a la demostración del teorema (2.1), para cada $u \in V(H)$ y cada arista e que incide en u le ponemos la etiqueta $\ell_u(e)$, de modo que todas las aristas de H deben de cumplir con lo siguiente:

$$\text{Si } \ell_u(e') < \ell_u(e''), \text{ entonces } (e', e'') \in F(D)$$

Por lo que las etiquetas cumplen:

1. Para todas las aristas que inciden en v_1 , tenemos $\ell_{v_1}(2) < \ell_{v_1}(1)$, por lo tanto la arista 1 incidente en v_1 tiene la máxima etiqueta, $e(v_1) = 1$.
2. Para todas las aristas que inciden en v_2 , tenemos $\ell_{v_2}(5) < \ell_{v_2}(3) < \ell_{v_2}(2)$, por lo tanto la arista 2 incidente en v_2 tiene la máxima etiqueta, $e(v_2) = 2$.
3. Para todas las aristas que inciden en v_3 , tenemos $\ell_{v_3}(10) < \ell_{v_3}(11) < \ell_{v_3}(7)$, por lo tanto la arista 7 incidente en v_3 tiene etiqueta máxima, $e(v_3) = 7$.
4. Para todas las aristas que incidente en v_4 , tenemos $\ell_{v_4}(9) < \ell_{v_4}(10)$, por lo tanto la arista 10 incidente en v_4 tiene etiqueta máxima, $e(v_4) = 10$.
5. Para todas las aristas que inciden en v_5 , tenemos $\ell_{v_5}(8) < \ell_{v_5}(11) < \ell_{v_5}(9)$, por lo tanto la arista 9 incidente en v_5 tiene la máxima etiqueta, $e(v_5) = 9$.
6. Para todas las aristas que inciden en v_6 tenemos $\ell_{v_6}(7) < \ell_{v_6}(6) < \ell_{v_6}(8)$, por lo tanto la arista 8 incidente en v_6 tiene la máxima etiqueta, $e(v_6) = 8$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

7. Para todas las aristas que inciden en v_7 , tenemos $\ell_{v_7}(4) < \ell_{v_7}(6) < \ell_{v_7}(3)$, por lo tanto la arista 3 incidente en v_7 tiene la máxima etiqueta, $e(v_7) = 3$.
8. Para todas las aristas que incidente en v_8 , tenemos $\ell_{v_8}(5) < \ell_{v_8}(1) < \ell_{v_8}(4)$, por lo tanto la arista 4 incidente en v_8 tiene etiqueta máxima, $e(v_8) = 4$.

Se tiene que todas las etiquetas máximas son distintas, es decir, estamos en el caso 2, del teorema (2.1), por lo tanto podemos formar el conjunto $M = \{e(v) \mid v \in V(H)\}$.

$$M = \{e(v_1), e(v_2), e(v_3), e(v_4), e(v_5), e(v_6), e(v_7), e(v_8)\} \\ = \{1, 2, 7, 10, 9, 8, 3, 4\};$$

Recordemos que si $e \in M$, entonces $e = (x(e), y(e)) \in A(H)$, donde $e = e(x(e))$, pero $e \neq e(y(e))$, esto es por que las $e(u)$ son distintas. Siguiendo esta notación, tenemos que:

- Para 1, $x(1) = v_1$, $y(1) = v_8$ y para 2, $x(2) = v_2$, $y(2) = v_1$. Observamos que $e(v_1) = 1 \in A(H)$ incide en $y(2) = v_1$ y que $\ell_{y(2)=v_1}(2) < \ell_{y(2)=v_1}(1)$, esto es por el inciso (1).
- Para 4, $x(4) = v_8$, $y(4) = v_7$, incidente en $y(1) = v_8$ y para 1, $x(1) = v_1$, $y(1) = v_8$, por el inciso (8), se cumple que $\ell_{y(1)=v_8}(1) < \ell_{y(1)=v_8}(4)$.
- Para 3, $x(3) = v_7$, $y(3) = v_2$, incidente en $y(4) = v_7$ y para 4, $x(4) = v_8$, $y(4) = v_7$, por el inciso (7), se cumple que $\ell_{y(4)=v_7}(4) < \ell_{y(4)=v_7}(3)$.
- Para 2, $x(2) = v_2$, $y(2) = v_1$, incidente en $y(3) = v_2$ y para 3, $x(3) = v_7$, $y(3) = v_2$, por el inciso (2), se cumple que $\ell_{y(3)=v_2}(3) < \ell_{y(3)=v_2}(2)$.
- Para 7, $x(7) = v_3$, $y(7) = v_6$, incidente en $y(10) = v_3$ y para 10, $x(10) = v_4$, $y(10) = v_3$, por el inciso (3), se cumple que $\ell_{y(10)=v_3}(10) < \ell_{y(10)=v_3}(7)$.
- Para 10, $x(10) = v_4$, $y(10) = v_3$, incidente en $y(9) = v_4$ y para 9, $x(9) = v_5$, $y(9) = v_4$, por el inciso (4), se cumple que $\ell_{y(9)=v_4}(9) < \ell_{y(9)=v_4}(10)$.
- Para 8, $x(8) = v_6$, $y(8) = v_5$, incidente en $y(7) = v_6$ y para 7, $x(7) = v_3$, $y(7) = v_6$, por el inciso (6), se cumple que $\ell_{y(7)=v_6}(7) < \ell_{y(7)=v_6}(8)$.
- Para 9, $x(9) = v_5$, $y(9) = v_4$, incidente en $y(8) = v_5$ y para 8, $x(8) = v_6$, $y(8) = v_5$, por el inciso (5), se cumple que $\ell_{y(8)=v_5}(8) < \ell_{y(8)=v_5}(9)$.

Es decir, estamos en el subcaso (2.2), del teorema (2.1), el cual dice:

Si para cada $e_1 \in M$ y cada $e_2 \in A(H)$ que incide en $y(e_1)$, cumple que $\ell_{y(e_1)}(e_1) < \ell_{y(e_1)}(e_2)$.

Como toda $e(u) \in A(H)$ son distintos, es decir, para cada $u \in V(H)$, tenemos su respectivo $e(u) \in M$, por lo tanto $|M| = |V(H)|$, además para todo $u \in M$, $\delta_M(u) = 2$, es decir, M forma un 2-factor en H .

De acuerdo al subcaso (2.2), del teorema (2.1), se tiene un algoritmo para poder encontrar un ciclo dirigido de longitud impar sin cuerdas en D ó un núcleo de D .

Paso 0: Elegimos un ciclo par del 2-factor generado por las aristas de M , el cual lo denotamos por:

$$\begin{aligned} C_1 &= (4, 3, 2, 1, 4) \\ &= (e(v_8), e(v_7), e(v_2), e(v_1), e(v_8)) \\ &= (e(v(1, 1)), e(v(1, 2)), e(v(1, 3)), e(v(1, 4)), e(v(1, 1))), \end{aligned}$$

donde $W_1 = \{v(1, 2), v(1, 4)\}$ y $B_1 = V(C_1) - W_1 = \{v(1, 1), v(1, 3)\}$. El conjunto W_1 es independiente.

Paso 1: Elegimos un vértice $v_6 \in V(H) - (B_1 \cup W_1)$ adyacente a $v(1, 2)$.

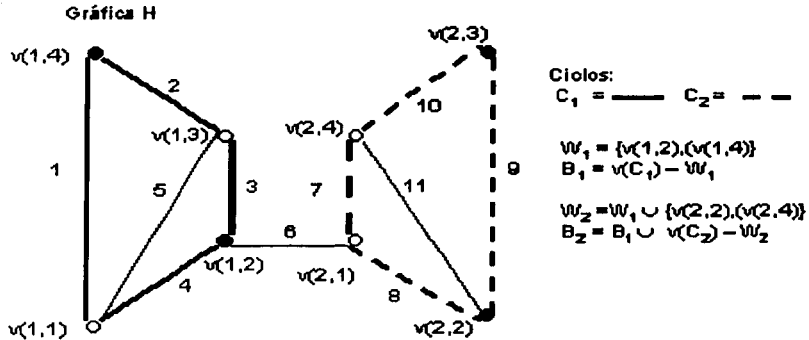
$$\begin{aligned} \text{Sea } C_2 &= (8, 9, 10, 7, 8) \\ &= (e(v_6), e(v_5), e(v_4), e(v_3), e(v_6)) \\ &= (e(v(2, 1)), e(v(2, 2)), e(v(2, 3)), e(v(2, 4)), e(v(2, 1))), \end{aligned}$$

donde $W_2 = W_1 \cup \{v(2, 2), v(2, 4)\}$ y $B_2 = B_1 \cup V(C_2) - W_2 = \{v(1, 1), v(1, 3), v(2, 1), v(2, 3)\}$.

Por otra parte el vértice $v(2, 2)$ es adyacente a $v(2, 4)$ en H , entonces el conjunto W_2 no es independiente, es decir, existe la cuerda $(v(2, 2), v(2, 4))$ en C_2 , por lo tanto se forma dos ciclos:

$$\begin{aligned} C_2^1 &= (v(2, 2), C_2, v(2, 4)) \cup (v(2, 4), v(2, 2)) = (v(2, 2), v(2, 3), v(2, 4), v(2, 2)) \text{ y} \\ C_2^2 &= (v(2, 4), C_2, v(2, 2)) \cup (v(2, 2), v(2, 4)) = (v(2, 4), v(2, 1), v(2, 2), v(2, 4)) \end{aligned}$$

Como C_2 es de longitud par, entonces $\{C_1^1, C_2^1\}$ son ciclos de longitud impar en H , los cuales corresponden a dos ciclos de longitud impar $L(C_1^1)$ y $L(C_2^1)$ respectivamente en $L(H)$ y su vez dan lugar a dos ciclos dirigido de longitud impar en D , los cuales son $(9, 10, 11, 9)$ y $(7, 8, 11, 7)$, dichos ciclos no tienen cuerdas, ver figura (2.15).



En D se forman dos ciclos de longitud impar sin cuerda, los cuales son \rightarrow y \dashrightarrow

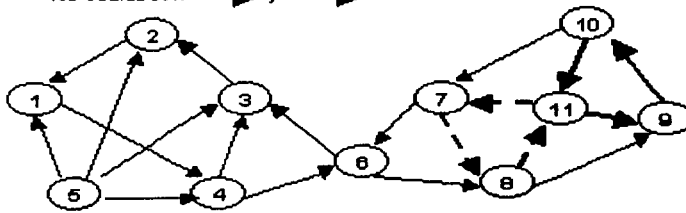


Figura 2.15: El conjunto W_2 no es independiente.

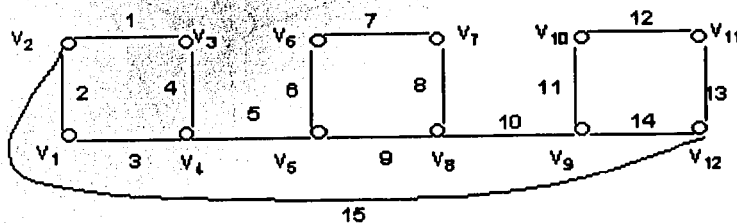
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

∴ Los ciclos dirigidos de longitud impar en D no tienen cuerdas.

Ejemplo 5.

Sea H una gráfica con $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$ y $A(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ y su gráfica de líneas $L(H)$, ver figura (2.16).

Gráfica H



Gráfica L(H)

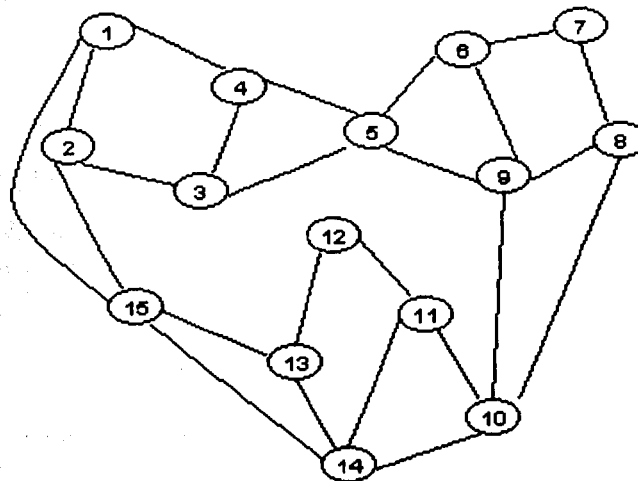


Figura 2.16:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Consideramos $D = (V(D), F(D))$ una orientación admisible de $L(H)$, tal que cada ciclo dirigido de longitud impar en D tiene una cuerda, ver figura (2.17).

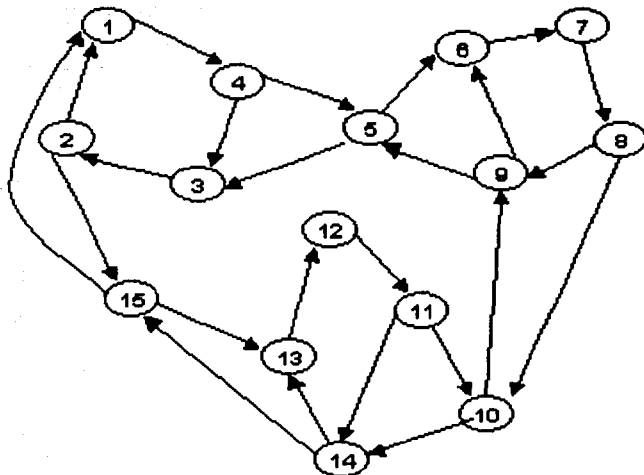


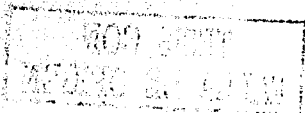
Figura 2.17:

De acuerdo a la demostración del teorema (2.1), para cada $u \in V(H)$ y cada arista e que incide en u le ponemos la etiqueta $\ell_u(e)$, de modo que todas las aristas de H deben de cumplir con lo siguiente:

$$\text{Si } \ell_u(e') < \ell_u(e''), \text{ entonces } (e', e'') \in F(D)$$

Por lo que las etiquetas cumplen:

1. Para todas las aristas que inciden en v_1 , tenemos $\ell_{v_1}(3) < \ell_{v_1}(2)$, por lo tanto la arista 2 incidente en v_1 tiene la máxima etiqueta, $e(v_1) = 2$.
2. Para todas las aristas que inciden en v_2 , tenemos $\ell_{v_2}(2) < \ell_{v_2}(15) < \ell_{v_2}(1)$, por lo tanto la arista 1 incidente en v_2 tiene la máxima etiqueta, $e(v_2) = 1$.
3. Para todas las aristas que inciden en v_3 , tenemos $\ell_{v_3}(1) < \ell_{v_3}(4)$, por lo tanto la arista 4 incidente en v_3 tiene etiqueta la máxima, $e(v_3) = 4$



4. Para todas las aristas que incidente en v_4 , tenemos $\ell_{v_4}(4) < \ell_{v_4}(5) < \ell_{v_4}(3)$, por lo tanto la arista 3 incidente en v_4 tiene la etiqueta máxima, $e(v_4) = 3$.
5. Para todas las aristas que inciden en v_5 , tenemos $\ell_{v_5}(9) < \ell_{v_5}(5) < \ell_{v_5}(6)$, por lo tanto la arista 6 incidente en v_5 tiene la máxima etiqueta, $e(v_5) = 6$.
6. Para todas las aristas que inciden en v_6 tenemos $\ell_{v_6}(6) < \ell_{v_6}(7)$, por lo tanto la arista 7 incidente en v_7 tiene la máxima etiqueta, $e(v_6) = 7$.
7. Para todas las aristas que inciden en v_7 , tenemos $\ell_{v_7}(7) < \ell_{v_7}(8)$, por lo tanto la arista 8 incidente en v_7 tiene la máxima etiqueta, $e(v_7) = 8$.
8. Para todas las aristas que incidente en v_8 , tenemos $\ell_{v_8}(8) < \ell_{v_8}(10) < \ell_{v_8}(9)$, por lo tanto la arista 9 incidente en v_8 tiene la máxima etiqueta, $e(v_8) < v_9$.
9. Para todas las aristas que incidente en v_9 , tenemos $\ell_{v_9}(11) < \ell_{v_9}(10) < \ell_{v_9}(14)$, por lo tanto la arista 14 incidente en v_9 tiene la máxima etiqueta, $e(v_9) = 14$.
10. Para todas las aristas que inciden en v_{10} , tenemos $\ell_{v_{10}}(12) < \ell_{v_{10}}(11)$, por lo tanto la arista 11 incidente en v_{10} tiene la máxima etiqueta, $e(v_{10}) < \ell_{11}$.
11. Para todas las aristas que inciden en v_{11} , tenemos $\ell_{v_{11}}(13) < \ell_{v_{11}}(12)$, por lo tanto la arista 12 incidente en v_{11} tiene la máxima etiqueta, $e(v_{11}) = 12$.
12. Para todas las aristas que incidente en v_{12} , tenemos $\ell_{v_{12}}(14) < \ell_{v_{12}}(15) < \ell_{v_{12}}(13)$, por lo tanto la arista 13 incidente en v_{12} tiene la etiqueta máxima, $e(v_{12}) = 13$.

Se tiene que todas las etiquetas máximas son distintas, es decir, estamos en el caso 2, del teorema (2.1), por lo tanto podemos formar el conjunto $M = \{e(v) \mid v \in V(H)\}$.

$$\begin{aligned}
 &= \{e(v_1), e(v_2), e(v_3), e(v_4), e(v_5), e(v_6), e(v_7), e(v_8), e(v_9), e(v_{10}), e(v_{11}), e(v_{12})\} \\
 &= \{2, 1, 4, 3, 6, 7, 8, 9, 14, 11, 12, 13\},
 \end{aligned}$$

Recordemos que si $e \in M$, entonces $e = (x(e), y(e)) \in A(H)$, donde $e = e(x(e))$, pero $e \neq e(y(e))$, esto es por que las $e(u)$ son distintas. Siguiendo esta notación, tenemos que:

- Para 4, $x(4) = v_3, y(4) = v_4$ y para 1, $x(1) = v_2, y(1) = v_3$. Observamos que $e(v_3) = 4 \in A(H)$ incide en $y(1) = v_3$ y que $\ell_{y(1)=v_3}(1) < \ell_{y(1)=v_3}(4)$, esto es por el inciso (3).
- Para 1, $x(1) = v_2, y(1) = v_3$ incidente en $y(2) = v_2$ y para 2, $x(2) = v_1, y(2) = v_2$, por el inciso (2), se cumple que $\ell_{y(2)=v_2}(2) < \ell_{y(2)=v_2}(1)$.
- Para 2, $x(2) = v_1, y(2) = v_2$ incidente en $y(3) = v_1$ y para 3, $x(3) = v_4, y(3) = v_1$, por el inciso (1), se cumple que $\ell_{y(3)=v_1}(3) < \ell_{y(3)=v_1}(2)$.
- Para 3, $x(3) = v_4, y(3) = v_1$ incidente en $y(4) = v_4$ y para 4, $x(4) = v_3, y(4) = v_4$, por el inciso (4), se cumple que $\ell_{y(4)=v_4}(4) < \ell_{y(4)=v_4}(3)$.
- Para 6, $x(6) = v_5, y(6) = v_6$ incidente en $y(9) = v_5$ y para 9, $x(9) = v_8, y(9) = v_5$, por el inciso (5), se cumple que $\ell_{y(9)=v_5}(9) < \ell_{y(9)=v_5}(6)$.
- Para 9, $x(9) = v_8, y(9) = v_5$ incidente en $y(8) = v_8$ y para 8, $x(8) = v_7, y(8) = v_8$, por el inciso (8), se cumple que $\ell_{y(8)=v_8}(8) < \ell_{y(8)=v_8}(9)$.
- Para 8, $x(8) = v_7, y(8) = v_8$ incidente en $y(7) = v_7$ y para 7, $x(7) = v_6, y(7) = v_7$, por el inciso (7), se cumple que $\ell_{y(7)=v_7}(7) < \ell_{y(7)=v_7}(8)$.
- Para 7, $x(7) = v_6, y(7) = v_7$ incidente en $y(6) = v_6$ y para 6, $x(6) = v_5, y(6) = v_6$, por el inciso (6), se cumple que $\ell_{y(6)=v_6}(6) < \ell_{y(6)=v_6}(7)$.
- Para 14, $x(14) = v_9, y(14) = v_{12}$ incidente en $y(11) = v_9$ y para 11, $x(11) = v_{10}, y(11) = v_9$, por el inciso (9), se cumple que $\ell_{y(11)=v_9}(11) < \ell_{y(11)=v_9}(14)$.
- Para 11, $x(11) = v_{10}, y(11) = v_9$ incidente en $y(12) = v_{10}$ y para 12, $x(12) = v_{11}, y(12) = v_{10}$, por el inciso (10), se cumple que $\ell_{y(12)=v_{10}}(12) < \ell_{y(12)=v_{10}}(11)$.
- Para 12, $x(12) = v_{11}, y(12) = v_{10}$ incidente en $y(13) = v_{11}$ y para 13, $x(13) = v_{12}, y(13) = v_{11}$, por el inciso (11), se cumple que $\ell_{y(13)=v_{11}}(13) < \ell_{y(13)=v_{11}}(12)$.
- Para 13, $x(13) = v_{12}, y(13) = v_{11}$ incidente en $y(14) = v_{12}$ y para 14, $x(14) = v_9, y(14) = v_{12}$, por el inciso (12), se cumple que $\ell_{y(14)=v_{12}}(14) < \ell_{y(14)=v_{12}}(13)$.

Es decir, estamos en el subcaso (2.2), del teorema (2.1), el cual dice:

Si para cada $e_1 \in M$ y cada $e_2 \in A(H)$ que incide en $y(e_1)$, cumple que $\ell_{y(e_1)}(e_1) < \ell_{y(e_1)}(e_2)$.

Como toda $e(u) \in A(H)$ son distintos, es decir, para cada $u \in V(H)$, tenemos su respectivo $e(u) \in M$, por lo tanto $|M| = |V(H)|$, además para todo $u \in M$, $\delta_M(u) = 2$, es decir, M forma un 2-factor en H .

De acuerdo al subcaso (2.2), del teorema (2.1), se tiene un algoritmo para poder encontrar un ciclo dirigido de longitud impar sin cuerdas en D ó un núcleo de D .

Paso 0: Elegimos un ciclo par del 2-factor generado por las aristas de M , el cual lo denotamos por:

$$\begin{aligned} C_1 &= (2, 1, 4, 3, 2) \\ &= (e(v_1), e(v_2), e(v_3), e(v_4), e(v_1)) \\ &= (v(1, 1), v(1, 2), v(1, 3), v(1, 4), v(1, 1)), \end{aligned}$$

donde $W_1 = \{v(1, 2), v(1, 4)\}$ y $B_1 = V(C_1) - W_1 = \{v(1, 1), v(1, 3)\}$. El conjunto W_1 es independiente.

Paso 1: Elegimos el vértice $v_5 \in V(H) - (B_1 \cup W_1)$ adyacente a $v(1, 4)$.

$$\begin{aligned} \text{Sea } C_2 &= (6, 7, 8, 9, 6) \\ &= (e(v_5), e(v_6), e(v_7), e(v_8), e(v_5)) \\ &= (v(2, 1), v(2, 2), v(2, 3), v(2, 4), v(2, 1)), \end{aligned}$$

donde $W_2 = W_1 \cup \{v(2, 2), v(2, 4)\}$ y $B_2 = B_1 \cup V(C_2) - W_2 = \{v(1, 1), v(1, 3), v(2, 1), v(2, 3)\}$. El conjunto W_2 es independiente.

Paso 2: Elegimos un vértice $v_9 \in V(H) - (B_1 \cup W_1)$ adyacente a $v(2, 4)$.

$$\begin{aligned} \text{Sea } C_3 &= (14, 13, 12, 11, 14) \\ &= (e(v_9), e(v_{12}), e(v_{11}), e(v_{10}), e(v_9)) \\ &= (v(3, 1), v(3, 2), v(3, 3), v(3, 4), v(3, 1)), \end{aligned}$$

donde $W_3 = W_2 \cup \{v(3, 2), v(3, 4)\}$ y $B_3 = B_2 \cup V(C_3) - W_3 = \{v(1, 1), v(1, 3), v(2, 1), v(2, 3), v(3, 1), v(3, 3)\}$.

Por otra parte el vértice $v(1, 2)$ es adyacente a $v(3, 2)$ en H , entonces el conjunto W_3 no es independiente, es decir, existe $(v(1, 2)v(3, 2)) \in A(H)$, con $v(1, 2) \in V(C_1)$ y $v(3, 2) \in V(C_3)$, entonces se forma una trayectoria de $v(1, 2)$ a $v(3, 2)$ en H .

$$T = (v(1, 2), C_1, v(1, 4)) \cup (v(1, 4), v(2, 1)) \cup (v(2, 1), C_2, v(2, 4)) \cup (v(2, 4), v(3, 1)) \cup (v(3, 1), C_3, v(3, 2))$$

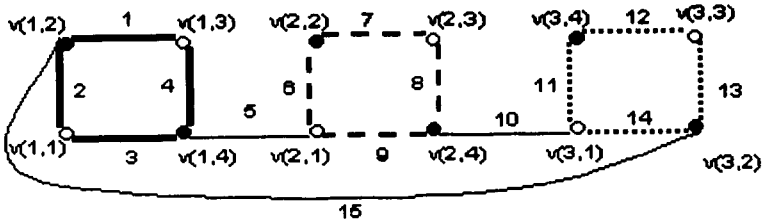
Con la cuerda $(v(3, 2), v(1, 2))$, formamos el ciclo:

$$C = (v(1, 2), T, v(3, 2)) \cup (v(3, 2), v(1, 2))$$

de longitud impar en H , entonces se forma un ciclo $L(C) \subseteq L(H)$ de longitud impar, el cual a su vez induce un ciclo dirigido de longitud impar en D , $(1, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 15, 1)$ el cual no tiene cuerdas, ver figura (2.18).

∴ El ciclo dirigido de longitud impar en D no tiene cuerdas.

Gráfica H



$W_1 = \{v(1,2), v(1,4)\}$, $B_1 = v(C_1) - W_1$, donde C_1 : ————
 $W_2 = W_1 \cup \{v(2,2), v(2,4)\}$, $B_2 = B_1 \cup v(C_2) - W_2$, donde C_2 : - - - -
 $W_3 = W_2 \cup \{v(3,2), v(3,4)\}$, $B_3 = B_2 \cup v(C_3) - W_3$, donde C_3 :
 W_3 no es independiente, ya que existe la arista $(v(3,2), v(1,2))$ en H

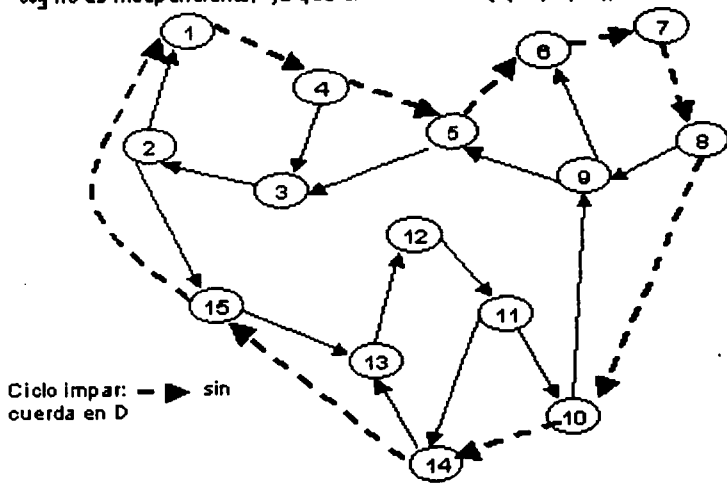


Figura 2.18: El conjunto W_2 no es independiente.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

74

Capítulo 3

Operaciones

En el presente capítulo consideramos algunas operaciones de gráficas con respecto a las orientaciones admisibles y M -admisibles, una de ellas es la suma de dos gráficas. Veremos dos resultados relacionados con dicha operación, el primero **si la suma de dos gráficas subyacentes de digráficas núcleo perfectas, le damos una orientación M -admisibles, entonces la suma es núcleo perfecta** y el segundo **la suma de dos gráficas M -solubles es M -soluble**. Podemos concluir, por el capítulo 1, que las gráficas de paridad son M -solubles, entonces en particular la suma de las gráficas de paridad es M -soluble.

La siguiente operación a tratar es la duplicación de un vértice en una gráfica, la cual puede ser no adyacente o adyacente. El siguiente teorema está relacionado con la duplicación no adyacente, es decir, **“La duplicación no adyacente de una gráfica soluble es soluble”**, el cual fue probado por E. Boros y V. Gurvich [9] utilizando teoría de juegos, en esta sección lo vamos a demostrar por medio de teoría de gráficas.

El último teorema que presentamos en este capítulo está relacionado con duplicación adyacente, orientación admisible y núcleos, el cual es: **“si la duplicación adyacente de una gráfica soluble, le damos la orientación admisible, entonces dicha digráfica tiene núcleo”**.

Recordamos que una orientación D de una gráfica G se llama admisible, si cada clan Q de D tiene un sucesor, es decir, Q tiene un pozo.

A continuación vamos a ver una caracterización de las gráficas con orientación no admisibles.

Lema No. 3.0.1. Una orientación D de una gráfica G es no admisible $\Leftrightarrow D$ contiene un ciclo dirigido \vec{C} , cuyas flechas son no simétricas y cuyos vértices inducen un clan.

Demostración:

\Rightarrow) Sea D una orientación no admisible de una gráfica G . Por demostrar que D contiene un ciclo dirigido \vec{C} , cuyas flechas son no simétricas y cuyos vértices inducen un clan.

Como D es una orientación no admisible de G , implica que D , tiene al menos una subdigráfica completa Q , que no tiene pozo.

Como Q no tiene pozo, entonces todo vértice tiene ingrado $< p - 1$ (de lo contrario existiría un pozo), es decir, $\forall x_i \in V(Q)$, con $1 \leq i \leq p$, donde $|V(Q)| = p$, $\exists x_s \in V(Q)$, tal que $(x_s, x_i) \notin F(Q)$, por lo tanto dado que Q es clan, $(x_i, x_s) \in F(Q)$ y $(x_i, x_s) \in Asim(D)$, sin pérdida de generalidad sea $x_1 \in V(D) \cap Q$, tal que existe $(x_1, x_2) \in Asim(Q)$, como el vértice x_2 no es pozo, entonces existe $x_3 \in V(Q)$, tal que $(x_2, x_3) \in Asim(Q)$, por hipótesis x_3 no es pozo, por lo cual existe $(x_3, x_4) \in Asim(Q)$.

Si $x_4 = x_1$, obtenemos un ciclo dirigido (x_1, x_2, x_3, x_1) en D cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan.

Si $x_4 \neq x_1$, como x_4 no es pozo, implica que existe $(x_4, x_5) \in Asim(Q)$.

Si $5 \in \{2, 1\}$, se obtiene un ciclo dirigido cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan (por ser subdigráfica inducida de un clan).

Si $5 \notin \{2, 1\}$, entonces $(x_4, x_5) \in Asim(Q)$. Continuando con este proceso y como Q es una digráfica finita, entonces existe un vértice $x_j \in V(Q)$, con $5 < j \leq p$, por hipótesis x_j no es pozo, lo cual implica que existe $(x_j, x_s) \in Asim(Q)$, con $s \in \{1, 2, \dots, p-3, p-2\}$.

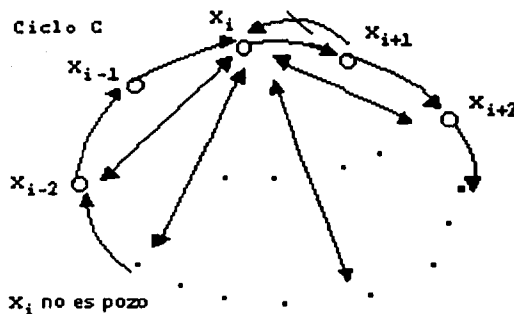


Figura 3.1:

\therefore se forma un ciclo dirigido $(x_s, x_{s+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_s)$ en D cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan.

\Leftrightarrow Sea una digráfica D que contiene un ciclo dirigido \vec{C} , cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan. Por demostrar que D es una orientación no admisible.

Suponemos que D es una orientación admisible, entonces por definición de orientación admisible, implica que toda subdigráfica completa Q tiene pozo y D tiene núcleo. Consideramos $\vec{C} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1)$ un ciclo dirigido en D cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan, (ver figura (3.1)).

\therefore Para cada $x_i \in \vec{C}$, con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, \exists la flecha $(x_i, x_{i+1}) \in \text{Asim}(D) \cap \vec{C}$ con $i \in \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ modulo n , es decir, cada x_i no tiene la propiedad de ser pozo.

Entonces D contiene una subdigráfica completa que no tiene pozo, lo cual es una contradicción, ya que D es admisible.

$\therefore D$ no es admisible. ■

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3.1. Suma

Definición No. 3.1. Sean G_i gráficas con $i = \{1, 2, 3, \dots, k\}$, la suma de las k gráficas la denotamos como:

$$\bigcup_{i=1}^k G_i = J(G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_k)$$

donde:

$$V(J(G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_k)) = \bigcup_{i=1}^k V(G_i)$$

$$A(J(G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_k)) = \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{i=1}^k A(G_i) \cup \{ (x, y) \mid x \in V(G_i), y \in V(G_j) \} \\ \text{con } i \neq j, \{i, j\} = \{1, 2, \dots, k\} \end{array} \right\}$$

A continuación damos un ejemplo, para $k=2$, ver figura (3.2).

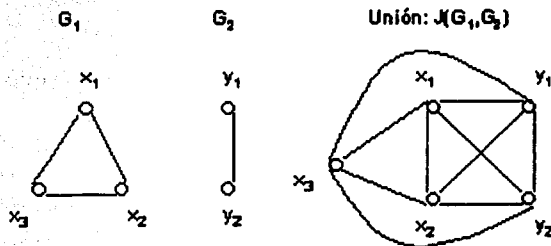


Figura 3.2:

donde:

$$V(G_1) = \{x_1, x_2, x_3\} \text{ y } A(G_1) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1)\}$$

$$V(G_2) = \{y_1, y_2\} \text{ y } A(G_2) = \{(y_1, y_2)\}$$

$$V(J(G_1, G_2)) = V(G_1) \cup V(G_2) = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2\}$$

$$A(J(G_1, G_2)) = A(G_1) \cup A(G_2) \cup \{ (x, y) \mid x \in V(G_1) \text{ y } y \in V(G_2) \}$$

$$= \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (y_1, y_2), (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\}$$

A continuación vamos a ver un teorema que se trata de digráficas núcleo perfectas y su relación con la operación de la suma.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Teorema No. 3.1. Sean $D_1 = (V_1, F_1)$, $D_2 = (V_2, F_2)$ digráficas núcleo perfectas, G_1, G_2 las gráficas subyacentes de D_1, D_2 respectivamente. Si D es una orientación de la suma $J(G_1, G_2)$ tal que $D[V_1] = D_1, D[V_2] = D_2$ y cada ciclo \vec{C} dirigido de longitud tres que cumple $\vec{C} \cap V_i \neq \emptyset$, con $i = \{1, 2\}$, tienen al menos dos flechas simétricas, entonces D es núcleo perfecta.

Demostración:

Sean $D_1 = (V_1, F_1)$, $D_2 = (V_2, F_2)$ digráficas núcleo perfectas, G_1, G_2 las subgráficas subyacentes de D_1, D_2 respectivamente, D la orientación de la unión $J(G_1, G_2)$ tal que $D[V_1] = D_1, D[V_2] = D_2$ y cada ciclo \vec{C} dirigido de longitud tres que cumple $C \cap V_i \neq \emptyset$, con $i = \{1, 2\}$ tiene al menos dos flechas simétricas.

Por demostrar que D es núcleo perfecta.

La demostración la vamos hacer por inducción sobre el número de vértices de D . Sea $|V(D)| = p$

Si $p=2$, en tal caso $V(D) = \{x_1, x_2\}$ y el conjunto $F(D)$ tiene varias posibilidades:

- Si $F(D) = \{(x_1, x_2)\}$ ó $F(D) = \{(x_2, x_1)\}$, el núcleo de D es $N = \{x_2\}$ ó $N = \{x_1\}$ respectivamente.
- Si $F(D) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$, entonces el núcleo de D , es solo un vértice, ya sea x_1 ó x_2 .

Observemos que las subdigráficas de D constan de un solo vértice, por lo tanto tiene núcleo.

$\therefore D$ es núcleo perfecta, (ver figura(3.3))

Sea $D_1 = (V_1, F_1)$ y $D_2 = (V_2, F_2)$ digráficas núcleo perfectas, $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ las gráficas subyacentes de D_1 y D_2 respectivamente. Supongamos que D' es la orientación de la suma, tal que $|V(D')| < p$, $D'[V_1] = D_1, D'[V_2] = D_2$ y cada ciclo dirigido \vec{C} de longitud 3 que cumple $C \cap V_i \neq \emptyset$, con $i = \{1, 2\}$ tienen al menos dos flechas simétricas, entonces D' es núcleo perfecta.

Sean $D_1 = (V_1, F_1)$ y $D_2 = (V_2, F_2)$ digráficas núcleo perfectas, $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ las gráficas subyacentes de D_1 y D_2 respectivamente, D es la orientación de la suma $J(G_1, G_2)$ con $|V(D)| = p$, tal que $D[V_1] = D_1, D[V_2] = D_2$ y cada ciclo dirigido \vec{C} de longitud 3 que cumple $\vec{C} \cap V_i \neq \emptyset$, con $i = \{1, 2\}$ tienen al menos dos flechas simétricas.

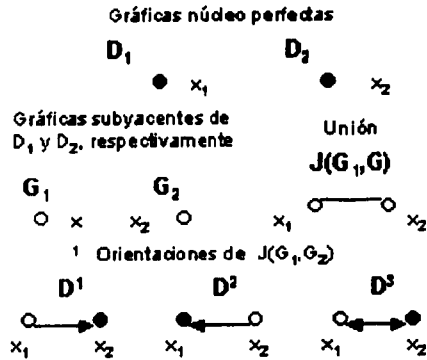


Figura 3.3:

Por demostrar, D es una digráfica núcleo perfecta.

Por hipótesis $D[V_1] = D_1$ tiene núcleo N_1 , existen dos casos:

caso (1) Para cada $u \in V_2$ se tiene $\Gamma_D^+(u) \cap N_1 \neq \emptyset$. Como se ve en la figura (3.4). En este caso afirmamos que N_1 es núcleo de D .

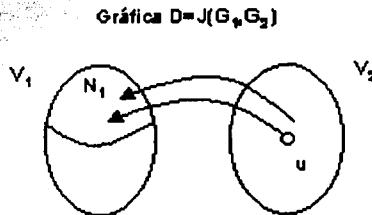


Figura 3.4:

1. Por demostrar, N_1 es independiente en D .

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Sabiendo que N_1 es independiente en D_1 , $D_1 \subseteq D$, entonces N_1 es independiente en D .

2. Por demostrar, N_1 es absorbente en D .

Tenemos que $\forall x \in V_1 - N_1 \exists z \in N_1$ tal que $(x, z) \in F(D)$, esto es por ser N_1 absorbente en D_1 ; $\forall y \in V_2$, se tiene por hipótesis $\Gamma_D^+(y) \cap N_1 \neq \emptyset$, por lo tanto para cada $y \in V_2$, $\exists yN_1 - flecha$, por lo que con esto llegamos $\forall x \in V(D) - N_1$, $\exists xN_1 - flecha$ en D , esto quiere decir, que N_1 es absorbente en D .

caso (2) $\exists v \in V_2$ tal que $\nexists vN_1 - flecha$.

Por definición de suma, $\exists N_1v - flecha$

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$X = \{v \in V_2 \mid \Gamma_D^+(v) \cap N_1 = \emptyset\}$$

$$Y = \{v \in V_2 \mid \forall u \in V_1 (u, v) \in F(D)\}$$

Como vemos en la figura (3.5)

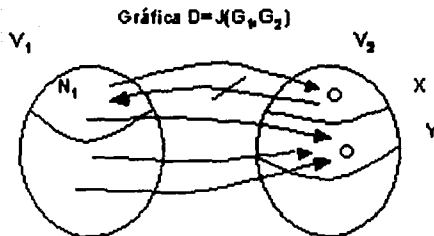


Figura 3.5:

Por hipótesis $\exists v \in V_2$, tal que $\nexists vN_1 - flecha$, por definición de suma $\exists N_1v - flecha$ para $v \in V_2$, entonces $X \neq \emptyset$, y además $X \subseteq V_2$. Por otro lado $Y \subseteq V_2$, esto es por definición de Y , vamos a demostrar que $X \subseteq Y$.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

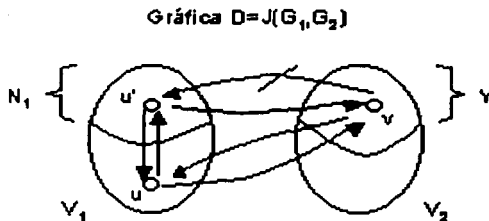


Figura 3.6:

Consideramos $v \in X$, $u \in V_1$. Por demostrar $v \in Y$.

- * Si $u \in N_1$, entonces $\exists uX$ - flecha, esto es por definición de X , por lo tanto $\forall u \in N_1$, $\exists (u, v) \in F(D)$ con $v \in X \subseteq V_2$.
- * Si $u \in (V_1 - N_1)$ y por ser N_1 núcleo de D_1 , entonces $\forall u \in (V_1 - N_1) \exists u' \in N_1$ tal que $(u, u') \in F(D)$, además para todo $v \in X$ existe $(u', v) \in Asim(D)$. Por demostrar $\exists uv$ - flecha en $F(D)$.

Si $\nexists uv$ - flecha, entonces por definición de suma, $\exists vu$ - flecha en $F(D)$, lo cual forma un ciclo dirigido $\vec{C} = (u, u', v, u)$ de longitud tres (ver figura(3.6)) y $\vec{C} \cap V_i \neq \emptyset$, con $i = \{1, 2\}$, entonces por hipótesis del teorema \vec{C} tiene al menos 2 flechas simétricas, como no existe vu' - flecha, implica que $\exists u'u$ - flecha y uv - flecha

En cualquiera de los dos casos siempre tenemos la flecha (u, v) con $u \in V_1$ y $v \in V_2 \cap X$, por lo tanto $u \in Y$.

$$\therefore X \subseteq Y.$$

Como $X \subseteq Y$ y $X \neq \emptyset$, entonces $Y \neq \emptyset$.

Ahora consideramos la subgráfica inducida por Y , $D[Y]$, por hipótesis $D[Y]$ es núcleo perfecta, sea N_Y núcleo de $D[Y]$, como se muestra en la figura (3.7).

Por definición de Y , implica que $\exists vY$ - flecha $\forall v \in V_1$, como $N_Y \subseteq Y$, entonces $\exists vN_Y$ - flecha, por lo tanto $\forall v \in [V(D_1) \cup V(Y - N_Y)]$, $\exists vN_Y$ - flecha.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

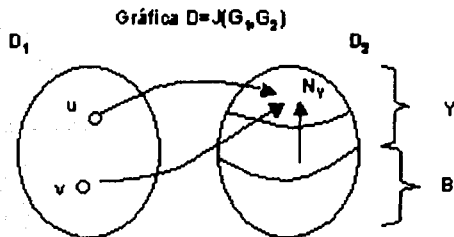


Figura 3.7:

Sea $B = V_2 - Y$.

1. Si $B = \emptyset$, entonces N_Y es un conjunto independiente y absorbente en D .
 N_Y es el núcleo de D .
2. Si $B \neq \emptyset$. Por demostrar si $\exists N_Y B$ - flecha en D , entonces $\exists B N_Y$ - flecha en D .
 Consideramos $u \in N_Y$, tal que $\exists ux$ - flecha, con $x \in B$. Como $x \notin Y$, implica que $\nexists vx$ - flecha, para algún $v \in V_1$, pero por definición de suma $\exists xv$ - flecha. Por definición de Y , $\exists vu$ - flecha, como se ve en la figura (3.8).

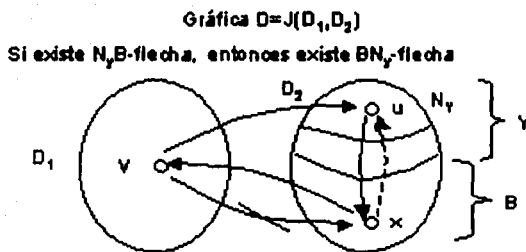


Figura 3.8:

Por lo cual obtenemos un ciclo dirigido $\vec{C} = (u, x, v, u)$ de longitud 3, el cual cumple $\vec{C} \cap V_i \neq \emptyset$, para $i = \{1, 2\}$, por hipótesis del teorema \vec{C} tiene al menos 2 flechas simétricas, por lo tanto existe $\{(u, v), (x, u)\} \in F(D)$.

$\therefore \exists B N_Y$ - flecha.

Sea $Z = \{x \in V_2 \cap B \mid (x, y) \notin F(D) \text{ y } (y, x) \notin F(D), \text{ con } y \in N_Y\}$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Caso (a) Si $Z = \emptyset$, entonces N_Y es un conjunto independiente en D y como para todo $u \in V(D) - N_Y$, existe uN_Y - flecha, entonces N_Y es absorbente en D .

$\therefore N_Y$ es el núcleo de D

Caso (b) Si $Z \neq \emptyset$, consideremos la subdigráfica inducida por Z , $D[Z]$, por hipótesis de inducción $D[Z]$ tiene núcleo, sea N_Z el núcleo. (ver figura (3.9)).

Por demostrar $N_Z \cup N_Y$ es núcleo de D .

i) $N_Z \cup N_Y$ es independiente.

- N_Z es independiente, por ser N_Z núcleo de $Z \subseteq D$.

- N_Y es independiente, por ser N_Y núcleo de $Y \subseteq D$.

Por definición de Z , no existe $N_Y N_Z$ - flecha ni existe $N_Z N_Y$ - flecha, por lo tanto $N_Z \cup N_Y$ es independiente.

ii) $N_Z \cup N_Y$ es absorbente. Sea $x \in V(D) - (N_Z \cup N_Y)$, tenemos los siguientes casos:

- Para $x \in V_1$, $\exists xN_Y$ - flecha en D , por definición de Y .

- Para $x \in (Y - N_Y)$, $\exists xN_Y$ - flecha en D , por ser N_Y núcleo de Y .

- Para $x \in (B - Z)$, $\exists xN_Y$ - flecha en D , por definición de $B - Z$.

- Para $x \in (Z - N_Z)$, $\exists xN_Z$ - flecha en D , por ser N_Z núcleo de Z .

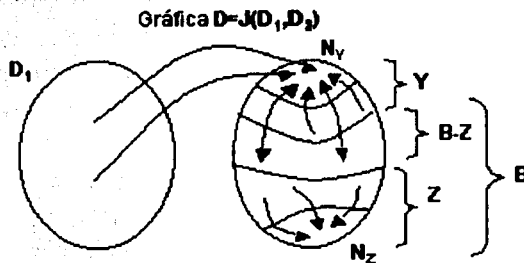


Figura 3.9:

Por lo tanto $\forall x \in V(D) - (N_Z \cup N_Y)$, existe $u \in (N_Z \cup N_Y)$, tal que $(x, u) \in F(D)$.

$\therefore (N_Z \cup N_Y)$ es absorbente en D .

$\therefore (N_Z \cup N_Y)$ es núcleo de D .

Por hipótesis de inducción, cada subdígrafa inducida de D tiene núcleo.

$\therefore D$ es núcleo perfecta. ■

Recordando que una orientación M -admisibles de una gráfica, es aquella donde cada ciclo de longitud tres tiene al menos cinco flechas y si cada orientación M -admisibles de una gráfica tiene núcleo, entonces recibe el nombre de gráfica M -soluble. A continuación vamos ver un corolario que relaciona las gráficas M -solubles con la operación de la suma.

Corolario No. 3.1.1. *Si G_1, G_2 , son gráficas M -solubles, entonces $J(G_1, G_2)$ es M -soluble.*

Demostración:

Sean $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ gráficas M -solubles.

Por demostrar $J(G_1, G_2)$ es una gráfica M -soluble, es decir, cada orientación M -admisibles D de $J(G_1, G_2)$ tiene núcleo.

Observamos que cada orientación M -admisibles D de la suma $J(G_1, G_2)$, induce una orientación M -admisibles de G_1 y G_2 , como G_1 y G_2 son gráficas M -solubles, entonces las orientaciones M -admisibles de G_1 y G_2 tienen núcleo.

Sea D una orientación M -admisibles de la suma $J(G_1, G_2)$, tal que $D[V_1] = D_1$, $D[V_2] = D_2$ son núcleo perfectas, entonces cada ciclo dirigido \vec{C} de longitud 3 en D , tiene al menos dos flechas simétricas, en particular para \vec{C} que cumple $\vec{C} \cap V_i \neq \emptyset$, con $i = \{1, 2\}$ tienen al menos dos flechas simétricas, por el teorema (3.1), D es núcleo perfecta, por lo cual D tiene núcleo, es decir, cada orientación M -admisibles de la suma de gráficas M -solubles tiene núcleo.

$\therefore J(G_1, G_2)$ es M -soluble. ■

3.2. Duplicación

Otra operación es la duplicación de un vértice x en una gráfica G , tal duplicación puede ser adyacente o no adyacente. A continuación damos la definición.

Definición No. 3.2. *La duplicación de un vértice x en una gráfica G , es la creación de un nuevo vértice x' y añadir aristas entre x' y cada vecino de x ; si se añade la arista (x, x') , la llamamos duplicación adyacente, si no se añade (x, x') , entonces se llama duplicación no adyacente.*

A continuación se muestra un ejemplo, figura (3.10):



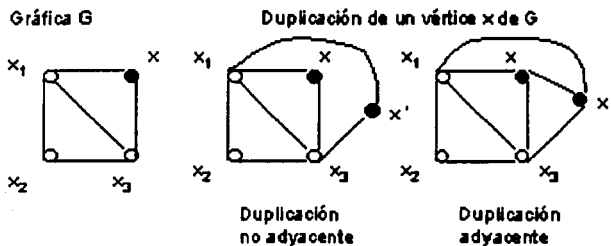


Figura 3.10:

El siguiente teorema es relacionado con duplicación no adyacente; el cual fue probado por E. Boros y V. Gurvich [9], utilizando herramientas de teoría de juegos, pero enseguida damos otra demostración solo usando teoría de gráficas.

Teorema No. 3.2. *Sea G una gráfica soluble, $x \in V(G)$. Si G' es la gráfica obtenida de G por duplicación no adyacente de x , entonces G' es una gráfica soluble.*

Demostración:

Sean G una gráfica soluble, $x \in V(G)$ y G' la gráfica obtenida de G por duplicación no adyacente de x , con un nuevo vértice x' . Como G es soluble, implica por definición que cada orientación admisible D de G tiene núcleo.

Por demostrar G' es soluble, es decir, que cada orientación admisible D' de G' tiene núcleo.

Por construcción de G' , tenemos que cada orientación admisible D de G esta contenida en alguna D' , esto quiere decir que cada orientación admisible $(D' - x')$ de G' tiene núcleo.

Sea D' una orientación admisible de G' . Consideramos un conjunto A de vértices de G tal que:

$$A = \{u \in V(G) \mid \exists (u, x) \in A(G)\}$$

y una partición de A :

$$A_1 = \{u \in A \mid (u, x) \notin F(D') \text{ y } (u, x') \notin F(D')\}$$

$$A_2 = \{u \in A \mid u \text{ tiene a lo más un predecesor entre } x \text{ y } x', \text{ es decir, existe a lo más una de las dos flechas } (x, u) \in F(D') \text{ ó } (x', u) \in F(D')\}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$A_3 = A - (A_1 \cup A_2)$$

Como se muestra en la figura (3.11):

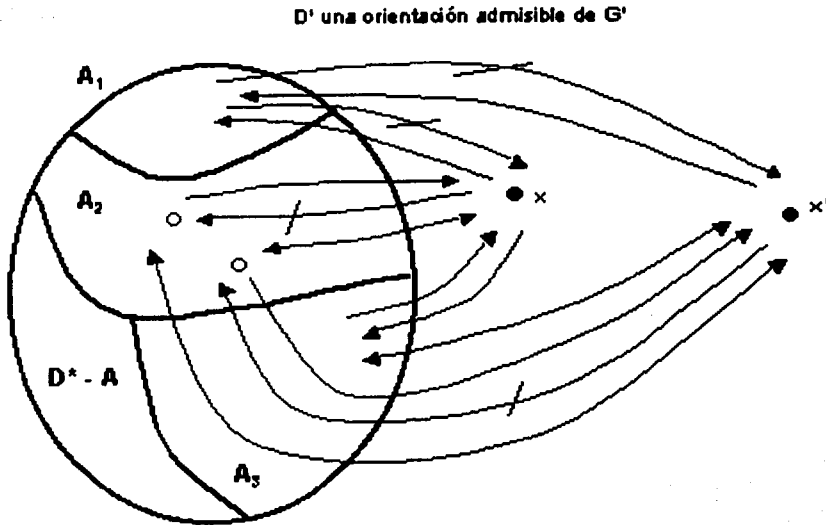


Figura 3.11:

Notemos que cada $u \in (A_1 \cup A_3)$ es sucesor de x y x' , es decir, existen $\{(x, u), (x', u)\} \subseteq F(D')$; sin embargo si u sólo pertenece a A_1 , entonces existe el conjunto de flechas $\{(x, u), (x', u)\} \subseteq Asim(D')$.

Sea D una orientación de G , obtenida a partir de D' como sigue:

- * Cada arista $(u, v) \in [G' - \{x, x'\}]$ tiene la misma dirección que en D' .
- * Para cada $u \in A_1$, ponemos la flecha $(x, u) \in F(D)$, pero $(u, x) \notin F(D)$.
- * Para cada $u \in A_2$, ponemos la flecha $(u, x) \in F(D)$ y $(x, u) \notin F(D)$.
- * Para cada $u \in A_3$, ponemos la flecha $(u, x) \in F(D)$ y $(x, u) \in F(D)$.

FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A continuación mostramos la digráfica D . Figura (3.12).

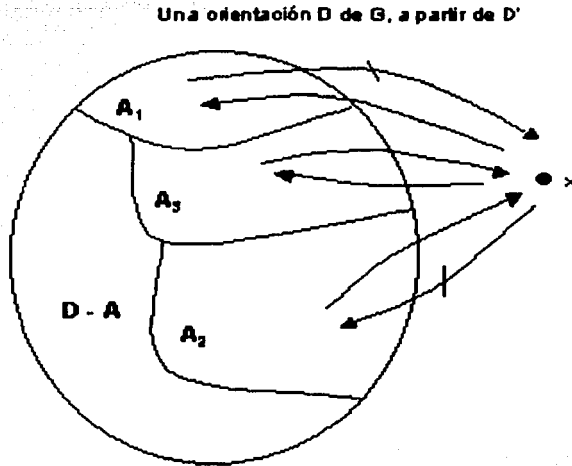


Figura 3.12:

Por demostrar D es una orientación admisible de G .

Suponemos que D no es una orientación admisible de G , entonces por el lema (3.0.1) D contiene un ciclo dirigido \vec{C} , cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan.

El vértice x debe estar en \vec{C} , ya que por definición de D , puede ocurrir un cambio de dirección de las flechas que van de x hacia los vecinos de x en D .

Consideramos los vértices $\{w_1, w_2\} \subseteq V(D) \cap \vec{C}$, tal que existen las flechas $(x, w_1) \in \text{Asim}(D) \cap \vec{C}$ y $(w_2, x) \in \text{Asim}(D) \cap \vec{C}$, por lo que $w_1 \in A_1$ y $w_2 \in A_2$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En la figura (3.13), mostramos el ciclo dirigido \vec{C} , cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan.

Denotemos a \vec{C} por:

$$\vec{C} = (x, x_1 = w_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n = w_2, x).$$

Ciclo C en D; cuyas flechas no son simétricas
y cuyos vértices inducen un clan.

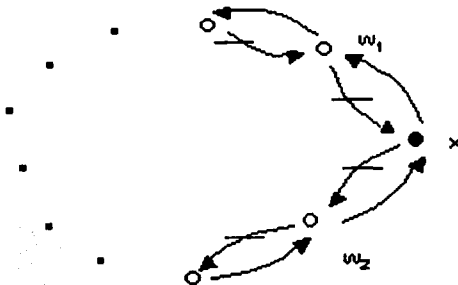


Figura 3.13:

Como $w_1 \in A_1$, entonces existe la flecha $(x', w_1) \in F(\text{Asim}(D'))$.

Como el vértice $w_2 \in A_2$, por definición de A_2 , tenemos que w_2 tiene a lo más un predecesor entre x' y x , por lo cual consideramos dos casos:

Caso (1): Si existe la flecha $(x', w_2) \in F(D')$ y $(x, w_2) \notin F(D')$, por definición de A_2 , existe la flecha $(w_2, x) \in \text{Asim}(D')$; ver figura (3.14).

Por lo que se forma el ciclo dirigido:

$$\vec{C}' = (x, w_1) \cup (w_1, \vec{C}, w_2) \cup (w_2, x)$$

en D' , el cual tiene flechas no simétricas y cuyos vértices inducen un clan en D' , por lo tanto D' no es una orientación admisible, lo cual no es posible, ya que por hipótesis D' es una orientación admisible.

$\therefore D$ es una orientación admisible.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Caso (1): Si existe (x', w_2) en $F(D')$.

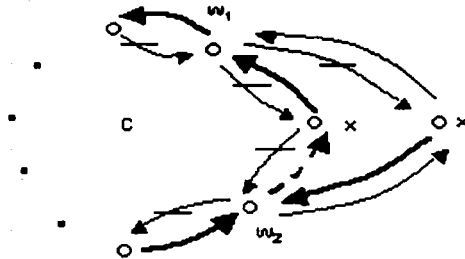


Figura 3.14:

Caso (2): Si existe $(x, w_2) \in F(D')$ y $(x', w_2) \notin F(D')$.

Como $(x', w_2) \notin F(D')$, entonces por definición de $A_2(w_2, x') \in \text{Asim}(D')$, (ver figura(3.15)).

Por lo cual se forma el ciclo dirigido:

$$\vec{C}'' = (x', w_1) \cup (w_1, \vec{C}, w_2) \cup (w_2, x')$$

en D' , cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan, entonces D' no es una orientación admisible, lo cual es una contradicción, ya que por hipótesis D' es una orientación admisible.

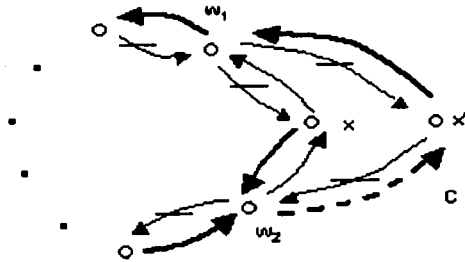
$\therefore D$ es una orientación admisible.

Así D es una orientación admisible de G y por hipótesis G es soluble, entonces D tiene núcleo.

Sea N el núcleo de D .

Por demostrar que D' tiene núcleo.

Caso (2): Si existe (x, w_2) en $F(D')$.



Ciclo $C' = \{x, w_1\} \cup \{w_1, x'\} \cup \{w_2, x'\}$ en D' .

Figura 3.15:

Existen dos casos:

Caso (a): Si $x \in N$. Por demostrar $N \cup \{x'\}$ es núcleo de D' .

1. $N \cup \{x'\}$ es independiente.

- Como N es núcleo de D , entonces N es independiente en D , por otro lado $x' \notin V(D)$ y $D \subseteq D'$, entonces N es independiente en D' .
- Por construcción de D' , $\Gamma_{D'}(x') = \Gamma_D(x)$, además $x \in N$, entonces $\forall u \in \Gamma_D(x)$, $u \notin N$, por lo cual $\nexists Nx' - flecha$ en D' ni $x'N - flecha$ en D' .
- Finalmente no existen $(x, x') \in F(D')$ ni $(x', x) \in F(D')$, esto se debe por la duplicación no adyacente de x .

$\therefore N \cup \{x'\}$ es independiente en D' .

2. $N \cup \{x'\}$ es absorbente.

Sabemos que N es absorbente en D y $D \subseteq D' - \{x'\}$, entonces $\forall v \in V(D') - (N \cup \{x'\})$, $\exists u \in (N \cup \{x'\})$ tal que $(v, u) \in F(D')$.

$\therefore N \cup \{x'\}$ es absorbente en D' .

Caso (b) Si $x \notin N$. Por demostrar N es núcleo de D' .

1. N es independiente en D' .

Como N es núcleo de D , entonces N es independiente en D , $D \subseteq D'$ y sólo puede haber cambio de dirección en algunas flechas para la subdigráfica de D' , y x' tiene las mismas adyacencias que x en G .

$\therefore N$ es independiente en D' .

2. N es absorbente en D'

Como $x \notin N$, entonces existe un sucesor u de x , tal que $u \in N$ en D .

Por definición de A_1 y A_3 , tenemos $x(A_1 \cup A_2)$ - flecha, por lo tanto existe al menos un vértice $u \in (A_1 \cup A_3)$, de modo que $u \in N$, es decir, existe xN - flecha y por construcción de D' , $\exists (x', u) \in F(D')$.

Para $y \in V(D') - (N \cup \{x'\})$, $\exists w \in N$, tal que $(y, w) \in F(D')$, por lo tanto para $v \in V(D') - N \exists vN$ - flecha en D' y $\exists x'N$ - flecha en D' .

$\therefore N$ es absorbente en D' .

$\therefore N$ es núcleo de D' .

Obtenemos que cada orientación admisible D' de G' tiene núcleo.

$\therefore G'$ es soluble. ■

A continuación vemos un teorema, relacionado con duplicación adyacente en gráficas solubles. En este teorema de la duplicación adyacente de un vértice x , de una gráfica soluble, es más débil que el de duplicación no adyacente, esto es, si en la duplicación adyacente de una gráfica soluble le damos una orientación admisible, entonces dicha digráfica tiene núcleo. No obstante en la duplicación no adyacente de una gráfica soluble, obtenemos nuevamente una gráfica soluble.

Teorema No. 3.3. Sea G una gráfica soluble, $x \in V(G)$ y G' una gráfica obtenida de G por la duplicación adyacente de x con un nuevo vértice x' . Si D' es una orientación admisible de G' , en la cual la flecha $(x', x) \in F(D')$ no es simétrica, entonces D' tiene núcleo.

Demostración:

Sean G una gráfica soluble, $x \in V(D)$ el vértice que se duplica y G' la gráfica obtenida de G por la duplicación de x , con un nuevo vértice x' y D' una orientación admisible de G' , con $(x', x) \in F(D')$ no simétrica. Como G es soluble, implica por definición que cada orientación admisible D de G tiene núcleo.

Por demostrar D' tiene núcleo.

Consideramos un conjunto A de vértices de G' , tal que:

$A = \{v \in V(G') \mid \exists (v, x) \in A(G') \text{ y } (v, x') \in A(G')\}$, y una partición de A :

$A_1 = \{u \in A \mid (u, x) \notin F(D') \text{ y } (u, x') \notin F(D')\}$

$A_2 = \{u \in A \mid (u, x) \notin F(D')\} - A_1$

$A_3 = \{u \in A \mid \text{una de las flechas } (x, u) \notin F(D') \text{ ó } (x', u) \notin F(D')\}$

$A_4 = A - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

A continuación se muestra la digráfica D' , figura (3.16).

Una orientación D' admisible de G'

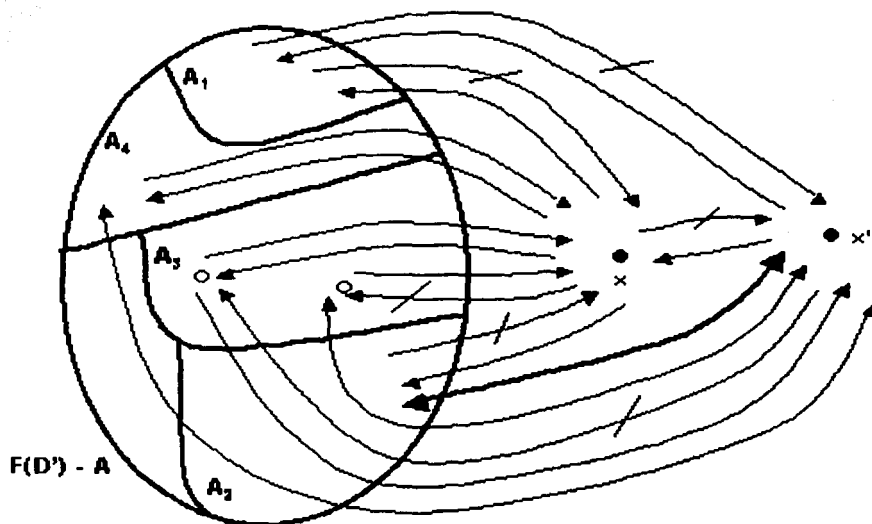


Figura 3.16:

Observemos que para $u \in A_2$, existe la flecha $(u, x') \in Sim(D')$. Supongamos que la flecha $(x', u) \notin F(D')$ para algún $u \in A_2$, entonces por definición de A_2 existe $(u, x') \in Asim(D')$, con esta flecha se forma un ciclo dirigido $\vec{C} = (x', x, u, x')$ en D' , cuyas flechas no son simétricas y

cuyos vértices inducen una gráfica completa, por lo tanto D' no es una orientación admisible, lo cual es una contradicción, ya que por hipótesis D' es una orientación admisible, entonces debe existir $(u, x') \in \text{Sim}(D')$.

Sea D^* una orientación de G' obtenida a partir de D' , como sigue:

$$V(D^*) = V(D')$$

$$F(D^*) = \begin{cases} - & \text{para } u \in V(D^*) - A_2, \text{ le damos la orientación de } D' \\ - & \text{para } u \in A_2, \text{ la flecha } (u, x') \notin F(D^*) \end{cases}$$

Como se muestra en la siguiente figura (3.17):

Una orientación D^* de G' , a partir de D'

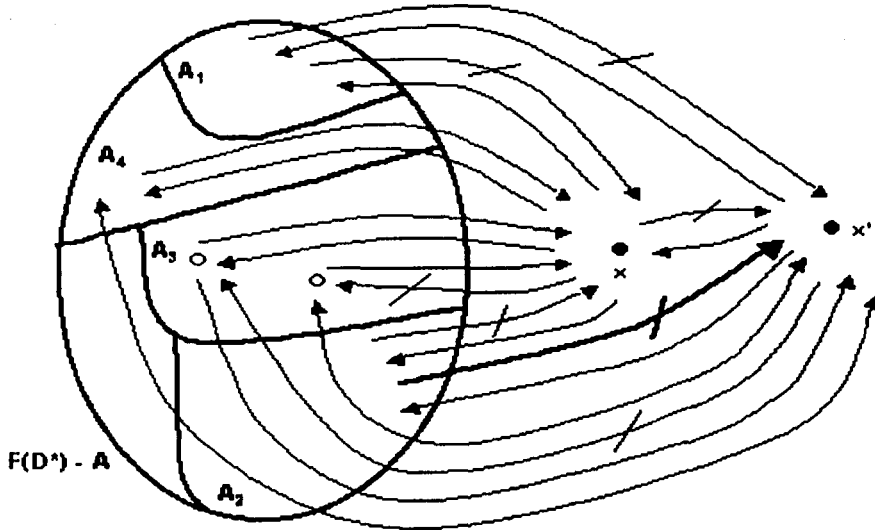


Figura 3.17:

Por demostrar D^* es una orientación admisible.

Suponemos que D^* no es una orientación admisible, es decir, D^* contiene un ciclo dirigido \vec{C}^* cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Por construcción de D^* , existe la flecha $(x', u) \in \text{Asim}(D^*) \cap \vec{C}^*$, para algún $u \in A_2$, (ver figura(3.18)).

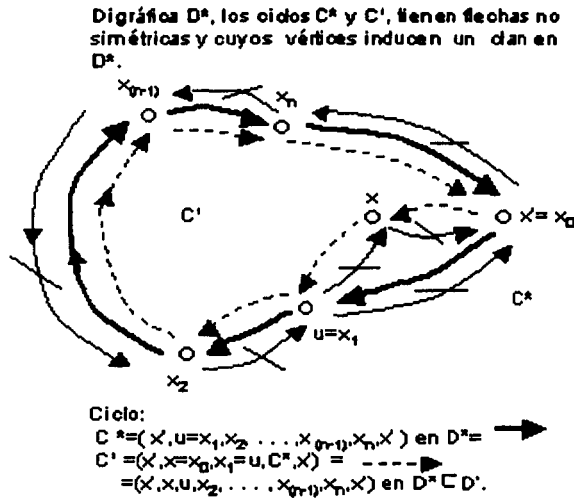


Figura 3.18:

Denotemos $\vec{C}^* = (x' = x_0, u = x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x' = x_0) \subseteq D^*$.

Por construcción de D^* , las flechas $\{(x, u), (x', x)\} \in \text{Asim}(D^*)$, con $u \in A_2$, con dichas flechas se forma un ciclo dirigido:

$$\vec{C}' = (x', x, u) \cup (u, \vec{C}^*, x_n) \cup (x_n, x')$$

en $D^* \subset D'$, cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan en D^* , como $F(\vec{C}') \subset F(D')$, entonces el ciclo dirigido $\vec{C}' \subset D'$, es decir, D' contiene un ciclo dirigido cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan en D' , lo cual implica que D' no es una orientación admisible, pero esto nos conduce a una contradicción, ya que por hipótesis D' es una orientación admisible.

$\therefore D^*$ es una orientación admisible.

Ahora consideremos una orientación D de G de la siguiente manera:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$V(D) = V(D') - x'$$

$$F(D) = \begin{cases} - \text{ Para toda arista con ambos extremos finales diferentes de } x \text{ y } x', \\ \text{ le damos la orientación de } D' \\ - \text{ Para } u \in [A_1 \cup A_2], \text{ ponemos la flecha } (x, u) \\ - \text{ Para } u \in A_3, \text{ ponemos la flecha } (u, x) \\ - \text{ Para } u \in A_4, \text{ ponemos las flechas } (u, x) \text{ y } (x, u) \end{cases}$$

Como se ve en la figura (3.19).

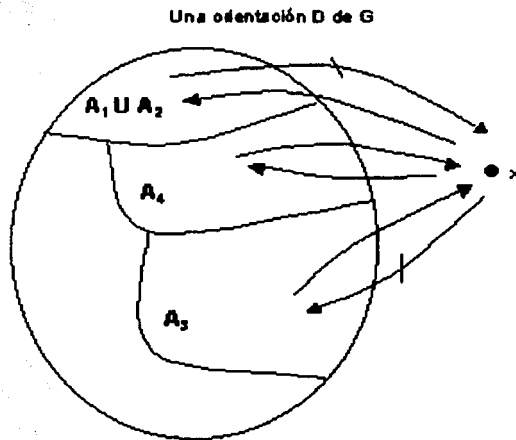


Figura 3.19:

Por demostrar D es una orientación admisible de G .

Suponemos que D no es una orientación admisible de G , es decir, D contiene un ciclo dirigido \vec{C} , cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan.

El vértice x debe estar en \vec{C} , ya que $D - \{x\} \subseteq D'$ y D' es admisible, es decir, puede ocurrir un cambio de dirección de las flechas que van de x hacia sus vecinos en D .

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Como $x \in \vec{C}$, entonces existen $\{a, b\} \subseteq V(\vec{C}) \subseteq V(D)$, tal que $(b, x) \in (F(D) \cap F(\vec{C}))$ y $(x, a) \in (F(D) \cap F(\vec{C}))$ no son simétricas.

Sea $\vec{C} = (x, a = x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n = b, x) \subset D$.

Como se muestra en la figura(3.20)

Ciclo C en D , cuyas flechas no son simétricas
y cuyos vértices inducen un dan.

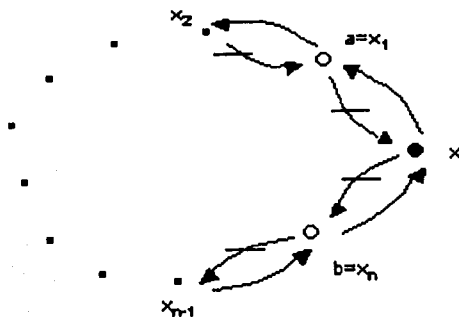


Figura 3.20:

Notemos que $a \in A_1 \cup A_2$ y así $(x, a) \in \text{Asim}(D^*)$ y $b \in A_3$, por lo que tenemos dos casos:

- La flecha (x, b) no está en D^* y
- La flecha (x', b) no está en D^* .

Caso (1): Si $(x, b) \notin F(D^*)$, es decir, existe $(b, x) \in F(D^*)$, la cual no es simétrica en D^* .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Como vemos la figura (3.21).

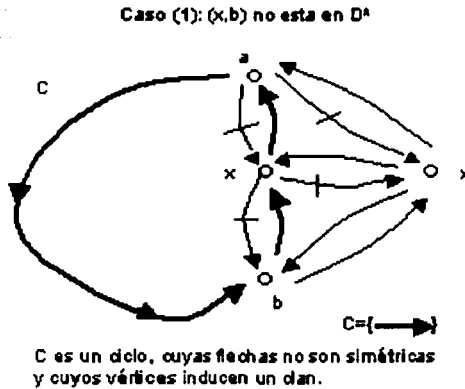


Figura 3.21:

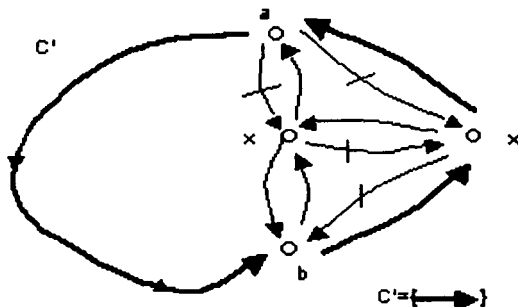
Con esto llegamos a que el ciclo dirigido \vec{C} tiene flechas no simétricas y sus vértices inducen un clan en D^* , por lo tanto D^* no es una orientación admisible, lo cual no es posible, ya que por hipótesis D^* es una orientación admisible.

$\therefore D$ es una orientación admisible.

Caso (2): Si $(x', b) \notin F(D^*)$, es decir, existe $(b, x') \in Asim(D^*)$, (ver figura(3.22)).

Como $a \in A_1 \cup A_2$, entonces $(x', a) \in Asim(D^*)$, con lo cual se forma un ciclo dirigido $\vec{C}' = (x', a) \cup (a, \vec{C}, b) \cup (b, x')$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Caso (2): (x, b) no está en D^* 

C' es un ciclo, cuyas flechas no son simétricas y cuyos vértices inducen un clan.

Figura 3.22:

Observemos que si $(x', a) \in F(D')$, con $a \in A_2$, entonces dicha flecha no es necesariamente asimétrica, pero como $(x', a) \in F(D^*)$, entonces el ciclo dirigido $\vec{C}' \subseteq D^*$, el cual es un ciclo sin flechas no simétricas y cuyos vértices inducen un clan en D^* , esto quiere decir que D^* es una orientación no admisible, lo cual no es posible, ya que por hipótesis D^* es una orientación admisible de G' .

$\therefore D$ es una orientación admisible de G .

Llegamos a que D es una orientación admisible de G y por hipótesis G es soluble, lo cual implica que D tiene núcleo.

Sea N el núcleo de D .

Por demostrar D' tiene núcleo.

Caso (1): Si $x \in N$. Por demostrar, N es núcleo de D' .

1. N es un conjunto independiente.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Sabiendo que N es independiente en D , además $D \subseteq D'$ y como sólo puede haber cambio de dirección en algunas flechas para la subdigráfica de D , y x' tiene las mismas adyacencias que x en G .

$\therefore N$ es independiente en D' .

2. N es un conjunto absorbente.

Por construcción de D' , existe la flecha $(x', x) \in F(D')$ no simétrica, como el vértice $x \in N$, entonces $\exists x'N$ - flecha en D' ; por otro lado $D \subseteq D'$ y N es absorbente en D , entonces para $y \in V(D') - (N \cup \{x'\})$, $\exists n \in N$, tal que $(y, n) \in F(D')$, por lo tanto $\forall y \in V(D') - N$, $\exists yN$ - flecha en D' .

$\therefore N$ es absorbente en D' .

Como N es independiente y absorbente en D' , entonces N es núcleo en D' .

Caso (2): Si $x \notin N$. Por demostrar N es núcleo de D' .

Solo basta demostrar que N es absorbente, ya que la independencia de N se debe a las mismas razones del caso (1).

Por demostrar N es absorbente en D' , es decir, $\forall v \in V(D') - N$, $\exists vN$ - flecha en D' .

Como $x \notin N$, implica por definición de D que N contiene un sucesor u de x , es decir, existe $(x, u) \in F(D)$, con $u \in N$.

- Por definición de A_1 , A_2 y A_4 , tenemos $x(A_1 \cup A_2 \cup A_4)$ - flecha en D' , por lo tanto existe al menos un vértice $u \in (A_1 \cup A_2 \cup A_4)$, de modo que $u \in N$, es decir, existe $(x, u) \in F(D')$, con $u \in N$.

- Por construcción de D' , existe $x'(A_1 \cup A_2 \cup A_4)$ - flecha en D' , para algún $u \in (A_1 \cup A_2 \cup A_4)$ esta en N , por lo que $\exists x'N$ - flecha en D' .

Para $v \in V(D') - (N \cup \{x'\})$, $\exists vN$ - flecha en D' y $\exists x'N$ - flecha en D' , por lo que obtenemos que para cada $v \in V(D') - N$, $\exists vN$ - flecha en D' .

$\therefore N$ es núcleo de D' .

Por lo tanto en los dos casos D' tiene núcleo. ■

Apéndice A

Conjetura de Meyniel

Recordemos que una digráfica D es núcleo perfecta (R - digráfica) si D y todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo y una digráfica D es núcleo imperfecta crítica (R^- - digráfica) si D no tiene núcleo y todas sus subdigráficas inducidas propias (no ella misma) tienen núcleo. Un resultado que tiene que ver con las digráficas núcleo perfectas y los ciclos dirigidos de longitud impar es la conjetura que dió Meyniel en 1976, la cual dice:

Si cada ciclo dirigido de longitud impar tiene dos cuerdas, entonces la digráfica es núcleo perfecta,

dicha conjetura es falsa, el contraejemplo lo muestra Galeana-Sánchez [11], el cual vamos a analizar en esta sección, como también veremos que si en la digráfica del contraejemplo le quitamos una flecha específica, entonces la digráfica obtenida es núcleo imperfecta crítica.

Una condición para que exista núcleo en digráficas con ciclos de longitud impar la enunciamos en el siguiente teorema:

Teorema No. A.1 (Duchet y Meyniel [8]). *Sea D una digráfica.*

Si todo ciclo dirigido \vec{C} de longitud impar tiene 2 cuerdas del siguiente tipo: $(x_i, x_{i+2}), (x_{i+1}, x_{i+3})$, entonces D tiene núcleo.

Este teorema es un caso particular, donde la conjetura si es verdadera:

Conjetura No. A.1 (H. Meyniel, 1976 [6]). *Sea D una digráfica. Si cada ciclo dirigido de longitud impar tiene dos cuerdas, entonces D tiene núcleo.*

Dicha conjetura es falsa, si no pedimos más condiciones para las cuerdas del ciclo dirigido de longitud impar, el contraejemplo lo enunciamos en el siguiente teorema de Galeana-Sánchez.

Teorema No. A.2 (H. Galeana-Sánchez [11]). *Para todo $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$. Existe una digráfica D , sin núcleo, tal que cada ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos k cuerdas.*

Demostración:

Para $k = 2$. Sea D una digráfica con:

$$V(D) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{17}, x_{18}, x_{19}\} \text{ y}$$

$$F(D) = \begin{cases} - (x_i, x_{i+1}) \text{ para } i = \{0, 1, 2, \dots, 18, 19\}, \text{ módulo } 20, \\ - (x_{i_0+2i}, x_{4k+2+i_0}) = (x_{i_0+2i}, x_{10+i_0}) \forall 0 \leq i \leq 2 \text{ y } \forall i_0 = \{0, 5, 10, 15\}, \text{ módulo } 20 \end{cases}$$

Como vemos en la figura (A.1).

Digráfica D, cada ciclo impar tiene al menos 2 cuerdas.

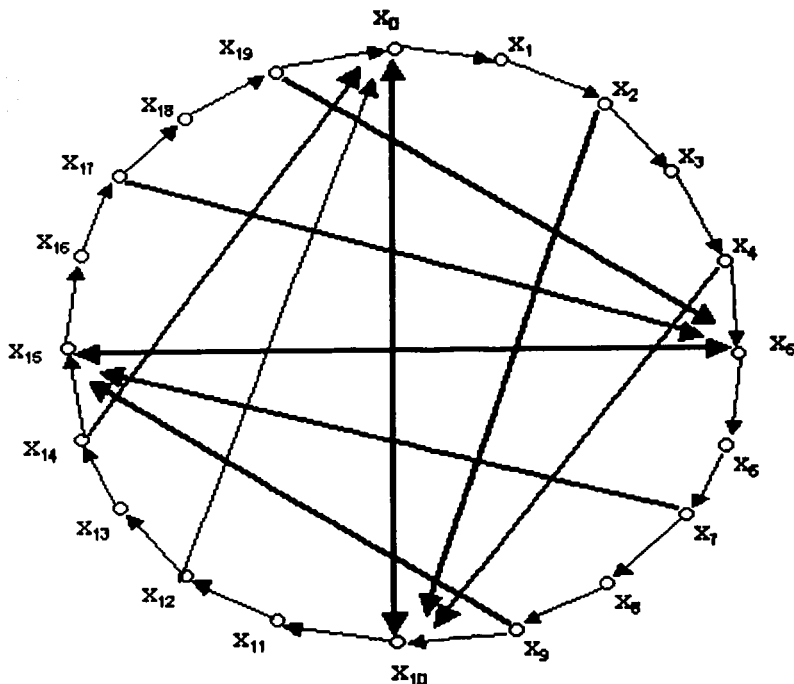


Figura A.1:

Con lo que se forma el ciclo dirigido:

$$\vec{C} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{19}, x_0) \text{ de longitud par}$$

y que tiene las siguientes cuerdas $(x_{i_0+2i}, x_{i_0+i_0})$ para $i_0 = \{0, 5, 10, 15\}$, $0 \leq i \leq 2$, es decir,

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Para $i=0$ Las cuerdas de la forma (x_{i_0}, x_{10+i_0}) , son:

- (x_0, x_{10})
- (x_5, x_{15})
- (x_{10}, x_0)
- (x_{15}, x_5)

Para $i=1$ Las cuerdas de la forma (x_{i_0+2}, x_{10+i_0}) , son:

- (x_2, x_{10})
- (x_7, x_{15})
- (x_{12}, x_0)
- (x_{17}, x_5)

Para $i=2$ Las cuerdas de la forma (x_{i_0+4}, x_{10+i_0}) , son:

- (x_4, x_{10})
- (x_9, x_{15})
- (x_{14}, x_0)
- (x_{19}, x_5)

Con dichas cuerdas, se forman los siguientes ciclos dirigidos de longitud impar, $(x_{10+i_0}, \vec{C}, x_{i_0+2i}) \cup (x_{i_0+2i}, x_{10+i_0})$, $\forall 0 \leq i \leq 2$ y $\forall i_0 \in \{0, 5, 10, 15\}$, que tienen al menos dos cuerdas.

Para $i = 0$ Los ciclos dirigidos $(x_{10+i_0}, \vec{C}, x_{i_0}) \cup (x_{i_0}, x_{10+i_0})$, son:

1. El ciclo dirigido $(x_{10}, C, x_0) \cup (x_0, x_{10})$, con las siguientes cuerdas: $\{(x_{14}, x_0), (x_{12}, x_0)\} \subseteq \text{Asim}(D)$.
2. El ciclo dirigido $(x_{15}, \vec{C}, x_5) \cup (x_5, x_{15})$, con las cuerdas: $\{(x_{17}, x_5), (x_{19}, x_5)\} \subseteq \text{Asim}(D)$.
3. El ciclo dirigido $(x_0, C, x_{10}) \cup (x_{10}, x_0)$, con las siguientes cuerdas: $\{(x_2, x_{10}), (x_4, x_{10})\} \subseteq \text{Asim}(D)$.
4. El ciclo dirigido $(x_5, \vec{C}, x_{15}) \cup (x_{15}, x_5)$, con las siguientes cuerdas: $\{(x_7, x_{15}), (x_9, x_{15})\} \subseteq \text{Asim}(D)$.

Para $i = 1$ Los ciclos dirigidos de la forma $(x_{10+i_0}, \vec{C}, x_{i_0+2}) \cup (x_{i_0+2}, x_{10+i_0})$, son:

1. El ciclo dirigido $(x_{10}, \vec{C}, x_2) \cup (x_2, x_{10})$, con las siguientes cuerdas:
 $(x_{10}, x_0) \in Sim(D)$, $\{(x_{12}, x_0), (x_{14}, x_0)\} \subseteq Asim(D)$.
2. El ciclo dirigido $(x_{15}, \vec{C}, x_7) \cup (x_7, x_{15})$, con las siguientes cuerdas:
 $(x_{15}, x_5) \in Sim(D)$, $\{(x_{17}, x_5), (x_{19}, x_5)\} \subseteq Asim(D)$.
3. El ciclo dirigido $(x_0, \vec{C}, x_{12}) \cup (x_{12}, x_0)$, con las siguientes cuerdas:
 $(x_0, x_{10}) \in Sim(D)$, $\{(x_2, x_{10}), (x_4, x_{10})\} \subseteq Asim(D)$.
4. El ciclo dirigido $(x_5, \vec{C}, x_{17}) \cup (x_{17}, x_5)$, con las siguientes cuerdas:
 $(x_{15}, x_5) \in Sim(D)$, $\{(x_7, x_{15}), (x_9, x_{15})\} \subseteq Asim(D)$.

Para $i = 2$ Los ciclos dirigidos de la forma $(x_{10+i}, \vec{C}, x_{i0+4}) \cup (x_{i0+4}, x_{10+i})$, son:

1. El ciclo dirigido $(x_{10}, \vec{C}, x_4) \cup (x_4, x_{10})$, con las siguientes cuerdas:
 $\{(x_2, x_{10}), (x_{12}, x_0), (x_{14}, x_0)\} \subseteq Asim(D)$, $(x_0, x_{10}) \in Sim(D)$.
2. El ciclo dirigido $(x_{15}, \vec{C}, x_9) \cup (x_9, x_{15})$, con las siguientes cuerdas:
 $\{(x_7, x_{15}), (x_{17}, x_5), (x_{19}, x_5)\} \subseteq Asim(D)$, $(x_5, x_{15}) \in Sim(D)$.
3. El ciclo dirigido $(x_0, \vec{C}, x_{14}) \cup (x_{14}, x_0)$, con las siguientes cuerdas:
 $\{(x_{12}, x_0), (x_2, x_{10}), (x_4, x_{10})\} \subseteq Asim(D)$, $(x_{10}, x_0) \in Sim(D)$.
4. El ciclo dirigido $(x_5, \vec{C}, x_{19}) \cup (x_{19}, x_5)$, con las siguientes cuerdas:
 $\{(x_{17}, x_5), (x_7, x_{15}), (x_9, x_{15})\} \subseteq Asim(D)$, $(x_{15}, x_5) \in Sim(D)$.

Es decir, los ciclos dirigidos de longitud impar son:

$$(x_{10+i}, \vec{C}, x_{i0+2i}) \cup (x_{i0+2i}, x_{10+i}), \forall 0 \leq i \leq 2 \text{ y } \forall i_0 \in \{0, 5, 10, 15\}$$

y sus cuerdas:

$$(x_{10+i0+2j}, x_{i0}), \forall 0 \leq j \leq 2.$$

Con esta construcción, afirmamos que D no tiene núcleo.

Supongamos que D tiene núcleo.

Sea N el núcleo de D .

Caso (1): Si $x_0 \in N$, entonces $\{x_1, x_{14}, x_{12}, x_{10}, x_{19}\} \not\subseteq N$, esto es porque existen las flechas $(x_{19}, x_0), (x_{14}, x_0), (x_{12}, x_0), (x_{10}, x_0), (x_0, x_{10}), (x_0, x_1)$ en D . Como $x_1 \in F(D)$, entonces $x_2 \notin N$, luego $\exists (x_2, x_3) \in F(D)$, implica que $x_3 \notin N$, $x_4 \in N$, como $(x_4, x_5) \in F(D)$, entonces $x_5 \notin N$. Tenemos que $\{(x_5, x_6), (x_5, x_{15})\} \subseteq F(D)$, por lo que pueden existir dos subcasos:

Subcaso (1.a): Si $x_{15} \notin N$, como existe $\{(x_9, x_{15}), (x_9, x_{10})\} \subseteq F(D)$, entonces $x_9 \in N$, como $(x_8, x_9) \in F(D)$, entonces $x_8 \notin N$, $x_7 \in N$, por último existe $(x_6, x_7) \in F(D)$, lo cual quiere decir que $x_6 \notin N$, como $\{x_5, x_{15}\} \not\subseteq N$ y sólo existe $\{(x_5, x_6), (x_5, x_{15})\} \subseteq F(D)$, lo cual quiere decir que x_5 no es absorbido por N , por lo tanto éste caso no es posible.

Subcaso (1.b): Si $x_{15} \in N$, como $\exists (x_{15}, x_{16}) \in F(D)$, entonces $x_{16} \notin N$, por ser N absorbente, $x_{17} \in N$, por último existe la flecha $(x_{17}, x_{18}) \in D$, lo cual implica que $x_{18} \notin N$, como $x_{19} \notin N$ y sólo existe la flecha $(x_{18}, x_{19}) \in F(D)$, entonces x_{18} no es absorbido por N .

Como los dos subcasos son imposibles, entonces si $x_0 \notin N$, por lo tanto D no tiene núcleo.

Caso (2): Si $x_0 \notin N$, como N es absorbente, es decir, para $x \in V(D) - N$, $\exists xN$ - flecha en D , tenemos que $\{(x_0, x_{10}), (x_0, x_1)\} \subseteq F(D)$, por lo que puede existir dos subcasos:

Subcaso (2.a) Si $x_{10} \notin N$, entonces $x_1 \in N$, como $(x_1, x_2) \in F(D)$, entonces $x_2 \notin N$, $x_3 \in N$, como $(x_3, x_4) \in F(D)$, entonces $x_4 \notin N$, $x_5 \in N$. Como existen las flechas (x_{19}, x_5) , (x_{17}, x_5) y (x_{15}, x_5) en D , entonces $\{x_{19}, x_{17}, x_{15}\} \not\subseteq N$. Como $\{x_0, x_{10}\} \not\subseteq N$ y existe $\{(x_{10}, x_0), (x_{10}, x_{11})\} \subseteq F(D)$, entonces $x_{11} \in N$, $x_{12} \notin N$, como $(x_{12}, x_{13}) \in F(D)$, lo cual implica que $x_{13} \in N$, $x_{14} \notin N$. Observamos que los vértices $\{x_0, x_{15}\} \not\subseteq N$ y sólo existe $\{(x_{14}, x_0), (x_{14}, x_{15})\} \subseteq F(D)$, lo cual implica que x_{14} no es absorbido por N , por lo tanto este subcaso no es posible.

Subcaso (2.b) Si $x_{10} \in N$, como $\exists \{(x_{10}, x_{11}), (x_9, x_{10}), (x_2, x_{10}), (x_4, x_{10})\} \subseteq F(D)$, entonces $\{x_{11}, x_9, x_2, x_4\} \not\subseteq N$, como $(x_{11}, x_{12}) \in F(D)$, entonces $x_{12} \in N$, luego existe $(x_{12}, x_{13}) \in F(D)$, lo cual quiere decir que $x_{13} \notin N$, como $(x_{13}, x_{14}) \in F(D)$, entonces $x_{14} \in N$, $x_{15} \notin N$, ya que $(x_{14}, x_{15}) \in F(D)$, como $(x_{15}, x_6) \in F(D)$, entonces $x_6 \in N$, por otro lado existe $(x_5, x_6) \in F(D)$, lo cual implica que $x_5 \notin N$, $x_7 \in N$, por último existe $(x_7, x_8) \in F(D)$, entonces $x_8 \notin N$, como $x_9 \notin N$ y sólo existe $(x_8, x_9) \in F(D)$, lo cual quiere decir que x_8 no es absorbido por N .

Como los dos casos no son posibles, entonces D no tiene núcleo

Para $k > 2$. Sea D una digráfica (figura A.2) con:

$$V(D) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{8k+2}, x_{8k+3}\}, \text{ módulo } 8k+4 \text{ y}$$

$$F(D) = \begin{cases} -(x_i, x_{i+1}) & \text{para } i = \{0, 1, 2, \dots, 8k+2, 8k+3\}, \text{ módulo } 8k+4 \\ -(x_{io+2i}, x_{4k+2+io}) & \forall 0 \leq i \leq k, \forall io \in \{0, 2k+1, 4k+2, 6k+3\} \text{ módulo } 8k+4 \end{cases}$$

Con lo que se forma un ciclo dirigido de longitud par:

$$\vec{C} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{8k+1}, x_{8k+2}, x_{8k+3}, x_0)$$

el cual tiene las siguientes cuerdas:

$$(x_{io+2i}, x_{4k+2+io}), \text{ para } io = \{0, 2k+1, 4k+2, 6k+3\}, 0 \leq i \leq k$$

Para $i=0$ Las cuerdas de la forma $(x_{io}, x_{4k+2+io})$, son:

- (x_0, x_{4k+2})
- (x_{2k+1}, x_{6k+3})
- $(x_{4k+2}, x_{8k+4}) = (x_{4k+2}, x_0)$
- $(x_{6k+3}, x_{10k+5}) = (x_{6k+3}, x_{2k+1})$

Para $i=1$ Las cuerdas de la forma: $(x_{io+2}, x_{4k+2+io})$, son:

- (x_2, x_{4k+2})
- (x_{2k+3}, x_{6k+3})
- $(x_{4k+4}, x_{8k+4}) = (x_{4k+4}, x_0)$
- $(x_{6k+5}, x_{10k+5}) = (x_{6k+5}, x_{2k+1})$

Para $2 \leq i \leq k$ Las cuerdas son de la forma:

$$(x_{io+2i}, x_{4k+2+io}), \forall 2 \leq i \leq k, \forall io \in \{0, 2k+1, 4k+2, 6k+3\}.$$

Con dichas cuerdas se forman los siguientes ciclos dirigidos de longitud impar en D .

$$(x_{4k+2+io}, \vec{C}, x_{io+2i}, x_{4k+2+io}), \forall 0 \leq i \leq k \text{ y } \forall io \in \{0, 2k+1, 4k+2, 6k+3\}$$

Observamos que cada ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos k cuerdas.

Para $i = 0$ Los ciclos dirigidos $(x_{4k+2+io}, \vec{C}, x_{io}) \cup (x_{io}, x_{4k+2+io})$, son:

- El ciclo dirigido $(x_{4k+2}, \vec{C}, x_0) \cup (x_0, x_{4k+2})$, con las siguientes cuerdas:
 $(x_{4k+2}, x_0), (x_{4k+4}, x_0), (x_{4k+6}, x_0), \dots, (x_{4k+2+2k}, x_0)$, en general:
 $(x_{4k+2+2j}, x_0) \forall 0 \leq j \leq k$

- El ciclo dirigido $(x_{4k+2+(2k+1)}, \vec{C}, x_{2k+1}) \cup (x_{2k+1}, x_{4k+2+(2k+1)})$, con las cuerdas:
 $(x_{6k+3}, x_{2k+1}), (x_{6k+5}, x_{2k+1}), (x_{6k+7}, x_{2k+1}), \dots, (x_{6k+3+2k}, x_{2k+1})$, en general:
 $(x_{6k+3+2j}, x_{2k+1}) \forall 0 \leq j \leq k$
- El ciclo dirigido $(x_{4k+2+(4k+2)}, \vec{C}, x_{4k+2}) \cup (x_{4k+2}, x_{4k+2+(4k+2)})$, con las siguientes cuerdas:
 $(x_{8k+4}, x_{4k+2}), (x_{8k+6}, x_{4k+2}), (x_{8k+8}, x_{4k+2}), \dots, (x_{8k+4+2k}, x_{4k+2})$, en general:
 $(x_{8k+4+2j}, x_{4k+2}) \forall 0 \leq j \leq k$
- El ciclo dirigido $(x_{4k+2+(6k+3)}, \vec{C}, x_{6k+3}) \cup (x_{6k+3}, x_{4k+2+(6k+3)})$, con las siguientes cuerdas:
 $(x_{10k+5}, x_{6k+3}), (x_{10k+7}, x_{6k+3}), (x_{10k+9}, x_{6k+3}), \dots, (x_{10k+5+2k}, x_{6k+3})$, en general:
 $(x_{10k+3+2j}, x_{6k+3}) \forall 0 \leq j \leq k$

Para $0 < i \leq k$, $io \in \{0, 2k+1, 4k+2, 6k+3\}$.

Los ciclos son: $(x_{4k+2+io}, \vec{C}, x_{io+2i}) \cup (x_{io+2i}, x_{4k+2+io})$, es decir,

- El ciclo dirigido $(x_{4k+2}, \vec{C}, x_{2i}) \cup (x_{2i}, x_{4k+2})$, con las siguientes cuerdas:
 $(x_{4k+2+2j}, x_0) \forall 0 \leq j \leq k$
- El ciclo dirigido $(x_{4k+2+(2k+1)}, \vec{C}, x_{2k+1+2i}) \cup (x_{2k+1+2i}, x_{4k+2+(2k+1)})$, con las cuerdas:
 $(x_{6k+3+2j}, x_{2k+1}) \forall 0 \leq j \leq k$
- El ciclo dirigido $(x_{4k+2+(4k+2)}, \vec{C}, x_{4k+2+2i}) \cup (x_{4k+2+2i}, x_{4k+2+(4k+2)})$, con las cuerdas:
 $(x_{8k+4+2j}, x_{4k+2}) \forall 0 \leq j \leq k$
- El ciclo dirigido $(x_{4k+2+(6k+3)}, \vec{C}, x_{6k+3+2i}) \cup (x_{6k+3+2i}, x_{4k+2+(6k+3)})$, con las cuerdas:
 $(x_{10k+5+2i}, x_{6k+3}), \forall 0 \leq j \leq k$

Digráfica D, cada ciclo imparte al menos k cuerdas.

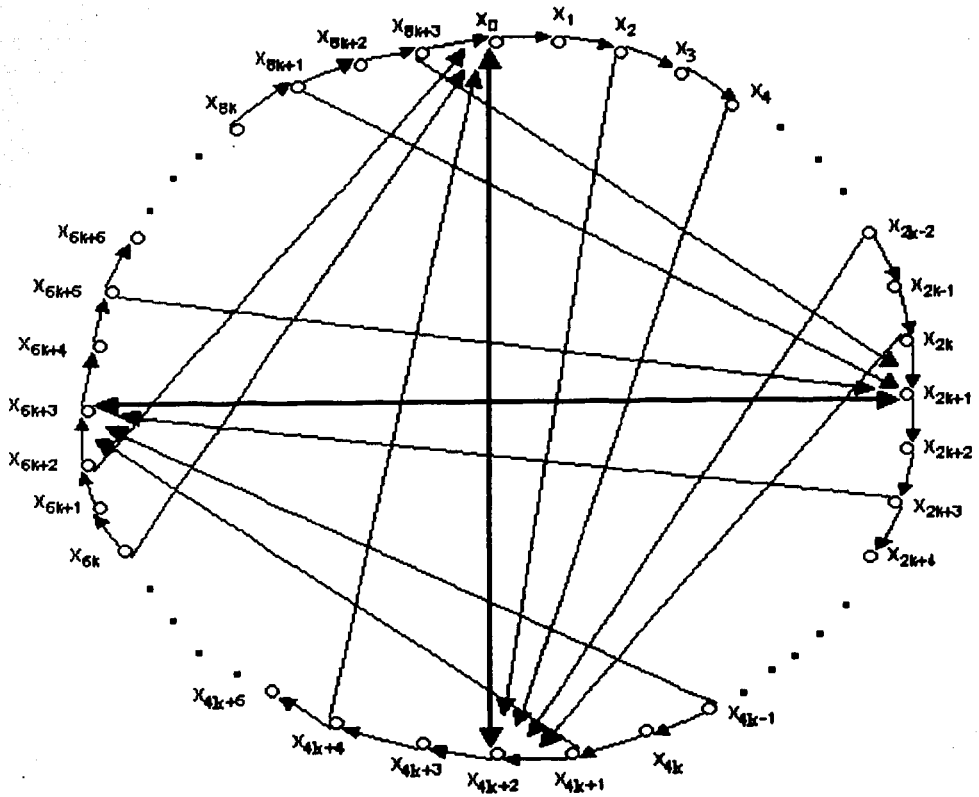


Figura A.2:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Por lo que podemos concluir que los ciclos dirigidos de longitud impar son:

$$(x_{4k+2+io}, \vec{C}, x_{io+2i}) \cup (x_{io+2i}, x_{4k+2+io}) \quad \forall 0 \leq i \leq k, \forall io \in \{0, 2k+1, 4k+2, 6k+3\}$$

cuyas cuerdas son:

$$(x_{4k+2+io+2j}, x_{io}) \quad \forall 0 \leq j \leq k, \forall io \in \{0, 2k+1, 4k+2, 6k+3\}.$$

Con esta construcción, ver figura (A.2), observamos que D no tiene núcleo.

Supongamos que D tiene núcleo. Sea N el núcleo de D

Caso (1): Si $x_0 \in N$, entonces $x_{4k+2+2j} \notin N, \forall 0 \leq j \leq k, x_{8k+3} \notin N$ y $x_1 \notin N$, esto es porque existen las flechas $(x_{4k+2+2j}, x_0), (x_{8k+3}, x_0), (x_0, x_1)$ en D , como N es independiente y absorbente, entonces $x_{4k+3+2i} \in N$, para $0 \leq i \leq k-1$, como $(x_1, x_2) \in F(D)$, entonces $x_2 \in N$, como $x_1 \notin N$ y existe $(x_2, x_3) \in F(D)$, lo cual implica que $x_3 \notin N, x_4 \in N$, luego tenemos una trayectoria $(x_4, x_5, x_6, \dots, x_{2k}, x_{2k+1}) \subseteq D$, entonces $x_{2i+1} \notin N$, para $2 \leq i \leq k$ y $x_{2i} \in N$, para $3 \leq i \leq k$, como $x_{2k+1} \notin N$ y $(x_{2k+1}, x_{6k+3}) \in F(D)$, entonces existen dos subcasos:

Subcaso (1.a): Si $x_{6k+3} \notin N$, como $\exists \{(x_{4k+1}, x_{6k+3}), (x_{4k+1}, x_{4k+2})\} \subseteq F(D)$, entonces $x_{4k+1} \in N$ y $x_{4k} \notin N$, como $\exists \{(x_{4k-1}, x_{4k}), (x_{4k-1}, x_{6k+3})\}$ en D , lo cual implica que $x_{4k-1} \in N$, luego tenemos una trayectoria $(x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}, \dots, x_{4k-1}) \subseteq D$, entonces $x_{2k+2i} \notin N, \forall 1 \leq i \leq k-1, x_{2k+2i+1} \in N, \forall 1 \leq i \leq k-2$. Obtenemos que $\{x_{2k+2}, x_{2k+1}, x_{6k+3}\} \not\subseteq N$ y sólo existe $\{(x_{2k+1}, x_{2k+2}), (x_{2k+1}, x_{6k+3})\} \in F(D)$, lo cual implica que x_{2k+1} no es absorbido por N , por lo tanto este subcaso no es posible.

Subcaso (1.b): Si $x_{6k+3} \in N$, como $\exists (x_{6k+3}, x_{6k+4}) \in F(D)$, entonces $x_{6k+4} \notin N$, por ser N absorbente, $x_{6k+5} \in N$, como $(x_{6k+5}, x_{6k+6}) \in F(D)$, entonces $x_{6k+6} \notin N$ y $x_{6k+7} \in N$. Tenemos una trayectoria $(x_{6k+7}, x_{6k+8}, x_{6k+9}, \dots, x_{8k}, x_{8k+1}, x_{8k+2})$ en D , entonces $x_{6k+2i} \notin N$, para $4 \leq i \leq k+1$, y $x_{6k+2i+1} \in N$, para $4 \leq i \leq k$. Como $\{x_{8k+2}, x_{8k+3}\} \not\subseteq N$ y sólo existe $(x_{8k+2}, x_{8k+3}) \in F(D)$, lo cual implica que x_{8k+2} no es absorbido por N , por lo tanto este subcaso no es posible.

Caso (2): Si $x_0 \notin N$, como N es absorbente, es decir, para $x \notin N, \exists xN$ - flecha en D , implica que $x_{4k+2} \notin N$ ó $x_{4k+2} \in N$.

Subcaso (2.a): Si $x_{4k+2} \notin N$, entonces $x_1 \in N$, como $(x_1, x_2) \in F(D)$, entonces $x_2 \notin N, x_3 \in N$, como $(x_3, x_4) \in F(D)$, entonces $x_4 \notin N, x_5 \in N$, luego tenemos una trayectoria $(x_5, x_6, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}, x_{2k+1}) \subseteq D$, entonces $x_{2i} \notin N$, para $3 \leq i \leq k, x_{2i+1} \in N$, para $3 \leq i \leq k$, como existe $\{(x_{2k+1}, x_{2k+2}), (x_{2k+1}, x_{6k+3})\} \subseteq F(D)$, implica que $\{x_{2k+2}, x_{6k+3}\} \not\subseteq N$, como $\{x_0, x_{4k+2}\} \not\subseteq N$ y $\exists (x_{4k+2}, x_{4k+3}) \in F(D)$, entonces $x_{4k+3} \in N$ y $x_{4k+4} \notin N$, luego tenemos una trayectoria de $(x_{4k+4}, x_{4k+5}, \dots, x_{6k+2})$

en D , entonces $x_{4k+2i+1} \in N, \forall 2 \leq i \leq k$ y $x_{4k+2i} \notin N, \forall 2 \leq i \leq k+1$. Obtenemos que $\{x_{6k+3}, x_{6k+2}, x_0\} \not\subseteq N$ y sólo existe $\{(x_{6k+2}, x_{6k+3}), (x_{6k+2}, x_0)\} \subseteq F(D)$, lo cual quiere decir que x_{6k+2} no es absorbido por N , por lo tanto este subcaso no es posible.

Subcaso (2.b): Si $x_{4k+2} \in N \exists \{(x_{4k+2}, x_{4k+3}), (x_{4k+1}, x_{4k+2}), (x_{2i}, x_{4k+2})\} \subseteq F(D)$, $\forall 1 \leq i \leq k$, entonces $\{x_{4k+3}, x_{4k+1}, x_{2i}\} \not\subseteq N$, para $1 \leq i \leq k$, $\{x_{4k+4}, x_{2i+1}\} \subseteq N$, para $0 \leq i \leq k-1$, como $(x_{4k+4}, x_{4k+5}) \in F(D)$, entonces $x_{4k+5} \notin N$, luego tenemos una trayectoria $(x_{4k+5}, x_{4k+6}, \dots, x_{6k+2}, x_{6k+3})$ en D , entonces $x_{4k+2i} \in N, \forall 3 \leq i \leq k+1$ y $x_{4k+2i+1} \notin N, \forall 3 \leq i \leq k+1$, como $(x_{6k+3}, x_{2k+1}) \in F(D)$, lo cual implica que $x_{2k+1} \in N, x_{2k+2} \notin N$, como N es independiente y absorbente, implica que $x_{2k+3} \in N$, por último tenemos la trayectoria $(x_{2k+3}, x_{2k+4}, \dots, x_{4k}, x_{4k+1})$ en D , entonces $x_{2k+2i} \notin N$, para $2 \leq i \leq k, x_{2k+2i+1} \in N$, para $2 \leq i \leq k-1$. Observamos que $\{x_{4k}, x_{4k+1}\} \not\subseteq N$ y sólo existe $(x_{4k}, x_{4k+1}) \in F(D)$, lo cual quiere decir que x_{4k} no es absorbido por N .

Podemos concluir que si $x_0 \in N$, entonces $x_{4k+2} \notin N, x_{2k+1} \notin N, x_{6k+3} \notin N$ como $x_{6k+3} \notin N$ y $x_{4k+2} \notin N$, entonces $x_{2k+2} \notin N$, por lo tanto $x_{2k+1} \notin N, x_{2k+2} \notin N$ y $x_{6k+3} \notin N$; lo cual no es posible, por lo tanto $x_0 \notin N$.

Como $x_0 \notin N$ y $x_{4k+2} \notin N$, entonces $x_{2k} \notin N$, por lo tanto $x_{2k} \notin N, x_{2k+1} \notin N$ y $x_{4k+2} \notin N$, lo cual no es posible.

$\therefore D$ no tiene núcleo.

Tomando en cuenta el siguiente teorema de Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara [12]:

Teorema No. A.3 (Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara [12]). *Sea H una digráfica, la cual no es un ciclo dirigido de longitud impar y $T \subset V(H)$, tal que cada $u \in T$ esta a lo más en un ciclo dirigido de longitud impar de H , entonces H es una digráfica núcleo perfecta $\Leftrightarrow H - T$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Podemos probar un resultado que relaciona las digráficas núcleo imperfectas críticas, digráficas núcleo perfectas y la digráfica del teorema (A.2), el cual lo enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema No. A.4. Sea D una digráfica, que no tiene núcleo, tal que todo ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos k cuerdas, con $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$.

1. Si a la digráfica D , le quitamos la cuerda $(x_0, x_1) \in F(D)$, obtenemos una digráfica $D - (x_0, x_1)$, la cual es núcleo perfecta.
2. La digráfica D es núcleo imperfecta crítica.

Demostración:

Sea D , la digráfica sin núcleo, C un ciclo dirigido de longitud impar en D que tiene k cuerdas, con $k \geq 2$ y $(x_0, x_1) \in F(D)$.

- 1.- Por demostrar que $D - (x_0, x_1)$ es núcleo perfecta.

Caso (1): Si $k = 2$, entonces D esta formada de la siguiente manera:

$$V(D) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{17}, x_{18}, x_{19}\} \text{ y}$$

$$F(D) = \begin{cases} - (x_i, x_{i+1}) & \text{para } i = \{0, 1, 2, \dots, 18, 19\} \text{ módulo } 20 \\ - (x_{i_0+2i}, x_{10+i_0}) & \forall 0 \leq i \leq 2 \text{ y } \forall i_0 = \{0, 5, 10, 15\} \text{ módulo } 20 \end{cases}$$

Sea $H = D - (x_0, x_1)$ una digráfica, figura (A.3), la cual no es sólo un ciclo dirigido de longitud impar.

$$V(H) = V(D) \text{ y } F(H) = F(D) - (x_0, x_1)$$

Tomemos el conjunto $T = \{u \in V(H) \mid u \text{ esta a lo más en un ciclo dirigido de longitud impar}\}$

$$T = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Por demostrar que H es núcleo perfecta.

Sea $H_1 = H - T$, figura (A.4), donde:

$$V(H_1) = V(H) - T \text{ y}$$

$$F(H_1) = F(H) - \{(x_i, x_{i+1}), (x_{2j}, x_{10}), (x_{10+2m}, x_0)\}$$

$$\text{con } i = \{1, 2, 3, 4\}, j = \{1, 2\}, m = \{0, 1, 2\}$$

Tomemos $T_1 = \{u \in V(H_1) \mid u \text{ esta a lo más en un ciclo dirigido de longitud impar}\}$
 $= \{19, 18\}$.

Sea $H_2 = H_1 - T_1$, figura (A.4), donde

$$\begin{aligned} V(H_2) &= V(H_1) - T_1 \text{ y} \\ F(H_2) &= F(H_1) - \{(x_{17}, x_{18}), (x_{18}, x_{19}), (x_{19}, x_6)\} \end{aligned}$$

y $T_2 = \{u \in V(H_2) \mid u \text{ esta a lo más en un ciclo dirigido de longitud impar}\} = \{17, 16\}$.

Sea $H_3 = H_2 - T_2$,

$$\begin{aligned} V(H_3) &= V(H_2) - T_2 \text{ y} \\ F(H_3) &= F(H_2) - \{(x_{15}, x_{16}), (x_{16}, x_{17}), (x_{17}, x_5)\} \end{aligned}$$

Observamos que H_3 , figura (A.4), tiene núcleo. Sea $N_3 = \{x_{15}, x_{13}, x_{11}, x_8, x_6\}$ el núcleo.

Por demostrar que N_3 es núcleo de H_3 .

Tomemos $x_{15} \in N_3$, como existen $(x_i, x_{15}) \in F(H_3)$, con $i = \{14, 5, 7, 9\}$, entonces $\{x_{14}, x_5, x_7, x_9\} \notin N_3$, y los vértices $\{x_{13}, x_6, x_8\} \in N_3$, existe la flecha $(x_{12}, x_{13}) \in F(H_3)$, por lo cual $x_{12} \notin N_3$, pero $x_{11} \in N_3$, como existe $(x_{10}, x_{11}) \in F(H_3)$, entonces $x_{10} \notin N_3$, por lo tanto el conjunto N_3 es independiente.

Por demostrar que N_3 es absorbente.

Sabiendo que $V(H_3) - N_3 = \{x_{14}, x_9, x_7, x_5, x_{12}, x_{10}\}$. Para $x \in V(H_3) - N_3$, tenemos las siguientes flechas: $(x_{12}, x_{13}), (x_{10}, x_{11}), (x_i, x_{15})$, con $i = \{9, 7, 5, 14\}$, es decir $\exists xN_3$ - flecha en H_3 , por lo tanto N_3 es absorbente.

$\therefore N_3$ es núcleo en H_3 .

Es fácil ver que todas las subdigráficas de H_3 tienen núcleo.

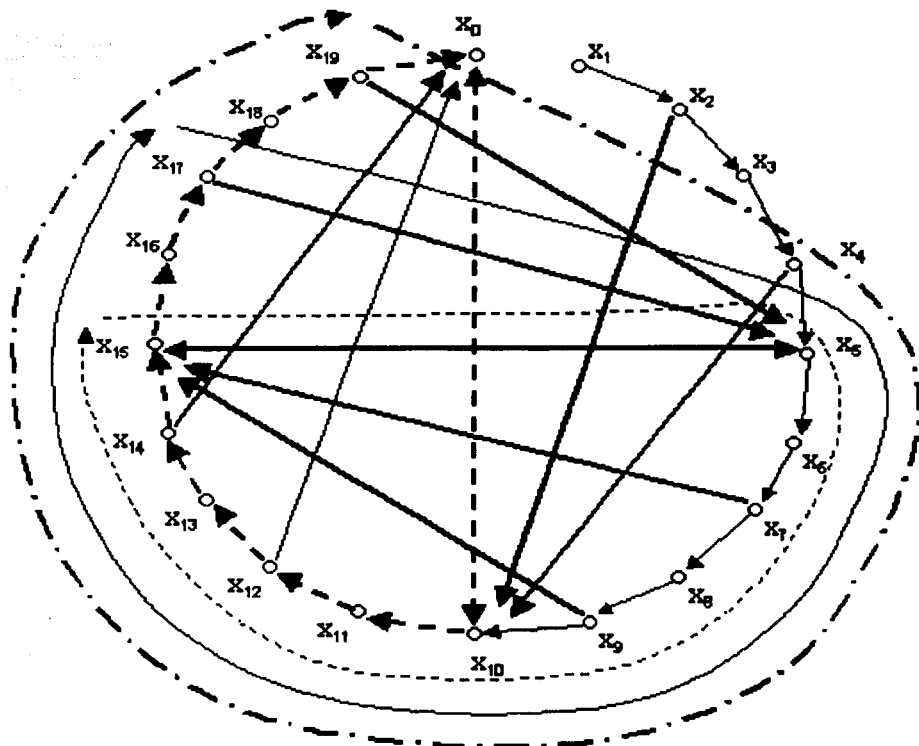
$\therefore H_2 - T_2 = H_3$ es núcleo perfecta.

Como cumple las hipótesis del teorema (A.3), entonces H_2 es núcleo perfecta, sabiendo que $H_2 = H_1 - T_1$, con $T_1 = \{u \in V(H_1) \mid u \text{ esta a lo más en un ciclo de longitud impar}\}$, por el teorema (A.3), implica que H_1 es núcleo perfecta, pero $H_1 = H - T$, donde $T = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, es decir, cumple las hipótesis del teorema de Galeana-Neumann, ver teorema (A.3), por lo cual H es núcleo perfecta, donde $H = D - (x_0, x_1)$, el núcleo de H es:

$$N = \{x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, x_{11}, x_{13}, x_{16}, x_{18}\}$$

$\therefore D - (x_0, x_1)$ es núcleo perfecta.

Digráfica $D = (X_0, X_1) = H$, la cual tiene 4 ciclo impares.



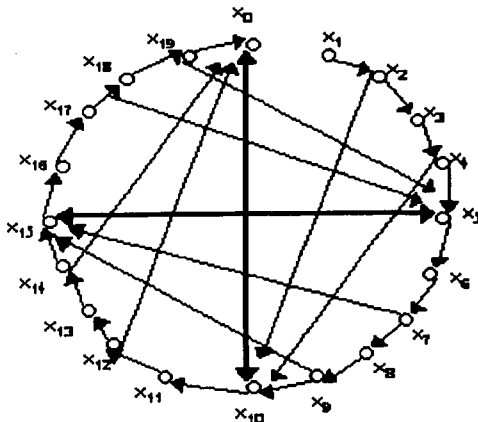
Ciclos impares:

- (X₁₉, X₈, X₇, X₆, X₅, X₄, X₃, X₂, X₁, X₀, X₁₉)
- - - (X₀, X₁₀, X₁₁, X₁₂, X₁₃, X₁₄, X₁₅, X₁₆, X₁₇, X₁₈, X₁₉, X₀)
- (X₁₇, X₆, X₇, X₈, X₉, X₁₀, X₁₁, X₁₂, X₁₃, X₁₄, X₁₅, X₁₆, X₁₇)
- - - (X₁₈, X₆, X₇, X₈, X₉, X₁₀, X₁₁, X₁₂, X₁₃, X₁₄, X₁₈)

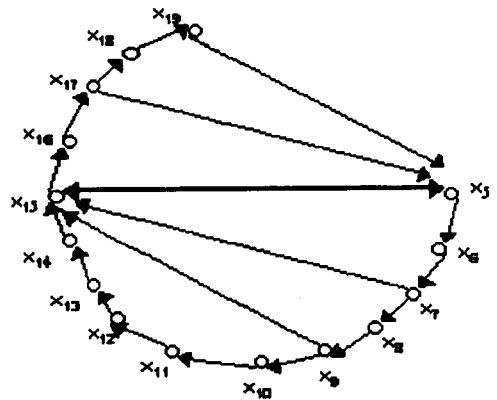
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura A.3:

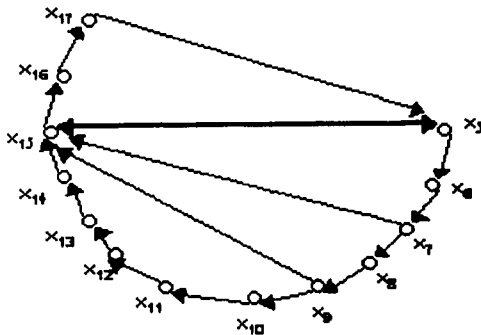
Digráfica $H=D - (x_0, x_1)$



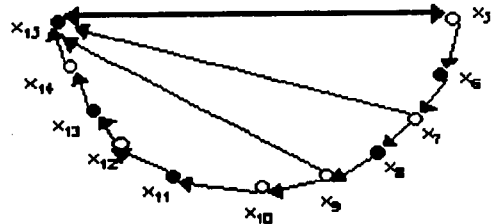
Digráfica $H_1=H - T$, donde $T=\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$



Digráfica $H_2=H_1 - T_1$, donde $T_1=\{x_{18}, x_{19}\}$



Digráfica $H_3=H_2 - T_2$ donde $T_2=\{x_{17}, x_{18}\}$



H_3 tiene núcleo y sus subdigráficas inducidas también tienen núcleo

Notación: ● es el núcleo

Figura A.4:

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Caso (2): Si $k > 2$. Sea D una digráfica (figura A.2) con:

$$V(D) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{8k+2}, x_{8k+3}\} \text{ y}$$

$$F(D) = \begin{cases} -(x_i, x_{i+1}) & \text{para } i = \{0, 1, 2, \dots, 8k+2, 8k+3\}, \text{ módulo } 8k+4 \\ -(x_{i_0+2i}, x_{4k+2+i_0}) & \forall 0 \leq i \leq k \text{ y } i_0 = \{0, 2k+1, 4k+2, 6k+3\} \text{ módulo } 8k+4 \end{cases}$$

Sea $H = D - (x_0, x_1)$, ver figura (A.5) una digráfica, la cual no es sólo un ciclo dirigido de longitud impar.

$$V(H) = V(D) \text{ y } F(H) = F(D) - (x_0, x_1)$$

Tomemos un conjunto $T = \{u \in V(H) \mid u \text{ esta a lo más en un ciclo dirigido de longitud impar}\}$

$$T = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}\}$$

Por demostrar que H es núcleo perfecta.

Sea $H_1 = H - T$, figura (A.6) donde:

$$V(H_1) = V(H) - T_1 \text{ y}$$

$$F(H_1) = F(H) - \{(x_i, x_{i+1}), (x_{2j}, x_{10}), (x_{4k+2m}, x_0)\}$$

$$\text{con } i = \{1, 2, \dots, 2k\}, j = \{1, 2, \dots, k\}, m = \{1, 2, \dots, k+1\}$$

Tomemos el conjunto $T_1 = \{u \in V(H_1) \mid u \text{ esta a lo más en un ciclo dirigido de longitud impar}\}$, es decir, $T_1 = \{x_{8k+3}, x_{8k+2}\}$

Sea $H_2 = H_1 - T_1$, donde

$$V(H_2) = \{V(H_1) - T_1\} \text{ y}$$

$$F(H_2) = F(H_1) - \{(x_{8k+1}, x_{8k+2}), (x_{8k+2}, x_{8k+3}), (x_{8k+3}, x_{2k+1})\}$$

Continuando con este proceso, obtenemos:

$T_j = \{u \in V(H_j) \mid u \text{ esta a lo más en un ciclo dirigido de longitud impar}\}$, por lo que

$$T_j = \{x_{6k+6+2i}, x_{6k+7+2i}\}, \text{ donde } 0 \leq i \leq k-3$$

Sea $H_{j+1} = H_j - T_j$, donde

$$V(H_{j+1}) = V(H_j) - T_j \text{ y}$$

$$F(H_{j+1}) = F(H_j) - \{(x_{6k+5+2i}, x_{6k+6+2i}), (x_{6k+6+2i}, x_{6k+7+2i}), (x_{6k+6+2i}, x_{2k+1})\}$$

Digráfica D, cada ciclo impar tiene al menos 2 cuerdas.

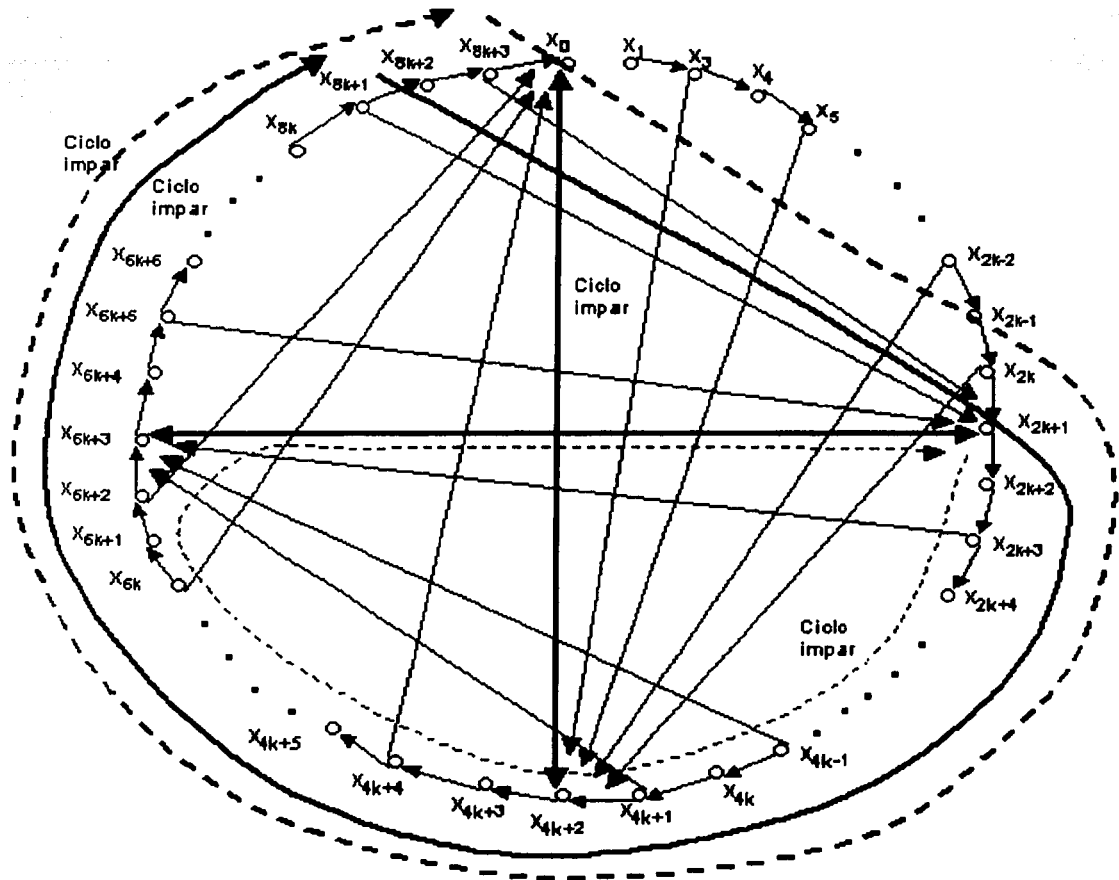


Figura A.5:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Digráfica $H_1 = H - T$, donde $T = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}\}$

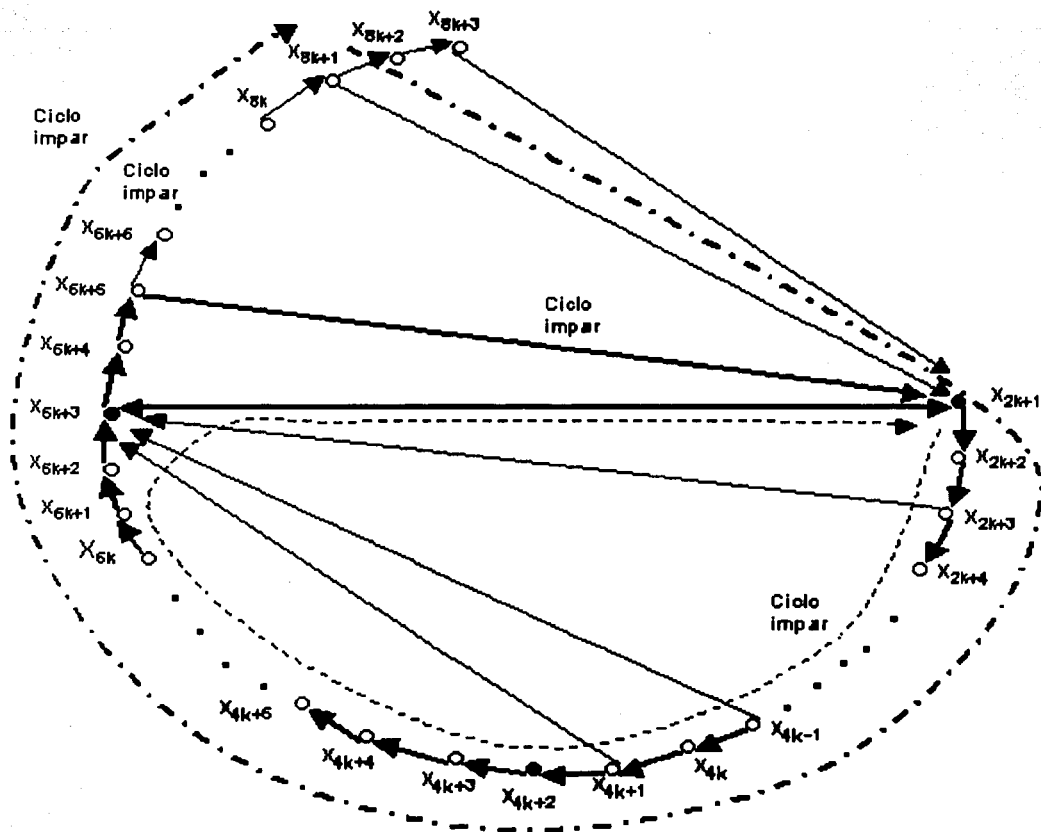


Figura A.6:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Como $D = (x_0, x_1)$, es una digráfica finita, entonces en un momento se terminan los ciclos dirigidos de longitud impar, el penúltimo ciclo dirigido de longitud impar que existe es:

$$(x_{6k+5}, x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+3}, \dots, x_{6k+3}, x_{6k+4}, x_{6k+5})$$

$T_{J+1} = \{u \in V(H_{J+1}) \mid u \text{ esta a lo más en un ciclo dirigido de longitud impar}\}$, es decir,

$$T_{J+1} = \{x_{6k+4}, x_{6k+5}\}.$$

Sea $H_{J+2} = H_{J+1} - T_{J+1}$, donde

$$V(H_{J+2}) = V(H_{J+1}) - T_{J+1} \text{ y}$$

$$F(H_{J+2}) = F(H_{J+1}) - \{(x_{6k+3}, x_{6k+4}), (x_{6k+4}, x_{6k+5}), (x_{6k+5}, x_{2k+1})\}$$

Observamos que H_{J+2} tiene núcleo, figura (A.7).

Tomemos $x_{6k+3} \in N_{J+2}$, como existen $\{(x_{6k+2}, x_{6k+3}), (x_{2k+2j+1}, x_{6k+3}) \in F(H_{J+1})$, $\forall 0 \leq j \leq k$, entonces $\{x_{6k+1}, x_{2k+2j+1}\} \notin N_{J+2}$ y los vértices $\{x_{2k+2j+2} \in N_{J+2}$, con $0 \leq j \leq k-1$, por otro lado existe la flecha $(x_{6k}, x_{6k+1}) \in N_{J+2}$, por lo que $x_{6k} \notin N_{J+2}$, pero $x_{6k-1} \in N_{J+2}$, como existe $(x_{6k-2}, x_{6k-1}) \in F(H_{J+2})$, entonces $x_{6k-2} \notin N_{J+2}$, en general existen las siguientes flechas, $(x_{4k+2+i}, x_{4k+3+i}) \in F(H_{J+2})$, $\forall 0 \leq i \leq 2k-5$, por lo que los vértices $x_{4k+3+2i} \in N_{J+2}$, $\forall 0 \leq i \leq k-3$ y $x_{4k+4+2i} \notin N_{J+2}$, $\forall 0 \leq i \leq k-4$. Por lo tanto el conjunto N_{J+2} es independiente.

$$N_{J+2} = \{x_{6k+3}, x_{2k+2j+2}, x_{4k+3+2i} \mid \forall 0 \leq j \leq k-1, \forall 0 \leq i \leq k-3\}$$

Por demostrar que N_{J+2} es absorbente.

- Para $x_{2k+2i+1} \in V(H_{J+2}) - N_{J+2}$, $\forall 0 \leq i \leq k$, tenemos: $(x_{2k+2i+1}, x_{6k+3}) \in F(H_{J+2})$, con $0 \leq i \leq k$, como $x_{6k+3} \in N_{J+2}$, entonces $\exists x_{2k+2i+1} N_{J+2}$ - flecha en H_{J+2} .
- Para $x_{4k+2+2i} \in V(H_{J+2}) - N_{J+2}$, $\forall 0 \leq i \leq k$, existen $(x_{4k+2+2i}, x_{4k+3+2i}) \in F(H_{J+2})$, con $0 \leq i \leq k$, como $x_{4k+3+2i} \in N_{J+2}$, $\forall 0 \leq i \leq k$, entonces existe $x_{4k+2+2i} N_{J+2}$ - flecha en H_{J+2} , por lo tanto N_{J+2} es absorbente.

$\therefore N_{J+2}$ es núcleo en H_{J+2} .

Es fácil ver que todas las subdigráfica de H_{J+2} tienen núcleo.

Por lo tanto $H_{J+1} - T_{J+1} = H_{J+2}$ es núcleo perfecta.

Como cumple las hipótesis del teorema (A.3), entonces H_{J+1} es núcleo perfecta, sabiendo que $H_{J+1} = H_J - T_J$, con $T_J = \{u \in V(H_J) \mid u \text{ esta a lo más en un ciclo dirigido de longitud impar}\}$, por el teorema (A.3), implica que H_J es núcleo perfecta, continuando con este proceso obtenemos

un digráfica $H_1 = H - T$ núcleo perfecta, donde $T = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}\}$ y cada $u \in T$ esta a lo más en un ciclo dirigido de longitud impar en H , por el teorema (A.3) de Galeana-Neumann, implica que H es núcleo perfecta, donde $H = D - (x_0, x_1)$.

$\therefore D - (x_0, x_1)$ es núcleo perfecta.

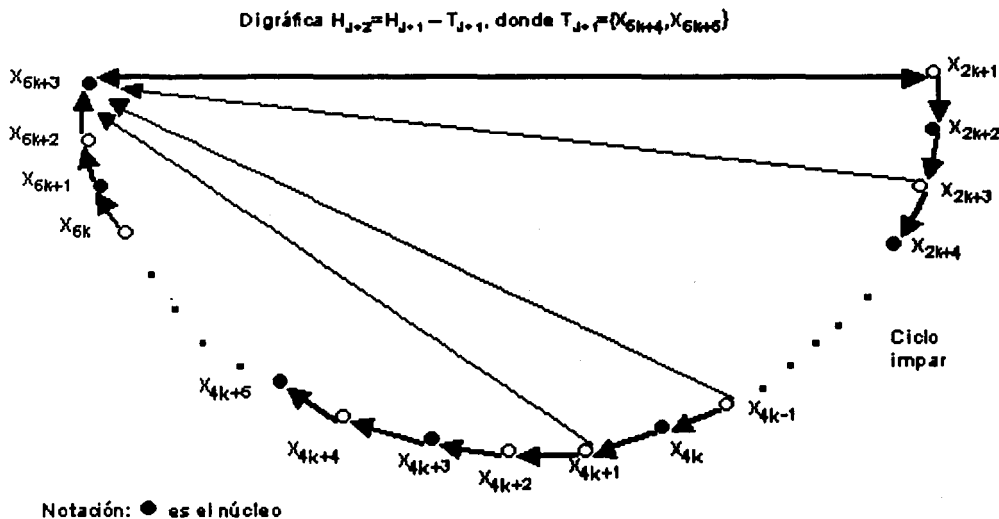


Figura A.7:

2- Por demostrar que D es núcleo imperfecta crítica.

Sabemos que la digráfica $D - (x_0, x_1) \subset D$ y que todas las subdigráficas inducidas de $D - (x_0, x_1)$, están en la digráfica D , como las subdigráficas inducidas de $D - (x_0, x_1)$ tienen núcleo, entonces las subdigráficas inducidas propias de D , (no ella misma) tienen núcleo, pero D no tiene núcleo, por lo tanto la digráfica D , del contraejemplo, ver teorema (A.2), es núcleo imperfecta crítica

$\therefore D$ es núcleo imperfecta crítica. ■

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Conclusiones

Después de analizar ciertas orientaciones de las gráficas de paridad, de líneas y algunas operaciones, como es la duplicación de un vértice y la suma de gráficas, que cumplen ciertas condiciones los ciclos de longitud impar, de modo que implique la existencia de núcleo, podemos concluir lo siguiente:

1. Si orientamos a una gráfica de paridad, de tal manera que cada ciclo dirigido de longitud tres tenga dos flechas simétricas, entonces se afirma que cada ciclo de longitud impar tiene dos polos consecutivos o dos cuerdas cruzadas triangulares.
2. Las gráficas de paridad son M -solubles.
3. Una orientación D de una gráfica de líneas es núcleo perfecta, si y sólo si, D es una orientación admisible y todo ciclo dirigido de longitud impar tiene una cuerda.
4. Si la unión de dos gráficas subyacentes de digráficas núcleo perfectas, le damos una orientación M -admisible, entonces la unión es núcleo perfecta.
5. Si la duplicación adyacente de una gráfica soluble, le damos la orientación admisible, entonces dicha digráfica tiene núcleo.
6. La duplicación no adyacente de una gráfica soluble es soluble.
7. Finalmente en las digráficas en general, la condición de que cada ciclo dirigido de longitud impar tiene dos cuerdas no es suficiente para que poseen núcleo, el contraejemplo lo mostro Galeana-Sánchez [9].

El resultado del inciso (6) fue probado por E. Boros y V. Gurvich [8], utilizando herramientas de teoría de juegos, en este trabajo lo demostramos sólo usando teoría de gráficas.

Finalmente la importancia de la solubilidad, la podemos ilustrar con la conjetura de Berge y Duchet, la cual hace un enlace entre núcleo y gráficas perfectas. Dicha conjetura dice: “ **Una gráfica es perfecta, si y sólo si, es soluble.** Una parte de la conjetura la demostrarón E. Boros y V. Gurvich [8] usando teoría de juegos, la cual la mencionamos en el siguiente teorema: “ **Toda gráfica perfecta es soluble,** por lo que podemos hacernos esta pregunta ¿Dicho resultado se puede demostrar con teoría de gráficas?, la pregunta queda abierta.

Bibliografía

- [1] C. Berge. *Graphs and Hipergrahs*. North-Holland, New York, 1973. Chapter 14.
- [2] M. Buriel and J. P. Uhry. *On Parity Graphs*, volume 21 of *Ann. Discrete Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, 1984. 253-277.
- [3] P. Duchet C. Berge. *Séminaire MSH*. Paris, January 1983.
- [4] C. Champtier. Kernel in some orientations of comparatibility graphs. *Journal of Combinatorial theory, Serie B*, (47), 1989. 111-113.
- [5] P. Duchet. Graphes noyau-parfait, in: M. Deza and I. G. Rosenberg, eds;. *Combinatorics*, (79).
- [6] P. Duchet. Parity Graphs are Kernel-M-Solvable. *Journal of Combinatorial theory, Serie B*, (43), 1987. 121-126.
- [7] P. Duchet. A Sufficient Condition for a Digraph to be Kernel-Perfect. *Journal of Graph Theory*, 11(1), 1987. 81-85.
- [8] V. Gurvich E. Boros. Perfect graphs are Kernel-solvable. *Discrete Mathematics*, (159), 1996. 35-55.
- [9] H. Galeana-Sánchez. A Counterexample to a Conjeture of Meyniel on Kernel-Perfect Graphs. *Discrete Mathematics*, (41), 1982. 105-107.
- [10] H. Galeana-Sánchez and Neumann-Lara. On Kernels and semi-kernels of digraphs. *Discrete Mathematics*, (48), 1984. 67-76.
- [11] J. Krausz. Demonstration nouvelle d'un theoreme de whitney sur les reseaux. *Mathematics*, (50), 1943. 75-85.

- [12] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1994.
- [13] Victor Neumann-Lara. Seminúcleo de una digráfica. *Anales del Instituto de Matemáticas*, (2), 1971. U.N.A.M.
- [14] D.R. Woodall O.V. Borodin, A.V. Kostochka. On kernel-perfect orientations of line graphs. *Discrete Mathematics*, (191), 1998: 45-49.
- [15] H. Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graph. *Journal of Mathematics*, (53), 1932. 150-168.
- [16] N. Y. Withoff. A modification of the game of Nim. *Nieuw Arch, voor Wiskunde*, (7), 1907. 199-203.