

00323
3D



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COLAPSO GRAVITACIONAL INDUCIDO POR ONDAS DE
CHOQUE IMPLOSIVAS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A :
JUAN CARLOS HIDALGO CUELLAR



DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGIO MENDOZA RAMOS

2003

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"COLAPSO GRAVITACIONAL INDUCIDO POR ONDAS DE CHOQUE IMPLOSIVAS"

realizado por Hidalgo Cuellar Juan Carlos

con número de cuenta 09850448-8 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Propietario Dr. Sergio Mendoza Ramos

Sergio Mendoza

Propietario Dr. Ramón Peralta y Fabi

Ramón Peralta Fabi

Suplente Dr. Marcelo Salgado Rodríguez

MS

Suplente Dr. Jorge Cantó Illa

Jorge Cantó Illa

Suplente Dr. Pablo Velázquez Brito

Pablo Velázquez Brito

Consejo Departamental de Física

Patricia Goldstein Menache
~~DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE~~
Coordinadora de Licenciatura
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

COLAPSO GRAVITACIONAL INDUCIDO POR ONDAS DE CHOQUE IMPLOSIVAS

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE FÍSICO EN LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

SEPTIEMBRE, 2003

II

Índice general

Índice general	III
Índice de figuras	V
Agradecimientos	VII
Resumen	1
Notación	3
Introducción	5
I. Ondas de choque y flujo similar	9
§1. Dinámica de fluidos ideales	9
§2. Superficies de discontinuidad	11
§3. Ondas de choque	13
§4. Flujo auto-similar en una dimensión	16
II. La implosión no-relativista	19
§5. La explosión auto-similar	19
§6. La onda de choque implosiva	23
§7. Características de la solución similar	30
III Hidrodinámica relativista	35
§8. Ecuaciones de flujo relativista	35
§9. Ondas de choque relativistas	39
IV. La implosión relativista	45
§10. La explosión auto-similar relativista	45
§11. La implosión auto-similar relativista	51
§12. Características de la implosión relativista	56

V. Aplicaciones astrofísicas	61
§13. Estabilidad de la implosión	61
§14. Consideraciones finales	66
A. Análisis Dimensional	69
Bibliografía	73

Índice de figuras

1.	Alineamiento de Radiación en Jets de Nucleos de Galaxias Activas.	7
I.1.	Onda de choque generada por la compresión de un pistón.	12
I.2.	Flujo a través de una discontinuidad.	13
II.1.	Fases auto-similares de la explosión nuclear	20
II.2.	Explosión e implosión esféricas.	25
II.3.	Intersección de las curvas cero con la integral $Z(U)$	28
II.4.	Determinación del índice de similaridad en la implosión no-relativista	30
II.5.	Perfil de presión p del flujo detrás de la implosión no-relativista.	31
II.6.	Perfiles de densidad de partículas n en la implosión no-relativista.	32
II.7.	Perfiles de velocidad u en la implosión no-relativista	33
III.1.	Onda de choque unidimensional en el plano de Minkowski	40
IV.1.	Perfiles de presión en el gas detrás de la onda de choque relativista.	56
IV.2.	Perfiles de densidad del gas en una onda de choque relativista.	57
IV.3.	Perfiles para el factor de Lorentz γ^2 en la onda de choque implosiva.	58
IV.4.	Perfiles de velocidad normalizada $\beta = v/c$ en la onda de choque implosiva.	59
V.1.	Nube dentro de una explosión de supernova	62

VI

Gracias

No puedo decir que he terminado. El trabajo que comencé hace un año con las ganas de asomarme un poco a la investigación ha resultado tan vasto y enriquecedor, que he caído inevitablemente en la paradoja de Arquímedes y la tortuga. Hoy, sin embargo, cierro este proceso satisfecho y con la conciencia de haber avanzado muchas mitades del camino hacia mí.

Agradezco a las instituciones que me han apoyado para realizar este trabajo. Primeramente a la Facultad de Ciencias y su personal académico por alimentar mi curiosidad y en ocasiones fomentar la búsqueda de la fascinación.

Agradezco también al Instituto de Astronomía por todas las facilidades brindadas durante el desarrollo de este trabajo y por el apoyo de varios de los académicos que ahí laboran.

En particular agradezco a los investigadores Dr. Alejandro Ruelas, M. en C. José Peña, Dr. Arcadio Poveda y Dr. Jesús Galindo, quienes han sido guías en diversas etapas de mis primeros pasos en la Astronomía.

Agradezco la paciencia y el compromiso de los investigadores Dr. Jorge Cantó, Dr. Ramón Peralta, Dr. Marcelo Salgado y Dr. Pablo Velázquez que han fungido como sinodales revisando y corrigiendo este trabajo.

Quiero agradecer a todos quienes me han acompañado en alguna de las etapas del ciclo que aquí culmina. Cada quien a su modo ha contribuido con un trazo en la obra que presento y con la intensidad de sus matices se alimenta la intención de continuar naciendo.

A los maestros

Dra. Ma. del Carmen Jorge y Jorge. Por la paciencia y claridad.

Dr. Rodolfo P. Martínez y Romero. Por el empeño en abarcar los temas más fascinantes de mi carrera.

Al director de esta tesis

Dr. Sergio Mendoza Ramos. Por crear desde el principio y hasta hoy. Y por transformar esa fe en enseñanza. Muchas Gracias.

A los cuates de la Facultad, que después de más de cinco años siguen preguntando por la verdad científica en todo. Por las cosquillas que produce la eterna pregunta, *¿Ya acabaste?*

A los amigos y amigas de vida, que alimentan todo lo demás y saben aceptar un apretón de cráneo y un abrazo aunque de cuando en tarde.

A mi familia y en especial a mis padres Jesús y Lídice. Son premisa de casi todo lo logrado. Y ahora puedo verlo. ¡Gracias!

A mi hermana por su compañía y buenos deseos.

y

Adriana, por enfrentarme, envolverme y presionar con el amor. Por la subsecuente implosión po-
liestética que ha resultado ser un mecanismo efectivo de formación estelar. Ahora vive un cúmulo que
irradia la misma sustancia.

A TODA LA VIDA
DEPOSITADA EN ESTE TRABAJO.

Resumen

En este trabajo se reproduce por completo el análisis del flujo auto-similar detrás de una onda de choque implosiva con simetría esférica en donde se excluye la gravedad, la viscosidad y la radiatividad del gas. Éste análisis, conocido también como análisis de Guderley-Landau-Stanyukovich, sigue los pasos de la solución al flujo auto-similar en la explosión fuerte presentada por primera vez y en forma independiente por Sedov (1959) y por Taylor (1950).

Se presenta el resultado de la implosión auto-similar en una nube típica del medio interestelar considerando en ella una densidad de partículas constante. Al observar los parámetros de la solución para este caso se encuentra que en las últimas etapas las cantidades hidrodinámicas del fluido detrás del choque toman valores muy grandes. En particular la velocidad del flujo tiende a infinito conforme la onda de choque se acerca al centro de la nube.

Esto motiva a calcular la extensión relativista de la implosión auto-similar con simetría esférica. Utilizando el equivalente relativista de la explosión auto-similar esférica presentada por Blandford y McKee (1976), seguimos los mismos pasos que en el caso no-relativista para obtener la solución al problema de la implosión.

El análisis relativista se aplica nuevamente al caso de la implosión auto-similar en una nube del medio interestelar. En este caso las presiones externas requeridas para generar la onda de choque son mucho mayores que en el caso no-relativista.

Por último se presentan los posibles ambientes astrofísicos donde una implosión tiene lugar. En un análisis de la estabilidad gravitacional del fluido chocado se encuentra que la formación estelar es improbable para una onda de choque hidrodinámica de este tipo. Se concluye que con el objetivo de explicar a detalle la formación estelar es necesario considerar los campos magnético y gravitacional así como la radiación del gas en el proceso de implosión.

Notación

En el presente trabajo se utilizan los símbolos:

- ρ = densidad de masa
- v = velocidad
- p = presión
- T = temperatura
- a = velocidad del sonido
- c = velocidad de la luz
- M = número de Mach
- ϵ = energía interna no-relativista por unidad de volumen
- $\epsilon = \epsilon/\rho$ energía interna no-relativista por unidad de masa
- s = entropía por unidad de masa (entropía específica)
- w = entalpía específica
- $\gamma = (1 - (v/c)^2)^{1/2}$, factor de Lorentz
- n = número de partículas por unidad de volumen propio
- e = energía interna relativista por unidad de volumen propio
- ω = entalpía relativista por unidad de volumen propio
- σ = entropía por unidad de volumen propio
- κ = índice politrópico

Se considera implícita la suma sobre índices repetidos. Los índices latinos en vectores toman valores 1, 2 ó 3 en referencia a las dimensiones espaciales, $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$. Los índices griegos α, β, \dots toman valores 0, 1, 2 ó 3 refiriéndose al tiempo $x^0 = ct$ y espacio, $x^\alpha = (ct, x^i)$. El tensor métrico para el espacio-tiempo de Minkowski es $\eta_{00} = 1$, $\eta_{ij} = -1$ para $i = j$ y $\eta_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$.

Introducción

Las ondas de choque en hidrodinámica se producen por *discontinuidades* en la presión o la energía interna del flujo de un gas. Cuando los gradientes de presión son muy pronunciados, el gas experimenta velocidades supersónicas mientras avanza sobre el fluido a menor presión.

En el estudio astrofísico de la interacción entre ondas de choque hidrodinámicas y el medio ambiente sobre el cual se propagan, la interacción con nubes de gas ha sido un tema recurrente. Los intervalos de energía observados en los choques astrofísicos varían desde los choques débiles de vientos estelares –con velocidades de propagación $v_s \leq 10 \text{ km s}^{-1}$, hasta los choques fuertes provocados en explosiones de supernovas –donde el choque avanza sobre el medio interestelar (MIE) con velocidad $v_s \approx 1000 \text{ km s}^{-1}$ (McKee y Hollenbach, 1980). En el caso extremo de flujos supersónicos, se encuentran los jets producidos en radio-galaxias cuyo gas se mueve a velocidades comparables a la velocidad de la luz (Begelman et al., 1984).

Las ondas de choque en el cosmos son detectadas por la radiación que emiten. Al calentar el gas del medio interestelar, las ondas de choque dibujan una estela radiativa detrás de ellas que por lo general ioniza al gas no chocado. El gas chocado se enfría mediante distintos procesos que, dependiendo de la temperatura, emiten radiación característica del estrato post-choque.

En muchos casos, sin embargo, el tipo de radiación observada detrás de una onda de choque es indicativa de *obstáculos* en el flujo del gas chocado. En el caso de los choques de mayor dimensión, se considera que las nubes del MIE con mayor densidad son asaltadas por el choque sin destruirse. Esto genera ciertas inhomogeneidades observadas en el gas chocado (McKee y Cowie, 1975).

Las evidencias observacionales de tal efecto tienen lugar tanto en el gas detrás de una supernova (Reynolds y Ogden, 1978), como en el gas detrás de los chorros de gas o *jets* generados en radiogalaxias (Best et al., 1996). En ambos casos se han desarrollado modelos de interacción de las nubes de gas con el choque (ver por ejemplo McKee y Cowie, 1975; Mendoza, 2000). En ellos, sin embargo, no se considera la posible implosión hidrodinámica que puede sufrir la nube en su interacción con el gas chocado (Woodward, 1976).

El estudio del gas detrás de una onda de choque y su interacción con una nube fría del MIE es de gran importancia en astrofísica. Este tipo de sucesos resulta de alguna manera favorable en la inducción del colapso gravitacional de la nube resultando en la formación de nuevas estrellas.

En el presente trabajo se considera la interacción más simple que puede ocurrir entre una nube fría del medio interestelar con el gas caliente que sigue a una onda de choque de alta energía. Para tal efecto suponemos que una nube esférica se encuentra inmersa en el gas chocado y que la diferencia de presiones entre los dos medios es tan grande que se genera una discontinuidad en la presión al borde de la nube. La hidrodinámica del gas en tales discontinuidades para los casos newtoniano y relativista se describe en los capítulos I y III de este trabajo.

En ambos casos la discontinuidad de presiones entre el gas de la nube y el gas envolvente produce una onda de choque implosiva con simetría esférica que avanza sobre la nube. Utilizando la aproximación del flujo adiabático no radiativo ni auto-gravitante se presenta el análisis del choque que converge a un punto para el caso no-relativista (ver capítulo II). Para el caso de velocidades de flujo cercanas a la

velocidad de la luz, como sucede en el gas dentro de los jets de núcleos de galaxias activas, el análisis de la implosión en el dominio de la relatividad especial se describe en el capítulo IV.

El objetivo principal de esta tesis es caracterizar la implosión de una nube en el mayor intervalo de energías posible. Con los valores asintóticos de las cantidades hidrodinámicas en la nube chocada se evaluará la estabilidad gravitacional del gas (ver capítulo V). Con esto se considerará la posibilidad de formación de nuevas estrellas.

Un segundo objetivo en la descripción relativista de este fenómeno es completar la explicación del tipo de radiación alineada en óptico y radio que se observa a lo largo de los chorros de material expulsado por el núcleo de las radio-galaxias (Best et al., 1996). La radiación observada a grandes distancias del núcleo de las galaxias activas, es indicativa de obstáculos en la trayectoria de los chorros o jets generados en el núcleo (ver figura 1). Los mecanismos de formación de estos *nudos* a lo largo de los jets extragalácticos no están muy bien entendidos.

A escalas estelares, la presencia de radiación observada a lo largo de los chorros se explica de manera distinta. Los llamados nudos en los jets estelares tienen su origen en el choque del gas propio del jet y el ambiente del medio interestelar y en los choques internos del jet mismo. Una de las causas de radiación son los choques internos en los jets que producen expansión y recolimación del jet a lo largo de su trayectoria (e.g. Canto et al., 1989). En modelos más sofisticados se han considerado variaciones temporales en la expulsión de masa en los chorros estelares. Esto parece ajustar correctamente a las observaciones de jets en objetos HH (ver por ejemplo Masciadri et al., 2002).

La radiación anisotrópica y con patrones poco definidos en el caso de los jets extragalácticos nos motiva a considerar el caso alternativo de la interacción del jet con una nube de gas como describimos también en el último capítulo.

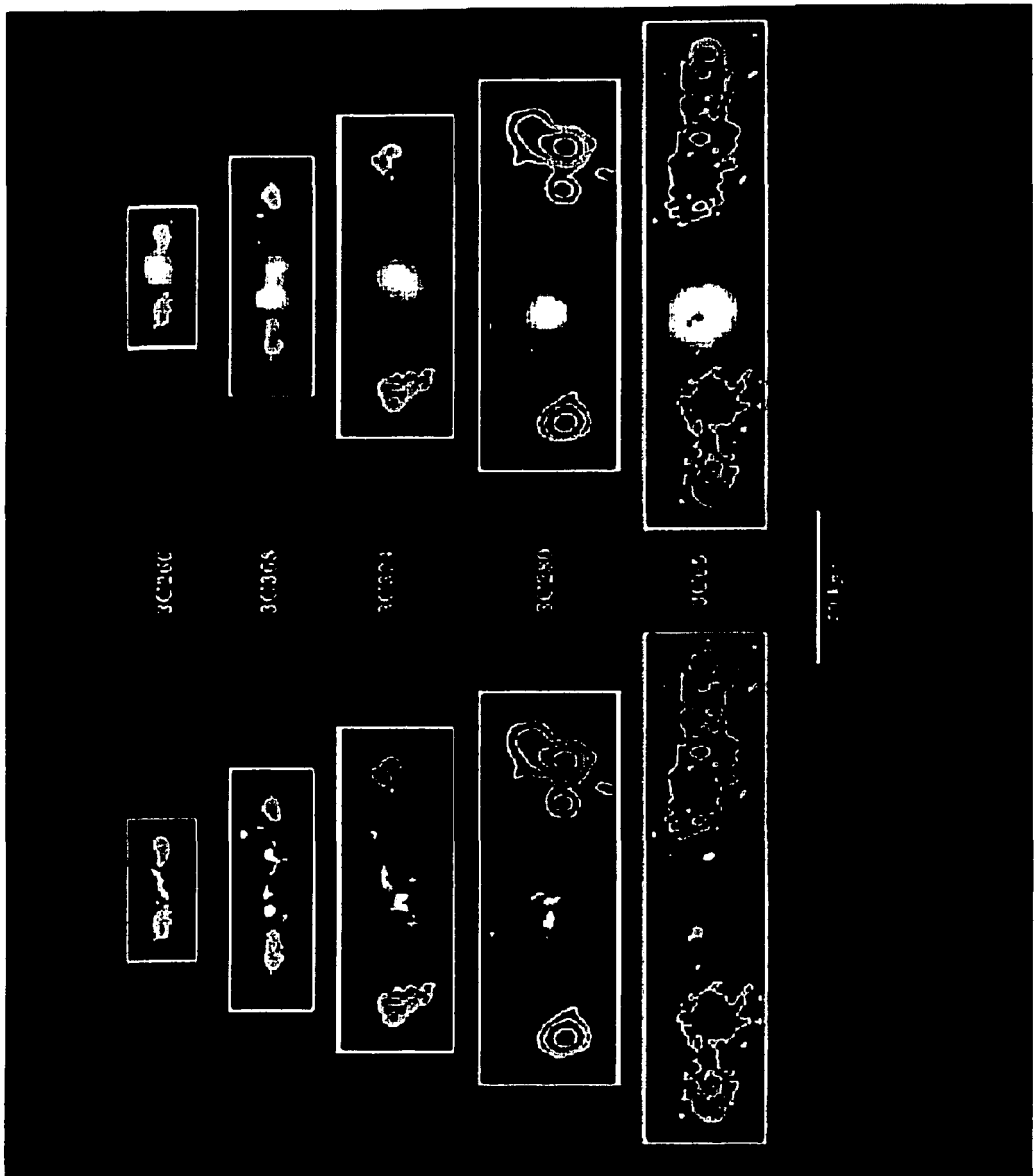


Figura 1: Imágenes del radiotelescopio UKIRT sobrepuestas a imágenes del telescopio espacial Hubble para radiogalaxias del catálogo 3C. A lo largo de los jets se observa un alineamiento en la radiación en las bandas óptica y de radio. Los contrastes en el espectro de tal radiación indican la existencia de choques a lo largo de los jets (Best et al., 1996).

1954
MAY 10 1954
U.S. AIR FORCE
OFFICE OF THE
SECRETARY OF THE AIR FORCE
WASHINGTON, D.C.

Capítulo I

Ondas de choque y flujo similar

*La inspiración existe
pero tiene que encontrarse trabajando.*

P. Picasso

En este capítulo se presentan las leyes de conservación en la mecánica de fluidos no-relativista. Dichas leyes son utilizadas en la descripción de discontinuidades que se presentan en un fluido. En particular se analizan las discontinuidades conocidas como ondas de choque. Después de enunciar las condiciones para generar una onda de choque y su efecto sobre el flujo unidimensional, se describe el movimiento sujeto a parámetros característicos: el flujo auto-similar.

§1. Dinámica de fluidos ideales

En la descripción del movimiento de un fluido se deben considerar las cantidades conservadas en su trayectoria. Para determinar formalmente las características del flujo tomemos un *elemento de fluido*, es decir, un volumen de fluido mucho más pequeño que el fluido en consideración. Este elemento de fluido es lo suficientemente grande para que en su descripción no sea necesario considerar la interacción de cada partícula que compone al fluido. Cada elemento de fluido está caracterizado por dos cantidades termodinámicas, la presión p y la densidad ρ . Cualquier otra cantidad termodinámica se puede calcular mediante la ecuación de estado y las leyes de la termodinámica. El movimiento del fluido está descrito por el campo de velocidades \mathbf{v} .

La conservación de masa o *ecuación de continuidad*, expresa que en ausencia de fuentes o sumideros, la masa que entra en un volumen fijo debe ser la misma que sale. En otras palabras

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.1)$$

Integrando esto sobre un volumen fijo Ω se obtiene,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV = - \oint_{\partial \Omega} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \quad (1.2)$$

Esta es la forma integral de la ecuación de continuidad e indica que el cambio de masa en un volumen Ω es igual a la cantidad de fluido que entra, menos la que sale a través del área que lo limita $\partial\Omega$.

En la dinámica de *gases ideales*, es decir, gases en los que la conductividad térmica y la viscosidad son efectos despreciables en el movimiento del fluido, la ecuación de movimiento de un elemento de fluido es la llamada *ecuación de Euler*,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.3)$$

Esta ecuación representa la segunda ley de Newton para fluidos. La cantidad $\rho dv/dt$ es la aceleración multiplicada por la masa por unidad de volumen de un elemento de fluido. El gradiente de presión representa entonces la fuerza por unidad de volumen que se ejerce sobre un elemento de fluido determinado[†].

Por otra parte, la ecuación de conservación de la entropía

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (1.4)$$

impone un movimiento adiabático de cada elemento del fluido.

En las dos ecuaciones anteriores, la derivada temporal $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ es el cambio total en el tiempo de cualquier cantidad en un elemento de fluido. Esta derivada es la derivada *total o Lagrangiana*.

A partir de estas tres ecuaciones se pueden construir dos ecuaciones de conservación que comparten la estructura de la ecuación (1.1) (Landau y Lifshitz, 1987). La primera es la conservación de energía,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) = -\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \right], \quad (1.5)$$

en donde ε es la densidad de energía interna por unidad de masa[†]. La *densidad de energía* (energía por unidad de volumen) está dada por $\rho v^2/2 + \rho \varepsilon$, y por lo tanto el *flujo de energía* es $\rho \mathbf{v} (v^2/2 + w)$, con $w = \varepsilon + p/\rho$ la entalpía por unidad de masa del fluido.

Al integrar la ecuación (1.5) sobre un volumen fijo Ω y usando el teorema de Gauss se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) dV = - \oint_{\partial\Omega} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \right] \cdot d\mathbf{A}. \quad (1.6)$$

En esta igualdad el miembro izquierdo es la tasa de cambio de energía en el volumen Ω . El segundo miembro es la energía neta que entra al volumen por la superficie $\partial\Omega$ que lo envuelve.

De la misma forma se puede construir una ecuación de conservación de momento. Definimos la *densidad de momento* como ρv_i , con lo que

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.7)$$

[†] En el presente trabajo, la descripción del flujo no incluye a la fuerza de gravedad del gas mismo. La justificación de tal aproximación se presenta en el último capítulo.

[†] Esta energía interna tiene una expresión bien conocida en termodinámica: $d\varepsilon = Tds - PdV = Tds - P/\rho^2 d(1/\rho)$.

donde v_i es la componente i -ésima de la velocidad y el *flujo de momento* es un tensor de rango-2 dado por $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$, con δ_{ik} el tensor unitario.

Integrando la ecuación (1.7) sobre un volumen fijo Ω se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho v_i dV = - \oint_{\partial\Omega} \Pi_{ik} dA_k = - \oint_{\partial\Omega} \Pi_{ik} n_k dA, \quad (1.8)$$

donde se ha introducido $dA_k = n_k dA$ con \mathbf{n} un vector unitario normal al área $\partial\Omega$. El lado izquierdo de la expresión anterior es la tasa de cambio del momento total contenido en el volumen Ω . De aquí que $\Pi_{ik} n_k$ represente el flujo de la componente i -ésima del momento a través del área cuyo vector normal es n_k .

Las ecuaciones de conservación de masa, energía y momento presentadas son de gran importancia en la dinámica de gases con discontinuidades como veremos en la siguiente sección.

§2. Superficies de discontinuidad

Para comenzar con el estudio de las discontinuidades en los flujos debemos considerar los cambios que experimentan los fluidos en su dinámica al ser perturbados. Una perturbación δp en la presión es una compresión cuando $\delta p > 0$ y una descompresión (también llamada *rarefacción*) si $\delta p < 0$ en el punto de la perturbación.

Las perturbaciones a primer orden en las cantidades físicas de un fluido ideal generan ondas que se propagan a la velocidad del sonido (Landau y Lifshitz, 1987). $a = (\partial p / \partial \rho)_s^{1/2}$, donde s es la entropía específica[†]. Esta es la velocidad de propagación de la información en fluidos.

Cuando un fluido presenta cambios drásticos en las cantidades físicas que lo describen, los gradientes pueden ser tan grandes que generan *discontinuidades*. Estas discontinuidades son superficies en las que cualquier elemento de fluido que las atraviesa cambia discontinuamente de un estado definido por el conjunto de valores p_1, ρ_1, v_1 a otro p_2, ρ_2, v_2 . Los posibles estados que puede alcanzar un elemento al atravesar una discontinuidad no son arbitrarios y están regidos por las ecuaciones de conservación presentadas en la sección §1.

Existen múltiples situaciones en las que una discontinuidad tiene lugar en un flujo. Consideremos un tubo cilíndrico que contiene un gas en reposo. Supongamos que una de las paredes del cilindro es un pistón que sella al tubo (ver figura I.1). Al empujar suavemente el pistón se genera una onda que viaja con la velocidad del sonido y cambia la presión en el gas de manera continua. Si el pistón es empujado fuertemente de tal manera que su velocidad sea supersónica, los gradientes de presión son tan grandes que se genera una superficie de discontinuidad delante del pistón que se denomina *onda de choque*. La clasificación de las discontinuidades que pueden existir en un fluido se presenta en la sección §3. Por lo pronto basta indicar que un elemento de fluido que atraviesa una onda de choque cambia su presión considerablemente. Lo mismo ocurre con el resto de las cantidades hidrodinámicas. El gas *chocado* (i.e.

[†] Cuando hablamos de perturbaciones que viajan a la velocidad del sonido con respecto al fluido, no nos referimos a aquellas que viajan con el fluido como la vorticidad y la entropía.

gas detrás de la superficie de discontinuidad) se propaga en este caso con la velocidad del pistón. En la

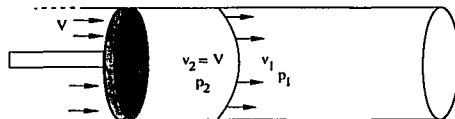


Figura I.1: Cilindro moviéndose a velocidad supersónica V . La presión p_2 impartida por el pistón genera una superficie de discontinuidad. Un elemento de fluido que atraviesa esta superficie pasa del estado (v_1, p_1, ρ_1) al estado (v_2, p_2, ρ_2) de manera discontinua.

descripción matemática del flujo, las superficies de discontinuidad representan fronteras para el análisis del fluido tanto detrás como delante de la superficie.

El flujo de masa, energía y momento deben ser conservados al cruzar la discontinuidad. Para mostrar esto consideramos un sistema de referencia donde la discontinuidad se encuentre fija y perpendicular a uno de los ejes coordenados. Sin pérdida de generalidad, en lo sucesivo tomaremos al eje x como el eje perpendicular a la superficie de discontinuidad.

La descripción del flujo en la discontinuidad se aproxima considerando el gas ideal ya que la viscosidad del gas es despreciable cuando este se desplaza a velocidades comparables a la del sonido a (Landau y Lifshitz, 1987)[†].

La figura I.2 muestra un volumen cerrado Ω que intersecta la discontinuidad. Consideremos que el fluido es estacionario, i.e. $\partial/\partial t = 0$. De esta manera la ecuación (1.2) queda como

$$\oint_{\partial\Omega} \rho v dA = 0. \quad (2.1)$$

Si ahora hacemos tender a cero el radio y la altura del cilindro Ω , entonces la integral de la ecuación (2.1) tiende a

$$\int_{\partial\Omega} \rho v dA = -(\rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x}) = 0. \quad (2.2)$$

Si denotamos la diferencia de valores de cualquier cantidad hidrodinámica q antes y después de la discontinuidad como $[q] \equiv q_1 - q_2$, la ecuación (2.2) puede escribirse de la forma

$$[\rho v_x] = 0. \quad (2.3)$$

Del mismo modo se puede ver (Landau y Lifshitz, 1987) que la conservación del flujo de energía y el

[†] en el problema particular que nos ocupa, veremos que el tiempo dinámico de la implosión τ_{imp} en una nube, es mucho menor al tiempo de enfriamiento τ_{enf} y al tiempo de Jeans τ_{col} del mismo gas. Esto justifica la elección del flujo adiabático de un gas ideal sin gravedad.

flujo de momento en todas sus componentes están dados respectivamente por

$$\left[\rho v_x \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \right] = 0, \tag{2.4}$$

$$[p + \rho v_x^2] = 0, \tag{2.5}$$

$$[\rho v_x v_y] = 0, \quad [\rho v_x v_z] = 0. \tag{2.6}$$

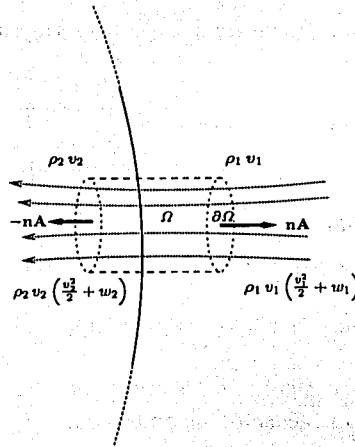


Figura 1.2: Sobre la superficie de discontinuidad estacionaria, representada por la línea curva, se traza un volumen infinitesimal Ω en el que se integran las ecuaciones de conservación. Cuando el radio y la altura del cilindro tienden a cero, las integrales (1.2), (1.6) y (1.8) se reducen a igualar el flujo en las tapas $n dA$ en ambos lados de la discontinuidad

§3. Ondas de choque

De las condiciones de frontera arriba enunciadas se pueden derivar dos tipos distintos de discontinuidades. El primero corresponde a una discontinuidad a través de la cual no hay flujo alguno de masa en la superficie. Utilizando la ecuación (2.3) y escribiendo $v = v_x$, se sigue que $v_1 = v_2 = 0$. Con esto y usando las ecuaciones (2.4) y (2.5) se obtiene que

$$[p] = 0.$$

Las componentes de la velocidad tangenciales a la superficie, v_y y v_z , aceptan cualquier diferencia entre ambos lados de la discontinuidad (Landau y Lifshitz, 1987). Este tipo de discontinuidades se denominan *discontinuidades tangenciales*.

Las discontinuidades en las que las partículas de fluido sí atraviesan la discontinuidad se llaman

ondas de choque. En ellas la característica $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \neq 0$ implica, de acuerdo a las igualdades (2.3) y (2.5), que las velocidades tangenciales v_y y v_z son continuas a través de la onda de choque. Las demás condiciones de conservación están dadas por las siguientes *condiciones de salto*,

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv j, \quad (3.1)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + w_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + w_2, \quad (3.3)$$

donde j representa el flujo de masa a través de la superficie. De estas igualdades se sigue que (Landau y Lifshitz, 1987):

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -\frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 + p_2), \quad (3.5)$$

donde $V \equiv 1/\rho$ es el volumen específico.

Debido a que la entalpía $w = \varepsilon + pV$, la ecuación (3.5) puede escribirse también como

$$w_1 - w_2 = -\frac{1}{2}(V_2 + V_1)(p_2 - p_1). \quad (3.6)$$

Las ecuación (3.6) se conoce como *adiabática de Hugoniot* o adiabática del choque. Dado un estado inicial del gas (V_1 , p_1) y conociendo la ecuación de estado del gas en ambos lados de la discontinuidad, la relación (3.6) determina de manera única el punto (V_2 , p_2) para el gas chocado[†].

Para una onda de choque débil, donde las diferencias $p_2 - p_1$ y $\rho_2 - \rho_1$ son cantidades de primer orden, la ecuación (3.1) junto con la ecuación (3.4) implican que

$$jV_1 = \sqrt{-V_1^2(p_2 - p_1)/(V_1 - V_2)} = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}. \quad (3.7)$$

de aquí se sigue que las velocidades del flujo son tales que $v_1 = v_2 = jV_1 = a$.

Cuando el fluido atraviesa la superficie de discontinuidad, la entropía por unidad de masa s aumenta, $s_2 > s_1$. Esto determina la dirección del flujo a través de la onda de choque. De aquí se puede mostrar que (Landau y Lifshitz, 1987)

$$p_2 > p_1,$$

por lo tanto, utilizando las ecuaciones (3.1) a (3.3), se obtiene

$$v_1 > a_1, \quad v_2 < a_2.$$

[†] En el caso de las ondas de choque llamaremos al gas que aun no ha sido alcanzado por la discontinuidad, *gas no chocado*. Las cantidades hidrodinámicas que lo describen están etiquetadas con el subíndice 1. Al gas que ha cruzado lo llamamos *gas chocado* o posterior al choque. Las cantidades hidrodinámicas de este gas estarán etiquetadas con el subíndice 2.

De esta manera y utilizando nuevamente las ecuaciones (3.1) a (3.4) se tiene que

$$V_1 > V_2, \quad v_1 > v_2.$$

En resumen, cuando un elemento de fluido pasa a través de una onda de choque del estado (p_1, V_1) al estado (p_2, V_2) este sufre una compresión. En otras palabras, su presión, densidad y temperatura aumentan y su velocidad disminuye cambiando de un valor supersónico a subsónico.

Consideremos ahora un gas ideal que fluye adiabáticamente en las etapas anterior y posterior a la onda de choque. La ecuación de estado del gas ideal puede escribirse como (Stanyukovich, 1960)

$$p = e^{(s-s_0/c_v)} \rho^\kappa, \quad (3.8)$$

donde c_v representa el calor específico a volumen constante y $\kappa = c_p/c_v$ es un índice que se mantiene constante a lo largo del flujo. En particular, para un gas monoatómico $\kappa = 5/3$ y en un gas diatómico $\kappa = 7/5$. De la ecuación (3.8) se observa que en el movimiento adiabático se cumple la relación *politrópica* $p/\rho^\kappa = \text{const.}$ en cada elemento de fluido[†]. Con esto y utilizando la primera ley de la termodinámica se observa que la energía interna del gas está dada por

$$\epsilon = pV/(\kappa - 1) = a^2/\kappa(\kappa - 1). \quad (3.9)$$

Substituyendo esta última expresión en la ecuación (3.5) se obtiene

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(\kappa + 1)p_1 + (\kappa - 1)p_2}{(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2}. \quad (3.10)$$

Debido a que en un gas ideal $T_2/T_1 = (P_2V_2)/(P_1V_1)$, entonces la ecuación (3.10) es también

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2(\kappa + 1)p_1 + (\kappa - 1)p_2}{p_1(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2}. \quad (3.11)$$

Las velocidades antes y después del choque son en este caso (Landau y Lifshitz, 1987)

$$v_1^2 = \frac{1}{2} V_1 \{(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2\}, \quad (3.12)$$

$$v_2^2 = \frac{1}{2} V_1 \{(\kappa + 1)p_1 + (\kappa - 1)p_2\} / \{(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2\}, \quad (3.13)$$

cuya diferencia está dada por

$$v_1 - v_2 = \sqrt{2V_1(p_2 - p_1)} / \sqrt{(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2}. \quad (3.14)$$

Se dice que una onda de choque es fuerte si $(\kappa + 1)p_1 \ll (\kappa - 1)p_2$. En este caso las condiciones de

[†] Los procesos politrópicos son cambios de estado en los que se conservan calores específicos constantes, i.e. $dQ/dT = \text{const.}$ Esto incluye en particular a los procesos adiabáticos donde esta constante es cero (Chandrasekhar, 1989).

salto en la discontinuidad se reducen a (Landau y Lifshitz, 1987)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad (3.15)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\kappa - 1)p_2}{(\kappa + 1)p_1}. \quad (3.16)$$

La ecuación (3.15) muestra que el cociente de densidades es finito aún cuando el cociente de presiones crezca ilimitadamente. No obstante, el cociente de temperaturas se incrementa sin límite tan rápido como p_2/p_1 . De las ecuaciones (3.12) y (3.13) se sigue además que las velocidades tienden al infinito como la raíz de la presión

$$v_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\kappa + 1)p_2 V_1}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\kappa - 1)^2 p_2 V_1 / (\kappa + 1)}. \quad (3.17)$$

Las condiciones de frontera para ondas de choque de gran energía serán útiles en los casos a estudiar en el capítulo siguiente.

§4. Flujo auto-similar en una dimensión

Consideremos el flujo de un gas de tal modo que la simetría del problema nos permita analizarlo en una dimensión. Por ejemplo, un problema con simetría cilíndrica o esférica. En el análisis hidrodinámico de un gas ideal utilizamos la descripción Euleriana dada por las ecuaciones (1.2), (1.3) y (1.4). Para el flujo adiabático unidimensional nos valemos de la ecuación de estado (3.8) para escribir las ecuaciones como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \ln \rho}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{v}{r} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) + v \frac{\partial}{\partial r} \ln \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde ν toma el valor 1, 2 o 3 dependiendo si r es la dimensión lineal, el radio cilíndrico, o el radio esférico respectivamente. En estas ecuaciones el movimiento está determinado por las variables hidrodinámicas p , ρ y v que dependen del tiempo t y de la coordenada espacial r . El sistema de ecuaciones (4.1) no presenta longitudes o velocidades que puedan considerarse cantidades características del flujo.

Entre los movimientos descritos por el sistema de ecuaciones (4.1) se encuentra el flujo *auto-similar*. En este caso las cantidades hidrodinámicas varían de modo que a distintos tiempos, la distribución espacial de cualquiera de ellas es la misma dado un cambio de escala pertinente. Para ser precisos, si las cantidades hidrodinámicas dependen únicamente de la variable adimensional $\theta = Cr^\sigma/t^\mu$, al cambiar en un factor λ el tiempo t y proporcionalmente en un factor $\lambda^{\mu/\sigma}$ a la coordenada espacial r , la variable θ repite su valor y los perfiles en las variables hidrodinámicas no cambian.

Para poder escribir ecuaciones adimensionales a partir del sistema (4.1), el flujo auto-similar requiere

de un parámetro α en cuyas dimensiones se encuentre la masa (Sedov, 1959). Este parámetro junto con la longitud r y el tiempo t , genera variables con dimensiones de densidad y presión. De manera general, las dimensiones del parámetro α son $[\alpha] = ML^s T^k$, en donde M , L y T representan las dimensiones de masa, longitud y tiempo respectivamente. Con α escrito de esta forma y con ayuda del teorema de Buckingham del análisis dimensional (ver apéndice A) se obtienen las funciones adimensionales de presión P , densidad R y velocidad U como

$$\begin{aligned} P &= \rho r^{s+1} t^{k+2} / \alpha, \\ R &= \rho r^{s+3} t^k / \alpha, \\ U &= \nu t / r. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Debido a que las cantidades hidrodinámicas dependen de las variables independientes r y t , entonces las funciones adimensionales P , R y U deben depender de productos adimensionales de r y t . Sin embargo, estas dos variables y el parámetro α no son suficientes para generar cocientes adimensionales. El teorema de Buckingham indica que una segunda cantidad característica, dimensionalmente independiente de α , es necesaria para generar funciones adimensionales P , R y U de una sola variable. Consideremos una cantidad ϕ tal que $[\phi] = M^q L^m T^n$. Con el producto de potencias de α y ϕ , se puede construir un único parámetro característico con dimensiones del cociente L^a / T^b como lo requiere el flujo auto-similar. Este parámetro está dado por

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\alpha^q}{\phi}, \\ [\lambda] &= \frac{L^{sq-m}}{T^{n-kq}} = \frac{L^a}{T^b}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dados α y ϕ en el movimiento, las funciones adimensionales construidas en (4.2) dependen adimensionalmente de r y t a través del parámetro λ . Se dice entonces que el flujo es auto-similar (Sedov, 1959). Utilizando las expresiones (4.2) se obtiene que la presión, la densidad y la velocidad están dadas por

$$\begin{aligned} p &= \frac{\alpha}{r^{s+1} t^{k+2}} P(\lambda), \\ v &= \frac{r}{t} U(\lambda), \\ \rho &= \frac{\alpha}{r^{s+3} t^k} R(\lambda). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Substituyendo las expresiones (4.4) en el sistema de ecuaciones (4.1), se obtiene un sistema de ecuaciones ordinarias para las cantidades adimensionales P , R y U . El sistema de ecuaciones adimensionales resultantes se presenta en el capítulo siguiente en donde exploramos dos casos especiales usando dos familias distintas de parámetros α y ϕ .

Es importante enfatizar que en el caso de la dinámica de un gas politrópico regida por las ecuaciones (4.1), la similaridad del problema está determinada por el número de parámetros con dimensiones independientes que tomen parte en el problema. Si existen dos de ellos, por ejemplo α y ϕ , uno de los cuales tenga entre sus dimensiones a la masa, el movimiento será auto-similar (Sedov, 1959).

En los próximos capítulos expondremos casos especiales cuyo flujo unidimensional detrás de una onda de choque alcanza etapas de movimiento similar. En particular, estudiaremos el caso de la onda de choque implosiva donde se presentan condiciones de similaridad que surgen tanto en el caso no relativista (Capítulo 2) como en el relativista (Capítulo 4).

Capítulo II

La implosión no-relativista

*¿Que mano o que ojo inmortal
osa formar tu tremenda simetría?*

William Blake

En este capítulo presentamos el modelo más sencillo de flujo auto-similar unidimensional detrás de una explosión fuerte. Esto servirá de antecedente para el estudio del flujo posterior al choque en el análisis de la onda de choque implosiva con simetría esférica. Finalmente se presentan las características del análisis con el objeto de aplicar el problema en situaciones astrofísicas.

§5. La explosión auto-similar

Cuando una gran cantidad de energía se deposita en un volumen muy pequeño y en un periodo de tiempo casi instantáneo, esta se propaga en forma divergente del volumen de depósito o *región de detonación* generando una presión muy alta sobre el gas circundante. Este fenómeno se conoce como *explosión*.

Si la diferencia de presiones entre el medio en reposo y la región de detonación es suficientemente grande, la discontinuidad da lugar a una onda de choque fuerte divergente del punto de depósito de energía. Este mecanismo genera una *onda de choque explosiva*. En ausencia de barreras o anisotropías en el medio circundante, la onda de choque se expande de forma esférica. Como consecuencia, la descripción del movimiento se reduce a una dimensión r , que representa la distancia al origen.

Las explosiones en astrofísica tienen lugar en un grupo considerable de fenómenos que van desde la misma creación del universo -donde, según la teoría del Big-Bang se liberó una energía $E \approx 10^{66}$ ergs, hasta las llamaradas solares -cuya energía liberada es $E \approx 10^{32}$ ergs (Trimble, 2000).

Las similitudes en las características de distintos tipos de explosiones cósmicas indican que estos eventos suelen reproducirse a diversas escalas, tanto espaciales como energéticas (Blandford, 2000). Esto lleva en forma natural al estudio de flujos auto-similares que describen a un mismo fenómeno en distintas escalas. Tal dinámica sirve de modelos para la descripción de distintos procesos físicos en el cosmos. Si bien en cada caso se presentan detalles peculiares, la descripción general mediante el flujo

auto-similar ayuda a caracterizar de manera simplificada los patrones comunes a todos los eventos cósmicos.

A nivel terrestre, en los experimentos con bombas nucleares, se ha observado que existen etapas de flujo auto-similar en ondas de choque explosivas (ver figura II.1). En los mismos experimentos se ha observado que las etapas aproximadas al flujo auto-similar son aquellas en las que la onda de choque ha avanzado lo suficiente como para reducir a un *punto* la región de detonación. Sin embargo, la onda de choque no se ha apartado tanto de modo que la presión del medio circundante puede ser despreciada con respecto a la densidad de energía de la onda de choque. En esta etapa del movimiento, la energía E liberada en la detonación está totalmente contenida en el volumen limitado por la superficie del choque. Al ser una constante del movimiento, la energía es un parámetro del flujo similar.



Figura II.1: La primer explosión nuclear, *Trinity*, se llevó a cabo en Los Alamos el 16 de julio de 1943. Las figuras muestran etapas de la explosión a 0.006 segundos y 0.016 segundos después de la detonación. El gas dentro de la burbuja fluye de manera auto-similar.

Consideremos el flujo unidimensional de un gas politrópico detrás de la onda de choque esférica. El gas chocado se mueve hacia a un medio exterior en reposo y de densidad constante ρ_1 . Esta densidad inicial es el único parámetro que aparece en las condiciones de salto (ver las ecuaciones (3.15) a (3.17)). Con estas suposiciones no existe velocidad característica alguna en el movimiento. Esto se debe a que la única velocidad constante es la velocidad del sonido a_1 del gas en reposo. Debido a que esta velocidad es proporcional a la raíz de la presión inicial, su valor es muy pequeño y no tiene relevancia en el problema. Así pues, la energía E y la densidad ρ_1 son las únicas cantidades características que describen el flujo detrás de la onda de choque explosiva. Con ellas se cumple la hipótesis de flujo auto-similar expuesta en la sección §4[†].

A partir de estas dos cantidades características se puede construir un único parámetro adimensional característico del problema,

$$\xi = \tau \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{1/5}. \quad (5.1)$$

Esta *variable similar* del problema, incluye un cociente del tipo r/t^α (cf. sección §4).

Para construir las funciones adimensionales a partir de la velocidad, la presión y la densidad escogamos un sistema de coordenadas donde el gas no chocado se encuentra en reposo. En este nuevo sistema,

[†] El análisis matemático del problema fue desarrollado por primera vez y en forma independiente por Sedov (1959), Taylor (1950) y Stanyukovich (1960).

las condiciones de salto (3.14), (3.15) y (3.17) se escriben tomando a v_1 como la velocidad del choque y sustituyendo a la velocidad del gas chocado por $u_2 = v_2 - v_1$. De esta manera, las condiciones de salto en este nuevo sistema de coordenadas están dadas por

$$u_2 = \frac{2v_1}{(\kappa + 1)}, \quad (5.2)$$

$$p_2 = \frac{2v_1^2 \rho_1}{(\kappa + 1)}, \quad (5.3)$$

$$\rho_2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \rho_1. \quad (5.4)$$

Con las cantidades características E y ρ_1 y el tiempo t podemos construir el radio característico R del problema, este es el radio de la onda de choque y está dado por

$$R = \beta (E t^2 / \rho_1)^{1/5}. \quad (5.5)$$

De esta manera, la velocidad de propagación de la onda de choque está dada por

$$\dot{R} = \frac{2R}{5t} = \frac{2}{5} \beta (E/t^3 \rho_1)^{1/5}. \quad (5.6)$$

Ambas cantidades están determinadas por el análisis dimensional excepto por la constante β que está determinada por la energía del gas encerrada detrás de la onda de choque.

Por simplicidad normalicemos la variable de similaridad ξ de modo que cuando $\xi = 1$, entonces $r = R$, la posición de la onda de choque. De esta manera,

$$\xi = r/R(t) = \frac{r}{\beta} \left(\frac{\rho_1}{E t^2} \right)^{1/5}. \quad (5.7)$$

Con ayuda del teorema II de Buckingham escribamos ahora las cantidades u , p y ρ del gas chocado como productos de las variables r , t , el parámetro ρ_1 y las funciones adimensionales $U(\xi)$, $P(\xi)$ y $G(\xi)$ respectivamente,

$$u = \frac{2}{5} r U/t, \quad (5.8)$$

$$p = r^2 \rho_1 P/t^2, \quad (5.9)$$

$$\rho = \rho_1 G. \quad (5.10)$$

Cambiamos de variable hidrodinámica sustituyendo la presión p por la velocidad del sonido del medio chocado $a = \sqrt{\kappa p/\rho}$ de modo que se genere una nueva variable adimensional $Z(\xi)$ al escribir

$$a^2 = \frac{4}{25} \frac{r^2}{t^2} Z. \quad (5.11)$$

Las condiciones de frontera (5.2) a (5.4) del gas chocado ocurren cuando $\xi = 1$. Escritas en términos de

las funciones adimensionales toman la forma

$$\begin{aligned} U(1) &= 2 / (\kappa - 1), & G(1) &= \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}, \\ Z(1) &= 2\kappa(\kappa - 1) / (\kappa + 1)^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Al introducir las expresiones (5.8), (5.10) y (5.11) en el sistema de ecuaciones de movimiento (4.1) con simetría esférica, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d \ln \xi} + (U - 1) \frac{d \ln G}{d \ln \xi} &= -3U, \\ (U - 1) \frac{dU}{d \ln \xi} + \frac{Z}{\kappa} \frac{d \ln G}{d \ln \xi} + \frac{1}{\kappa} \frac{dZ}{d \ln \xi} &= -\frac{2}{\kappa} Z - U \left(U - \frac{5}{2} \right), \\ (\kappa - 1) Z \frac{d \ln G}{d \ln \xi} - \frac{dZ}{d \ln \xi} &= \left[\frac{2U - 5}{U - 1} \right] Z. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Estas ecuaciones muestran que al utilizar la variable Z en vez de la variable P las ecuaciones diferenciales son factores únicamente de U y Z . Esto simplifica el problema matemático considerablemente. En el caso particular de la explosión la conservación de la energía representa una integral de movimiento. Esto establece una función $Z(U)$ que reduce el problema a la integración sucesiva de ecuaciones de una sola variable.

Dentro del volumen delimitado por la onda de choque la energía E es constante. Este argumento puede extenderse de manera natural a cualquier superficie esférica con centro en el origen. Para esto se considera que dentro de una esfera que evoluciona de manera auto-similar, con radio $r = \xi_a t^{2/5}$ tal que $\xi_a < 1$, la energía contenida es también constante.

La conservación de la energía se establece igualando la cantidad de energía que entra a una superficie esférica con la que sale de ella. En un tiempo dt la esfera de radio r se expande un volumen $4\pi r^2 u_n dt$, con u_n la velocidad normal a la superficie. La densidad de energía en este volumen es $\rho(\varepsilon + u^2/2)$. De esta manera, el aumento de energía está dado por el producto $4\pi r^2 u_n (\varepsilon + u^2/2) dt$. Por otro lado, la energía que sale es el flujo de energía integrado en toda la esfera en un tiempo dt , i.e. $4\pi r^2 \rho u (u^2/2 + w) dt$. Al igualar ambas expresiones y sustituir las cantidades físicas por sus expresiones adimensionales dadas en las ecuaciones (5.7), (5.8) y (5.10) se obtiene la integral de movimiento (Landau y Lifshitz, 1987)

$$Z = \frac{\kappa(\kappa - 1)(1 - U)U^2}{2(\kappa U - 1)}. \quad (5.14)$$

La solución analítica completa al sistema de ecuaciones (5.13) se obtiene al utilizar la función $Z(U)$ de la ecuación anterior. De esta manera se encuentran las funciones exactas $G(\xi)$, $Z(\xi)$ y $U(\xi)$ (Sedov, 1959).

Todas estas soluciones dependen de la constante β introducida en la ecuación (5.5). Para encontrar su valor, se usa nuevamente la conservación de la energía. Integramos la densidad de energía desde el

punto central y hasta el radio de la onda de choque R ,

$$E = \int_0^R 4\pi r^2 \left(\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon \right) dr,$$

que en términos de las funciones adimensionales $G(\xi)$, $Z(\xi)$ y $U(\xi)$ resulta ser

$$1 = \int_0^1 \frac{16}{25} \beta^2 \pi G \left[\frac{1}{2} U^2 + Z/\kappa(\kappa - 1) \right] \xi^4 d\xi. \quad (5.15)$$

Debido a que las funciones $G(\xi)$, $Z(\xi)$ y $U(\xi)$ son conocidas, la ecuación (5.15) determina de manera única a la constante β , con lo cual el problema queda resuelto.

En el caso del aire, donde $\gamma = 7/5$, $\beta = 1.033$. Con este valor podemos calcular la energía liberada en la explosión de la figura II.1. Utilizando la ecuación (5.5) se encuentra que $E \approx 5 \times 10^{13}$ Joules ≈ 13.3 kilotons de TNT.

En resumen, hemos mostrado la solución al problema de una onda de choque fuerte expansiva. Para este caso, uno de los parámetros –la energía E de la explosión– determina la estructura del movimiento auto-similar y además genera una integral de movimiento que permite resolver el problema en forma analítica.

En la siguiente sección se presenta el problema de la onda de choque que converge hacia un punto. El problema es distinto a la explosión pero hereda las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera de la onda de choque esférica. En consecuencia la implosión presenta la misma estructura en la variable de similaridad.

§6. La onda de choque implosiva

Una onda de choque esférica convergente a un punto es el resultado del colapso de volúmenes esféricos de presión menor a la del medio en que se encuentran inmersos. Supongamos que una nube de gas esférica, cuya presión p_1 y densidad ρ_1 son constantes, se deposita en un medio donde el gas se encuentra a una presión p_2 .

En caso de que la presión del medio sea grande con respecto a p_1 , se genera una onda de choque que avanza hacia el centro de la nube (ver sección §3). Este proceso es llamado *implosión*. Las ondas de choque implosivas pueden formarse a partir de la evolución de discontinuidades débiles que crecen y se aceleran a medida que avanza el frente de onda (Welsh, 1967).

Cuando dos flujos por completo ajenos y de presión muy dispar entran en contacto, es posible que el salto en las cantidades hidrodinámicas genere una onda de choque. Sin embargo, para garantizar que las tres cantidades ostenten valores totalmente independientes de uno y otro lado de la discontinuidad, es necesaria la presencia de tres discontinuidades (Landau y Lifshitz, 1987): Una onda de choque fuerte que genere un salto de las tres cantidades ρ , p y v , una discontinuidad tangencial detrás de la onda de choque en la que el salto de densidad es arbitrario pero la presión es constante, y finalmente una onda de rarefacción que ajuste la presión entre el gas chocado y el ambiente. Si el valor de p_2 es tan grande

que

$$p_2 \gg \left[\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \right] \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{2\kappa/(\kappa+1)} p_1, \quad (6.1)$$

entonces se garantiza la formación de las tres discontinuidades. La onda de choque fuerte converge al punto en el origen de la esfera, y la onda de rarefacción avanza hacia el gas de mayor presión. En tal caso la nube se colapsa por completo al ser asaltada por el gas del medio circundante.

Existen diferentes situaciones astrofísicas en las que una implosión puede tener lugar. La implosión de nubes de materia interestelar, por ejemplo, ha sido un recurso utilizado para explicar la formación de estrellas jóvenes en regiones H II (Kimura y Tosa, 1990). En estos casos las ondas de choque implosivas son generadas en nubes de gas debido a la ionización de sus capas externas y el consecuente incremento en la presión. La llamada *implosión inducida por radiación* (RDI por sus siglas en inglés) ha sido analizada como mecanismo de formación estelar tomando en cuenta la ionización y la auto-gravedad del gas chocado (Kessel-Deynet y Burkert, 2003).

Nuestro objetivo en este trabajo es estudiar el efecto que tienen las altas presiones del gas de supernovas o de jets generados por radiogalaxias sobre una nube de gas interestelar inmersa en tales ambientes. El estudio de dichos efectos está motivado por las observaciones de radiación a lo largo del eje de los jets generados en radiogalaxias (ver Introducción).

La interacción del gas de un jet a alta presión con una nube puede imaginarse de la manera más simple como si la nube fuese depositada dentro del gas a alta presión. En otras palabras, olvidamos el efecto de la interacción del frente del jet con la nube y nos concentramos en los efectos del jet como el medio en que la nube está sumergida. Esto hace que se genere una onda de choque implosiva cuando la condición de la desigualdad (6.1) se satisface. La convergencia de una onda de choque implosiva hacia el origen es quizás un mecanismo que induce en la nube una inestabilidad gravitacional[†].

Las diferencias entre el problema de la implosión con la explosión no sólo atienden a la región de estudio (ver figura II.2), sino también a las cantidades características del problema. Las particularidades de la implosión limitan el análisis del flujo auto-similar a una solución numérica únicamente para en el caso de una densidad constante frente a la onda de choque.

Para evitar problemas en las condiciones iniciales supongamos que la discontinuidad es generada por un *pistón esférico* que empuja al fluido en reposo desde un radio infinito. En situaciones prácticas esta aproximación tiene validez en las últimas etapas del colapso (Zel'dovich y Raizer, 2002). Aquí la condición que rige la propagación de la onda es, como lo muestra la desigualdad (6.1), una diferencia de presiones suficientemente grande entre el fluido delante y detrás de la onda de choque.

Dado que las etapas del movimiento significativas son cercanas al colapso, la energía impartida por el pistón tiene ya poco impacto en el movimiento. Por otro lado, al considerar una onda de choque fuerte, la presión p_1 y la velocidad del sonido a_1 previas al choque son despreciables y no pueden ser consideradas como parámetros del flujo. La única cantidad característica es entonces la densidad ρ_1 del gas no chocado.

[†] La forma en como evaluamos el posible colapso gravitacional es estudiando la estabilidad de Jeans del gas chocado (ver capítulo V).

Las condiciones del flujo similar expuestas en la sección §4 requieren de dos parámetros característicos del problema. En este caso no es posible escribir la variable similar a partir de puros argumentos dimensionales. Sin embargo, las ecuaciones y condiciones de frontera son las mismas que en la explosión (c.f. sección §5). De manera totalmente análoga a la explosión, escojamos una variable de similaridad ξ como en la ecuación (5.7)

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad (6.2)$$

en donde $\xi = 1$ cuando $r = R$. Supóngase que el radio de la onda de choque $R(t)$ es una función de una potencia α del tiempo,

$$R = A t^\alpha. \quad (6.3)$$

En el caso de la explosión fuerte expuesta en la sección anterior, α tiene un valor de $2/5$ y el parámetro A es proporcional al cociente característico del problema: ρ_1 / E .

El índice de similaridad α para el caso de la implosión queda determinado por la condición de convergencia al centro de la onda de choque. La determinación de dicho exponente y la solución numérica del problema fue presentada por primera vez por Guderley (1942) y en forma independiente por Landau y Stanyukovich (Stanyukovich, 1960; Landau y Lifshitz, 1987).

Cuando $\alpha > 0$, la ecuación (6.3) implica que la onda de choque converge al centro de la esfera en $t = 0$. Como consecuencia, el análisis debe realizarse para tiempos $t < 0$. Por lo tanto escribimos

$$R(t) = A(-t)^\alpha. \quad (6.4)$$

Análogamente al problema de la explosión, escojamos valores de velocidad v , densidad ρ y velocidad



Figura II.2: En la explosión esquematizada en la figura izquierda el gas chocado está contenido en la esfera correspondiente a la onda de choque que evoluciona aumentando su radio. A la derecha se presenta una onda de choque implosiva. En este caso el gas chocado está fuera de la esfera y la onda de choque converge al centro de la nube.

del sonido a como se hizo en las ecuaciones (5.8), (5.9) y (5.10)

$$u = \alpha \frac{r}{t} U(\xi), \quad (6.5)$$

$$\rho = \rho_1 G(\xi), \quad (6.6)$$

$$a^2 = \alpha^2 \frac{r^2}{t^2} Z(\xi), \quad (6.7)$$

donde las tres funciones adimensionales U , G y Z son positivas para cualquier valor de ξ . Sustituyendo las cantidades anteriores en el sistema de ecuaciones (4.1), se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d \ln \xi} + (U-1) \frac{d \ln G}{d \ln \xi} &= -3U, \\ (U-1) \frac{dU}{d \ln \xi} + \frac{Z}{\kappa} \frac{d \ln G}{d \ln \xi} + \frac{1}{\kappa} \frac{dZ}{d \ln \xi} &= -\frac{2}{\kappa} Z + U \left(\frac{1}{\alpha} - U \right), \\ (\kappa-1) Z \frac{d \ln G}{d \ln \xi} - \frac{dZ}{d \ln \xi} &= \left[\frac{U-1/\alpha}{U-1} \right] Z. \end{aligned} \quad (6.8)$$

De aquí que utilizando la regla de Cramer se obtenga

$$\frac{dU}{d \ln \xi} = - \frac{[3U - 2(1-\alpha)/\alpha\kappa]Z - U(1-U)(1/\alpha - U)}{Z - (1-U)^2}, \quad (6.9)$$

$$(1-U) \frac{d \ln G}{d \ln \xi} = 3U + \frac{Z [3U - 2(1-\alpha)/\alpha\kappa] - U(1/\alpha - U)(1-U)}{(1-U)^2 - Z}, \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d \ln \xi} &= \left\{ \frac{2Z}{\kappa} [(1/\alpha - 1) + \kappa(1-U)] + (1-U)^2 \left[(3\kappa - 1)U - \frac{2}{\alpha} \right] - U(1/\alpha - U)(\kappa - 1) \right\} \times \\ &\times \frac{Z}{\Delta(1-U)}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

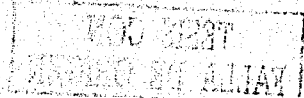
donde $\Delta = (1-U)^2 - Z$ es el Wronskiano del sistema, i.e. el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales (6.8).

Análogamente al caso de la explosión, las ecuaciones (6.13), (6.14) y (6.8) muestran que las derivadas de U , G y Z son funciones de U y Z únicamente. Escribimos entonces una función $Z(U)$ a partir de la derivada

$$\frac{dZ}{d \ln \xi} \bigg/ \frac{dU}{d \ln \xi} = \frac{dZ}{dU} = \frac{Z}{1-U} \left\{ \frac{[Z - (1-U)^2][2/\alpha - U(3\kappa - 1)]}{[3U - 2(1-\alpha)/(\alpha\kappa)]Z - U(1-U)(1/\alpha - U)} + \kappa - 1 \right\}. \quad (6.12)$$

Una vez resuelta esta ecuación, se pueden integrar sucesivamente las ecuaciones (6.9), (6.10) y (6.11) como ecuaciones de una sola variable.

Para integrar la expresión (6.12) establezcamos las condiciones de frontera para U y Z . La única frontera física del problema es la onda de choque que corresponde al valor $\xi = 1$, donde las cantidades



adimensionales U , Z y G toman los valores dados por las ecuaciones (5.12). Esto implica que el análisis puede extenderse a cualquier radio mayor a R y por lo tanto el intervalo de valores para la variable similar es $1 \leq \xi < \infty$.

Al integrar la ecuación (6.12) con las condiciones de frontera (5.12), se obtiene una familia de curvas $Z(U)$ dependientes del parámetro α . En el caso de la implosión, el valor del índice de similaridad α es único y queda determinado por el siguiente argumento físico.

Detrás de la onda de choque la velocidad del gas U y la velocidad del sonido Z no deben incrementarse. Esto implicaría un aumento en la energía que no es generada por fuente alguna. Por otra parte, en el gas chocado sólo existen gradientes negativos de estas cantidades hidrodinámicas. Para un tiempo fijo τ_0 en la evolución de la onda implosiva, $U = u\tau_0/\alpha r$ tiende asintóticamente a cero cuando r aumenta. Por lo tanto, en términos de la variable de similaridad ξ , este argumento genera la condición buscada (Landau y Lifshitz, 1987)

$$\frac{dU}{d\xi} < 0 \quad \forall \xi \quad \text{y} \quad U(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (6.13)$$

Del mismo modo, la variable $Z(\xi)$ obedece

$$\frac{dZ}{d\xi} < 0 \quad \forall \xi \quad \text{y} \quad Z(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (6.14)$$

Para la función G no es necesario establecer una condición extra ya que, como lo muestra la ecuación (6.6), $G(\xi)$ no depende explícitamente de r o de t .

Las condiciones (6.13) y (6.14) sobre las derivadas determinan de manera única al índice de similaridad. Para mostrar esto, observemos que estas condiciones implican que la derivada dZ/dU no debe cambiar de signo en el rango $1 \leq \xi < \infty$. En consecuencia U y Z , así como $Z(U)$ deben ser funciones univaluadas de ξ .

De las ecuaciones (6.9) y (6.12) se observa que cuando la derivada $dU/d\xi$ es negativa, entonces la derivada dZ/dU es positiva y por lo tanto $Z(\xi)$ también decrece. De esta manera, al construir una función $Z(U)$ monótona creciente, se garantiza un comportamiento decreciente en las funciones $U(\xi)$ y $Z(\xi)$.

Los extremos o *puntos singulares* de las funciones $U(\xi)$ y $Z(\xi)$ son aquellos puntos en donde su derivada se hace cero. Estos puntos deben evitarse si queremos garantizar que las funciones sean univaluadas para todo valor de ξ . Con esta condición, el numerador de las derivadas (6.9) y (6.11) debe anularse en los mismos puntos en que el denominador lo hace (Landau y Lifshitz, 1987). De esta manera se logra encontrar un valor único para el índice de similaridad α .

Construyamos ahora la curva $Z(U)$. Para esto grafiquemos los puntos singulares de la derivada dZ/dU . La figura II.3 muestra el plano fase UZ . En él la curva

$$[3U - 2(1 - \alpha)/(\alpha\kappa)]Z = U(1 - U)(1/\alpha - U), \quad (6.15)$$

está indicada con la línea de cuadros. A lo largo de esta función el denominador en la ecuación (6.12)

se anula.

En la misma gráfica se ha trazado con cruces la parábola sobre la cual se anula el numerador de esta misma derivada,

$$Z = (1 - U)^2. \quad (6.16)$$

De ahora en adelante llamaremos a las ecuaciones (6.15) y (6.16) *curvas cero* del numerador y del denominador.

La curva integral de la ecuación (6.12) debe comenzar en el punto $(U(1), Z(1))$ del plano fase y trazar una curva univaluada hasta el origen. Sin embargo, el punto inicial se encuentra sobre las curvas cero del numerador y del denominador. La curva integral debe cruzar alguno de los puntos de la intersección entre las curvas cero.

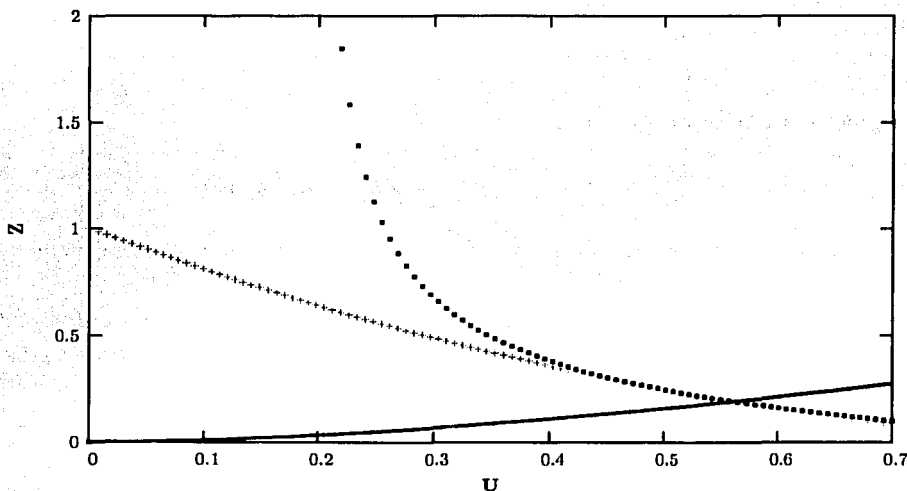


Figura II.3: La gráfica presenta el plano fase UZ . La línea continua es la curva integral de la ecuación diferencial (6.12). Dicha curva $Z(U)$ interseca en un mismo punto (U^*, Z^*) a las curvas cero del numerador (línea de cruces) y del denominador (línea de cuadros) de la ecuación diferencial dZ/dU .

Las curvas cero se intersectan en tres puntos de los cuales $U = 1, Z = 0$ es descartado porque la curva integral que toque ese punto no converge al origen en forma univaluada. Los otros dos puntos están determinados por

$$U_{\pm} = \frac{\kappa(1 - 3\alpha) + \alpha - 1 \pm \sqrt{[\kappa(1 - 3\alpha) + \alpha - 1]^2 - 8(1 - \alpha)(2\alpha\kappa)}}{-4\alpha\kappa}, \quad Z_{\pm} = (1 - U_{\pm})^2. \quad (6.17)$$

Uno de estos puntos interseca a la curva univaluada $Z(U)$ que va al origen. Esta última curva está representada por una línea continua en la figura II.3. El *punto crítico* de intersección (U^*, Z^*) no representa

un extremo de la función $Z(U)$ pero si es un punto silla del plano fase (Hirschler y Gretler, 2001).

Para obtener la integral $Z(U)$ de la ecuación (6.12) se utilizó el método de Runge-Kutta de 4º orden sobre la variable U . Se integraron curvas con valores iniciales dados por las ecuaciones (5.13) para distintos valores del índice de similaridad α . La curva $Z(U)$ es aquella que termina en el origen del plano fase UZ y cuya distancia al punto crítico (U^*, Z^*) sea mínima.

En todos los casos se ha observado que es sólo uno de los dos puntos en la expresión (6.17) el que intersecta la curva que termina en el origen (ver figura II.4). Esto determina en forma única el valor del índice de similaridad para cada κ . Los valores de los índices de similaridad α para diversos índices politrópicos κ se muestran en la tabla II.1.

κ	α	ξ_s
5/3	0.68837	1.094
7/5	0.71713	1.084
3	0.63871	1.088

Tabla II.1: Índices de similaridad α para la implosión para diversos gases con índices politrópicos κ . El valor ξ_s de la variable de similaridad es tal que el anillo de similaridad detrás de la onda de choque está limitado por $\xi = 1$ y $\xi = \xi_s$.

Una vez obtenido el valor para el índice de similaridad α , se integra la curva univaluada $U(Z)$. Utilizando esta curva la solución al sistema de ecuaciones (6.8) se obtiene de manera única.

Utilizando nuevamente el método de Runge-Kutta se ha integrado este sistema de modo que se obtienen numéricamente las curvas $U(\xi)$, $Z(\xi)$ y $G(\xi)$. Con esto y utilizando las ecuaciones (5.8) a (5.11), las cantidades hidrodinámicas quedan determinadas. Los perfiles graficados en las figuras II.5, II.6 y II.7 muestran los resultados de estas integraciones. Se observa en ellos que la onda de choque se acelera a medida que se aproxima al origen. Por su parte, la presión y la temperatura tienden a valores infinitos en el momento del colapso ($t = 0$). Es importante notar que la densidad detrás del choque crece a un valor finito detrás del choque. En el caso de un gas monoatómico la densidad límite $\rho_\infty = \rho(r \rightarrow \infty)$ es tal que

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_1} = 9.25. \tag{6.18}$$

Para un gas diatómico la densidad aumenta por un factor de 20.1 para distancias suficientemente grandes detrás del choque.

En la solución hemos supuesto la existencia de una cantidad característica A que determina la variable similar del movimiento. Aún cuando no se tiene una expresión explícita para dicha cantidad, se cuenta ya con las dimensiones de esta: $[A] = T^\alpha/L$. Lo relevante del tratamiento presentado es que esta ambigüedad se ve superada en el desarrollo al basarnos en consideraciones físicas que generan la implosión.

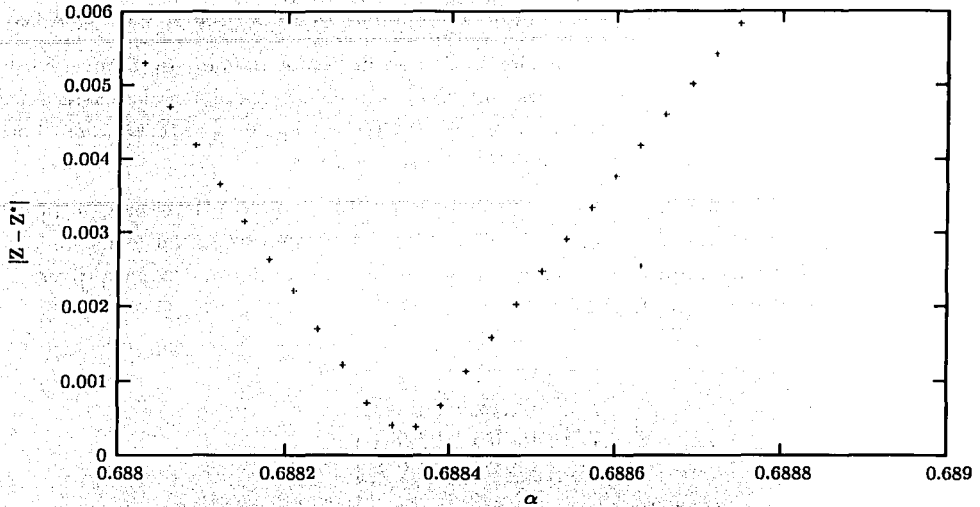


Figura II.4: En el eje vertical de la gráfica se presenta la diferencia en Z entre el punto crítico (U^* , Z^*) y las curvas $Z(U)$ para distintos valores del índice de similitud α (abscisas) en un gas monoatómico ($\kappa = \frac{5}{3}$). Sólo para el valor $\alpha = 0.68837$ la diferencia es mínima. Con dicho valor se genera la curva que pasa por el punto crítico.

§7. Características de la solución similar

Los perfiles de velocidad y presión que se muestran en las figuras II.5 y II.7 indican que conforme el tiempo avanza, la densidad de energía aumenta. En su trayecto convergente, la onda de choque no sólo se acelera aumentando la velocidad del gas chocado. Además, debido al constante incremento de la presión p en un anillo de radio cada vez menor, la energía se concentra cada vez más.

Es importante primeramente limitar la región de influencia de la onda de choque en el flujo similar. En la solución obtenida en la sección anterior, los perfiles de las cantidades hidrodinámicas se extienden a radios infinitos. Sin embargo, en una implosión real no todo el gas detrás de la onda de choque ha sido chocado por la misma. En el análisis de las curvas características $r = A\xi t^\alpha$ que corresponden a valores constantes de la variable similar, Zel'dovich y Raizer (2002) determinaron los valores ξ para los cuales las curvas características se originan en la onda de choque. Sólo estas curvas con origen en el frente de onda tienen la influencia del mismo. En otras palabras, en el momento del colapso $t = 0$, sólo las regiones que al tiempo $t = t_0$ tienen radio menor a $r = \xi_s R(t_0)$ alcanzan el origen. El resto del flujo no intersecta al choque en el proceso de implosión, de modo que la solución en tales regiones no tiene sentido físico en el momento del colapso. De esta forma la región de influencia de la onda de choque queda limitada a un anillo definido entre los valores $\xi = 1$ y ξ_s tal que

$$[U(\xi_s) - 1]^2 = Z(\xi_s). \quad (7.1)$$

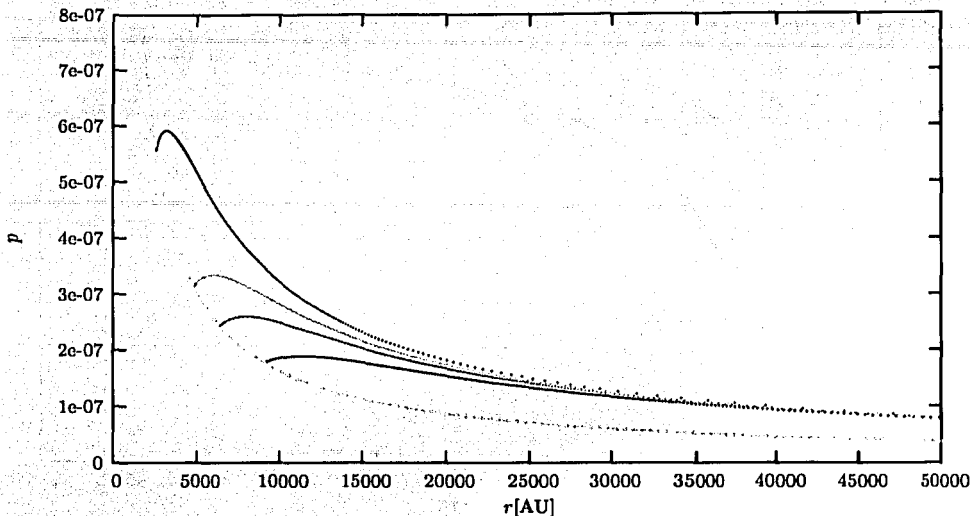


Figura II.5: Distribución de la presión p medida en Pascales como función del radio en Unidades Astronómicas para el gas monoatómico que sigue a la onda de choque. La onda implosiva tiene origen en un radio $R_0 = 1$ pc. y es generada por una presión externa inicial de 10^{-8} Pa. La onda de choque avanza sobre una nube de hidrógeno cuya densidad de partículas es de 100 cm^{-2} . Las curvas de izquierda a derecha muestran perfiles para tiempos anteriores al colapso de $t_1 = 4$ años, $t_2 = 10$ años, $t_3 = 15$ años, y $t_4 = 25$ años respectivamente. La curva envolvente indica los valores de presión para el gas justo detrás del frente de onda en $r = R$. Conforme el frente de onda reduce su radio $R \rightarrow 0$, la presión aumenta ilimitadamente.

La banda o *cascarón de similaridad* (i.e. la región variable entre $r = R$ y $r = \xi_s R > R$) es la región en la que un flujo real se comporta de manera auto-similar. La Tabla II.1 muestra los valores aproximados que satisfacen esta igualdad para diversos valores del índice politrópico κ .

La energía contenida en el volumen del cascarón de similaridad está dada por

$$\begin{aligned}
 E_{sim} &= \int_R^{r_1} 4\pi r^2 \rho \left(\frac{1}{\kappa(\kappa-1)} a^2 + \frac{u^2}{2} \right) dr, \\
 &= 4\pi R^3 \dot{R}^2 \rho_1 \int_1^{\xi_s} G \left[Z \frac{1}{\kappa(\kappa-1)} + \frac{1}{2} V^2 \right] \xi^2 d\xi. \tag{7.2}
 \end{aligned}$$

La integral de la ecuación (7.2) es una constante. Además, en virtud de la ecuación (6.2) se tiene que el factor $R^3 \dot{R}^2 = \alpha^2 R^5 / (-t)^2 = \alpha^2 R^{5-2/\alpha} / A$ decrece con el tiempo y tiende a cero cuando $R \rightarrow 0$, por lo tanto $E_{sim} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$.

En este capítulo hemos considerado una onda de choque implosiva generada en infinito. Esto indica que el flujo auto-similar se alcanza en las últimas etapas del movimiento que corresponden al *flujo límite*. Aquí las condiciones iniciales del flujo no tienen gran influencia sobre su comportamiento. Podemos, sin embargo, distinguir cada uno de los casos a través del parámetro libre A definido mediante la ecuación

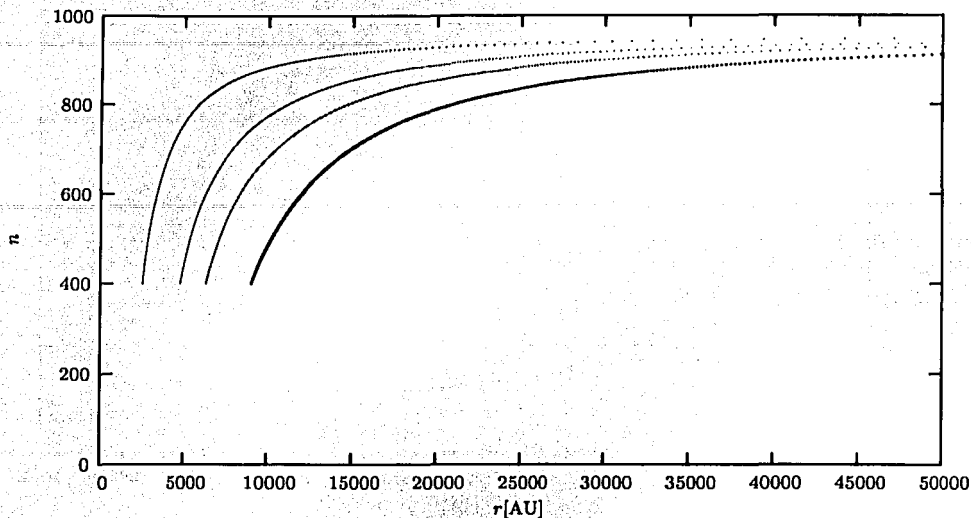


Figura II.6: Perfiles de densidad de partículas n como función del radio en U.A. para una onda de choque con las características del caso mostrado en la figura II.5. Nuevamente de izquierda a derecha, los perfiles representan tiempos de $t_1 = 4$ años, $t_2 = 10$ años, $t_3 = 15$ años, y $t_4 = 25$ años antes del momento en que la onda de choque se reduce a un punto en el centro de la nube.

(6.4). Este parámetro es libre en el modelo y varía en cada caso. Los valores que toma se determinan a través de condiciones definidas en cierto momento. En particular, podemos introducir las condiciones iniciales en el parámetro A .

Con el modelo descrito en este capítulo se han simulado ondas de choque implosivas en ambientes astrofísicos. Un análisis de la estabilidad gravitacional de una nube en el proceso de implosión se discutirá en el capítulo V.

Para terminar con el análisis de la implosión auto-similar es importante mencionar los límites de la solución obtenida.

De la figura II.7 se observa que el flujo en la onda de choque toma velocidades comparables e incluso superiores a la de la luz. La curva envolvente de la figura II.7, que representa la velocidad del frente de onda como función del radio, es una hipérbola que diverge cuando $r \rightarrow 0$. Esto entra en contradicción con los postulados de la teoría de la relatividad y constituye una motivación para considerar el caso relativista del problema presentado.

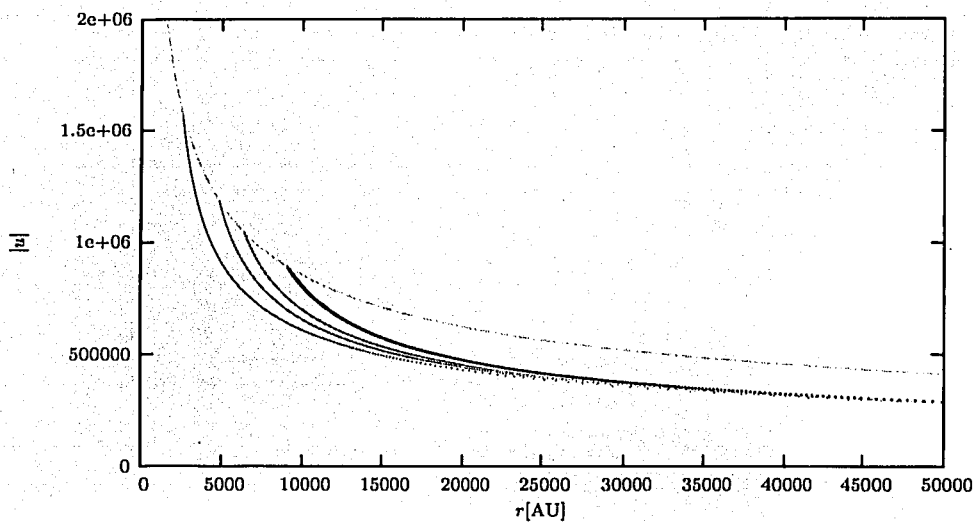


Figura II.7: Perfiles de velocidad u en m s^{-1} como función del radio en U.A. para una onda de choque con las características del caso mostrado en la figura II.5. La velocidad del flujo es negativa y se grafica el valor absoluto que ilustra la disminución de la magnitud conforme aumenta el radio. De izquierda a derecha, los perfiles representan tiempos de $t_1 = 4$ años, $t_2 = 10$ años, $t_3 = 15$ años, y $t_4 = 25$ años respectivamente antes del momento de convergencia al centro. La curva envolvente representa la velocidad del gas justo detrás del frente de onda en $r = R$. Nuevamente la velocidad aumenta sin límite cuando el choque se concentra en el punto central.

Capítulo III

Hidrodinámica relativista

The views of space and time which I wish to lie before you have sprung from the soil of experimental physics, and therein lies their strength. They are radical. Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality.

Hermann Minkowski

Cuando un gas desarrolla velocidades del flujo cercanas a la de la luz, $v \gtrsim c$, su estudio debe incluir los efectos relativistas del movimiento. Igualmente, en caso de que la energía interna por unidad de volumen ϵ sea comparable a la energía en reposo del gas ρc^2 , deben considerarse las cantidades definidas en forma relativista. En ambos casos la herramienta que describe el flujo de tales gases es la hidrodinámica relativista.

En este capítulo se presentan las ecuaciones de la hidrodinámica relativista. Con ellas se establecen, mediante leyes de conservación, las condiciones de salto para una onda de choque relativista.

§8. Ecuaciones de flujo relativista

En la mecánica relativista, en un espacio-tiempo plano y en ausencia de gravedad, las ecuaciones de campo para un sistema cerrado están determinadas por la divergencia del *tensor de energía-momento* (Landau y Lifshitz, 1994),

$$\frac{\partial T_{\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{c} \frac{\partial T_{\alpha}^0}{\partial t} + \frac{\partial T_{\alpha}^i}{\partial x^i} = 0, \quad (8.1)$$

donde T^{00} representa la densidad de energía relativista. El vector $(1/c) T^{i0}$ representa la densidad de momento. El vector $c T^{0i}$, el flujo de energía en la unidad de tiempo a través del área unitaria perpendicular a la dirección x^i . El tensor T^{ij} representa el flujo de la componente i -ésima del momento por unidad de tiempo en la dirección perpendicular al área unitaria cuyo vector normal es x^j .

Por lo tanto, la componente temporal de la ecuación (8.1) representa la conservación de la energía y las tres componentes espaciales representan la conservación del momento.

En hidrodinámica, construimos el tensor de energía-momento en el sistema de referencia propio (i.e., aquel en el que el fluido se encuentra en reposo). La densidad de energía por unidad de volumen propio un fluido es $T^{00} = e^\dagger$. Adicionalmente, dado que el fluido está en reposo, la densidad de momento en este sistema es nula $T^{0\alpha} = 0$.

Consideremos $da^j = da_j$, el elemento de área correspondiente a una superficie tridimensional fija que encierra al volumen Ω . Al integrar la ecuación (8.1) sobre el volumen fijo Ω se tiene que

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T_i^0 dV = - \int_{\Omega} \frac{\partial T_i^j}{\partial x^j} dV = - \oint_{\partial\Omega} T_i^j da_j, \quad (8.2)$$

donde se ha aplicado el teorema de Gauss al miembro derecho de la igualdad. De aquí que el mismo miembro derecho corresponda al flujo de momento sobre la superficie envolvente $\partial\Omega$. En otras palabras, la fuerza sobre un elemento de superficie da_j es $T_i^j da_j$. Dicha fuerza en el sistema de referencia propio sigue la ley de Pascal: *la presión ejercida por una porción de fluido es igual en todas direcciones y perpendicular a la superficie sobre la que actúa*. Matemáticamente esto es $T_i^j da_j = p da^i$ donde p es la presión del fluido. Esto implica que $T_i^j = p\delta_i^j$, con lo cual quedan determinadas el resto de las componentes del tensor en el sistema de referencia propio (Landau y Lifshitz, 1994)

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

La forma de escribir $T^{\alpha\beta}$ en un sistema de referencia cualquiera se encuentra utilizando el cuadri-vector de velocidad

$$u^\alpha = \left(\gamma, \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \right), \quad (8.4)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad del fluido y $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ es el factor de Lorentz del fluido. En el sistema de referencia propio, $u^0 = 1$ y $u^i = 0$. Con este vector se puede escribir el tensor de energía-momento en el sistema propio como

$$T^{\alpha\beta} = \omega u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}, \quad (8.5)$$

donde $\omega = e + p$ es la entalpía por unidad de volumen medida en el sistema de referencia propio. Dado que una igualdad tensorial en relatividad es válida para cualquier sistema de referencia, la ecuación (8.5) resulta ser la forma general del tensor de energía-momento para un fluido ideal.

A las ecuaciones de conservación (8.1) debemos agregar una *ecuación relativista de continuidad* o conservación de la masa. Denotamos con n el número de partículas por unidad de volumen propio. En el sistema de laboratorio, cada partícula se mueve con una velocidad v y la densidad de partículas

[†] la energía relativista incluye un término de energía en reposo. En la notación del I, $e = \epsilon + \rho c^2$

medida en dicho sistema es γn . El número de partículas contenido en un volumen Ω fijo en el sistema de referencia del laboratorio es entonces

$$\int_{\Omega} \gamma n dV.$$

El número total de partículas que sale del volumen Ω por unidad de tiempo es

$$\oint_{\delta\Omega} \gamma n \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a},$$

donde $\delta\Omega$ es la superficie frontera de Ω . Por otro lado, la tasa de decremento de partículas en dicho volumen es

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \gamma n dV.$$

Si no existen fuentes o sumideros de partículas en este volumen, las dos cantidades anteriores se igualan en la forma integral de la ecuación de conservación del número de partículas

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\gamma n) dV = -\frac{1}{c} \oint_{\delta\Omega} \gamma n \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \nabla \cdot [\gamma n \mathbf{v}] dV. \quad (8.6)$$

Como esta última igualdad es válida para cualquier volumen fijo Ω , los integrandos son iguales de modo que la ecuación anterior es

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\gamma n) = -\frac{1}{c} \nabla \cdot [\gamma n \mathbf{v}]. \quad (8.7)$$

En términos de cuadvectores la ecuación de conservación del número de partículas o ecuación de continuidad se escribe (Landau y Lifshitz, 1987),

$$\frac{\partial n^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0. \quad (8.8)$$

Las ecuaciones (8.1) y (8.8) que describen la dinámica del flujo relativista pueden escribirse en varias formas indicando distintas características del movimiento. Proyectemos la ecuación (8.1) a lo largo del vector u^{α} , i.e., tomemos el producto escalar de u^{α} con la ecuación (8.1). Utilizando el hecho de que $u^{\alpha} u_{\alpha} = 1$, se tiene que

$$\frac{\partial \omega u^{\beta}}{\partial x^{\beta}} - u^{\beta} \frac{\partial p}{\partial x^{\beta}} = 0.$$

Con ayuda de la ecuación de continuidad (8.8), la ecuación anterior puede escribirse como

$$n u^{\beta} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(\frac{\omega}{n} \right) - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x^{\beta}} \right] = 0. \quad (8.9)$$

En el caso relativista, la primera ley de la termodinámica está dada por

$$d\left(\frac{\omega}{n}\right) = Td\left(\frac{\sigma}{n}\right) + \frac{1}{n}dp, \quad (8.10)$$

donde T representa la temperatura y σ es la entropía por unidad de volumen propio. De aquí observamos que la ecuación (8.9) expresa la conservación de la entropía específica (Mendoza, 2000)

$$nT u^\beta \frac{\partial(\sigma/n)}{\partial x^\beta} = nT \frac{1}{c} \frac{d(\sigma/n)}{dt} = 0, \quad (8.11)$$

en donde

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} = u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \nabla,$$

es la derivada total o Lagrangiana en la hidrodinámica relativista. La igualdad (8.11) indica que el movimiento se desarrolla de manera adiabática sobre la línea-universo del flujo.

Del desarrollo anterior es importante notar que en la descripción del movimiento adiabático podemos utilizar alternativamente la ecuación de continuidad (8.8) o la conservación de la entropía (8.11).

Para terminar esta sección introducimos la velocidad del sonido en hidrodinámica relativista. Las ecuaciones (8.1) para un flujo unidimensional a lo largo de la coordenada r son

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\beta \frac{p+e}{1-\beta^2} \right) + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k \beta^2 \frac{p+e}{1-\beta^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (8.12)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e+\beta^2 p}{1-\beta^2} \right) + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k \beta \frac{p+e}{1-\beta^2} \right] = 0, \quad (8.13)$$

donde $\beta = v/c$ es la velocidad del flujo normalizada por la velocidad de la luz, y k toma valores 0, 1 y 2 para movimientos con simetría plana, cilíndrica y esférica respectivamente.

Consideremos ahora las cantidades $p = p_0 + \hat{p}$ y $e = e_0 + \hat{e}$, donde \hat{e} y \hat{p} son perturbaciones de una distribución estática de energía e_0 y presión p_0 . En tal caso, la velocidad del flujo es $v = v_0 + \hat{v} = \hat{v}$.

Substituyendo estas cantidades en las ecuaciones (8.12) y (8.13) se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{e_0 + p_0}{c^2} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \hat{e}}{\partial t} + (e_0 + p_0) \frac{1}{r^k} \frac{\partial r^k \hat{v}}{\partial r} &= 0. \end{aligned}$$

Igualando la divergencia de la primera con la derivada temporal de la segunda, se encuentra que

$$\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \right].$$

Al escribir $\hat{e} = (\partial e / \partial p)_\sigma \hat{p}$ se obtiene la ecuación de onda para la presión \hat{p} , o alternativamente para la

energía \hat{e} . En ambos casos la velocidad de propagación de la onda es la velocidad del sonido a , tal que

$$a^2 = c^2 \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_\sigma \quad (8.14)$$

Esta velocidad característica del medio es útil como parámetro en el estudio de las discontinuidades. Como veremos, al igual que en el caso no-relativista la velocidad del gas que atraviesa una onda de choque cambia de supersónica a subsónica.

§9. Ondas de choque relativistas

Como en el caso no-relativista, los flujos relativistas presentan discontinuidades generadas por gradientes de presión suficientemente grandes. En el espacio-tiempo de Minkowski, tal discontinuidad está representada por una hipersuperficie (McKee y Colgate, 1973), que se reduce a una línea-universo para un flujo unidimensional (ver figura III.1).

Sobre esta línea de universo en que la presión varía de manera discontinua. Cuando un elemento de fluido atraviesa la onda de choque, las cantidades hidrodinámicas cambian de modo que la entropía aumenta. Utilizando subíndices 1 y 2 para las cantidades antes y después de la onda de choque respectivamente, esto quiere decir que

$$\sigma_1 < \sigma_2. \quad (9.1)$$

Tal desigualdad determina la forma en que cambian el resto de las cantidades hidrodinámicas (Taub, 1967). En el sistema de referencia de la onda de choque, la velocidad del fluido satisface las siguientes desigualdades

$$v_1 > a_1, \quad a_2 > v_2.$$

De igual modo, el aumento de entropía implica que la densidad de partículas y la presión aumentan. Esto es

$$n_1 < n_2, \quad p_2 > p_1,$$

lo que indica el sentido de movimiento de la onda de choque.

Los cambios en las cantidades hidrodinámicas no son arbitrarios. El flujo de momento, energía y masa debe ser conservado a través de la hipersuperficie de discontinuidad. Para escribir las condiciones de salto seguimos el método presentado por McKee y Colgate (1973). Consideramos una hipersuperficie cerrada Φ sobre la línea de universo de la discontinuidad (ver figura III.1). En ella integraremos las

ecuaciones de conservación (8.8), (8.12) y (8.13) reescribiéndolas de la forma

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\beta \frac{p + \epsilon + \rho c^2}{1 - \beta^2} \right) + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k \frac{p + \beta^2(\epsilon + \rho c^2)}{1 - \beta^2} \right] - \frac{kp}{r} = 0, \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\epsilon + \beta^2 p + \rho c^2 [1 - \sqrt{1 - \beta^2}]}{1 - \beta^2} \right\} + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^k \beta \frac{p + \epsilon + \rho c^2 [1 - \sqrt{1 - \beta^2}]}{1 - \beta^2} \right\} = 0, \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k \beta \frac{\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] = 0, \quad (9.4)$$

donde $\rho = mn$ es la densidad de partículas con masa m y $\epsilon = e - \rho c^2$ es la energía interna por unidad de volumen propio.

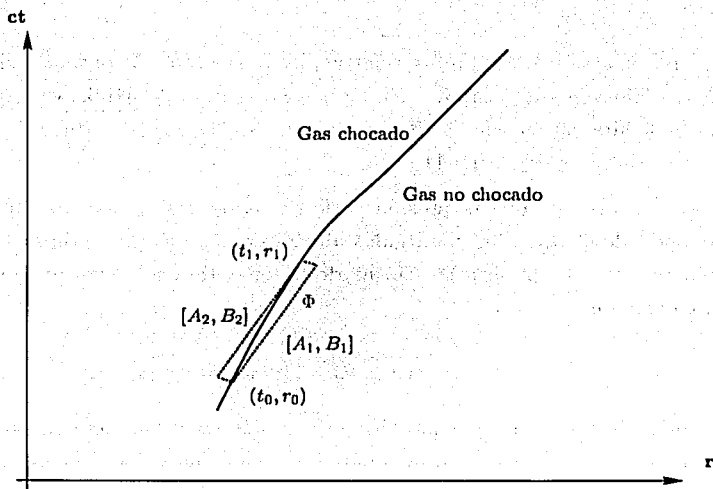


Figura III.1: La línea continua representa la línea de universo de la onda de choque para el espacio de Minkowski. Las condiciones de salto en el choque se establecen integrando sobre el volumen Φ representado por la línea punteada. Las cantidades hidrodinámicas del fluido cambian de valores $[A_1, B_1]$ a valores $[A_2, B_2]$ cuando atraviesan la superficie de discontinuidad.

Las tres ecuaciones anteriores poseen la misma estructura. Cada una se puede escribir como la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (r^k A) + \frac{\partial}{\partial r} (r^k B) + C = 0,$$

donde $\tau = ct$. A y B son funciones de r y t .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Integremos esta ecuación sobre la hipersuperficie Φ que encierra la discontinuidad (ver figura III.1),

$$\int_{\Phi} \int \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (r^k A) + \frac{\partial}{\partial r} (r^k B) + C \right] dr d\tau = 0. \quad (9.5)$$

A través del teorema de Green, esta integral se transforma a

$$\oint_{\partial\Phi} (r^k A dr - r^k B d\tau) + \int_{\Phi} \int C d\tau dr. \quad (9.6)$$

El volumen de integración Φ se ha trazado de modo que los segmentos normales a la línea-universo de la discontinuidad son pequeños comparados con los paralelos a la misma. En consecuencia, si todas las cantidades en los integrandos de la ecuación (9.6) son finitas en la discontinuidad, la integración sobre los segmentos de menor longitud en (9.6) será despreciable al integrar sobre la hipersuperficie $\partial\Phi$. Por otra parte, la integral sobre el volumen Φ es también una cantidad de orden superior a la integral de superficie (puesto que dr y $d\tau$ son cantidades de primer orden). De esta manera, la integral sobre Φ en la ecuación (9.6) es despreciable frente a la integral sobre $\partial\Phi$. Por último, cuando el volumen Φ tiende a cero, la coordenada r en el contorno de integración puede tomarse como constante a primer orden en cada segmento. Por lo tanto, la integral (9.6) a primer orden se reduce a

$$\oint_{\partial\Phi} (-A dr + B d\tau) \approx -[A_1(r_1 - r_0) - A_2(r_1 - r_0)] + B_1(\tau_1 - \tau_0) - B_2(\tau_1 - \tau_0) = 0, \quad (9.7)$$

donde los puntos (r_0, τ_0) y (r_1, τ_1) se encuentran sobre la línea de universo de la onda de choque. Esto implica que el cociente

$$\beta_s = \frac{\tau_1 - \tau_0}{r_1 - r_0}, \quad (9.8)$$

representa la velocidad de la onda de choque dividida entre c . Con esto, la ecuación (9.7) toma la forma

$$\beta_s \delta A = \delta B, \quad (9.9)$$

donde $\delta Q \equiv Q_2 - Q_1$, para cualquier función $Q(r, t)$.

Sustituyendo $A(r, t)$ y $B(r, t)$ por sus valores correspondientes en cada una de las ecuaciones (9.2) a (9.4), se obtiene

$$\beta_s \delta \left[\frac{\beta p + \epsilon + \rho c^2}{1 - \beta^2} \right] = \delta \left[\frac{p + \beta^2(\epsilon + \rho c^2)}{1 - \beta^2} \right], \quad (9.10)$$

$$\beta_s \delta \left\{ \frac{\epsilon + \beta^2 p + \rho c^2 [1 - \sqrt{1 - \beta^2}]}{1 - \beta^2} \right\} = \delta \left\{ \beta \frac{p + \epsilon + \rho c^2 [1 - \sqrt{1 - \beta^2}]}{1 - \beta^2} \right\}, \quad (9.11)$$

$$\beta_s \delta \left[\frac{\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] = \delta \left[\beta \frac{\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right]. \quad (9.12)$$

Estas son las condiciones de salto o condiciones de Taub representadas en un sistema de referencia inercial arbitrario. Las relaciones (9.10) a (9.12) son válidas sobre una discontinuidad unidimensional con cualquier simetría. En el sistema de referencia propio del gas no chocado tenemos que $\beta_1 = 0$ y las relaciones anteriores toma la forma

$$\beta_s \beta_2 \frac{p_2 + \epsilon_2 + \rho_2 c^2}{1 - (\beta_2)^2} = \frac{p_2 + (\beta_2)^2 (\epsilon_2 + \rho_2 c^2)}{1 - (\beta_2)^2} - p_1, \quad (9.13)$$

$$\beta_s \left[\frac{\epsilon_2 + \beta_2^2 p_2 + \rho_2 c^2 \left[1 - \sqrt{1 - (\beta_2)^2} \right]}{1 - (\beta_2)^2} - \epsilon_1 \right] = \beta_2 \frac{p_2 + \epsilon_2 + \rho_2 c^2 \left[1 - \sqrt{1 - (\beta_2)^2} \right]}{1 - (\beta_2)^2}, \quad (9.14)$$

$$\beta_s \left(\frac{\rho_2}{\sqrt{1 - (\beta_2)^2}} - \rho_1 \right) = \left[\beta_2 \frac{\rho_2}{\sqrt{1 - (\beta_2)^2}} \right]. \quad (9.15)$$

De aquí se sigue en particular que (McKee y Colgate, 1973)

$$\beta_s - \beta_2 = \frac{\beta_2 (1 - (\beta_2)^2)}{(\beta_2)^2 p_2 + \epsilon_2 + \rho_2 c^2 \left[1 - \sqrt{1 - (\beta_2)^2} \right] - \epsilon_1 (1 - (\beta_2)^2)}, \quad (9.16)$$

$$\epsilon_2 = \rho_2 c^2 [\gamma_2 - 1] + \frac{\beta_s \epsilon_1 + \beta_2 p_1}{\beta_s - \beta_2}, \quad (9.17)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\beta_s}{\beta_s - \beta_2} \frac{1}{\gamma_2} = \gamma_2 \left[\frac{p_2 + \epsilon_2}{p_2 + \epsilon_1} \right] + \left[\frac{\rho_2 c^2}{p_2 + \epsilon_1} (\gamma_2 - 1) \right]. \quad (9.18)$$

Al combinar las dos últimas igualdades se obtiene la condición de brinco para la densidad de energía

$$e_2 = \epsilon_2 + \rho_2 c^2 = \rho_2 c^2 \gamma_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \gamma_2 \epsilon_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} p_1 \frac{\beta_2}{\beta_s} \gamma_2,$$

de modo que la energía por unidad de masa inmediatamente después del choque es entonces

$$\frac{e_2}{\rho_2} = \frac{\gamma_2}{\rho_1} \left[\epsilon_1 + p_1 \frac{\beta_2}{\beta_s} \right]. \quad (9.19)$$

Para una onda de choque fuerte en donde p_1 y ϵ_1 son despreciables en comparación con p_2 y e_2 respectivamente, la igualdad (9.17) se reduce a

$$\epsilon_2 = \rho_2 c^2 (\gamma_2 - 1). \quad (9.20)$$

Con esto se puede escribir el contraste de densidades ρ_2/ρ_1 para una onda de choque fuerte como

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{\gamma_2} \left[\gamma_2 (p_2 + \epsilon_2) + \epsilon_2 \right]. \quad (9.21)$$

Cuando el gas chocado es un gas politrópico, entonces $p = (\kappa - 1)\epsilon^\dagger$ y por lo tanto la ecuación

anterior toma la forma

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \gamma_2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} + \frac{1}{\kappa - 1}. \quad (9.22)$$

Las condiciones de salto en la discontinuidad fuerte son válidas en el límite cuando $c \rightarrow \infty$ para un gas politrópico no-relativista. En tal caso el índice politrópico es $\kappa = 5/3$. Cuando el movimiento microscópico del gas es relativista, el índice politrópico es $\kappa = 4/3$ y la relación politrópica $p = e/3$, incluye a la energía en reposo del gas. En este caso las ecuaciones (9.16) a (9.18) implican que

$$\Gamma_s = \frac{\gamma_2}{\sqrt{1 - 2(\kappa - 1)/\kappa}}, \quad (9.23)$$

donde Γ_s es el factor de Lorentz de la onda de choque.

En el siguiente capítulo analizamos el problema de la implosión relativista partiendo de condiciones de frontera simplificadas al caso de un gas en el límite ultra-relativista. Esta última característica no sólo limita los casos de aplicación del análisis sino que también excluye la posibilidad de considerar el caso no-relativista como un límite del proceso a velocidades del flujo mucho menores a la velocidad de la luz.

En general, κ no es el cociente de calores específicos y la relación $p = (\kappa - 1)\epsilon$ es válida para valores κ entre 4/3 y 5/3 dependiendo de la composición de las partículas del gas (Weinberg, 1972).

Capítulo IV

La implosión relativista

Los indecisos suelen ser muy perseverantes, porque si abandonaran su búsqueda tendrían que tomar otra resolución.

Giacomo Leopardi

Lo que probablemente distorsiona todo en la vida es que uno está convencido de que dice la verdad sólo porque dice lo que piensa.

Sacha Guitry

En el estudio de las explosiones más energéticas que tienen lugar en el cosmos se deben de tomar en consideración efectos relativistas para analizar la dinámica del gas lanzado hacia el exterior. El análisis relativista de estas explosiones propuesto por (Blandford y McKee, 1976; Eltgroth, 1972) explica los fenómenos de explosiones de rayos γ que llegan a producir energías de hasta 10^{50} ergs.

Haciendo una generalización del trabajo de Blandford y McKee, exponemos en este capítulo la solución al problema de la implosión relativista. Apoyándonos en argumentos análogos a los utilizados en el caso no-relativista o *Newtoniano*, derivamos una solución al problema del colapso de una nube de gas inducido por una onda de choque implosiva relativista.

§10. La explosión auto-similar relativista

La necesidad del tratamiento relativista en una explosión surge cuando la descripción no-relativista del problema entra en contradicción con los postulados de la teoría de la relatividad. En efecto, consideremos una explosión en la cual se libera una energía E de tal forma que

$$E \gtrsim V \rho_1 c^2 + Mc^2,$$

donde V es el volumen barrido por la explosión, ρ_1 es la densidad del gas aún no chocado y M es la masa de los productos de la explosión. En este caso, la onda de choque se desplaza con velocidades relativistas (Blandford y McKee, 1976).

Como vimos en la sección §9, una onda de choque relativista se considera fuerte cuando la energía e_1 y la presión p_1 antes del choque son despreciables con respecto a las mismas cantidades del gas

chocado. En otras palabras, para generar una onda de choque fuerte debe existir una discontinuidad suficientemente grande en la energía cinética promedio por partícula. Usando la notación del capítulo anterior esto se escribe como

$$\frac{p_2}{n_2} \gg \frac{p_1}{n_1} \quad (10.1)$$

donde $n = \rho/m$ es la densidad de partículas de masa m por unidad de volumen propio.

Utilizando las condiciones de salto dadas por las ecuaciones (9.19) y (9.22) en la onda de choque para un gas politrópico, entonces la desigualdad (10.1) implica que

$$\gamma_2 - 1 \gg \frac{1}{\kappa_2 - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_1 - 1} \right) \frac{p_1}{\rho_1}, \quad (10.2)$$

donde κ_1 y κ_2 son los índices politrópicos para el gas antes y después de la onda de choque respectivamente. El factor de Lorentz γ_2 para el gas chocado que cumple la desigualdad anterior es tan grande que la velocidad del flujo detrás de la onda de choque es comparable a la de la luz.

Para evitar complicaciones en las condiciones de frontera de la onda de choque, el problema se simplifica suponiendo que el gas es ultra-relativista. En tal caso la ecuación de estado está dada por

$$p = (\kappa - 1) e = \frac{1}{3} e. \quad (10.3)$$

Para un gas chocado con esta ecuación de estado, la condición de salto para las velocidades está dada por la ecuación (9.23) que se reduce a

$$\gamma_2^2 = \frac{1}{2} \Gamma_s^2. \quad (10.4)$$

De esta igualdad y la condición (10.2) es claro que para el choque fuerte $\Gamma_s^2 \gg 1$. Por lo tanto, en el análisis de la explosión se limita a cantidades de orden cero en Γ_s^2 . De esta manera, la condición de salto para la densidad en la ecuación (9.22) se reduce a

$$n'_2 = 4\gamma_2^2 n_1,$$

donde n'_2 es la densidad de partículas del gas chocado medida desde el sistema de referencia del gas no chocado, i.e. $n'_2 = \gamma_2 n_2$. En términos del factor Γ_s^2 esta última igualdad es

$$n'_2 = 2\Gamma_s^2 n_1. \quad (10.5)$$

Por otro lado, con la ecuación de estado (10.3) la condición de salto (9.22) para la energía toma la forma (Blandford y McKee, 1976)

$$e_2 = \frac{n_2}{n_1} \gamma_2 \omega_1 = 2\Gamma_s^2 \omega_1.$$

De esta última igualdad se deriva la condición de salto para la presión del gas ultra-relativista,

$$p_2 = \frac{2}{3} \Gamma_s^2 \omega_1, \quad (10.6)$$

donde $\omega_1 = \rho_1 c^2$ para un gas de baja temperatura frente al choque, y $\omega_1 = 4p_1$ para un gas ultra-relativista. Las tres condiciones de salto (10.4), (10.5) y (10.6) representan condiciones de frontera en la descripción del flujo detrás de la onda de choque.

Establezcamos ahora las ecuaciones de movimiento para el flujo relativista detrás de la onda de choque. Para esto, dada la simetría del problema, consideremos un flujo unidimensional con simetría esférica. Así, la ecuación de conservación de energía (8.12) y la de conservación de momento (8.13), junto con la ecuación de estado (10.13) toman la forma

$$\frac{d}{d\tau} (p\gamma^4) = \gamma \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (10.7)$$

$$\frac{d}{d\tau} \ln(p^3 \gamma^4) = -\frac{4}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \beta). \quad (10.8)$$

En estas ecuaciones y en lo subsecuente, las cantidades sin subíndices corresponden al gas chocado.

En el capítulo anterior se observó además que un flujo adiabático se describe con las dos ecuaciones anteriores mas la ecuación de continuidad o la ecuación de conservación de la entropía; aquí utilizamos la última de ellas. Tomando en cuenta la ecuación de estado del gas ultra-relativista y la primera ley de la termodinámica resulta entonces que la ecuación de conservación de la entropía está dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{n^{4/3}} \right) = 0. \quad (10.9)$$

Las ecuaciones (10.7), (10.8), (10.9) junto con las condiciones de frontera en la onda de choque determinan el problema matemático completo.

Las soluciones auto-similares a este problema requieren de variables adimensionales construidas a partir de las cantidades características del problema. En primer lugar escribimos la integral para la energía E contenida en el volumen del gas chocado. Para el gas ultra-relativista, la densidad de energía T^{00} en el sistema de referencia de laboratorio es $p(4\gamma^2 - 1)$. Así pues, a orden cero en γ^2 dentro del cascarón limitado por los radios $R_0(t)$ y $R_1(t)$ la energía contenida

$$E(R_0(t), R_1(t), t) = \int_{R_0}^{R_1} 16p\gamma^2 r^2 dr, \quad (10.10)$$

es en general una función del tiempo. La energía total E liberada en la detonación representa un parámetro del movimiento que, aún cuando no será utilizado directamente en la variable de similaridad, determina el índice de similaridad del problema.

Blandford y McKee (1976) presentan tres argumentos para establecer el cociente R/Γ^2 como un radio característico del problema y derivar de él la variable de similaridad. En los tres argumentos las cantidades hidrodinámicas toman los valores dados en las condiciones de frontera (10.4), (10.5) y (10.6).

Primeramente se observa que si el número de partículas del gas chocado conserva la proporción dictada por la ecuación (10.5) con el gas no chocado, entonces el gas detrás de la onda de choque de radio R se concentra en una banda de ancho $\approx R/\Gamma^2$. Por otro lado, el factor de Lorentz del gas chocado es $\gamma = 1/\sqrt{2}\Gamma$, de modo que a orden Γ^{-2} , la velocidad del choque β_s y del gas chocado β_2 son

$$\beta_2 = 1 - \frac{2}{\Gamma^2}, \quad \beta_s = 1 - \frac{1}{\Gamma^2}.$$

Con esta velocidad, el gas chocado al radio R queda rezagado de la onda de choque en una distancia $\approx 4R/\Gamma^2$ cuando esta ha duplicado su radio.

Una última observación se deriva de la conservación de la energía. Al sustituir en la ecuación para la energía (10.10) los valores en la frontera para las cantidades hidrodinámicas, se encuentra que en la esfera de radio R la energía total del gas original equivale a la energía del gas chocado contenido en un cascarón de radio $\approx R/\Gamma^2$.

Para construir la variable de similitud, presentamos un argumento alternativo que conlleva a la elección de dicha variable de manera más simple. La ventaja de este procedimiento es que también es válido en el caso de la implosión.

El radio de la onda de choque R se desliza siguiendo una velocidad (en unidades de la velocidad de la luz)

$$\dot{R}/c = \beta_s = \left(1 - \frac{1}{\Gamma^2}\right)^{1/2}$$

donde $\Gamma^2 = \Gamma_s^2$. Al expandir en serie de Taylor el miembro derecho, a orden Γ^{-2} se tiene que

$$\dot{R} = c \left(1 - \frac{1}{2\Gamma^2}\right).$$

Supongamos ahora que Γ^2 es una potencia sólo del tiempo, de modo que

$$\Gamma^2 = \frac{A}{t^m}, \quad (10.11)$$

con la constante A por determinar y m un exponente que, como veremos, es el índice de similitud del problema. Con esto se integra la expresión para la velocidad de la onda de choque para obtener

$$\begin{aligned} R &= c \left(t - \frac{1}{m+1} \frac{t^{m+1}}{2A} \right) \\ &= ct \left(1 - \frac{1}{m+1} \frac{1}{2\Gamma^2} \right). \end{aligned} \quad (10.12)$$

Tomando en cuenta que el producto ct tiene dimensiones de longitud, escribamos el cociente adimensional

$$\frac{R}{r} = 1 - \frac{\phi}{2\Gamma^2(m+1)}$$

donde se introduce una nueva cantidad adimensional ϕ . Así, el inverso de esta ecuación a primer orden de aproximación es

$$\frac{r}{R} = 1 + \frac{\phi}{2\Gamma^2(m+1)}.$$

De modo que la variable adimensional ϕ está dada por

$$\phi = \left(1 - \frac{r}{R}\right) 2(m+1)\Gamma^2,$$

y es tal que $\phi = 0$ cuando $r = R$.

Por comodidad, se busca que las funciones hidrodinámicas escritas de manera adimensional sean potencias de la variable de similaridad. Es conviene entonces tomar como variable similar a la función $\chi \equiv \phi + 1$ y no a ϕ , es decir

$$\chi = 1 + \left(1 - \frac{r}{R}\right) 2(m+1)\Gamma^2. \quad (10.13)$$

El rango de esta nueva variable es entonces $\chi \geq 1$. El valor $\chi = 1$ corresponde a la onda de choque. Como veremos, las ecuaciones que describen el flujo auto-similar se simplifican al usar esta variable.

Sustituyendo las ecuaciones (10.11) y (10.12), en la ecuación (10.13) se obtiene a $O(\Gamma^2)$ que

$$\chi = \left(1 - \frac{r}{ct}\right) [1 + 2(m+1)\Gamma^2], \quad (10.14)$$

A partir de las condiciones de frontera (10.6), (10.5) y (10.4), se construyen las funciones hidrodinámicas adimensionales $f(\xi)$, $g(\xi)$ y $h(\xi)$ como

$$\begin{aligned} p &= \frac{3}{2}\omega_1\Gamma^2 f(\chi), \\ n' &= 2n_1\Gamma^2 h(\chi), \\ \gamma^2 &= \frac{1}{2}\Gamma^2 g(\chi). \end{aligned} \quad (10.15)$$

De este modo las condiciones de frontera están dadas por $f(1) = g(1) = h(1) = 1$. Notemos además que las cantidades hidrodinámicas p , n' y γ son ahora funciones de las variables adimensionales Γ y χ en lugar de t y r . De esta manera, el exponente m en la expresión (10.11) es el índice de similaridad del problema.

Utilizando la regla de la cadena, las derivadas con respecto a t y r pueden expresarse como derivadas

con respecto a ξ y con respecto a Γ^2 de la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial \ln t} = -m \frac{\partial}{\partial \ln \Gamma^2} + [(m+1)(2\Gamma^2 - \chi) + 1] \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad (10.16)$$

$$t \frac{\partial}{\partial r} = -[1 + 2(m+1)\Gamma^2] \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad (10.17)$$

$$\frac{d}{d \ln t} = -m \frac{\partial}{\partial \ln \Gamma^2} + (m+1) \left(\frac{2}{g} - \chi \right) \frac{\partial}{\partial \chi}. \quad (10.18)$$

Al sustituir las expresiones (10.15) y las derivadas anteriores en el sistema de ecuaciones (10.7), (10.8) y (10.9) para el flujo adiabático, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{1}{g} \frac{d \ln f}{d \ln \chi} = \frac{8(m-1) - (m-4)g\chi}{(m+1)\{4 - 8g\chi + g^2\chi^2\}}, \quad (10.19)$$

$$\frac{1}{g} \frac{d \ln g}{d \ln \chi} = \frac{(7m-4) - (m-2)g\chi}{(m+1)\{4 - 8g\chi + g^2\chi^2\}}, \quad (10.20)$$

$$\frac{1}{g} \frac{d \ln h}{d \ln \chi} = \frac{2(9m-8) - 2(5m-6)g\chi + (m-2)g^2\chi^2}{(m+1)\{4 - 8g\chi + g^2\chi^2\}(2 - g\chi)}. \quad (10.21)$$

Dado un valor para m , estas ecuaciones se pueden integrar sucesivamente y en forma analítica comenzando por (10.20). Una vez que se cuenta con la función $g(\chi)$, las otras dos ecuaciones se resuelven con una integración simple.

En el caso de la explosión, el exponente de similaridad m queda definido por la integral de la energía total (10.10) tomada entre un radio $R_1 = 0$ (donde $\chi = \infty$) y el radio de la onda de choque $R_2 = R$ el cual que se desplaza de manera auto-similar. Sustituyendo entonces todas las cantidades por sus expresiones en términos de la variable de similaridad, se tiene que a orden cero en Γ^2 la ecuación (10.10) es

$$E = \int_{\infty}^1 16\pi(\Gamma^2 \omega_1 f)(g\Gamma^2/2)t^2 \left[1 - \frac{2\chi}{1 + 2(m+1)\Gamma^2} \right] \left(-t \frac{d\xi}{1 + 2(m+1)\Gamma^2} \right), \\ = 8\pi\omega t^3 \Gamma^2 E_1 \quad (10.22)$$

donde E_1 es una constante positiva.

La energía total E se mantiene constante en el tiempo cuando $\Gamma = A/t^m \propto t^{-3}$ con lo cual se encuentra que $m = 3$. Adicionalmente, esta misma integral determina la constante de proporcionalidad A introducida en la igualdad (10.11).

El problema queda entonces completamente determinado (Blandford y McKee, 1976). La solución analítica para las funciones adimensionales está dada por,

$$f = \chi^{-17/12}, \quad g = \chi^{-1}, \quad h = \chi^{-7/4}.$$

Las funciones adimensionales con esta estructura son positivas en todo el rango de valores $1 \leq \chi$.

Para un elemento de fluido, el cambio total en el tiempo de la función $f(\xi)$ está dado por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\chi) &= \left[(m+1) \left(\frac{2}{g} - \chi \right) \right] \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\chi^{-17/12} \right), \\ &= \left[(m+1) \left(\frac{2}{g} - \chi \right) \right] (-17/12) \chi^{-5/12}. \end{aligned}$$

Esta cantidad es negativa siempre que $\chi \leq 2g(\chi)$. Al cumplirse esta condición para toda χ se observa que las funciones adimensionales $g(\chi)$, $h(\chi)$ y $f(\chi)$ decrecen al alejarse del frente de onda.

En términos generales, el índice de similaridad m es un parámetro libre del movimiento esférico. Para el caso de una explosión, este índice queda determinado cuando se impone la conservación de la energía detrás del choque.

§11. La implosión auto-similar relativista

El análisis de la explosión relativista presenta varias similitudes con el caso Newtoniano. Apoyándonos principalmente en el desarrollo presentado en la sección anterior, mostramos ahora la solución al flujo auto-similar para la implosión relativista. Las mismas consideraciones que permiten una descripción auto-similar para la implosión Newtoniana, nos llevan a la solución única del flujo similar detrás de la onda de choque implosiva relativista.

Las aplicaciones del análisis presentado se encuentran en los ambientes más energéticos del universo. En el estudio de los núcleos activos de galaxias (NAGs) se observa radiación alineada a lo largo de los jets asociados a tales objetos (Best et al., 1996). Esto indica la posible existencia de nubes de gas simergidas a lo largo del flujo del jet (Blandford y Königl, 1979; Mendoza, 2000). En estos ambientes dichas nubes estarían sometidas a muy altas presiones. En el caso de que la nube no sea destruida, la presión induce rápidamente el colapso de la nube generando una onda de choque implosiva. La descripción relativista del fenómeno está motivada además por las altas energías que puede alcanzar una onda de choque que se concentra en volúmenes cada vez menores al acercarse al colapso.

Consideremos una nube de gas interestelar que se encuentra a una presión p_1 en equilibrio con su medio ambiente y con densidad de partículas ρ_1 . Supongamos ahora que la nube ha sido asaltada por uno de los radio-lóbulos de una radiogalaxia. En tal ambiente el gas del jet ha chocado y se encuentra a una presión mucho mayor que la existente en la nube. El modelo de interacción más simple entre la nube y el lóbulo consiste en sumergir a la nube por completo en el gas del lóbulo que tiene una presión uniforme p_2 . Cuando la presión del lóbulo es tan grande que en la frontera de la nube se cumple la desigualdad (10.1), se genera una onda de choque esférica relativista que avanza hacia el contorno de la nube generando el colapso de la misma. La implosión que se resuelve en esta sección considera que el gas detrás de la onda de choque es ultra-relativista en concordancia con el estado del gas en estos ambientes.

Para comenzar, mencionemos los elementos del problema que se heredan de la explosión. Las ecuaciones del flujo adiabático son las mismas en ambos casos. Utilizaremos entonces su forma simplificada dada por las expresiones (10.7), (10.8) y (10.9). Además, como se mencionó en el capítulo III, la onda

de choque unidimensional relativista presenta las mismas condiciones de salto sin importar la simetría del problema. De esta manera, el gas chocado ultra-relativista detrás de la onda de choque implosiva tiene las mismas condiciones a la frontera que en el caso de la explosión. Esto es, las ecuaciones (10.4), (10.5) y (10.6) representan las condiciones de frontera de la onda de choque implosiva.

La variable de similaridad en la implosión se construye tomando en consideración que, al avanzar hacia un punto central, la velocidad de la onda de choque dR/dt debe ser negativa. De aquí que

$$\frac{dR}{c dt} = - \left[1 - \frac{1}{\Gamma^2} \right]^{1/2} \approx - \left[1 - \frac{1}{2\Gamma^2} \right]$$

donde Γ es el factor de Lorentz para la onda de choque vista desde el sistema de referencia del gas no chocado. Para integrar esta ecuación es necesario conocer la estructura de Γ^2 en el movimiento. Para el caso de la explosión Γ^2 está dado por la ecuación (10.11). Si queremos utilizar esta forma en la implosión, debemos tomar en consideración que la onda de choque se acelera al ir avanzando en su colapso a un punto. De modo que el factor de Lorentz Γ^2 aumenta al acercarse el momento del colapso. Por lo tanto es adecuado escribir

$$\Gamma^2 = A(-t)^{-m}, \quad t \leq 0. \quad (11.1)$$

donde el valor de la constante A está por determinarse y m es el índice de similaridad del problema. El intervalo de tiempo se ha escogido de manera totalmente análoga al caso Newtoniano de modo que el instante de tiempo $t = 0$ corresponde al colapso de la onda de choque ($R = 0$). En este caso tomamos $t = 0$ como el momento de colapso de la nube.

De esta manera, la velocidad de la onda de choque está dada por

$$\frac{dR}{dt} = -c \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(-t)^m}{A} \right].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R &= -c \left[t + \frac{1}{2} \frac{(-t)^{m+1}}{(m+1)A} \right] \\ &= -ct \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(-t)^m}{(m+1)A} \right] \\ &= c|t| \left[1 - \frac{1}{2} \frac{1}{(m+1)\Gamma^2} \right]. \end{aligned} \quad (11.2)$$

De la misma manera en como se construyó la variable de similaridad en la sección anterior, escogemos

la variable de similaridad η como

$$\begin{aligned} \eta &= 1 + 2(m+1)\Gamma^2 (1 - r/R) \\ &= 1 + 2(m+1)\Gamma^2 \left[1 + \frac{r}{ct} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2(m+1)\Gamma^2}\right)} \right]. \end{aligned}$$

De esta manera, a orden $O(\Gamma^2)$, la variable de similaridad toma la forma

$$\eta = \left(1 + \frac{r}{ct}\right) [1 + 2(m+1)\Gamma^2]. \quad (11.3)$$

El análisis que nos ocupa se refiere al gas detrás de la onda de choque, es decir la región $r > R$. De modo que el intervalo de valores que cubre la variable similar es $1 \geq \eta \geq -\infty$.

Tal y como en el caso no-relativista, el análisis se extiende hasta un radio infinito donde se origina la onda de choque. Por lo tanto, la solución del problema requiere condiciones de frontera para el extremo $\eta = 1$ en donde $r = R$, y para el extremo opuesto $\eta = -\infty$ para el cual $r = \infty$.

Las funciones de la variable adimensional η se generan a partir de las condiciones de salto en la onda de choque para las cantidades hidrodinámicas p , n y γ^2 . Esto es (cf. ecuaciones (10.15)),

$$p = \frac{2}{3}\omega_1\Gamma^2 f(\eta), \quad (11.4)$$

$$n'_2 = 2n_1\Gamma^2 h(\eta), \quad (11.5)$$

$$\gamma_2^2 = \frac{1}{2}\Gamma^2 g(\eta). \quad (11.6)$$

Por construcción, las funciones hidrodinámicas adimensionales $f(\eta)$, $g(\eta)$ y $h(\eta)$, satisfacen

$$f(\eta = 1) = g(\eta = 1) = h(\eta = 1) = 1, \quad (11.7)$$

en la frontera del choque. Con esto las cantidades hidrodinámicas dependen ahora de las variables adimensionales Γ^2 y η , las variables de similaridad. Escribamos entonces las derivadas de r y t en términos de estas variables. Con la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial \ln t} = -m \frac{\partial}{\partial \ln \Gamma^2} + [(m+1)(2\Gamma^2 - \eta)] \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (11.8)$$

$$ct \frac{\partial}{\partial r} = [1 + 2(m+1)\Gamma^2] \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (11.9)$$

Y la derivada total cambia de modo que

$$\frac{d}{d \ln t} = -m \frac{\partial}{\partial \ln \Gamma^2} + (m+1) \left(\frac{2}{g} - \eta \right) \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (11.10)$$

Considerando todas las igualdades a orden Γ^{-2} , cambiamos las ecuaciones (10.7) y (10.8) por sus

contrapartes adimensionales

$$(m+1)(-2-g\eta)\frac{f'}{fg} + 4(m+1)(2-g\eta)\frac{g'}{g^2} = 3m \quad (11.11)$$

$$\frac{f'}{fg} [(m+1)(8-2g\eta)] - 8(m+1)\frac{g'}{g^2} = 2m-8 \quad (11.12)$$

donde las cantidades primas indican derivada respecto a η . Escribiendo este sistema como una matriz tenemos

$$\begin{bmatrix} -(2+g\eta) & 2(2-g\eta) \\ 8-2g\eta & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'/fg \\ g'/g^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3m/(m+1) \\ (2m-8)/(m+1) \end{bmatrix}, \quad (11.13)$$

que con ayuda de la regla de Cramer implica que

$$\frac{1}{fg} \frac{df}{d\eta} = \frac{8(m-1) + g\eta(4-m)}{(m+1)[-4 + 8g\eta - 4g^2\eta^2]}, \quad (11.14)$$

$$\frac{1}{g^2} \frac{dg}{d\eta} = \frac{4 - 7m + g\eta(2+m)}{(m+1)[-4 + 8g\eta - 4g^2\eta^2]}. \quad (11.15)$$

Para integrar estas ecuaciones es necesario utilizar las condiciones de frontera para $f(\eta)$ y $g(\eta)$ dadas en la igualdad (11.7). El valor del índice de similaridad, y la consecuente unicidad de la solución, queda determinado por la siguiente consideración física que es análoga a la presentada en el caso Newtoniano (ver página 27).

Para un tiempo dado, los valores de energía y velocidad en un elemento de fluido chocado disminuyen a medida que r aumenta. En el gas ultra-relativista estas cantidades pueden escribirse en términos de p y γ^2 respectivamente. Para garantizar este decremento de las cantidades hidrodinámicas, es necesario que

$$\frac{\partial p}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial \gamma^2}{\partial r} < 0, \quad \forall r \geq R,$$

A través de la expresión (11.9) para la derivada radial, esta condición implica que las funciones hidrodinámicas adimensionales satisfacen las siguientes igualdades

$$\frac{df(\eta)}{d\eta} > 0, \quad \frac{dg(\eta)}{d\eta} > 0, \quad \forall \eta \leq 1. \quad (11.16)$$

Tomando en cuenta estas desigualdades integramos el par de ecuaciones (11.14) y (11.15). Es claro que las funciones integrales $f(\eta)$ y $g(\eta)$ dependerán del parámetro m y por lo tanto toda una familia de curvas integrales que corresponden a distintos flujos auto-similares. En este caso, la condición (11.16) determina en forma única el índice m .

La derivada para $g(\eta)$ en la ecuación (11.15) es positiva para la frontera, es decir, cuando $\eta = g = 1$. Sin embargo, si se quiere garantizar su valor positivo para toda $\eta < 1$, la derivada nunca debe ser cero. Igualmente, la continuidad de la función depende de que el denominador de la derivada en la ecuación

(11.15) nunca se anule. Para evitar ambas singularidades se restringe la curva integral $g(\eta)$ a pasar por el punto $(\eta^*, g(\eta^*))$ sobre el cual se anulan simultáneamente el numerador y el denominador de la ecuación diferencial. El denominador de la ecuación (11.15) se anula cuando

$$(m+1)[-4+8g\eta-4g^2\eta^2]=0,$$

lo cual se cumple para el producto

$$g\eta = [1 \pm 2\sqrt{11}]. \quad (11.17)$$

Esta *curva cero* del denominador es una hipérbola en el plano $g\eta$. Por otra parte, la curva cero del numerador satisface la ecuación

$$4 - 7m + g\eta(2 + m) = 0.$$

El punto $(\eta^*, g(\eta^*))$ donde ambas curvas se intersectan se calcula sustituyendo el valor positivo de la expresión (11.17) en la curva cero del numerador con lo cual se encuentra el índice de similaridad del problema,

$$m = 0.78460969. \quad (11.18)$$

Si seguimos el mismo procedimiento para la derivada $df(\eta)/d\eta$ encontraremos que el numerador y el denominador de la ecuación (11.14) se anulan en un punto para el cual m repite el valor de la ecuación (11.18). Es importante notar que los denominadores de las ecuaciones diferenciales (11.14) y (11.15) son los mismos. De modo que las curvas cero de ambos siguen la ecuación de la hipérbola (11.17). Sin embargo, sólo el valor positivo del producto $g\eta$ permite encontrar el valor único del índice de similaridad.

Con el valor calculado para el índice de similaridad se garantizan gradientes de presión y velocidad negativos para el gas chocado. Con este valor integramos por el método de Runge-Kutta de 4º orden la ecuación diferencial (11.15) obteniendo la curva $g(\eta)$ y posteriormente se integra la ecuación (11.14) con el mismo método.

Al sustituir las ecuaciones diferenciales (11.14) y (11.15) en la ecuación (10.9) del flujo adiabático, se obtiene una ecuación diferencial para $h(\eta)$, esto es,

$$\frac{h'}{gh} = \frac{2}{(2-g\eta)} \frac{\{(3m-4) + g\eta[6-3m] - g^2\eta^2[2-m/4]\}}{(m+1)[-4+8g\eta-4g^2\eta^2]}. \quad (11.19)$$

Utilizando el valor de m mostrado en la igualdad (11.18) encontramos la integral $h(\eta)$ de esta ecuación diferencial.

Al integrar se observa que la curva $h(\eta)$ no intersecta a ningún punto singular de su derivada en el rango de valores $\eta \leq 1$. Más aún, la derivada evaluada en $\eta = 1$ tiene un valor positivo. Esto implica que la densidad de partículas $n = n_1 \Gamma^2 h(\eta)$ decrece monótonamente con el radio para un tiempo fijo. Esto es contrario a lo que sucede en el caso no-relativista, en el que la densidad adimensional aumenta

detrás de la onda de choque hasta converger a un valor finito.

Una vez encontrada la solución, las cantidades hidrodinámicas se calculan utilizando las ecuaciones (11.4), (11.5) y (11.6). Para esto consideramos condiciones iniciales de una nube típica de gas interestelar, es decir, una nube con densidad constante $n_1 = 100 \text{ cm}^{-3}$ y con temperatura $T_1 = 10 \text{ K}$. La implosión se induce a partir de una presión externa p_2 conocida desde un principio. Las integraciones se muestran en las figuras IV.1 a IV.4. En ellas se observa que todas las cantidades aumentan su valor en la onda de choque conforme ésta avanza.

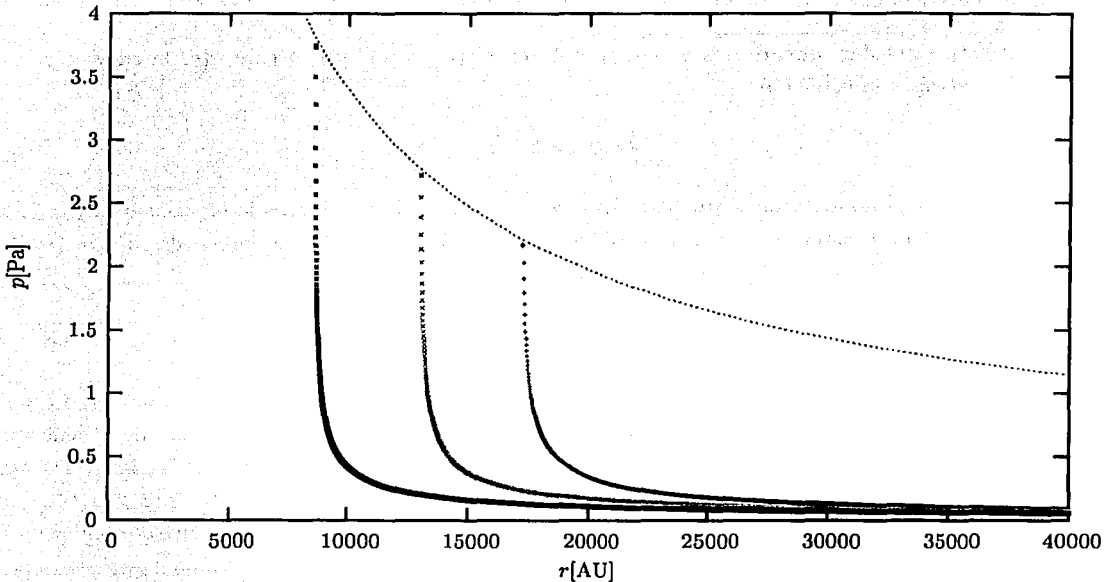


Figura IV.1: Perfiles de presión en la implosión ultra-relativista de una nube típica de radio inicial $R_0 = 1 \text{ pc.}$, temperatura $T = 10 \text{ K}$ y densidad de partículas 100 cm^{-3} . La onda de choque relativista es generada por una presión externa $p_2 \approx .01 \text{ Pascales}$. En la figura se muestran, de izquierda a derecha las distribuciones de presión como función del radio para 50, 100 y 150 días antes del colapso. La curva envolvente muestra los valores de presión que alcanza el gas que fluye justo detrás de la onda de choque. Los valores de presión aumentan sin límite conforme la onda de choque avanza hacia el centro de la nube.

§12. Características de la implosión relativista

El análisis anterior muestra que el flujo detrás de la onda implosiva es tal que las cantidades hidrodinámicas para una partícula de fluido disminuyen con el tiempo. En efecto, para el caso de la presión

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{1}{|t|} \frac{dp}{d \ln t} = \frac{1}{|t|} \left\{ -m \frac{\partial}{\partial \ln \Gamma^2} + (m+1) \left(\frac{2}{g} - \eta \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \right\} p \\ &= -\frac{1}{|t|} \left\{ -mp + p(m+1)(2-g\eta) \left[\frac{1}{gf} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] \right\} \\ &< -\frac{1}{|t|} \left\{ -(m+1)p + p(m+1)(2-g\eta) \left[\frac{1}{gf} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] \right\} \\ &< -\frac{1}{|t|} \left\{ p(m+1)(1-g\eta) \left[\frac{1}{gf} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] \right\}. \end{aligned}$$

En el desarrollo de la solución la derivada entre corchetes cuadrados está condicionada a ser positiva para cualquier valor de η . Por lo tanto, la derivada dp/dt es negativa cuando $g\eta \leq 1$. Esta última condición es satisfecha por la solución obtenida en todo el rango de valores $\eta \leq 1$: De manera totalmente análoga

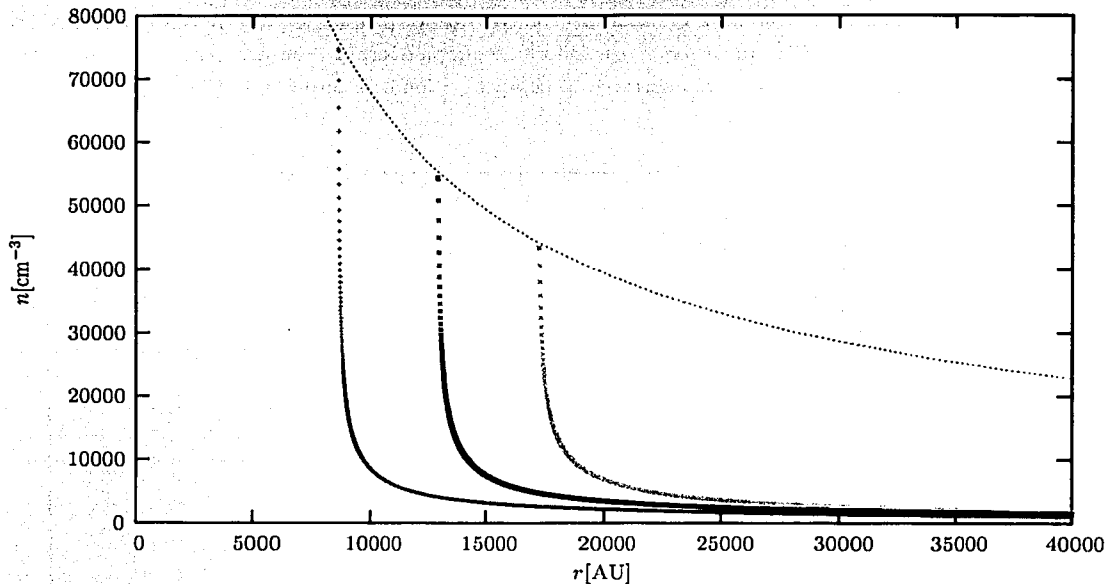


Figura IV.2: Perfiles de densidad de partículas n en la implosión de una nube típica de gas interestelar con las condiciones del perfil en la figura IV.1. Las curvas de izquierda a derecha muestran la distribución de la densidad de partículas para tiempos de 50, 100 y 150 días previos al colapso. La curva envolvente muestra la densidad n para el gas que fluye justo detrás de la onda de choque. Los valores de n aumentan sin límite conforme la onda de choque avanza hacia el centro de la nube.

se sigue que a lo largo de la trayectoria de una partícula de fluido el factor de Lorentz γ^2 y la densidad del número de partículas n del gas chocado también decrecen a medida que el tiempo avanza.

Aún cuando en la implosión relativista no contamos con un análisis de las curvas características que nos permitan limitar la región de similaridad, sí podemos observar el decremento en la energía del

TESIS CON
FOLIA DE ORIGEN

gas chocado cuando integramos hasta un radio finito. Consideremos la energía integrada en la ecuación (10.10) para un cascarón que se desplaza de manera auto-similar detrás de la onda de choque. Integrando entre los radios $r = R$ y $r = c|t| (1 - \eta_0/[1 + 2(m+1)\Gamma^2])$, donde η_0 es un valor cualquiera de la variable de similitud, se encuentra que

$$E = 8\pi\omega_1\Gamma^4 |t|^3 \left(\frac{1}{1 + 2(m+1)\Gamma^2} \right) \int_1^{\eta_0} f g \left(1 - \frac{\eta}{1 + 2(m+1)\Gamma^2} \right)^2 d\eta$$

$$\approx 8\pi\omega_1\Gamma^2 |t|^3 E(\eta_0), \quad (12.1)$$

donde $E(\eta_0)$ es una constante y el resto de las cantidades se aproximan a orden cero en Γ^2 . Cuando se sustituye el valor de Γ^2 de la implosión en la última expresión se obtiene que

$$E = 8\pi\omega_1 A |t|^{3-m} E(\eta_0). \quad (12.2)$$

Como se observa, la energía contenida en el anillo considerado es proporcional a una potencia positiva del tiempo (en este caso es claro que $3 - m > 0$). De modo que la energía E en una banda de similitud detrás de la onda de choque decrece al acercarse al colapso y tiende a cero cuando $t \rightarrow 0$.

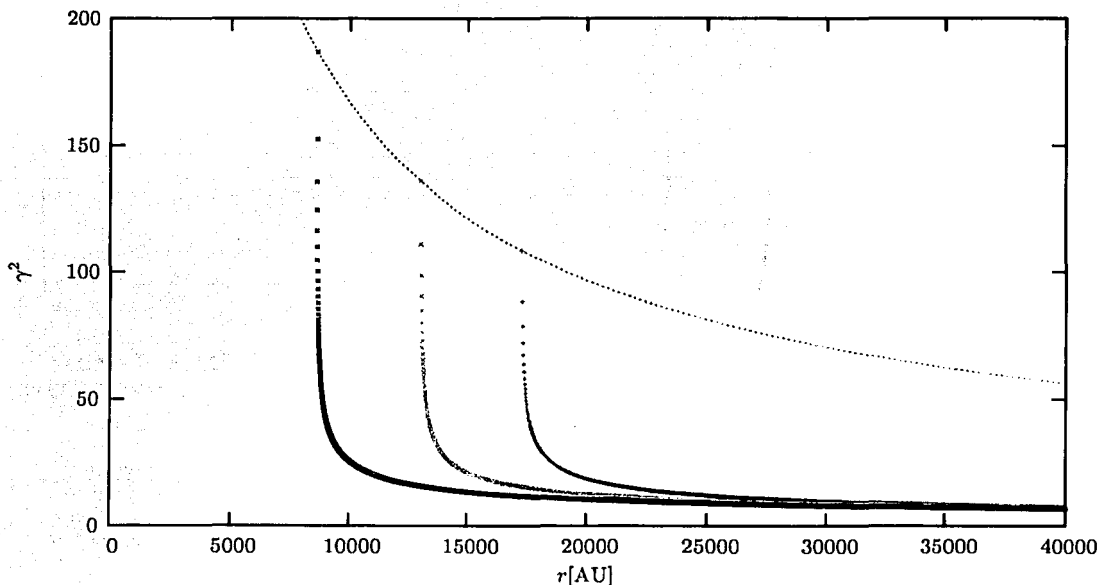


Figura IV.3: Perfiles del factor de Lorentz γ^2 en la implosión ultra-relativista de la nube de gas interestelar con las condiciones del perfil en la figura IV.1. Nuevamente las curvas de izquierda a derecha muestran la distribución de velocidad a 50, 100 y 150 días antes del colapso. La curva envolvente muestra los valores de γ^2 que alcanza el gas que fluye justo detrás de la onda de choque. Los valores del factor de Lorentz van a infinito conforme la onda de choque avanza hacia el centro de la nube.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Es importante mencionar que la constante A introducida en la ecuación (11.1) ha quedado indeterminada. Para dar un valor a este parámetro utilizamos el argumento del caso no-relativista dado por Zel'dovich y Raizer (2002). Los valores de A están definidos por las condiciones iniciales de cada situación. Es entonces que a través de esta constante se distinguen los flujos en la onda de choque generada a distintas presiones. En nuestro caso hemos presentado las etapas últimas de la implosión de una nube típica de gas interestelar sometida a una alta presión externa y donde el tratamiento requiere de consideraciones relativistas.

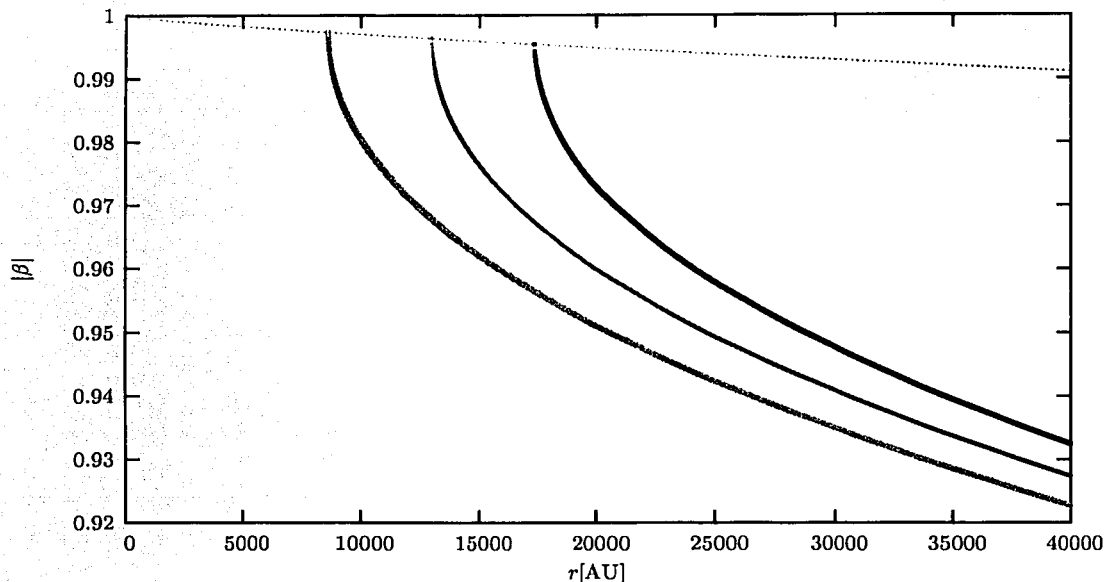


Figura IV.4: Perfiles del factor $\beta = v/c$ en la implosión ultra-relativista de la nube de gas interestelar con las condiciones del perfil en la figura IV.1. Nuevamente las curvas de izquierda a derecha muestran la distribución de velocidad a 50, 100 y 150 días antes del colapso. La velocidad del flujo es negativa y se grafica el valor absoluto de β para mostrar la disminución de tal magnitud en el gas detrás del choque. La curva envolvente representa la velocidad del gas justo detrás del choque como función del radio.

Finalmente debemos mencionar que las limitantes de este análisis relativista se encuentran en la velocidad del fluido chocado. Para distancias detrás del choque suficientemente grandes, la velocidad adimensional del gas β se reduce de modo que $\gamma^2 \sim 1$. En este régimen de velocidades, las aproximaciones en las ecuaciones de este capítulo pierden sentido y el análisis expuesto para la implosión auto-similar relativista deja de ser válido.

1964
MAY 15 1964
U.S. AIR FORCE
OFFICE OF THE
SECRETARY OF THE AIR FORCE
WASHINGTON, D.C.

Capítulo V

Aplicaciones astrofísicas

*Al borde de las cosas que no entendemos del todo,
inventamos relatos fantásticos para aventurar hipótesis
o para compartir con otros los vértigos de nuestra perplejidad.*

A. Bioy Cásarez

Son varios los ambientes astrofísicos en donde ocurren implosiones hidrodinámica de nubes de gas. En el intervalo de menor energía, las nubes de gas molecular (*Regiones III*) cuyas capas externas son calentadas por la radiación de estrellas vecinas son capaces de implotar sobre sí mismas. Al calentarse, las capas periféricas de una nube aumentan su presión y se genera una onda de choque implosiva de baja energía que se desplaza sobre la nube a velocidades tan bajas como $v_s \approx 5 \text{ km/s}$. En tales casos los tiempos de enfriamiento del gas detrás del choque son menores al tiempo de colapso de la onda y se considera que la onda de choque es *isotérmica*. Este proceso es conocido como *Implosión inducida por radiación* (véase por ejemplo Kimura y Tosa, 1990; Kessel-Deynet y Burkert, 2003).

Existen otros ambientes propicios para la formación de ondas de choque implosivas en los cuales se tienen gases envolventes mucho más energéticos. En este capítulo presentamos un análisis de la estabilidad térmica y gravitacional de la implosión en tales casos.

§13. Estabilidad de la implosión

Uno de los tópicos básicos en el estudio del medio interestelar (MIE) es el análisis de la interacción del gas propio de un flujo que se mueve a gran velocidad con nubes de gas en equilibrio de presiones con el medio. Comúnmente, cuando una nube de gas se interpone en el camino de una onda de choque, no genera una perturbación considerable en la trayectoria del choque (Mckee y Cowie, 1975). En la nube chocada, sin embargo, se genera una nueva onda de choque que se desplaza en la misma dirección de la onda de choque externa pero con menor velocidad debido a la mayor densidad de la nube (ver figura V.1). En simulaciones numéricas se ha observado que el choque interno en la nube la destruye (Klein et al., 1975). Sin embargo, en caso de considerar el campo magnético de la nube se presentan situaciones en que la nube no se destruye pero sí se *achata* en la dirección del choque externo (Vanhala y Cameron, 1998).

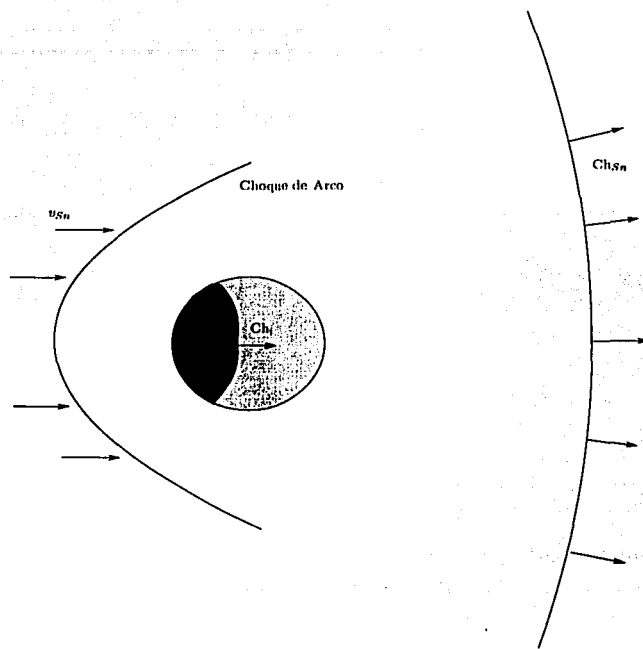


Figura V.1: Cuando una nube de densidad mayor al medio interestelar es tragada por la supernova, la presión del gas chocado en la supernova genera una onda de choque interna (Ch_i) que se propaga con velocidad menor a la del choque de la supernova Ch_{Sn} . La nube es arrastrada por el gas a una velocidad menor a la del gas circundante v_{Sn} lo que genera un choque de arco frente a la nube (Mckee y Cowie, 1975).

Si una nube densa sobrevive a la interacción con el choque externo, el núcleo de la nube original queda sumergido en el gas chocado donde la nube es sometida a presiones mucho mayores que su presión interna.

La diferencia de presiones entre el gas chocado exterior y el gas frío de la nube representa una discontinuidad en las cantidades hidrodinámicas en el borde de la nube. Esta discontinuidad genera una onda de choque que se desplaza hacia el centro de la nube misma y una onda de rarefacción que se aleja con respecto a la frontera de la nube. De aquí que se genere un fenómeno implosivo en la nube.

Este tipo de eventos tienen lugar en regiones donde ondas de choque de muy alta velocidad se propagan sobre un ambiente homogéneo e isotrópico. Dos de los objetos más energéticos en el universo capaces de generar ondas expansivas de muy alta velocidad son los remanentes de supernovas y los núcleos activos de galaxias (NAGs)[†].

En el primer caso, la onda de choque que acompaña a la explosión de supernova barre las partículas del medio circundante. Los modelos más simples consideran una onda de choque esférica que acumula

[†] Existe la posibilidad de aplicar este fenómeno en explosiones de rayos- γ pero no conocemos evidencia observacional que muestre la interacción de estos eventos con nubes externas.

a las partículas barridas en un anillo detrás de la onda de choque. Dicha etapa de expansión es descrita por el modelo de explosión auto-similar presentado en la sección §5.

Los valores típicos de la presión detrás de la onda expansiva para un remanente de supernova en su etapa evolutiva de expansión adiabática (o expansión *Sedov-Taylor*) son $p \approx 10^{-8}$ Pa. Supongamos que una nube de radio $r_1 = 1$ pc. con densidad de partículas $n_1 = 100 \text{ cm}^{-3}$ y presión es $p \approx 10^{-13}$ Pa se encuentra inmersa en el ambiente de supernova. La diferencia de presiones con el ambiente propicia la formación de una onda de choque implosiva sobre la nube misma. Para analizar el efecto de la implosión utilicemos el caso no-relativista del modelo presentado en la sección §6. Introducimos los valores mencionados como condiciones de frontera del problema. La onda de choque generada de esta forma avanza de modo que se acelera y en sus etapas terminales alcanza velocidades $v_s \approx 10^8$ m/s muy cercana a la velocidad de la luz.

En esta situación, la temperatura que alcanza el gas chocado es $T \approx 10^8$ K. Un gas tan caliente está totalmente ionizado. Su energía por unidad de volumen $\epsilon = 3p = 3nk_B T$ es radiada siguiendo la relación (Silk y Wyse, 1993).

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -n^2 \Lambda(T),$$

donde n es el número de núcleos ionizados por unidad de volumen y Λ es una función de enfriamiento con valores definidos para cada temperatura T . De aquí se obtiene que el tiempo de enfriamiento τ_{enf} en que la nube ha perdido su energía térmica está dado por

$$\tau_{enf} = \frac{E}{\left| \frac{dE}{dt} \right|} = \frac{3nk_B T}{n^2 \Lambda(T)}. \quad (13.1)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann de los gases. Para una temperatura $T \approx 10^8$ K, se tiene que $\Lambda = 10^{-23} \text{ ergs cm}^3 \text{ s}^{-1}$. En el caso de la onda de choque implosiva no-relativista, el tiempo de enfriamiento con las cantidades inmediatamente después del choque es $\tau_{enf} \approx 10^{13}$ s. Este tiempo es mucho mayor al tiempo de colapso de la nube $\tau_{col} = 7.55 \times 10^{10}$ s. Esto indica que la onda de choque que se produce en la frontera de la nube cuenta con la suficiente energía para propiciar el colapso e incluso el rebote explosivo de la onda de choque.

Como vimos en el capítulo II, la densidad del gas aumenta con la distancia radial para el fluido detrás del choque. Lo contrario sucede con el resto de las cantidades hidrodinámicas, lo cual nos lleva a considerar la posibilidad de un colapso gravitacional en regiones de baja temperatura en un tiempo pertinente posterior al paso de la onda de choque.

La región de estudio donde evaluamos la inestabilidad gravitacional queda limitada por el radio de la nube una vez que ha sido chocada. En el borde de la nube se genera un choque implosivo que arrastra al gas chocado hacia el centro de la nube. La velocidad del gas chocado es aproximadamente igual a la velocidad dada por la condición de frontera (5.2). Si el radio de la onda de choque $R(t)$ y el de la nube $R_n(t)$ coinciden en $t_0 < 0^+$, calculamos la posición subsecuente del borde de la nube como función del

tiempo utilizando la velocidad dada en la ecuación (5.2). Se obtiene que para un tiempo t cualquiera

$$R_n(t) = \frac{3}{4}R(t) + \frac{1}{4}R(t_0), \quad (13.2)$$

De aquí que la nube reduzca su radio a la cuarta parte de su radio original en el momento del colapso. Esto es $R_n(t=0) = 51560 \text{ AU}^\dagger$. A este radio, las figuras II.5 y II.7 muestran que los valores asintóticos de las cantidades hidrodinámicas son

$$p = 7.8 \times 10^{-8} \text{ Pa}, \quad \rho = 954 \text{ cm}^{-3} \quad \text{y} \quad v = 277 \text{ km s}^{-1} \quad (13.3)$$

La estabilidad gravitacional del colapso hidrodinámico se evalúa mediante el uso de los parámetros de Jeans de la nube. Si en una región esférica de radio fijo r_0 se logra concentrar una masa de gas suficientemente grande, basta una pequeña perturbación del gas para inducir el colapso gravitacional de esta región. La cota mínima en la masa requerida para este efecto es llamada la *masa de Jeans*, M_J la cual en términos del número de partículas n y la temperatura T del gas está dada por

$$M_J = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{k_B T}{Gm} \right). \quad (13.4)$$

donde m es la masa promedio por partícula y G es la constante de Gravitación. Para la nube de gas considerada originalmente, la masa de Jeans $M_{J1} = 9.58 \times 10^{31} \text{ kg}$ y es mucho mayor a la masa de la nube $M_1 = 3.36 \times 10^{28} \text{ kg}$. Al contrastar la masa de Jeans para la nube original con el mismo parámetro para la nube chocada M_{J2} se tiene que

$$\frac{M_{J2}^2}{M_{J1}^2} = \frac{T_2^3 n_1}{T_1^3 n_2} \quad (13.5)$$

donde las cantidades con subíndice 2 son propias del gas chocado y el subíndice 1 corresponde al gas no chocado. Sustituyendo las cantidades (13.3) y los parámetros de la nube original en el cociente anterior se encuentra que la gran temperatura del gas chocado incrementa la masa de Jeans en factores muy elevados.

Hemos calculado además que el tiempo de enfriamiento del gas chocado es mayor al tiempo de colapso de la nube. Por lo tanto no podemos considerar una disminución significativa en la temperatura del gas chocado para este caso. Con esto se muestra que la implosión adiabática de una nube de gas interestelar no induce la inestabilidad gravitacional de la misma.

Sólo en el caso de un choque isotérmico, es decir, aquel en el que la temperatura es la misma en ambos lados del choque, se puede pensar en una disminución de la masa de Jeans y la consecuente inducción de un colapso gravitacional en la nube chocada (Silk y Solinger, 1973).

En el caso relativista, las regiones donde la implosión de la nube de gas es posible son los lóbulos y

[†] Dado que la onda de choque se colapsa en el instante $t = 0$, $|t_0|$ representa también el tiempo de colapso de la onda de choque desde que es generada en el borde de la nube.

[†] El radio $R_n(t=0)$ calculado en forma numérica, i.e, tomando la velocidad del fluido como función del tiempo y el radio es ligeramente mayor al resultado mostrado.

jets del los NAGs. A lo largo del jet eyectado por un núcleo activo, el gas es acelerado a velocidades muy cercanas a las de la luz, $v = c$. Adicionalmente el movimiento microscópico del gas presenta también velocidades cercanas a c . De este modo el gas que fluye en los jets es ultra-relativista y su ecuación de estado es nuevamente $p = e/3$. La presión en tales ambientes es del orden de 10^{-5} Pa. El gas es transportado a lo largo del jet hasta el lóbulo de la radio-galaxia en donde es chocado. El choque es tan fuerte que la presión del gas al final del jet, es decir, la presión en el lóbulo, se eleva hasta 10^{-2} Pa.

Si introducimos una nube de gas interestelar en el gas chocado del lóbulo, la presión que se ejerce en su periferia será mayor a la densidad de energía e en la nube. En tal caso se genera una onda de choque ultra-relativista, como la estudiada en el capítulo IV.

En el caso relativista la implosión es claramente más violenta que en el caso Newtoniano. Las cantidades hidrodinámicas indican que la temperatura T inmediatamente después del choque es del orden de 10^{13} K. Con este valor y la densidad de partículas $n \approx 10^4 \text{ cm}^{-3}$ detrás del choque se calcula que el valor del tiempo de enfriamiento del gas chocado es

$$\tau_{enf} = 3.72 \times 10^{14} \text{ s.} \quad (13.6)$$

La velocidad del choque es en todo momento muy cercana a la velocidad de la luz. Del modelo desarrollado se tiene que el tiempo de colapso de la nube de 1 pc es $\tau_{col} = 3.4$ años $= 1.13 \times 10^8$ s lo cual es mucho menor al tiempo de enfriamiento del gas.

Suponiendo que la velocidad del borde de la nube R_n mantiene el valor dado en la frontera por la ecuación (10.4), calculamos que al momento del colapso el radio de la nube R_n ha reducido su tamaño a una fracción de su radio original $R_n(\tau_{col})$ de modo que

$$R_n(t=0) = \frac{R_n(\tau_{col})}{2\Gamma^2(\tau_{col})}, \quad (13.7)$$

en donde $\Gamma^2(\tau_{col})$ es el factor de Lorentz de la onda de choque en el momento en que fue generada. El cálculo numérico indica que para una nube de radio inicial $R_n(\tau_{col}) = 1$ pc, el radio final es $R_n(t=0) = 37600$ AU.

Los valores asintóticos de las cantidades hidrodinámicas en el gas chocado de una nube de hidrógeno típica se muestran en las figuras IV.1 y IV.2 y son, para $r = 37600$: $p_2 = 0.01$ Pa, $n_2 = 1500 \text{ cm}^{-3}$ con lo cual $T_2 = 1.81 \times 10^{12}$ K.

Para evaluar la posibilidad de formación estelar en esta región utilicemos nuevamente el criterio de Jeans. Aquí basta con contrastar la masa de Jeans para la nube antes y después del choque, utilizando la ecuación (13.8) se observa que

$$\frac{M_{J2}^2}{M_{J1}^2} = \frac{n_1 T_2^3}{T_1^3 n_2} \approx \frac{100(10^{12})^3}{1000(1500)} = 6.66 \times 10^{34}. \quad (13.8)$$

De modo que la masa de Jeans aumenta en gran proporción y el colapso gravitacional es, como en el caso clásico, imposible para la implosión adiabática considerada.

§14. Consideraciones finales

Debido a la gran cantidad de energía que se concentra en una nube de gas cuando es chocada desde todas direcciones es difícil lograr un colapso gravitacional posterior a la implosión. La acumulación de energía es, sin embargo, un signo de que la nube implotada será fuente de una gran cantidad de radiación confinada a una región muy pequeña.

Esta característica de las implosiones tanto Newtonianas como relativistas es una posible explicación de la radiación poco uniforme observada en los jets producidos en NAGs (ver figura 1). Explicaciones alternativas a dicha radiación implican choques del material en el jet con el gas frente a nubes arrastradas por el jet mismo y que se encuentran en equilibrio de presiones dentro de él (Blandford y Königl, 1979). Considerando la estabilidad y las temperaturas de las nubes de gas interestelar, tal acontecimiento es improbable en ambientes de presión tan alta como $P_{\text{jet}} \approx 10^{-5}$ Pa.

El argumento de implosión de nubes inmersas en los jets de NAGs se ve apoyado además por la reciente observación de la interacción de los jets de NAGs con nubes del medio circundante (Solórzano-Iñarrea et al., 2002). El modelo de la implosión se presenta como una alternativa para explicar las características aún no entendidas de la radiación a lo largo del chorro de una galaxia activa.

La misma energía acumulada en el centro de una nube al momento del colapso indica que la evolución del gas no termina en la implosión. Un seguimiento completo de la evolución de una nube sumergida en un gas a mayor presión implica el análisis de la explosión que sigue a la onda de choque convergente. Tal estudio queda fuera de los objetivos de este trabajo. Sin embargo, cabe mencionar que el movimiento auto-similar de esta etapa explosiva se desarrolla con el mismo índice de similaridad que en la etapa implosiva (Zel'dovich y Raizer, 2002).

El estudio completo de la implosión de nubes en ambientes de mayor presión es importante para establecer en forma clara el mecanismo de formación estelar inducida por supernovas. En el presente trabajo hemos aproximado el estudio de la implosión considerando que el gas fluye en forma adiabática y sin tomar en cuenta la radiación ni la gravedad del mismo. Hemos probado que los tiempos característicos a los cuales los efectos gravitacionales y radiativos tienen efecto son mucho mayores al tiempo dinámico de la implosión. Sin embargo, los modelos más sofisticados que incluyen tales efectos se presentan como una tarea a futuro.

Adicionalmente, la inevitable destrucción de una nube por la interacción con un choque externo nos lleva a considerar a futuro la influencia de campos magnéticos en el problema como lo sugieren Vanhala y Cameron (1998). Podemos decir que las soluciones presentadas para el flujo auto-similar en la implosión sirven como soluciones límite de una implosión real en sus últimas etapas.

Las aplicaciones del modelo presentado, sin embargo, no se reducen a los casos astrofísicos. Es importante notar que en los laboratorios terrestres, se reproduce el fenómeno llamado sonoluminiscencia. Tal fenómeno se presenta cuando pequeñas burbujas de aire en el agua son comprimidas por ondas de sonido en el agua. En la compresión de las burbujas se emite un rayo de luz que indica una gran concentración de energía en el centro de la burbuja. Se considera que sólo mediante una onda de choque implosiva es posible concentrar la energía suficiente para generar los destellos observados (Putterman, 1995).

En la búsqueda de ambientes propicios para inducir la fusión de varios núcleos, se ha experimentado con implosiones inducidas por láseres en condensaciones de gas con simetría cilíndrica y esférica. Siguiendo el mismo principio que produce la sonoluminiscencia en burbujas de aire, se han llevado a cabo experimentos recientes con resultados alentadores (Knauer et al., 2002). Una variante del análisis relativista presentado en esta tesis puede ser útil en la descripción paramétrica del flujo cercano al centro de la condensación.

Apéndice A

Análisis Dimensional

Una *cantidad adimensional* (Sedov, 1959) es aquella que conserva su mismo valor sin importar el sistema de unidades que se utilice en su medición. Por otro lado, una cantidad adimensional es aquella cuyo valor cambia según el sistema de unidades empleado en su medición.

Del conjunto de unidades básicas de medición (metro, kilogramo, segundo) se desprende una gran variedad de unidades derivadas (Joules, Newtons, etc.) que pueden escribirse como combinación de las primeras. A la expresión de las unidades de medición en términos de las unidades básicas se le llama *dimensión*.

Muchos problemas de la mecánica no-relativista implican cantidades derivadas de tres dimensiones fundamentales: la masa, la longitud y el tiempo. De esta manera, las dimensiones de una cantidad cualquiera q están dadas por

$$[q] \equiv L^{\lambda} M^{\mu} T^{\tau}$$

Donde L , M y T representan las dimensiones de longitud, masa y tiempo respectivamente. Supongamos que se tiene una ley física expresada como

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (\text{A.1})$$

donde a es una cantidad física dimensional que además es función de las cantidades dimensionales a_1, a_2, \dots, a_n . Esta relación funcional tiene la misma forma en cualquier sistema de unidades.

Supongamos que de las cantidades $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)$ sólo las primeras $k \leq n$ son dimensionalmente independientes. En otras palabras, ninguna a_m (con $1 \leq m \leq k$) puede escribirse como producto de las otras $k - 1$ cantidades[†]. Escribamos entonces las dimensiones de las *cantidades básicas* a_1, a_2, \dots, a_k , como

$$[a_1] = A_1, [a_2] = A_2, \dots$$

$$[a_k] = A_k.$$

[†] En particular, en el tratamiento tradicional de la mecánica se utilizan tres dimensiones independientes: la masa, la longitud y el tiempo.

Las restantes $n + 1 - k$ cantidades tienen dimensiones que pueden escribirse como potencias de las dimensiones de las k primeras cantidades independientes. En términos de las dimensiones esto es

$$\begin{aligned} [a] &= A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_k^{m_k}, \\ [a_{k+1}] &= A_1^{q_1} A_2^{q_2} \dots A_k^{q_k}, \\ &\vdots \\ [a_n] &= A_1^{p_1} A_2^{p_2} \dots A_k^{p_k}. \end{aligned}$$

Hagamos un cambio de unidades en el que las cantidades a_1, a_2, \dots, a_k cambien en factores $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ respectivamente. En este nuevo sistema las cantidades básicas se relacionan con las originales de la siguiente manera,

$$a'_1 = \alpha_1 a_1, \quad a'_2 = \alpha_2 a_2, \dots, \quad a'_k = \alpha_k a_k.$$

Las cantidades dependientes se transforman entonces como

$$\begin{aligned} a'_{k+1} &= \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_k^{q_k} a_{k+1}, \\ &\vdots \\ a'_n &= \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_k^{p_k} a_n, \\ a' &= \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k} a = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k} f(a_1, a_2, \dots, a_n), \end{aligned} \quad (\text{A.II})$$

En particular consideremos un cambio en el sistema tal que

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{a_2}, \dots, \quad \alpha_k = \frac{1}{a_k}.$$

Con esto hemos cambiado a un sistema de unidades en el que los primeros k argumentos de la función f son constantes e iguales a la unidad. La ecuación (A.II) puede escribirse como

$$\begin{aligned} a' &= \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k} a, \\ &= \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k} f(a_1, a_2, \dots, a_n), \\ &= \frac{1}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}} f(a_1, a_2, \dots, a_n), \end{aligned} \quad (\text{A.III})$$

Debido a que la relación (A.I) representa una ley física, su expresión matemática es invariante ante cambios de unidades y, por lo tanto, en este nuevo sistema toma el valor

$$a' = f(a'_1, a'_2, \dots, a'_k, a'_{k+1}, \dots, a'_n), \quad (\text{A.IV})$$

Al igualar las ecuaciones (A.III) y (A.IV) se obtiene

$$\Pi = f(1, 1, \dots, 1, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (\text{A.v})$$

donde las cantidades

$$\begin{aligned} \Pi &\equiv \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}}, \\ \Pi_1 &\equiv \frac{a_{k+1}}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_k^{q_k}}, \\ &\vdots \\ \Pi_{n-k} &\equiv \frac{a_n}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}}, \end{aligned}$$

son cantidades adimensionales.

La ecuación (A.v) como forma adimensional de la ley física (A.I) muestra que una relación entre $n+1$ cantidades dimensionales a, a_1, \dots, a_n se puede ser reducida a una relación de $n+1-k$ cantidades adimensionales (Sedov, 1959).

A este resultado del análisis dimensional se le conoce como *Teorema II* o teorema de Buckingham y demuestra además que cuando una cantidad adimensional está relacionada con una función de cantidades dimensionales, estas sólo pueden presentarse en forma de productos adimensionales. Más aún, cualquier relación con significado físico entre cantidades dimensionales puede transformarse a otra entre cantidades adimensionales sin perder su significado físico.

Bibliografía

- BEGELMAN, M. C., BLANDFORD, R. D. y REES, M. J., 1984. Theory of extragalactic radio sources. *Reviews of Modern Physics*, **56**, 255-351.
- BEST, P., LONGAIR, M. S. y ROTTGERING, H. J. A., 1996. Evolution of the aligned structures in $z \sim 1$ radio galaxies. *MNRAS*, **280**, L9-L12.
- BLANDFORD, R. y KÖNIGL, A., 1979. Relativistic jets as compact radio sources. *ApJ*, **232**, 34-48.
- BLANDFORD, R. D., 2000. Current issues. In *Cosmic Explosions: Tenth Astrophysics Conference. AIP Conference Proceedings, Vol. 522. College Park, Maryland, 11-13 Oct 1999. Edited by Stephen S. Holt and William W. Zhang. American Institute of Physics, 2000.* p.23-32, 23-32.
- BLANDFORD, R. D. y MCKEE, C. F., 1976. Fluid dynamics of relativistic blast waves. *Physics of Fluids*, **19**, 1130-1138.
- CANTO, J., RAGA, A. C. y BINETTE, L., 1989. On the structure of steady stellar jets : an analytic model. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, **17**, 65-74.
- CHANDRASEKHAR, S., 1989. *Stellar structure and stellar atmospheres*. Chicago : University of Chicago Press, 1989.
- ELTGROTH, P. G., 1972. Nonplanar Relativistic Flow. *Physics of Fluids*, **15**, 2140-2144.
- GUDERLEY, G., 1942. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderische. *Luftfahrtforschung*, **19**, 302-312.
- HIRSCHLER, T. y GRETLER, W., 2001. On the eigenvalue problem of imploding shock waves. *Zeitschrift angewandte Mathematik und Physik*, **52**, 151-166.
- KESSEL-DEYNET, O. y BURKERT, A., 2003. Radiation-driven implosion of molecular cloud cores. *MNRAS*, **338**, 545-554.
- KIMURA, T. y TOSA, M., 1990. Fragmentation of a converging shock. *MNRAS*, **245**, 365-369.
- KLEIN, R. I., MCKEE, C. F. y CORELLA, P., 1975. The interaction between the blast wave of a supernova remnant and interstellar clouds. *ApJ*, **195**, 715-725.

- KNAUER, J. P., GONCHAROV, V.Ñ., MCKENTY, P. W., SANGSTER, T. C., BETTI, R., GLEBOV, V. Y., MARSHALL, F. J., RADHA, P. B., STOECKL, C., FRENJE, J. A., LI, C. K., PETRASSO, R. D. Y SEGUIN, F. H., 2002. Improved Performance of Direct-Drive Implosions with a Laser-Shaped Adiat. *APS Meeting Abstracts*, 2012-+.
- LANDAU, L. D. Y LIFSHITZ, E. M., 1987. *Fluid Mechanics, Course on theoretical Physics V.6*. Pergamon Press, London, 2nd ed.
- LANDAU, L. D. Y LIFSHITZ, E. M., 1994. *The Classical Theory of Fields, Course on theoretical Physics V.2*. Pergamon Press, London, 4th ed.
- MASCIADRI, E., VELÁZQUEZ, P. F., RAGA, A. C., CANTÓ, J. Y NORIEGA-CRESPO, A., 2002. Analytic and Numerical Models for the Knots along the HH 111 Jet. *ApJ*, **573**, 260-269.
- MCKEE, C. F. Y COWIE, L., 1975. The interaction between the blast wave of a supernova remnant and interstellar clouds. *ApJ*, **195**, 715-725.
- MCKEE, C. F. Y HOLLENBACH, D. J., 1980. Interstellar shock waves. *Ann. Rev. Ast. & Ast.*, **18**, 219-262.
- MCKEE, C. R. Y COLGATE, S. A., 1973. Relativistic Shock Hydrodynamics. *ApJ*, **181**, 903-938.
- MENDOZA, S., 2000. *Shocks and Jets in Radio Galaxies and Quasars*. Ph.D. thesis, Cambridge, U.K.
- PUTTERMAN, S. J., 1995. Sonoluminescence - Sound Into Light. *Scientific American*, **272**, 46-+.
- REYNOLDS, R. J. Y OGDEN, P. M., 1978. Fabry-Perot observations of a large, expanding gas shell associated with Canis Major R1 and Canis Major OB1. *ApJ*, **224**, 94-+.
- SEDOV, L. I., 1959. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. Pergamon Press, London.
- SILK, J. Y SOLINGER, A., 1973. Galaxy Formation associated with Active Galaxies and the Binding of rich Clusters. *Nature Physical Science*, **244**, L9-L12.
- SILK, J. Y WYSE, R. F. G., 1993. Galaxy formation and the Hubble sequence. *Physics Reports*, **231**, 295-365.
- SOLÓRZANO-ÍNARREA, C., TADHUNTER, C.Ñ. Y AXON, D. J., 2002. Evidence for Jet-Cloud Interactions in High-Redshift Radio Galaxies. In *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica Conference Series*, 208-212.
- STANYUKOVICH, K. P., 1960. *Non-steady motion of continuous media*. Oxford University Press, Oxford, U.K.
- TAUB, A. H., 1967. Relativistic Hydrodynamics. In *Relativity Theory and Astrophysics. Vol.1: Relativity and Cosmology*, 170-+.

- TAYLOR, G. I., 1950. The Formation of a blast wave by a very intense explosion II. The atomic explosion of 1945. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, **201**, 175–186.
- TRIMBLE, V., 2000. The first explosions. In *Cosmic Explosions: Tenth Astrophysics Conference. AIP Conference Proceedings, Vol. 522. College Park, Maryland, 11-13 Oct 1999. Edited by Stephen S. Holt and William W. Zhang. American Institute of Physics, 2000.*, p.3-21, 3–21.
- VANHALA, H. A. T. Y CAMERON, A. G. W., 1998. Numerical Simulations of Triggered Star Formation. I. Collapse of Dense Molecular Cloud Cores. *ApJ*, **508**, 291–307.
- WEINBERG, S., 1972. *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. New York: Wiley.
- WELSH, R. L., 1967. Imploding shocks and detonations. *J. Fluid Mech.*, **29**, 61–79.
- WOODWARD, P. R., 1976. Shock-driven implosion of interstellar gas clouds and star formation. *ApJ*, **207**, 484–501.
- ZEL'DOVICH, I. B. Y RAIZER, Y. P., 2002. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Dover, New York.